ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1640–1652

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО НЕЛИНЕЙНОМУ НЕСТАЦИОНАРНОМУ ГИБРИДНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

 А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: a.platonov@spbu.ru

Поступила в редакцию 21.06.2024 г., после доработки 09.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследовано влияние нестационарных возмущений на устойчивость нелинейных неавтономных систем с переключениями и импульсными эффектами. Получены достаточные условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость заданного положения равновесия исходной системы, а также установлены ограничения, при выполнении которых асимптотическая устойчивость сохраняется при действующих на систему возмущениях. Отметим, что нестационарности, присутствующие как в самой системе, так и в возмущениях, могут описываться неограниченными по времени функциями, а также функциями, сколь угодно близко приближающимися к нулю. Предполагаем, что базовая система является однородной по вектору состояния. Для нахождения требуемых результатов использован второй метод Ляпунова в сочетании с теорией дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: нестационарная импульсная система с переключениями, возмущение, устойчивость

DOI: 10.31857/S0374064124120056, EDN: IPHQCC

ВВЕДЕНИЕ

Любая математическая модель лишь приближённо описывает реальные процессы в окружающем мире. Поэтому актуальна проблема робастности модели, т.е. сохранения определённых её свойств при каких-либо изменениях. В частности, многие работы в области теории управления посвящены вопросу сохранения устойчивости заданного режима функционирования динамической системы при действующих возмущениях. Первые теоремы об устойчивости по линейному приближению были сформулированы А.М. Ляпуновым. Системы нелинейного приближения применялись в работах И.Г. Малкина, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова и других авторов (см., например, [1, гл. 6]). Исследование устойчивости значительно усложняется, если как сама система, так и влияющие на неё возмущения нестационарны. Особенно интересен случай, когда для описания нестационарностей, присутствующих в системе и в возмущениях, используются неограниченные по времени или, наоборот, не отделимые от нуля функции. Для анализа устойчивости нелинейных нестационарных возмущённых систем обычно используют второй метод Ляпунова. С помощью подобранных функций Ляпунова, как правило, получают результат, заключающийся в том, что устойчивость будет сохраняться, если вклад возмущений в динамику системы в каком-то смысле меньше вклада слагаемых, входящих в невозмущённую (номинальную) систему.

В последние десятилетия наблюдается большой интерес к гибридным системам, сочетающим в себе свойства как непрерывных, так и дискретных моделей. Например, во многих работах исследовалось влияние на устойчивость переключений и импульсных воздействий [2, 3]. Переключения заключаются в том, что в определённые моменты времени система резко меняет свою структуру, решения системы при этом остаются непрерывными. Импульсы приводят к скачкообразному разрыву решений. Переключения и импульсы могут вызываться резкими внешними воздействиями на систему. Они также могут быть частью стратегии управления системой. Указанные эффекты часто существенно меняют динамические характеристики решений системы, такие как устойчивость, область притяжения, скорость переходных процессов и т.д. Соответственно условия, наложенные на закон переключений/импульсов, будут оказывать влияние и на искомые ограничения, которым должны удовлетворять возмущения для обеспечения асимптотической устойчивости. Нестационарным гибридным системам посвящены работы [4–8].

В настоящей статье в качестве номинальной системы выбрана нестационарная однородная система, подверженная переключениям и импульсным воздействиям. Такой выбор обусловлен лишь тем, что для однородных систем хорошо развиты методы построения подходящих функций Ляпунова, хорошо изучены свойства таких функций. Поэтому однородные системы (дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные) широко применяются в современной теории управления [9–13]. Свойство однородности позволяет получать различные глобальные результаты в фазовом пространстве системы. В то же время отметим, что для многих неоднородных систем построенные функции Ляпунова удовлетворяют оценкам того же вида, что и для однородных систем, только в локальной области фазового пространства. Таким образом, результаты, установленные в данной работе, допускают распространение на более широкие классы систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана система с переключениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\sigma(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор состояния; $\sigma = \sigma(t)\colon [0, +\infty) \to Q = \{1, \ldots, N\}$ — кусочно-постоянная функция, задающая закон переключения в системе; элементы векторов $\mathbf{F}_s(t, \mathbf{x})$ непрерывны относительно $t \geqslant 0$ и непрерывно дифференцируемы относительно $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}_s(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, $s = \overline{1, N}$.

Система (1) описывает переключения между подсистемами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}), \quad s = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Кроме того, предположим, что решения системы (1) подвержены импульсным воздействиям

$$\mathbf{x}(\tau_i^+) = \mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x}(\tau_i^-)), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Здесь $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — моменты импульсов; $\mathbf{x}(\tau_i^+)$ и $\mathbf{x}(\tau_i^-)$ — правостороннее и левостороннее значения рассматриваемого решения системы (1) в точке τ_i; непрерывная при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функция $\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})$ определяет величину скачка решения в момент времени τ_i, $\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $i \in \mathbb{N}$. Далее под решением гибридной системы (1), (3) будем понимать правосторонне непрерывную функцию $(\mathbf{x}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_i^+),\ i \in \mathbb{N})$.

Не умаляя общности, будем считать, что моменты переключений в системе (1) совпадают с моментами импульсов, т.е. они также задаются последовательностью $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. В самом деле, если в какой-то момент времени τ_i происходит только лишь переключение режима в системе (1), то можно считать, что в этот момент произошло и импульсное воздействие с нулевой величиной скачка решения ($\mathbf{x}(\tau_i^+)=\mathbf{x}(\tau_i^-)$). И наоборот, если в момент τ_i происходит только лишь импульсное воздействие, то можно считать, что произошло и переключение некоторого режима в системе (1) на самого себя ($\sigma(\tau_i^-)=\sigma(\tau_i^+)$).

