

**ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.С. ТУРГЕНЕВА
ВОЕННО-ВОЗДУШНАЯ АКАДЕМИЯ
им. ПРОФЕССОРА Н.Е. ЖУКОВСКОГО И Ю.А. ГАГАРИНА
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ПМТУКТ-2024)**

*Сборник трудов
Международной научной конференции
Воронеж, 04 – 06 декабря 2024г.*

**Воронеж
Издательство «Научная книга»
2024**

УДК 517.94 (95, 97, 62,63), 519.17 (67, 71, 977)

ББК В22

С 56

Оргкомитет:

председатель: декан математического факультета, заведующий кафедрой математического моделирования ВГУМ.Ш. Бурлуцкая;
сопредседатель: профессор, заведующий кафедрой теории управления СПбГУ, А.П. Жабко; заместители председателя: профессор ВГУ В.В. Провоторов; профессор ПГНИУ В.В. Малыгина, доцент, ВУНЦ ВВС «ВВА» А.В. Иванов;
члены оргкомитета: С.Г. Тихомиров, А.А. Парт, О.Р. Корчагина, И.В. Приходько

Программный комитет:

председатель: профессор, декан факультета процессов управления СПбГУ Л.А. Петросян; сопредседатели: декан факультета прикладной математики, механики и информатики ВГУ С.Н. Медведев; декан математического факультета, заведующий кафедрой математического моделирования ВГУМ.Ш. Бурлуцкая; профессор, заведующий кафедрой теории управления СПбГУ А.П. Жабко; заместители председателя: профессор ПГНИУ В.П. Максимов, профессор ВГУ В.В. Провоторов;
члены программного комитета: А.В. Ильин, А.Ю. Александров, А.П. Афанасьев, В.К. Битюков, Л.Н. Борисоглебская, А.В. Боровских, L. Berezanski, P.B. Воронов, Г.В. Демиденко, С.М. Дзюба, А. Domoshnitsky, Я.М. Ерусалимский, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский, В.Г. Задорожний, Е.В. Ильинов, А.В. Иванов, А.М. Камачкин, Т.М. Леденева, Н.Ю. Лукоянов, В.В. Малыгина, К.Б. Нуртазина, С.Л. Подвальный, А.А. Rogov, Т.И. Смирнов, Д.С. Сайко, А. Shindiarin, А.И. Шашкин, А.П. Хромов, А.Д. Чернышов, В.А. Юрко

С 56 Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2024): сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04-06 декабря 2024 г. / под ред. В.В. Провоторова. – Воронеж: Издательство «Научная книга», 2024. – 132 с.

ISBN 978-5-907328-37-2

В сборнике представлены статьи по материалам докладов и лекций, включенных в программу Международной научной конференции ПМТУКТ-2024. Тематика охватывает широкий спектр проблем прикладной математики, теории управления, дифференциальных игр, качественных методов математического моделирования в различных разделах естествознания (биология, медицина, химия), другие разделы современной прикладной математики (в том числе экономического характера). Представлены приближенные методы исследования математических моделей, компьютерные технологии в процессах управления, а также современные компьютерные технологии создания программных продуктов.

ISBN 978-5-907328-37-2 © Воронежский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2024

**RECOGNITION AND TRACKING OF CANCEROUS NEOPLASM DURING
ULTRASOUND EXAMINATION: A MULTIMODAL ALGORITHM APPROACH**

Kamguia F.H.

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

Cancer is a group of diseases defined by the uncontrolled proliferation and spread of abnormal cells known as neoplasms. This uncontrolled development can infect neighbouring tissues and spread throughout the body via the bloodstream and lymphatic system (metastasis) [1]. Cancer is one of the main causes of mortality in the world, according to the World Health Organisation, and the numbers are increasing each year.

Early and proper diagnosis of this condition is usually critical to the patient's survival. Cancer diagnosis involves a variety of techniques, one of which is imaging. Knowing what is going on inside the organs helps doctors approach the disease and try to treat it more effectively. Imaging techniques used to diagnose cancer include radiography, magnetic resonance imaging (MRI), CT scans, and ultrasound. Despite having lesser picture quality than MRI or CT scans, ultrasound is commonly employed for real-time assessment. Its real-time capabilities and lack of ionising radiation make it ideal for tracking moving structures. Ultrasound exams are used for both diagnosis (e.g., breast cancer, liver cancer, ovarian cancer) and treatment (e.g., guided biopsies, monitoring treatment response).

However, ultrasonography accuracy is greatly dependent on the operator's experience in using the device and interpreting the results [2]. These variables can cause considerable errors, especially in high-stress situations or with patients who are under the effect of substances that impede collaboration. These errors could include improper equipment manipulation or a failure to detect tumour.

This research seeks to address these limitations by developing a multimodal algorithm capable of enhancing tumour detection and tracking in real-time during ultrasound procedures. Thereby refining the accuracy of the equipment operator. This can be achieved through real-time improvements through automated cross-sectional detection of tumour profiles and subsequent clustering to avoid duplications, ultimately aiming to improve diagnostic reliability in detecting neoplastic growths in dynamic clinical environments [3].

This study could be assimilated to multi-object detection and tracking, a current problem in the computer vision field that has sought much attention in recent years. Convolutional Neural Network (CNN) has proven to be very useful in image and video processing tasks, and results have outperformed those of humans on multiple instances. The advent of deep convolutional neural networks permits target detection and tracking by extracting image features and predicting target locations [4]. Based on the output detection results, the target is located in future frames, and then the target tracker is linked and generated accordingly [5].

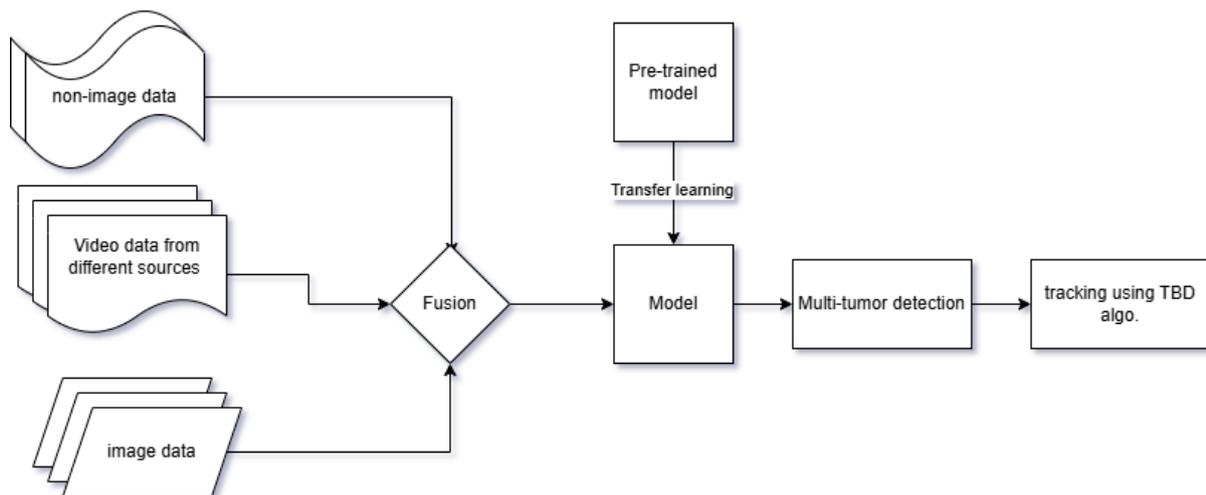


Figure 1: Proposed model

In the suggested method, the DCNN model will be utilized to extract features from images based on shape, size, and texture. Yolo architectures based on DCNN is used to develop the tumor detection and localization model using the transfer learning method. The Tracking By Detection (TBD) technique is utilized to follow the tumor's position between frames while taking into account motion and obstruction during real-time examination. Multi-modal fusion is used in our data by combining ultrasound videos with imaging modalities (such as elastography, which provides useful information on tissue stiffness, a significant predictor of cancer). Furthermore, the training model considers the patient's history, genetic markers, and the doctor's description of the exam. The goal is to increase the model's accuracy. Given the limited quantity of labeled data available transfer learning with a pre-trained network such as Yolo is used. Additionally, data augmentation. The results will be appreciated and useful for doctors that specialize in the topic.

Literature

1. World Health Organization [internet resource]: <https://www.cancer.gov/publications/dictionaries/cancer-terms/def/neoplasm> (date: 16.11.2024)
2. Di S., Iacobellis F., Schillirò M., et al. Common and Uncommon Errors in Emergency Ultrasound // 2022. No. 631. P.12-15. DOI: 10.3390/diagnostics12030631
3. Козубова К.В., Бусько Е.А. и др. Точечная эластография сдвиговых волн в оценке очаговой патологии печени: проспективное исследование. // Лучевая диагностика и терапия. 2024. № 2 (15). С. 65-76.
4. Xiaoyan J., Zhijun F., et al. Data fusion-based multi-object tracking for unconstrained visual sensor networks. // IEEE Access. 2018. Vol. 6. P:13716–13728.
5. Xuan W., Haojie S., Abdellah C., Gwanggil J., Yongchao S. Deep Learning and Multi-Modal Fusion for Real-time Multi-Object Tracking: Algorithms, Challenges, Datasets, and Comparative Study// Information Fusion. 2024. Vol.5 DOI: [10.1016/j.inffus.2024.102247](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2024.102247)

Kamguia Feukwi Herve, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, graduate student, e-mail: st093241@student.spbu.ru.

РАСЧЁТ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА

Алиев Д.С., Облогин М.А., Кузнецов С.А., Слюсарь Д.М., Аминов Ф.Б.

ФГБОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных Сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Под техническим обслуживанием (ТО) понимается комплекс мероприятий, проводимый с заданной периодичностью, предназначенный для поддержания технических характеристик образца в пределах установленных норм [1].

На рисунке 1 показано влияние ТО образца техники на его исправность.

В начальный момент времени ($t=0$) вероятность исправности образца техники $P(t)$ близка к единице. С течением времени в силу деградации качеств элементов образца $P(t)$ снижается. Если ТО не проводится, то со временем $P(t)$ может стать ниже некоторого значения вероятности нормального функционирования $P_{н.ф.}$, что недопустимо.

По истечении времени, равному интервалу между циклами ТО осуществляется контроль параметров образца. При этом $P(t)$ снова повышается до своего исходного значения, близкого к единице. Таким образом, периодичность проведения ТО должна быть такой, чтобы за интервал между циклами ТО вероятность исправности не снизилась ниже допустимого значения $P_{н.ф.}$.

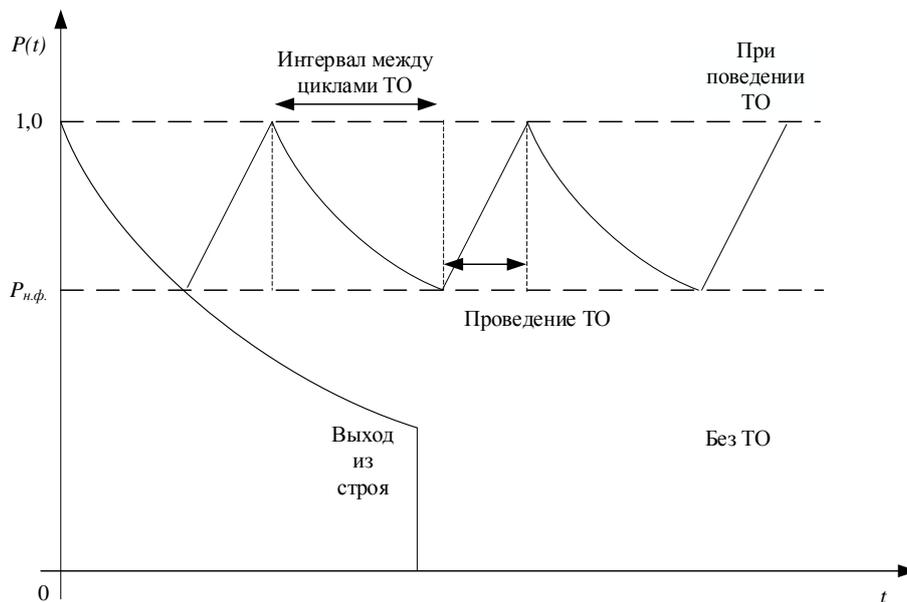


Рисунок 1 – Динамика технического состояния образца ВВСТ

Одним из основных показателей исправности образцов техники является техническая готовность. Данное свойство характеризуется коэффициентом готовности K_G , который определяется по формуле [1]

$$K_T = \left(1 - \bar{t} \times \frac{L \times t_{\text{обсл.}} + t_{\text{рем}}}{t} \right) \times \left(1 - (1 - e^{-\lambda P \tau}) \times \left(1 - e^{-\frac{t_n}{T_p}} \right) \right), \quad (1)$$

где \bar{t} – интенсивность эксплуатации образца техники, которая определяется как отношение наработки t за календарный год, к фонду рабочего времени в часах в течении календарного года; L – количество дней эксплуатации образца техники в году; t – наработка за год; $t_{\text{обсл.}}$ – продолжительность всех видов технического обслуживания образца техники; $t_{\text{рем}}$ – продолжительность ремонта образца; $\lambda = \frac{1}{T_c}$ – интенсивность отказов при средней наработке на отказ, равной T_c ; P – вероятность обнаружения отказа образца во время ТО; τ – продолжительность выполнения задачи по предназначению; t_n – продолжительность подготовки к применению образца техники после устранения отказа; T_p – среднее время устранения отказа.

Коэффициент готовности позволяет дать ответ на вопрос, с какой вероятностью образец техники будет готов к применению в зависимости от своего технического состояния.

Значительное влияние на вероятность исправности образцов техники оказывают показатели надёжности и стабильность характеристик узлов (частей, деталей), входящих в их состав. Задействование образца техники для производства ремонта и контроля параметров его составных частей сокращает потенциально возможное время применения по предназначению самого образца техники в целом [2].

Литература

1. Сотов Л. И. Основные направления развития технического обеспечения//URL <http://federalbook.ru/files/OPK/Soderjanie/OPK-7/Lesun.pdf> (дата обращения: 21.06.2024).

2. Бекаев О.К., Манин Я.П. Теория надёжности. – М.: Высшая школа, 1975. – 202 с.

Алиев Дмитрий Сергеевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных Сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, научный сотрудник, e-mail: for_registr_only@mail.ru.

Облогин Михаил Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных Сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, научный сотрудник, e-mail: Oblogin@mail.ru.

Кузнецов Станислав Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Слюсарь Дмитрий Михайлович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных Сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, курсант.

Аминов Фарид Булатович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных Сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, курсант.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА МИНИМИЗАЦИИ РИСКОВ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ARTMAP

Антипов С.С, Бурковский В.Л.

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

Современные организации сталкиваются с множеством рисков, которые могут существенно повлиять на их деятельность. Для эффективного управления этими рисками необходимо использовать современные технологии и подходы. Одним из наиболее перспективных инструментов является нейросетевая модель ARTMAP, основанная на адаптивной резонансной теории. Данная модель позволяет автоматизировать процесс выявления и минимизации различных видов рисков, повышая тем самым устойчивость организаций к внешним и внутренним угрозам.

В данной работе риски оцениваются методом экспертной оценки по двум критериям, вероятность появления риска и значимость риска. Путем умножения данных критериев рассчитывается ранг риска (1):

$$R = P * S \quad (1)$$

где P – вероятность наступления (неблагоприятного) события; S – тяжесть последствий данного вида события при возможной его реализации.

В зависимости от степени ранга риска разрабатываются предупреждающие воздействия.

Одним из наиболее значимых недостатков указанной методики является то, что вероятность наступления рискового события определяющее ранг риска рассчитывается методом экспертных оценок, что зачастую является субъективным мнением эксперта.

В связи с этим для автоматизации процесса обработки информации по системе рисков представляется целесообразным предложить методику оценки вероятности возникновения рискового события свободную от указанного недостатка. Так же стоит отметить, что одним из самых важных ограничений при оценке рисков является сбор достаточного количества информации для построения корректных моделей рассматриваемых систем.

В этом контексте, использование искусственного интеллекта и, в частности, нейронных сетей типа ARTMAP (Adaptive Resonance Theory Maps), может стать эффективным инструментом для интеллектуализации процессов принятия решений в системах управления рисками. Схема работы ARTMAP изображена на рисунке 1.

Одним из основных преимуществ нейронных сетей ART является их способность к адаптации и обучению на основе мониторинговых данных в режиме реального времени. Это позволяет им динамически анализировать информацию, выявлять изменения в рисках и оперативно реагировать на них.

Модель ARTMAP:

а) ART-модуль (Адаптивный резонансный метод):

- **Входной вектор:** $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - набор характеристик риска (например, величина, вероятность, воздействие)
- **Весовой вектор:** $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - набор весов, ассоциированных с каждой характеристикой риска.
- **Порог активации:** θ - минимальный уровень сходства между входным вектором и весовым вектором для активации категории.

- **Функция сходства:** $S = (X \cdot W) / (\|X\| \|W\|)$ - скалярное произведение, нормализованное по величине векторов.

- **Условие резонанса:** $S > \theta$ - если сходство превышает порог, входной вектор классифицируется в соответствующую категорию.

- **Обучение:**

- Если $S > \theta$, то весовой вектор W настраивается в направлении входного вектора X .

- Если $S < \theta$, то создается новый весовой вектор W для новой категории.

- б) Модуль обратного распространения:**

- **Вход:** Вектор категории (созданный ART-модулем), представляющий тип риска.

- **Выход:** Прогноз величины риска (или вероятность наступления риска).

- **Обучение:** Обучение модуля осуществляется на основе известных примеров (входных векторов и соответствующих им значений рисков).

- **Функция ошибки:** Среднеквадратическая ошибка (MSE) или другая подходящая функция.

В докладе рассматриваются перспективы управления рисками на базе использования ART-подобных нейронных сетей, прежде всего в условиях высокой динамики неопределённости процессов, имеющих место в конкретных объектных областях.

Литература

1. Афонин П.Н. Система управления рисками. Санкт-Петербург: Троицкий мост; 2016. 125 с.

2. Лекун Я. Как учиться машина: Революция в области нейронных сетей и глубокого обучения. Москва: Интеллектуальная Литература. 2020. 351 с.

3. Каширина И.Л. Федутинов К. А. Кластеризация непрерывного потока данных на основе обобщённой модели нейронной сети семейства ART. Системы управления и информационные технологии. 2018;71: 33-39.

Антипов Сергей Сергеевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры электропривода, автоматизации и управления в технических системах, e-mail: sergo_vzp@mail.ru.

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор академик РАН, академик РАКЦ, академик академии компьютерных наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, заведующий кафедрой электропривода, автоматизации и управления в технических системах, e-mail: bvl@vorstu.ru.

УДК 51-77

ЗАДАЧА РАЗРЕШЕНИЯ КОНФЛИКТОВ КАК ЗАДАЧА КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Антипова Е.С.

ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва

В работе [1] рассмотрена динамическая дискретная модель конфликтов на примере конфликта «ребенок-родитель». В ходе исследования проблемы было

выяснено, что задача разрешения конфликтов является задачей комбинаторной оптимизации, т.е. сводится к поиску минимума некоторой функции, зависящей от всех параметров $\{W_i, H_i\}$, характеризующих конкретную конфликтную ситуацию.

Для каждого участника $k = 1, 2$ конфликтной ситуации введена функция неудовлетворенности, характеризующая уровень конфликтности [2]:

$$U^{(k)} = \sum_i \mu_i^{(k)} u_i^{(k)} \quad (1)$$

где $\mu_i^{(k)}$ – коэффициент значимости i -го конфликта для k -го лица, $u_i^{(k)}$ – дискретное рассогласование k -го субъекта в i -ом конфликте. Для рациональных участников конфликтной ситуации, $\mu_i^{(k)} \geq 0$. Параметры $\mu_i^{(k)}$ являются индивидуальными психологическими характеристиками k -го человека.

Функция $U^{(k)}$ обладает свойствами:

- 1) $U^{(k)} \geq 0$ для всех $\mu_i^{(k)} \geq 0$;
- 2) минимум $U^{(k)} = 0$ соответствует состоянию, когда k -й человек полностью удовлетворен сложившейся ситуацией, т.е. для него нет каких-либо существенных конфликтов;
- 3) чем больше значение функции $U^{(k)}$, тем больше неудовлетворенность k -го человека в данной конфликтной ситуации.

Задача разрешения конфликтной ситуации сводится к перебору всех параметров конфликта $\{W_i, H_i\}$, с учетом существующих ограничений, и поиску такой комбинации этих параметров, при которой функции (1) для всех участников конфликтной ситуации будут минимальны (в идеале равны нулю).

При анализе конфликтной ситуации можно выделить следующие основные задачи разрешения конфликтов.

(А) Поиск одностороннего преимущества: найти оптимальные условия для одного из участников конфликтной ситуации, при которых функция $U^{(k)}$ для одного из них достигает минимума. В этом случае условия для другого участника могут оказаться не оптимальными.

(В) Поиск компромисса: идеальный компромисс:

$$\min U^{(1)} = \min U^{(2)} \quad (2)$$

реальный (не идеальный) компромисс:

$$|U^{(1)} - U^{(2)}| \leq \frac{\alpha}{2} \min(U^{(1)} + U^{(2)}) \quad (3)$$

где параметр $0 < \alpha \ll 1$.

В случае поиска идеального компромисса задача разрешения конфликтов сводится к поиску условного минимума, например, функции $U^{(1)}$, при условии $U^{(1)} = U^{(2)}$. Эту задачу можно решить методом неопределенных множителей Лагранжа.

В случае неидеального (реального) компромисса задача разрешения конфликта сводится к поиску минимума функции $(U^{(1)} + U^{(2)})$ при условии (3) и относится к задачам нелинейного программирования [3].

(С) Поиск максимального уровня конфликтов для одного из участников конфликтной ситуации, независимо от собственного уровня конфликта. Такая задача возникает, когда один из участников конфликтной ситуации хочет создать оппоненту максимальный дискомфорт, независимо от того, как это скажется на нем самом.

(D) Поиск максимального уровня конфликтов оппоненту при минимальном личном уровне конфликтов, т.е. поиск условий, обеспечивающих $\min(U^{(2)} - U^{(1)}) < 0$ или $\min(U^{(1)} - U^{(2)}) < 0$.

(E) Точка зрения третьей стороны (арбитра, рефери). В качестве арбитра может выступить некая третья сторона, заинтересованная в разрешении данной конфликтной

ситуации в целом. В этом случае задача сводится к поиску условий, при которых достигается минимум функции

$$U = b_1 U^{(1)} + b_2 U^{(2)} \quad (4)$$

где параметры $b_1, b_2 \geq 0$. Без потери общности, можно считать

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (5)$$

Параметры b_1 и b_2 характеризуют отношение арбитра (третьей стороны) к участниками данной конфликтной ситуации: чем больше параметр b_n , тем важнее для арбитра снизить конфликтную нагрузку именно участника n . При $b_1 = b_2 = 0,5$ отношение арбитра к обоим участникам конфликтной ситуации равно.

Учитывая, что конфликтная ситуация обычно характеризуется большим числом управляющих параметров W и H , для поиска решения таких задач целесообразно использовать метод Монте-Карло, как эффективный инструмент решения многопараметрических задач комбинаторной оптимизации [4].

Литература

1. Антипова Е. С. Дискретная динамическая модель конфликтов // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Экономика. Социология. Менеджмент. 2024. Т. 14. № 1. С. 283-296.
2. Антипова Е. С. Математическое моделирование конфликтов // Вестник Югорского государственного университета. 2023. № 4 (71). С. 41-56.
3. Avriel M. Nonlinear programming // Mathematical Programming for Operations Researchers and Computer Scientists. CRC Press. 2020. С. 271-367.
4. Rashkovskiy, S. A. Monte Carlo Solution of Combinatorial Optimization Problems / S. A. Rashkovskiy // Doklady Mathematics. 2016. Vol. 94, № 3. P. 720–724.

Антипова Екатерина Сергеевна, Государственный университет управления, г. Москва, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры математических методов в экономике и управлении, e-mail: antipovaes@live.ru

УДК 004.8

МЕТОДЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА РЕНТГЕНОГРАММ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ПНЕВМОНИИ

Баграмов Н.И.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Пневмония остаётся одной из ведущих причин смертности от инфекционных заболеваний во всём мире, особенно среди детей младшего возраста. Для улучшения диагностики и автоматизации процесса анализа рентгеновских изображений могут быть применены методы машинного обучения. Такой подход позволит выявлять патологические изменения на рентгенограммах, основываясь на специфических характеристиках изображений, и дополнять клинические решения.

Основная цель исследования — изучить применимость методов машинного обучения для автоматической классификации рентгеновских изображений лёгких с целью поиска явно здоровых пациентов и максимизации полноты выявления случаев заболевания. Это позволит снизить нагрузку на врачей за счёт направления их внимания только на потенциально сложные или спорные случаи. Для анализа были

использованы данные, предоставленные медицинским центром Guangzhou Women and Children's Medical Center [1]. В выборку вошли 5 863 изображения, разделённые на две категории: «пневмония» и «норма». Изображения были получены в ходе клинических обследований пациентов в возрасте от одного года до пяти лет.

Для повышения качества моделей были проведены несколько ключевых этапов подготовки данных. Сначала были исключены изображения низкого качества и нечитаемые снимки, что обеспечило надёжность исходных данных для обучения моделей. Диагнозы каждого изображения были проверены двумя специалистами для минимизации ошибок разметки, а контрольную выборку дополнительно проверил третий эксперт, что повысило точность и достоверность данных. Такое многократное подтверждение диагноза позволило исключить возможные неточности.

Кроме того, изображения были разделены на три выборки: обучающую, валидационную и тестовую. Такое распределение данных гарантировало объективность при оценке эффективности моделей и позволило избежать переобучения. Эти тщательно подготовленные данные создают основу для разработки прогностических моделей, которые не только могут повысить точность диагностики, но и оптимизировать работу специалистов, концентрируя их усилия на более сложных и требующих внимания случаях.

Для выполнения задачи бинарной классификации рентгеновских изображений применялись четыре предобученные модели глубокого обучения, каждая из которых имеет свои сильные стороны и подходит для решения подобных задач.

1. MobileNetV2 — лёгкая и быстрая сверточная сеть, адаптированная для работы в условиях ограниченных вычислительных ресурсов. Базовая модель с замороженными весами была дополнена слоями для бинарной классификации [2].

2. EfficientNet-B0 — архитектура, оптимизирующая баланс между точностью и вычислительными затратами. Финальная классификация реализована через модифицированный полносвязный слой [3].

3. ResNet18 — остаточная сеть, обеспечивающая эффективное обучение за счёт остаточных связей. Для задачи классификации модель была адаптирована путём изменения выходного слоя [4].

4. Vision Transformer (ViT) — архитектура на основе трансформеров, применяющая механизмы внимания для глобального анализа изображений. ViT была адаптирована для классификации с использованием двух выходных классов.

Качество моделей оценивалось по метрикам: точности, полноте, F1-мере. Метрики рассчитывались для обучающей, валидационной и тестовой выборок, что обеспечивало объективную оценку и сравнение моделей.

Сравнение моделей выявило следующие результаты:

1. MobileNet показала хорошие результаты в классификации пневмонии. Однако для класса "Normal" точность была несколько ниже, что может указывать на сложности при классификации здоровых образцов. В целом, модель продемонстрировала сбалансированные результаты после нескольких эпох обучения.

2. ViT продемонстрировал лучшие результаты среди всех моделей. Показана почти идеальная точность на тренировочных и валидационных выборках, а также отличная способность к генерализации на новых данных. Высокие показатели precision, recall и F1 делают её идеальным выбором для задач, требующих высокой точности. Но стоит отметить, что такая модель требует большого количества данных для эффективного обучения.

3. EfficientNet показала хорошую точность, хотя её эффективность несколько уступала ViT. Для класса "Healthy" точность была ниже, чем для "Pneumonia", но

результаты оставались стабильными и точными в процессе обучения. Также обучение этой модели заняло наибольшее количество времени.

4. ResNet продемонстрировала отличные результаты с полнотой, равной 1 для класса "Pneumonia", что важно при первичном обследовании пациентов. Тем не менее, точность классификации была несколько ниже, чем у ViT.

Литература

1. Kermany D., Goldbaum M., Cai W., et al. "Identifying Medical Diagnoses and Treatable Diseases by Image-Based Deep Learning" // Cell. – 2018. – Т. 172. – № 5. – С. 1122–1131.

2. Sandler M., Howard A., Zhu M., et al. "MobileNetV2: Inverted Residuals and Linear Bottlenecks" // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2018. – С. 4510–4520.

3. Tan M., Le Q. "EfficientNet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks" // Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning (ICML). – 2019. – С. 6105–6114.

4. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. "Deep Residual Learning for Image Recognition" // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2016. – С. 770–778.

Баграмов Никита Ильич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент, e-mail: st097350@student.spbu.ru.

УДК 519.874.001.57

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Болдырев И.А., Кожин А.С.

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейный объект

$$\dot{x} = (F + \Delta F)x + Bu, \quad (1)$$

где $B = \|b_{ij}\|$ – известная постоянная действительная матрица размерности $n \times m$; x – вектор-столбец состояния размерности n ; u – вектор-столбец управления размерности m ; $F = \|f_{ij}\|$ – известная постоянная действительная матрица размерности $n \times n$, $\Delta F = \|\Delta f_{ij}\|$ – непостоянная матрица размерности $n \times n$, значения элементов которой удовлетворяют условию

$$\forall (i, j) \in \overline{\{1, n\}}: \Delta f_{ij} = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m, \quad (2)$$

где μ_{ij}^m, δ_m – действительные числа, причем $\forall (i, j) \in \overline{\{1, n\}}, \forall m \in \overline{\{1, p\}} \mu_{ij}^m$ – имеют фиксированные известные значения, а δ_m – известны с точностью до интервалов

$$\delta_m^{\min} \leq \delta_m \leq \delta_m^{\max}. \quad (3)$$

Переменные δ_m будем называть интервальными числами, а любую матрицу, значение любого элемента которой зависит хотя бы от одного интервального числа – интервальной матрицей.

Рассмотрим “задачу об аналитическом конструировании регулятора” [1] для линейных объектов управления с известными параметрами и изучим возможность обобщения подобного метода в том случае, когда объектом управления является линейная интервальная динамическая система вида (1).

2. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛИДС

Введем следующие сокращенные обозначения: $M > 0$ – означает то, что матрица M положительно определена; $M \geq 0$ – означает то, что матрица M неотрицательно определена; $M < 0$ – означает то, что матрица M отрицательно определена; $M \leq 0$ – означает то, что матрица M – неположительно определена; $M = (M)^T$ – означает то, что M – симметричная матрица; $M \in R^{m \times n}$ – означает то, что матрица M имеет размерность $m \times n$. Например: $M = (M)^T > 0$, $M \in R^{n \times n}$ – означает то, что матрица M симметрична, положительно определена и имеет размерность $n \times n$.

Положим, что некоторые постоянные и известные действительные матрицы $F \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $K = K^T > 0$, $K \in R^{n \times n}$, $Q = Q^T \geq 0$, $Q \in R^{n \times n}$, $R = R^T > 0$, $R \in R^{m \times m}$ удовлетворяют уравнению Риккати

$$Q - KBR^{-1}B^TK^T + KF + F^TK^T = 0. \quad (4)$$

В случае $\Delta F \equiv [0]$ управление

$$u = -R^{-1}B^TK^T x \quad (5)$$

приложенное к объекту (1) будет минимизировать функционал

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt. \quad (6)$$

То есть будет оптимальным по отношению к этому функционалу.

Обобщим понятие критерия (6) полагая, что $\Delta F \neq [0]$ – и удовлетворяет условиям (2), (3).

Обозначим Ω множество всех матриц $A^k = \|a_{ij}^k\|$, размерности $n \times n$, каждый элемент которых задается следующим образом:

$$\forall (i, j) \in \overline{\{1, n\}}, \forall k \in \overline{\{0, 2^p - 1\}}: a_{ij}^k = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m^k + f_{ij}; \quad (7)$$

Положим

$$a_{ij}^0 = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m^{\min} + f_{ij}. \quad (8)$$

Несложно показать, что мощность множества Ω равна 2^p .

Лемма 1. В общем случае любую интервальную матрицу $A = F + \Delta F$, удовлетворяющую условиям (2),(3) всегда можно выразить в виде линейной комбинации

$$A = F + \Delta F = \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \cdot A^k, \quad (9)$$

причем

$$\lambda_k \geq 0 \quad (k = \overline{0; 2^p - 1}), \quad (10)$$

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k = 1. \quad (11)$$

Доказательство.

Доказательство леммы заключается в обосновании тождеств (9), (10), (11).

Не нарушая общности получаемого результата, на время доказательства данной леммы положим, что значения интервальных переменных $\delta_m \quad \forall m \in \overline{1, p}$ – известные величины, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\tilde{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} \geq \frac{\tilde{\delta}_{i+1}}{\bar{\delta}_{i+1}}, \quad \forall i \in \overline{1, p-1}, \quad (12)$$

где $\tilde{\delta}_k = \delta_k - \delta_k^{\min}$; $\bar{\delta}_k = \delta_k^{\max} - \delta_k^{\min}$.

Также, положим

$$\lambda_0 = \left(1 - \frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{\delta}_1}\right); \lambda_k = \left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\bar{\delta}_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\bar{\delta}_{k+1}}\right), \quad \forall k \in \overline{1, p-1}; \quad (13)$$

$$\lambda_p = \frac{\tilde{\delta}_p}{\bar{\delta}_p}; \lambda_m = 0, \quad \forall m \in \overline{p+1, 2^p-1}.$$

В этом случае истинность (10) автоматически следует из (12) и (13).

Рассмотрим сумму $\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k$, которая согласно (13) может быть представлена в виде:

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k = \left(1 - \frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{\delta}_1}\right) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\bar{\delta}_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\bar{\delta}_{k+1}}\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\bar{\delta}_p} = \left(1 - \frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{\delta}_1}\right) + \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{\delta}_1} - \frac{\tilde{\delta}_p}{\bar{\delta}_p}\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\bar{\delta}_p} = 1.$$

То, что $\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k = 1$ – подтверждает истинность (11).

Далее рассмотрим матрицы $A^k = \|a_{ij}^k\| \quad (k \in \overline{0, p})$, которые, согласно (7), принадлежат множеству Ω . Элементы этих матриц определим следующим образом:

$$\forall (i, j) \in \overline{1, n}: a_{ij}^k = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m^k + f_{ij} \quad (14)$$

где
$$\delta_m^k = \begin{cases} \delta_m^{\max} & \text{если } m \leq k \\ \delta_m^{\min} & \text{если } m > k \end{cases} \quad \text{или} \quad \tilde{\delta}_m^k = \begin{cases} \delta_m^{\max} - \delta_m^{\min} & \text{если } m \leq k \\ 0 & \text{если } m > k \end{cases}. \quad (15)$$

Общность доказательства не нарушится, если будет доказана истинность (9) по отношению к какому-либо одному элементу a_{ij} матрицы $A = \|a_{ij}\|$.

В этом случае, согласно с правилами сложения матриц и умножения матрицы на число, равенство (9), в поэлементной записи, примет вид:

$$a_{ij} = f_{ij} + \Delta f_{ij} = \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \cdot a_{ij}^k.$$

Из всего вышесказанного, согласно (2), приходим к тому, что доказательство истинности тождества (9) может быть сведено к доказательству истинности тождества

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \cdot a_{ij}^k = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m + f_{ij}. \quad (16)$$

Далее приводится цепочка выкладок с указанием номера тождества, благодаря которому обосновывается правомерность очередного преобразования:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \cdot a_{ij}^k \stackrel{(13)}{=} \left(1 - \frac{\tilde{\delta}_1}{\delta_1}\right) a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\delta_{k+1}}\right) a_{ij}^k + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} a_{ij}^p \stackrel{(14)}{=} \\ & \stackrel{(14)}{=} \left(1 - \frac{\tilde{\delta}_1}{\delta_1}\right) a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\delta_{k+1}}\right) \left(a_{ij}^0 + \sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m^k\right)\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(a_{ij}^0 + \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m^p\right) = \\ & = \sum_{k=0}^p \lambda_k a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\delta_{k+1}}\right) \left(\sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m^k\right)\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m^p\right) \stackrel{(11)}{=} \\ & \stackrel{(11)}{=} a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\delta_{k+1}}\right) \left(\sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m^k\right)\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m^p\right) \stackrel{(15)}{=} \\ & \stackrel{(15)}{=} a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k} - \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\delta_{k+1}}\right) \left(\sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right) = \\ & = a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}\right) \left(\sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) - \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{\delta_{k+1}}\right) \left(\sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right) = \\ & = a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}\right) \left(\sum_{m=1}^k \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) - \sum_{k=2}^p \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}\right) \left(\sum_{m=1}^{k-1} \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right) = \\ & = a_{ij}^0 + \sum_{k=2}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}\right) \left(\sum_{m=1}^{k-1} \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) + \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{\delta_1}\right) (\mu_{ij}^1 \cdot \bar{\delta}_1) + \sum_{k=2}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}\right) (\mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_k)\right) - \\ & - \sum_{k=2}^{p-1} \left(\left(\frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}\right) \left(\sum_{m=1}^{k-1} \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right)\right) - \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^{p-1} \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right) + \frac{\tilde{\delta}_p}{\delta_p} \left(\sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \bar{\delta}_m\right) = \\ & = a_{ij}^0 + \mu_{ij}^1 \cdot \tilde{\delta}_1 + \sum_{m=2}^{p-1} (\mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m) + \mu_{ij}^p \cdot \tilde{\delta}_p = \\ & = a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^p \mu_{ij}^k \cdot \tilde{\delta}_k = \\ & = a_{ij}^0 + \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \tilde{\delta}_m = \\ & = a_{ij}^0 + \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot (\delta_m - \delta_m^{\min}) = a_{ij}^0 + \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m - \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m^{\min} \stackrel{(8)}{=} \\ & = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m^{\min} + f_{ij} + \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot (\delta_m - \delta_m^{\min}) = \\ & = \sum_{m=1}^p \mu_{ij}^m \cdot \delta_m + f_{ij}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к выполнению тождества (16), а как было сказано выше, это доказывает истинность тождества (9).

Лемма доказана.

Теорема 1. Если все матрицы $A^k = \|a_{ij}^k\| \quad \forall k \in \overline{\{0, 2^p - 1\}}$ из множества Ω удовлетворяют уравнению

$$Q^k - KBR^{-1}B^TK^T + KA^k + (A^k)^TK^T = 0, \quad (17)$$

где $Q^k = (Q^k)^T \geq 0, Q \in R^{n \times n}, K = K^T > 0, K \in R^{n \times n}, R = R^T > 0, R \in R^{m \times m}$ – действительные фиксированные матрицы, то любая интервальная матрица

$A = \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \cdot A^k$ удовлетворяет уравнению

$$Q^* - KBR^{-1}B^TK^T + KA + A^TK^T = 0, \quad (18)$$

где

$$Q^* = \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \cdot Q^k \quad (19)$$

– неотрицательно определенная матрица, причем

$$\int_0^{\infty} (x^T Q^* x + u^T R u) dt = x_0^T K x_0, \quad (20)$$

где $x(0) = x_0$ – начальное значение вектора состояния $x(t) \in R^n$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 необходимо показать истинность (18) и (20). Покажем справедливость тождества (18). Умножив левую и правую часть (17) на λ_k и просуммировав по k , получим:

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} (\lambda_k Q^k - \lambda_k KB(R)^{-1}(B)^T(K)^T + \lambda_k KA^k + \lambda_k (A^k)^T(K)^T) = 0. \quad (21)$$

После чего, в соответствии с правилами линейной алгебры [2], преобразуем (21) и придем к выражению:

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} (\lambda_k Q^k) - (KB(R)^{-1}(B)^T(K)^T) \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k + K \sum_{k=0}^{2^p-1} (\lambda_k A^k) + \left(\sum_{k=0}^{2^p-1} (\lambda_k A^k) \right)^T (K)^T = 0. \quad (22)$$

Окончательно в соответствии с (9), (11), (19) из (22) получим (18).

Следует заметить, что Q^* – неотрицательно определенная симметричная матрица.

Это следует из (10), (19) и из того, что $\forall k \in \overline{\{0, 2^p - 1\}} \quad Q^k = (Q^k)^T \geq 0$.

Покажем истинность (20), для этого рассмотрим отрицательно определенную функцию Ляпунова

$$V = -x^T K x. \quad (23)$$

Ее производная по времени в силу линейной системы

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TK^T)x,$$

полученной из (1) и (5), будет иметь вид:

$$\dot{V} = -x^T (KA + A^TK^T - 2KBR^{-1}B^TK^T)x. \quad (24)$$

Из тождества (18) получим

$$KA + A^TK^T = -Q^* + KBR^{-1}B^TK^T. \quad (25)$$

Согласно (24), (25) придем к тому, что

$$\dot{V} = x^T (Q^* + KBR^{-1}B^TK^T)x. \quad (26)$$

В соответствии с (6) и (26) получаем

$$\dot{V} = x^T Q^* x + u^T R u. \quad (27)$$

Так как функция Ляпунова (23) отрицательно определена, а (26) и, следовательно (27) – положительно определены, то нулевое решение системы (1) в силу (5) будет асимптотически устойчивым. В этом случае

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (x(b)^T Kx(b)) = 0,$$

в связи с чем, и согласно (23) и (27)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (x^T Q^* x + u^T R u) dt &= - \lim_{b \rightarrow \infty} (x(t)^T Kx(t)) \Big|_0^b = \\ &= - \lim_{b \rightarrow \infty} (x(b)^T Kx(b)) + (x(0)^T Kx(0)) = x_0^T Kx_0. \end{aligned}$$

Тождество (20) доказано. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $Q = Q^*$, то управление (5) для интервального объекта (1) минимизирует функционал (6) для любой матрицы A вида (9).

Следствие 2. Если $Q = Q^*$, то минимальное значение функционала (6) имеет одну и ту же величину, то есть не зависит от значений элементов матрицы A вида (9).

Следствие 3. Если $Q = Q^*$, то неизменность значения функционала (6) достигается за счет того, что матрица $Q = Q^*$ зависит от матрицы A вида (9) и, поэтому (20) можно считать обобщением (6), когда объектом управления является линейная интервальная динамическая система (1).

3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

В практических приложениях представляет интерес верхняя оценка величины функционала (6) в том случае, когда матрица A является интервальной, а матрица Q – постоянной и не зависит от элементов матрицы A .

Рассмотрим случай, когда система автоматического управления состоит из интервального объекта (1) и управления (5). Если $Q = (Q)^T \geq 0, R = (R)^T > 0$ – фиксированные матрицы, то необходимо оценить числовое значение функционала (6), структура которого, при данной постановке, не будет зависеть от матрицы A .

