Владимир В. Мазалов, Анна Н. Реттиева, Применение арбитражных схем для определения равновесий в динамических играх, *МТИП*, 2023, том 15, выпуск 2, 75–88

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.15, в.2, с. 75–88

УДК 519.833.2
ББК 22.18

ПРИМЕНЕНИЕ АРБИТРАЖНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОВЕСИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ*

Владимир В. Мазалов
Анна Н. Реттиева
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, annaret@krc.karelia.ru

Кооперативное поведение играет важную роль в динамичных играх, связанных с задачами управления ресурсами. Однако, стандартные подходы к определению оптимального поведения в асимметричных (различные коэффициенты дисконтирования игроков) и многокритериальных (векторные функции выигрыша игроков) динамических играх не применимы. В статье представлены методы, основанные на арбитражных схемах, построения кооперативных и некооперативных равновесий в таких играх. Кооперативные стратегии и выигрыши в асимметричных динамических играх получены с использованием арбитражной схемы Нэша, а для многокритериальных динамических игр применены модифицированные арбитражные процедуры. Для демонстрации предложенных подходов

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00051, https://rscf.ru/project/22-11-00051/.

исследована динамическая задача управления биоресурсами (модель «рыбных войн») с асимметричными игроками и векторными функциями выигрышей.

Ключевые слова: динамические игры, асимметричные игроки, многокритериальные игры, кооперативное равновесие, арбитражная схема.

Поступила в редакцию: 05.03.23 *После доработки*: 10.04.23 *Принята к публикации*: 15.05.23

1. Введение

Статья посвящена исследованию проблемы построения равновесий в асимметричных (различные коэффициенты дисконтирования игроков) и многокритериальных (векторные функции выигрышей игроков) динамических играх. Поскольку стандартные методы определения оптимального поведения в таких играх не применимы, то для построения кооперативных и некооперативных стратегий игроков используются различные модификации арбитражных схем.

Традиционно при исследовании кооперативного поведения в динамических играх предполагается использование одинаковых коэффициентов дисконтирования. Если же они различаются (в этом случае игроки являются несимметричными), то нет возможности определить выигрыши игроков при кооперации классическим способом суммирования индивидуальных выигрышей. Проблема построения кооперативного поведения в данном случае мало изучена, несмотря на то, что асимметрия распространена в реальных задачах. Например, страны, заключающие кооперативное соглашение, могут иметь различный уровень инфляции, политические и экологические условия и т.д.

В работе [1] для асимметричной динамической игры было предложено построение кооперативного выигрыша как взвешенной суммы индивидуальных (в непрерывном случае см. [8]). Однако, данный подход не стимулирует кооперацию, поскольку, как показано авторами, при некоторых параметрах задачи кооперативные выигрыши игроков будут меньше чем некооперативные. Другой метод был предложен в [4,14], где решение определяется с помощью арбитражной процедуры. Для построения и стимулирования кооперативного поведения в [6] была использована арбитражная схема Нэша. При применении данного метода нет необходимости в суммировании индивидуальных выигрышей несимметричных игроков. Более того, при кооперативном поведении, определенном с помощью арбитражного решения, выигрыши игроков всегда больше или равны выигрышам в равновесии по Нэшу.

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, наиболее приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такие ситуации нередко встречаются в экономических и экологических моделях. Например, предприятия хотят увеличить прибыль и уменьшить затраты на производство, в соглашениях по охране окружающей среды участники хотят увеличить производство и уменьшить затраты на очистку и т.д. Многокритериальный подход позволяет определить оптимальное поведение в таких ситуациях.

Для построения равновесий в статических многокритериальных играх [13] обычно используется оптимальность по Парето. Были предложены и другие концепции решения многокритериальных игр, например, идеальное равновесие по Нэшу [15] и Е-равновесие [9]. Однако, методы построения равновесий в статических многокритериальных играх не применимы в динамической постановке. Поэтому, в работах [10,11] были формализованы понятия многокритериальных некооперативного и кооперативного равновесий с использованием модифицированных арбитражных схем. В [12] было показано, что при использовании предложенных методов построения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх выигрыши игроков всегда больше или равны гарантированным выигрышам или выигрышам в равновесии по Нэшу.