Следуя стандартным предположениям [2, гл. 1–3], полагаем, что общее количество элементов последовательности $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ на луче $[0,+\infty)$ бесконечно, в то время как на любом конечном промежутке времени их число конечно; функцию $\sigma(t)$ рассматриваем как правосторонне непрерывную при $t\geqslant 0$.

Пусть нулевое решение системы (1), (3) асимптотически устойчиво, однако система (1) подвергается некоторым возмущающим воздействиям

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}_\sigma(t,\mathbf{x})+\mathbf{G}(t,\mathbf{x}). \tag{4}$$

Здесь векторная функция $\mathbf{G}(t,\mathbf{x})$ определена в области

$$t\geqslant 0, \quad \|\mathbf{x}\|<H \quad (H=\mathrm{const}>0), \tag{5}$$

и $\mathbf{G}(t,\mathbf{0})\equiv\mathbf{0}$. Полагаем, что на временны́х интервалах $[\tau_i,\tau_{i+1})$, $i=0,1,\ldots$, выполнены условия, гарантирующие существование и единственность решений задачи Коши для системы (4), а также их непрерывную зависимость от начальных данных. Под нормой $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора.

Замечание 1. На каждом временно́м промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$ между последовательными моментами переключений/импульсов работа рассматриваемой гибридной системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, $i=0,1,\ldots$ Поэтому для обеспечения существования, единственности решений и их непрерывной зависимости от начальных данных на этих промежутках можно использовать стандартные теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями. В моменты переключений/импульсов построенные куски решений (если они продолжимы до соответствующих моментов) "склеиваются" непрерывным образом (при переключениях) или с некоторым сдвигом, задаваемым условием (3) (при импульсах). Согласно предположениям, сделанным относительно функций $\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})$, $i\in\mathbb{N}$, нулевое решение системы (4), (3) будет обладать свойством интегральной непрерывности на любом конечном промежутке времени. Заметим, что возмущения в системе также могут иметь переменную структуру (переключаться с одного режима на другой).

Возникает задача — определить ограничения на возмущения, при выполнении которых нулевое решение системы (4), (3) сохраняет асимптотическую устойчивость. Эти ограничения будут, вообще говоря, зависеть от условий, наложенных на закон переключений и импульсных воздействий.

В настоящей статье будем предполагать, что имеется полная информация о законе переключений/импульсов. В то же время отметим, что применяемые в работе подходы можно использовать и в случае отсутствия такой полной информации для установления ограничений на длины промежутков между последовательными переключениями/импульсами и на величины импульсов, гарантирующих асимптотическую устойчивость.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Предположим, что функции $\mathbf{F}_1(t,\mathbf{x})$, $\ldots$, $\mathbf{F}_N(t,\mathbf{x})$ в системе (1) являются однородными относительно переменной $\mathbf{x}$ порядка $\mu>1$, где μ — рациональное число с нечётным знаменателем.

Функцию Ляпунова $V_s(\mathbf{x})$ для s-й подсистемы из семейства (2) будем искать в виде положительно определённой непрерывно дифференцируемой при $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ однородной функции порядка $\gamma>1$, $s=\overline{1,N}$. Тогда [1, с. 224–226] при $t\geqslant 0$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ получим оценки

$$a_{1s}\|\mathbf{x}\|^\gamma\leqslant V_s(\mathbf{x})\leqslant a_{2s}\|\mathbf{x}\|^\gamma, \tag{6}$$

$$\left\|\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right\|\leqslant a_{3s}\|\mathbf{x}\|^{\gamma-1}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\mathbf{F}_s(t,\mathbf{x})\leqslant a_{4s}(t)\|\mathbf{x}\|^{\gamma-1+\mu}. \tag{8}$$

Здесь a_{1s}, a_{2s}, a_{3s} — некоторые положительные постоянные, $a_{4s}(t)$ — непрерывные при $t\geqslant 0$ функции, $s=\overline{1,N}$.

Используя оценки (6)–(8), приходим к дифференциальным неравенствам

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\mathbf{F}_s(t,\mathbf{x})\leqslant \alpha_s(t)V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}), \tag{9}$$

где $\rho=(\mu-1)/\gamma$, $\alpha_s(t)=a_{2s}^{-(1+\rho)}a_{4s}(t)$, если $a_{4s}(t)<0$, и $\alpha_s(t)=a_{1s}^{-(1+\rho)}a_{4s}(t)$, если $a_{4s}(t)\geqslant 0$, $s=\overline{1,N}$.

Замечание 2. Проблема построения подходящих функций Ляпунова, удовлетворяющих требованиям той или иной теоремы об устойчивости или неустойчивости, для однородных систем, как стационарных, так и нестационарных, исследовалась во многих работах (см., например, [1, 14]). В то же время отметим, что дифференциальные неравенства вида (9) могут быть получены в окрестности начала координат для широкого класса нелинейных систем, не являющихся, вообще говоря, однородными. Поэтому сделанное предположение об однородности подсистем (2) облегчает анализ системы, но не является принципиальным. Далее для установления нужных результатов будут использоваться только оценки на функции Ляпунова и их производные, а не их явный вид.