Для доказательства изложенной ниже теоремы необходимо доказать две леммы.

Лемма 2. Если H и F – две положительно определенные симметричные матрицы размерности $n \times n$, то всегда найдется невырожденная матрица W размерности $n \times n$ такая, что $H = W^T \cdot \tilde{H}^d \cdot W, F = W^T \cdot I \cdot W$, где I – единичная матрица, $\tilde{H}^d = \|\tilde{h}_{ij}^d\|$ – диагональная матрица, то есть $\tilde{h}_{ij}^d = 0$ если $i \neq j, \tilde{h}_{ij}^d > 0$ если $i = j \forall (i, j) \in \overline{\{1, n\}}$.

Доказательство. Из курса линейной алгебры [2] известно, что симметричную положительно определенную матрицу F можно представить в виде произведения симметричных положительно определенных (а следовательно и невырожденных) матриц, то есть

$$F = \hat{F} \cdot \hat{F},$$

в этом случае несложно показать, что $\tilde{H} = (\hat{F})^{-1} \cdot H \cdot (\hat{F})^{-1}$ – симметричная положительно определенная матрица общего вида, которую, в свою очередь, всегда можно диагонализировать. То есть

$$\tilde{H} = T_{\tilde{H}}^T \tilde{H}^d T_{\tilde{H}},$$

где \tilde{H}^d – диагональная матрица, причем $T_{\tilde{H}}^T = T_{\tilde{H}}^{-1}$ – невырожденная матрица.

Окончательно приходим к тому, что

$$F = (T_{\tilde{H}} \cdot \hat{F})^T \cdot I \cdot (T_{\tilde{H}} \cdot \hat{F}),$$

$$H = (T_{\tilde{H}} \cdot \hat{F})^T \cdot \tilde{H}^d \cdot (T_{\tilde{H}} \cdot \hat{F}).$$

Таким образом, $W = T_{\tilde{H}} \cdot \hat{F}$ – всегда существует и невырожденная, то есть $\det(W) \neq 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим 2^p уравнений относительно переменной μ :

$$\det\left(\left(Q + KBR^{-1}B^TK^T\right) - \mu\left(Q^k + KBR^{-1}B^TK^T\right)\right) = 0, \quad (28)$$

где $k \in \overline{\{1, 2^p\}}$.

Лемма 3. Каждое из 2^p уравнений вида (28) имеет n вещественных решений.

Доказательство. Положим

$$S = \left(Q + KBR^{-1}B^TK^T\right), \quad P^k = \left(Q^k + KBR^{-1}B^TK^T\right) \quad (29)$$

(нетрудно показать, что $S = (S)^T > 0, P^k = (P^k)^T > 0$), тогда уравнение (28) примет вид:

$$\det(S - \mu P^k) = 0. \quad (30)$$

Но согласно условию Леммы 2, найдется невырожденная матрица W^k такая, что

$$S - \mu P^k = (W^k)^T (S_d^k - \mu I) (W^k), \quad (31)$$

где S_d^k – диагональная положительно определенная, а I – единичная матрицы. В соответствии с (31) и со свойствами определителей

$$\det(S - \mu P^k) = \det((W^k)^T (S_d^k - \mu I) (W^k)) = \det((W^k)^T) \det(S_d^k - \mu I) \det(W^k). \quad (32)$$

Так как $\det(W^k) = \det((W^k)^T) \neq 0$ то, согласно (32) уравнение (30), а, следовательно, и (28) примут вид:

$$\det(S_d^k - \mu I) = 0. \quad (33)$$

Так как S_d^k – вещественная диагональная матрица размерности $n \times n$, то уравнение (33) имеет n вещественных решений, а, следовательно, и уравнение (28) тоже имеет n вещественных решений. Лемма доказана.

Обозначим i -е решение k -го уравнения вида (28) как μ_i^k . Пусть

$$L = \max_{i,k} (\mu_i^k), i \in \overline{\{1, n\}}, k \in \overline{\{1, 2^p\}}. \quad (34)$$

Теорема 2. Если объект (1) принадлежит к классу линейных интервальных динамических систем, а управление u имеет вид (5), то величину функционала (6) можно оценить при помощи неравенства

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \leq L(x_0^T Kx_0), \quad (35)$$

где $x(0) = x_0$ – начальное значение вектора состояния $x(t) \in R^n$.

Доказательство. Вначале покажем, что матрица

$$\left(\left(Q + KBR^{-1}B^TK^T\right) - L\left(Q^k + KBR^{-1}B^TK^T\right)\right) \quad (36)$$

является неположительно определенной. Для этого воспользуемся обозначениями (29). Тогда матрица (36) примет вид

$$S - LP^k.$$

Согласно условию Леммы 2 найдется матрица W^k такая, что

$$S - LP^k = (W^k)^T (S_d^k - LI) (W^k), \quad (37)$$

где S_d^k – диагональная положительно определенная, а I – единичная матрицы. Согласно (37) знакоопределенность (36) полностью совпадает со знакоопределенностью

$$(S_d^k - LI). \quad (38)$$

Матрице (38) будет соответствовать характеристическое уравнение

$$\det(S_d^k - LI - \eta I) = 0, \quad (39)$$

где η – свободная переменная.

Проанализируем (39), для чего произведем над ним несложные преобразования

$$\det(S_d^k - (L + \eta) \cdot I) = 0. \quad (40)$$

Положим, что

$$\mu = (L + \eta), \quad (41)$$

и придем к уравнению (33), множество решений которого полностью эквивалентно множеству решений уравнения вида (28). Имея зависимость (41) и множество решений уравнения (33) $\mu_i^k : i \in \overline{\{1, n\}}$, можно получить множество решений уравнения (40) $\eta_i^k : i \in \overline{\{1, n\}}$, которое будет иметь вид:

$$\eta_i^k = \mu_i^k - L : i \in \overline{\{1, n\}}. \quad (42)$$

Из (34) и (42) следует, что $\eta_i^k \leq 0 : i \in \overline{\{1, n\}}$. А так как (42) – это множество решений характеристического уравнения матрицы (36) то, делаем вывод о том, что (36) неположительно определена и, в этом смысле можно записать неравенство

$$(Q + KBR^{-1}B^TK^T) - L(Q^k + KBR^{-1}B^TK^T) \leq 0. \quad (43)$$

Далее приводится цепочка эквивалентных преобразований, проводимых в соответствии с правилами линейной алгебры и математического анализа:

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k \left((Q + KBR^{-1}B^TK^T) - L(Q^k + KBR^{-1}B^TK^T) \right) \leq 0,$$

где λ_k удовлетворяют свойствам (10), (11). Проводя дальнейшие преобразования, получим:

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k Q + \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k KBR^{-1}B^TK^T \right) - L \left(\sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k Q_k + \sum_{k=0}^{2^p-1} \lambda_k KBR^{-1}B^TK^T \right) \right) \leq 0.$$

Воспользовавшись (9), (10), (11), (19), придем к тому, что

$$\left((Q + KBR^{-1}B^TK^T) - L(Q^* + KBR^{-1}B^TK^T) \right) \leq 0. \quad (44)$$

Так как матрицы $Q + KBR^{-1}B^TK^T$, $Q^* + KBR^{-1}B^TK^T$ – положительно определены, то неравенство (44) можно трактовать в виде неравенства

$$x^T (Q + KBR^{-1}B^TK^T) x \leq Lx^T (Q^* + KBR^{-1}B^TK^T) x. \quad (45)$$

Из (45) окончательно следует

$$\int_0^{\infty} x^T (Q + KBR^{-1}B^TK^T) x dt \leq L \int_0^{\infty} x^T (Q^* + KBR^{-1}B^TK^T) x dt. \quad (46)$$

Из (46) и (5) следует

$$\int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \leq L \int_0^{\infty} (x^T Q^* x + u^T Ru) dt. \quad (47)$$

Из (47) и (20) следует

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \leq L \int_0^{\infty} (x^T Q^* x + u^T Ru) dt = L(x_0^T Kx_0). \quad (48)$$

Легко увидеть, что из (48) следует (35). Что и требовалось доказать. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все изложенное выше позволяет рассматривать методы синтеза линейных алгоритмов управления вида (5) для ЛИДС, основанных на минимизации правой части (35). Такой подход гарантирует заранее установленные показатели качества переходных процессов в условиях интервальной неопределенности параметров объекта управления (1).

Литература

1. Атинс М., Фалб П. Оптимальное управление.–М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
2. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
3. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981.– 112 с.
4. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. –122 с.

Болдырев Игорь Александрович, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры Электропривода, автоматике и управления в технических системах, e-mail: boldyrev_igor@mail.ru

Кожин Алексей Сергеевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры Электропривода, автоматике и управления в технических системах, e-mail: ellex@mail.ru

УДК 539.21

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОННОЙ СТРУКТУРЫ НАНОКЛЕТОЧНОГО КРИСТАЛЛА НА ОСНОВЕ ГЕРМАНИЯ, ДОПИРОВАННОГО АТОМАМИ МЕДИ

Борщ Н.А.¹, Переславцева Н.С.², Радина В.Р.¹

¹ *ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет, г. Воронеж,*

² *ФГБОУ ВО Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж*

Наноклеточные кристаллы на основе элементов IV группы – кремния, германия и олова являются перспективными функциональными материалами. Ведутся исследования по получению на их основе новых термоэлектриков, материалов для литий-ионных батарей. Элементарная ячейка этих кристаллов строится из сфероидальных кластеров из атомов Si, Ge или Sn, внутри которых помещается атом, стабилизирующий сфероид (например, атом бария). Благодаря такой специфической структуре появляется возможность модифицировать свойства кристаллов, изменяя сорт интеркалированного атома и/или замещая часть атомов четвертой группы атомами другого сорта.

В данной работе представлены результаты расчета электронной структуры Cu-замещенного клатрата на основе германия – $\text{Ba}_8\text{Cu}_6\text{Ge}_{40}$. Расчет проводился методом линейризованных присоединенных плоских волн (ЛППВ) [1] в рамках локального приближения функционала плотности с использованием обменно-корреляционного потенциала [2]. В этом приближении учитываются все релятивистские эффекты, кроме

спин-орбитального расщепления. Для расчетов электронной структуры использовался базис из 2517 ЛППВ. В разложении базисной функции по сферическим гармоникам учитывались вклады до $l_{\max}=7$.

Без учета зон, соответствующих Cu 3d-состояниям, в валентной зоне содержится 92 энергетические зоны. Объяснить это можно тем, что замещающие атомы меди стремятся к образованию тетраэдрических ковалентных связей, для которых необходима четырехэлектронная валентная конфигурация. Недостающие электроны поступают от атомов Ba, которые являются донорами электронов. Каждый атом бария отдает по два валентных 6s-электрона. Таким образом, от восьми атомов бария поступают 16 дополнительных электронов на элементарную ячейку. Поскольку атомы Cu имеют частично заполненную 6s-оболочку и незаполненную 6p-оболочку, то для образования тетраэдрических связей с атомами германия, им необходимо по три дополнительных электрона. Для шести атомов меди необходимо 18 электронов для образования связей с атомами германия, поэтому в элементарной ячейке образуется дефицит восьми электронов. Поэтому уровень Ферми пересекает потолок валентной зоны, четыре энергетические зоны у потолка валентной зоны заполнены частично. Ширина запрещенной зоны составляет всего 0.05 эВ.

Литература

1. Koelling D.D. Arbman G.O. Use of energy derivative of the radial solution in an augmented plane wave method: Application to copper. // J. Phys. F Met. Phys. 1975. V. 5. P. 2041–2054.

2. Vosko S.N., Wilk L., Nusair M. Accurate spin-dependent electron liquid correlation energies for local spin density calculations: a critical analysis // Can. J. Phys. 1980. V. 58. P. 1200-1211.

Борщ Надежда Алексеевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики твердого тела и наноструктур, e-mail: borsch@phys.vsu.ru.

Переславцева Наталья Сергеевна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: nsper@ya.ru.

Радина Виктория Рустамовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры физики твердого тела и наноструктур, e-mail: viminova@inbox.ru.

УДК 539.21

ВЛИЯНИЕ БАЗИСНОГО НАБОРА НА РЕЗУЛЬТАТЫ DFT-ЭКСПЕРИМЕНТА ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ АТОМНОЙ СТРУКТУРЫ НЕКОТОРЫХ СТАННАСФЕРЕНОВ

Борщ Н.А.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Атомные кластеры на основе олова являются элементарными строительными единицами для формирования новых функциональных материалов различной

размерности. Особый интерес представляют кластеры из двенадцати атомов олова, поскольку кластер Sn_{12}^{2-} является так называемым «суператомом», т.е. сверхустойчивым кластером со высокосимметричной структурой икосаэдра [1]. Известны исследования по синтезу кластеров MeSn_{12}^- (Me – переходные и благородные металлы), в которых приводятся также данные по их фотоэлектронной спектроскопии [2]. Однако структура этих кластеров экспериментально не была определена, неизвестно также и о расчетных работах, посвященных этому вопросу. При этом очевидно, что эффективные работы по синтезу новых наноразмерных материалов невозможны без информации об атомной структуре кластеров олова.

В работе представлены результаты расчета атомной структуры и электронных спектров стабильных изомеров кластера TiSn_{12}^- . Для каждого изомера рассчитан электронный спектр, сопоставление которого с экспериментальным фотоэлектронным спектром [2] позволило установить, какие именно структуры могут быть детектированы экспериментально. Расчеты проводились в рамках теории функционала плотности с использованием B3PW91-функционала [3, 4] в комбинации с базисами SDD [5], DGDZVP [6] и def2-TZVPD [7]. Для расчетов использовался пакет программ Gaussian 09 [8].

Для кластера TiSn_{12}^- получено пять стабильных изомеров, структуры которых показаны на рис. 1, а разности между их средними энергиями связи приведены в таблице 1. Начальные структуры в процессе оптимизации были одинаковы во всех трех расчетах. При оптимизации с использованием базиса SDD стартовая структура APR1 трансформировалась в стабильную структуру PR. Из таблицы 1 видно, что соотношение между средними энергиями связи в изомерах существенно зависит от используемого базиса.

Профили рассчитанных электронных спектров, полученные с разными базисными наборами, имеют несущественные количественные отличия. В SDD-расчете основным изомером является изомер IC, причем со значительным энергетическим отрывом от остальных стабильных изомеров. Рассчитанный электронный спектр этого изомера показывает хорошее согласие с экспериментальным [2]. В DGDZVP-расчете изомеры IC, PR, APR2 и APR3 имеют практически равные средние энергии связи, однако их суммарный электронный спектр плохо согласуется с экспериментальным [2]. По результатам def2-TZVPD-расчета основными являются APR3- и IC-изомеры. Сопоставление рассчитанного суммарного спектра этих изомеров с экспериментальным фотоэлектронным спектром [2] показало их хорошее соответствие друг другу.

Подытоживая, можно утверждать, что наилучший результат позволяет получить использование базиса def2-TZVPD. Базис SDD также позволяет получить согласующийся с экспериментом результат, однако есть вероятность занижения средней энергии в некоторых изомерах, поэтому при анализе результатов SDD-расчетов следует больше опираться на экспериментальные данные. Если же соответствующих экспериментальных данных нет, то использование этого базиса нежелательно. Базис DGDZVP представляется самым неудачным выбором.

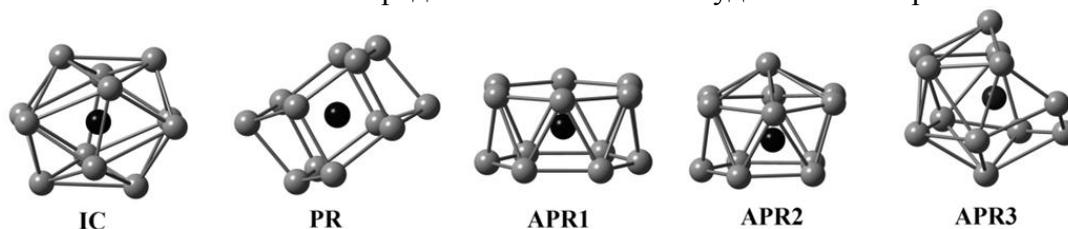


Рисунок 1. Атомные структуры стабильных изомеров кластера TiSn_{12}^- . Серым цветом показаны атомы олова, черным – атом титана. Связи Ti-Sn не показаны для упрощения рисунка.

Таблица 1. Разница между средними энергиями связи в основном и побочных изомерах кластера TiSn_{12}^- (эВ/атом).

Изомер	SDD	DGDZVP	def2-TZVPD
IC	0.0000	0.0014	0.0011
PR	0.0289	0.0054	0.0599
APR1	–	0.0291	0.0390
APR2	0.0107	0.0016	0.0090
APR3	0.0116	0.0000	0.0000

Для представленных расчетов были использованы вычислительные ресурсы Суперкомпьютерного центра Воронежского государственного университета.

Литература

1. Cui L.-F. Stannaspherene Sn_{12}^{2-} // J. Am. Chem. Soc. 2006. V. 128. № 26. P. 8390-8391.
2. Cui L.-F., Wang. L.-S. Stable icosahedral hollow cage clusters: stannaspherene and plumbaspherene // International Reviews in Physical Chemistry. V. 27. № 1. P. 139-166.
3. Becke A.D. Density-functional thermochemistry. III. The role of exact exchange // J. Chem. Phys. 1993. V. 98. P. 5648-5652.
4. Perdew J.P., Wang Y. Accurate and Simple Analytic Representation of the Electron-Gas Correlation Energy // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. P. 13244-13249.
5. Dunning Jr. T. H., Hay P. J. in Modern Theoretical Chemistry, Ed. H. F. Schaefer III, Vol. 3 (Plenum, New York, 1977) 1-28.
6. Godbout N., Salahub D. R., Andzelm J., Wimmer E. Optimization of Gaussian-type basis sets for local spin density functional calculations. Part I. Boron through neon, optimization technique and validation // Can. J. Chem. 1992. V. 70. P. 560-571.
7. Weigend F., Ahlrichs R. Balanced basis sets of split valence, triple zeta valence and quadruple zeta valence quality for H to Rn: Design and assessment of accuracy // Phys. Chem. Chem. Phys. 2005. V. 7. P. 3297-3305.
8. Gaussian 09, Revision D.01, Gaussian, Inc., Wallingford CT, 2013.

Борщ Надежда Алексеевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики твердого тела и наноструктур, e-mail: borsch@phys.vsu.ru

УДК 621.865.8:004.932

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИМ КОМПЛЕКСОМ НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ЗРЕНИЯ

Бочаров В.Ж., Бурковский В.Л.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

В рамках проблематики развития и расширения использования робототехнических комплексов, применяемых для решения широкого круга задач по повышению эффективности монтажных, демонтажных и работ по обслуживанию железнодорожных путей в Российской Федерации, все большее внимание уделяется автоматизации проведения работ. Чем большее количество операций будет

автоматизировано, тем меньшее воздействие на эффективность проведения работ будет оказывать «человеческий фактор».

Одной из наиболее трудоемких операций для операторов робототехнических комплексов, применяемых на российских железных дорогах, является операция по замене пришедшей в негодность шпалы. Если разбить эту операцию на этапы, можно получить следующую последовательность действий: расчистка шпальных ящиков; демонтаж крепления шпалы; операция по извлечению шпалы; установка новой шпалы в шпальный ящик; засыпка щебня и его уплотнение в шпальном ящике.

Наиболее трудоемкими для операторов являются этапы извлечение старой и установка новой шпалы: оператору приходится управлять исполнительными механизмами робототехнического комплекса в ограниченном пространстве шпального ящика.

Для автоматизации проведения данного вида работ робототехнический комплекс можно оснастить системой машинного зрения, которая будет способна распознать шпалу, оценить ее размеры и расположения и выдать навигационные решения для исполнительных механизмов робототехнического комплекса для взаимодействия с ней. Таким образом перед системой управления и системой машинного зрения стоят следующие задачи: определение положения и классификация объекта взаимодействия (шпалы), определение положения концевой звена исполнительного механизма робототехнического комплекса.

Задачу определения положения и классификации можно решить, используя аппаратное обеспечение машинного зрения в виде специализированной камеры, лазерного дальномера и вычислительного блока достаточной производительности. Программное же решение будет представлять собой использование YOLO (You Look Only Once) архитектуры нейронной сети. Данная архитектура, наиболее подходящая для распознавания и классификации объектов с помощью камер машинного зрения, с помощью решения задачи определения положения объекта в 3D-пространстве по перспективной проекции объекта на плоскость сенсора камеры (PnP — Perspective-n-Point). Решение этой задачи представляет массив пиксельных координат, которые достаточно легко преобразовать в метрические по формулам:

$$x = \frac{(u - u_0)}{P_x},$$
$$y = \frac{(v - v_0)}{P_y},$$

где u_0, v_0 — координаты основных точек в пикселях, P_x, P_y — фокусное расстояние в пикселях.

С помощью лазерного дальномера формируется карта глубин, которая затем накладывается на массив кадра, преобразованный в метрические координаты.

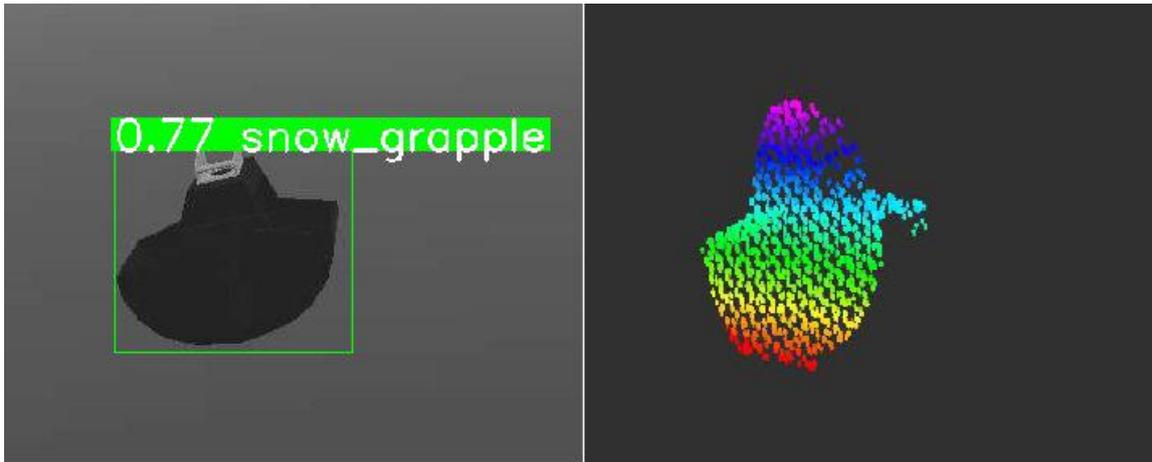


Рис. 1 Наложение карты глубин на массив кадра в метрических координатах

Система управления робототехническим комплексом, имея информацию о расположении целевого объекта формирует координатное представление конечной точки для исполнительного механизма робототехнического комплекса — X, Y, Z ; где X — расстояние до конечной точки, Y — высота конечной точки, Z — угол поворота на конечную точку исполнительного механизма. Эти координаты передаются на блок решения обратной задачи кинематики численным методом:

$$x = L1 \cdot \cos(\alpha) + L2 \cdot \cos(\beta) + L3 \cdot \cos(\gamma),$$

$$y = L1 \cdot \sin(\alpha) + L2 \cdot \sin(\beta) + L3 \cdot \sin(\gamma),$$

где $L1, L2, L3$ — длины секций исполнительного механизма, α, β, γ — углы секций исполнительного механизма. Полученные уравнения прямой кинематики будут выполняться итерационно по всем возможным комбинациям углов α, β, γ , чтобы найти те, которые удовлетворяют условиям нахождения точки (X, Y) в пределах заданных границ системой машинного зрения. Вычислив, требуем углы секций исполнительного механизма, вывод по ним механизма уже не представляет сложности.

Таким образом, реализация функций автоматического управления робототехническим комплексом на основе машинного зрения представляет собой комплексный подход, который позволяет значительно повысить эффективность и безопасность выполнения операций по замене шпалы на железнодорожных путях. Использование системы машинного зрения и численных методов кинематики позволяет автоматизировать наиболее трудоемкие этапы работы, минимизируя влияние человеческого фактора и повышая точность и надежность выполнения задач.

Литература

1. Diwan T., Anirudh G., Tembhumne J. V. Object detection using YOLO: Challenges, architectural successors, datasets and applications // multimedia Tools and Applications. – 2023. – Т. 82. – №. 6. – С. 9243-9275.
2. Бурковский В. Л. и др. Интеллектуализация управления производственными объектами в условиях неопределенности // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2021). – 2021. – С. 13-25.
3. Рентюк В. Машинное зрение в 3D: ToF-системы компании SICK // Control Engineering Россия. – 2020. – №. 1. – С. 38-44.

Бочаров Владимир Жанович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, аспирант кафедры электропривода, автоматики и управления в технических системах, e-mail: dr.bocharoff@yandex.ru.

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электропривода, автоматики и управления в технических системах, e-mail: bvl@vorstu.ru

УДК 625.7

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ ПРОИЗВОДСТВА АСФАЛЬТОБЕТОННОЙ СМЕСИ

Волков И.Н., Бурковский В.Л.

«Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж, Россия

Долговечность и надежность автомобильных дорог определяется качеством дорожного покрытия на основе асфальтобетонных смесей. С точки зрения управления, информативными являются параметры технологического процесса производства а/б смеси, которые осуществляют его функционирование в заданных границах регулирования [1].

Одной из самой важных стадий в приготовлении а/б смеси является перемешивание материалов с битумом при температуре 160-180°C. Несоблюдении данного температурного режима несет за собой отрицательные последствия, приводящие к разрушению дорожного покрытия.

Процесс смешивания осуществляется на специальном технологическом оборудовании, после чего готовая смесь транспортируется в заданное место. При этом требуемая температура поддерживается с помощью горелки. В условиях неопределенности основных технологических параметров для реализации процесса управления необходимо использовать аппарат нечеткой логики.

Все параметры регулирования предлагается представить в следующем виде:

1. $(L1, \langle T1 \rangle, X)$, состояние «норма» для параметра «температура смеси» считается идеальным, поэтому из этого состояния может быть два перехода: «слишком низкая» \rightarrow «низкая» \rightarrow «средняя», при этом терм-множество $\langle T1 \rangle = \{\langle \text{«Увеличить»}, \langle \text{«Значительно увеличить»} \rangle\}$;
2. $(L2, \langle T2 \rangle, X)$, где $\langle T2 \rangle = \{\langle \text{«Уменьшить»}, \langle \text{«Значительно уменьшить»} \rangle\}$;
3. $(L3, \langle T3 \rangle, X)$, где $\langle T3 \rangle = \{\langle \text{«Не изменять»} \rangle\}$.

Температура асфальтобетонной (а/б) смеси регулируется за счет изменения подогрева горелки АБЗ. Будем использовать газовую горелку, так как в условиях города она самая удобная, потому что это проще с точки зрения подведения инженерных коммуникаций к местоположению комплекса. Горелка позволяет использовать при производстве смеси самый дешевый и экологичный вид топлива — природный газ.

Сохранение и поддержание температуры а/б смеси позволяет качественно развить процесс ее производства. При контроле изменения температуры а/б смеси нужно вносить управляющие воздействия на весь процесс производства. Изменение объема подачи газа при приготовлении влияет на температуру всей смеси. Объем газа определяется в

кубических метрах. При увеличении этого параметра, температура смеси становится выше, а чем ниже уровень подачи газа, тем ниже температура а/б смеси.

За основу берется температура асфальтобенной смеси, которая должна удерживаться в постоянном диапазоне, при помощи газовой горелки. Этот метод поможет интеллектуализировать систему управления производственными объектами с неопределенными параметрами. Возьмем интервал температуры а/б смеси $[T_{\min}, T_{\max}]$, который нужно поддерживать и сохранить температуру только в этом диапазоне [3].

Примем шаг колебания объема подачи газа, который изменяет температуру всей смеси, равным $0,1 \text{ м}^3$. Отличие этих температур примем как T_{\max} и T_{\min} . Воздействие, которое меняет объем подачи газа обозначим как Y_t .

Для контроля величины воздействия газа и изменения температуры а/б смеси, предлагается использовать следующие лингвистические переменные:

1) «Уменьшить $V_{\text{газа}}$ », $V_{\text{газ down}}$, $X_{t \text{ down}}$, где $V_{\text{газ down}} = \{\text{«Уменьшить»}, \text{«Значительно уменьшить»}\}$, $X_{t \text{ down}} = \{-0,2, -0,4\}$;

2) «Увеличить $V_{\text{газа}}$ », $V_{\text{газ up}}$, $X_{\text{газ up}}$, где $V_{\text{газ up}} = \{\text{«Увеличить»}, \text{«Значительно увеличить»}\}$, $X_{\text{газ up}} = \{0,2, 0,4\}$;

3) «Не изменять $V_{\text{газа}}$ », $V_{\text{газ const}}$, $X_{\text{газ const}}$, $V_{\text{газ const}} = \{\text{«не изменять»}\}$, $X_{\text{газ const}} = \{0\}$.

Функция принадлежности переменной «Уменьшить $V_{\text{газа}}$ » представлена на рис. 1.

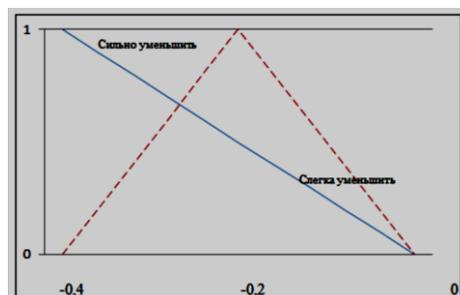


Рис. 1. Функции принадлежности переменной «Уменьшить подачу газа»

Функция принадлежности переменной «Увеличить $V_{\text{газа}}$ » изображена на рис. 2.

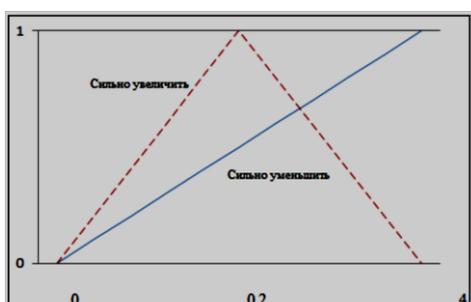


Рис. 2. Функции принадлежности переменной «Увеличить подачу газа»

В докладе подробно рассмотрены результаты реализации представленных средств нечеткого описания регулируемого параметра в рамках интеллектуальной системы управления технологическим процессом производства асфальтобетонных смесей.

Литература

1. Алгоритмизация управления технологическими процессами производства асфальтобетонных смесей/Волков И.Н., Бурковский В.Л./ Вестник Воронежского государственного технического университета. 2023. Т. 19. № 5. С. 16-22.

2. Проблематика управления технологическими процессами в дорожном строительстве Бурковский В.Л., Волков И.Н./Вестник Воронежского государственного технического университета. 2023. Т. 19. № 2. С. 15-20.

3. Интеллектуализация принятия решений в системе управления технологическим процессом производства асфальтобетонной смеси/Волков И.Н., Бурковский В.Л., Шелякин В.П./Вестник Воронежского государственного технического университета. 2024. Т. 20. № 1. С. 39-44.

Волков Иван Николаевич, Воронежский государственный технический университет, аспирант кафедры электропривода, автоматики и управления в технических системах, e-mail: ivan1900volkov@mail.ru

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электропривода, автоматики и управления в технических системах, e-mail: bvl@vorstu.ru

УДК 339.14

ЦИФРОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ АКТИВНО РАЗВИВАЮЩИХСЯ ЭКОНОМИК

Гарипова А.М.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Развитие концепции CRM, а также широкое внедрение средств интерактивного обмена информацией между потребителями и поставщиками товаров и услуг привело к возможности замкнуть контур управления. Основой является анализ результатов взаимодействия [1], а также оптимизации присутствия в глобальной сети. Цифровая экономика ставит практические задачи, решение которых требует широкого спектра существующего математического аппарата, методов интерактивного взаимодействия, учета сведений о потребителях, их персонификации, товарах и услугах. в основу программных алгоритмов надо заложить подробные математические модели [2] с решениями на базе методов оптимизации.

Сегодня в торговле товарами и услугами, преобладает основная тенденция увеличения онлайн продаж и объединение в сетевые структуры [3]. Лидерами при этом становятся активно развивающиеся страны, такие, как например Китай и Южная Корея являются высокоразвитыми странами с устойчивой экономикой, технологическим и экспортным лидерством в мире. Несмотря на эти факторы, географическую близость и культурные связи, данные по показателям в этих двух странах значительно отличается: по состоянию на 1 ноября 2024 г. Необходимо использовать систему измеримых показателей деятельности [4]. Данные носят стохастический характер. Основные характеристики используемые в маркетинге соответствуют терминам теории вероятностей. Функция плотности распределения как Frequency, а кумулятивное распределение как Reach $f +$. При формализации задачи, задействованы суммарный рейтинг GPR, TRP целевой аудитории, покрытие Coverage, Index, Target / Universe (T/U) соответствие. При оптимизации используем показатели: CPT, CPP цен. Количественные данные необходимые для расчетов по математической модели формируются из обратной связи, используя встроенные в сайты и интернет-порталы

инструменты, с уровня концепции web 3.0. Необходимо сочетать две системы. Детализация трафика получена [5] обработкой логов, содержащих информацию, для оценки и анализа сайта, статистику посещений. В потоках Feed генерируется набор сведений от роботов, интегрирован [6] обмен по уже совершенным приобретениям.

Соответственно нужна только соответствующая их обработка, по сведению показателей. Из данных ресурсов можно проводить целевые срезы по интересам, геотаргетингу, гендерным и возрастным признакам, уровню достатка. Так как в access log протоколах сохраняются сведения о посетителях ресурса, то можно построить статистику потребительских предпочтений, соотнося трафик со шкалой времени. Используется также Google Analytics (GA) или аналогичная метрика. Это сервис синхронизирован с Google AdWords, а информация [7] о длительности посещения, географии, конверсии сайта используется как основа оптимизации омниканального и мультиканального взаимодействия.

Введем вероятностную матрицу перехода $P^0 = \{p_{ij}^0\}$, $i, j = 1, \dots, M$ по данным маркетологов. вероятность перехода p_{ij}^0 и P^0 стохастическая справа. Рассчитывается матрица $R^0 = \{r_{ij}^0\}$, $i, j = 1, \dots, M$. Значение K - число видов взаимодействия с потребителями, переходные матрицы $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_K$, где $P_k = \{pk_{ij}\}$, $k = 1, \dots, K$, $i, j = 1, \dots, M$. Затраты Ω_k $k = 1, \dots, K$. Связь между рыночной активностью и показателям экономики [7] осуществляется расчетом матриц $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_K$, где $R_k = \{rk_{ij}\}$, причем: $k = 1, \dots, K$; $i, j = 1, \dots, M$. Значения матриц R_k получены решением уравнения Нерлофа-Эрроу $\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \mathcal{G}q(t) - k\Lambda(t)$, $q(t)$ - активность, $\Lambda(t)$ - заинтересованность, \mathcal{G} - качество, при этом rk_{ij} являются функциями: $rk_{ij}(q, \Lambda, \mathcal{G}, t)$. В расчетах важен учет времени с шагом Δt .

При такой степени интеграции сетевого взаимодействия, на базе цифровых технологий, потребителя, поставщика и производителя можно раскрыть весь потенциал методов при решении проблем как самообеспечения стран, так и баланса импорта.

Литература

1. Sergeev S.M. Cross-systems method of approach to energy economy higher educational institutions // В сборнике: Economics. Society: Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) Compiling Editor Dr.Sc., Prof. E.Sibirskaya. Yelm, WA, USA, 2015. С. 38-41.
2. Barykin S.Y., Sergeev S.M., Baranova T.A., Mokhorov D.A., Kobicheva A.M., Bochkarev A.A. A methodology of bringing perspective innovation products to market // Academy of Strategic Management Journal. 2021. Т. 20. № SpecialIssue2. С. 1-19.
3. Сергеев С.М. Математические модели в задачах управления ритейлерскими сетями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. т.17. №2. с. 666-668.
4. Barykin S.Y., Kapustina I.V., Valebnikova O.A., Valebnikova N.V., Kalinina O.V., Sergeev S.M., Camastral M., Putikhin Y., Volkova L. Digital technologies for personnel management: implications for open innovations // Academy of Strategic Management Journal. 2021. Т. 20. № SpecialIssue2. С. 1-14.
5. Automated storage and retrieval system for Industry 4.0 concept // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop "Advanced

Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019". Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. 2019. С. 32036.

6. Курочкина А.А., Голуб И.В., Сергеев С.М. Метод выбора параметров узлов логистических сетей с учетом неопределенности // Экономика и менеджмент систем управления. 2024. № 3 (53). С. 55-63.

7. Борисоглебская Л.Н., Голуб И.В., Сергеев С.М., Лебедева Я.О., Новакова С.Ю. Цифровизация бизнес-процессов как инструмент технологического развития региона // Инновации. 2024. № 1 (297). С. 46-52.

Гарипова Асуль. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, студент высшей школы производственного менеджмента, e-mail: sergeev2@inbox.ru.

УДК 519.865.7, 519.86

ОЦЕНКА ПОТЕНЦИАЛА ДОСТУПНОСТИ ЛЕЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕГИОНОВ КАЗАХСТАНА

Гасратова Н.А., Глазовская А.А.

**ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург**

Потенциал региона — это совокупность имеющихся в наличии и возможных для мобилизации ресурсов региона, необходимых для его развития при условии их использования для производства конкурентоспособной продукции и наиболее полного удовлетворения потребностей нынешнего и будущего поколений, с учетом интересов государства и бизнеса [1].

В данном исследовании для оценки потенциала регионов Казахстана при лечении ОРВИ был предложен специальный коэффициент k , который связывает среднюю стоимость протокола лечения [2] (P) со среднедушевым доходом [3] (S) в регионе, как интегральный признак экономического развития и доступности медицинского обеспечения в регионе. Формула для расчета коэффициента имеет вид:

$$k = \frac{P}{S}.$$

Чем ниже значение коэффициента k , тем выше потенциал региона при лечении ОРВИ, так как это означает, что затраты на лечение относительно доходов населения ниже.

Описанный выше коэффициент был посчитан для каждого из регионов Казахстана. Данные для получения средней стоимости протокола лечения ОРВИ по каждому из регионов, были получены с сайтов интернет-аптек [4].

В результате получилось следующее распределение регионов Казахстана по категориям [1]:

- Регионы-лидеры (k в диапазоне [0,0174, 0,04163]): Атырауская область ($k = 0,0391$).

- Регионы перспективного развития (k в диапазоне (0,04163, 0,06587]): г. Алматы ($k = 0,0495$), г. Астана ($k = 0,0546$), Улытау ($k = 0,0552$), Мангистауская область ($k = 0,0607$).

• Регионы догоняющего развития (k в диапазоне (0,06587, 0,0901]): Восточно-Казахстанская область ($k = 0,0669$), Павлодарская область ($k = 0,0696$), Западно-Казахстанская область ($k = 0,0716$), Карагандинская область ($k = 0,0685$), Костанайская область ($k = 0,0780$), Акмолинская область ($k = 0,0808$), Актюбинская область ($k = 0,0800$), Абай ($k = 0,0813$), Северо-Казахстанская область ($k = 0,0860$).

• Регионы разнонаправленных трендов развития (k в диапазоне (0,0901, 0,11433]): Кызылординская область ($k = 0,1024$), Алматинская область ($k = 0,1018$), Жамбылская область ($k = 0,1068$).

• Проблемные регионы (k в диапазоне (0,11433, 0,13857]): г. Шымкент ($k = 0,1166$), Жетису ($k = 0,1112$), Туркестанская область ($k = 0,1289$).

• Регионы стратегического отставания (k в диапазоне (0,13857, 0,1628]): В данную категорию ни один из регионов не попал.

На основе полученных коэффициентов можно сделать вывод, что регионы-лидеры и регионы перспективного развития демонстрируют наиболее высокий потенциал для обеспечения доступности лечения ОРВИ. Эти регионы имеют низкий коэффициент k , что свидетельствует о большей доступности лекарств для населения при лечении ОРВИ.

С другой стороны, проблемные регионы и регионы стратегического отставания (в случае, если они появятся в дальнейшем) требуют особого внимания, так как высокие значения коэффициента k указывают на недостаточную доступность медицинских препаратов для населения. Для таких регионов необходимо привлечение дополнительных ресурсов и поддержка со стороны государства и бизнеса [5].

Представленный анализ позволяет оценить регионы Казахстана с точки зрения доступности лечения и является инструментом для планирования мер поддержки, направленных на выравнивание доступности медицинских услуг.

Литература

1. Е.В. Никулина, И.В. Чистникова, А.В. Орлова. Экономический потенциал региона и оценка эффективности его использования.

2. Протокол лечения ОРВИ. – URL: <https://static-0.minzdrav.gov.ru/system/attachments/attaches> (дата обращения 15.11.2024)

3. Среднедушевые денежные доходы населения по регионам Республики Казахстана – URL: <https://stat.gov.kz/ru/industries/labor-and-income/stat-life/publications/182600/> (дата обращения 15.11.2024)

4. Сайт интернет аптеки Казахстана – URL: <https://kz.apteka.com/> (дата обращения 15.11.2024)

5. Лешкевич А.А., Юрочкин Д.С., Голант З.М., Наркевич И.А. Исследование методов государственного регулирования цен и издержек системы здравоохранения на лекарственные препараты в Великобритании // Фармакоэкономика. Современная фармакоэкономика и фармакоэпидемиология – 2022. – № 1 (15). – С. 23-39.

Гасратова Наталья Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, e-mail: n.gasratova@spbu.ru.

Глазовская Анастасия Андреевна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студентка магистратуры, e-mail: st087992@student.spbu.ru.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРА

Гасратова Н.А., Шашкин И.Д.

**ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург**

Введение. Полиметилметакрилат (ПММА) широко используется в современной промышленности. В силу сложности и различий технологического процесса он имеет различную структуру и физико-механические свойства в зависимости от своей марки. В представленной работе произведена сравнительная оценка нескольких видов ПММА на соответствие универсальной деформационной кривой полимерных материалов, предложенной Аржаковым М.С.

Универсальные зависимости. В [1] предложен подход по построению универсальной деформационной кривой, основанный на нормировании данных по отношению к пределу вынужденной эластичности ($\sigma_{\epsilon, \epsilon}$) и соответствующей ему деформации ($\epsilon_{\sigma, \sigma}$). Кроме того, указаны универсальные зависимости, которые связывают перечисленные величины с напряжением предела упругости (σ_{np}) и с деформацией (ϵ_{np}): $\frac{\sigma_{np}}{\sigma_{\epsilon, \epsilon}} = 0.8 \pm 0.05$, $\frac{\epsilon_{np}}{\epsilon_{\sigma, \sigma}} = 0.5 \pm 0.05$.