Удобной для исследования процессов эксплуатации ресурсов в дискретном времени является модель «рыбных войн» [3], где используются степенная функция развития популяции и логарифмические функции «мгновенных» выигрышей игроков. Исследованию оптимального поведения участников в такой модели посвящено множество работ (см., например, [1,2,5,7]). В данной статье предложенные концепции решений [6,10,12] применены для задачи управления ресурсами типа «рыбных войн» с асимметричными игроками и векторными функциями выигрышей.

2. Асимметричные динамические игры

Рассмотрим динамическую игру управления возобновляемыми ресурсами с конечным горизонтом планирования $[1, m]$ и асимметричными игроками. Пусть n игроков эксплуатируют общий ресурс и используют различные коэффициенты дисконтирования, что можно интерпретировать как их различные предпочтения во времени.

Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt})\,,\ x_1 = x\,,\ t = 1, \dots, m\,, \tag{2.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер эксплуатируемого ресурса в момент времени t, $f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt})$ – функция развития возобновляемого ресурса, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени t, $i \in N = \{1, \dots, n\}$.

Каждый игрок $i \in N = \{1, \dots, n\}$ заинтересован в максимизации конечной суммы дисконтированных «мгновенных» выигрышей:

$$J_i = \sum_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i(u_{1t}, \dots, u_{nt}) \to \max_{u_{it} \geq 0}\,, \tag{2.2}$$

где $g_i(u_{1t}, \dots, u_{nt})$ – «мгновенная» прибыль игрока i в момент времени t, $0 < \delta_i < 1$ – коэффициент дисконтирования игрока i, $i \in N$.

Некооперативное равновесие в такой динамической игре определяется с использованием принципа Беллмана, а кооперативное поведение невозможно построить классическим способом суммирования индивидуальных выигрышей.

Обозначим $u_t^N = (u_{1t}^N, \dots, u_{nt}^N)$ – равновесие по Нэшу в задаче (2.1),(2.2), а соответствующие выигрыши в m-шаговой игре – $V_i^N(x, \delta_i)$, $i \in N$. Для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков предлагается использование арбитражной схемы Нэша. Таким образом, кооперативное поведение определяется из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned}
(V_1^c(x, \delta_1) - V_1^N(x, \delta_1)) \cdot \ldots \cdot (V_n^c(x, \delta_n) - V_n^N(x, \delta_n)) = \\
= (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t g_1(u_{1t}^c, \dots, u_{nt}^c) - V_1^N(x, \delta_1)) \cdot \ldots \\
\cdot (\sum_{t=1}^{m} \delta_n^t g_n(u_{1t}^c, \dots, u_{nt}^c) - V_n^N(x, \delta_n)) =
\end{aligned}$$

$$= \max_{u_{1t},\ldots,u_{nt}\geq 0}[(\sum_{t=1}^{m}\delta_1^t g_1(u_{1t},\ldots,u_{nt}) - V_1^N(x,\delta_1))\cdot\ldots$$
$$\cdot(\sum_{t=1}^{m}\delta_n^t g_n(u_{1t},\ldots,u_{nt}) - V_n^N(x,\delta_n))]\,, \qquad (2.3)$$

где $V_i^N(x,\delta_i)$ – некооперативные выигрыши, $i \in N$.

Продемонстрируем предложенную схему построения кооперативного равновесия для модели «рыбных войн» [3] с двумя несимметричными участниками. Динамика развития ресурса с учетом эксплуатации имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^{\alpha}\,,\ x_1 = x\,,\ t = 1,\ldots,m\,, \qquad (2.4)$$

где $x_t \geq 0$ – размер эксплуатируемого ресурса в момент времени t, $\varepsilon \in (0,1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0,1)$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени t, $i = 1,2$.