Найдём такое $\omega\geqslant 1$, что при всех $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ будут иметь место неравенства

$$V_s(\mathbf{x})\leqslant\omega V_j(\mathbf{x}),\quad s,j=\overline{1,N}.$$

Предположим, что существуют такие постоянные $c_i>0$, что при $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})\|\leqslant c_i\|\mathbf{x}\|,\quad i\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что если $c_i<1$, то импульсное воздействие в момент времени τ_i благотворно влияет на свойство устойчивости нулевого решения системы (1), (3), т.е. этот импульс может рассматриваться как элемент стабилизирующего управления. И, напротив, если $c_i>1$, то соответствующий импульс будет оказывать негативное влияние на устойчивость.

При $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ получим

$$V_{\sigma(\tau_i^+)}(\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x}))\leqslant\varkappa_i V_{\sigma(\tau_i^-)}(\mathbf{x}),\quad i\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Здесь $\varkappa_i=a_2c_i^\gamma\omega/a_1$, $a_2=\max_{s\in Q}a_{2s}$, $a_1=\min_{s\in Q}a_{1s}$.

Обозначим для краткости записи $J(a,b)=-\int_a^b\alpha_{\sigma(\tau)}(\tau)\,d\tau$, где $b\geqslant a\geqslant 0$.

Для произвольных моментов времени $t\geqslant t_0\geqslant 0$ можно найти такое целое неотрицательное число k и натуральное число m, что $t_0\in[\tau_{m-1},\tau_m)$ и $t\in[\tau_{m+k-1},\tau_{m+k})$. Таким образом, величина $m=m(t_0)$ определяется выбором начального значения t_0, а величина $k=k(t_0,t)$ равна числу моментов переключений/импульсов $\{\tau_i\}$ на промежутке $[t_0,t]$.

Построим вспомогательные функции $\varphi(t_0,t)$ и $\psi(t_0,t)$ по следующему правилу:

$$\varphi(t_0,t)=J(t_0,t) \quad \text{и} \quad \psi(t_0,t)=1 \quad \text{при} \quad k=0,$$

$$\varphi(t_0,t)=\varkappa_m^{-\rho}J(t_0,\tau_m)+J(\tau_m,t) \quad \text{и} \quad \psi(t_0,t)=\varkappa_m^{-\rho} \quad \text{при} \quad k=1,$$

$$\varphi(t_0,t)=(\varkappa_m\ldots\varkappa_{m+k-1})^{-\rho}J(t_0,\tau_m)+\sum_{j=1}^{k-1}(\varkappa_{m+j}\ldots\varkappa_{m+k-1})^{-\rho}J(\tau_{m+j-1},\tau_{m+j})+J(\tau_{m+k-1},t)$$

$$\text{и} \quad \psi(t_0,t)=(\varkappa_m\ldots\varkappa_{m+k-1})^{-\rho} \quad \text{при} \quad k=2,3,\ldots$$

Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), (3), выходящее в момент времени t_0 из точки $\mathbf{x}_0$. Интегрируя дифференциальные неравенства (9) с учётом (10), нетрудно показать (см., например, [8]), что если решение $\mathbf{x}(t)$ существует на промежутке $[t_0,t]$ (не уходит на бесконечность), то на этом промежутке будет справедлива оценка

$$V_{\sigma(t)}^{-\rho}(\mathbf{x}(t))\geqslant\psi(t_0,t)V_{\sigma(t_0)}^{-\rho}(\mathbf{x}_0)+\rho\varphi(t_0,t). \tag{11}$$

С учётом оценок (6), (11) имеет место следующая

Лемма. *Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10). Тогда если для любого $t_0\geqslant 0$ можно найти такую константу $A>0$, что*

$$A\psi(t_0,t)+\varphi(t_0,t)\to+\infty \quad \textit{при} \quad t\to+\infty, \tag{12}$$

то нулевое решение системы (1), (3) будет асимптотически устойчивым.

Для установления более простых условий асимптотической устойчивости сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10). Тогда для асимптотической устойчивости нулевого решения данной системы достаточно выполнения одного из условий:*

1) $\varphi(0,t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$;

2) $\psi(0,t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$ и функция $\psi^{-1}(0,t)\varphi(0,t)$ ограничена снизу на промежутке $[0,+\infty)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что при всех $t\geqslant t_0\geqslant 0$

$$\varphi(0,t)=\varphi(t_0,t)+\psi(t_0,t)\varphi(0,t_0), \quad \psi(0,t)=\psi(0,t_0)\psi(t_0,t), \tag{13}$$

тогда

$$A\psi(t_0,t)+\varphi(t_0,t)=\varphi(0,t)+\frac{A-\varphi(0,t_0)}{\psi(0,t_0)}\psi(0,t).$$

Следовательно, при выполнении какого-то из условий 1) или 2) теоремы 1 для любого $t_0\geqslant 0$ величину $A>0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение (12).

Таким образом, для нахождения ограничений на закон переключений/импульсов, гарантирующих асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), (3), требуется исследовать поведение функций $\varphi(t_0,t)$ и $\psi(t_0,t)$. Причём, согласно теореме 1, это достаточно сделать только при $t_0=0$, полагая $m=m(0)=1$, $k=k(0,t)$ — количество переключений/импульсов на промежутке $[0,t]$. Функция $\psi(0,t)$ — кусочно-постоянная положительная на $[0,+\infty)$. Оценивая сверху коэффициенты $\alpha_{\sigma(t)}(t)$ в неравенствах (9) константами на интервалах $[\tau_{i-1},\tau_i)$, $i\in\mathbb{N}$, функцию $\varphi(0,t)$ можно огрубить более простой для анализа кусочно-линейной функцией. Моменты $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ являются точками разрыва функций $\varphi(0,t)$ и $\psi(0,t)$ (за исключением случаев, когда $\varkappa_i=1$).