В представленной работе показано, что универсальные деформационные кривые полимера хорошо аппроксимируются функцией вида $f(x) = Ax^2 + Bx$. В качестве нового универсального параметра введен $P = \frac{B}{-A}$. По экспериментальным данным из работы [1] $P = 1.83$.

Материалы и методы. Для уточнения зависимостей проанализированы данные для 34 марок категории ПММА производителей Rohm (Германия) и МОСОМ (Германия). Построены универсальных кривые для каждого материала. Данные взяты из открытой базы материалов [2].

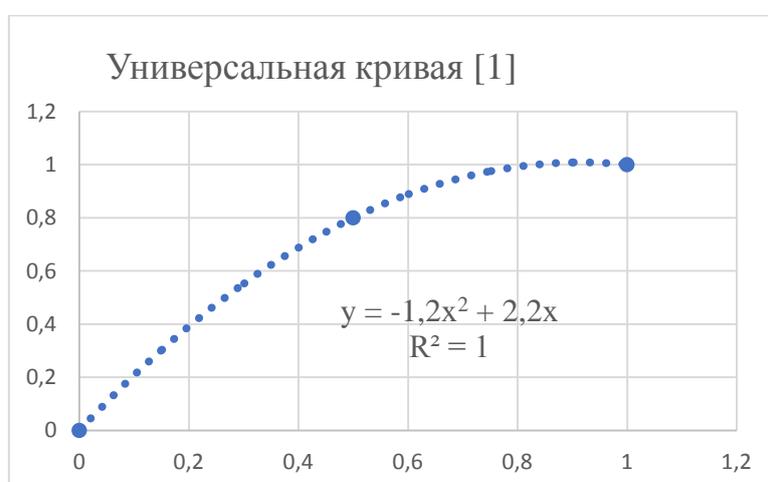


Рис. 1. Кривая напряжения – деформации модельного материала. Аппроксимация кривой по данным из [1]

Результаты. На рис. 2 представлены данные оценки введенного параметра для различных материалов. Сплошной линией на графике отмечено значение параметра для

универсальной кривой, штриховой линией – среднее значение. По результатам оценки среднее значение параметра P для рассмотренных материалов составляет 2.18, что отличается от пересчитанного параметра из [1] на 15.9% (рис.2). В случае, если материалы под номерами 8 (PLEXIGLAS® Softlight 7N df23), 17 (PLEXIGLAS® Heatresist FT15) и 20 (PLEXIGLAS® Hi-Gloss NTA-3) исключить из рассмотрения как «выбросы», то $P=1.89$, что отличается от эталонного параметра уже на 3%. Отметим, что все исследуемые материалы при деформации до 4% укладываются в универсальную кривую и деформационные кривые материалов описываются функцией предложенного вида.

Подобные универсальные зависимости могут быть полезны при разработке аналитических методов решения задач с учетом физической нелинейности материала и кластеризации марок полимеров.

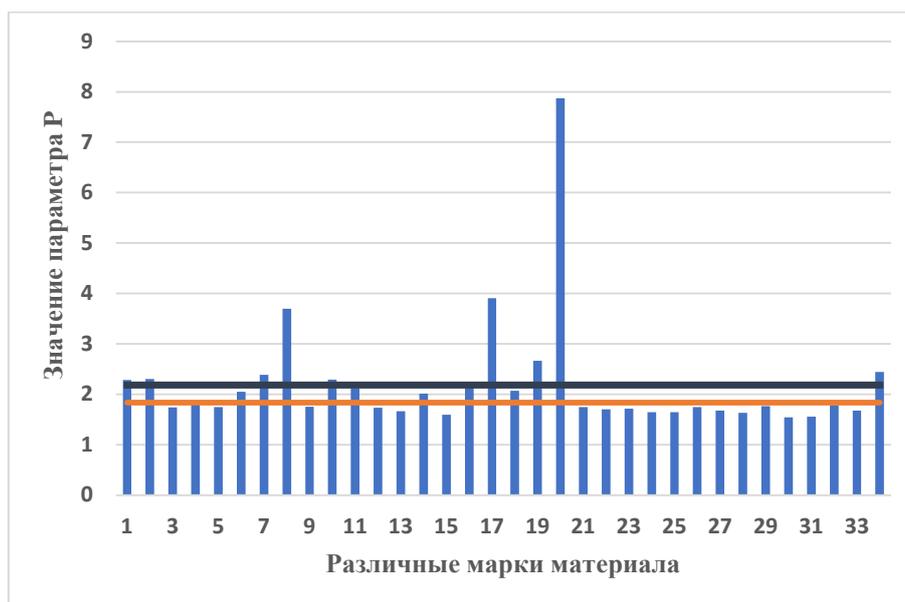


Рис. 2. Сравнение параметра P для различных марок ПММА. Горизонтальная пунктирная линия соответствует $P=2.18$, сплошная горизонтальная линия соответствует $P = 1.83$

Литература

1. Аржаков М. С, Жирнов А.Е, Луковкин Г.М. «Основы унифицированной механики пластиков» Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова Москва 2016
2. CAMPUS — a material information system for the plastics industry. URL: <https://www.campusplastics.com> [Дата обращения: 15.11.2024]

Гасратова Наталья Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, e-mail: n.gasratova@spbu.ru

Шашкин Илья Дмитриевич, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент магистратуры, e-mail: st086920@student.spbu.ru

ПРОГРАММИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ СЕТЕВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Голуб И.В.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Ведущую роль коммерческой деятельности играет ритейл, который в современном понимании должен опираться на развитые, научно обоснованные математические модели. Среди наиболее значимых задач можно выделить проблему организации менеджмента логистики сетей. Принимая во внимание все увеличивающийся оборот таких сетей и, соответственно сильную конкуренцию, а также нестабильность экономической ситуации, сформулированы задачи:

1. Организация централизованного управления площадок, составляющих сеть.
2. Выработка стратегии привлечения капитала при расширении присутствия на рынке или же инвестирования прибыли в другие активы.
3. Стратегической целью анализа управления является ориентация математических алгоритмов на опережающие показатели [1].

Следует отметить, что узел логистической сети представляет из себя обычно площадку, оперирующую ассортиментом в несколько тысяч наименований. Кроме того, горизонт [2] планирования должен иметь достаточную протяженность. Все это определяет высокие требования к обоснованности решений и применяемым методам.

Математическая модель имеет два уровня. Верхний это система площадок находящихся под единым управляющим органом, осуществляющим ассоциативную форму [3] предпринимательства и принимающим решения о распределении консолидированного [4] бюджета. Другой уровень соответствует делегированию ответственности. Данное предприятие распределяет средства в течение каждого этапа самостоятельно, с целью получить максимальную [5] выгоду. На каждом из этих двух уровней, сеть это управляемая система, имеющая вектор состояния (комплекс основных показателей) и вектор управления (распределение средств, вкладываемых в различные звенья системы в начале каждого этапа). Данная система обозначенная как S обладает рядом показателей или характеристик, зависящих от времени. Множество состояний системы S составляют фазовое пространство. Мероприятия, это управление U . Среди всех значений управления, выбираются представляющие наибольший интерес с точки зрения критерия $W = W(U)$. Тогда задача управления сводится к поиску U^* при котором W достигает максимума $W^* = W(U^*) = \max_U W(U)$. При этом накладываются ограничения на область начальных S_0 перед началом периода $S_0 \in \tilde{S}_0$, где \tilde{S}_0 область фазового [6] пространства, содержащая допустимые значения и ограничения на область конечных состояний, $S_{\text{кон}}$ после окончания планового периода $S_{\text{кон}} \in \tilde{S}_{\text{кон}}$ где $\tilde{S}_{\text{кон}}$ - область фазового пространства, содержащая допустимые значения конечного состояния системы. Горизонт планирования разбит на n этапов, на каждом из которых рассчитывается критерий W_i , где $i = 1...n$ и критерий заинтересованности W за весь период равен $W = \sum_{i=1}^n W_i$. Надо отметить что здесь возможен учет влияния инфляции или учет реинвестирования средств через соответствующие дисконтные коэффициенты. Обозначим U_i где $i = 1...n$ на каждом этапе и состояние системы S_i .

Примем, что переход системы из состояния S_{i-1} в состояние S_i можно выразить функцией F , зависящей от U_i и от $S_i = F(S_{i-1}, U_i)$. Данное ограничение не является существенным, так как можно просто добавить параметры прошлого как новые фазовые координаты. Ясно, что в этом выражении все входящие величины, в том числе и функция, являются многомерными векторами, тогда W представимо в виде $W = \sum_{i=1}^n W_i(S_{i-1}, U_i)$. Окончательно [7] задача формулируется следующим образом: необходимо для начального состояния S_0 выбрать управления U_i^* , где $i = 1 \dots n$, чтобы через n этапов система перешла в состояние $S_{\text{кон}}$ и при этом значение W обратилось в максимум. Данное исследование показывает, что разработка инструментов для менеджмента сетевых объектов требует серьезного математического аппарата.

Литература

1. Sergeev S.M. Cross-systems method of approach to energy economy higher educational institutions // В сборнике: Economics. Society: Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) Compiling Editor Dr.Sc., Prof. E.Sibirskaya. Yelm, WA, USA, 2015. С. 38-41.
2. Barykin S.Y., Sergeev S.M., Baranova T.A., Mokhorov D.A., Kobicheva A.M., Bochkarev A.A. A methodology of bringing perspective innovation products to market // Academy of Strategic Management Journal. 2021. Т. 20. № SpecialIssue2. С. 1-19.
3. Сергеев С.М. Математические модели в задачах управления ритейлерскими сетями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. т.17. №2. с. 666-668.
4. Barykin S.Y., Kapustina I.V., Valebnikova O.A., Valebnikova N.V., Kalinina O.V., Sergeev S.M., Camastral M., Putikhin Y., Volkova L. Digital technologies for personnel management: implications for open innovations // Academy of Strategic Management Journal. 2021. Т. 20. № SpecialIssue2. С. 1-14.
5. Automated storage and retrieval system for Industry 4.0 concept // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019". Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. 2019. С. 32036.
6. Курочкина А.А., Голуб И.В., Сергеев С.М. Метод выбора параметров узлов логистических сетей с учетом неопределенности // Экономика и менеджмент систем управления. 2024. № 3 (53). С. 55-63.
7. Борисоглебская Л.Н., Голуб И.В., Сергеев С.М., Лебедева Я.О., Новакова С.Ю. Цифровизация бизнес-процессов как инструмент технологического развития региона // Инновации. 2024. № 1 (297). С. 46-52.

Голуб Иван Витальевич. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, аспирант высшей школы сервиса и торговли, e-mail: sergeev2@inbox.ru

ТЕПЛОВЫЕ КАРТЫ В КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ЦИТОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Давыденко Б.Н.

*«Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

Одним из передовых приборов, используемых в цитологических исследованиях, является клеточный анализатор CellVoyager CQ1 (Yokogawa, Япония). Данный прибор позволяет проводить как прижизненные исследования клеток, так и единовременные сканирования препаратов [1]. Программное обеспечение прибора предоставляет широкие возможности для сбора статистических данных, но имеет ряд ограничений:

1. Алгоритм распознавания клеток чувствителен к параметрам сканирования, настраиваемым исследователем для каждого анализируемого образца.

2. Качество распознавания снижается с ростом количества клеток в поле зрения.

3. В случае прижизненных исследований не отслеживаются треки клеток, что значительно затрудняет исследование миграции.

В данном исследовании предложен визуальный метод, позволяющий оценить качество получаемых данных и исследовать миграцию клеток. Для данных, полученных в ходе эксперимента по изучению остеоиндуктивных свойств биоконструкций на основе коллагена и фиброина шёлка [2] были построены тепловые карты плотности расположения клеток на образцах. На некоторых из них были выявлены круговые кластеры, расположенные в центрах полей зрения прибора. Это свидетельствовало о дефекте распознавания клеток в углах микрофотографий, возникшем вследствие не оптимально подобранных параметров сканирования.

Наиболее распространённым подходом в прижизненных исследованиях миграции клеток является построение треков отдельных клеток и анализ полученных траекторий [3]. Ручное построение треков может быть избыточным, если миграция в исследовании рассматривается не как движение отдельных клеток, а как перемещение их в совокупности. Так по данным эксперимента с прижизненным исследованием миграции дермальных фибробластов были построены анимированные тепловые карты плотности.

Предложенные методы построения статических и анимированных тепловых карт позволяют существенно упростить качественный анализ и контроль качества получаемых данных в цитологических исследованиях.

Литература

1. Kim S. W. et al. Mutual destruction of deep lung tumor tissues by nanodrug conjugated stealth mesenchymal stem cells // *Advanced Science*. – 2018. – Т. 5. – №. 5. – С. 1700860.

2. Darvish D. M. Collagen fibril formation in vitro: From origin to opportunities // *Materials Today Bio*. – 2022. – Т. 15. – С. 100322.

3. Gómez-de-Mariscal E. et al. CellTracksColab—A platform for compiling, analyzing, and exploring tracking data // *bioRxiv*. – 2023. – С. 2023.10. 20.563252.

Давыденко Богдан Николаевич, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, бакалавр, студент магистратуры, e-mail: davydenkworkpost@gmail.com.

ПОВЫШЕНИЕ МОЩНОСТИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ

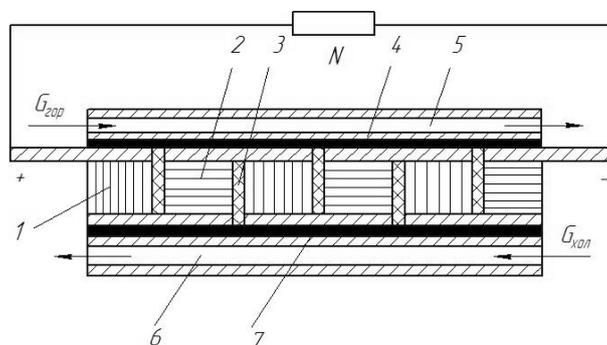
Ерин О.Л., Кузнецов С.А., Яньшин С.А.

ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Среди новых источников получения электрической энергии особенно перспективными принято считать термоэлектрические методы преобразования тепловой энергии в электрическую, осуществляемые в термоэлектродгенераторах [1].

В настоящее время термоэлектрические модули для преобразования энергии и охлаждения широко применяются во многих отраслях техники и быту, начиная от космических систем и кончая бытовыми мобильными холодильниками [2]. Подобные устройства изготавливаются с использованием термоэлектрических наноматериалов. Это связано с тем, что термоэлектрические свойства материалов значительно улучшаются введением наномасштабных структур.

Основным элементом современных термоэлектронных генераторов являются термоэлектрические батареи (рисунок 1).



- 1 – термоэлемент n-типа; 2 – термоэлемент p-типа; 3 – термоэлементная изоляция;
4 – коммутационная пластина; 5 – горячий теплопровод; 6 – холодный теплопровод;
7 – электроизоляционный теплоконтактный переход

Рисунок 1 – Схема плоской термоэлектрической батареи

Как известно, термоэлектрическая батарея сформирована из термостолбиков, изготовленных из термоэлектрических материалов, один из которых p - , а другие n -проводимости. От коммутационных элементов отбирается полезная нагрузка. В процессе подвода теплового потока мощностью Q_1 при температуре T_1 и отвода от холодного спая теплового потока Q_2 при температуре T_2 под действием возникающего температурного перепада $\Delta T = T_1 - T_2$ на спаях термоэлемента согласно закону Зеебека возникает термо-э.д.с. термостолбиков, которая описывается уравнением

$$E = (\alpha_p + \alpha_n)\Delta T, \quad (1)$$

где α_p, α_n – соответственно термо-э.д.с. термостолбиков p - и n - типов.

Температурный перепад ΔT на спаях термоэлектробатареи создается путем подвода и отвода тепла по теплопроводам, смонтированных в непосредственном контакте с поверхностями коммутационных пластин через электроизоляционные

прокладки, через которые транспортируется основной тепловой поток, обуславливающий выходную мощность термоэлектрического генератора.

На пути теплового потока формируется термоэлектрическое сопротивление самой электроизоляционной прокладки и сопротивления в зоне контакта с коммутационной пластиной, т.е.

$$R_n = \frac{\partial_{uz}}{\lambda_{uz}} + R_k. \quad (2)$$

Здесь R_k – контактное термосопротивление между электроизоляционной прокладкой и коммутационной пластиной; ∂_{uz} – толщина электроизоляционной прокладки; λ_{uz} – коэффициент теплопроводности материала прокладки.

Практикой установлено, что термосопротивление прокладки $R_{uz} = \partial_{uz} / \lambda_{uz}$ составляет порядка 15...20 % от общего термосопротивления R_n . Отсюда можно сделать вывод, что даже незначительное снижение R_{uz} повышает электрическую мощность термоэлектродгенератора. Для повышения теплопроводности прокладки проводилась операция по воздействию на нее в неотвержденном состоянии электрическим полем. Образующиеся в процессе обработки электрическим полем цепочечные структуры из частиц наполнителя повышают теплопроводность прокладки. Полученные результаты представлены в таблицу 1.

Таблица 1 – Зависимость коэффициента теплопроводности прокладки из композиции ЭД-6 + ПЭПА от напряженности электрического поля и концентрации порошка окиси цинка

Концентрация наполнителя С, % по массе	Коэффициент теплопроводности прокладки $\lambda \frac{Bm}{M \cdot K}$ при E , В/см						
	0	120	200	430	650	800	1100
10	0,32	0,41	0,48	0,56	0,61	0,69	0,72
20	0,38	0,54	0,61	0,69	0,74	0,79	0,83

Повышение теплопроводности модифицированной прокладки позволяет снизить ее термосопротивление и таким образом повысить выходную мощность термоэлектродгенератора.

Литература

1. Охотин А.С., Ефремов А.А., Охотин В.С. Термоэлектрические генераторы. М.: Атомиздат, 1971. 288 с.
2. Bell L. Cooling, Heating, Secrerating Power and Recovering Waste Heat with Thermoelectric Systems // Science. V.321.2008. Pp. 1457–1461.

Ерин Олег Леонидович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Кузнецов Станислав Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Яньшин Сергей Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ КОМПРИМИРОВАННОГО ВОЗДУХА ГАЗОДОБЫВАЮЩИХ СТАНЦИЙ

Ерин О.Л., Куксов Д.Ю., Кузнецов С.А.

ФГКВБОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Анализ, проведенный в [1], показал, что допущение о гидродинамическом режиме идеального вытеснения воздушного потока, через пористую матрицу неподвижного слоя гранулированного адсорбента в адсорбере газодобывающих станций может привести к искажению прогнозируемых локальных сепарационных характеристик. Правомочность такого упрощения должна решаться в каждом конкретном случае на основе классической смешанной гидродинамики неподвижных зернистых сред [2].

При вириальном разложении коэффициент сжимаемости газа представляют в виде бесконечной суммы по степеням его плотности ρ [3]

$$z = \frac{pV}{RT} = 1 + B_1'p + B_2'p^2 + B_3'p^3 + B_4'p^4 + \dots, \quad (1)$$

или в сокращенной форме

$$z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n' p^n, \quad (2)$$

где B_n' – вириальные коэффициенты, которые в общем случае определяются температурой и учитывают различные межмолекулярные взаимодействия в системе.

При практическом использовании уравнения (2) конечное число слагаемых ряда детерминируется заданной погрешностью представления экспериментальных данных, что приводит уравнение (2) к виду

$$z = 1 + \sum_{i=1}^r B_i p_i. \quad (3)$$

Вириальные коэффициенты не зависят от давления и удельного объема газа, а характеризуются его природой и температурой, зависимостью от которой также принимается в виде степенного ряда в соответствии с соотношением [3]

$$B_n = \sum_{j=0}^{S_i} \frac{b_{ij}}{\tau^j}, \quad (4)$$

где S_i – граница изменения j ; b_{ij} – коэффициенты разложения; $\tau = T/T_{кр}$ – приведенная температура ($T_{кр}$ – критическая температура).

В отечественной литературе уравнение состояния для технических газов и жидкостей записывают в безразмерной форме с применением вириального разложения вида

$$z = 1 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{S_i} b_{ij} \frac{\omega^i}{\tau^j}, \quad (5)$$

где $\omega = \rho/\rho_{кр}$ ($\rho_{кр}$ – критическая плотность). Коэффициенты разложения уравнения (5) для воздуха и его основных компонентов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициенты разложения b_{ij} уравнения (5) [3]

Криопродукт	i	Значение b_{ij} при j			
		0	1	2	3
Воздух	1	0,366812	-0,252712	-2,84986	3,60179
	2	0,140979	-0,0724337	0,780803	-0,143512
	3	-0,0790202	-0,213427	-1,25167	-0,16497
	4	0,313247	0,885714	0,634585	-0,162912
Криопродукт	i	Значение b_{ij} при j			
		4	5	6	7
Воздух	1	-3,18665	1,54029	-0,260953	-0,0391073
	2	0,633134	-0,891012	0,0582531	0,0172908
	3	0,684822	0,221185	0,0634056	0
	4	-0,217973	0,0925251	0,000893863	0

Идентификацию агрегатного состояния воздуха и его компонентов при расчетах термодинамических параметров криопродуктов по уравнению (5) проводили с учетом связывающих давление и температуру на межфазной границе пар – жидкость зависимостей, представленных в [3]. Рекомендованные интервалы применения уравнения (5) и средняя квадратичная погрешность аппроксимации исходных данных приведены в таблице 2 [3].

Таблица 2 – Рекомендованные интервалы применения уравнения (5) [3]

Криопродукт	Пределы применимости уравнения		Значение средней квадратичной погрешности аппроксимации плотности δ_{cp} , %
	Давление p , МПа	Температура T , К	
Воздух	0,1 – 100	70 – 1500	0,11
Криопродукт	Интервалы приведенных температур и плотностей, не обеспечивающих достоверное определение $p-v-T$ - свойств		
	Приведенная температура, τ		Приведенная плотность
Воздух	$T = 126 – 139$ К		$\rho = 190 – 440$ кг/м ³

Литература

1. Toth J. Adsorption: Theory, Modeling, and Analysis. NY: Marcel Dekker, Inc., 2002. 878 p.
2. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. NY: Springer, 2006. 654 p.
3. Акулов Л.А. Теплофизические свойства криопродуктов / Л.А. Акулов, Е.И. Борзенко, В.Н. Новотельнов, А.В. Зайцев. СПб.: Политехника, 2012. 243 с.

Ерин Олег Леонидович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Куксов Дмитрий Юрьевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник.

Кузнецов Станислав Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТРЕНИЯ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ С ТОНКОСЛОЙНЫМИ ПОЛИМЕРНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ, РАБОТАЮЩИХ В УЗЛАХ АВТОМОБИЛЬНОЙ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Илларионов В.В.

**ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж**

В настоящее время применение в узлах трения автомобильной и специальной техники подшипников скольжения с тонкослойными полимерными покрытиями (ТППС) является перспективным из-за их доступности и экономичности по сравнению с подшипниками из цветных металлов и сплавов [1].

Известно, что, подобрав определенные виды пластификаторов и их концентрации и добавив их отдельно в исходный выбранный полимер, параметры работоспособности композиции на их основе могут улучшиться по сравнению с исходным материалом.

Анализ литературы показал, что для металлополимерных пар трения моделирование процесса трения целесообразно проводить на основе регрессионного анализа с использованием метода наименьших квадратов [2].

Для моделирования процесса трения выбираются основные факторы, определяющие работоспособность пластифицированных покрытий ТППС: x_1 – содержание пластификатора (Π) C , %; x_2 – среднее удельное давление на поверхности пары трения $P_{уд}$, кг/см²; x_3 – скорость скольжения вала $V_{ск}$, м/с. Выходными исследуемыми параметрами работоспособности пластифицированных покрытий ТППС принимаются: y_M – величина момента трения $M_{тр}$, кг·см; y_T – температура в зоне трения T , °C; y_I – интенсивность изнашивания I , мг/час.

Предполагается, что изучается влияние $R = 3$ количественных факторов $x_i (i = \overline{1, R})$ на некоторую реакцию y_i в отведенной для экспериментирования локальной области факторного пространства, ограниченной $x_{i_{\min}} \dots x_{i_{\max}} (i = \overline{1, R})$, тогда математической моделью процесса трения пары металл – пластифицированный полимер могут служить соотношения вида:

$$y_M = \oint_M(x_1, x_2, x_3); y_T = \oint_T(x_1, x_2, x_3); y_I = \oint_I(x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

Допускается, что каждую из функций (1) можно с некоторой степенью точности представить в виде полинома второй степени от трех переменных, который содержит C_{3+2}^2 коэффициентов. Тогда каждая из функций (1) будет иметь вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i>j}^3 b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 b_{ii} x_i^2, \quad (2)$$

где b_0 – свободный член уравнения, равный средней величине отклика, при условии, что рассматриваемые факторы находятся на средних «нулевых» условиях; x – масштабированные значения факторов, которые определяют функцию отклика и поддаются варьированию; i, j – индексы факторов; b_i – коэффициенты при линейных членах; b_{ij} – коэффициенты двухфакторных взаимодействий; b_{ii} – коэффициенты при квадратичных членах.

Для оценки числовых значений коэффициентов уравнения (2) были спланированы и проведены эксперименты, которые проходили в два этапа. На первом этапе осуществляется план полного факторного эксперимента ПФЭ 2^3 , который дал возможность рассчитать 8 коэффициентов уравнения регрессии, где помимо линейных членов присутствуют члены, учитывающие эффекты парных межфакторных взаимодействий:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (3)$$

Если уравнение (3) не адекватно отражало экспериментальные данные, тогда осуществляется переход ко второму этапу. Добавлялось к плану ПФЭ 2^3 некоторое количество специальным образом расположенных, так называемых, «звездных» точек с определенным плечом r и некоторое число N_{III} повторностей опыта в центре эксперимента. Таким образом, получали композиционный равномер-ротатабельный план, который дал возможность рассчитать 10 коэффициентов уравнения регрессии второго порядка:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2. \quad (4)$$

В результате получены уравнения регрессии параметров работоспособности ТППС с различным составом полиамидных пластифицированных покрытий. Для покрытий, пластифицированных воском мелкокристаллическим получены следующие модели:

$$M_{mp} : \hat{Y}_1 = 29,49 - 0,41x_1 + 2,23x_2 - 3,82x_3 + 0,44x_1^2 + 0,53x_2^2 + 0,56x_3^2; \quad (5)$$

$$T : \hat{Y}_2 = 85,69 - 1,51x_1 + 6,08x_2 + 8,24x_3 + 0,3x_1^2 + 0,71x_2^2 + 0,59x_3^2; \quad (6)$$

$$I : \hat{Y}_3 = 0,53 - 0,06x_1 + 0,2x_2 + 0,29x_3 + 0,02x_1^2 + 0,06x_2^2 + 0,07x_3^2. \quad (7)$$

Анализ коэффициентов полученных уравнений регрессии показывает, что:

эксплуатационные факторы (удельное давление – x_2 и скорость скольжения – x_3) оказывают ведущее влияние на показатели работоспособности ТППС. Положительные значения в уравнениях регрессии коэффициентов b_2 и b_3 показывают, что при увеличении удельного давления и скорости скольжения происходит значительное повышение температуры в зоне трения. Это говорит о том, что температура, развивающаяся в поверхностных слоях контакта металлополимерной пары трения в отсутствие смазки, является одним из основных показателей работоспособности в выбранном диапазоне удельных давлений и скоростей охлаждения;

меняя технологию изготовления, а именно вид и количество пластификатора в полиамидном покрытии (технологический фактор x_1), можно существенно уменьшать температуру в зоне трения и интенсивность изнашивания покрытий ТППС. На это указывает знак минус у коэффициентов b_1 . Такая зависимость от технологического фактора объясняется тем, что жидкие пластификаторы способны диффундировать к поверхности полимеров и образовывать на них квазигидродинамические и граничные смазочные слои, тем самым, подтверждается гипотеза о влиянии пластификаторов на свойства полиамидных композиций.

Литература

1. Илларионов В.В., Зеленев В.Г. Совершенствование узлов трения СНО ОП путем применения полимерных и композиционных материалов / Проблемы обеспечения эффективности и устойчивости функционирования сложных технических систем // Серпухов: СВИ РВ, 2004. Т.5. С.76-78.
2. Грачев Ю.П., Плаксин Ю.М. Математические методы планирования эксперимента. Москва: ДеЛи принт, 2005. 296 с.

Илларионов Владимир Викторович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ В РАМКАХ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ АВТОНОМНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ СЕНСОРНЫХ ДАННЫХ

Карпунин Д.Н., Бурковский В.Л.

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж

В основе высоконадежных автономных объектов управления (ВАОУ) лежит эффективное управление данными и их комплексный анализ при помощи распределенной системы различных датчиков [1]. Однако эффективная интеграция этих разнородных данных для извлечения ценной информации и составления точных прогнозов остаётся серьёзной задачей. Данная проблематика заключается в сложности данных, которые варьируются от временных до пространственных структур, а также в необходимости создания модели, которая может эффективно обучаться на основе этих данных для улучшения процессов принятия решений в рамках исследуемой системы.

Известные в этой области решения часто ограничены в своей способности адаптироваться к разнообразию данных и их внутренней сложности. В докладе обсуждаются результаты исследования возможности комбинации свёрточных, рекуррентных и глубоких нейронных сетей, для улучшения интеграции и анализа разнородных сенсорных данных [2,3,4].

На рисунке 1 представлена структура процесса интеграции и анализа данных при помощи методов глубокого обучения.

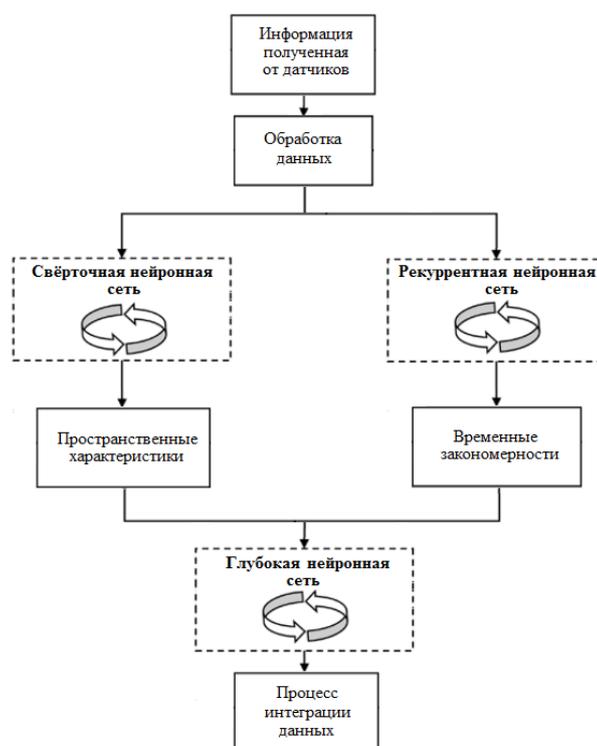


Рисунок 1 – Структура процесса интеграции и анализа данных при помощи методов глубокого обучения

Процесс реализуется со сбора необработанных данных из различных источников. Эта информация сначала обрабатывается для удаления шума и нормализации значений, чтобы обеспечить согласованность между различными типами данных. Затем обработанные данные разделяются на две ветви для дальнейшего анализа: ветвь пространственных данных и ветвь временных данных. В первой ветви свёрточная нейронная сеть извлекает пространственные характеристики, выявляя основные закономерности, такие как текстуры и формы. Эти характеристики проходят через слои объединения для уменьшения размерности с сохранением важной информации. В то же время вторая ветвь обрабатывает временные данные с помощью рекуррентной нейронной сети, которая фиксирует долгосрочные зависимости и временные закономерности в показаниях датчиков. Затем извлечённые пространственные и временные характеристики объединяются глубокой нейронной сетью при помощи плотных слоёв, что позволяет модели изучать сложные взаимодействия между пространственными и временными данными. Такой комплексный подход повышает точность прогнозов и надёжность обнаружения аномалий. Конечный результат работы глубокой нейронной сети используется для принятия обоснованных решений о рабочем состоянии исследуемой системы, включая обнаружение аномалий, профилактическое обслуживание и оптимизацию процессов. Этот процесс обеспечивает тщательный анализ данных с датчиков, используя преимущества архитектур свёрточных и рекуррентных нейронных сетей для получения подробной информации о поведении и состоянии системы.

Функционирование предлагаемой модели дает возможность формировать прогнозы и классификации, которые являются основой для принятия решений в процессе управления и оптимизации. Благодаря способности эффективно интегрировать и анализировать разнородные данные открываются возможности для повышения операционной эффективности и безопасности, а также для эффективного профилактического обслуживания высоконадежного автономного объекта управления.

Литература

1. Карпухин Д.Н. Структура системы управления внутренним электроснабжением автономного объекта энергообеспечения / Д.Н. Карпухин, В.Л. Бурковский // Сборник докладов XVIII международной конференции по электромеханике и робототехнике. – 2023. – С. 221-225.
2. Созыкин А.В. Обзор методов обучения глубоких нейронных сетей / А.В. Созыкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2017. – т. 6. – № 3. – С. 29-59.
3. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. 2-е изд. / С. Хайкин – М.: Вильямс – 2006 – 1104 с.
4. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / П. Флах // М.: ДМК Пресс – 2015. – 400 с.

Карпухин Дмитрий Николаевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры электропривода, автоматике и управления в технических системах, e-mail: karpuxin.1996@mail.ru.

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электропривода, автоматике и управления в технических системах, e-mail: bvl@vorstu.ru.

АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ НОВООБРАЗОВАНИЙ МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ ПО BI-RADS

Козин А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Рак молочной железы занимает одно из ведущих мест по распространенности среди онкологических заболеваний у женщин. Для стандартизации диагностического процесса и точной оценки вероятности злокачественности опухолей была разработана система BI-RADS (Breast Imaging Reporting and Data System), которая помогает врачам оценивать риск злокачественности опухолей, основываясь на специфических характеристиках, и направляет последующие действия в зависимости от уровня подозрений [1,2].

Основная цель исследования — разработка моделей машинного обучения для автоматического предсказания категории BI-RADS на основе данных обследований. Для исследования были использованы данные, предоставленные НМИЦ онкологии им. Н. Н. Петрова. В выборку вошли более 30 признаков, охватывающих различные параметры пациентов и характеристики новообразований, что создает основу для построения прогностических моделей.

Для повышения качества моделей был проведен предварительный анализ данных, который включал несколько ключевых этапов [3]:

1. исключены случаи, где врачебный диагноз не совпадал с данными гистологии. Это позволило повысить точность предсказаний, оставив в выборке только данные с подтвержденным диагнозом;

2. удалены признаки, содержащие уже готовые диагностические заключения. Это помогло избежать избыточных данных и сосредоточить модель на анализе исходных характеристик;

3. устранена мультиколлинеарность среди признаков, которая могла бы исказить результаты моделей. Для анализа мультиколлинеарности использовался коэффициент (VIF). Признаки с высокими значениями VIF были удалены, что позволило сделать модель более стабильной и устойчивой к переобучению.

Для классификации были применены три модели машинного обучения [4], каждая из которых имеет свои технические особенности и преимущества.

1. Линейная регрессия. Так как BI-RADS представлен дискретными классами, предсказанные значения округлялись до ближайшего класса.

2. Логистическая регрессия. Использовалась softmax-регрессия – многоклассовая модификация логистической регрессии.

3. Случайный лес. Гиперпараметры были подобраны поиском по сетке.

Для оценки моделей данные были разделены на тренировочные и тестовые выборки с помощью стратифицированного разбиения, что позволило сохранить пропорции классов.

Каждая модель оценена по ключевым метрикам: точности, F1-мере и ROC-AUC, что позволило объективно сравнить их работу [4].

Сравнение трёх моделей — линейной регрессии, логистической регрессии и случайного леса — показало различия в их способности классифицировать категории BI-RADS:

1. Линейная регрессия продемонстрировала умеренную точность. Классы 2 и 5 были классифицированы достаточно точно. Однако для класса 3 метрики оказались низкими.

2. Логистическая регрессия показала улучшенную точность по сравнению с линейной регрессией. Метрики для классов 2 и 5 также были высокими, однако для класса 3 точность существенно увеличилась. Этот метод может быть использован для начального этапа анализа данных или в случаях, где требуется модель с понятной интерпретацией.

3. Случайный лес продемонстрировал наилучшие результаты. Метрики для классов 2 и 5 были очень высокими, для класса 3 показатели оказались на уровне логистической регрессии. Это делает модель оптимальным выбором для задач автоматической диагностики.

Литература

1. Семиглазов В.В., Топузов Э.Э. Рак молочной железы // Под ред. Семиглазова В.Ф. – М.: Медпресс-информ. 2009. – 172 с.

2. Бусько Е.А., Гончарова А.Б и др. Модель принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы. // Вопросы онкологии. 2020. Т. 66. № 6. С. 653-658.

3. Гончарова А.Б., Бусько Е.А. Программная реализация системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы. // Сибирский журнал клинической и экспериментальной медицины. 2020. Т. 35. № 4. С. 137-142.

4. Dolgintseva E., Wu Haitao, Petrosian O. et al. Comparison of multi-step forecasting methods for renewable energy. // Energy Systems. 2024. № 1-32. p. 1-32.

Козин Артем Андреевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент, e-mail: st097212@student.spbu.ru.

УДК 004.93

ПОСТРОЕНИЕ КОНТУРОВ ЛЕГКИХ НА ПЛАНАРНЫХ РАДИОНУКЛИДНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Корчагин Д.С.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

В современной медицинской диагностике радионуклидные изображения играют ключевую роль в выявлении заболеваний. Однако точное определение границ и областей интереса на этих изображениях требует высокой точности и детализации. Сегментация изображений, выделение контуров, является важным шагом для глубокого анализа полученных данных.

Целью работы является применение методов глубокого обучения, а именно нейронных сетей, для автоматической сегментации радионуклидных изображений лёгких. Ожидается, что это повысит точность и оперативность диагностики патологий лёгких.

Методы радионуклидной диагностики включают планарную скintiграфию, однофотонную эмиссионную томографию (ОФЭКТ), и позитронно-эмиссионную томографию (ПЭТ). В данной работе использовались изображения, полученные методом планарной скintiграфии, который позволяет получать функциональные изображения внутренних органов [1 – 2].

Подготовка данных осуществлялась с использованием стандартизованного формата DICOM, обеспечивающего сохранность и точность данных. Данные были

разделены на обучающую (70%), валидационную (20%) и тестовую (10%) выборки [3]. Для создания качественных наборов данных проводилась предварительная обработка: удаление выбросов, исправление ошибок и стандартизация. Разметка контуров лёгких осуществлялась вручную, что позволило сформировать маски для обучения модели [Рисунок 1].

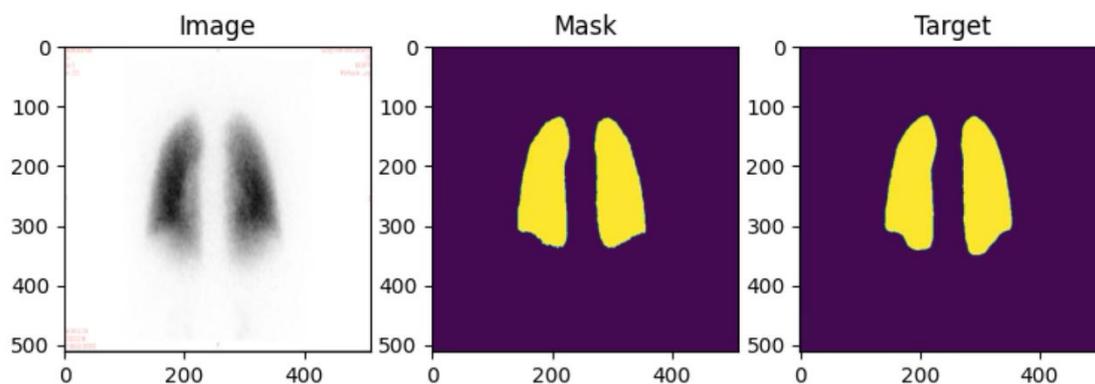


Рисунок 1

Архитектура нейронной сети основана на модели U-Net, известной своей способностью точно выделять контуры объектов на изображениях при сохранении пространственной информации — важного аспекта при работе с медицинскими изображениями [5 – 7].

Обучение модели проводилось с использованием стохастического градиентного спуска и адаптивного планировщика скорости обучения для предотвращения переобучения и улучшения сходимости [4]. В качестве функции потерь применялась *Dice Loss*, вычисляющая сходство между предсказанными и истинными масками по формуле:

$$Dice(A, B) = \frac{2|A \cap B|}{|A| + |B|},$$

где A — множество пикселей предсказанной маски, B — множество пикселей истинной маски. Для оценки качества сегментации использовалась метрика *Mean Intersection over Union (MeanIoU)*:

$$MeanIoU(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}.$$

Результаты показали, что после обучения модель U-Net достигла *MeanIoU* 0.85 на тестовой выборке, что свидетельствует о высокой точности сегментации. Модель успешно выделяла контуры лёгких, сохраняя необходимую пространственную информацию. Сравнение реальных и предсказанных масок подтверждает высокое качество работы модели.

Литература

1. Котина Е.Д. Математические и компьютерное моделирование в ядерной медицине: Учебное пособие. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2022. — 143 с. — ISBN 978-5-9651-1395-8.
2. Derek C. Knottenbelt, Janet C. Patterson-Kane, Katie L. Snalune (2016). *Clinical Equine Oncology* // URL: <https://www.sciencedirect.com/book/9780702042669/clinical-equine-oncology>, pp. 85 – 107. (дата обращения: 12.02.2024).
3. Emmenlauer, M., Ronneberger, O., Ponti, A., Schwarb, P., Griffa, A., Filippi, A., Nitschke, R., Driever, W., Burkhardt, H.: Xuvtools: free, fast and reliable stitching of large 3D datasets. *J. Microscopy* 233(1), 42–60 (2009)

4. Hariharan, B., Arbeláez, P., Girshick, R., Malik, J.: Hypercolumns for object segmentation and fine-grained localization. In: Proceeding CVPR, pp. 447–456 (2015)

5. Marshall Lamba, Understanding Semantic Segmentation with UNET // URL: <https://towardsdatascience.com/understanding-semantic-segmentation-with-unet-6be4f42d4b47> (дата обращения: 10.02.2024).