Выигрыши игроков представлены как

$$J_i = \sum_{t=1}^{m}\delta_i^t \ln(u_{it})\,, \qquad (2.5)$$

где $0 < \delta_i < 1$ – коэффициент дисконтирования игрока i, $i = 1,2$.

Используя [5,6], запишем оптимальное некооперативное решение асимметричной модели «рыбных войн».

Теорема 2.1. *Равновесные по Нэшу стратегии в динамической игре (2.4), (2.5) имеют вид*

$$u_{1t}^N = \frac{a_1\sum\limits_{j=1}^{t} a_2^j}{\sum\limits_{j=0}^{t} a_1^j \sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j - 1}\varepsilon x_t\,,\ u_{2t}^N = \frac{a_2\sum\limits_{j=1}^{t} a_1^j}{\sum\limits_{j=0}^{t} a_1^j \sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j - 1}\varepsilon x_t\,,\ t = 1,\ldots,m\,,$$

где $a_i = \alpha\delta_i$, $i = 1,2$.

Выигрыши игроков в равновесие по Нэшу представлены как

$$V_i^N(x,\delta_i) = \sum_{j=0}^{m}(a_i)^j \ln x + \sum_{j=1}^{m}(\delta_i)^{m-j}Q_i^j - (\delta_i)^m \ln 2\,, \qquad (2.6)$$

где

$$Q_i^j = \ln\Big[\Big(\frac{\varepsilon \sum\limits_{k=1}^{j} a_l^k}{\sum\limits_{k=0}^{j-1} a_1^k \sum\limits_{k=0}^{j-1} a_2^k - 1}\Big)^{\sum\limits_{k=0}^{j} a_i^k} \Big(\sum_{k=1}^{j} a_i^k\Big)^{\sum\limits_{k=1}^{j} a_i^k}\Big]\,, \; i,l = 1,2\,, \; i \neq l\,.$$

Согласно (2.3) для определения кооперативных стратегий и выигрышей решается следующая задача:

$$\Big(\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t \ln(u_{1t}) - V_1^N(x,\delta_1)\Big)\Big(\sum_{t=1}^{m} \delta_2^t \ln(u_{2t}) - V_2^N(x,\delta_2)\Big) \to \max_{u_{1t},u_{2t}\geq 0}\,, \quad (2.7)$$

где $V_i^N(x,\delta_i)$ – некооперативные выигрыши, определенные в (2.6).

Теорема 2.2. *Кооперативные стратегии игроков в динамической игре (2.4), (2.5) имеют вид* $u_{it}^c = \gamma_{im-t}^c x_t$, $i = 1,2$, *где*

$$\gamma_{1t}^c = \frac{\varepsilon \gamma_{11}^c a_2^{t-1}(1+a_2)}{\varepsilon a_1^{t-1} \sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j + \gamma_{11}^c\big((a_2^{t-1}+a_2^t)\sum\limits_{j=0}^{t} a_1^j - (a_1^{t-1}+a_1^t)\sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j\big)}\,,$$

$$\gamma_{2t}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{1t}^c \sum\limits_{j=0}^{t} a_1^j}{\sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j}\,, \; t = 1,\ldots,m\,, \quad (2.8)$$

а стратегия первого игрока на последнем шаге γ_{11}^c *определяется из уравнения*

$$a_1^{m-1}(\varepsilon - \gamma_{11}^c(1+a_1)) \sum_{j=1}^{m} \delta_1^{m-j}\Big(\ln(\gamma_{1j}^c) + \sum_{i=1}^{j} a_1^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) - Q_1^j\Big) =$$

$$= a_2^{m-1}(1+a_2)\gamma_{11}^c \sum_{j=1}^{m} \delta_2^{m-j}\Big(\ln(\gamma_{2j}^c) + \sum_{i=1}^{j} a_2^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) - Q_2^j\Big)\,.$$

3. Многокритериальные динамические игры

Рассмотрим многокритериальную динамическую игру, в которой n игроков эксплуатируют общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть k различных целей. Динамика развития ресурса имеет вид (2.1), а вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования $[1, m]$ представлены как

$$J_i(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = \begin{pmatrix} J_i^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \\ \ldots \\ J_i^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \end{pmatrix}, \, i \in N\,, \tag{3.1}$$