Выполнения условия 1) теоремы 1 можно добиться за счёт выбора закона переключений, если чаще и дольше активировать те подсистемы из семейства (2), для которых нулевое решение асимптотически устойчиво и функция Ляпунова подобрана удачно, так что соответствующие коэффициенты $\alpha_s(t)$ в оценках (9) сохраняют отрицательное значение достаточно длительное время. Если условие 1) не выполнено (например, если все подсистемы (2) неустойчивые или если не получилось построить “хорошие” функции Ляпунова), то условие 2) теоремы 1 позволяет добиться асимптотической устойчивости за счёт выбора импульсных воздействий.

Рассмотрим теперь возмущённую систему (4), (3). Предположим, что в области (5) справедливы неравенства

$$\|\mathbf{G}(t,\mathbf{x})\|\leqslant M(t)\|\mathbf{x}\|^{\nu}, \tag{14}$$

где $\nu=\mathrm{const}>0$, $M(t)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная при $t\geqslant 0$ функция.

При $\nu>\mu$, учитывая (7), получаем, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\widetilde{H}\in(0,H)$, что при $t\geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\|<\widetilde{H}$ будут справедливы оценки

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right)^T(\mathbf{F}_s(t,\mathbf{x})+\mathbf{G}(t,\mathbf{x}))\leqslant\widetilde{\alpha}_s(t)V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}),$$

где $\widetilde{\alpha}_s(t)=\alpha_s(t)+\varepsilon M(t)$, $s=\overline{1,N}$. Далее для системы (4), (3) можно применить теорему 1. Однако проблема такого подхода заключается в том, что если какое-то из условий теоремы 1 выполнено для невозмущённой системы (при прежних коэффициентах $\alpha_s(t)$), то оно совершенно не обязательно будет выполнено для возмущённой системы (при новых коэффициентах $\widetilde{\alpha}_s(t)$) при том же самом законе переключений/импульсов, даже если подсистемы (2) и действующие возмущения стационарны, а величина ε выбрана сколь угодно малой. Таким образом, указанный подход может привести к нахождению очень грубых условий асимптотической устойчивости, а в каких-то случаях оказаться и вовсе непригодным. В п. 3 для исследования системы (4), (3) применим другой подход, предложенный в работе [15]. В [15, 16] рассматривались гладкие непрерывные однородные дифференциальные системы с нестационарными возмущениями. Покажем, что соответствующий подход можно распространить и на гибридные системы с переключениями и импульсными скачками.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

Будем считать, что выполнены условия теоремы 1, обеспечивающие асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), (3). Установим ограничения на возмущения, гарантирующие сохранение асимптотической устойчивости для нулевого решения системы (4), (3). Полагаем, что $\nu\geqslant\mu$.

3.1. СЛУЧАЙ ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЯ 1) ТЕОРЕМЫ 1

В этом случае найдётся такое $\hat{T}\geqslant 0$, что $\varphi(0,t)>0$ при $t\geqslant\hat{T}$. Для заданного закона переключений/импульсов вновь определим значения $m=m(t_0)$ и $k=k(t_0,t)$, как и в п. 2 статьи. При $t\geqslant t_0\geqslant\hat{T}$ построим функцию $\Phi(t_0,t)$ по следующему правилу:

$$\Phi(t_0,t)=\int\limits_{t_0}^{t}M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau\quad\text{при}\quad k=0,$$

$$\Phi(t_0,t)=\varkappa_m^{-\rho}\int\limits_{t_0}^{\tau_m} M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau+\int\limits_{\tau_m}^{t} M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad k=1,$$

$$\Phi(t_0,t)=(\varkappa_m\ldots\varkappa_{m+k-1})^{-\rho}\int\limits_{t_0}^{\tau_m} M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}(\varkappa_{m+j}\ldots\varkappa_{m+k-1})^{-\rho}\int\limits_{\tau_{m+j-1}}^{\tau_{m+j}} M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\tau_{m+k-1}}^{t} M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad k=2,3,\ldots. \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10), и выполнено условие 1) теоремы 1. Тогда если возмущения удовлетворяют неравенствам (14), причём $\nu\geqslant\mu$, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4), (3) достаточно, чтобы имело место условие*

$$\varphi^{-1}(0,t)\Phi(\hat T,t)\to 0 \quad \textit{при} \quad t\to+\infty. \tag{16}$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon\in(0,H)$. Выберем положительные постоянные ξ, Δ, l и T согласно условиям

$$\xi\leqslant\Delta, \quad -\frac{a_1^{-\rho}}{\Delta}+\rho-\rho\, l\, a_4\,\Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}>0, \quad -\frac{a_2^{-\rho}}{\xi}+\rho<0,$$

$$\varphi(0,t)>\frac{\Delta}{\varepsilon^{\mu-1}} \quad \text{при} \quad t\geqslant T,$$

$$\varphi^{-1}(0,t)\Phi(\hat T,t)\leqslant l \quad \text{при} \quad t\geqslant T\geqslant\hat T.$$

Здесь $a_1=\min_{s\in Q}a_{1s}$, $a_2=\max_{s\in Q}a_{2s}$, $a_4=\max_{s\in Q}a_{3s}a_{1s}^{-(1+\rho)}$.

Покажем, что если

$$t_0\geqslant T, \quad \|\mathbf{x}_0\|^{\mu-1}<\frac{\xi}{\varphi(0,t_0)}, \tag{17}$$

то

$$\|\mathbf{x}(t)\|^{\mu-1}<\frac{\Delta}{\varphi(0,t)} \quad \text{при} \quad t\geqslant t_0. \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (4), (3), выходящее из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0.