6. Long, J., Shelhamer, E., Darrell, T.: Fully convolutional networks for semantic segmentation. In: Proceeding CVPR, pp. 3431–3440 (2015)

Корчагин Дмитрий Сергеевич, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская федерация, студент 4-го курса бакалавриата, e-mail: st102709@student.spbu.ru

УДК 517.977.56

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАСКАДНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЫ

Корчагина О.Р.¹, Парт А.А.², Шаталов Д.А.¹

¹*ФГКВОУ ВПО Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

²*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж*

Основным объектами исследования является простейшая математическая модель гидродинамических процессов, проходящих в сети, структура которой аналогична графу-цепочке (простейшая сеть) [1]: L одномерных континуумов, параметризованных одномерным параметром пространства \mathbb{R}^1). Введем следующие обозначения: Γ – граф-цепочка с ребрами γ_k ($k = \overline{1, L}$); $\partial\Gamma$ – множество граничных, $J(\Gamma)$ – внутренних узлов ξ ; $\Gamma_0 = \Gamma \setminus (\partial\Gamma \cup J(\Gamma))$; $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$); $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$; каждое ребро $\gamma_k \in \Gamma$ параметризуется параметром $x \in [0, 1] \in \mathbb{R}^1$.

Предлагается математическое описание (математическая модель) каскадно-последовательного течения несжимаемой вязкой многофазной жидкости в терминах формализмов начально-краевой задачи в области $\overline{\Gamma_T} = \Gamma \times [0, T]$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), x \in \Gamma_T, \quad (1)$$

$$a(1)_{\gamma_k} \frac{\partial u(1, t)_{\gamma_k}}{\partial x} = a(0)_{\gamma_{k+1}} \frac{\partial u(0, t)_{\gamma_{k+1}}}{\partial x}, \quad k = \overline{1, L-1}, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$u|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad 0 < t < T; \quad (4)$$

коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$, характеризующие внутренние свойства текущей среды – фиксированные измеримые ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \beta$, $x \in \Gamma_0$; $\xi \in J(\Gamma)$ ($u(\cdot)_\gamma$ – сужение функции $u(\cdot)$ на ребро γ). Наличие функции $f(x, t)$ в правой части (1) обусловлено использованием однородных краевых условий (4) для описания пространств решений задачи (1)-(4): для неоднородной исходной задачи относительно функции $U(x, t)$ с нулевой правой частью (1) и ненулевыми

краевыми условиями $U|_{x \in \partial \Gamma} = \psi(x, t)$ осуществлена аддитивная замена $u = U - \psi$, переводящая неоднородность их краевых условий в правую часть уравнения (1).

Определение. Турбулентным (слабым [1]) решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется функция $u(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, удовлетворяющая соотношению

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_t} \left(-u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \right) dx dt + \ell_t(u, \eta) = \\ = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_t} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (5)$$

для любой $\eta(x, t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ и при любом $t \in [0, T]$.

Здесь $\ell_t(y, \eta) = \int_{\Gamma_t} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) y(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt$. Элементами

пространства $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ являются функции $u(x, t)$, непрерывные по переменной $t \in [0, T]$ и для каждого фиксированного t принадлежащие $L_2(\Gamma)$ вместе с обобщенной производной $u_x(x, t) \in L_2(\Gamma)$, причем $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (2) и (4) [2, 3]. Элементами пространства $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ являются функции $\eta(x, t)$ из $L_2(\Gamma_T)$ с обобщенными производными $\eta_x(x, t)$, $\eta_t(x, t)$ также из $L_2(\Gamma_T)$, причем $\eta(x, t)$ удовлетворяет условиям (4) и (6).

Имеют место следующие центральные утверждения:

Теорема 1. Начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное турбулентное решение $u(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, непрерывно зависящее от исходных данных $f(x, t)$ и $v(x)$.

Теорема 2. Турбулентное решение начально-краевая задача (1)-(4) непрерывно зависит от исходных данных $f(x, t)$ и $v(x)$.

Доказательство утверждений теорем аналогично приведенному в [2]. Прямым следствием теорем 1 и 2 является следующая

Теорема 3. Начально-краевая задача (1)-(4) корректна по Адамару.

Отметим, что полученные результаты могут быть использованы в анализе задач асимптотической устойчивости решений нелинейных систем, задач оптимизации сложных систем и родственным им задачам.

Литература

1. Волкова А.С., Гнилицкая Ю.А., Провоторов В.В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе // Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 51. № 1. С. 11-15.
2. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154-163.
3. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе. Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

Корчагина Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Парт Анна Александровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры природопользования, e-mail: anna_razinkova@mail.ru.

Шаталов Данила Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

УДК 517.977.56

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПОТОКА В СЕТЕПОДОБНОЙ ГИДРОСЕТИ

Корчагина О.Р., Шаталов Д.А.

ФГКВОУ ВПО Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Рассмотрим на практике случай отсутствия эффекта конвективности, когда несжимаемая вязкая среда в гидросети распространяется по закону ламинарного течения [1].

Линеаризованная система Навье-Стокса для вектор-функции $Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), \dots, y_n(x, t)\}$ ($x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) определяется в области $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$ ($T < \infty$):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \nabla p = f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} Y = 0, \quad (2)$$

в каждом узловом месте ξ справедливы соотношения:

$$Y|_{s_i^-(\xi)} = Y|_{s_i^+(\xi)}, \quad (3)$$

$$\sum_i \frac{\partial Y}{\partial n_i^-} |_{s_i^-(\xi)} + \sum_i \frac{\partial Y}{\partial n_i^+} |_{s_i^+(\xi)} = 0, \quad (4)$$

которые в литературе называют условиями сопряжения (см [2-3]); $S_i^-(\xi)$ и $S_i^+(\xi)$ - односторонние поверхности для $S_i(\xi)$, определяемые направлением нормалей n_i^- , n_i^+ к поверхностям $S_i^-(\xi)$, $S_i^+(\xi)$. Присоединяем начальные условия к системе Навье-Стокса (1)-(4):

$$Y(x, 0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{S} \quad (5)$$

в момент времени $t = 0$ и краевые условия

$$Y|_{\partial \mathfrak{S}} = 0 \quad (6)$$

на границе объема сплошной среды. Получаем начально-краевую задачу (1)-(6) для отыскания функций $Y(x, t)$ и $p(x, t)$ (где $p(x, t)$ - скалярная функция) в замкнутой области \mathfrak{S}_T ($\bar{\mathfrak{S}}_T = (\mathfrak{S} \cup \partial \mathfrak{S}) \times [0, T]$).

Введем необходимые данные для определения слабого решения начально-краевой задачи (1)-(6). Обозначим $L_2(\mathfrak{S})^n$ - пространство измеримых функций $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$, суммируемых с квадратом по области \mathfrak{S} . Скалярное произведение для $\mu, \rho \in L_2(\mathfrak{S})^n$ определяется соотношением:

$$(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathfrak{Z}} \mu_i(x) \rho_i(x) dx, \quad (7)$$

Основные обозначения представлены в [1]. Определим пространство $V_0^1(\mathfrak{Z})$ ($V_0^1(\mathfrak{Z})$ - подпространство функций из $\mathcal{H}^1(\mathfrak{Z})$, «удовлетворяющих условиям сопряжения» во всех узловых местах ξ области \mathfrak{Z} и «равных нулю» на $\partial\mathfrak{Z}$) как замыкание в норме $\mathcal{H}^1(\mathfrak{Z})$ множества элементов $\mu \in \mathfrak{D}(\mathfrak{Z})^n$, удовлетворяющих условиям сопряжения

$$\sum_I \frac{\partial \mu}{\partial n_i^-} \Big|_{s_i^-(\xi)} + \sum_I \frac{\partial \mu}{\partial n_i^+} \Big|_{s_i^+(\xi)} = 0$$

Далее пространство $V_0^1(\mathfrak{Z})$ можно определить как замыкание в норме $\mathcal{H}^1(\mathfrak{Z})$ множества элементов $\mu \in \mathfrak{D}_\circ(\mathfrak{Z})^n \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{Z})^n$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\rho(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathfrak{Z}} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad (8)$$

на функциях u, v, ω .

Определение 1. Слабым решением начально-краевой задачи (1)-(6) называется пара $\{Y, p\}$. При этом функция $Y(x, t) \in V_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} (Y(x, t), \eta(x, t)) - \int_{\mathfrak{Z}_t} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + v \int_0^t \rho(Y, \eta) d\tau = \\ = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\mathfrak{Z}_t} f(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

для любых $t \in [0, T]$ и любых $\eta(x, t) \in W_0^1(\mathfrak{Z}_T)$, а функция $p(x, t)$ принадлежит классу $\mathfrak{D}'(\mathfrak{Z}_T)^n$. Где $\mathfrak{D}'(\mathfrak{Z}_T)^n$ - сопряженное пространство к пространству $\mathfrak{D}(\mathfrak{Z}_T)^n$, элементы $\mathfrak{D}(\mathfrak{Z}_T)^n$ суть бесконечно дифференцируемые в \mathfrak{Z}_T функции с компактным носителем из \mathfrak{Z}_T [2].

Определение 2. Невозмущенное состояние $\bar{Y}(x, t)$ системы (1)-(2) называется слабо устойчивым по Ляпунову, если для любых $t_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при $\|Y_0 - \bar{Y}_0\|_{L_2(\mathfrak{Z})} < \delta(t_0, \varepsilon)$ выполняется $\|Y(\cdot, t) - \bar{Y}(\cdot, t)\|_{W^1(a, \mathfrak{Z})} < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $Y(x, t)$ - возмущенное состояние системы (1)-(2).

Теорема 1. При установленных выше предположениях невозмущенное состояние системы (1)-(2) в области \mathfrak{Z}_∞ слабо устойчиво.

Для линеаризованной системы Навье-Стокса рассмотрены достаточно распространенные в приложениях вопросы: однозначная разрешимость начально-краевой задачи, представляющей собой математическую модель динамики гидравлического потока в гидросети, коэффициент вязкости которой известен и устойчивость невозмущенного движения гидравлического потока.

Литература

1. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета.

Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154-163.

2. Ладъженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

3. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.

Корчагина Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Шаталов Данила Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

УДК 51-76

АНАЛИЗ ДАННЫХ ПЕРФУЗИОННОЙ ТОМОСЦИНТИГРАФИИ МИОКАРДА

Крупнова К.С., Котина Е.Д., Остроумов Е.Н.

***Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
ГБУЗ «НИИ скорой помощи им. Н.В. Склифосовского ДЗМ», г. Москва***

На сегодняшний день актуальна обработка данных на основе подходов радиомики, которые позволяют извлекать большое количество диагностических параметров и проводить их дальнейший анализ на основе методов машинного обучения. В работе рассматривается исследование, проводимое на основе однофотонной эмиссионной компьютерной томографии, а именно, перфузионная томосцинтиграфия миокарда с ЭКГ синхронизацией, которая позволяет получать большое количество данных, отражающих перфузию и функцию миокарда [1]. Исследование посвящено анализу параметров, полученных с помощью методов математического моделирования из 3D изображений миокарда до и после реваскуляризации. С использованием методов математической статистики были выявлены значимые изменения параметров для разных групп пациентов; выявлены связи между изменениями показателей желудочков сердца; получены основные параметры, имеющие корреляцию с изменением фракции выброса.

Для обработки результатов ОФЭКТ использовалась программа ИНДИС-КАРФИ, позволяющая определить диагностические параметры перфузии и функции левого желудочка (ЛЖ) и правого желудочка (ПРЖ) сердца [3], [4]. Данные, использованные в ходе работы, представляют собой эмпирическую базу на основе выборки из 140 исследований ОФЭКТ. Статистический анализ проводился с использованием непараметрического критерия Уилкоксона. Для выявления зависимостей между параметрами строились корреляционные матрицы на основе коэффициентов ранговой корреляции Спирмена [2]. Рассматривалось следующее разделение на группы: по фракции выброса ЛЖ до операции: «40% и менее» и «более 40%»; по типу реваскуляризации: левая коронарная артерия («ЛКА»), правая коронарная артерия («ПКА»), обе артерии («ЛКА+ПКА»).

В результате работы были выявлены следующие основные изменения. В группе «40% и менее» наблюдалось увеличение ФВ ЛЖ, снижение конечных диастолического и систолического объемов ЛЖ, уменьшение интервала сердечного цикла. Также отмечены изменения параметров, отражающих движение стенок, асинхронию и нарушение диастолической перфузии в некоторых сегментах модели миокарда. В группе «более 40%» значимых изменений выявлено не было. В группе «ПКА» выявлено уменьшение времени наступления конечной систолы для ЛЖ и увеличение фракции выброса ПрЖ в первую треть сердечного цикла. Также отмечены изменения параметра систолического утолщения ПрЖ в некоторых сегментах. В группе «ЛКА+ПКА» отмечено увеличение ФВ ЛЖ, а также увеличение параметров движения ЛЖ и ПрЖ, систолического утолщения ЛЖ, уменьшение параметров нарушения диастолической перфузии ЛЖ и асинхронии ПрЖ в некоторых сегментах.

В результате исследования были выявлены значимые изменения параметров при разделении выборки на группы, выявлены связи между изменением ФВ и изменениями показателей для левого и правого желудочков, и получены основные параметры, имеющие корреляцию с изменением фракции выброса. Полученные параметры в дальнейшем можно использовать для построения моделей прогнозирования с использованием методов машинного обучения.

Литература

1. Котина Е.Д. Математические и компьютерное моделирование в ядерной медицине: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2022. – 143 с. – ISBN 978-5-9651-1395-8.
2. Бритвина П.В. Машинное обучение в медицине: революция диагностики, лечения и персонализации // Вестник науки. – 2024. – № 1 (70). – Т. 4. – С. 442-444.
3. Программа обработки кардиологических функциональных исследований (ИНДИС-КАРФИ) Котина Е. Д., Овсянников Д. А., Остроумов Е. Н., Плоских В. А., Бабин, А. В., 2014, Свидетельство регистрации № 2014662434
4. Остроумов Е.Н., Мигунова Е.В., Котина Е.Д., Леонова Е.Б., Кузьмина И.М., Пархоменко М.В., Камбаров С.Ю., Сагиров М.А. Визуализация правого желудочка при перфузионной однофотонной эмиссионной компьютерной томографии до и после ревааскуляризации у больных с постинфарктным кардиосклерозом // Трансплантология. – 2023. – Т. 15, № 2. – С. 200–215. – DOI: 10.23873/2074-0506-2023-15-2-200-215.

Крупнова Карина Сергеевна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, магистр, e-mail: krupnova.karina2000@gmail.com.

Котина Елена Дмитриевна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры диагностики функциональных систем, e-mail: e.kotina@spbu.ru.

Остроумов Евгений Николаевич, ГБУЗ «НИИ скорой помощи им. Н.В. Склифосовского ДЗМ», Москва, Российская Федерация, доктор медицинских наук, старший преподаватель учебного центра, научный консультант отделения лучевой диагностики, e-mail: ostroumoven@sklif.mos.ru.

МЕТОД РАСЧЕТА МЕМБРАННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ

Куксов Д.Ю., Лялин К.Д.

ФГКВБОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Приоритетное направление мембранного способа газоразделения на сегодняшний день является выделение азота и кислорода из сжатого воздуха. Основная область практического применения азота заключается в создании негорючих сред, а также в обеспечении благоприятных условий для хранения веществ, окисляющихся на воздухе. В данном случае азот выступает в качестве инертного газа. В настоящее время основными источниками азота являются стационарные и передвижные азотные установки основанные на мембранной технологии.

Целью данной работы являлся поиск оптимального метода расчета мембранного разделения газовой смеси. Следует отметить, что принцип мембранного разделения основан на различной скорости проникновения компонентов газовой смеси через непористую полимерную мембрану за счет перепада парциальных давлений газа по обе стороны мембраны. Поэтому расчеты будут проводиться на основе более проникающих молекул. Также будем считать воздух бинарной смесью с концентрациями кислорода (O_2) и азота (N_2) 21% и 79%, соответственно.

Вычисления будем проводить на основе данных взятых из литературы [1]. Для оценки проницаемости отдельных составляющих газовой смеси применимы уравнения [2]:

$$V_o = K_o S \Delta P_o; \quad (1)$$

$$V_N = K_N S \Delta P_N. \quad (2)$$

где V – расход потока, $m^3/ч$; K – коэффициент проницаемости чистых веществ, $nm^3/(MPa \cdot m^2 \cdot ч)$; ΔP – разность парциальных давлений, МПа; S – площадь рабочей поверхности (перегородки), m^2 .

Индексы « O » и « N » обозначают компонент кислорода и азота, соответственно.

Разность парциальных давлений для компонента « O », выражается:

$$\Delta P_o = P_x x - P_y y, \quad (3)$$

где P_x и P_y – абсолютные давления над мембраной и после нее, соответственно, МПа, x – концентрация компонента « O » (кислорода) в питающей смеси, y – концентрация компонента « N » (азота) в пермеате.

Представим уравнение состояние мембраны $\varphi = P_y / P_x$ для случая переменной концентрации x . Введем усредненное значение концентрации над мембранной и воспользуемся уравнением материального баланса для одного из компонентов:

$$x = (x_l + x_k) / 2; \quad (4)$$

$$F_l x_l = V_y + (F_l - V) x_k. \quad (5)$$

Используя (4) и (5), после преобразований получим:

$$x_k = \frac{x_l - (V / F_l) y}{1 - (V / F_l)} = \frac{x_l - \theta y}{1 - \theta};$$

$$x = \frac{x_l + x_k}{2} = \frac{x_l}{2} + \frac{x_l - \theta y}{2(1 - \theta)} = \frac{2x_l - \theta(x_l + y)}{2(1 - \theta)}. \quad (6)$$

Выражение (6) имеет вид решения квадратного уравнения члены которого зависят от относительного расхода θ :

$$y^2\varphi(1-\alpha) + y[1 + (\varphi + x)(\alpha - 1)] - \alpha x = 0; \quad (7)$$

где $\alpha = K_O/K_N$.

Его решение имеет вид:

$$y_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{B}{A} + \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 4\frac{C}{A}} \right]; \quad (8)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{B}{A} - \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 4\frac{C}{A}} \right], \quad (9)$$

где $A = (1-\alpha)[2\varphi(1-\theta) + \theta]$; $B = 2(1-\theta) - 2\varphi(1-\alpha)(1-\theta) - 2x_1(1-\alpha) + \theta x_1(1-\alpha) + \alpha\theta$; $C = \alpha x_1(\theta - 2)$.

Решив уравнения (8), (9) и коэффициенты A , B , C строим график зависимости давления от содержания кислорода при различных значениях α .

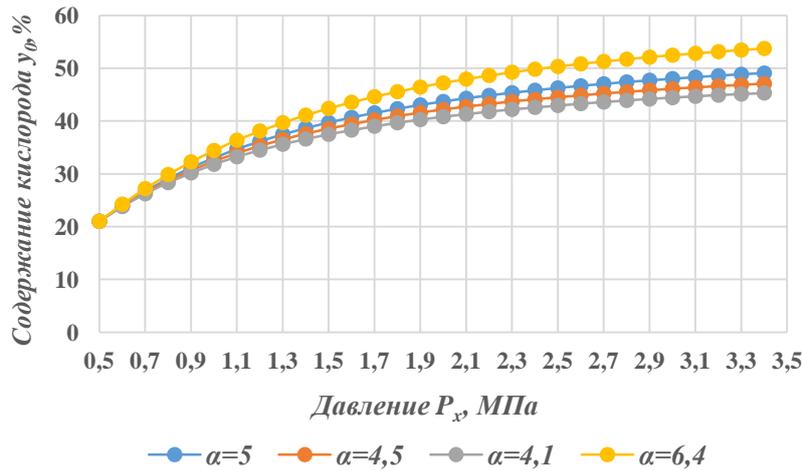


Рис.1 Содержание кислорода y_o в пермеатном потоке после мембраны при обогащении воздуха ($x_o=0,21$) в зависимости от давления P_x и фактора разделения α .

Анализ зависимостей показывает, что при повышенных давлениях и увеличении фактора разделения процесс обогащения потока кислородом идет эффективней. Таким образом, упрощенные методы анализа достаточно корректно отражают процесс разделения воздуха в мембранах с полыми волокнами.

Литература

1. Мембраны в медицине. Курс лекций / И.Г. Бекман С.1-17.
2. Применение мембранных процессов в технологиях разделения газовых смесей на основе компонентов воздуха / В.Л. Бондаренко [и др.] // Технические газы. 2012. № 2. С.19-30.

Куксов Дмитрий Юрьевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: tm.skky9536@mail.ru.

Лялин Константин Дмитриевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, e-mail: tm.skky9536@mail.ru.

О РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧЕ ВРАЩЕНИЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ В НЕНЬЮТОНОВСКОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Купцов В.С., Катрахова А.А.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

В работе вычислены гидродинамические параметры вращения двух цилиндров в неньютоновском потоке несжимаемой жидкости. Получено точное решение с учетом конвективных членов уравнений, описывающих это течение. Для нахождения решения данной задачи использовались результат решения задачи в данной постановки этой задачи, но для потока вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Вращение двух цилиндров радиусов a (внешний) и b (внутренний) со скоростями ω_2 и ω_1 в установившемся потоке неньютоновской несжимаемой жидкости (жидкость находится между этими цилиндрами). Тогда компоненты данного течения удовлетворяет системе уравнений в напряжениях и уравнение неразрывности (в цилиндрических координатах) [1], [2]

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{r} \right); \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2\partial p_{r\varphi}}{r} \right); \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{rz}}{r} \right); \\ -\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$), $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, p_{zz}, p_{r\varphi}, p_{z\varphi}, p_{rz}$ – компоненты напряжений. v_r, v_z, v_φ – компоненты вектора скорости, ρ – плотность жидкости ($\rho = const$). Условия прилипания жидкости на бесконечности в данной задаче имеют вид

$$\text{при } r = a \quad v_\varphi = \omega_2 a, \quad \text{при } r = b \quad v_\varphi = \omega_1 b. \quad (2)$$

Предполагается, что траектории жидких частиц окружности с центрами на оси Oz определены соотношениями

$$v_r \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Предположим, что скорость обтекания и давление при условиях (2) (как в случае вязкой несжимаемой жидкости [1], [2]) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \frac{1}{a^2 - b^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{r} \right]; \quad p = \frac{\rho}{(a^2 - b^2)^2} \left[\frac{r^2}{2} (\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2a^2 b^2 (\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) (\omega_1 - \omega_2) \ln r - \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 a^4 b^4}{2r^2} \right] + C. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения для скоростей деформаций в общем случае цилиндрической системы координат принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}; \\ \varepsilon_{z\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right). \quad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{z\varphi} = 0; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(-\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Второй инвариант скоростей деформации (также в цилиндрической системе координат):

$$J_2 = (\varepsilon_{r\varphi})^2 = \left(-\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^2 = \left(-\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^2 = \left[\frac{1}{a^2 - b^2} (-\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) + \omega_2 - \omega_1 a^2 b^2 r^2 + \omega_2 a^2 - \omega_1 b^2 + \omega_2 - \omega_1 a^2 b^2 r^2\right]^2 \quad (5)$$

Обозначим $T(r, \theta) = k I_2^{(n-1)/2}$, где k – начальная вязкость, J_2 – второй инвариант, для псевдопластиков $n < 1$, для дилатантных жидкостей $n > 1$, для вязкой жидкости $n = 1$. Для неньютоновской жидкости имеем [3]:

$$p_{rr} = p_{\varphi\varphi} = p_{zz} = -p; \quad p_{rz} = p_{z\varphi} = 0;$$

$$p_{r\varphi} = T \varepsilon_{r\varphi} = T \left(\frac{2(\omega_2 - \omega_1) a^2 b^2}{r^2 (a^2 - b^2)} \right).$$

Отметим, что при $n = 1$ и $k = \mu$ имеем формулы, полученные для решения задачи обтекания вязкой несжимаемой жидкости.

Вычислим момент вех сил по какой либо окружности относительно оси симметрии радиуса r .

$$L = \int_0^{2\pi} p_{r\varphi} r^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} k \left[\frac{2(\omega_2 - \omega_1) a^2 b^2}{r^2 (a^2 - b^2)} \right]^n r^2 d\varphi = 2\pi k \left[\frac{2(\omega_2 - \omega_1) a^2 b^2}{r^2 (a^2 - b^2)} \right]^n r^2.$$

Для псевдопластиков $n < 1$ и дилатантных жидкостей $n > 1$.

Частный случай вязкой жидкости: $n = 1$ $k = \mu$ и момент, (как и сила, представленная в работе [4]) равен

$$L = -4\pi\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{(a^2 - b^2)}.$$

Литература

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М: Гос. изд. технико-теоретич. литер., 1955, 519 с.
2. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М: Издательство: Мир, 1964, 216 с.
3. Купцов В.С. О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости // В кн: Сб. статей по мех. спл. сред. /Труды НИИМа. Воронеж: ВГУ, 1976.
4. Математическая модель задачи обтекания сферы неньютоновским потоком несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. / В.С. Купцов, А.А. Катрахова // Воронеж. Вестник ВГТУ, том 19, номер 6, 2023, 81-84 с.

Купцов Валерий Семенович, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: Vskuptsov@rambler.ru

Катрахова Алла Анатольевна, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: Vskuptsov@rambler.ru

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ
СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА,
РАССМАТРИВАЕМОГО В ЧЕТВЕРТИ ШАРА**

Ларин А.А., Крыгин Д.С.

**ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж**

Пусть $B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, x > 0, z > 0\}$ – часть шара с центром в точке $O(0,0,0)$ радиуса $R_0 > 0$ в пространстве E^3 . Обозначим через Γ^+ часть границы области $B(R_0)$, состоящую из части сферы $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2, x \geq 0, z \geq 0\}$ и полукруга $\{(0, y, z) : y^2 + z^2 \leq R_0^2, z \geq 0\}$, и пусть Γ^0 – оставшаяся часть границы $\partial B(R_0)$.

Чертой сверху над символом, обозначающим множество в E^3 , будем обозначать замыкание этого множества в E^3 , так что $\overline{B(R_0)} = B(R_0) \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0$.

В замкнутой области $\overline{B(R_0)}$ рассмотрим задачу на собственные значения вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{E}{r^2} u = \lambda u, \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in B(R_0),$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\Gamma^0} = 0, \quad (2)$$

где k и E – вещественные числа, $k > 0$, $E \geq 0$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Решения задачи (1) - (2) ищутся в классе функций $C^2(B(R_0)) \cap C^1(B(R_0) \cup \Gamma^0) \cap C(\overline{B(R_0)})$.

Легко видеть, что все собственные значения λ этой задачи положительны. Цель работы – найти эти собственные значения, выписать в явном виде отвечающие им собственные функции и выяснить характер их поведения при $r \rightarrow 0$ в зависимости от параметра E .

Переходя в изучаемой задаче к сферическим координатам по формулам

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

и полагая

$$v(r, \theta, \varphi) = u(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi),$$

придём к следующей краевой задаче для функции $v(r, \theta, \varphi)$ в параллелепипеде

$$\Pi = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi\}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k+2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - E v + \lambda r^2 v \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \pi/2, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$v(R_0, \theta, \varphi) = 0, \quad (4)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$v(r, \pi/2, \varphi) = 0, \quad (5)$$

$$0 \leq r \leq R_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \theta, \pi) = 0, \quad (6)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Следуя [1, 2], задачу (3) - (6) будем решать методом разделения переменных. Разделяя в этой задаче переменные по формуле $v(r, \theta, \varphi) = R(r)\Phi(\theta, \varphi)$, получим соответствующие спектральные задачи для функций $\Phi(\theta, \varphi)$ и $R(r)$.

Для нахождения функций $\Phi(\theta, \varphi)$ получим задачу Штурма-Лиувилля вида

$$\begin{aligned} -\Delta_{\theta\varphi}\Phi &= \mu\Phi, \quad 0 < \theta < \pi/2, \quad 0 < \varphi < \pi, \\ \Phi(\pi/2, \varphi) &= 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ |\Phi| &\leq C(\mu), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \pi/2, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi}\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$C(\mu)$ – верхняя грань для модуля функции Φ , зависящая от μ .

Для определения соответствующих каждому фиксированному μ радиальных составляющих $R(r)$ получим краевую задачу вида

$$\begin{aligned} R'' + \frac{k+2}{r} R' + \left(\lambda - \frac{E+\mu}{r^2} \right) R &= 0, \quad r > 0, \\ R(R_0) &= 0, \\ R &\in C[0, \infty). \end{aligned} \quad (8)$$

Спектральная задача (7) также решается методом разделения переменных.

Везде далее будем считать, что параметр $k > 1$ и не является нечётным числом. При наложенных на k ограничениях решения задачи (6) определяются следующими соотношениями.

Её собственные значения даются двухиндексной последовательностью

$$\begin{aligned} \mu_{n,m} &= (n+2m+1)(n+2m+k+2) > 0, \\ n, m &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

а соответствующие собственные функции с точностью до постоянного множителя записываются в виде

$$\Phi_{n,m}(\theta, \varphi) = (\sin \varphi)^{(1-k)/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \varphi) (\sin \theta)^{-k/2} P_{n+2m+1+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta) = \Phi_n^{(1)}(\varphi) \Phi_{n,m}^{(2)}(\theta), \quad (10)$$

$$n, m = 0, 1, \dots,$$

Символом вида $P_\nu^s(\cos \tau)$ в формуле (10) обозначена функция Лежандра первого рода, определённая на разрезе, от аргумента $\cos \tau$ [3, с.144]. Можно показать, что каждая функция $\Phi_{n,m}(\theta, \varphi)$ является произведением некоторых алгебраических многочленов $\Phi_n^{(1)}(\varphi)$ и $\Phi_{n,m}^{(2)}(\theta)$ от аргументов $\cos \varphi$ и $\cos \theta, \sin \theta$, соответственно [4].

Рассмотрим теперь задачу (8) с найденными $\mu = \mu_{n,m}$.

Введением новой функции по формуле $R(r) = \bar{R}(r)r^{-(k+1)/2}$ уравнение краевой задачи (8) приводится к виду

$$\bar{R}'' + \frac{1}{r}\bar{R}' + \left(\lambda - \frac{E + (n + 2m + 1 + (k + 1) / 2)^2}{r^2}\right)\bar{R} = 0. \quad (11)$$

Переходя в уравнении (11) при фиксированном λ к новой переменной $z = \sqrt{\lambda} r$ и полагая $\bar{R}(r) = \bar{R}(z / \sqrt{\lambda}) = Y(z)$, получим, что функция $Y(z)$ является решением уравнения Бесселя порядка

$$q = q(n, m) = \sqrt{E + (n + 2m + 1 + (k + 1) / 2)^2} : \\ Y''(z) + \frac{1}{z}Y'(z) + \left(1 - \frac{q^2}{z^2}\right)Y(z) = 0. \quad (12)$$

Учитывая поведение функции $\bar{R}(r)$ при $r \rightarrow 0$, получаем, что решение $Y(z)$ уравнения (12) имеет с точностью до постоянного множителя вид $Y(z) = J_{q(n, m)}(z)$, где $J_{q(n, m)}(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка $q(n, m)$. Учитывая соотношение между функциями $Y(z)$ и $R(r)$, получаем, что с точностью до постоянного множителя функция $R(r)$ записывается в виде

$$R(r) = R_{n, m}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{q(n, m)}(\sqrt{\lambda} r), \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Учитывая краевое условие $R_{n, m}(R_0) = 0$, находим собственные значения λ исходной задачи:

$$\lambda = \lambda_{n, m, l} = \left(\frac{\beta_{q(n, m), l}}{R_0}\right)^2, \quad l = 1, 2, \dots, \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где $\beta_{q(n, m), l}$ – l – й положительный корень уравнения $J_{q(n, m)}(\beta) = 0$.

Таким образом, радиальные составляющие решений $v(r, \theta, \varphi)$ с точностью до числового множителя записываются в виде

$$R_{n, m}(r) = R_{n, m, l}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{q(n, m)}\left(\frac{\beta_{q(n, m), l}}{R_0} r\right), \quad (14) \\ l = 1, 2, \dots, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Собственные значения задачи (1) – (3) определяются равенством (13), а отвечающие им собственные функции в сферической системе координат имеют вид

$$u_{n, m, l}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) = C_{n, m, l} R_{n, m, l}(r) \Phi_{n, m}(\theta, \varphi), \quad (15)$$

где $C_{n, m, l}$ – произвольные ненулевые постоянные, а функции $R_{n, m, l}(r)$ и $\Phi_{n, m}(\theta, \varphi)$ определяются формулами (14) и (10), соответственно,

$$n, m = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots$$

Проведём качественный анализ найденных собственных функций (15). Заметим, что для функций Бесселя первого рода $J_q(t)$ при $t \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$J_q(t) \sim \frac{t^q}{2^q \Gamma(1 + q)}$, $q > 0, t > 0$, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера от аргумента α [1, с.170]. Положим

$$\varepsilon(n, m) = \sqrt{E + (n + 2m + 1 + (k + 1) / 2)^2} - (k + 1) / 2.$$

Поскольку $\varepsilon(n, m) > 0$ при любых n и m , то произвольная собственная функция $u_{n, m, l}(x, y, z)$, обращающаяся в ноль в точке $O(0; 0; 0)$ в силу краевого условия $u|_{r=R_0} = 0$,

представляет собой величину $O(r^{\varepsilon(n,m)})$ при $r \rightarrow 0$. При этом показатель $\varepsilon(n,m)$ тем больше, чем больше параметр E .

Литература

1. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
2. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.2. М.: ИЛ, 1961. 556 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. 296 с.
4. Ларин А.А., Кириллов В.П. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом// Сб. тр. X Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (18-24 сентября 2017 г.). Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2017. С. 221–225.

Ларин Александр Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина" (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, E-mail: DONIORV@yandex.ru.

Крыгин Данила Сергеевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина" (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С КУЛОНОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ларин А.А., Крысанов Н.А.

ФГКВБОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Пусть $B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, z > 0\}$ – часть шара с центром в точке $O(0;0;0)$ радиуса $R_0 > 0$, расположенная в полупространстве $z > 0$ пространства E^3 . Пусть Γ^+ – часть границы области $B(R_0)$, являющаяся полусферой, так что $\Gamma^+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2, z \geq 0\}$, и пусть Γ^0 – оставшаяся часть границы $\partial B(R_0)$.

Чертой сверху над символом, обозначающим множество в E^3 , будем обозначать замыкание этого множества в E^3 , так что $\overline{B(R_0)} = B(R_0) \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0$.

В замкнутом полушаре $\overline{B(R_0)}$ рассмотрим задачу на собственные значения вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{E}{r} = \lambda u, \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in B(R_0),$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\Gamma^0 \setminus O} = 0, \quad (2)$$

где k и E – вещественные числа, $k > 0$, $E > 0$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Решения задачи (1) – (2) ищутся в классе функций $C^2(B(R_0)) \cap C^1(B(R_0) \cup (\Gamma^0 \setminus O)) \cap C(\overline{B(R_0)})$.

Известно [3], что каждая из собственных функций задачи (1)–(2) бесконечно дифференцируема на множестве $\overline{B(R_0)} \setminus O$ и удовлетворяет условиям $\partial u / \partial x = O(r^{-\varepsilon})$, $\partial u / \partial y = O(r^{-\varepsilon})$, $\partial u / \partial z = O(r^{-\varepsilon})$, $r \rightarrow 0$, для любого $\varepsilon > 0$. Кроме того, интегрированием по частям легко убедиться, что все собственные значения λ задачи (1)–(2) положительны.

Цель работы – найти эти собственные значения, выписать в явном виде отвечающие им собственные функции.

Переходя в изучаемой задаче к сферическим координатам по формулам

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi, \\ r &\geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

и полагая

$$v(r, \theta, \varphi) = u(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi),$$

придём к следующей краевой задаче для функции $v(r, \theta, \varphi)$ в параллелепипеде $\Pi = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k+2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - E v r + \lambda v r^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$v(R_0, \theta, \varphi) = 0, \quad (4)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \theta, \pi) = 0, \quad (5)$$

$$0 \leq r < R_0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Задачу (3) – (5) будем решать методом разделения переменных [1, 2]. Разделяя переменные по формуле $v(r, \theta, \varphi) = R(r)\Phi(\theta, \varphi)$, получим соответствующие спектральные задачи для функций $\Phi(\theta, \varphi)$ и $R(r)$.

Для нахождения функций $\Phi(\theta, \varphi)$ получим задачу Штурма-Лиувилля вида

$$\begin{aligned} -\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \mu \Phi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi, \\ |\Phi| \leq C(\mu), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \pi,$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$C(\mu)$ – верхняя грань для модуля функции Φ .

Для определения соответствующих каждому фиксированному μ радиальных составляющих $R(r)$ получим краевую задачу вида

$$\begin{aligned} R'' + \frac{k+2}{r} R' + \left(\lambda - \frac{E}{r} - \frac{\mu}{r^2}\right) R &= 0, \quad r > 0, \\ R(R_0) &= 0, \\ R &\in C[0, R_0]. \end{aligned} \quad (7)$$

Спектральная задача (6) также решается методом разделения переменных.

Везде далее будем считать, что параметр $k > 1$ и не является нечётным числом. При наложенных на k ограничениях решения задачи (6) определяются следующими соотношениями.

Её собственные значения даются двухиндексной последовательностью

$$\begin{aligned} \mu_{n,p} &= (n+p)(n+p+k+1) \geq 0, \\ n, p &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

а соответствующие собственные функции с точностью до постоянного множителя записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{n,p}(\theta, \varphi) &= (\sin \varphi)^{(1-k)/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \varphi) (\sin \theta)^{-k/2} P_{n+p+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta) = \Phi_n^{(1)}(\varphi) \Phi_{n,p}^{(2)}(\theta), \\ n, p &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Символом вида $P_\nu^s(\cos \tau)$ в формуле (9) обозначена функция Лежандра первого рода, определённая на разрезе, от аргумента $\cos \tau$ [3, с.144]. Можно показать, что каждая функция $\Phi_{n,p}(\theta, \varphi)$ является произведением некоторых алгебраических многочленов $\Phi_n^{(1)}(\varphi)$ и $\Phi_{n,p}^{(2)}(\theta)$ от аргументов $\cos \varphi, \sin \theta, \cos \theta$ [4].

Рассмотрим теперь задачу (7) для нахождения функции $R(r)$, полагая в ней $\mu = \mu_{n,p} = (n+p)(n+p+k+1), n, p = 0, 1, \dots$

Уравнение для R принимает вид

$$R'' + \frac{k+2}{r} R' + \left(\lambda - \frac{E}{r} - \frac{(n+p)(n+p+k+1)}{r^2}\right) R = 0, \quad r > 0, \quad (10)$$

и является частным случаем уравнения

$$y'' + \left(a + \frac{b}{x}\right) y' + \left(\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}\right) y = 0 \quad (11)$$

[5, с. 239]. В рассматриваемом случае

$$a = 0, \quad b = k+2, \quad \alpha = \lambda > 0, \quad \beta = -E < 0, \quad \gamma = -(n+p)(n+p+k+1) \leq 0.$$

Используя вид общего решения уравнения (11) при выполнении условия $a^2 \neq 4\alpha$ [5, с. 240], получим общее решение уравнения (10) в виде

$$\begin{aligned} R(r) &= C_1 r^{n+p} e^{-i\sqrt{\lambda}r} \Phi\left(\frac{k+2}{2} + n + p - \frac{iE}{2\sqrt{\lambda}}, k+2+2(n+p); 2i\sqrt{\lambda}r\right) + C_2 r^{n+p} e^{-i\sqrt{\lambda}r} \times \\ &\quad \times \Psi\left(\frac{k+2}{2} + n + p - \frac{iE}{2\sqrt{\lambda}}, k+2+2(n+p); 2i\sqrt{\lambda}r\right), \end{aligned}$$

где $\Phi(a, c; z)$ и $\Psi(a, c; z)$ – вырожденные гипергеометрические функции первого и второго рода, соответственно [5, с. 237, 244], C_1, C_2 – произвольные постоянные, вообще говоря, комплексные.

Учитывая асимптотику функций $\Phi(a, c; z)$ и $\Psi(a, c; z)$ при $z \rightarrow 0$, получим, что в формуле для общего решения $R(r)$ следует положить $C_2 = 0$. Таким образом, при

фиксированных n и p непрерывное решение $R(r)$ уравнения (10) с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$R(r) = r^{n+p} e^{-i\sqrt{\lambda}r} \Phi\left(\frac{k+2}{2} + n + p - \frac{iE}{2\sqrt{\lambda}}, k+2+2(n+p); 2i\sqrt{\lambda}r\right). \quad (12)$$

Покажем, что функция $R(r)$ вещественнозначна. Положим в формуле (12) $a = \frac{k+2}{2} + n + p - \frac{iE}{2\sqrt{\lambda}}$, $c = k+2+2(n+p)$, $z = 2i\sqrt{\lambda}r$. Заметим, что $c - \bar{a} = a$, $\bar{z} = -z$.

Тогда

$$R(r) = r^{n+p} e^{-\frac{z}{2}} \Phi(a, c; z).$$

Из интегрального представления [5, с. 243]

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad 0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c$$

следует, что при рассматриваемых a и c справедливо соотношение $\bar{\Phi}(a, c; z) = \Phi(\bar{a}, c; \bar{z})$.

Используя преобразование Куммера $\Phi(a, c; z) = e^z \Phi(c-a, c; -z)$ [5, с. 241], получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{R}(r) &= r^{n+p} e^{\frac{\bar{z}}{2}} \bar{\Phi}(a, c; z) = r^{n+p} e^{\frac{\bar{z}}{2}} \Phi(\bar{a}, c; \bar{z}) = r^{n+p} e^{\frac{\bar{z}}{2}} e^{\bar{z}} \Phi(c-\bar{a}, c; -\bar{z}) = \\ &= r^{n+p} e^{\frac{z}{2}} e^{\bar{z}} \Phi(c-\bar{a}, c; -\bar{z}) = r^{n+p} e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \Phi(a, c; -\bar{z}) = r^{n+p} e^{-\frac{z}{2}} \Phi(a, c; z) = R(r). \end{aligned}$$

При фиксированных n и p собственные значения λ_{npl} задачи (3)-(5), а потому и исходной задачи, находим как все положительные решения уравнения

$$\Phi\left(\frac{k+2}{2} + n + p - \frac{iE}{2\sqrt{\lambda}}, k+2+2(n+p); 2i\sqrt{\lambda}R_0\right) = \varphi(\lambda) = 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Пусть λ_{npl} – всевозможные положительные решения уравнения (13), и пусть

$$R_{n,p,l} = C_{npl} r^{n+p} e^{-i\sqrt{\lambda_{npl}}r} \Phi\left(\frac{k+2}{2} + n + p - \frac{iE}{2\sqrt{\lambda}}, k+2+2(n+p); 2i\sqrt{\lambda_{npl}}r\right), \quad (14)$$

где C_{npl} – произвольные ненулевые постоянные, $n, p = 0, 1, \dots$, $l = 1, 2, \dots$.