где $g_i^j(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \geq 0$ – функции «мгновенного» выигрыша, $j = 1, \ldots, k$, $i \in N$, $\delta_i \in (0, 1)$ — коэффициент дисконтирования игрока i, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому, сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво. В работе [10] были предложены различные варианты построения гарантированных выигрышей и показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников способом является определение гарантированных выигрышей как равновесных по Нэшу решений динамических игр с соответствующими критериями всех участников, а именно $\langle x, N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^j\}_{i=1}^n \rangle$, $j = 1, \ldots, k$.

Для построения функций выигрыша игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$H_1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = (J_1^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_1^1) \cdot \ldots \cdot (J_1^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_1^k)\,,$$
$$\ldots\,,$$
$$H_n(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = (J_n^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_n^1) \cdot \ldots \cdot (J_n^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_n^k)\,,$$

где G_i^j – гарантированные выигрыши, $i \in N$, $j = 1, \ldots, k$.

Определение 3.1. *Профиль стратегий $u_t^N = (u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N)$ называется многокритериальным равновесием по Нэшу [10] в игре (2.1), (3.1), если*

$$H_i(u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N) \geq H_i(u_{1t}^N, \ldots, u_{i-1t}^N, u_{it}, u_{i+1t}^N, \ldots, u_{nt}^N) \; \forall u_{it} \in U_i\,, \; i \in N\,. \tag{3.2}$$

Следовательно, как и в классическом равновесии по Нэшу игрокам не выгодно отклоняться от равновесных стратегий. При этом каждый игрок стремится максимизировать произведение расстояний до гарантированных выигрышей.

Для определения кооперативного поведения используется модифицированная арбитражная схема [12]. При этом в качестве точек статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные игроками при использовании многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий u_{it}^N, $i \in N$.

Для построения кооперативных стратегий и выигрышей игроков решается следующая задача:

$$
\begin{aligned}
&(V_1^{1c}-J_1^{1N})\cdot\ldots\cdot(V_1^{kc}-J_1^{kN})+\ldots+(V_n^{1c}-J_n^{1N})\cdot\ldots\cdot(V_n^{kc}-J_n^{kN})=\\
&=(\sum_{t=1}^{m}\delta_1^t g_1^1(u_{1t}^c,\ldots,u_{nt}^c)-J_1^{1N})\cdot\ldots\cdot(\sum_{t=1}^{m}\delta_1^t g_1^k(u_{1t}^c,\ldots,u_{nt}^c)-J_1^{kN})+\ldots+\\
&+(\sum_{t=1}^{m}\delta_n^t g_n^1(u_{1t}^c,\ldots,u_{nt}^c)-J_n^{1N})\cdot\ldots\cdot(\sum_{t=1}^{m}\delta_n^t g_n^k(u_{1t}^c,\ldots,u_{nt}^c)-J_n^{kN})=\\
&=\max_{u_{1t},\ldots,u_{nt}\geq 0}\Big[(\sum_{t=1}^{m}\delta_1^t g_1^1(u_{1t},\ldots,u_{nt})-J_1^{1N})\cdot\ldots\\
&\cdot(\sum_{t=1}^{m}\delta_1^t g_1^k(u_{1t},\ldots,u_{nt})-J_1^{kN})+\ldots+(\sum_{t=1}^{m}\delta_n^t g_n^1(u_{1t},\ldots,u_{nt})-J_n^{1N})\cdot\ldots\\
&\cdot(\sum_{t=1}^{m}\delta_n^t g_n^k(u_{1t},\ldots,u_{nt})-J_n^{kN})\Big], \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

где $J_i^{jN}=J_i^j(u_{1t}^N,\ldots,u_{nt}^N)$ – выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу, $i\in N$, $j=1,\ldots,k$.