В самом деле, пусть начальные данные решения системы (4), (3) удовлетворяют неравенствам (17). Предположим, что найдётся такое $t_1>t_0$, что $\|\mathbf{x}(t_1)\|^{\mu-1}=\Delta/\varphi(0,t_1)$. На промежутке $[t_0,t_1]$ имеем

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right)^T(\mathbf{F}_s(t,\mathbf{x})+\mathbf{G}(t,\mathbf{x}))\leqslant\big(\alpha_s(t)+a_4\Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}M(t)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,t)\big)V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}).$$

Интегрируя эти неравенства на промежутке $[t_0,t_1]$, находим, что

$$V_{\sigma(t_1)}^{-\rho}(\mathbf{x}(t_1))\geqslant\psi(t_0,t_1)V_{\sigma(t_0)}^{-\rho}(\mathbf{x}_0)+\rho\,\varphi(t_0,t_1)-\rho a_4\Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}\Phi(t_0,t_1).$$

Учитывая соотношения (6), (13), отсюда получаем

$$\varphi(0,t_1)\left(-\frac{a_1^{-\rho}}{\Delta}+\rho-\rho\, l\, a_4\,\Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}\right)\leqslant\psi(t_0,t_1)\varphi(0,t_0)\left(-\frac{a_2^{-\rho}}{\xi}+\rho\right). \tag{19}$$

Левая часть неравенства (19) положительна, в то время как правая — отрицательна. Из данного противоречия вытекает, что неравенство (18) должно выполняться при всех $t\geqslant t_0$. Следовательно, для заданных значений $\varepsilon>0$ и $t_0\geqslant T$ нашлось $\delta=(\xi\,\varphi^{-1}(0,t_0))^{1/(\mu-1)}>0$ такое, что если $\|\mathbf{x}_0\|<\delta$, то $\|\mathbf{x}(t)\|<\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$, и, кроме того, $\|\mathbf{x}(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$. Учитывая свойство интегральной непрерывности применительно к нулевому решению системы (4), (3) на промежутке $[0,T]$ (см. замечание 1), получаем требуемое. Теорема доказана.

Замечание 3. Предположим, что $\varkappa_i\geqslant 1$, $i\in\mathbb{N}$. Такая ситуация будет иметь место, например, в отсутствие стабилизирующих импульсов. Тогда соотношение (16) в теореме 2 можно заменить более грубым, но более простым условием:

$$\varphi^{-1}(0,t)\int\limits_{\hat{T}}^{t}M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau\to 0\quad\text{при}\quad t\to+\infty.$$

Если же $\varkappa_i\leqslant 1$, $i\in\mathbb{N}$, то соотношение (16) можно огрубить условием

$$\psi(0,t)\varphi^{-1}(0,t)\int\limits_{\hat{T}}^{t}M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau\to 0\quad\text{при}\quad t\to+\infty.$$

Из полученных результатов видно, что использование стабилизирующих импульсов ($\varkappa_i<1$, $i\in\mathbb{N}$) позволяет получить более лучшие условия асимптотической устойчивости для базовой системы (1), (3) (см. теорему 1). Однако теорема 2 будет задавать в этом случае достаточно жёсткие ограничения на возмущения. Поэтому для анализа устойчивости возмущённой системы в данной ситуации лучше воспользоваться подходом, ориентированным на условие 2) теоремы 1 (см. далее теорему 3).

Пример 1. Пусть закон переключений/импульсов выбран так, что $\varphi(0,t)\geqslant p\,t^r$ при $t\geqslant\bar{t}$, где $p>0$, $r>0$, $\bar{t}\geqslant 0$. Тогда нулевое решение системы (1), (3) асимптотически устойчиво, поскольку выполнено условие 1) теоремы 1. Предположим, что $M(t)\leqslant M_0(t+1)^{\zeta}$ при $t\geqslant 0$, где $M_0=\mathrm{const}>0$, $\zeta\geqslant 0$. Не умаляя общности считаем, что $\hat{T}\geqslant\bar{t}$. Пусть $\varkappa_i\geqslant 1$, $i\in\mathbb{N}$. Тогда при выполнении неравенства

$$\nu>\mu+\max\{(\mu-1)(\zeta+1-r)/r,0\} \tag{20}$$

имеем

$$0\leqslant\varphi^{-1}(0,t)\int\limits_{\hat{T}}^{t}M(\tau)\varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,\tau)\,d\tau\leqslant(pt^r)^{-1}\int\limits_{\hat{T}}^{t}M_0(t+1)^{\zeta}(pt^r)^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}\,d\tau\to 0\quad\text{при}\quad t\to+\infty,$$

и, следовательно (см. теорему 2 и замечание 3), в этом случае нулевое решение системы (4), (3) будет асимптотически устойчивым.

В качестве численного примера рассмотрим семейство (2), состоящее из двух ($Q=\{1,2\}$) стационарных подсистем

$$\dot{x}_1=-x_1^3-x_1x_2^2,\quad \dot{x}_2=-x_1^2x_2-x_2^3; \tag{21}$$

$$\dot{x}_1=x_1^3+x_1x_2^2,\quad \dot{x}_2=x_1^2x_2+x_2^3. \tag{22}$$

Здесь $n=2$, $\mu=3$. Подсистема (21) асимптотически устойчива, а подсистема (22) — неустойчива.

Как и ранее, через $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots$ обозначим моменты переключений. Пусть $T_i= =\tau_i-\tau_{i-1}$, $i\in\mathbb{N}$. Полагаем, что на интервалах $[\tau_{2j-2},\tau_{2j-1})$ активна подсистема (21), а на интервалах $[\tau_{2j-1},\tau_{2j})$ — подсистема (22), $j\in\mathbb{N}$. Для упрощения предположим, что импульсные воздействия отсутствуют.