Тогда все собственные функции задачи (3)-(5), соответствующие собственным значениям λ_{npl} , с точностью до постоянных множителей имеют вид

$$R_{n,p,l}(r) \Phi_{n,p}(\theta), \quad n, p = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Все собственные значения λ_{npl} задачи (1)-(2) находятся как всевозможные положительные решения уравнения (13). Отвечающие им собственные функции, записанные в сферических координатах, имеют вид

$$\begin{aligned} v_{n,p,l}(r, \theta, \varphi) &= u_{n,p,l}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) = R_{n,p,l}(r) \Phi_{n,p}(\theta), \quad (15) \\ n, p &= 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Функции $R_{n,p,l}(r)$ и $\Phi_{n,p}(\theta)$ в формуле (15) определяются равенствами (14) и (9), соответственно.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения, аналогичную (1)-(2), для случая, когда $E = 0$.

Решение задачи для $E = 0$ можно получить из решения уже рассмотренной задачи. Воспользуемся для этого тождеством [5, с. 252]

$$\Phi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu, 2ix\right) = \Gamma(\nu + 1)e^{ix} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(x), \quad (16)$$

в котором символом $J_{\nu}(x)$ обозначена функция Бесселя первого рода порядка ν .

Уравнение для нахождения собственных чисел λ_{npl} при фиксированных n и p будет равносильно уравнению

$$J_{\frac{k+1}{2}+n+p}(\sqrt{\lambda}R_0) = \varphi(\lambda) = 0.$$

Поэтому собственные значения λ_{npl} рассматриваемой задачи находятся по формуле

$$\lambda_{npl} = \left(\frac{\mu_{npl}}{R_0}\right)^2, \quad (17)$$

в которой через μ_{npl} обозначен l -й положительный корень уравнения

$$J_{\frac{k+1}{2}+n+p}(\mu) = 0, \quad n, p = 0, 1, \dots, l = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Соответствующие этим собственным значениям радиальные функции $R_{npl}(r)$ будут иметь вид

$$R_{n,p,l} = A_{npl} r^{-\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}+n+p}\left(\frac{\mu_{npl}}{R_0} r\right), \quad A_{npl} \neq 0, \quad n, p = 0, 1, \dots, l = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Таким образом, установлена справедливость следующего предложения.

Теорема 2. Собственные значения спектральной задачи вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda u,$$

$$(x, y, z) \in B(R_0),$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{\Gamma^0} = 0,$$

находятся по формуле (17). Отвечающие им собственные функции в сферической системе координат имеют вид

$$u_{n,p,l}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) = R_{n,p,l}(r) \Phi_{n,p}(\theta), \quad (20)$$

Функции $R_{n,p,l}(r)$ и $\Phi_{n,p}(\theta)$ в формуле (20) определяются равенствами (19) и (9), соответственно.

Литература

1. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. 344 с.
2. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.2. – М.: ИЛ, 1961. 556 с.
3. Ларин А.А., Шевнин Н.П. О гладкости решений некоторых сингулярных эллиптических уравнений второго порядка// Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов IX международной конференции «ПМТУКТ-2016» /под ред. И.Л. Батаронова, А.П. Жабко, В.В. Провоторова. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. С. 201–204.
4. Ларин А.А., Кириллов В.П. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом// Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов X международной конференции «ПМТУКТ-2017» /под

ред. И.Л. Батаронова, А.П. Жабко, В.В. Провоторова. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2017. С. 221–225.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1973. 296 с.

Ларин Александр Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина" (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, E-mail: DONIORV@yandex.ru.

Крысанов Никита Андреевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина" (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

УДК 004.8

СЕГМЕНТАЦИЯ МИОКАРДА ПРАВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ ПЕРФУЗИОННОЙ ТОМОСЦИНТИГРАФИИ МИОКАРДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Ларочкин П.В.¹, Котина Е.Д.¹, Гирдюк Д.В.¹, Остроумов Е.Н.²

¹Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

²ГБУЗ «НИИ скорой помощи им. Н.В. Склифосовского ДЗМ», г. Москва

Правый желудочек сердца не всегда визуализируется на ОФЭКТ-изображениях, однако, в случаях его визуализации, сегментация важна для диагностики сердечно-сосудистых заболеваний [1]. Исследование посвящено разработке и сравнению моделей глубокого обучения для автоматической сегментации правого желудочка сердца на ОФЭКТ-изображениях, полученных методом томосцинтиграфии с ЭКГ синхронизацией [2], [3]. Задача сегментации правого желудочка на ОФЭКТ-изображениях мало исследована [4], в отличие от более разработанных методов для сегментации левого желудочка сердца.

Для обучения использовался набор из 336 трехмерных массивов ОФЭКТ изображений сердца. Данные были разделены на: обучающую выборку (90%), валидационную (5%) для настройки гиперпараметров и тестовую (5%) для окончательной оценки модели. Ручная сегментация миокарда правого желудочка сердца была выполнена с использованием специального инструмента для сегментации CVAT [5]. Для повышения точности сегментации использовались два типа масок: внешняя, которая включает правый желудочек, и внутренняя, ограничивающая только полость желудочка.

Для решения задачи сегментации использовались архитектуры ResUNet для трехмерных и двумерных массивов, основанные на сверточных “ResNet”-блоках и механизме “skip connections” [6]. Трехмерная модель была ориентирована на обработку объемных данных, в то время как двумерная модель фокусировалась на изображениях срезов, что позволило исследовать влияние пространственной размерности на качество сегментации.

Эксперименты проводились с учетом следующих конфигураций: тип модели (ResUNet3D и ResUNet2D архитектуры), количество каналов на выходе (один или два канала), при котором модель предсказывает либо итоговую маску миокарда,

либо внешнюю и внутреннюю границы миокарда, тип используемых слоев (все слои томосцинтиграфии или только те слои, на которых присутствует правый желудочек сердца).

Обучение моделей проводилось с использованием функции потерь, которая представляет собой взвешенную сумму бинарной кросс-энтропии и функции потерь Дайса. В процессе обучения отслеживались коэффициенты Дайса (Dice) и Жаккара (Jaccard) на валидационной и тестовой выборках.

Результаты показали, что модель с архитектурой ResUNet3D, предсказывающая итоговую маску миокарда, и полный набор данных, дает наилучшие результаты по метрике Дайса (0.77). Разница в результатах между моделями, использующими трехмерные и двухмерные данные, была значительной, что подтверждает преимущество использования трехмерных данных для сегментации правого желудочка.

Литература

1. Остроумов Е. Н., Мигунова Е. В., Котина Е. Д., и др. Визуализация правого желудочка при перфузионной однофотонной эмиссионной компьютерной томографии до и после реваскуляризации у больных с постинфарктным кардиосклерозом // Трансплантология. 2023. Т. 15. № 2. С. 200–215.

2. Ploskikh V., Kotina E. Challenges of gated myocardial perfusion SPECT processing // Cybernetics and Physics. 2021. Vol. 10. No. 3. Pp. 171–177.

3. Котина Е. Д. Математическое и компьютерное моделирование в ядерной медицине. СПб.: Изд-во ВВМ, 2022. 143 с.

4. Zhao C., Zhang Y., Li X., et al. Spatial-temporal V-Net for automatic segmentation and quantification of right ventricle on gated myocardial perfusion SPECT images // Medical Physics. 2021. Vol. 50. Pp. 7415–7426.

5. CVAT tool [Электронный ресурс]. - Электрон. дан. - URL: <https://www.cvat.ai/>. (дата обращения 15.11.2024)

6. Alom M. Z., Yakopcic C., Nasrin M. S., et al. Recurrent residual U-Net for medical image segmentation // Journal of Medical Imaging. 2019. Vol. 6. No. 1.

Ларочкин Петр Викторович, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, аспирант, e-mail: plarochkin@gmail.com.

Котина Елена Дмитриевна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры диагностики функциональных систем, e-mail: e.kotina@spbu.ru.

Гирдюк Дмитрий Викторович, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, ассистент, e-mail: d.girdyuk@spbu.ru.

Остроумов Евгений Николаевич, ГБУЗ «НИИ скорой помощи им. Н.В. Склифосовского ДЗМ», Москва, Российская Федерация, доктор медицинских наук, старший преподаватель учебного центра, научный консультант отделения лучевой диагностики, ostroumoven@sklif.mos.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

Лиховидов Д.В., Щепелев А.Ю.

*Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (г. Воронеж)*

Для транспортных средств, эксплуатируемых в сложных дорожных условиях, необходимы высокие показатели тягово-динамических характеристик. Эти характеристики являются основными условиями проходимости, и они в основном зависят от работы раздаточной коробки (РК), входящей в состав трансмиссии автомобиля. Эффективность работы раздаточной коробки зависит от динамики (времени) переключения передач в ней. В связи с этим поиск путей улучшения динамики остается одной из актуальных задач работы раздаточных коробок.

Попробуем теоретически обосновать направления данного поиска. За базовый грузовик примем наиболее распространенный - серийный полноприводный автомобиль Урал-4320 и предположим, что он движется прямолинейно, равноускорено (с ускорением $j = 0,55 \text{ м/с}^2$) на первой передаче в коробке передач; условия этого движения — сложные: коэффициент f сопротивления качению составляет 0,06 (соответствует сырому суглинку) [1]. На скорости $v = 10 \text{ км/ч}$ этот коэффициент мгновенно возрастает до 0,21, т. е. в 3,5 раза.

В качестве математической модели, описывающей поступательное движение в направлении вектора скорости, можно принять уравнение основного закона динамики:

$$m_a \frac{dv}{dt} = \sum F_x, \quad (1)$$

где m_a – поступательно движущееся масса автомобиля, $\frac{dv}{dt}$ – ускорение центра масс; F_x – сумма проекций всех внешних сил.

Математической моделью, описывающей вращательное движение колеса автомобиля, будет уравнение моментов относительно его оси:

$$I_k = \frac{d\omega_k}{dt} = M - R_x r_d - R_z a, \quad (2)$$

где I_k – момент инерции колеса, ω_k – угловая скорость вращения колеса, M – момент, подводимый к колесу от двигателя, R_x – реакция опорной поверхности, r_d – динамический радиус колеса, R_z – нормальная реакция на колесо, a – плечо нормальной реакции.

Из формулы 2 можно элементарно вывести формулу для расчета реакции опорной поверхности R_x .

Как известно, крутящий момент M , подводимый к ведущим колесам от двигателя (рис. 1) рассчитывается умножением крутящего момента двигателя M_d на передаточное число трансмиссии $i_{тр}$ и КПД трансмиссии $\eta_{тр}$:

$$M = M_d i_{тр} \eta_{тр}.$$

Для расчета принимаем, что значения крутящего момента M и мощности N_e ДВС равны максимальным для автомобиля Урал-4320, т. е. $M = 515,9 \text{ Нм}$, $N_e = 1241 \text{ кВт}$.

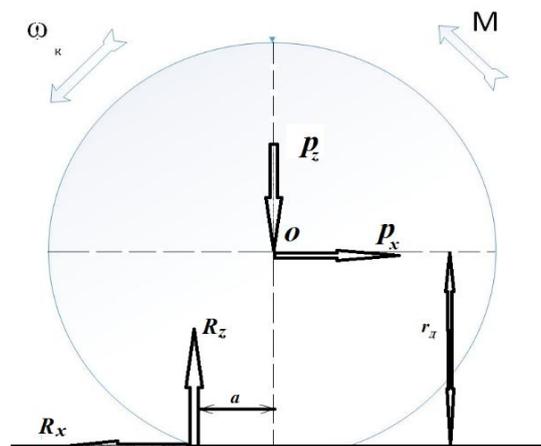


Рис. 1 – Схема сил и моментов, действующих на ведущее колесо

В тяговом режиме крутящий момент подводится к колесу через полуось, и его направление совпадает с направлением вращения колеса. Для ведущего колеса касательная реакция $R_x > 0$ и направлена в сторону движения. Для полноприводного автомобиля, общая тяговая сила P_K суммируется с тяговой силой каждого моста.

Равномерное движение автомобиля при малых скоростях на низшей передаче без буксования возможно только при выполнении условия $P_f \leq P_K \leq P_{сц}$. Если условие не выполняется, то автомобиль будет двигаться только с пробуксовкой колес.

Проведенные расчеты [2] показывают, что при движении автомобиля по сырому суглинку вышеприведенное условие не выполняется (сила сопротивления качению P_f больше силы тяги P_K) и колеса будут вращаться с пробуксовкой. Для устранения этого водитель должен включить понижающую передачу в РК при полной остановке автомобиля (это конструктивная особенность), на это может уйти до трех секунд. Остановка автомобиля в таких условиях может привести к погружению колес в грунт и принятия дополнительных мер к повышению проходимости (например, уменьшением давления в шинах).

Эта проблема может решиться только установкой устройства в механизм переключения РК, устраняющего конструктивную особенность обязательной остановки трансмиссии для включения её понижающей передачи. Например, такую функцию выполняют синхронизаторы в коробке передач, сокращающие время переключения передач в коробке.

Литература

1. Полунгян А. А. Проектирование полноприводных колесных машин [Текст]: в 2 т.: учебник для вузов / под общ. ред. А.А. Полунгяна. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 640 с. – 2 т.
2. Драгунов Д.Г. Определение динамических характеристик автомобиля высокой проходимости при переключении передач изменением межосевого расстояния // Автомобильная промышленность. 2015. № 1, с.14-17.

Лиховидов Дмитрий Викторович, Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: likhvid2008@rambler.ru.
Щепелев Андрей Юрьевич, Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, заместитель начальника кафедры, e-mail: buksirovs@yandex.ru

СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОНАДЕЖНЫМИ АВТОНОМНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Нетесов Г.А., Бурковский В.Л.

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж

В настоящее время без специального программного обеспечения (ПО) не обходится ни одна система управления сложными объектами, как в технологической сфере, так и в сфере обслуживания населения. При этом разнообразие управления сложными технологическими и техническими системами вызывает необходимость разработки специализированного ПО для каждой системы конкретно, поэтому выбор главных характеристик ПО системы управления, ее структуру и возможность работы в аварийных режимах являются приоритетными задачами.

В связи с необходимостью обеспечения высокого уровня безопасности работы автономных систем (систем управления) возникает необходимость выбора не только аппаратной части контролируемой системы, но и его программного обеспечения (ПО) [1]. В случае даже незначительного сбоя ПО блока системы возможен выход из строя всего комплекса управления с неконтролируемым исходом.

При проектировании программного обеспечения для управления автономными объектами, связанными с опасными производствами и технологиями, приоритет выбора архитектурной структуры ПО должен быть выполнен с точки зрения надежности и безопасности. Обоснованием выбора высоконадежных систем являются анализ требований, устойчивость к ошибкам, сложность и масштабируемость, а также гибкость и адаптивность [2]. Архитектура ПО для этих систем должна включать многослойные защитные механизмы, по этой причине можно выделить четыре основных уровня архитектуры, такие как: управление процессами, систем безопасности, мониторинга и диагностики, а также операторский контроль.

Первый уровень отвечает за управление основными рабочими процессами и обеспечивает автоматизацию операций. Второй, подразумевает реализацию защитных механизмов, которые могут срабатывать независимо от оператора, что помогает системе распознавать потенциально опасные состояния и быстро принимать меры для их устранения. Третий, ПО собирает данные со всех подсистем, отслеживая параметры в режиме реального времени. Сложные алгоритмы диагностики анализируют данные для выявления отклонений и прогнозирования возможных отказов, для предотвращения аварий и стабильной работы системы. Четвертый, операторы получают доступ к информации о состоянии системы через интуитивно понятный интерфейс, который отображает ключевые показатели и аварийные сигналы, при этом ПО поддерживает визуализацию данных, предоставляет рекомендации и ограничивает выполнение опасных действий (рисунок 1).

Для обеспечения высокой надежности критически важные компоненты ПО дублируются и резервируются. Датчики, обеспечивающие сбор данных, дублируются, чтобы предотвратить ошибки из-за отказа одного из них. Вычислительные блоки имеют резервные копии, готовые к немедленному включению в случае сбоя основного модуля.

ПО использует безопасные и отказоустойчивые протоколы связи, чтобы гарантировать надежную передачу данных между уровнями. Внедряются механизмы проверки целостности данных и автоматического переключения на резервные каналы

при сбоях. Система безопасности включает программные барьеры, которые защищают оборудование и пользователей от потенциальных угроз, такие как автоматическое реагирование и программы защиты от ошибок оператора [3]. Критически важные системы безопасности подвергаются строгой верификации и тестированию, например, симуляция аварийных ситуаций и многоуровневая проверка. ПО должно быть защищено от киберугроз, включающее в себя: обнаружение и предотвращение атак (попытки несанкционированного доступа) и шифрование данных и аутентификации.

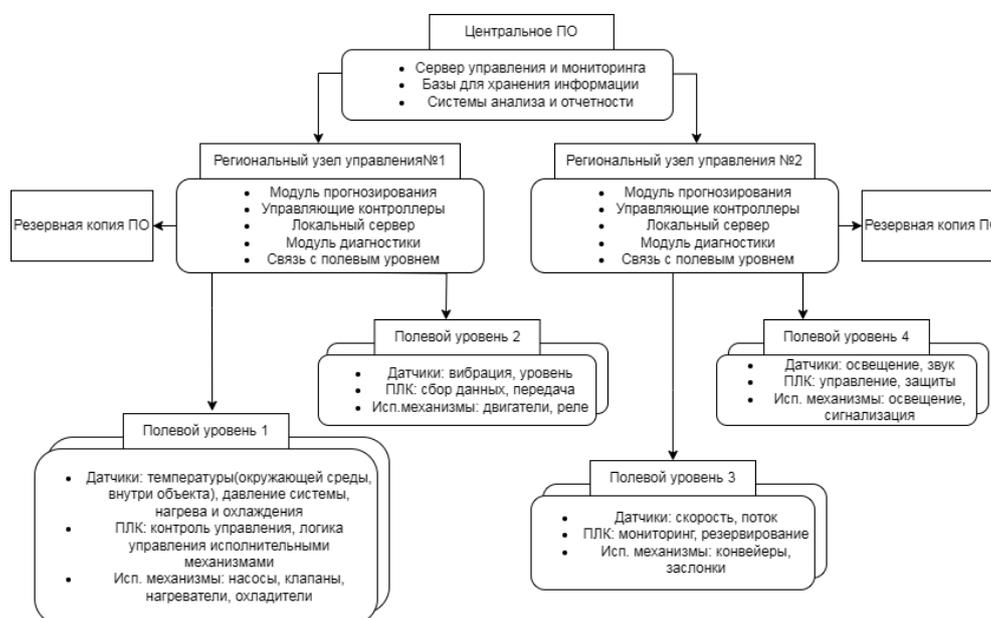


Рисунок 1 – Распределенная структура ПО информационной системы управления технологическими объектами

Выводы: архитектура программного обеспечения для критически важных систем строится с учетом строгих требований к безопасности и отказоустойчивости. Использование многоуровневого подхода, избыточности и комплексных механизмов защиты минимизирует риски аварий и позволяет системе оперативно реагировать на опасные ситуации. Такой подход обеспечивает надежную работу и безопасность для людей, оборудования и окружающей среды.

Литература

1. Бондаренко, В. М. Программно-аппаратные средства управления автономными объектами: надежность и безопасность / В. М. Бондаренко, С. А. Игнатов. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 320 с.
2. Иванов, А. П. Архитектурные решения для систем управления автономными роботами / А. П. Иванов // Вестник программной инженерии. – 2020. – № 4. – С. 45–52.
3. Чернов, Е. Л. Надежные программные структуры в робототехнических системах / Е. Л. Чернов, А. Г. Смирнов // Труды СПИИРАН. – 2021. – № 5. – С. 56–63.

Нетесов Григорий Андреевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры электропривода, автоматике и управления в технических системах, e-mail: grisha.netyosov@yandex.ru.
 Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электропривода, автоматике и управления в технических системах, e-mail: bvl@vorstu.ru.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОХЛАЖДЕНИЯ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ
ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ТЕПЛООБМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА
ОСНОВЕ ПОРИСТЫХ СТРУКТУР**

Николенко А.В.¹, Николенко К.В.²

¹ *ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж*

² *ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

Классическая постановка задачи об охлаждении тепловыделяющей поверхности с помощью теплообменных элементов на основе пористых структур приводит в математической формулировке к двухтемпературной модели теплообмена [1], которая записывается в формате сопряжённой системы уравнений для граничных условий второго рода [2]. Решение данной задачи позволяет определить величину отводимого теплового потока от охлаждающей поверхности и найти её температуру.

Пусть однородный по сечению поток теплоносителя с температурой t_0 и со скоростью u_0 подаётся на вход теплообменника высотой h и длиной l (рис. 1). Считаем стенки теплообменника непроницаемыми для теплоносителя.

Температура верхней стенки поддерживается равной температуре теплоносителя на входе t_0 , введением второго контура охлаждения. Тепловой поток охлаждаемой стенки равен q_0 .

Ламинарное течение теплоносителя позволяет принять гипотезу об однонаправленности, а также пренебречь инерционными эффектами при падении давления в пористом слое, что экспериментально подтверждено в [3]. Применение погрослойной линеаризации [4] с учетом связи $\theta = X/\varepsilon$ сводит гидродинамическую подзадачу к начально-краевой задаче для параболического уравнения.

При этих условиях уравнение Дарси-Бринкмана-Форчгеймера запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{U}{\varepsilon \text{Re} \cdot \text{Da}}; \quad (1)$$

с граничными условиями

$$U(0, Y) = 1; U(X, 0) = U(X, 1) = 0. \quad (2)$$

Двухтемпературная модель Шуманна запишется в виде

$$U \frac{\partial T_f}{\partial X} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial^2 T_f}{\partial Y^2} + \frac{\text{Nu}_p \text{Re}}{\text{Pr} \cdot \text{Re}_p^2} (\Delta T_s - T_f); \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial Y^2} = \text{Nu}_p \left(\frac{\text{Re}}{\text{Re}_p} \right)^2 (\Delta T_s - T_f); \quad (4)$$

с граничными условиями

$$T_f(0, Y) = 0; \frac{\partial T_f(X, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial T_s(X, 0)}{\partial Y} = -1; T_f(X, 1) = T_s(X, 1) = 0. \quad (5)$$

где X, Y – декартовы координаты; ε – пористость; Re – число Рейнольдса; Da – число

Дарси; T_f, T_s – температуры жидкости и пористого скелета; Nu – число Нуссельта; Pr – число Прандтля; Λ – отношение теплопроводностей теплоносителя и скелета.

На основании приведенных исследований предложена двухконтурная схема охлаждения (рис. 2).

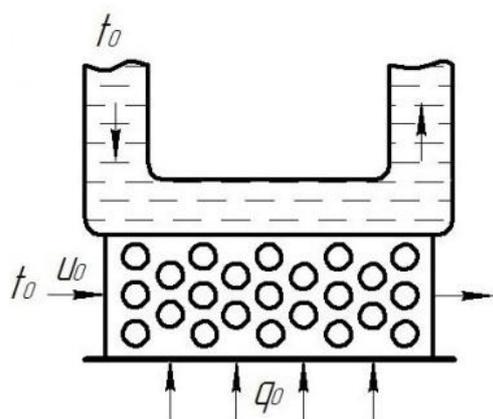


Рис. 1 – Расчётная схема

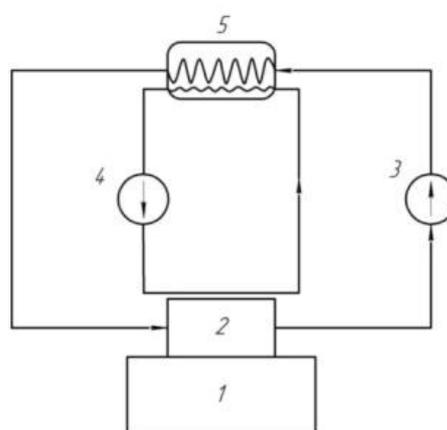


Рис. 2 – Схема интенсификации охлаждения:

- 1 – объект охлаждения;
- 2 – пористый теплообменник;
- 3,4 – насосы 1-го и 2-го контуров;
- 5 – охладитель

Разработана обобщенная математическая модель пористого охлаждения, которая позволяет анализировать различные тепловые условия функционирования пористых теплообменников. Сравнительный анализ схем подсоединения показал эффективность двухконтурной схемы охлаждения пористым рекуперативным теплообменником, радиус которого «омывается» теплоносителем. Предложен вариант двухконтурной схемы охлаждения.

Литература

1. Kraus A.D., Bar-Cohen A. Thermal analysis and control of electronic equipment. – Bristol: Hemisphere, PA, 1983. 620 p.
2. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Копп И.З., Мякогин А.С. Эффективные поверхности теплообмена. М.: Энергоатомиздат, 1998. 408 с.
3. Izadpanah M.R., Muller-Steinhagen H., Vamilahmad M. Experimental and theoretical studies of convective heat transfer in a cylindrical porous medium // Int. V. of Heat and Fluid Flow. 1998. V. 19. pp. 629-635.
4. Слэзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1995. 519 с.

Николенко Александр Владимирович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, научный сотрудник, e-mail: nikolenko.alexandr.93@yandex.ru.

Николенко Ксения Владимировна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант факультета машиностроения и аэрокосмической техники, e-mail: ks11nikolenko@yandex.ru.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ БЛЭКА-ЛИТТЕРМАНА В АЛГОРИТМАХ

Никоненко А.П., Трасковский Е.В.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

В работе рассмотрены преимущества и недостатки модели Блэка-Литтермана, а также методы ее применения в алгоритмах систем искусственного интеллекта. Проведена объективная оценка недостатков этой инвестиционной модели и поиск методов эффективного ее применения в современном мире, с учетом нивелирования недочетов. Определен перечень перспективных сфер применения модели.

Модель Блэка-Литтермана [1] представляет собой известный среди специалистов инструмент для распределения активов в портфеле, являясь усовершенствованной версией современной теории портфеля. Эта модель характерна тем [2], что она учитывает как рыночные данные, так и субъективные оценки инвесторов, что позволяет более точно формировать портфели активов. Несмотря на её ограничения, в условиях нестабильности соблюдение стратегии "Only long" [3] может быть затруднительным. Тем не менее, модель остаётся эффективным инструментом, позволяя адаптироваться к динамичным условиям рынка. Основные области применения данной модели [4] включают в себя хедж-фонды и пенсионные фонды. Эти финансовые учреждения могут использовать модель для оптимизации [5] своих решений, обеспечивая сбалансированный подход к распределению активов. Несмотря на близость к современной теории портфеля, у модели Блэка-Литтермана есть эффективные способы применения. В особенности там, где возможно [6] применение факторного анализа. Взаимодействие методик инвестирования делает модель особенно ценной для принятия обоснованных решений. Модель позволяет учесть личные взгляды и предпочтения инвестора и включить их в модель. Это дает:

- Оптимизацию инвестиционных портфелей: Модель Блэка-Литтермана позволяет инвесторам создавать более сбалансированные и эффективные портфели, учитывая как исторические данные [7] о доходности активов, так и индивидуальные ожидания. Это особенно полезно для институциональных инвесторов, таких как пенсионные фонды и хедж-фонды, которые стремятся максимизировать доходность при контроле рисков.
- Анализ и прогнозирование рынка: Инвесторы могут использовать модель для анализа текущих рыночных [8] условий и прогнозирования будущих тенденций. Сочетание мнений экспертов с рыночными [9] данными позволяет более точно оценивать потенциальные риски и возможности.
- Управление активами: Финансовые консультанты и управляющие активами могут применять модель Блэка-Литтермана для создания индивидуализированных стратегий для клиентов. Это позволяет учитывать уникальные предпочтения и рискованные аппетиты клиентов, что повышает уровень удовлетворенности и доверия.
- Стратегии хеджирования: Модель может быть использована для разработки стратегий хеджирования, позволяя инвесторам минимизировать потери в условиях нестабильности рынка. Сочетание мнений о будущих изменениях цен с историческими данными помогает более эффективно управлять рисками.
- Инновации в финансовых технологиях: С развитием финтех [10] модель Блэка-Литтермана может быть интегрирована в алгоритмическую торговлю и платформы для автоматизированного управления активами. Это позволяет использовать мощные вычислительные ресурсы для быстрого анализа данных и принятия инвестиционных решений. Модель [11] является достаточно простой, чтобы ее можно было внедрить.

Заключение. Модель Блэка-Литтермана представляет собой мощный инструмент, её гибкость и способность учитывать как объективные, так и субъективные данные делают ее особенно актуальной для специалистов в различных областях деятельности, так как рассмотреть и учесть с помощью этой модели можно самые разные факторы, которые покажутся экспертам необходимыми и влияющими на эффективность процесса. Модель не является самой актуальной, но ее относительная простота делает ее очень применимой в различных сферах, отраслях и бизнесах и для разных целей.

Литература

1. Satchell S., Scowcroft A. A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction //Forecasting expected returns in the financial markets. – Academic Press, 2007. – С. 39-53.
2. Федорова Е. А. Оптимизация портфелей пенсионных накоплений //Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2015. – №. 10 (244). – С. 2-10.
3. Максуюков С. А. Формирование портфеля рискованных активов по модели Блэка-Литтермана с учетом предпочтений долгосрочных инвесторов. – 2022.
4. Воронова Н. С. и др. структура и особенности принятия инвестиционных решений в хедж-фонде //Journal of Economics. – 2023. – Т. 13. – №. 1.
5. Коновалова М. Е., Абузов А. Ю. Математическая модель оптимизации портфеля инвестиций с учетом риска и финансовых ограничений в управлении предприятием //Фундаментальные исследования. – 2024. – №. 1. – С. 20-24.
6. Sergeev S.M. Cross-systems method of approach to energy economy higher educational institutions // В сборнике: Economics. Society: Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) Compiling Editor Dr.Sc., Prof. E.Sibirskaya. Yelm, WA, USA, 2015. С. 38-41.
7. Barykin S.Y., Sergeev S.M., Baranova T.A., Mokhorov D.A., Kobicheva A.M., Bochkarev A.A. A methodology of bringing perspective innovation products to market // Academy of Strategic Management Journal. 2021. Т. 20. № SpecialIssue2. С. 1-19.
8. Сергеев С.М. Математические модели в задачах управления ритейлерскими сетями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. т.17. №2. с. 666-668.
9. Barykin S.Y., Kapustina I.V., Valebnikova O.A., Valebnikova N.V., Kalinina O.V., Sergeev S.M., Camastral M., Putikhin Y., Volkova L. Digital technologies for personnel management: implications for open innovations // Academy of Strategic Management Journal. 2021. Т. 20. № SpecialIssue2. С. 1-14.
10. Automated storage and retrieval system for Industry 4.0 concept // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019". Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. 2019. С. 32036.
11. Курочкина А.А., Голуб И.В., Сергеев С.М. Метод выбора параметров узлов логистических сетей с учетом неопределенности // Экономика и менеджмент систем управления. 2024. № 3 (53). С. 55-63.

Никоненко Анастасия Петровна. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, студент e-mail: nikonenko.ap@edu.spbstu.ru
Трасковский Егор Викторович Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, студент e-mail: Traskovskij.ev@edu.spbstu.ru

ОПТИМИЗАЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА СЕТИ

Парт А.А.¹, Корчагина О.Р.²

¹ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж
²ФГКВУ ВПО ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

В статье будем опираться на обозначения, принятые в работах [1, 2].

Будем считать, что функции, рассматриваемые ниже, удовлетворяют условиям согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (1)$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$.

Рассмотрим аппроксимацию начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа с распределенными параметрами на ориентированном ограниченном графе:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\left(\alpha u(x,t) + a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

здесь $\alpha = const$, $\phi(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ имеют место предположения

$$0 \leq a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу оптимизации системы (1)–(4) в пространстве внешних воздействий $U = L_2(\Gamma_T)$. Для этого введем следующие понятия и обозначения. Пусть B — линейный непрерывный оператор: $B: U \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ (в силу $L_2(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$), $Bv \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\forall v \in U$ и пусть $\phi(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$; $y(x,t) \in W_2^1(a, \Gamma_T)$ — решение задачи (1)–(4) с правой частью, равной $f + Bv$ ($v(x,t) \in U$) в уравнении (1). Соотношение (5) для $y(x,t) \in W_2^1(a, \Gamma_T)$, $y(x,0) = \phi(x)$, примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_T} \left(-\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right) dxdt + \ell_T(y(x,t), \eta(x,t)) + \int_{\partial \Gamma_T} \alpha y(x,t) \eta(x,t) dxdt = \\ & = \int_{\Gamma} \psi(x) \eta(x,0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x,t) \eta(x,t) dxdt + \int_{\Gamma_T} Bv(x,t) \eta(x,t) dxdt, \end{aligned} \quad (6)$$

при всех $\eta(x, t) \in W_2^1(a, \Gamma_T), \eta(x, T) = 0,$ где

$$l_T(y(x, t), \eta(x, t)) = \int_{\Gamma_T} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) y(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt.$$

В связи с этим в дальнейшем для состояния $y(x, t)$ системы (1)–(3) будем использовать обозначение $y(v)(x, t)$ или $y(v)$.

Пусть C — линейный непрерывный оператор, $C: W_2^1(a, \Gamma_T) \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ (оператор наблюдения); N — линейный непрерывный эрмитов оператор, $N: U \rightarrow U$, $(Nv, v)_U \geq \zeta \|v\|_U^2$ ($\zeta > 0$ — фиксированная постоянная); $J(v)$ — функционал, требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $U_\varrho \subset U$ (функция стоимости): $J(v) = \|Cy - z_0\|_{L_2(\Gamma_T)}^2 + (Nv, v)_U$, где $z_0(x, t)$ — заданное наблюдение.

Задача оптимизации системы (1)–(3) состоит в том, чтобы отыскать такое $v^* \in U_\varrho$, чтобы выполнялось соотношение $\inf_{v \in U_\varrho} J(v)$; v^* — оптимум системы (1)–(3).

В силу непрерывности линейного отображения $v \rightarrow y(v)$ пространства U в $W_2^1(a, \Gamma_T)$, имеет место утверждение:

Теорема. Если $N \neq 0$, то задача оптимизации системы (1)–(4) имеет единственное решение $v^* \in U_\varrho$, т.е. $J(v^*) = \inf_{v \in U_\varrho} J(v)$.

Литература

1. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. 2014. С. 282-286.
3. Парт А.А., Садчиков П.В. Задача оптимизации для гиперболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии, №2(68), 2017. – С. 16-21.

Парт Анна Александровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры природопользования, e-mail: anna_gazinkova@mail.ru.

Корчагина Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

**УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА**

Перова И.В.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

В работе рассматривается эллиптический оператор волнового уравнения, а также условия существования слабого решения соответствующей начально-краевой задачи. Для доказательства существования слабого решения исходной задачи используется метод Фаедо-Галеркина со специальным базисом.

Предварительно введем понятия и обозначения [1]: Γ – связный ограниченный граф с ребрами γ , параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ – множество граничных узлов, $J(\Gamma)$ – множество внутренних узлов, Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек; $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$.

Далее введем пространства: $L_2(\Gamma)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом на Γ (аналогично определяется $L_2(\Gamma_T)$); $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$, норма в $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением $(u, v)_{W_2^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma} (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))dx$; $L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$, где $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T (\int_{\Gamma} u^2(x, t)dx)^{1/2} dt$; $W_2^1(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка по x и t , принадлежащих $L_2(\Gamma_T)$, норма в $W_2^1(\Gamma_T)$ определяется как $\|u\|_{W_2^1(\Gamma_T)}^2 = \int_{\Gamma_T} (u(x, t)^2 + u_x(x, t)^2) dxdt$. $V_2(\Gamma_T)$ – множество функций $u(x, t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму $\|u\|_{2, \Gamma_T} = \text{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}$. $W_a^1(\Gamma_T)$ – замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям согласования для всех узлов из $J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0, T]$, а также равных нулю вблизи $\partial\Gamma \times [0, T]$. В пространстве $W_a^1(\Gamma_T)$ рассматривается начально-краевая задача, граничные условия которой сведены к однородным:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \sigma u(x, t) \right) \Big|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где σ – заданная постоянная, $\varphi(x) \in W_a^1(\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$,

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad b_* \leq b(x) \leq b^* \quad (4)$$

$x \in \Gamma_0$ (a_* , a^* , b_* , b^* – фиксированные постоянные).

Определение. Слабым решением класса $W_2^1(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (1)-(3) называется функция $u(x, t) \in W_a^1(\Gamma_T)$, равная $\varphi(x)$ при $t = 0$ удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} \left(-\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x)u(x, t)\eta(x, t) \right) dxdt + \\ + \int_0^T \sum_{\zeta \in \partial\Gamma} \sigma u(x, t)\eta(x, t) dt \Big|_{x=x_\zeta} = \int_{\Gamma} \psi(x)\eta(x, 0)dx + \int_{\Gamma_T} f(x, t)\eta(x, t)dxdt$$

при любых $\eta(x, t) \in \overline{W}_a^1(\Gamma_T)$ (элементы пространства $\overline{W}_a^1(\Gamma_T)$ принадлежат $W_a^1(\Gamma_T)$ и удовлетворяют равенству $\eta(x, T) = 0$).

Условия существования слабого решения начально-краевой задачи (1) – (3) представлены теоремой 1.

Теорема 1. Для любых $\phi(x) \in W_a^1(\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и при выполнении предположений (4) начально-краевая задача (1) – (3) имеет по меньшей мере одно слабое решение из пространства $W_a^1(\Gamma_T)$.

Для доказательства теоремы используется метод Фаедо-Галеркина со специальным базисом, определяемым системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи (1) – (3).

Аппроксимация решения $u(x, t) \in W_a^1(\Gamma_T)$ исходной задачи (1)-(3).

Используется специальный базис – множество обобщенных собственных функций спектральной задачи в пространстве $W_a^1(\Gamma)$

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\phi}{dx}\right) + b(x)\phi = \lambda\phi, \quad \left(a(x)\frac{\partial\phi}{\partial x} + \sigma\phi\right)_{\partial\Gamma} = 0,$$

а именно, задача определения множества таких чисел λ , каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $\varphi(x) \in W_a^1(\Gamma)$, удовлетворяющее тождеству $l(\phi, \eta) + \sum_{\zeta \in \partial\Gamma} \sigma\phi\eta = \lambda(\phi, \eta)$ при любой функции $\eta(x) \in W_a^1(\Gamma)$. Это означает, что $\varphi(x)$ есть обобщенная собственная функция класса $W_a^1(\Gamma)$, а λ – соответствующее ей собственное значение.

Приближения $u^N(x, t)$ слабого решения задачи будем искать в виде

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\varphi_k(x), \quad (5)$$

функции $c_k^N(t)$ таковы, что $\frac{dc_k^N(t)}{dt} \in L_1(0, T)$,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^N(x, t)}{\partial t^2} \varphi_l(x) dx + \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{\partial u^N(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} + b(x) u^N(x, t) \varphi_l(x) \right) dx + \sum_{\zeta \in \partial\Gamma} \sigma u^N(x, t) \varphi_l(x) |_{x=x_{\zeta} \in \zeta} = \int_{\Gamma} f(x, t) \varphi_l(x) dx \quad (l = \overline{1, N}), \quad (6)$$

$$c_k^N(0) = \phi_k^N, \quad \frac{dc_k^N(0)}{dt} = \int_{\Gamma} \psi(x) \varphi_k(x) dx \quad (k = \overline{1, N}), \quad (7)$$

где ϕ_k^N – коэффициенты Фурье разложения $\phi^N(x) = \sum_{k=1}^N \phi_k^N \varphi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \rightarrow \infty$ функцию $\phi(x)$ в норме $W_2^1(\Gamma)$. Из последовательности $\{u^N\}_{N \geq 1}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_i^N\}_{i \geq 1}$, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Gamma_T)$ и равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Gamma)$ к некоторому элементу $u(x, t) \in W_a^1(\Gamma_T)$. Этот элемент $u(x, t)$ является слабым решением задачи (1) – (3). Таким образом, функции $u^N(x, t)$, определяемые соотношениями (5), аппроксимируют в норме $W_a^1(\Gamma_T)$ слабое решение $u(x, t) \in W_a^1(\Gamma_T)$. Представление приближений $u^N(x, t)$ слабого решения задачи (1) – (3) в виде конечных разложений (5) по обобщенным собственным функциям $\varphi_k(x)$ с помощью специального базиса $\{\varphi_k(x)\}_{k \geq 1}$ – аппроксимация исходной задачи (1) – (3).

Полученные результаты позволяют формировать эффективные численные методы в классе суммируемых функций, т.е. получить переход к конечномерному случаю (аппроксимациям), применяемым в задачах прикладного характера.

Литература

1. Провоторов В. В., Волкова А. С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. – Воронеж: Научная книга, 2014. – 188 с.

2. Волкова А. С., Провоторов В. В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

Перова Ирина Васильевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, e-mail: writeira@mail.ru

УДК 517.927

ЗАДАЧА ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА СЕТИ

Приходько И.В.

**ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»»,
г. Воронеж**

Полученные результаты используются для решения задач оптимизации дифференциальных систем уравнений, пространственная переменная которых изменяется на графе (в приложениях – на сети) [1]. При этом задача управления сводится к конечной проблеме моментов, что открывает путь получения численного анализа, не зависящего от размерности вектора управления, необходимо только знать ограниченное число сеточных собственных функций конечно-разностного аналога эллиптического оператора.

Ниже рассматривается достаточно распространенная в приложениях задача перевода дифференциальной системы одного состояния в другое, влияние на эту систему осуществляется управлениями на границах соответствующей области изменения пространственной переменной (в граничных точках сети) [2].

При переходе от дифференциальной системы к дифференциально-разностной формируются алгебраические системы, порождаемые схемой (1)

$$U_n^{j+1} = (1 - \tau p_n)U_n^j + \tau F_n^j, j = \overline{1, J-1}, \quad (1)$$

$$U_n^0 = \Theta_n,$$

а значит формируется так называемая конечная проблема моментов, соответствующая (2)

$$f^j = \sum_{n=1}^{m(N-1)+1} F_n^j \tilde{\varphi}_n, F_n^j = \frac{1}{\omega_n} [f^j, \tilde{\varphi}_n] = \frac{1}{\omega_n h^2} \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k^j (\tilde{\varphi}_1)_{n\gamma_k} + \frac{1}{\omega_n h^2} \nu^j (\tilde{\varphi}_1)_{n\gamma_m}, \quad (2)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{m(N-1)+1} \Theta_n \tilde{\varphi}_n, \quad \Theta_n = \frac{1}{\omega_n} [\theta, \tilde{\varphi}_n], \quad \omega_n = [\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n].$$

Задача оптимального управления определяется необходимостью указать параметры системы (2) для перевода ее из начального состояния

$$(u_i^0) = (\theta_i) \quad (3)$$

или состояния

$$(u_i^0) = (\theta_i), \quad (u_i^1) = (\theta_i) + \tau(\dot{\theta}_i) + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{-(\theta_{i-1}) + 2(\theta_i) - (\theta_{i+1})}{h^2} + (f_i^0) \right). \quad (4)$$

Изменение индекса i зависит от выбора закона формирования Γ^h .
Если базироваться на схеме

$$(u_i^j) = (\mathcal{G}_i) \quad (5)$$

для системы теплопереноса, приходим к представлению

$$(u^{j+1}) = (u^j) + \tau([A^h u^h]^j) + \tau(f^j). \quad (6)$$

Исходя из выражения (3), получаем относительно μ_k^j , $k = \overline{1, m-1}$ и ν^j , $j = \overline{1, J-1}$, следующую систему:

$$(u^{J-1}) + \tau([A^h u^h]^{J-1}) + \tau(f^{J-1}) = \mathcal{G}^h, \quad (7)$$

на Γ^h . В системе (7) сужения $(u^{J-1})_{\gamma_k}$ ($k = \overline{1, m-1}$), $(u^{J-1})_{\gamma_m}$ сеточной функции (u^{J-1}) на γ_k ($k = \overline{1, m}$) зависят только от параметров $\mu_k^1, \mu_k^2, \dots, \mu_k^{J-1}$ ($k = \overline{1, m-1}$) и $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^{J-1}$, соответственно, системой (6) определены моментные соотношения.