Определение 3.2. *Профиль стратегий $u_t=(u_{1t}^c,\ldots,u_{nt}^c)$ называется рациональным многокритериальным кооперативным равновесием [12] в игре (2.1), (3.1), если является решением задачи (3.3).*

Этот подход аналогичен классическому определению кооперативного равновесия, поскольку игроки стремятся максимизировать сумму своих индивидуальных выигрышей, выраженных в произведении расстояний до некооперативных выигрышей. Предложенное равновесие было названо рациональным, поскольку кооперативные выигрыши игроков, определенные как решение задачи (3.3), всегда больше или равны многокритериальным равновесным по Нэшу выигрышам, т.е. выполнены условия индивидуальной рациональности [12].

Рассмотрим модель «рыбных войн» с динамикой (2.4) в бикритериальной постановке. Предположим, что кроме своих эгоистических целей, заключающихся в максимизации дохода от продажи ресурса, игроки заботятся об окружающей среде, стремясь максимизировать общий размер возобновляемого ресурса. Таким образом, векторные функции выигрышей игроков на конечном горизонте планирования $[1, m]$ примут вид

$$J_i(u_{1t}, u_{2t}) = \begin{pmatrix} J_i^1(u_{1t}, u_{2t}) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t \ln(u_{it}) \\ J_i^2(u_{1t}, u_{2t}) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t \ln(x_t) \end{pmatrix}, \ i = 1, 2\,, \tag{3.4}$$

где x_t удовлетворяет динамике (2.4), $\delta_i \in (0, 1)$ — коэффициент дисконтирования игрока i, $i = 1, 2$.

Начнем с построения гарантированных выигрышей. G_1^1, G_2^1 являются равновесными по Нэшу выигрышами в динамической игре с первыми критериями игроков $\langle x, N, \{U_i\}_{i=1}^2, \{J_i^1\}_{i=1}^2 \rangle$. Равновесие по Нэшу в этой игре определено в Теореме 1, следовательно, гарантированные выигрыши примут вид

$$G_1^1 = A_1 \ln x + B_1\,, \ G_2^1 = A_2 \ln x + B_2\,, \tag{3.5}$$

где $A_i = \sum\limits_{j=0}^{m} a_i^j$, $B_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_i^{m-j} Q_i^j - \delta_i^m \ln 2$, $i = 1, 2$.

Аналогично, определяя равновесие по Нэшу в игре со вторыми критериями $\langle x, N, \{U_i\}_{i=1}^2, \{J_i^2\}_{i=1}^2 \rangle$, получим вторые гарантированные выигрыши в виде

$$G_1^2 = A_1 \ln x\,, \ G_2^2 = A_2 \ln x\,. \tag{3.6}$$

Согласно определению 1 для построения многокритериального равновесия по Нэшу необходимо решить следующую задачу:

$$(J_1^1(u_{1t}, u_{2t}) - G_1^1)(J_1^2(u_{1t}, u_{2t}) - G_1^2) = (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t \ln(u_{1t}) - A_1 \ln x - B_1) \cdot$$
$$\cdot (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t \ln x_t - A_1 \ln x) \to \max_{u_{1t}}\,,$$

$$(J_2^1(u_{1t},u_{2t})-G_2^1)(J_2^2(u_{1t},u_{2t})-G_2^2)=(\sum_{t=1}^m \delta_2^t\ln(u_{2t})-A_2\ln x-B_2)\cdot$$
$$\cdot(\sum_{t=1}^m \delta_2^t\ln x_t-A_2\ln x)\to\max_{u_{2t}}\,.$$

Рассматривая процесс последовательно, начиная с одношаговой игры и до m-шаговой, и ища оптимальные стратегии в линейном виде, получим следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Многокритериальные равновесные по Нэшу стратегии в динамической игре (2.4), (3.4) имеют вид* $u_{it}^N=\gamma_{im-t}^N x_t$, $i=1,2$, *где для* $t=2,\dots,m$

$$\gamma_{1t}^N=\frac{\varepsilon\gamma_{11}^N\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_2^j}{\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_1^j\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_2^j-\gamma_{11}^N\sum\limits_{i=1}^{t-1}a_1^i\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_2^j-\gamma_{21}^N\sum\limits_{i=1}^{t-1}a_2^i\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_1^j},\ \gamma_{2t}=\frac{\gamma_{21}^N\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_1^j}{\gamma_{11}^N\sum\limits_{j=0}^{t-1}a_2^j}\gamma_{1t}^N, \tag{3.7}$$