Построим для подсистем (21) и (22) единую функцию Ляпунова в виде

$$V_1(\mathbf{x})=V_2(\mathbf{x})=V(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2.$$

Получим

$$\dot V\big|_{(21)}=-2V^2(\mathbf{x}),\quad \dot V\big|_{(22)}=2V^2(\mathbf{x}).$$

Таким образом, имеем $\gamma=2$, $\rho=1$; $\alpha_{\sigma(t)}(t)=-2$ при $t\in[\tau_{2j-2},\tau_{2j-1})$, $\alpha_{\sigma(t)}(t)=2$ при $t\in[\tau_{2j-1},\tau_{2j})$, $j\in\mathbb{N}$; $\varkappa_i=1$, $i\in\mathbb{N}$; $\varphi(0,t)=-\int_0^t\alpha_{\sigma(\tau)}(\tau)\,d\tau$.

Предположим, что $T_{2j-1}\geqslant 1$ и $\varphi(0,\tau_{2j})=\sqrt{\tau_{2j}}$, $j\in\mathbb{N}$. Длины интервалов активности подсистемы (21) задаём произвольно, а подсистему (22) оставляем активной, пока ломаная $\varphi(0,t)$ не "упадет" на кривую $\sqrt{t}$. Тогда $\varphi(0,t)\geqslant\sqrt{t}$ при $t\geqslant 1/4$ (т.е. имеем $r=1/2$) и нулевое решение соответствующей невозмущённой переключаемой системы асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь возмущённую систему, состоящую из подсистем

$$\dot x_1=-x_1^3-x_1x_2^2+x_1^\nu,\quad \dot x_2=-x_1^2x_2-x_2^3+x_2^\nu; \tag{23}$$

$$\dot x_1=x_1^3+x_1x_2^2+x_1^\nu,\quad \dot x_2=x_1^2x_2+x_2^3+x_2^\nu, \tag{24}$$

где $\nu=\mathrm{const}>0$. Возмущения здесь представлены стационарными функциями ($\zeta=0$). Известно [1, с. 230–231], что ограниченные относительно времени возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения однородной стационарной системы без переключений, если порядок этих возмущений больше порядка однородности системы. Однако для однородных систем с переключениями это, вообще говоря, не так. Переключения могут приводить к существенному изменению динамики однородной системы, поэтому условия $\nu>3$ будет недостаточно для асимптотической устойчивости нулевого решения гибридной системы, образованной из подсистем (23), (24), что подтверждается численными расчётами. Согласно неравенству (20) для сохранения асимптотической устойчивости требуется более жёсткое условие: $\nu>5$.

3.2. СЛУЧАЙ ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЯ 2) ТЕОРЕМЫ 1

Исследуем теперь ситуацию, когда асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1), (3) гарантируется условием 2) теоремы 1. Снова определяем значения $m=m(t_0)$ и $k=k(t_0,t)$, как и ранее, при $t\geqslant t_0\geqslant 0$ и строим функцию $\Psi(t_0,t)$ по правилу (15), используя только в подынтегральных выражениях функцию $\psi(0,t)$ вместо функции $\varphi(0,t)$.

Теорема 3. *Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10), и выполнено условие 2) теоремы 1. Тогда если возмущения удовлетворяют неравенствам (14), причём $\nu\geqslant\mu$, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4), (3) достаточно, чтобы для любого $l>0$ нашлось такое $\hat T\geqslant 0$, что при всех $t\geqslant\hat T$ справедливо неравенство*

$$\psi^{-1}(0,t)\Psi(\hat T,t)\leqslant l. \tag{25}$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon \in (0, H)$. Выберем любую константу $d > 0$. Найдём некоторые постоянные $\Delta > 0$ и $l > 0$, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{a_2^{-\rho}}{d} \leqslant \Delta, \quad \frac{a_1^{-\rho}}{\Delta} < d - \rho\, l\, a_4\, \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}. \tag{26}$$

Здесь снова $a_1 = \min_{s\in Q} a_{1s}$, $a_2 = \max_{s\in Q} a_{2s}$, $a_4 = \max_{s\in Q} a_{3s} a_{1s}^{-(1+\rho)}$.

По найденному l определим значение $\hat{T} \geqslant 0$ из условия (25). Возьмём $T \geqslant \hat{T}$ такое, что

$$\psi(0,t) > \frac{\Delta}{\varepsilon^{\mu-1}} \quad \text{при} \quad t \geqslant T.$$

В соответствии с условием 2) теоремы 1 найдём константу L такую, что $\psi^{-1}(0,t)\varphi(0,t) \geqslant L$ при всех $t \geqslant 0$. Для произвольного $t_0 \geqslant T$ будем определять положительную величину $\xi(t_0)$ согласно условиям

$$\xi(t_0) \leqslant \frac{a_2^{-\rho}}{d}, \quad \frac{a_2^{-\rho}}{\xi(t_0)} + \rho\left(L - \frac{\varphi(0,t_0)}{\psi(0,t_0)}\right) \geqslant d. \tag{27}$$

Покажем, что если

$$t_0 \geqslant T, \quad \|\mathbf{x}_0\|^{\mu-1} < \frac{\xi(t_0)}{\psi(0,t_0)}, \tag{28}$$

то

$$\|\mathbf{x}(t)\|^{\mu-1} < \frac{\Delta}{\psi(0,t)} \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{29}$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (4), (3), выходящее из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0.