Исходя из выражений, определяемых исходным состоянием (3) и состоянием (4), получаем относительно μ_k^j , $k = \overline{1, m-1}$ и ν^j , $j = \overline{1, J-1}$, следующую систему:

$$(u^{J-1}) = \mathcal{G}^h - \tau \dot{\mathcal{G}}^h (u^{J-2}) = \mathcal{G}^h - \tau \dot{\mathcal{G}}^h - \tau^2 ([A^h u^h]^{J-1}) + \tau^2 (f^{J-1}), \quad (8)$$

на Γ^h . В соотношениях (7) – (8) сужения $(u^{J-1})_{\gamma_k}$ ($k = \overline{1, m-1}$), $(u^{J-1})_{\gamma_m}$ сеточной функции (u^{J-1}) на γ_k ($k = \overline{1, m}$) зависят только от параметров $\mu_k^1, \mu_k^2, \dots, \mu_k^{J-1}$ ($k = \overline{1, m-1}$) и $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^{J-1}$, соответственно; системой $(u^{j+1}) = (2u^j) - \tau^2 ([A^h u^h]^j) - (u^{j-1}) + \tau^2 (f^j)$ определены моментные соотношения.

Решение задачи оптимального управления завершается представлением решений полученных систем в удобной форме.

Представленный подход редукции исходной задачи к конечной проблеме моментов, позволяет достаточно эффективно решать более общие задачи оптимизации процессов нагрева или колебаний сложносочлененных конструкций [3], а также проводить анализ управляемости этих процессов.

Литература

1. Golosnoy A.S., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Rajihelgauz L.B., Kravets O. Ja. Software engineering math for network applications. В сборнике: Journal of Physics: Conference Series. International Scientific Conference «Conference on Applied Physics Information Technologies and Engineering – APITECH-2019». Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations; Polytechnical Institute of Siberian Federal University/ 2019:44-47.

2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014;58(4):70-74.

3. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов системы «мачта-растяжки» // Системы управления и информационные технологии. 2008;1-2 (31): 272-277.

Приходько Инна Владимировна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник, e-mail: prihodko84@mail.ru.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ В МОДЕЛИРОВАНИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Расторгуева А.И.¹, Трезубов А.О.¹, Курбонов Р.С.²

¹*ФГКВБОУ ВПО Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

²*ФГКВБОУ ВПО "Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков имени Героя Советского Союза А.К.Серова", г. Краснодар*

Во многих образовательных учреждениях, которые изучают аэродинамику летательных аппаратов для проведения занятий, применяют аэродинамические трубы, который имеет ряд несовершенств:

- крупные габариты установки;
- высокий уровень шума при работе;
- подобная установка может быть в единственном числе в вузе (организации);
- отсутствие возможности самостоятельно работать с данной установкой.

Для решения этих проблем предлагается усовершенствовать образовательный процесс при помощи внедрения в него современных технологий, а именно технологии дополненной реальности, основанной на результатах математического моделирования аэродинамических процессов.

Это позволит минимизировать воздействие приведенных выше недостатков, добавить в процесс обучения интерактивность, тем самым повышая интерес учащихся к изучению материала, которая преподносится с помощью информационных технологий, предлагаемых в данной статье.

В рамках данной статьи предлагается рассмотреть преимущества применения технологии дополненной реальности как способа визуализации математического моделирования по дисциплине «Аэродинамика летательных аппаратов».

Математические модели летательных аппаратов, реализованные и с помощью дополненной реальности могут быть использованы для проведения лабораторных работ в целях исследования характеристик крыла разных схем (прямой, стреловидный, треугольной).

Это может быть полезно, так как можно:

- использовать установку, не включая ее;
- избавиться от шума установки;
- уменьшить потребление электроэнергии;
- сделать установку мобильной;
- использовать установку на других видах занятий;
- наиболее полно донести материал до каждого учащегося в достаточном объеме.

При помощи дополненной реальности можно наглядно показать, как механизация крыла влияет на течение потока воздуха. Это возможно сделать и с помощью виртуальной реальности, но для этого необходимо создать 3d модель, что занимает больше времени для подготовки, но не всегда эффективно в использовании. В дополненной реальности, основанной на математическом моделировании, возможно создавать внешние условия, независимо от реальных условий окружающей среды.

Приложения дополненной реальности дает возможность взаимодействовать с объектами изучения. Аэродинамическая труба показывает точные аэродинамические характеристики, а дополненная реальность наглядно показывает поведения потока

воздуха при взаимодействии с крылом и летательным аппаратом.

Благодаря правильному подходу при работе с дополненной реальностью и аэродинамической установкой можно повысить эффективность учебного процесса.

С дополненной реальностью есть возможность от лица преподавателя увидеть конструкции летательного аппарата, даже выделить определенную часть конструкции и осмотреть ее детально.

Можно работать как с динамической трубой, так и без нее, используя математические расчеты (скорость ветра, направление, давления действующее на крыло и т.п.). Масштабная модель крыла используется для исследований. Оно может изменять углы атаки и вращаться на штоке. Можно использовать вместо крыла модель самолета (на самолет влияет больше и внешних факторов нужно производить больше расчетов).

Применение технологии дополненной реальности, основанной на математическом моделировании, повышает эффективность исследований аэродинамических характеристик.

Расторгуева Анастасия Игоревна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник, e-mail: airsucsess08@rambler.ru.

Трегубов Александр Олегович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

Курбонов Рамзес Самандарович, Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков имени Героя Советского Союза А.К.Серова, г. Краснодар, Российская Федерация, курсант.

УДК 004.9

ПРИМЕНЕНИЕ MS POWER POINT ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТАХ

Расторгуева А.И.

ФГКВБОУ ВО Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

При выполнении различных расчётов в рамках научных исследований применяют такое программное обеспечение, как MathCAD, MatLab, MS Excel и др. Но для работы с ними нужно предварительно пройти подготовку. В ряде случаев исследователю важно оперативно провести специализированные расчёты, не углубляясь в специфику разработки программного обеспечения.

MS Power Point – мощный инструмент для создания и демонстрации презентаций разной степени сложности: от простых минималистичных до сложных разноуровневых с перекрёстными ссылками.

Как и MS Excel, данный редактор позволяет работать с макросами, то есть писать код на Visual Basic for Application (VBA), что значительно расширяет возможности работы с ним.

MS Power Point позволяет создать удобный, интуитивно понятный, ориентированный на пользователя интерфейс.

При этом для решения большого числа задач разработчику (чаще всего одному из исследователей, который владеет необходимыми научными знаниями) достаточно уметь работать с минимумом языковых конструкций, известных из школьной программы. Пользователю таких приложений достаточно вводить имеющиеся данные и нажатием кнопки «Расчёт» получать результат (рисунок 1).

**Расчет предельного изгибающего момента в бетонном слое
усиления аэродромного покрытия**

Характеристики	Введите данные	Дополнительная информация
Характеристики аэродрома:		
- коэффициент условий работы	<input type="text" value="1"/>	СП 121.13330.2019 «Аэродромы», табл. 7.12 СП 131.13330.2018 «Строительная климатология» таблица для коэффициента условий работы
- продолжительность периода отрицательных температур, сутки	<input type="text" value="151"/>	
Характеристики материала:		
- расчетное сопротивление бетона слоя усиления, МПа	<input type="text" value="3.43"/>	
- толщина слоя усиления, м	<input type="text" value="0.2"/>	
Заданный срок службы покрытия, годы	<input type="text" value="20"/>	СП 121.13330.2019 «Аэродромы», табл. 7.12
Количество стержневых осей на главной опоре шасси воздушного судна	<input type="text" value="2"/>	
Число взлетов воздушного судна в сутки	<input type="text" value="10"/>	
Параметр, учитывающий расположение нагрузок от отдельных участков аэродромных покрытий	<input type="text" value="0.5"/>	
Выход:	<input type="text" value="28,08"/>	Прочность обеспечена
	<input type="button" value="Результат"/>	
	<input type="button" value="Очистить"/>	

Рис. 1 – Интерфейс приложения «Расчет предельного изгибающего момента в бетонном слое усиления аэродромного покрытия»

При создании таких программ используется объектно-ориентированный подход, реализуемый языком программирования VBA. То есть такие элементы как поля для ввода и вывода данных, командные кнопки, полосы прокрутки и др. уже готовы к использованию (рисунок 2).



Рис. 2 – Элементы управления вкладки «Разработчик»

К преимуществам использования MS Power Point и языка VBA относятся:

- массовость: возможность разработки приложений для многих задач;
- наглядность: повышение эффективности применения;
- доступность: несмотря на отказ Microsoft поддерживать лицензии на ряд продуктов на территории Российской Федерации отечественным пользователям, пакет программ MS Office остаётся популярным и распространённым;

Для разработчика специализированного программного обеспечения для научных исследований положительными качествами являются:

- простые языковые конструкции;
- возможность использовать как функционал VBA, так и широкий спектр возможностей разработки презентаций, что делает интерфейс более дружелюбным.

Недостатками являются:

- строгая привязка к пакету MS Office;
- узконаправленность каждого отдельного приложения, разработанного на VBA при MS Office.

Созданные с помощью MS Power Point приложения, легки в разработке и интуитивно понятны в применении.

В условиях современных реалий, есть вероятность, что появится необходимость отказаться от работы с пакетом программ MS Office. Это не является преградой для подобного подхода к расчётам для исследований. Практически во всех аналогах Word, Excel и Power Point есть возможность решать задачи с помощью программирования.

Расторгуева Анастасия Игоревна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник: airsucce08@rambler.ru.

УДК 534.83

СНИЖЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ НА ПРИАЭРОДРОМНОЙ ТЕРРИТОРИИ

Силютин Е.В., Янкина К.Ю., Требунских М.С.

*ФГКВОУ ВО «ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
г. Воронеж*

Неблагоприятное воздействие авиационного шума на приаэродромной территории происходит во время взлёта и посадки воздушных судов и при их наземной эксплуатации. Для снижения шума во время операции взлёт/посадка рекомендуется применять малозумные приемы пилотирования, ограничение и/или запрещение полетов в ночное время суток, а также замену парка шумных воздушных судов. Снижение шума при наземной эксплуатации воздушных судов требует комплексного решения.

Значение предельно допустимого уровня шума (эквивалентный уровень звука) оценивается по формуле (1) [1]:

$$L_{\text{Аэкс}} = 10 \cdot \lg \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \tau_i \cdot 10^{0,1 \bar{L}_{\text{Амакс}}} \right] \quad (1)$$

где $\bar{L}_{\text{Амакс}}$ – среднее значение максимального звука всех зафиксированных пролётов воздушных судов, T – общее время наблюдения, τ_i – эффективное время воздействия шума при i -м пролете воздушного судна.

Допустимые и максимальные значения уровней шума на приаэродромной территории, примыкающей к жилым зданиям и зданиям общественного назначения (например, гостиницы), в дневной (с 7-00 до 23-00 ч) и ночной (с 23-00 до 7-00 ч) периоды времени регламентируются санитарными нормами СанПиН 1.2.3685-21 [2].

С конструктивной и акустической точки зрения шумозащитные экраны являются самыми распространенными средствами защиты от акустического загрязнения. Основная особенность шумозащитного экрана заключается в том, что величина затухания шума изменяется в зависимости от высоты его стенки и расстояния между источником, экраном и защищаемой зоной. В непосредственной близости от стенки величина затухания максимальна, а с удалением она уменьшается и на достаточном удалении становится почти постоянной величиной. Величина затухания определяется в основном только высотой экрана и находится в пределах 10-15 дБА в дальнем звуковом поле [3].

Шумозащитные экраны подразделяются на:

1. Шумоотражающие экраны. Они возвращают звуковую волну в обратном направлении, тем самым усиливая шумовую нагрузку в самом источнике.

2. Шумопоглощающие экраны. Они состоят из перфорированных панелей, внутри которых помещается звукопоглощающий материал. Звуковые волны проникают в экран через перфорационные отверстия и поглощаются внутри экрана. Для максимального поглощения звуковых волн высота таких экранов должна быть не менее 3 метров. Шумопоглощающие панели значительно дешевле, чем отражающие.

Значение коэффициента звукопоглощения определяется по формуле (2) [4]:

$$\alpha_{\text{экр}} = 2 - 10 \cdot \lg 10^{0.1(L_{\text{ТП1}}^{\text{сШЭ}} - L_{\text{ТП2}}^{\text{безШЭ}})} \quad (2)$$

где $\alpha_{\text{экр}}$ – коэффициент звукопоглощения шумозащитного экран; $L_{\text{ТП1}}^{\text{сШЭ}}$ – уровень звукового давления в точке с шумозащитным экраном, дБ; $L_{\text{ТП2}}^{\text{безШЭ}}$ – уровень звукового давления в точке без шумозащитного экрана, дБ.

3. Комбинированные (отражающе-поглощающие) экраны. В этом случае в верхней части основной шумопоглощающей конструкции добавляются прозрачные шумоотражающие панели.

Акустическая долговечность шумозащитного экрана связана с используемыми материалами. Около 80% шумозащитных экранов изготавливаются из оцинкованной стали, приблизительно 10% из алюминия и нержавеющей стали, а также из дерева. Шумозащитные экраны из оцинкованной стали акустически недолговечны, теряют свои свойства через 3-5 лет и требуют замены.

Литература

1. МУК 4.3.3722-21. Контроль уровня шума на территории жилой застройки, в жилых и общественных зданиях и помещениях: издание официальное: утвержден Руководителем Федеральной службы по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека, Главным государственным санитарным врачом Российской Федерации А.Ю. Поповой 27 декабря 2021 г.: дата введения 01.02.2022 г. Москва, 2021. 60 с.

2. СанПиН 1.2.3685-21. Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания: издание официальное: утвержден постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 28 января 2021 г. Москва, 2021. 1029 с.

3. Картышев О.А. Применение средств коллективной защиты от шума для улучшения условий труда на рабочих местах инженерно-технического состава авиапредприятий // Научный Вестник МГТУ ГА. 2011. № 173. С. 154-160.

4. Шашурин А.Е. Новые технические и технологические решения для снижения акустического загрязнения шумозащитными экранами // Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2018. 134 с.

Силютин Екатерина Владимировна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник, e-mail: katebulavina@gmail.com.

Янкина Кристина Юрьевна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, старший научный сотрудник, e-mail: yankinaku@mail.ru.

Требунских Максим Сергеевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

УДК 51-74

ОЦЕНКА ВАРИАНТОВ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ЖЕЛАТЕЛЬНОСТИ

Синюков В.В.

ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Основной трудностью при оценке вариантов построения, а также разработки концепции и общей структуры системы обеспечения является необходимость принятия решения в условиях неопределенности, когда важнейшие предъявляемые требования и характеристики носят качественный характер. В этих условиях решение не может быть принято на основе точных расчетов ввиду многообразия сопутствующих факторов или вследствие того, что некоторые из этих факторов не поддаются измерению [1, 2]. Потребность разрешения этих противоречий приводит к необходимости поиска метода, позволяющего даже при отсутствии полной формализации снизить уровень неопределенности и определить обобщенный показатель, позволяющий выполнить оценку предложенных вариантов.

Одним из таких подходов является преобразование качественных характеристик частных откликов в безразмерную шкалу, относящуюся к психофизическим шкалам, в частности, шкалу желательности Харрингтона [3]. Этот метод с использованием вербально-числовой шкалы широко применяется как инструментарий в научных исследованиях различных сфер: техники, медицины, экономики и др.

Функция Харрингтона имеет вид экспоненциальной зависимости

$$v(y_j^*) = \exp(-\exp(-y_j^*)), \quad (1)$$

где y_j^* – кодированное значение частного признака y_j .

При кодировании признака y_j используется линейная зависимость

$$y_j^* = b_{0j} + b_{1j} y_j, \quad (2)$$

где коэффициенты b_{0j} и b_{1j} определяются заданием для двух значений параметров y_j соответствующих значений $v(y_j^*)$ в интервале $[0,2; 0,8]$, где условно принимается линейный характер функции желательности.

Обобщенный показатель (обобщенная функция желательности) рассчитывается как среднее геометрическое частных желательностей

$$V = \left[\prod_{j=1}^p v(y_j^*) \right]^{1/p}. \quad (3)$$

Для разработки рациональной структуры системы обеспечения и оценки ее эффективности в качестве равных по степени значимости частных показателей определены: стоимость, управляемость, оперативность, потенциальный эффект.

Каждый сформулированный частный показатель, характеризует разрабатываемую систему обеспечения в разных аспектах, $y_j, j = 1, 2, \dots, p$. В общем случае каждый

показатель y_j имеет свой экономический смысл и размерность. Чтобы их объединять или сравнивать, необходимо, во-первых, ввести для каждого некоторую безразмерную шкалу. Во-вторых, установить однотипную шкалу, чтобы параметры были сравнимые. Далее требуется определить обобщенный показатель, учитывающий все аспекты разрабатываемой системы обеспечения. Модель такого показателя строится как обобщенная функция желательности (3).

Для рассматриваемых частных показателей имеют место односторонние ограничения $y_j \leq y_{j \max}$ или $y_j \geq y_{j \min}$. В этом случае частная функция желательности $v(y_j^*)$ для признака y_j применяется в виде экспоненциальной зависимости (1). В качестве верхней границы функции желательности применяется значение 0,80 – верхняя граница для «хорошо», для нижней используется значение 0,20 – нижняя граница для «плохо». При установлении границ допустимых значений частных показателей $y_{j \max}$ или $y_{j \min}$ использовались соответствующие выводы экспертного опроса. Для определения значений коэффициентов b_{0j} и b_{1j} показателя y_j использовались системы уравнений вида:

$$\begin{cases} \exp(-\exp(-(b_{0j} + b_{1j} \cdot y_{j|v=0,8}))) = 0,80, \\ \exp(-\exp(-(b_{0j} + b_{1j} \cdot y_{j|v=0,2}))) = 0,20. \end{cases} \quad (4)$$

В итоге, обобщенная функция желательности (или обобщенный показатель рациональной системы обеспечения) согласно (3) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} V = \exp \left[-\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \exp(-y_j^*) \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{4} [\exp(-2,8200 + 0,0066 y_1) + \right. \\ \left. + \exp(2,4518 - 0,0494 y_2) + \exp(-1,6520 + 0,1520 y_3) + \right. \\ \left. + \exp(2,4518 - 0,4940 y_4) \right] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, для оценки четырех вариантов построения системы обеспечения по критерию обобщенной функции желательности и выбора наилучшего проводится опрос экспертов с последующей обработкой экспертных данных с использованием полученной формулы (5). В имитационной модели в качестве состояния принимается некоторая реализация системы обеспечения, отвечающая набором определенных значений частных показателей y_j . Для имитации состояний системы обеспечения проигрывается n раз (по каждому варианту) комплекс значений y_j из соответствующих распределений показателей. Условно принимается нормальный закон распределения частных показателей $N(m_{jk}, \sigma_{jk})$, где m_{jk}, σ_{jk} – среднее и среднее квадратическое отклонение j -го показателя по k -му варианту системы.

Литература

1. Кокошкин А.А. Методологические проблемы прогнозирования в интересах национальной безопасности России. М.: Институт востоковедения РАН, 2014. 98 с.
2. Махутов Н.А., Пермяков В. Н., Ахметханов Р.С. Диагностика и мониторинг состояния сложных технических систем: учебное пособие. Тюмень: Тюменский индустриальный университет, 2017. 632 с.
3. Harrington E.C. The desirable function// Industrial Quality Control, 1965. V. 21. №10. P. 494–498.

Синюков Виктор Васильевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,

г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, e-mail: sinukovhome@mail.ru .

УДК 51(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНОГЕННОГО ДАВЛЕНИЯ НА РАСТИТЕЛЬНОСТЬ

Столбовая М.В., Гасратова Н.А., Колпак Е.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Горно-металлургические предприятия являются источниками загрязнения среды, выбрасывая в атмосферу различные тяжелые металлы и их соединения. От источника загрязнения происходит распространение загрязнителей в атмосфере над поверхностью земли. Примеси постепенно оседают на почву. Выпавшие на почву загрязнители в результате различных химических реакций образуют токсичные соединения, ингибирующие рост растений [1, 2]. Траектория распространения примесей в математической модели представлена отрезком длиной l [3]. Процесс распространения загрязнителей среды, их влияния на растительность представлен системой уравнений в частных производных

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v_x \frac{\partial C}{\partial x} + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \beta C + F(t, x, C),$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta C - \beta_1 P,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s} \right) - \gamma PS,$$

где C - линейная концентрация примеси над поверхностью земли, βC - скорость поступления частиц примеси из воздушного потока на почву, $F(t, x, C)$ - скорость поступления примесей в при почвенный слой из верхних слоев воздушных потоков, D_c - коэффициент диффузии, v_x - линейная скорость перемещения загрязнителей вдоль траектории, β - параметр; P - линейная плотность токсикантов, β_1 - параметр, характеризующий скорость распада токсикантов, D_p - коэффициент диффузии токсикантов; S - линейная плотность фитомассы, K_s - максимальная плотность фитомассы в точках отрезка, μ_s - локальная удельная скорость роста фитомассы, γ - параметр.

К уравнениям добавляются начальные условия

$$S = K_s, P = 0, C = 0,$$

и граничные условия наполнения среды - при $x = 0$ и $x = l$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Решение системы нелинейных уравнений осуществляется с применением численных методов. За основу принимаются сеточные методы решения уравнений. Дается сопоставление полученных численных результатов с данными полевых наблюдений [4]. Распределение токсикантов может быть описано экспоненциальной

зависимостью, а распределение фитомассы в условиях ингибирования – логистической зависимостью [3]. Полученные результаты могут быть использованы для оценки последствий техногенного воздействия на окружающую среду [5].

Литература

1. Евдокимов А.С., Ярмишко В.Т. Структура древесного яруса лесных сообществ центральной части Кольского полуострова, формируемая при снижении аэротехногенной эмиссии // Вестник РУДН. Серия: Экология и безопасность жизнедеятельности. – 2023. - Т. 31. - №1. - С. 115-126.

2. Евдокимова Г. А., Мозгова Н. П., Корнейкова М. В. Содержание и токсичность тяжелых металлов в почвах зоны воздействия газоздушных выбросов комбината “Печенганикель” // Почвоведение. - 2014. - № 5. - С. 625–631.

3. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Гасратова Н.А. Модели антропогенного давления на экосистему Учебное пособие / Санкт-Петербургский государственный университет. Казань, 2024. - 102 с.

4. Ярмишко В.Т., Игнатьева О. В. Многолетний импактный мониторинг состояния сосновых лесов в центральной части Кольского полуострова // Известия РАН. Серия биологическая. - 2019. - № 6. - С. 658–668. DOI: 10.1134/S0002332919060134.

5. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Первичный анализ данных для построения системы поддержки принятия решений // Процессы управления и устойчивость. - 2019. - Т. 6. - № 1. - С. 250-254.

Столбовая Мария Владимировна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант, факультет Прикладной математики – процессов управления, mail: stolbova.masha@gmail.com.

Гасратова Наталья Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доцент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, mail: gasratova_na@mail.ru.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, mail: petrovich_pmru@mail.ru.

УДК 51(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕСУРС-ПОТРЕБИТЕЛЬ

Столбовая М.В., Колпак Е.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Промышленная деятельность человека сопровождается образованием территорий, на которых погибает все живое – окрестности заброшенных рудников, пожарища, зоны действия закрытых крупных промышленных центров [1]. После прекращения антропогенного действия территории начинают зарастать растительностью, которая в свою очередь становится трофическим ресурсом для видов, ее потребляющих.

В математической модели предполагается, что территория представлена отрезком длины l . Распространение растительности начинается от точки $x=0$ к точке $x=l$.

Рост растительности в конкретной точке отрезка описывается логистическим уравнением, а ее распространение вдоль отрезка происходит за счет диффузионного смещения [2]. Потребитель распространяется вдоль отрезка аналогичным образом, но только при наличии растительности. С учетом этих предположений модель заселения территории растительностью и потребителем представлена системой двух дифференциальных уравнений в частных производных [3]

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= D_s \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s}\right) - \beta_s \mu_u u \frac{S}{b+S}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S}{K_s} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu_u u \left(\frac{S}{b+S} - \frac{u}{K_u} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

где S - линейная плотность растительности, u - линейная плотность потребителя, потребляющего ресурс, μ_s - удельная скорость роста объемов трофического ресурса (фитомассы), μ_u - удельная скорость роста численности потребителя при неограниченном количестве ресурса, D_s - параметр, характеризующий подвижность корневой системы растений и семян, а $D_u S / K_s$ - функция, определяющая подвижность потребителя на ресурсе, K_s - максимально возможная плотность ресурса, K_u - максимально возможная плотность потребителя, β_s и b - параметры, характеризующие скорость потребления ресурса.

при $x = 0$: $S = S_0$ и $u = u_0$,

при $0 < x$: $S = 0$ и $u = 0$,

где $S_0 \ll K_s$, $u_0 \ll K_u$.

Результаты анализа многолетних полевых наблюдений [1, 4] показывают, что прекращение антропогенного давления сопровождается постоянным восстановлением растительности, заселением территории различными видами.

Решение системы уравнений (1) строится численно с применением конечно-разностных методов. Скорость продвижения растительности, как следует из анализа численных результатов, в обоих случаях на 5% - 10% ниже теоретической скорости, полученной для автоволнового решения [2]. Параметры модели выбирались исходя из данных, приведенных в [1, 4]. Результаты моделирования могут быть использоваться на стадии принятия управленческих решений [5].

Литература

1. Коротков В. Н., Копчик Г. Н., Смирнова И. Е., Копчик С. В. Восстановление растительности на техногенных пустошах в окрестностях Мончегорска (Мурманская область, Россия) // Russian Journal of Ecosystem. - 2019. – Vol. 4 (1). – С. 1-18. – DOI 10.21685/2500-0578-2019-1-4.
2. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Виль М.Ю., Абрамова А.В., Бусько Е.А. Математическое моделирование злокачественных опухолей яичников // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. - 2022. - Т. 18. - № 1. - С. 120-134.
3. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Гасратова Н.А. Модели антропогенного давления на экосистему Учебное пособие / Санкт-Петербургский государственный университет. Казань, 2024. - 102 с.
4. Ярмишко В. Т., Игнатьева О. В. Многолетний импактный мониторинг состояния сосновых лесов в центральной части Кольского полуострова // Известия

РАН. Серия биологическая. - 2019. - № 6. - С. 658–668. DOI: 10.1134/S0002332919060134.

5. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Программная реализация системы постановки предварительного диагноза // Процессы управления и устойчивость. - 2020. - Т. 7. - № 1. - С. 153-157.

Столбовая Мария Владимировна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант, факультет Прикладной математики – процессов управления, e-mail: stolbovaya.masha@gmail.com.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, e-mail: petrovich_pmru@mail.ru.

УДК 004.8:519.23

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПО ЧИСЛОВЫМ И КАТЕГОРИАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Топнер А.М.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Анализ и прогнозирование сложных зависимостей в данных является одной из задач машинного обучения. Методы машинного обучения позволяют анализировать большие объемы информации и автоматизировать принятие решений в экономике, географии, социальных системах [1] и медицине, включая анализ ультразвуковых данных [2]. В медицинской диагностике разработаны отдельные теоретические подходы [3], позволяющие оценить степень тяжести заболеваний. Однако алгоритмизация современных методов анализа медицинских данных на основе количественных характеристик недостаточно. В работе разработана модель прогнозирования исследуемой системы, на основе анализа, как числовых данных, так и категориальных данных. Предполагаемая область применения – поддержка принятия решений в медицине [4].

Архитектура модели основана на многослойном персептроне, включает в себя методы математической статистики, для анализа типа распределения данных. Применяются алгоритмы, позволяющие оптимизировать время работы модели и повысить точность. Модель оптимизирована с использованием методов минимизации, аппроксимации и анализа дисперсии. Для ее реализации использован язык программирования Java, открытый код проекта размещен на GitHub. Для тестирования использовался набор данных с платформы MyAnimeList [5], который содержит такие параметры как оценку пользователей, жанры, ключевые характеристики сериалов.

Повышение гибкости и точности прогнозирования достигается за счет использования числовых и категориальных данных. Числовые параметры обрабатываются с помощью линейной регрессии с учетом дисперсии

$$numeric = (input * a + b) * |1 - d|,$$

где input - введенное числовое значение параметра; a и b - коэффициенты; d - дисперсия.

Включение в регрессию дисперсии повышает точность и устойчивость модели при наличии небольших отклонений в данных. Для категориальных параметров прогнозируется целевое значение (*pred*), определяется на предоставленных данных:

$$categ = pred * |1 - d|.$$

Конечный прогноз (*RES*) объединяет результаты обоих типов данных с учетом их дисперсий:

$$RES = \frac{(\sum_i numeric_i + \sum_j categ_j)}{\sum_i |1 - d_{numeric_i}| + \sum_j |1 - d_{categ_j}|}.$$

Тестирование модели проведено на наборе данных MyAnimeList [5]: на данных 2023 года корень квадратный из среднеквадратичной ошибки прогноза (*RMSE*) составил 0,28, а на прогнозах за 2024 год – 0,37. Результаты тестирования показывают высокую точность модели в прогнозировании рейтингов аниме, что предполагает её адаптируемость алгоритма к различным задачам. Модель может стать основой для разработки методов, применимых в диагностике и принятии решений в медицине.

Литература

1. Васильева К. В. Прогнозирование социального-экономического развития региона: проблемы и перспективы // Актуальные исследования. – 2024. – №. 36 (218). – С. 53-57.
2. Бусько Е.А., Козубова К.В., Багненко С.С., Карачун А.М., Буровик И.А., Гончарова А.Б., Костромина Е.В., Кадырлеев Р.А., Курганская И.Х., Шевкунов Л.Н. Сравнительный анализ эффективности КТ и контрастно-усиленного УЗИ в диагностике метастазов колоректального рака в печени // Анналы хирургической гепатологии. 2022. Т. 27. № 1. С. 22-32.
3. Гончарова А.Б., Бусько Е.А. Программная реализация системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы // Сибирский журнал клинической и экспериментальной медицины. 2020. Т. 35. № 4. С. 137-142.
4. Лифантова Е.Е., Машинский Н.С., Гончарова А.Б. Создание системы поддержки принятия решения в медицине для диагностики заболеваний желудочно-кишечного тракта // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 312-316.
5. MyAnimeList [Электронный ресурс]. URL: <https://myanimelist.net/> (Дата обращения: 12.11.2024).

Топпер Алина Михайловна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, магистр 1 курса, e-mail: st089228@student.spbu.ru.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ СИСТЕМЫ С СЕТЕПОДОБНЫМ НОСИТЕЛЕМ

Тран 3.

Университет РХЕНИКАА, г. Ханой, Вьетнам

Пусть $\mathfrak{V} \subset R^n$ ($n=2, 3$) с границей $\partial\mathfrak{V}$, имеющая сетеподобную структуру, состоящую из областей $\mathfrak{V}_k: \mathfrak{V} = \bigcup_{k=1}^M \mathfrak{V}_k \bigcup_{l=1}^L S_l$; через S_l обозначены поверхности, разделяющие взаимно прилегающие области [1]. В области $\mathfrak{V}_T = \mathfrak{V} \times (0, T)$, $\mathfrak{V} \subset R^n$ ($n=2, 3$), рассмотрим систему, описывающую процесс колебаний на многомерной сети

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Lu = f(x, t), \quad x, t \in \mathfrak{V}_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$u(x, t)|_{x \in \partial\mathfrak{V}} = 0, \quad (2)$$

где $Lu = - \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i} (x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b(x)u$, $x, t \in \mathfrak{V}_T$. Поместим начало $O(0, \dots, 0)$ системы координат (x_1, x_2, \dots, x_n) внутрь области \mathfrak{V} . Гиперплоскости проходит через соответствующие точки каждой координатных осей Ox_κ ($\kappa = \overline{1, n}$):

$$Ox_1: x_1 = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, Ox_2: x_2 = i_2 h_2, i_2 = \overline{0, N_2}, \dots, Ox_n: x_n = i_n h_n, i_n = \overline{0, N_n}. \quad (*)$$

Сеткой области $\omega^{\mathfrak{V}}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих области \mathfrak{V} . Сеткой подобласти $\omega^{\mathfrak{V}_k}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих подобласти \mathfrak{V}_k ($k = \overline{1, M}$). Сеткой поверхности ω^{S_l} называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих поверхности S_l ($l = \overline{1, L}$). Сеткой границы $\omega^{\partial\mathfrak{V}}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих границы $\partial\mathfrak{V}$.

Исходя из простоты представления результатов для функций: $u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $i_\kappa = \overline{0, N_\kappa}$, $\kappa = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, K}$. Введем следующие обозначения $\hat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j+1}$, $u = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $\tilde{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j-1}$, Полагая приближенно

$$\frac{\partial^2 u(x, t)_{\mathfrak{V}_k}}{\partial t^2} \sim u_{t\mathfrak{V}_k} = \frac{u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{V}_k}^{j+1} - 2u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{V}_k}^j + u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{V}_k}^{j-1}}{\tau^2}, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M},$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)_{\mathfrak{V}_k}}{\partial t} \right|_{t=0} \sim u_{t\mathfrak{V}_k}^0 = \frac{u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{V}_k}^1 - u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{V}_k}^0}{\tau}.$$

Дифференциальную систему (1), (2) аппроксимирует трехслойная разностная схема:

$$u_{\bar{n}\bar{\tau}_k} + L_h \hat{u}_{\bar{\tau}_k} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\tau}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (3)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\tau}_k}^0 = \varphi_{0, i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\tau}_k}, \quad u_{i_{\bar{\tau}_k}}^0 = \varphi_{1, i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\tau}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\tau}_k}^j = 0. \quad (4)$$

Исследуется устойчивость трехслойной разностной схемы (3). Для удобства (и упрощения) чтения опустим индексы i_1, i_2, \dots, i_n и $\bar{\tau}_k$ у сеточных функций. В таких предположениях разностная схема (3) принимает вид

$$u_{\bar{n}} + L_h \hat{u} = f^j, \quad j = \overline{1, K-1}$$

$$u^0 = \varphi_0, \quad u_t^0 = \varphi_1. \quad (5)$$

Так как система (5) линейная, то ее решение u можно представить в виде суммы $u = \bar{u} + \tilde{u}$ где \bar{u} – решение задачи

$$u_{\bar{n}} + L_h \hat{u} = 0, \quad u^0 = \varphi_0, \quad u_t^0 = \varphi_1, \quad (6)$$

а \tilde{u} – решение задачи

$$u_{\bar{n}} + L_h \hat{u} = f^j, \quad u^0 = u^1 = 0. \quad (7)$$

Для изучения устойчивости трехслойной схемы (5) будем использовать составную норму вида

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4} \|u^{j+1} + u^j\|_{(1,h)}^2 + \|u^{j+1} - u^j\|_{(2,h)}^2,$$

$$\|U^1\|^2 = \frac{1}{4} \|u^1 + u^0\|_{(1,h)}^2 + \|u^1 - u^0\|_{(2,h)}^2.$$

Определение 1. Схема (5) называется устойчивой

1) по φ_0, φ_1 , если для (6) справедливо соотношение

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|U^1\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) по f^j , если для (7) справедливо соотношение

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(3,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

здесь $C_1 = const > 0$, $C_2 = const > 0$ не зависят от $h, \tau, \varphi_0, \varphi_1, f^j$.

Литература

1. Тран З. Локально-одномерный метод для уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2022. №10(2).

Тран Зуй, кандидат технических наук, преподаватель факультета фундаментальных наук университета PHENIKAA, Ханой, Вьетнам (Tran Duy, PhD in Technical Sciences, Lecturer at the Faculty of Fundamental Sciences, PHENIKAA University, Hanoi, Vietnam, e-mail: duy.tran@phenikaa-uni.edu.vn).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИГНАЛОВ СРЕДСТВ ОБНАРУЖЕНИЯ

Федий Г.Л., Востриков М.Р.

ФГКВ ОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Ввиду трудоемкости, дороговизны, и зачастую невозможности проведения натуральных экспериментов возникает задача разработки математических моделей, позволяющих адекватно и с приемлемой погрешностью имитировать сигналы, регистрируемые приёмной аппаратурой.

Работа является продолжением [1]. Для решения обратной задачи (идентификации параметров объекта), реакция которого на возмущающий прямоугольный импульс регистрируется, возможно использование тулбокса системы Matlab System Identification Toolbox. С помощью System Identification Toolbox создается библиотека параметров сигналов, полученная в результате параметрической идентификации сигналов, полученных в результате эксперимента (рис. 1).

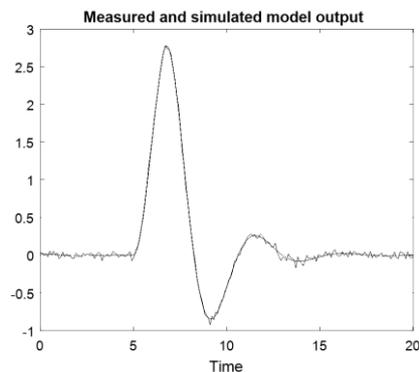


Рис. 1 – Аппроксимация экспериментального сигнала с помощью имитационной модели в виде колебательного звена второго порядка

Апробация проходила на экспериментальных данных, полученных в результате наложения случайной составляющей на модельный импульс.

Для всех этих случаев поведение электрического поля на раннем этапе развития импульса в свободном пространстве определяется соотношениями:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E_A \cdot k \cdot (e^{-at} - e^{-bt}), & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$E_A = 50000, \text{ В/м}, \quad a = 4 \cdot 10^7, \quad b = 6 \cdot 10^8, \quad k = 1,3 \quad (1)$$

где t – текущее время, с, a , b – показатели экспоненты, k – нормировочный коэффициент.

Поскольку приведенная форма сигнала не дает полной картины формы любого раннего ЭМИ, обычно рассматривается форма сигнала для некоторого характерного случая. При этом импульс имеет максимальную амплитуду 50 кВ/м, время нарастания 2,5 нс на уровне 0,1...0,9 амплитуды; время до максимума – 4,8 нс, длительность импульса на полувысоте – 23 нс, поток энергии сигнала – 0,114 Дж/м².

Имитация сигнала ЭМИ на ранней стадии (электрическая составляющая) осуществлялась с помощью передаточной функции $F(S) = \frac{14.2 \cdot 10^{21}}{0.55s^2 + 64 \cdot 10^7 s + 24 \cdot 10^{15}}$, а также набором элементарных математических функций в виде зависимости $E(t) = 50000 \cdot 1,3 \cdot (e^{-4 \cdot 10^7 t} - e^{-6 \cdot 10^8 t})$. Полученная в результате идентификации экспериментальных данных сигнала с помощью System Identification Toolbox зависимость имела вид:

$$F(S) = \frac{3.140392831028899 \cdot 10^{12} s + 2.487508973684688 \cdot 10^{22}}{s^2 + 1.121773065490501 \cdot 10^9 s + 4.180305950588025 \cdot 10^{16}} \quad (2)$$

Отклонение составило порядка 15%, что является вполне допустимым (рис. 2).

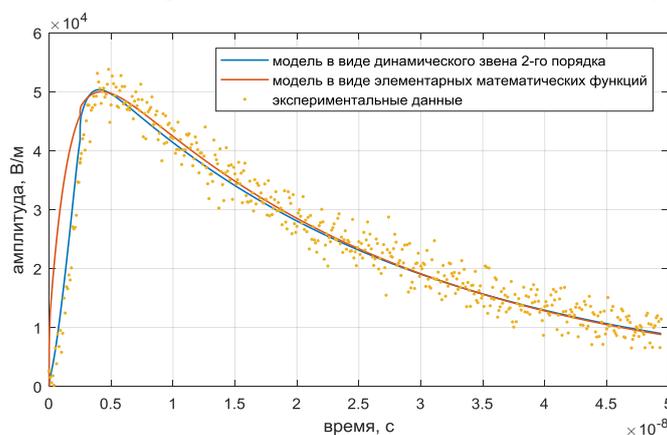


Рис. 2 – Экспериментальные и модельные данные ЭМИ на ранней стадии (электрическая составляющая)

Таким образом, сигнал, регистрируемый приемником, может быть описан множеством признаков, являющихся параметрами двух имитационных моделей: максимальное отклонение амплитуды сигнала, время прихода импульса, коэффициент затухания, частота и фаза сигнала, коэффициент усиления, инерционность, длительность импульса и т. д.

Сравнение эксперимента с имитационными моделями сигналов показало возможность качественно верного описания основных сигналов, регистрируемых датчиками средств обнаружения применения энергии направленного действия, а также приемлемой погрешности расчетов, позволяющих сформировать массив признаков, характеризующих сигнал для последующей его идентификации и классификации в задачах регистрации, предупреждения и защиты от поражающего воздействия опасного источника энергии.

Литература

1. Математическое моделирование мониторинга энергетической обстановки в районе наблюдения.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.Наука, 1977. 456 с.

Федий Галина Леонидовна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: matrix00028@yandex.ru

Востриков Максим Романович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОНИТОРИНГА ЭНЕРГИЧЕСКОЙ ОБСТАНОВКИ В РАЙОНЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Федий Г.Л., Востриков М.Р.

**ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж**

В настоящее время уделяется большое внимание работам по созданию нетрадиционного оружия или оружия на новых физических принципах. Поражающее действие такого оружия основано на ранее не использовавшихся в оружии процессах и явлениях, в частности на выработке различных видов энергии направленного действия. Исследования в данной области заставляют решать задачи регистрации, предупреждения и защиты от новых видов угроз. Данная задача может быть решена с помощью создания многофункциональных модулей регистрации и определения физических возмущений окружающей среды в задачах оповещения, защиты и прогноза поражающего воздействия их источников.

На основе анализа изменений в характере вышеперечисленных возмущений среды можно распознать и затем классифицировать тип примененного средства возмущения. Для этого должны быть разработаны алгоритмы принятия решения о характере, типе средства, а также необходимости оповещения всех соответствующих служб.