а стратегии игроков на последнем шаге γ_{11}^N, γ_{21}^N *определяются из уравнений*

$$(\varepsilon-\gamma_{11}^N-\gamma_{21}^N)\sum_{j=1}^m\delta_1^j\sum_{i=1}^j a_1^i\ln(\varepsilon-\gamma_{1j}^N-\gamma_{2j}^N)=$$
$$=a_1\gamma_{11}^N\sum_{j=1}^m\delta_1^j(\ln(\gamma_{1j}^N)+2\sum_{i=1}^j a_1^i\ln(\varepsilon-\gamma_{1j}^N-\gamma_{2j}^N)-Q_1^j)\,,$$
$$(\varepsilon-\gamma_{11}^N-\gamma_{21}^N)\sum_{j=1}^m\delta_2^j\sum_{i=1}^j a_2^i\ln(\varepsilon-\gamma_{1j}^N-\gamma_{2j}^N)=$$
$$=a_2\gamma_{21}^N\sum_{j=1}^m\delta_2^j(\ln(\gamma_{2j}^N)+2\sum_{i=1}^j a_2^i\ln(\varepsilon-\gamma_{1j}^N-\gamma_{2j}^N)-Q_2^j)\,. \tag{3.8}$$

Для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков используем модифицированную арбитражную схему, где многокритериальные равновесные по Нэшу выигрыши выступают в роли точек статус-кво. В соответствии с (3.7) определим выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу

$$J_i^{1N} = \sum_{t=1}^{m} \delta_i^t \ln(\gamma_{im-t}^N x_t) = A_i \ln x + C_i + D_i\,,$$

$$J_i^{2N} = \sum_{t=1}^{m} \delta_i^t \ln(x_t) = A_i \ln x + D_i\,, \qquad (3.9)$$

где

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} \delta_i^j \ln(\gamma_{ij}^N) - \delta_i^m \ln 2\,,\ D_i = \sum_{j=1}^{m} \delta_i^j \sum_{l=1}^{j} a_i^l \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^N - \gamma_{2j}^N)\,.$$

Согласно определению 2 для построения рационального многокритериального кооперативного равновесия необходимо решить следующую задачу:

$$(J_1^1(u_{1t}, u_{2t}) - J_1^{1N})(J_1^2(u_{1t}, u_{2t}) - J_1^{2N}) +$$
$$+(J_2^1(u_{1t}, u_{2t}) - J_2^{1N})(J_2^2(u_{1t}, u_{2t}) - J_2^{2N}) =$$
$$= (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t \ln(u_{1t}) - A_1 \ln x - C_1 - D_1)(\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t \ln x_t - A_1 \ln x - D_1) +$$
$$+(\sum_{t=1}^{m} \delta_2^t \ln(u_{2t}) - A_2 \ln x - C_2 - D_2)(\sum_{t=1}^{m} \delta_2^t \ln x_t - A_2 \ln x - D_2) \to \max_{u_{1t}, u_{2t}}\,.$$

Теорема 3.2. *Многокритериальные рациональные кооперативные стратегии в динамической игре (2.4), (3.4) имеют вид* $u_{it}^c = \gamma_{im-t}^c x_t$, $i = 1, 2$, *где*

$$\gamma_{1t}^c = \frac{\varepsilon a_2^{t-1} \gamma_{11}^c (1 + a_2)}{\varepsilon a_1^{t-1} \sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j - \gamma_{11}^c (a_1^{t-1} \sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j - a_2^{t-1}(1 + a_2))}\,,\ t = 2, \ldots, m\,,$$

$$\gamma_{2t}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{1t}^c}{\sum\limits_{j=0}^{t} a_2^j}\,,\ t = 1, \ldots, m\,, \qquad (3.10)$$