Действительно, пусть начальные данные решения системы (4), (3) удовлетворяют неравенствам (28). Предположим, что найдётся такое $t_1 > t_0$, что $\|\mathbf{x}(t_1)\|^{\mu-1} = \Delta/\psi(0,t_1)$. На отрезке $[t_0, t_1]$ имеем

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^T (\mathbf{F}_s(t,\mathbf{x}) + \mathbf{G}(t,\mathbf{x})) \leqslant \left(\alpha_s(t) + a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} M(t) \psi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0,t)\right) V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}).$$

Интегрируя эти неравенства на промежутке $[t_0, t_1]$, находим, что

$$V_{\sigma(t_1)}^{-\rho}(\mathbf{x}(t_1)) \geqslant \psi(t_0,t_1) V_{\sigma(t_0)}^{-\rho}(\mathbf{x}_0) + \rho\, \varphi(t_0,t_1) - \rho a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} \Psi(t_0,t_1).$$

Учитывая соотношения (6), (13), отсюда получаем

$$\frac{a_1^{-\rho}}{\Delta} \geqslant \frac{a_2^{-\rho}}{\xi(t_0)} + \rho\left(L - \frac{\varphi(0,t_0)}{\psi(0,t_0)}\right) - \rho\, l\, a_4\, \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}},$$

что противоречит неравенствам (26), (27). Таким образом, неравенство (29) должно выполняться при всех $t \geqslant t_0$ и тогда, как и при доказательстве теоремы 2, приходим к требуемому. Теорема доказана.

Замечание 4. Перепишем условие асимптотической устойчивости, сформулированное в теореме 3, в более простой форме. Не умаляя общности будем искать требуемое значение $\hat{T}$ среди моментов переключений/импульсов: $\hat{T} = \tau_{m-1}$, где m — некоторое натуральное число. Для каждого $t \geqslant \hat{T}$ определим целое неотрицательное k так, чтобы $t \in [\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k})$. Учитывая, что функция $\Psi(\hat{T}, t)$ монотонно возрастает на интервалах $[\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k})$, $k = 0, 1, \ldots$, а функция $\psi(0,t)$ сохраняет постоянное значение на каждом из этих интервалов, условие (25) достаточно проверить только для левосторонних моментов $t=\tau_{m+k}^-$, $k=0,1,\ldots$ Нетрудно убедиться, что

$$\psi^{-1}(0,\tau_{m+k}^-)\Psi(\tau_{m-1},\tau_{m+k}^-)=\sum_{i=m-1}^{m+k-1}(\varkappa_1\ldots\varkappa_i)^{\frac{\rho(\nu-1)}{\mu-1}}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}M(\tau)\,d\tau,\quad k=0,1,\ldots$$

(здесь при $m=1$ считаем $\varkappa_1\ldots\varkappa_0=1$). Тогда для достижения требуемого условия (25) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(\varkappa_1\ldots\varkappa_i)^{\frac{\rho(\nu-1)}{\mu-1}}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}M(\tau)\,d\tau. \tag{30}$$

Действительно, в этом случае, согласно критерию сходимости, для любого $l>0$ найдётся такое натуральное m, что $\psi^{-1}(0,\tau_{m+k}^-)\Psi(\tau_{m-1},\tau_{m+k}^-)\leqslant l$ при всех $k=0,1,\ldots$

Пример 2. Пусть $\varkappa_i=\varkappa\in(0,1)$, $M(t)\leqslant M_i$ при $t\in[\tau_{i-1},\tau_i)$, $T_i=\tau_i-\tau_{i-1}$, $i\in\mathbb{N}$. Найдём $P=\overline{\lim}_{i\to\infty}\sqrt[i]{M_{i+1}T_{i+1}}$. Тогда для сходимости ряда (30) достаточно выполнения неравенства $\varkappa^{\rho(\nu-1)/(\mu-1)}<1/P$, откуда нетрудно получить ограничение на допустимый порядок возмущений ν.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема изучения влияния возмущений на устойчивость динамических систем актуальна для обеспечения работоспособности практических процессов, моделируемых этими системами. За последние десятилетия было установлено множество критериев устойчивости по линейному и нелинейному приближению, предложенных разными авторами. Наличие в системе нестационарностей, а также воздействие импульсных эффектов и переключений между возможными режимами функционирования системы значительно усложняют задачу. Динамика решений системы в этом случае может принципиально меняться, что, в свою очередь, может привести к изменению допустимых ограничений на возмущения. В настоящей статье исследовалось влияние возмущений на гибридную систему с переключениями и импульсами, состоящую из семейства однородных нестационарных подсистем. Отметим, что рассматриваемые подходы могут быть применены для широкого класса других существенно нелинейных систем. В частности, не представляет сложности распространить полученные результаты на случай переключений между подсистемами с разными порядками однородностей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов, В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования / В.И. Зубов. — Л. : Машиностроение, 1974. — 335 с.
2. Liberzon, D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. — Boston : Birkhäuser, 2003. — 233 p.
3. Lakshmikantham, V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov. — Singapore : World Scientific, 1989. — 288 p.
4. Lu, J. Average dwell time based stability analysis for nonautonomous continuous-time switched systems / J. Lu, Z. She // Int. J. Robust Nonl. Control. — 2019. — V. 29, № 8. — P. 2333–2350.
5. Stabilisability of time-varying switched systems based on piecewise continuous scalar functions / J. Lu, Z. She, W. Feng, S.S. Ge // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2019. — V. 64, № 6. — P. 2637–2644.