Рассмотрим построение типовых сигналов, принимаемых устройствами фиксации в системе Matlab Simulink (рис. 1).

$$E_{\text{сигн}}(t) = A_E t e^{-\nu_E(t-\tau)}, \quad (1)$$

где A_E – начальная амплитуда; t – время; ν_E – коэффициент затухания; τ – запаздывание или время прихода импульса с момента времени начала регистрации.

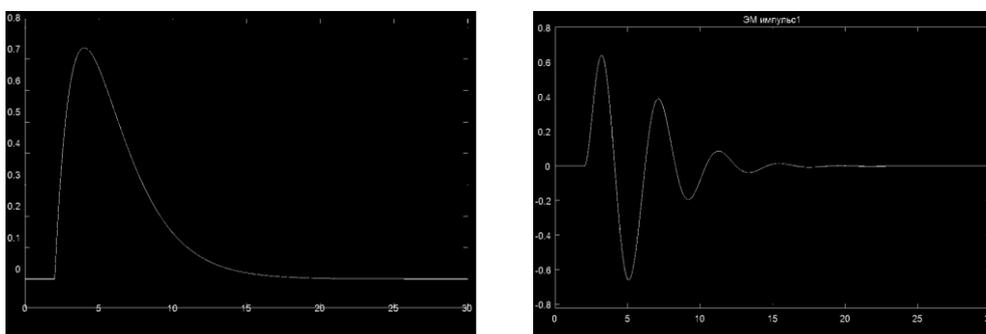


Рис. 1 – а) Огибающая импульса, б) Временная характеристика импульса

Тогда наложение модулирующего сигнала на гармоническую составляющую позволит получить простейшую имитационную модель сигнала в виде (рис. 1)

$$E(t) = A_E t e^{-\nu_E(t-\tau)} \sin(\omega_E(t-\tau) + \varphi_E), \quad (2)$$

где ω_E – частота несущей; φ_E – фаза несущей.

Каждый сигнал представляет собой множество параметров математической модели, по которым можно реализовать классификацию сигнала. Например, для

рассмотренной модели набор параметров – множество $\{A_E, \nu_E, \tau, \omega_E, \varphi_E\}$. Кроме того, с помощью простейших вычислений рассчитываются дополнительные характеристики: максимальная амплитуда колебаний, время затухания сигнала и т. д. Таким образом, полученные параметры являются основой для построения системы распознавания и классификации фактов применения энергии направленного действия.

В случае, когда достаточно сложно формализовать временную характеристику сигнала с помощью элементарных математических функций возможно представление имитационной модели сигнала в виде реакции линейной динамической системы на возмущение. В этом случае возможно использование различных комбинаций динамических звеньев и возмущающего импульса. При таком подходе пространство характерных признаков сигнала образуется множеством параметров динамического звена или их комбинации. Например, зададим объект с помощью колебательного звена 2-го порядка, задаваемого передаточной функцией

$$F(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} \quad (3)$$

где k – коэффициент усиления, T – постоянная времени, ζ – коэффициент затухания.

По параметрам k , T , ζ , характеризующим свойства поглощения (усиления) энергии, инерционности и динамики затухания сигнала, дополнительно можно вычислить еще ряд параметров [3]. Например, такие физические характеристики сигнала как угловая частота колебаний

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}, \quad (4)$$

показатель затухания

$$\lambda = \frac{\zeta}{T}, \quad (5)$$

время прихода импульса

$$t|_{|E(t)| \geq \varepsilon}, \quad (6)$$

длительность, максимальная амплитуда и т. д.

Таким образом, одно звено 2-го порядка дает как минимум 8 признаков, позволяющих осуществить классификацию сигнала.

Литература

1. Котюк А.Ф. Датчики в современных измерениях. М.: Радио и связь, 2007. 96 с.
2. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. СПб.: БХВ-Петербург, 2016. 560 с.

Федий Галина Леонидовна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: matrix00028@yandex.ru.

Востриков Максим Романович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Федюков А.А., Абреимов М.П.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», г. Елец

В работе рассматривается дифференциально-разностная система для эволюционной дифференциальной системы Навье-Стокса с пространственной переменной, изменяющейся в n -мерной сетеподобной области. Такая область представляет собой совокупность конечного числа подобластей, взаимно не пересекающихся и примыкающих друг к другу определенными частями (поверхностями) своих границ; совокупность таких поверхностей образует узловые места [1].

Рассмотрим ограниченную сетеподобную область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^n$, содержащую N подобластей \mathfrak{S}_l ($l \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$), соединенных между собой в M , $1 \leq M \leq N-1$, узловых местах ω_j ($j \in I_M = \{1, 2, \dots, M\}$): $\mathfrak{S} = \hat{\mathfrak{S}} \cup \hat{\omega}$, где $\hat{\mathfrak{S}} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{S}_l$, $\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$.

В области $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$ для векторной функции $Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), \dots, y_n(x, t)\}$, $x, t \in \mathfrak{S}_T$ ($x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $T < \infty$) рассматривается система

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f - \text{grad } p, \quad (3)$$

$$\text{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (2)$$

с условиями примыкания подобластей \mathfrak{S}_l

$$Y(x, t)|_{x \in S_{jt} \subset \partial \mathfrak{S}_{l_j}} = Y(x, t)|_{x \in S_{jt} \subset \partial \mathfrak{S}_{l_t}}, \quad t = \overline{1, m_j}, \quad (4)$$

$$\int_{S_j} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial n_j} ds + \sum_{t=1}^{m_j} \int_{S_{jt}} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial n_{jt}} ds = 0, \quad (5)$$

на поверхностях примыкания S_j , S_{jt} ($t = \overline{1, m_j}$) узловых мест ω_j , $j = \overline{1, M}$ для $t \in (0, T)$.

Здесь через n_j и n_{jt} обозначены внешние нормали к поверхностям S_j и S_{jt} , $t = \overline{1, m_j}$, соответственно; начальные и граничные условия определяются следующими соотношениями:

$$Y(x, t)|_{t=0} = Y_0(x), \quad x \in \mathfrak{S}, \quad (6)$$

$$Y(x, t)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0. \quad (7)$$

Соотношения (1) – (6) определяют начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса (1) – (4) в сетеподобной области \mathfrak{S}_T для функций $Y(x, t)$, $p(x, t)$ в области $\overline{\mathfrak{S}_T}$ ($\overline{\mathfrak{S}_T} = (\mathfrak{S} \cup \partial \mathfrak{S}) \times [0, T]$) с исходными данными $Y_0(x)$, $f(x, t)$. В прикладных вопросах математического моделирования процессов транспортировки вязких жидкостей сетеподобная область \mathfrak{S} (носитель гидравлического потока) принадлежит \mathbb{R}^3 и определяет модель трубопроводной сети или магистральной гидросистемы, $Y(x, t)$ является количественной характеристикой вектора скоростей гидравлического потока в

\mathfrak{Z}_τ , система уравнений Навье-Стокса (1), (2) является математической моделью транспортировки жидкости с вязкостью ν по гидросистеме, соотношения (3), (4) характеризуют закономерность протекания потоков в местах ветвления (узловых местах) гидросистемы, $p(x, t)$ – давление в гидросистеме [1–3].

Для установления условий разрешимости системы (1)–(6) используется дифференциально-разностная система Навье-Стокса

$$\frac{1}{\tau}[Y(k) - Y(k-1)] - \nu \Delta Y(k) + \sum_{i=1}^n Y_i(k) \frac{\partial Y(k)}{\partial x_i} = f_\tau(k) - \text{grad } p(k), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{div} Y(k) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad y(0) = Y_0(x), \\ Y(k)|_{x \in \partial \mathfrak{Z}} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\tau = T/K$, $k\tau \in [0, T]$ ($k = 1, 2, \dots, K-1$), $Y(k) := Y(x; k)$, $Y(k)_\tau := \frac{1}{\tau}[Y(k) - Y(k-1)]$,

$$f_\tau(k) := f_\tau(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt \quad p_\tau(k) := p_\tau(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} p(x, t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Система (7), (8) рассматривается в слабой постановке.

Определение 1. Совокупность функций $\{Y(k) \in V_0^1(\mathfrak{Z}), k = 1, 2, \dots, K\}$, для которой при каждом фиксированном k ($k = 1, 2, \dots, K-1$) функция $Y(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{\tau}(Y(k)_\tau, \eta) + \nu \rho(Y(k), \eta) + \rho(Y(k), Y(k), \eta) = (f_\tau(k), \eta), \quad Y(0) = Y_0(x), \quad (9)$$

для произвольных $\eta(x) \in V_0^1(\mathfrak{Z})$, называется слабым решением дифференциально-разностной системы Навье-Стокса (7), (8); здесь

$$\rho(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad \rho(u, v, \omega) = \sum_{i,k=1}^n \int u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \omega_i dx.$$

Анализ дифференциально-разностной системы Навье-Стокса, базирующийся на установлении априорных оценках норм слабых решений. Указанные оценки вытекают из соотношения (9) и оценок для дифференциальных форм $\rho(u, v)$ и $\rho(u, v, \omega)$.

Использование дифференциально-разностной системы (7), (8) для анализа дифференциальной системы Навье-Стокса (1)–(6) открывает путь алгоритмизации полученных результатов при решении прикладных задач. Результаты можно применить при анализе задач оптимального управления и изучении различного рода сетеподобных процессов прикладного характера.

Литература

1. Provotorov V. V. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain // V. V. Provotorov, E. N. Provotorova // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta Prikladnaya Matematika Informatika Processy Upravleniya. – 2017. – Vol. 13. – iss. 2. – pp. 428–441.

Федюков Артем Александрович, ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», аспирант кафедры математического моделирования, компьютерных технологий информационной безопасности, e-mail: fedyukov_a@vk.com.

Абринов Максим Павлович ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», аспирант кафедры математики и методики ее преподавания, e-mail: maximabreimov@yandex.ru.

ПРИМЕНЕНИЕ RMR-МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ВЫЖИВАЕМОСТИ КЛЕТОК

Халтобина М.М.¹, Елизарова М.В.^{1,2}¹Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург²ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный педиатрический медицинский университет» Минздрава России, г. Санкт-Петербург

Гибель клеток, вызываемая различным ионизирующим излучением, широко изучается, так как лучевая терапия фотонными и адронными пучками применяется для лечения рака. Для измерения клеточного ответа на облучение было проведено множество экспериментов [1]. Предложены различные модели для описания кривой клоногенной выживаемости (параметра SF) с целью прогнозирования вероятности выживания клеток [2]. В данной работе используется феноменологическая RMR-модель (модель восстановления-ошибочного восстановления) [3] с малым числом параметров, имеющих ясную интерпретацию.

Считается, что основной вклад в клоногенную гибель клетки дают двунитевые разрывы ДНК [4], которые могут быть подвергнуты гомологичной рекомбинации, негомологичному соединению или остаться не репарированными. Наибольший вклад в гибель клеток при попытке деления вносит ошибочная репарация, в результате которой образуются такие хромосомные aberrации как дицентрические хромосомы, центрические кольца и анафазные мосты. Выживаемость клетки непосредственно связана с количеством повреждений, в частности, с количеством двунитевых разрывов ДНК на клетку, которое возрастает с величиной ЛПЭ излучения.

В работе проанализированы экспериментальные данные [1] клеточной выживаемости при облучении культуры фибробластов легкого китайского хомячка (линия V79) протонами с различной величиной ЛПЭ — от 7 до 27 кЭВ/мкм. Расчетные и экспериментальные кривые представлены на Рис.1. Увеличение значения ЛПЭ приводит к исчезновению «плеча» кривой выживаемости и более быстрому уменьшению выжившей фракции с ростом дозы облучения.

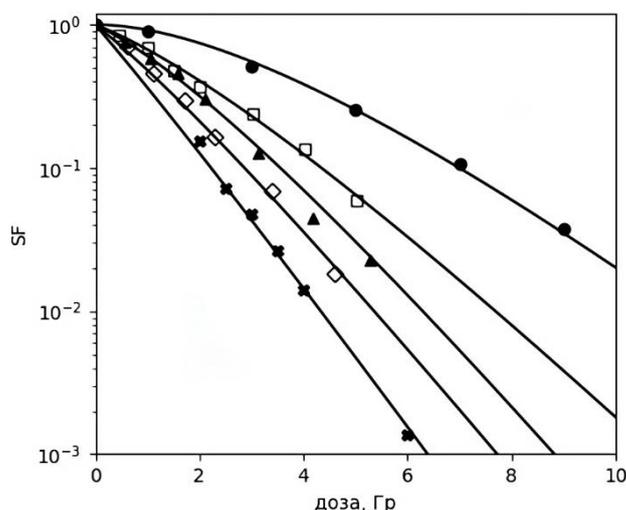


Рис.1 Зависимость параметра SF от поглощенной дозы для экспериментальных данных (точки) и расчета в рамках RMR-модели (сплошные кривые).

Параметры RMR-модели определялись на основе наилучшего согласия расчетной кривой выживаемости с экспериментальными зависимостями SF от дозы облучения. Параметр модели α , характеризующий исходное количество разрывов цепей ДНК на клетку на единицу дозы, незначительно возрастает с ростом ЛПЭ в данном диапазоне значений. Такой рост коррелирует с оценками авторов [2] изменения в зависимости от ЛПЭ количества двунитевых разрывов на клетку на единицу дозы. Параметр ε RMR-модели, характеризующий соотношение между правильно и неправильно реализованной репарацией, снижается с ростом значения ЛПЭ. Его динамика указывает на увеличение числа летальных для клетки хромосомных aberrаций вследствие ошибочной репарации двойных разрывов ДНК.

Несмотря на то, что RMR-модель не раскрывает механизма гибели клеток, она отражает связь между физическими параметрами излучения и вероятностью выживания клеток и позволяет изучать клеточный ответ на облучение на феноменологическом уровне.

Литература

1. Friedrich T., Scholz U., Elsässer T., Durante M. and Scholz M. Systematic analysis of RBE and related quantities using a database of cell survival experiments with ion beam irradiation // Journal of Radiation Research. 2013. №54. P. 494–514.
2. Wang W., Li C., Qiu R., Chen Y., Wu Z., Zhang H., Li J. Modelling of cellular survival following radiation-induced DNA double-strand breaks // Scientific Reports 2018. 8:16202.
3. Tobias C. A. The repair-misrepair model in radiobiology: comparison to other model // Radiat. Res. 1985. №104. P. 77-92.
4. Chalmers A.J., Carruthers R.D. Radiobiology Summaries: DNA Damage and Repair // Clinical Oncology. 2021. №33 P. 275-278.

Халтобина Мария Михайловна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская федерация, студент 1-го курса магистратуры, e-mail: st085324@student.spbu.ru

Елизарова Марина Владиславовна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, младший научный сотрудник кафедры диагностики функциональных систем; Санкт-Петербургский государственный педиатрический медицинский университет, доцент кафедры медицинской биофизики и физики; e-mail: st809707@spbu.ru

УДК 004.8

ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ ДВУСТОРОННЕЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Хоменко И.Е., Вековцев В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Прогнозирование тяжести заболевания пациентов является важной задачей для улучшения качества медицинского обслуживания. Своевременное предсказание вероятности неблагоприятного исхода позволяет принимать превентивные меры и организовывать необходимые ресурсы для медицинских учреждений. В последние годы

модели прогнозирования стали активно использоваться для оценки состояния пациентов, однако высокая размерность данных и их неоднородность затрудняют интерпретацию и использование результатов. Поэтому бинаризация данных, как метод упрощения и стандартизации информации, может помочь в создании удобных и эффективных прогностических моделей.

Классический метод односторонней оценки данных для их бинаризации может не учитывать важные, в случае работы с медицинскими данными, особенности [1, 2]. Поэтому была поставлена цель разработать и оценить метод бинарной классификации медицинских данных адаптивной двусторонней оценкой. Метод позволит производить преобразование непрерывных данных в бинарные без потери особенностей распределения данных и с увеличением корреляции между рассматриваемыми параметрами и выживаемостью пациентов.

Адаптивная двусторонняя оценка является методом разбиения данных, в котором каждый признак разделяется на два класса на основе значений квантилей, рассчитанных по множествам с высоким и низким риском неблагоприятного исхода. Эта адаптивная оценка позволяет учесть различия в характеристиках пациентов с разным уровнем риска, что делает модель более точной. Метод может быть реализован с использованием следующей процедуры:

1. Вычисление квантилей каждого признака для пациентов с высоким и низким риском неблагоприятного исхода;
2. Определение границ бинарного разбиения для каждого признака, используя порядок расположения квантилей и схему из Рисунка 1;
3. Преобразование исходных непрерывных данных в бинарные переменные на основе установленных границ.

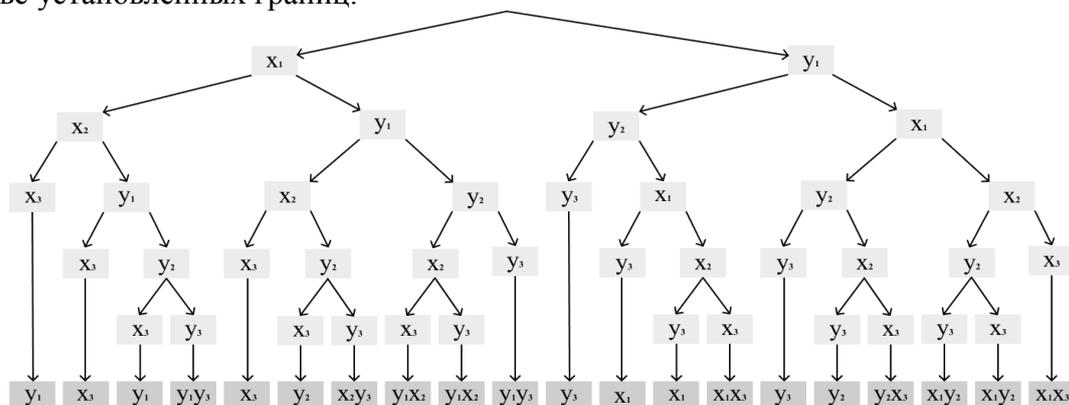


Рисунок 1

В алгоритме надо учитывать, что x_1, x_2, x_3 — квантили большего по мощности множества, а y_1, y_2, y_3 — меньшего. Алгоритм построен на основе оценки эффективности задач, решаемых машинным обучением, с целью максимизации значений чувствительности при классификации параметров. Нижний уровень характеризует границы классификации, а если задано двойное значение, то применяется двусторонняя оценка.

Для оценки работы метода были взяты обезличенные медицинские данные 299 пациентов, поступивших в отделение реанимации и интенсивной терапии в 2020 году. Эти данные содержат информацию о 250 параметрах состояния здоровья пациентов. Для примера работы метода рассмотрим параметр “гемоглобин”. За x принимаются квантили множества анализов пациентов с летальным исходом. Квантили распределяются следующим образом: $x_1 = 116,6$; $y_1 = 118,25$; $x_2 = 131$; $y_2 = 136,15$; $y_3 = 144,775$; $x_3 = 148$, по нашей схеме получаем, что x_2 и y_3 являются границами разбиения, что соотносится с реальными практическими медицинскими оценками норм уровня гемоглобина.

Для оценки эффективности алгоритма была построены 3 классификационные модели [3]. Модель 1 с использованием адаптивной двусторонней оценки для перевода непрерывных данных в бинарные, модель 2 на бинарных данных, полученных переводом из непрерывных данных по индексу Юдена, а также модель 3, построенная на непрерывных данных.

Сравнение качества классификационных моделей (Таблица 1) показало, что метод бинаризации адаптивной двусторонней оценкой улучшает качество прогноза по сравнению с бинаризацией по индексу Юдена и построением модели на непрерывных данных соответственно.

Таблица 1

	Точность, %	Чувствительность, %	Специфичность, %
Модель 1	94,8	96,6	93,1
Модель 2	74,1	79,3	68,9
Модель 3	78	83	86

Метод адаптивной двусторонней оценки для бинаризации данных продемонстрировал высокую эффективность при прогнозировании риска неблагоприятного исхода лечения. Преимущество метода заключается в его способности учитывать разницу в характеристиках между группами пациентов с высоким и низким риском, а также простота реализации алгоритма.

Литература

1. Старовойтов В. В., Голуб Ю. И. Сравнительный анализ оценок качества бинарной классификации // Информатика. – 2020. – Т. 17. № 1. – С. 87– 101.
2. Аржаник А. А., Гончарова А. Б. Сравнение способов преобразования количественных данных в бинарные при предсказании рисков осложнения внебольничной пневмонии // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 148–152.
3. Легкова И. А., Хоменко И. Е. Применение логистической регрессии для анализа необходимости подключения больного коронавирусной инфекцией к аппарату ИВЛ // Процессы управления и устойчивость. 2023. Т. 10. № 1. С. 207–210.

Хоменко Ирина Евгеньевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент, e-mail: st087797@student.spbu.ru
 Вековцев Вячеслав Владиславович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент, e-mail: st088221@student.spbu.ru

УДК 577.3

МОДЕЛЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕХНОГЕННОЙ ПУСТОШИ

Хоменко И.Е., Гончарова А.Б., Колпак Е.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Металлургическое производство сопровождается выбросами в атмосферу кислотных окислов и металлов, выпадения которых на поверхность земли приводит к гибели флоры и фауны. На значительных расстояниях от точек выбросов территория

превращается в пустошь. Хемофитостабилизация, как способ очистки территории, улучшает свойства почв, но не уменьшает содержание доступных растительности поллютантов до допустимого уровня.

Распространение растительного покрова на частично очищенной территории начинается от границы между пустошью и прилегающей к ней не нарушенной зоной [1]. Часть поллютантов в почве после ее восстановления сохраняется, но в значительно меньших концентрациях, чем на незагрязненной территории. Траектория распространения растительности в математической модели представлена отрезком длиной l . Растительность движется за счет расширения корневой системы и распространения семян растений на небольшие от растений расстояния. Распределение поллютантов вдоль траектории описывается экспоненциальной зависимостью с максимальным значением в точке расположения источника загрязнения [2], убывая по направлению к границе пустоши. Предполагается, что удельная скорость роста фитомассы уменьшается с увеличением концентрации поллютантов, уменьшается и линейная емкость среды, и линейная скорость движения границы пустоши. С учетом этих предположений модель зарастания пустоши имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\alpha x} u \right) + \mu u \left(e^{-\alpha x} - \frac{u}{e^{-\alpha x}} \right),$$

где u - линейная плотность фитомассы, v - линейная скорость движения растительности, μ - удельная скорость увеличения объемов фитомассы, α - параметр. Плотность фитомассы в равновесном положении в отсутствие поллютантов принята равной 1.

Начальное условие при $x = 0$: $u = u_0$, где $u_0 \ll 1$; при $0 < x$: $u = 0$.

Решение нелинейного уравнения (2) строится с применением численных методов. На рисунке приведено изменение функции $u(t, x)$ вдоль координаты в моменты времени $t = 35$ и $t = 175$ для параметров $\alpha = 1.5$, $\mu = 0.08$, $v = 0.005$. Пунктирной линией отмечено стационарное решение. Значения параметров соответствуют данным приведенным в [1, 3], но применительно к модели импактной зоны единичной длины. Скорости роста растительности оценивались по данным, приведенных в [3]. За единицу времени приняты 30 суток. Выбранный диапазон параметров соответствует росту различных трав и кустарничков.

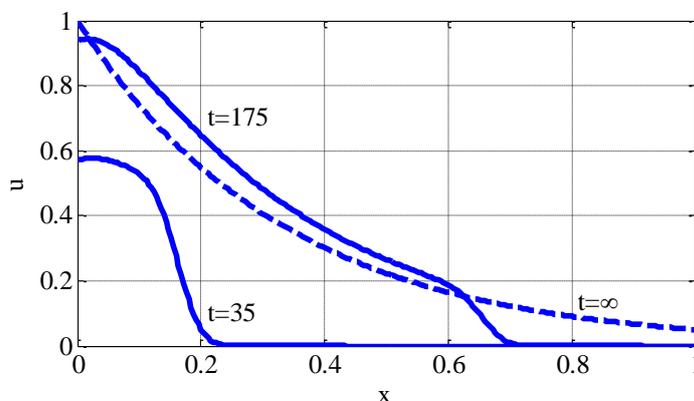


Рисунок - Зависимость функции $u(t, x)$ от x в моменты времени $t = 35$, $t = 175$ и $t = \infty$.

Наличие поллютантов на почве после хемофитостабилизации не позволяет растительности со временем покрыть всю пустошь до проективного значения.

Наиболее вероятное покрытие будет составлять около 50% от естественной, не подверженной загрязнению территории. Такие теоретические пространственные и временные оценки могут быть использованы на стадии проектирования очистки территорий [4].

Литература

1. Коротков В. Н., Копчик Г. Н., Смирнова И. Е., Копчик С. В. Восстановление растительности на техногенных пустошах в окрестностях Мончегорска (Мурманская область, Россия) // Russian Journal of Ecosystem. - 2019. – Vol. 4 (1). – С. 1-18. – DOI 10.21685/2500-0578-2019-1-4.

2. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Гасратова Н.А. Модели антропогенного давления на экосистему Учебное пособие / Санкт-Петербургский государственный университет. Казань, 2024. - 102 с.

3. Ярмишко В.Т., Игнатъева О. В. Многолетний импактный мониторинг состояния сосновых лесов в центральной части Кольского полуострова // Известия РАН. Серия биологическая. - 2019. - № 6. - С. 658–668. DOI: 10.1134/S0002332919060134.

4. Гончарова А.Б., Бусько Е.А. Программная реализация системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы Сибирский журнал клинической и экспериментальной медицины. - 2020. - Т. 35. - № 4. - С. 137-142.

Хоменко Ирина Евгеньевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, магистрант, факультет Прикладной математики – процессов управления, e-mail: st087797@student.spbu.ru.

Гончарова Анастасия Борисовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доцент факультета Прикладной математики – процессов управления, e-mail: goncharovaab@yandex.ru.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, e-mail: petrovich_pmpu@mail.ru.

УДК 517.977.56

МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ СИФИЛИСА 1990-2020

Хоменко И.Е., Колпак Е.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

За последние 200 лет на территории России было несколько вспышек заболеваемости сифилисом. Последняя вспышка возникла в результате экономического кризиса, роста проституции, отменой мер по борьбе и профилактике инфекций [1]. Количество больных на 100 000 населения до 1990 г. держалось на уровне 5 – 15 человек. Начиная с 1990 г. происходит резкий рост числа больных и к 1997 г. достигло 270. Максимальное количество больных на территории страны изменилось от 150 до 1200 на 100 000 населения.

Сифилис – инфекционное заболевание, передается преимущественно половым путем при непосредственном контакте между людьми. Заболеть могут лица всех возрастов, включая младенцев. В основную когорту больных входили граждане от 20 до 30 лет. Анализ статистических данных по заболеваемости населения страны за последние 200 лет показывает, что среди населения все эти годы была небольшая когорта больных: в 19 веке около 1% населения [1], в конце XX века около 0.02% [2]. В дополнение к этому до 20% выздоровевших лиц заболевает повторно. С учетом этих факторов модель эпидемии сифилиса представлена системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI + \gamma + \varepsilon \beta I, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I,\end{aligned}\tag{1}$$

где I - число инфицированных лиц, а S - восприимчивых. α , β , γ и ε - параметры.

В уравнениях (1) αSI - скорость роста числа инфицированных лиц, βI - скорость «выздоровления», ε - доля выздоровевших, которые остаются восприимчивыми из-за возможности повторного заболевания. γ - скорость пополнения группы восприимчивых за счет изменения численности населения, так как заболеванию подвержены все возрастные группы населения. На параметры ε и γ накладываются ограничения: $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \gamma \ll S_0$, где S_0 - число восприимчивых лиц на момент начала эпидемии.

Системы уравнений (1) имеет единственную стационарную точку

$$S = \frac{\beta}{\alpha}, \quad I = \frac{\gamma}{\beta(1-\varepsilon)}.$$

Собственные значения матрицы Якоби правой части системы уравнений (1) в стационарной точке имеют отрицательную вещественную часть. В случае комплексно сопряженных собственных значений возможны локальные колебания численности инфицированных лиц.

Таким образом, модель (1) отражает факт постоянного наличия в обществе больных сифилисом с момента появления этого заболевания на территории страны [1]. В связи с этим одним из вариантов борьбы с эпидемиями сифилиса является мониторинг населения [3, 4] с предварительной оценкой предрасположенности лиц к заболеванию. Как метод блокировки заболевания у лиц предрасположенных к нему может быть иммунотерапия [5].

На рис. 1 отражены результаты численного решения – символом «*» отмечены статистические данные, расчетной зависимости соответствует пунктирная линия. Данные приведены для значений параметров $\alpha = 0.0018$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 6$, $\varepsilon = 0.1$.

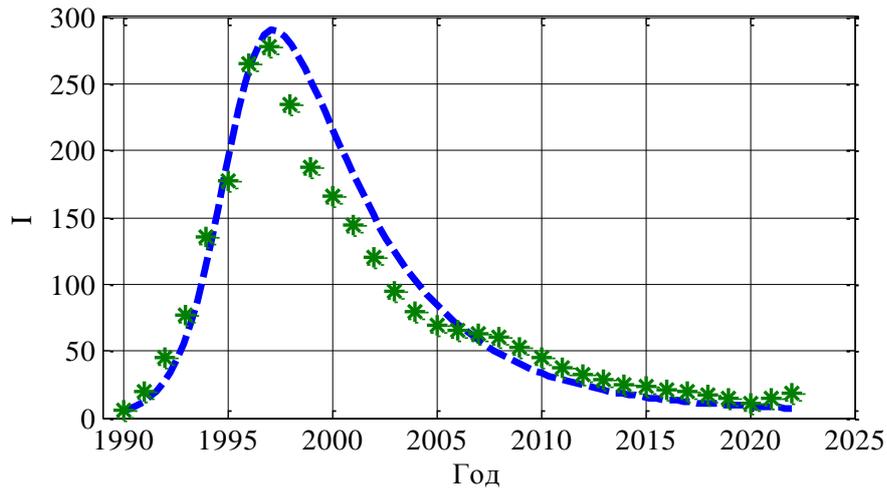


Рис. 1 - Динамика заболеваемости сифилисом

Аппроксимация аналогичных статистических данных для нескольких регионов России (Магнитогорск, Санкт-Петербург, Орловская обл., Ставропольский край, г. Астрахань, Иркутская обл. и др. регионы) и сопредельных с ней государств (Беларусь, Киргизия, Украина) позволила оценить диапазон изменения параметров, входящих в систему уравнений (1): $0.0005 < \alpha < 0.0030$, $0.0005 < \alpha < 0.0030$, $0.15 < \beta < 0.35$, $2 < \gamma < 20$. Распределение вероятностей времени наступления пика заболеваемости строилось на основе имитационного моделирования и статистического метода псевдорандомизации [6]. Выбор параметров для системы уравнений осуществлялся случайным образом из выбранных диапазонов. Результаты моделирования для 2 000 вариантов выбора параметров приведены на рис. 2. Вертикальной пунктирной линией отмечена медиана распределения. Для данных, приведенных на рис. 1, пик заболеваемости произошел через 7 лет после начала эпидемии.

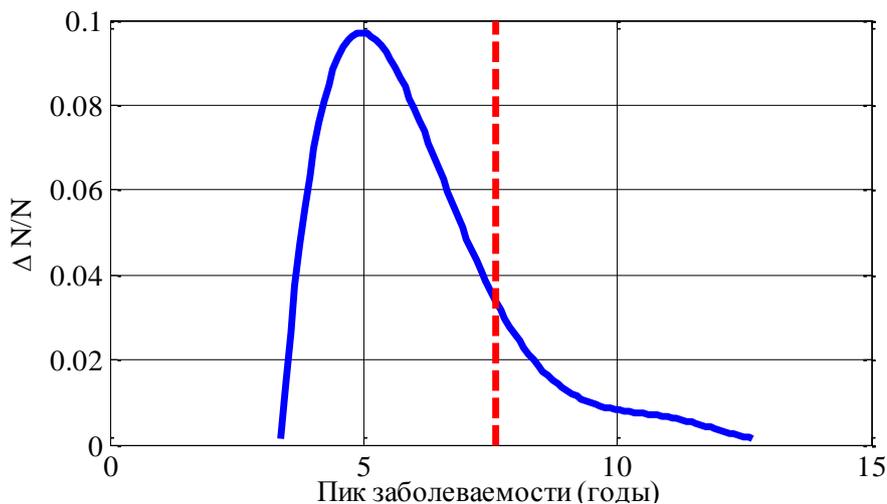


Рис. 2 - Распределение вероятностей момента пика заболеваемости

Таким образом, имитационное моделирование эпидемия сифилиса на основе статистических данных эпидемии 1990-2020 гг. прогнозирует достижение пика заболеваемости через 5 – 8 лет после начала эпидемии. Повторный рост заболеваемости, как след эпидемии, с незначительным ростом числа больных может длиться 15-20 лет.

Литература

1. Бондаренко Г. М., Унучко С. В., Никитенко И. Н., Губенко Т. В, Кутовая В. В. Сифилис: современное состояние проблемы // Дерматология та венерология. - 2018. - № 1 (79). - С. 8-112.
2. Российский статистический ежегодник. 2023: Стат.сб./Росстат. – Р76. М., 2023 – 701 с.
3. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Программная реализация системы постановки предварительного диагноза // Процессы управления и устойчивость. - 2020. - Т. 7. - № 1. - С. 153-157.
4. Гончарова А.Б., Бусько Е.А. Программная реализация системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы Сибирский журнал клинической и экспериментальной медицины. - 2020. - Т. 35. - № 4. - С. 137-142.
5. Гончарова А.Б., Колпак Е.П. математическое моделирование лечения новообразования методом иммунотерапии // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. - 2021. - № 1. - С. 74-78.
6. Бусько Е.А., Гончарова А.Б., Бучина Д.А., Натопкина А.С. // Использование статистического метода псевдорандомизации в сравнительной оценке диагностической эффективности методов медицинской визуализации на примере магнитнорезонансной томографии и контрастно-усиленного ультразвукового исследования // Опухоли женской репродуктивной системы. - 2021. - Т. 17. - № 3. - С. 37-43.

Хоменко Ирина Евгеньевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, магистрант, факультет Прикладной математики – процессов управления, mail: st087797@student.spbu.ru.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, e-mail: petrovich_pmpu@mail.ru.

УДК 519.87

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОСОЗУБЫХ ПЕРЕДАЧ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В АВТОМОБИЛЬНОЙ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Цымбал Д.В., Илларионов В.В., Лиховидов Д.В.

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Зубчатые передачи являются неотъемлемой частью большинства механизмов и машин, используемых в автомобильной и специальной технике. Они применяются в качестве передаточного устройства для преобразования моментов или движения. Косозубые колеса в отличие от прямозубых имеют два шага и два модуля. Линии зубьев имеют правое или левое направление. Косозубые передачи являются одним из наиболее распространенных типов зубчатых колес, а также являются важной частью многих двигателей и машин. Зубья косозубого колеса расположены под углом, что позволяет зубьям увеличить крутящийся момент.

Расчет косозубых передач выполняется с моделирования диаметра делительной окружности d , диаметр окружности впадин df , диаметр окружности вершин da , диаметр основной окружности d_{main} , ограничивающие зубчатый венец [1].

$$d = m \times z; \quad (1)$$

$$da = d + 2 \times m; \quad (2)$$

$$df = d - 2,5 \times m; \quad (3)$$

$$d_{main} = d \times \cos(20^\circ), \quad (4)$$

где m – модуль, z – число зубьев.

При моделировании профиля зуба нужно воспользоваться параметрической формой эвольвенты, которая строится приближенно по точкам. Эвольвента – геометрическое место точек прямой, катящейся без скольжения по окружности, называемой эволютой.

Точки эвольвенты находятся исходя из того, что при развёртывании окружности точка В2 должна отстоять от точки 2 на расстоянии, равном длине дуги между точками 1 и 2, а точка В3 должна отстоять от точки 3 на расстоянии, равном длине дуги между точками 1 и 3 (две длины предыдущей дуги), и т.д.[2].

Параметрические уравнения эвольвенты окружности:

$$y = r \sin \phi - r \phi \cos \phi; \quad (5)$$

$$y = r \sin \phi - r \phi \cos \phi. \quad (6)$$

Точное положение точек эвольвенты получим, откладывая по касательным длины соответствующих дуг. Длину дуги между точками 1 и 2 определяем по формуле (7):

$$a = \frac{\pi d}{m}, \quad (7)$$

где d - диаметр основной окружности, m - число частей, на которое разделена окружность. Получив ряд точек эвольвенты, соединяем их плавной линией.

Чтобы построить зуб нужно создать дугу по делительному диаметру, которая будет являться толщиной зуба. Полученная дуга привязана к делительной окружности и назначаются значения длины периметра. Линия симметрии зуба является отрезком между центром окружности и серединой дуги. Необходимо зеркально отразить профиль эвольвенты, а также недостающие части для получения эскиза зуба.

Моделирование косозубых передач позволяет существенно повысить автоматизацию работ при их проектировании и расчетах на промышленных предприятиях, снизить временные затраты на разработку и технологическое сопровождение производственных процессов и изделий, а также может быть использовано в учебном процессе при выполнении расчетов.

Литература

1. Цилиндрическая косозубая зубчатая передача – Электрон. дан. – Режим доступа: http://cncnc.ru/page_537.html

2. Эвольвента — Википедия – Электрон. дан. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0>

Цымбал Даниил Вадимович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: paranooids@yandex.ru.

Илларионов Владимир Викторович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: villar960@mail.ru.

Лиховидов Дмитрий Викторович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» г. Воронеж, Российская Федерация, старший научный сотрудник, e-mail: buksirovs@yandex.ru.

УДК 517+531.01

АЛГОРИТМЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

Шамолин М.В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва

Рассмотрим для начала систему с непрямым управлением, которая впервые изучалась Б. В. Булгаковым [1]:

$$T^2\eta'' + U\eta' + k\eta = T^2\xi, \quad \xi' = \varphi(\sigma), \quad \sigma = a\eta + E\eta' + G^2\eta'' - \xi/l. \quad (1)$$

Здесь постоянная T^2 характеризует инерционность объекта управления, $U > 0$ и $k > 0$ – его естественное демпфирование и восстанавливающую силу, a , E , G^2 , l – постоянные параметры системы управления; $\varphi(\sigma)$ принадлежит к классу допустимых функций и удовлетворяет условиям $\varphi(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$. Устойчивость системы (1) изучалась также в работах [2, 3].

1. Исправная система. Пусть объект управления рассматриваемой системы (1) характеризуется следующими значениями параметров: $T = 1$; $U = 0,4$; $k = 1$, а параметры a, E, G^2 системы управления объектом имеют номинальные значения из области \bar{Y} : $\bar{a} = 0,5$; $\bar{E} = 0,2$; $\bar{G}^2 = 0,5$. Кроме того, будем считать, что параметр обратной связи удовлетворяет условию $l = 1$.

Система (1) с такими параметрами асимптотически устойчива. Эту систему и будем считать исправной.

В качестве области начальных условий H выберем внутренность сферы S_r радиуса r : $H: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$.

Если выбрать $r = 0,7$, то любая траектория системы (1) с данными параметрами и начальными условиями из области H за конечное время вернется в H и не выйдет оттуда, то есть будет лежать в области притяжения нуля.

2. Выбор сферы S_r . При выборе сферы S_r радиуса R использовалась идея метода статистических испытаний. Выбор точки в пространстве параметров производился следующим образом. Параметры a, E, G^2 считались независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическими ожиданиями

$\bar{a}, \bar{E}, \bar{G}^2$ и дисперсиями $\sigma_a^2 = 0,03; \sigma_E^2 = 0,005$ и $\sigma_{G^2}^2 = 0,03$, обеспечивающими близкую к единице вероятность попадания в область $\bar{Y} \subset \bar{Y}$:

$$\bar{Y} : \bar{a} \pm 3\sigma_a, \bar{E} \pm 3\sigma_E, \bar{G}^2 \pm 3\sigma_{G^2}. \quad (2)$$

При выборе точки внутри области H начальных условий имелось в виду следующее обстоятельство. Будем считать, что при любых фиксированных параметрах из области \bar{Y} область H начальных условий целиком погружена в область притяжения начала координат. В этом случае любая траектория, начинающаяся из H , за конечное время вернется в H и уже не выйдет оттуда. Обозначим через X_H область фазового пространства, заполненную траекториями системы, начинающимися в H . Для отыскания границ X_H достаточно рассмотреть только те траектории, которые начинаются со сферы S_r , а в качестве поверхности контроля выбрать сферу S_R , охватывающую множество X_H .

Начальные условия считались независимыми равномерно распределенными по сфере

$$S_r : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 0,7^2. \quad (3)$$

Точка в пространстве параметров \bar{Y} (2) и точка в пространстве начальных условий на S_r (3) выбирались независимо друг от друга. В качестве сферы S_R была выбрана сфера радиуса $R=1$, целиком содержащая множество X_H из более чем 600 траекторий.

3. Выбор констант M_j . Система уравнений (1) с параметрами a, E, G^2, l , соответствующими неисправным системам 1, 2, 3, интегрировалась по 450 раз.

Каждый раз после выхода фазовой траектории в момент времени τ_0 на сферу S_R радиуса $R=1$, на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$, где $\tau = 0,2$ сек, для различных $N=1,3,5$ осуществлялся подсчет чисел $S_j = \sum_{i=1}^N ((x_{ij1} - x_{ig1})^2 + (x_{ij2} - x_{ig2})^2 + (\xi_{ij} - \xi_{ig})^2)$.

Максимальное из 450 чисел S_j , полученных для каждой неисправной системы $j=1,2,3$ и определенного $N=1,3,5$, выбиралось в качестве константы $M_j = \max S_j$.

4. Подсчет $\bar{K}_j, \bar{\sigma}_j K_j$ и выбор N . С начальными равномерно распределенными на сфере S_r интегрируется одна из неисправных систем $j=1,2,3$. После выхода фазовой траектории на сферу S_R на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ при определенном $N=1,3,5$ осуществляется подсчет трех сумм S_j и сравнение S_j с соответствующими M_j , которые ранее были определены для данного N и j . Количество S_j , удовлетворяющих неравенству $S_j \leq M_j$, будет $K_j^\kappa(x_o^i)$. Интегрирование уравнений определенной неисправной системы с различными начальными условиями повторяется $\kappa=50$ раз и подсчитываются следующие величины:

$$\bar{K}_j = \sum_{i=1}^{50} K_j^\kappa(x_o^i) / 50, \quad \bar{\sigma}_j = \left[\sum_{i=1}^{50} (\bar{K}_j - K_j^\kappa(x_o^i))^2 / 50 \right]^{1/2}, \quad K_j = \bar{K}_j \pm \bar{\sigma}_j / \sqrt{50}.$$

Для рассматриваемой системы уравнений (1) с неисправностями 1,2,3 при произвольных начальных условиях на $S_r, \kappa=50$, и $N=1,3,5$ получалось $K_j=1$ с ошибкой в вычислении, не превышающей 2%. Поэтому достаточно выбрать $N=1$, то есть при одном измерении, исключая измерение начальных условий в момент

выхода фазовой траектории системы на сферу S_R , алгоритм диагностирования позволяет точно определять рассматриваемые неисправности.