а стратегия первого игрока на последнем шаге γ_{11}^c *определяется из уравнения*

$$a_1 \gamma_{21}^c (\sum_{j=1}^{m} \delta_1^j \sum_{i=1}^{j} a_1^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) - D_1) =$$
$$= a_2 \gamma_{11}^c (\sum_{j=1}^{m} \delta_2^j \sum_{i=1}^{j} a_2^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) - D_2)\,.$$

4. Заключение

В статье представлены результаты применения конструкций арбитражных схем для определения равновесий в асимметричных и многокритериальных динамических играх. Для построения и стимулирования кооперативного поведения в динамической игре, где игроки используют различные коэффициенты дисконтирования, предложено использование арбитражной схемы Нэша. Представлены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх с асимметричными участниками. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы (произведения Нэша), а для определения кооперативного – арбитражная схема для всего периода продолжения игры. Оптимальное поведение построено в аналитическом виде для модели «рыбных войн» с асимметричными игроками и векторными функциями выигрышей. Предложенные концепции построения равновесий могут быть использованы для решения экономических, экологических, биологических и других динамических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Breton M., Keoula M.Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Ecological Economics. 2014. V. 97. P. 209–223.

2. Fisher R.D., Mirman L.J. *Strategic dynamic interactions: fish wars* // J. Economics Dynamics Control. 1992. V. 16. P. 267–287.

3. Levhari D., Mirman L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // The Bell J. of Economics. 1980. V. 11. N 1. P. 322–334.

4. Marin-Solano J. *Group inefficiency in a common property resource game with asymmetric players* // Economics Letters. 2015. V. 136. P. 214–217.

5. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars and cooperation maintenance* // Ecological Modelling. 2010. V. 221. P. 1545–1553.

6. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Asymmetry in a cooperative bioresource management problem* // In: Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology. Nova Science Publishers. 2015. P. 113–152.

7. Nowak A. *A note on an equilibrium in the great fish war game* // Economics Bulletin. 2006. V. 17(2). P. 1–10.

8. Plourde C.G., Yeung D. *Harvesting of a transboundary replenishable fish stock: a noncooperative game solution* // Marine Resource Economics. 1989. V. 6. P. 57–70.

9. Pusillo L., Tijs S. *E-equilibria for multicriteria games* // Annals of ISDG. 2013. V. 12. P. 217–228.

10. Rettieva A.N. *Multicriteria dynamic games* // International Game Theory Review. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.

11. Rettieva A.N. *Dynamic multicriteria games with finite horizon* // Mathematics. 2018. Vol. 6(9). P. 156.

12. Rettieva A.N. *Dynamic multicriteria games with asymmetric players* // Journal of Global Optimization. 2022. V. 83. P. 521–537.

13. Shapley L.S. *Equilibrium points in games with vector payoffs* // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6. P. 57–61.

14. Sorger G. *Recursive Nash bargaining over a productive assert* // J. of Economic Dynamics & Control. 2006. V. 30. P. 2637–2659.

15. Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. *Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games* // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. V. 52. P. 65–77.

APPLICATION OF BARGAINING SCHEMES FOR EQUILIBRIUM DETERMINATION IN DYNAMIC GAMES

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., professor (vmazalov@krc.karelia.ru),
Anna N. Rettieva, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., docent (annaret@krc.karelia.ru).

Abstract: Cooperation plays an important role in dynamic games related to resource management problems. To construct the cooperative behavior in asymmetric (when players possess different discount factors) and multicriteria (when players have vector payoff functions) dynamic games the standard approaches are not applicable. The paper presents the methods based on bargaining schemes to determine the cooperative equilibria in such games. The cooperative strategies and payoffs in asymmetric dynamic games are obtained via the Nash bargaining scheme, while for the multicriteria dynamic games the modified bargaining schemes are applied. To illustrated the presented approaches, dynamic bioresource management problems (fish wars problem) with asymmetric players and vector payoff functions is investigated.

Keywords: dynamic games, asymmetric players, multicriteria games, cooperative equilibrium, bargaining scheme.