6. Finite-time stability and asynchronously switching control for a class of time-varying switched nonlinear systems / R. Wang, J. Xing, Z. Xiang, Q. Yang // Trans. of the Institute of Measurement and Control. — 2019. — V. 42, № 6. — P. 1215–1224.
7. Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems / X. Gao, D. Liberzon, J. Liu, T. Basar // Automatica. — 2018. — V. 96. — P. 110–120.
8. Platonov, A.V. Stability conditions for some classes of time-varying switched systems / A.V. Platonov // Int. J. Syst. Science. — 2022. — V. 35, № 10. — P. 2235–2246.
9. Aleksandrov, A.Yu. On the asymptotic stability of switched homogeneous systems / A.Yu. Aleksandrov, A.A. Kosov, A.V. Platonov // Syst. Control Lett. — 2012. — V. 61, № 1. — P. 127–133.
10. Zhang, J. Global asymptotic stabilisation for switched planar systems / J. Zhang, Z. Han, J. Huang // Int. J. Syst. Science. — 2015. — V. 46, № 5. — P. 908–918.
11. Aleksandrov, A. Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation / A. Aleksandrov, D. Efimov // Nonlin. Anal. Hybrid Syst. — 2021. — V. 42. — Art. 101090.
12. Liu, X. Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties / X. Liu, D. Liu // Int. J. Robust Nonl. Control. — 2016. — V. 26, № 1. — P. 174–184.
13. On robust stability of switched homogeneous systems / H. Yang, D. Zhao, B. Jiang, S. Ding // IET Control Theory & Applications. — 2021. — V. 15, № 5. — P. 758–770.
14. Rosier, L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field / L. Rosier // Syst. Control Lett. — 1992. — V. 19, № 6. — P. 467–473.
15. Александров, А.Ю. Об устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями / А.Ю. Александров // Мат. заметки. — 1998. — Т. 63, № 1. — С. 3–8.
16. Платонов, А.В. Исследование устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями / А.В. Платонов // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 12. — С. 1707–1708.

ON THE STABILITY BY THE NONLINEAR NON-STATIONARY HYBRID APPROXIMATION

 A. V. Platonov

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: a.platonov@spbu.ru

The paper investigates the effect of non-stationary perturbations on the stability of nonlinear nonautonomous systems with switching and impulsive effects. Sufficient conditions have been obtained to guarantee the asymptotic stability of a given equilibrium position of the initial system, and restrictions have been established under which the asymptotic stability is preserved under perturbations acting on the system. Note that the non-stationarities present both in the system itself and in perturbations can be described by unbounded functions with respect to time, as well as functions arbitrarily close to zero. It is assumed that the basic system is homogeneous in terms of the state vector. To find the required results, the second Lyapunov method is used in combination with the theory of differential inequalities.

Keywords: non-stationary impulsive switched system, perturbation, stability

REFERENCES

1. Zubov, V.I., *Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems*, Oxford; New York: Pergamon Press, 1962.
2. Liberzon, D., *Switching in Systems and Control*, Boston: Birkhäuser, 2003.
3. Lakshmikantham, V., Bainov, D.D., and Simeonov, P.S., *Theory of Impulsive Differential Equations*, Singapore: World Scientific, 1989.

4. Lu, J. and She, Z., Average dwell time based stability analysis for nonautonomous continuous-time switched systems, *Int. J. Robust Nonl. Control*, 2019, vol. 29, no. 8, pp. 2333–2350.
5. Lu, J., She, Z., Feng, W., and Ge, S.S., Stabilisability of time-varying switched systems based on piecewise continuous scalar functions, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2019, vol. 64, no. 6, pp. 2637–2644.
6. Wang, R., Xing, J., Xiang, Z., and Yang, Q., Finite-time stability and asynchronously switching control for a class of time-varying switched nonlinear systems, *Trans. of the Institute of Measurement and Control*, 2019, vol. 42, no. 6, pp. 1215–1224.
7. Gao, X., Liberzon, D., Liu, J., and Basar, T., Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems, *Automatica*, 2018, vol. 96, pp. 110–120.
8. Platonov, A.V., Stability conditions for some classes of time-varying switched systems, *Int. J. Syst. Science*, 2022, vol. 35, no. 10, pp. 2235–2246.
9. Aleksandrov, A.Yu., Kosov, A.A., and Platonov, A.V., On the asymptotic stability of switched homogeneous systems, *Syst. Control Lett.*, 2012, vol. 61, no. 1, pp. 127–133.
10. Zhang, J., Han, Z., and Huang, J., Global asymptotic stabilisation for switched planar systems, *Int. J. Syst. Science*, 2015, vol. 46, no. 5, pp. 908–918.
11. Aleksandrov, A. and Efimov, D., Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation, *Nonlin. Anal. Hybrid Syst.*, 2021, vol. 42, art. 101090.
12. Liu, X. and Liu, D., Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties, *Int. J. Robust Nonl. Control*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 174–184.
13. Yang, H., Zhao, D., Jiang, B., and Ding, S., On robust stability of switched homogeneous systems, *IET Control Theory & Applications*, 2021, vol. 15, no. 5, pp. 758–770.
14. Rosier, L., Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field, *Syst. Control Lett.*, 1992, vol. 19, no. 6, pp. 467–473.
15. Aleksandrov, A.Yu., Stability of solutions of nonlinear systems with unbounded perturbations, *Math. Notes*, 1996, vol. 63, no. 1, pp. 3–8.
16. Platonov, A.V., Issledovanie ustoichivostyi reshenii nelineinyh sistem s neogranichennyimi vozmush'eniyami, *Differ. Uravn.*, 1999, vol. 35, no. 12, pp. 1707–1708.