5. Реализация алгоритма восстановления. До сих пор априори определялись параметры алгоритма восстановления S_R, M_j, N и оценивалось качество этих параметров. Используем теперь найденные параметры для обнаружения возникшей неисправности и восстановления системы (1). Можно воспроизвести результаты математического эксперимента по восстановлению системы (1) при неисправном датчике угловой скорости, т.е. системы (1) с параметрами первой неисправной системы. Неисправность возникает в окрестности начала координат (0;0,01), и фазовая точка перемещается по фазовой траектории I. Если включен алгоритм поиска неисправности, то процесс восстановления осуществляется следующим образом. В момент τ_0 фазовая траектория неисправной системы встречается со сферой S_R ; на интервале $[\tau_0, \tau]$ происходит поиск неисправности (формируются суммы S_j и сравниваются с соответствующими константами M_j ; $N=1$); в момент $\tau=0,2$ сек происходит обнаружение неисправности и подключение исправной системы. После этого фазовая точка по фазовой траектории II возвращается в окрестность начала координат.

Аналогичный результат получается и в случае, когда в системе управления (1) доступна измерению только одна фазовая координата: $x_1 = \eta$, а функционал диагностирования имеет вид $S_j = \sum_{i=1}^N (x_{ij1} - x_{ig1})^2$, $j=1,2,3$. Получается аналогичный вышеизложенному результат (см. также [4, 5]).

Литература

1. Булгаков Б.В. Колебания. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1954.
2. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундам. и прикл. матем. – 1999. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 775–790.
3. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. – № 1. – С. 29–31.
4. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 96–121.
5. Пархоменко П.П., Сагомоян Е.С. Основы технической диагностики. – М.: Энергия, 1981.

Шамолин Максим Владимирович, Институт механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории общей механики, эксперт РАН, E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
С ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ**

Шелковой А.Н.

**ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж**

Пусть $L_2[0, 2\pi]$ – гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau$. Через $W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим пространство Соболева

$\{x \in L_2[0, 2\pi] : x' \text{ абсолютно непрерывна, } x'' \in L_2[0, 2\pi]\}$.

Рассматривается дифференциальный оператор

$$L: D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi],$$

задаваемый выражением вида

$$(Ly)(t) = -\ddot{y}(t) + y(t)$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ x \in W_2^2[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi), \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) \right\}$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = y(2\pi) + \int_0^{2\pi} a_0(t) y(t) dt, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(2\pi) + \int_0^{2\pi} a_1(t) y(t) dt,$$

где a_0 и a_1 – функции из $L_2[0, 2\pi]$. Считается, что функции a_0 и a_1 являются функциями ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$.

Так как собственные значения оператора L и ему сопряжённого оператора L^* связаны соотношением $\lambda = \bar{\lambda}$, то для исследования спектра оператора L рассматривается сопряжённый ему оператор

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) + x(t) - \left[\dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t) \right] \quad (1)$$

с краевыми условиями $x(0) = x(2\pi), \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.

Методом изучения спектральных свойств данного класса является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-4].

Для исследования спектральных свойств сопряжённого оператора (1) представим его в виде $L^*x = Ax - Bx$. Оператор A порождается дифференциальным выражением вида $Ax = -\ddot{x} + x, x \in D(A), D(A) = \left\{ x \in W_2^2[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi), \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) \right\}$.

Оператор A является самосопряжённым оператором с дискретным спектром,

собственное значение которого $\lambda_0 = 1$ является простым, а остальные собственные значения $\lambda_n = n^2 + 1, n \geq 1$, двукратны; соответствующие собственные функции

$$e_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_{2n-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, e_{2n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, n \in \mathbb{N},$$

образуют ортонормированный базис в $L_2[0, 2\pi]$.

Будем считать оператор A невозмущённым оператором, а оператор B – возмущением. Оператор B задаётся соотношением

$$(Bx)(t) = \dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t); \quad x \in D(A), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Методом подобных операторов получены оценки собственных значений, а также доказана сходимость спектральных разложений исследуемого класса операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00732.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж, Изд-во ВГУ. 1987. 165 с.

2. Шелковой А.Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями // Вестник факультета прикладной математики и механики. 2016. № 2. С. 226-235.

3. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2018. Т. 21, № 4. С. 18-33.

4. Шелковой А.Н. Спектральный анализ интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2020. Т. 23, № 3. С. 76-89.

Шелковой Александр Николаевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: shelkovoij.aleksandr@mail.ru.

ВОПРОСЫ СОЦИАЛИЗАЦИИ И ИНДИВИДУАЛИЗАЦИИ ЛИЧНОСТИ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Юрьева А.А.

*Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I,
г. Воронеж*

Становление, развитие и функционирование гражданского общества не возможны без социализации образования, то есть без решения наиболее важных задач в социокультурной сфере общества. Социализация образования позволяет преодолевать разобщенность, поляризацию взаимосвязанных компонентов культуры: естественнонаучного, техникотехнологического и социально-гуманистического. Одной из главных характеристик социализации образования можно считать оптимальное сочетание уровня потенциальных способностей в реализации социально признанных ценностей и собственных творческих сил при решении конкретной учебно-воспитательной, производственной или управленческой задачи. Очевидно и то, что при

формировании специалиста любого профиля приоритетным является не столько набор специальных знаний (хотя они крайне важны), сколько глубокая фундаментальная подготовка как "стартовая площадка" и необходимое условие саморазвития личности и профессионала, его творческой самореализации. Образование невозможно без обращения к личности. Дело лишь в том, какую роль играет личность в этом процессе - роль цели или средства. Традиционное образование, преследующее цели функциональной, предметно-вещной образованности человека, использует личность как раз в функции средства, опирается на механизмы мотивации, ценностной ориентировки, смыслопоиска как на своего рода движущие силы достижения заданных извне целей. Развитие же самих этих личностных "механизмов", «функций» совершается в данном случае попутно, в той мере и в тех аспектах, в каких они оказываются необходимыми, востребованными для социальной ориентации индивида. От состояния образовательной системы, ее способности удовлетворять потребности личности и общества в высококачественных образовательных услугах принципиально зависят перспективы общественного развития в мире. С самой общей точки зрения, образование – это естественное и наиболее оптимальное место встречи личности и общества, место продуктивного и взаиморазвивающего разрешения бытийных противоречий между ними. Образование все более предстает как своего рода "производство образованности", в котором как и в других производствах, используются современные наукоемкие технологии, информационные продукты, квалифицированные специалисты. Становясь центральным феноменом культуры, образование все более ориентируется на утверждение сущностного личностного начала в человеке.

Юрьева Анна Александровна, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I», г. Воронеж, Россия, кандидат исторических наук, доцент кафедры истории, философии и русского языка.

УДК 621.565

МЕТОД РАСЧЕТА МЕМБРАННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

Янкина К.Ю., Мордвин А.Н., Ушаков А.С.

ФГКВУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Мембранные способы разделения газов из воздуха нашли применение в различных областях промышленности, в частности, в сфере авиатопливообеспечения. К примеру, азот используется для заполнения и вытеснения газа из технического оборудования из участков трубопроводов. В качестве источника азота на промышленных объектах на сегодняшний день успешно применяются стационарные и передвижные азотные установки, основанные на технологии мембранного выделения азота из воздуха.

Целью настоящей работы явилось найти оптимальный метод расчета мембранного разделения многокомпонентной смеси. Следует отметить, что принцип мембранного разделения состоит в том, что «быстрые» газы, такие как кислород, углекислый газ и др., пропускаются материалом непористой полимерной мембраны

больше, чем азот. Поэтому в все расчеты будут вестись относительно более проникающих молекул. Кроме того, для расчетов будем рассматривать бинарную систему, состоящую только из кислорода «O» и азота «N» с концентрациями 21% и 79%, соответственно.

Анализ работ показал, что в нашей стране нашли свое применение газоразделительные мембранные материалы, состоящие из полифениленоксида, поливинилтриметилсилана, полисульфона покрытого полидиметилсилоксаном или поли (блок-амидом эфира) с факторами разделения 4,8; 3,6; 4,56 и 3,94, соответственно.

Для оценки проницаемости отдельных составляющих газовой смеси применимы уравнения [1]:

$$V_o = K_o S \Delta P_o; \quad (1)$$

$$V_N = K_N S \Delta P_N, \quad (2)$$

где V – расход потока, м³/ч; K – коэффициент проницаемости чистых веществ, нм³/(МПа·м²·ч); ΔP – разность парциальных давлений, МПа; S – площадь рабочей поверхности (перегородки), м².

Индексы «O» и «N» обозначают компонент кислорода и азота, соответственно.

Разность парциальных давлений для компонента «O», выражается:

$$\Delta P_o = P_x x - P_y y, \quad (3)$$

где P_x и P_y – абсолютные давления над мембраной и после нее, МПа, x – концентрация компонента «O» (кислорода) в питающей смеси, y – концентрация компонента «N» (азота) в пермеате.

Учитывая формулу (1) расход проникающего в пермеатный поток кислорода:

$$V_o = V_y = K_o S (P_x x - P_y y); \quad (4)$$

Концентрация второго компонента в питающей смеси равна $(1 - x)$, а в пермеате – $(1 - y)$. Тогда для «N» разность парциальных давлений и расход выразятся формулами:

$$\Delta P_N = P_x (1 - x) - P_y (1 - y); \quad (5)$$

$$V_N = V (1 - y) = K_N S [P_x (1 - x) - P_y (1 - y)]. \quad (6)$$

После преобразований и введения новых обозначений, таких как $\alpha = K_o / K_N$, а также $\varphi = P_y / P_x$ (называемое уравнение состояния мембраны) получаем выражение:

$$y^2 \varphi (1 - \alpha) + y [1 + (\varphi + x)(\alpha - 1)] - \alpha x = 0; \quad (7)$$

Его решение имеет вид:

$$y_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{B}{A} + \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 4 \frac{C}{A}} \right]; \quad (8)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{B}{A} - \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 4 \frac{C}{A}} \right], \quad (9)$$

где $A = \varphi(1 - \alpha)$; $B = 1 + (\varphi + x)(\alpha - 1)$; $C = -\alpha x$

Решив уравнения (8), (9) и коэффициенты A , B , C строим график зависимости давления от содержания кислорода при различных значениях α .

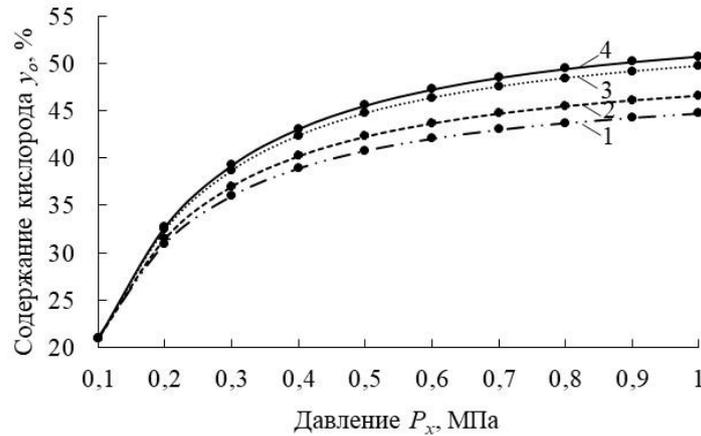


Рис.1 Содержание кислорода y_o в пермеатном потоке после мембраны при обогащении воздуха ($x_o=0,21$) в зависимости от давления P_x и фактора разделения α : 1 – 3,6; 2 – 3,94; 3 – 4,56; 4 – 4,8.

Анализ зависимостей показывает, что при повышенных давлениях и увеличении фактора разделения процесс обогащения потока кислородом идет эффективней. Таким образом, упрощенные методы анализа достаточно корректно отражают процесс разделения воздуха в мембранах с полыми волокнами.

Литература

1. Применение мембранных процессов в технологиях разделения газовых смесей на основе компонентов воздуха / В.Л. Бондаренко [и др.] // Технические газы. 2012. № 2. С.19-30.

Янкина Кристина Юрьевна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат химических наук, e-mail: Yankina@mail.ru.

Мордовин Алексей Николаевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, e-mail: Yankina@mail.ru.

Ушаков Артем Сергеевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, e-mail: Yankina@mail.ru.

УДК 517.977

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Самсонов И.Ю.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», г. Елец

Следуя [1], обозначим через $\partial\Gamma$ множество граничных, через $J(\Gamma)$ – множество внутренних узлов графа Γ и пусть Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\partial\mathcal{R}$ – множество всех граничных ребер (ребер, содержащих граничные узлы $\xi \in \partial\Gamma$); $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$. Каждое ребро γ графа Γ

параметризуется отрезком $[0,1]$ и параметром $x \in [0,1]$, ориентация ребер установлена указанными отрезками. Дальнейшие пояснения используют приведенные в [2].

Обозначим через $\Omega_0(a, \Gamma_T)$ множество функций $u(x, t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) как функции класса $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$, т.е. для каждого элемента $u \in \Omega_0(a, \Gamma_T)$ при фиксированном $t \in [0, T]$ существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n(x, t) \in \Omega$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Gamma)$ к следу v , при этом $u_n(x, t)$ равны нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, непрерывны на Γ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u_x(1, t)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u_x(0, t)_{\gamma_j}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_0(a, \Gamma_T)$ по норме

$$\|u\|_{2, \Gamma_T} \equiv \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}$$

обозначим через $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T) : V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

в области $\bar{\Gamma}_T$. Предположения относительно функций $a(x)$, $b(x)$ и $f(x, t)$, $\varphi(x)$ остаются теми же, что и в [1]. Ниже используются пространства, приведенные [2].

Определение. Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ краевой задачи (2), (3) называется функция $y(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_t} \left(-y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \right) dx dt + \ell_t(y(x, t), \eta(x, t)) = \\ = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_t} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3)$$

для любых $t \in [0, T]$ и при любой $\eta(x, t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$; $\ell_t(y, \eta)$ – билинейная форма, определенная соотношением

$$\ell_t(\mu(x, t), \nu(x, t)) = \int_{\Gamma_t} \left(a(x) \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \nu(x, t)}{\partial x} + b(x) \mu(x, t) \nu(x, t) \right) dx dt.$$

Теорема 1 [1]. *Задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве соболевского типа $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, слабое решение непрерывно зависит от исходных данных $f(x, t)$, $\varphi(x)$.*

Пусть $C : V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T) \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ – линейный непрерывный оператор (*оператор наблюдения*); $N : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ – линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv, v)_{\mathbb{U}} \geq \zeta \|v\|_{\mathbb{U}}$ ($\zeta > 0$ – фиксированная постоянная); $J(v)$ – функционал, требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_\circ \subset \mathbb{U}$ (*функция стоимости*):

$$J(v) = \|Cy - z_0\|_{L_2(\Gamma_T)}^2 + (Nv, v)_{\mathbb{U}};$$

где $z_0(x, t)$ – заданное наблюдение.

Заменим в правой части (1) f на $f + Bv$ ($v \in \mathbb{U}$), прямым следствием теоремы 1 является следующее утверждение:

Теорема 2. Задача (1), (2) (для $f + Bv$, $v \in \mathbb{U}$) однозначно слабо разрешима в $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и имеет место непрерывность линейного отображения $v \rightarrow y(v)$ пространства \mathbb{U} в $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Задача оптимального управления системой (1), (2) (для $f + Bv$, $v \in \mathbb{U}$) состоит в том, чтобы отыскать $\inf_{v \in \mathbb{U}_\delta} J(v)$.

Теорема 3. Задача оптимального управления системой (1), (2) (для $f + Bv$, $v(x, t) \in \mathbb{U}$) имеет единственное решение $v^* \in \mathbb{U}_\delta$, т.е. $J(v^*) = \inf_{v \in \mathbb{U}_\delta} J(v)$.

Литература

1. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 4 (58). С. 70-74.
2. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 2. С. 60-69.
3. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов системы "мачта-растяжки" // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 1-2 (31). С. 272-277.
4. Провоторов В.В. Математическое моделирование колебательных процессов поддерживающих растяжек упругой мачты // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2006. № 2. С. 28-35.

Самсонов Игорь Юрьевич, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец, Российская Федерация, аспирант второго курса, старший преподаватель кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности института цифровых технологий и математики, e-mail: ig48sam@gmail.com.

Научный руководитель: Провоторов В.В., доктор физико-математических наук, профессор.

УДК 004.415.2

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ С МОДУЛЕМ EXPRESS-SESSION ДЛЯ ФРЕЙМБОРКА EXPRESS В СРЕДЕ NODE.JS

Самсонов И.Ю.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», г. Елец

При работе с приложением, использующим клиент-серверную архитектуру, возникает необходимость идентифицировать запросы, исходящие от одного и того же пользователя. Для реализации такого механизма веб-серверу необходимо создать уникальный номер, сохранить для последующей сверки между запросами, и отправить

клиенту, который будет использовать его при формировании запросов к серверу. Модуль `express-session` реализует требуемый функционал и предоставляет интерфейсы для настройки необходимых параметров.

Для начала работы необходимо загрузить файлы модуля с помощью менеджера пакетов Node (1) и подключить в исполняемый скрипт (2).

Листинг 1.1

```
npm install express-session // (1)
```

Пакет `express-session` расширяет функциональные возможности фреймворка `express`, поэтому будем рассматривать особенности работы модуля, как части промежуточного программного обеспечения.

Необходимым условием для корректной работы клиентских сессий, является набор опций (3), значения которых, регулируют поведение модуля.

Листинг 1.2

```
const express = require('express');
const session = require('express-session'); // (2)
const app = express();
const session_options = { // (3)
  secret: 'appSecretKey', // (4)
  resave: false, // (5)
  saveUninitialized: false // (6)
};
app.use(session(session_options));
```

В листинге 1.2 представлен программный код с минимальным набором команд, необходимых для корректной работы модуля, а значения 4, 5, 6, задаются исходя из требований к разрабатываемому приложению. Целями данной работы является исследование настроечных опций (3), хранящихся в переменной `session_options`.

1. Параметр `secret`.

Обязательный параметр, который применяется для подписи идентификатора сессии, таким образом повышая защищенность данных сессии. В качестве значения использует значение или массив значений, поддерживаемых функцией `crypto.createHmac()`. Это может быть строка (`String`) или объект класса `Buffer`. При использовании массива секретов, для подписи идентификатора сессии будет использоваться только первый элемент, остальные элементы будут учитываться при проверке.

Зачем нужно дополнительно подписывать случайно сгенерированный идентификатор? Такой подход затруднит попытки атак методом угадывания идентификатора. Не рекомендуется хранить секретные данные в общем хранилище приложения, хорошей практикой считается использовать переменные окружения. При обновлении значения секрета необходимо помнить о том, что произойдет аннулирование всех существующих сессий. Чтобы этого избежать, необходимо и достаточно хранить предыдущие значения секрета в массиве с настоящим, при этом новый секрет должен быть первым элементом коллекции.

2. Параметр `resave`.

По умолчанию установлено значение `true`, при котором сохранение сессионных данных клиента, между запросами, происходит независимо от того были ли внесены изменения или нет. В большинстве случаев, возможно, стоит отключить данную опцию и использовать метод `touch()`, если он поддерживается выбранным хранилищем данных в параметре `store`.

3. Параметр `saveUninitialized`.

При обращении клиента к серверу приложения, создается новый объект сессии с уникальным идентификатором, который позволяет хранить данные пользователя между запросами. Если значение параметра `saveUninitialized` – `true`, тогда созданная сессия будет принудительно записана в хранилище, используемое в параметре `store`, независимо от того инициализирована она значением или нет, а клиенту будет отправлен `cookie`-файл с подписанным идентификатором сессии.

4. Параметр `store`.

Данная опция отвечает за выбор инструмента хранения данных сессии. По умолчанию используется `MemoryStore`. Стоит помнить, что использовать данное хранилище в рабочей версии проекта настоятельно не рекомендуется, так как это может привести к неразумной трате ресурсов оборудования. Для решения этой проблемы в модуле `express-session` реализована поддержка большого количества сторонних средств хранения данных.

5. Параметр `name`.

Используется для хранения имени `cookie` идентификатора сессии. Данное имя будет установлено в ответ сервера или прочитано из запроса клиента. По умолчанию используется значение – `connect.sid`. Изменение данного значения полезно для разделения сессионных `cookie` при работе нескольких приложений с одним и тем же именем хоста.

6. Параметр `unset`.

Регулирует поведение при удалении сессии методом `delete` (`delete request.session`). По умолчанию используется значение `keep`, что позволяет оставлять данные сессии в хранилище. Также доступно значение `destroy`, при таких настройках данные сессии будут удалены из хранилища вместе с сессией клиента.

7. Параметр `proxy`.

Данный параметр определяет уровень доверия при работе через обратный прокси-сервер, используя заголовок `X-Forwarded-Proto`. По умолчанию установлено значение – `undefined`, которое использует настройки доверительного прокси-сервера из фреймворка `express`. Также возможно установить значение – `false`, при этом, заголовки игнорируются и соединение считается безопасным только при наличии прямого `TLS/SSL`-соединения. Значение `true` позволит использовать заголовок `X-Forwarded-Proto`. Обстоятельства для применения данного параметра могут возникнуть, когда клиенты подключаются к серверу приложения через обратный прокси-сервер, например, используя веб-сервер `nginx`. Клиент отправляет запрос серверу `nginx`, тот в свою очередь перенаправляет запрос дальше к серверу приложения. При этом общение клиента с обратным прокси-сервером может использовать безопасный протокол `HTTPS`, а перенаправленное соединение может работать через протокол `HTTP`. В таком случае стоит обратить внимание на данный параметр.

8. Параметр `rolling`.

Использование значения `true` в данной опции, заставит сервер обновить `cookie`, используемую сессией, между запросами клиента. Это позволит автоматически задать новое значение параметру `maxAge` в опции `cookie` с помощью которого можно отследить активность пользователя в приложении.

9. Параметр `cookie`.

Данная опция настраивает поведение `cookie`-файла на стороне клиента и содержит в себе несколько параметров.

- `cookie.path`: `'/'`

Атрибут, который контролирует область действия файла `cookie`. По умолчанию, действие сессионной `cookie` распространяется на корневой путь домена.

- `cookie.domain`: `undefined`

Устанавливает отношение файла `cookie` к домену. По умолчанию большинство клиентов будут считать отношение к текущему домену.

- `cookie.expires`: `undefined`

Устанавливает объект класса Date в качестве значения для атрибута Expires.

По умолчанию значение не установлено, что позволяет клиенту считать файл cookie временным и удалить его при закрытии веб-браузера. Рекомендуется использовать параметр maxAge для ограничения времени жизни файла cookie, чем применять настройку expires, так как использование даты накладывает необходимость в синхронизации даты сервера и клиента. При использовании обоих значений expires и maxAge веб-браузер, поддерживающий maxAge, будет игнорировать expires. Особенность работы веб-браузера Internet Explorer заключается в том, что он проигнорирует параметр maxAge и, если отсутствует значение expires, то файл cookie будет восприниматься как временный.

<https://mrcoles.com/blog/cookies-max-age-vs-expires/> [2]

- cookie.maxAge: undefined

Данный параметр хранит значение времени жизни файла cookie. Используется для вычисления максимального времени жизни файла cookie в миллисекундах. К текущему времени сервера добавляется нужное время. По умолчанию значение не установлено.

- cookie.httpOnly: true

Данная настройка разрешает доступ к файлам cookie только через протокол HTTP. Это позволяет ограничить доступ на стороне клиента с помощью JavaScript (document.cookie).

- cookie.secure: false

Используется для безопасной передачи файла cookie. По умолчанию установлено значение false. Рекомендуется использовать значение true, однако требуется поддержка HTTPS протокола. Если ваш сервер работает по протоколу HTTP, клиент не будет отправлять cookie обратно на сервер.

- cookie.sameSite: false

Ограничивает область действия cookie. В данный момент этот атрибут не полностью стандартизирован и может быть проигнорирован некоторыми браузерами.

<https://datatracker.ietf.org/doc/html/draft-west-cookie-incrementalism-01> [3]

<https://datatracker.ietf.org/doc/html/draft-ietf-httpbis-rfc6265bis-03#section-4.1.2.7> [1]

- cookie.priority: medium

Указывает приоритет хранения файла cookie по отношению других файлов того же домена с этим же атрибутом. При соблюдении ограничений на количество файлов cookie, в первую очередь будут удалены cookie с низким приоритетом. Данная спецификация не стандартизирована до конца и может измениться в будущем.

Литература

1. Barth, A. and West, M. 2019. Cookies: HTTP State Management Mechanism URL: <https://datatracker.ietf.org/doc/html/draft-ietf-httpbis-rfc6265bis-03#section-4.1.2.7>

(accessed: 17.11.2024)

2. Coles, P. 2009. HTTP Cookies: What's the difference between Max-age and Expires? URL: <https://mrcoles.com/blog/cookies-max-age-vs-expires/> (accessed: 17.11.2024)

3. West, M. 2020. Incrementally Better Cookies draft-west-cookieincrementalism-01. Retrieved August 10, 2023 URL: <https://datatracker.ietf.org/doc/html/draft-west-cookie-incrementalism-01> (accessed: 17.11.2024)

Самсонов Игорь Юрьевич, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец, Российская Федерация, аспирант второго курса, старший преподаватель кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности института цифровых технологий и математики, e-mail: ig48sam@gmail.com

Научный руководитель: Провоторов В.В., доктор физико-математических наук, профессор.

О ДВУХШАГОВЫХ МЕТОДАХ РУНГЕ — КУТТЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Еремин А.С., Ягафаров А.Р.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

В [1] представлен новый подход к построению методов типа Рунге — Кутты, непосредственно ориентированных на решение функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа (ФДУЗТ), применимых, в частности, для дифференциальных уравнений (ДУ) с переменным запаздыванием в случае попадания запаздывания в совершаемый шаг. Этот подход, в отличие от более ранних вариантов, не является применением уже построенных непрерывных методов к ситуации необходимости интерполировать решение на этапах текущего шага, а включает эту необходимость как неотъемлемую составную часть метода. Эти методы получили название функционально-непрерывные методы Рунге — Кутты (ФНРК). Конечно, в случае применения ФНРК, например, к обыкновенным дифференциальным уравнениям, они становятся равносильны некоторым классическим методам Рунге — Кутты, к сожалению, с большим числом этапов. Более подробная теория по ним была представлена в прекрасном обзоре [2].

Несмотря на то, что разрывность производных решения ФДУЗТ в некоторых точках, возникающая, в первую очередь, из-за негладкого соединения предыстории и решения, является важным аргументом в пользу одношаговых методов с одношаговой же интерполяцией, на практике, особенно для ДУ с дискретными запаздываниями, количество шагов, начинающихся в точках разрыва производных гораздо меньше, чем прочих, которые вполне позволяют применять и многошаговые методы.

В 2017 году А. Тузов предпринял попытку распространить представленную теорию на двухшаговые методы Рунге — Кутты [3]. Он представил соответствующий вид явных двухшаговых ФНРК, вывел условия порядка для них, а также переформулировал для них теоремы о нуль-устойчивости и сходимости. Также были представлены явные двухшаговые методы четвёртого и пятого порядков, использующие всего по два этапа на новом шаге. К сожалению, упомянутый источник [3] является препринтом без указания журнала, в который его планировалось отправить, и никаких дальнейших сведений о публикации или о развитии работы нам найти не удалось. Кроме того, при исследовании работы мы обнаружили, что представленный в ней метод пятого порядка является неустойчивым даже в варианте сужения на обыкновенные ДУ и что с выбранным числом этапов построить устойчивый метод пятого порядка невозможно.

В настоящей работе мы рассматриваем двухшаговые ФНРК для уравнения

$$y'(t) = f(t, u_t), \quad (1)$$

где $u_t = y(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ для некоторого максимального запаздывания r .

Предположим, что уже сделано $n-1$ шагов длины h ($t_k = t_0 + kh$), и последний шаг метод выполнил из точки (t_{n-2}, y_{n-2}) в (t_{n-1}, y_{n-1}) , причём в процессе применения были получены этапные оценки правой части $K_i^{[n-1]}$, $i = 1, \dots, s$. Приближение к решению (1) на n -м шаге найдём по формуле

$$\begin{aligned}
y(t_{n-1} + \alpha h) &\approx \eta(t_{n-1} + \alpha h) = \nu y_{n-2} + (1 - \nu) y_{n-1} + \\
&+ h \sum_{i=1}^s \tilde{b}_i(\alpha) K_i^{[n-1]} + h \sum_{i=1}^s b_i(\alpha) K_i^{[n]}, \quad \alpha \in [0, 1],
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$K_i^{[n]} = f(T_i, Y_{T_i}^{[n],i}), \quad T_i = t_{n-1} + c_i h,$$

а этапные приближения к решению находятся как

$$Y^{[n],i}(t) = \begin{cases} u_i y_{n-2} + (1 - u_i) y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s \tilde{a}_{ij}(\alpha) K_j^{[n-1]} + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\alpha) K_j^{[n]}, & t_{n-1} \leq t \leq T_i \\ \eta(t), & t_0 \leq t \leq t_{n-1}, \\ \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — общая предыстория, определяющая решение при $t \leq t_0$.

Мы выбираем методы с тремя этапами и разрешаем системы условий пятого и шестого порядков. Проведенное на нескольких задачах тестирование демонстрирует устойчивость полученных методов и их сходимость заявленных порядков пять и шесть.

Существует сразу несколько направлений для дальнейшего развития предложенных методов. Во-первых, нужна эффективная стартовая процедура (предположительно на основе одношагового метода достаточной точности). Во-вторых, требуется контроль локальной погрешности (предположительно вложенными методами более низких порядков). В-третьих, следует рассмотреть возможные стратегии изменения длины шага (либо с пересчётом локальной предыстории, либо с рассмотрением коэффициентов метода как функций соотношения длин двух шагов).

Литература

1. Maset S., Torelli L., Vermiglio R. Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2005. Vol. 15, № 8. P. 1203–1251.
2. Bellen A., Guglielmi N., Maset S., Zennaro M. Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations // *Acta Numerica*. 2009. P. 1–110.
3. Tuzov A. Two-step Runge-Kutta methods for retarded functional differential equations // *ArXiv preprint no. 1704.04619v1*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.04619>.

Еремин Алексей Сергеевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем, e-mail: a.eremin@spbu.ru.

Ягафаров Арслан Равилевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент магистратуры, e-mail: st069089@student.spbu.ru.

Именной указатель

К

Камгуиа F.Н..... 3

А

Абреимов М.П..... 100

Алиев Д.С..... 5

Аминов Ф.Б..... 5

Б

Баграмов Н.И..... 10

Болдырев И.А..... 12

Борщ Н.А..... 20, 21

В

Вековцев В.В..... 103

Волков И.Н..... 26

Г

Гарипова А.М..... 28

Гасратова Н.А..... 30, 32, 89

Гирдюк Д.В..... 66

Д

Давыденко Б.Н..... 36

Е

Елизарова М.В..... 102

Еремин А.С..... 125

И

Илларионов В.В..... 41, 110

К

Карпухин Д.Н..... 43

Катрахова А.А..... 56

Колпак Е.П..... 89,90,105,107

Козин А.А..... 45

Кожин А.С..... 12

Корчагин Д.С..... 46

Корчагина О.Р..... 48, 50, 76

Котина Е.Д..... 52, 66

Л

Ларин А.А..... 58, 61

Ларочкин П.В..... 66

М

Мордвин А.Н..... 117

Н

Нетесов Г.А..... 70

Николенко А.В..... 72

О

Облогин М.А..... 5

П

Парт А.А..... 48, 76

Перова И.В..... 78

Р

Радина В.Р..... 20

Антипов С.С..... 7

Антипова Е.С..... 8

Бочаров В.Ж..... 23

Бурковский В.Л..... 7,23,26,
43,70

Востриков М.Р..... 96, 98

Глазовская А.А..... 30

Голуб И.В..... 34

Гончарова А.Б..... 105

Ерин О.Л..... 37, 39

Крупнова К.С..... 52

Крыгин Д.С..... 58

Крысанов Н.А..... 61

Кузнецов С.А..... 5, 37, 39

Куксов Д.Ю..... 39, 54

Купцов В.С..... 56

Курбонов Р.С..... 82

Лиховидов Д.В..... 68, 110

Лялин К.Д..... 54

Николенко К.В..... 72

Никоненко А.П..... 74

Остроумов Е.Н..... 52, 66

Переславцева Н.С..... 20

Приходько И.В..... 80

Расторгуева А.И..... 82, 83

С	
Самсонов И.Ю.....	119, 121
Слюсарь Д.М.....	5
Силютин Е.В.....	85
Т	
Топпер А.М.....	92
Тран З.....	94
Трасковский Е.В.....	74
У	
Ушаков А.С.....	117
Ф	
Федий Г.Л.....	96, 98
Х	
Халтобина М.М.....	102
Ц	
Цымбал Д.В.....	110
Ш	
Шамолин М.В.....	112
Шаталов Д.А.....	48, 50
Щ	
Щепелев А.Ю.....	68
Ю	
Юрьева А.А.....	116
Я	
Ягафаров А.Р.....	125
Янкина К.Ю.....	85, 117
Синюков В.В.....	87
Столбовая М.В.....	89, 90
Требунских М.С.....	85
Трегубов А.О.....	82
Федюков А.А.....	100
Хоменко И.Е.....	103, 105, 107
Шашкин И.Д.....	32
Шелковой А.Н.....	115
Яньшин С.А.....	37

Оглавление

<i>Katguia F.H.</i> Recognition and tracking of cancerous neoplasm during ultrasound examination: a multimodal algorithm approach.....	3
<i>Алиев Д.С., Облогин М.А., Кузнецов С.А., Слюсарь Д.М., Аминов Ф.Б.</i> Расчёт коэффициента готовности технического устройства.....	5
<i>Антипов С.С., Бурковский В.Л.</i> Реализация процесса минимизации рисков на основе нейросетевой модели ARTMAP.....	7
<i>Антипова Е.С.</i> Задача разрешения конфликтов как задача комбинаторной оптимизации.....	8
<i>Баграмов Н.И.</i> Методы автоматизированного анализа рентгенограмм грудной клетки для диагностики пневмонии.....	10
<i>Болдырев И.А., Кожин А.С.</i> Оценка качества линейных квадратичных регуляторов для линейных интервальных динамических систем.....	12
<i>Борщ Н.А., Переславцева Н.С., Радина В.Р.</i> Моделирование зонной структуры наноклеточного кристалла на основе германия, допированного атомами меди.....	20
<i>Борщ Н.А.</i> Влияние базисного набора на результаты DFT-эксперимента по моделированию атомной структуры некоторых станнасференов.....	21
<i>Бочаров В.Ж., Бурковский В.Л.</i> Реализация функций автоматического управления робототехническим комплексом на основе машинного зрения.....	23
<i>Волков И.Н., Бурковский В.Л.</i> Интеллектуализация управления технологическим процессом производства асфальтобетонной смеси.....	26
<i>Гарипова А.М.</i> Цифровые алгоритмы оценки показателей активно развивающихся экономик.....	28
<i>Гасратова Н.А., Глазовская А.А.</i> Оценка потенциала доступности лечения некоторых заболеваний для различных регионов Казахстана.....	30
<i>Гасратова Н.А., Шашкин И.Д.</i> Об универсальных характеристиках физико-механических свойств полимера.....	32
<i>Голуб И.В.</i> Программируемые модели в задачах сетевой организации.....	34
<i>Давыденко Б.Н.</i> Тепловые карты в качественном анализе цитологических данных.....	36
<i>Ерин О.Л., Кузнецов С.А., Яньшин С.А.</i> Повышение мощности термоэлектрических генераторов.....	37
<i>Ерин О.Л., Куксов Д.Ю., Кузнецов С.А.</i> Термодинамические параметры компримированного воздуха газодобывающих станций.....	39
<i>Илларионов В.В.</i> Моделирование процесса трения подшипников скольжения с тонкослойными полимерными покрытиями, работающих в узлах автомобильной и специальной техники.....	41
<i>Карпухин Д.Н., Бурковский В.Л.</i> Интеллектуализация процессов анализа информации в рамках высоконадежных автономных объектов управления на основе объединения сенсорных данных.....	43
<i>Козин А.А.</i> Анализ и классификация новообразований молочной железы по VI-RADS.....	45
<i>Корчагин Д.С.</i> Построение контуров легких на планарных радионуклидных изображениях.....	46
<i>Корчагина О.Р., Парт А.А., Шаталов Д.А.</i> Математическая модель каскадно-последовательного течения многофазной среды.....	48
<i>Корчагина О.Р., Шаталов Д.А.</i> Устойчивость течения гидравлического потока в сетеподобной гидросети.....	50
<i>Крупнова К.С., Котина Е.Д., Остроумов Е.Н.</i> Анализ данных перфузионной томосцинтиграфии миокарда.....	52

<i>Куксов Д.Ю., Лялин К.Д.</i> Метод расчета мембранного разделения бинарной смеси.....	54
<i>Купцов В.С., Катрахова А.А.</i> О решение системы уравнений в частных производных в задаче вращения двух цилиндров в неньютоновском потоке несжимаемой жидкости.....	56
<i>Ларин А.А., Крыгин Д.С.</i> Об одной задаче на собственные значения для сингулярного эллиптического оператора, рассматриваемого в четверти шара.....	58
<i>Ларин А.А., Крысанов Н.А.</i> Об одной спектральной задаче для сингулярного эллиптического оператора с кулоновским потенциалом.....	61
<i>Ларочкин П.В., Котина Е.Д., Гирдюк Д.В., Остроумов Е.Н.</i> Сегментация миокарда правого желудочка сердца на изображениях перфузионной томосцинтиграфии миокарда с использованием нейронных сетей.....	66
<i>Лиховидов Д.В., Щепелев А.Ю.</i> Моделирование поступательного движения автомобиля.....	68
<i>Нетесов Г.А., Бурковский В.Л.</i> Структура программного обеспечения информационной системы управления высоконадежными автономными объектами.....	70
<i>Николенко А.В., Николенко К.В.</i> Математическая модель охлаждения тепловыделяющей поверхности с помощью теплообменных элементов на основе пористых структур.....	72
<i>Никоненко А.П., Трасковский Е.В.</i> Применение модели Блэка-Литтермана в алгоритмах.....	74
<i>Парт А.А., Корчагина О.Р.</i> Оптимизации гиперболической системы на сети.....	76
<i>Перова И.В.</i> Условия существования слабого решения начально-краевой задачи для математической модели волнового процесса.....	78
<i>Приходько И.В.</i> Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на сети.....	80
<i>Расторгуева А.И., Трегубов А.О., Курбонов Р.С.</i> Применение технологии дополненной реальности в моделировании аэродинамических процессов.....	82
<i>Расторгуева А.И.</i> Применение MS POWER POINT для математического моделирования в научно-исследовательских работах.....	83
<i>Силютин Е.В., Янкина К.Ю., Требунских М.С.</i> Снижение акустического загрязнения на приаэродромной территории.....	85
<i>Синюков В.В.</i> Оценка вариантов построения системы обеспечения с использованием обобщенной функции желательности.....	87
<i>Столбовая М.В., Гасратова Н.А., Колпак Е.П.</i> Математическая модель техногенного давления на растительность.....	89
<i>Столбовая М.В., Колпак Е.П.</i> Математическая модель ресурс-потребитель.....	90
<i>Топпер А.М.</i> Модель прогнозирования по числовым и категориальным данным... ..	92
<i>Тран З.</i> Устойчивость трехслойной разностной схемы для волновой системы с сетеподобным носителем.....	94
<i>Федий Г.Л., Востриков М.Р.</i> Математическая модель сигналов средств обнаружения.....	96
<i>Федий Г.Л., Востриков М.Р.</i> Математическое моделирование мониторинга энергитической обстановки в районе наблюдения.....	98
<i>Федюков А.А., Абреимов М.П.</i> Дифференциально-разностная система Навье-Стокса с пространственной переменной в сетеподобной области.....	100
<i>Халтобина М.М., Елизарова М.В.</i> Применение RMR-модели для анализа выживаемости клеток.....	102

<i>Хоменко И.Е., Вековцев В.В.</i> Построение адаптивной двусторонней оценки для улучшения качества прогностических моделей.....	103
<i>Хоменко И.Е., Гончарова А.Б., Колпак Е.П.</i> Модель восстановления техногенной пустоши.....	105
<i>Хоменко И.Е., Колпак Е.П.</i> Модель эпидемии сифилиса 1990-2020.....	107
<i>Цымбал Д.В., Илларионов В.В., Лиховидов Д.В.</i> Моделирование косозубых передач, применяемых в автомобильной и специальной технике.....	110
<i>Шамолин М.В.</i> Алгоритмы диагностирования в некоторых системах непрямого управления.....	112
<i>Шелковой А.Н.</i> Спектральные свойства дифференциального оператора одной краевой задачи с функциями ограниченной вариации.....	115
<i>Юрьева А.А.</i> Вопросы социализации и индивидуализации личности и образовательном процессе.....	116
<i>Янкина К.Ю., Мордвин А.Н., Ушаков А.С.</i> Метод расчета мембранного разделения многокомпонентной смеси.....	117
<i>Самсонов И.Ю.</i> Задача оптимального управления параболической системой.....	119
<i>Самсонов И.Ю.</i> особенности работы с модулем EXPRESS-SESSION для фреймворка EXPRESS в среде NODE.JS.....	121
<i>Еремин А.С., Ягафаров А.Р.</i> О двухшаговых методах Рунге — Кутты для функционально-дифференциальных уравнений.....	125
<i>Именной указатель.....</i>	127

Научное издание

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ПМТУКТ-2024)**

*Сборник трудов
Международной научной конференции
(Воронеж, 04–06 декабря 2024 г.)*

Издание публикуется в авторской редакции
Изготовление оригинала-макета: *А.А. Парт, О.Р. Корчагина, И.В. Приходько*
Дизайн обложки: *С.А. Кравец*

Подписано в печать 15.11.2024. Формат 60x84 1/16
Усл. печ. л. 5,0. Заказ 000. Тираж 500 экз.

ООО Издательство «Научная книга»
394077, Россия, г. Воронеж, ул. 60-й Армии, 25-120
<http://www.sbook.ru/>

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО «Цифровая полиграфия»
394036, Россия, г. Воронеж, ул. Куколкина, 6