Методы случайного поиска и машинного обучения для получения оптимальной по стоимости траектории дороги на рельефе местности

Рычков А. С.

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Научный руководитель: д. ф.-м. н. Аббасов М. Э.

8 декабря 2024 г.

Актуальность проблемы

Проблема построения оптимальной (в смысле стоимости) траектории дороги на рельефе местности играет важную роль при планировании транспортной сети, так как позволяет снизить временные и денежные затраты на проведение дорог между населёнными пунктами.

Однако, основная часть существующих моделей не учитывает влияния рельефа местности на цену строительства дороги. В данной работе строится модель, использующая информацию о рельефе при формировании функционала стоимости, после чего задача сводится к простейшей основной задаче вариационного исчисления. К полученной таким образом проблеме применяются методы, основанные на идеях локального поиска.

Постановка задачи

Введем некоторые основные предположения, которые позволят построить модель:

- Строительные материалы доставляются из начальной точки траектории
- Доставка строительных материалов возможна исключительно по уже построенной части дороги
- Технология укладки полотна неизменна на всём протяжении траектории
- Общая стоимость складывается из стоимости укладки дорожного полотна и стоимости доставки материалов
- Разница в высотах присутствует, но влияет на цену укладки несущественно

Постановка задачи

Стоимость доставки

α - положительная константа, равная стоимости транспортировки количества материалов, необходимого для укладки участка дороги единичной длины, в пересчете на единицу длины дорожного полотна.

Стоимость укладки

$\beta(x, y)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, значение которой равно стоимости укладки участка дороги единичной длины с началом в данной точке.

Постановка задачи

Введём две точки на плоскости: $A(0,0)$ и $B(x_b, y_b)$. Траекторию дороги будем задавать функцией $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \in C^{(1)}([0, x_b])$, которая удовлетворяет условиям

$$y(0) = 0, \quad y(x_b) = y_b.$$

Как показано в [1], стоимость построения дороги при выполнении ранее введённых предположений задается значением интегрального функционала

$$J(y) = \frac{\alpha}{2}\left(\int_0^{x_b} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx\right)^2 + \int_0^{x_b} \beta(x,y)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx,$$

где $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Теперь введём равномерную прямоугольную сетку с $(n+1)^2$ узлами на $[0, x_a] \times [0, x_b]$ и будем рассматривать кусочно-линейные траектории с точками излома в узлах сетки для сведения задачи вариационного исчисления к задаче поиска пути на графе.

Метод муравьиной колонии

- Начнем с того, что поместим N агентов («муравьев») в случайно выбранные узлы сетки. Каждому ребру будет поставлено в соответствие число, условно показывающее общий вклад этого ребра в формирование наилучшей на данный момент траектории.
- Теперь начнём итеративный процесс повторения случайного поиска пути от начальной точки к конечной, причем вероятности перехода будем задавать следующим образом:

$$P_{u,v} = \frac{\tau_{u,v}^{q}\eta_{u,v}^{p}}{\sum_{k,m}\tau_{k,m}^{q}\eta_{k,m}^{p}}.$$

- После каждой итерации будем переприсваивать значения меток по следующему правилу: $\eta'_{u,v} = (1-\xi)\eta_{u,v} + \sum_{k=1}^{N}\Delta\eta_{u,v}^{k}$.

Метод симуляции отжига

- Будем рассматривать траектории как состояния в некотором дискретном пространстве S и переходить из состояния в состояния по некоторому правилу, основанному на идее отжига.
- Введём функцию вероятностей перехода $P(s_i, \overline{s_i}, T_i)$, где s_i – текущее состояние, $\overline{s_i}$ – кандидат для следующего состояния, T_i – некоторое вещественное значение, взятое из монотонно убывающей к нулю последовательности.
- Чтобы избежать полного перебора всех элементов пространства состояний при формировании множества кандидатов для следующего состояния, введём бинарное отношение *соседства* следующим образом: будем называть две траектории соседними, если и только если они отличаются не более чем по двум рёбрам.

Метод симуляции отжига

Будем использовать следующие последовательности $\{T_i\}$:

- $T_i^{(1)} = \frac{1}{i^2}$
- $T_i^{(2)} = e^{-i}$
- $T_i^{(3)} = \begin{cases} \frac{N-i}{k}, & i < N \\ 0 \end{cases}$, где N – достаточно большое число
- $T_i^{(4)} = \frac{1}{e^i+1}$

В качестве функций вероятностей перехода будем использовать:

- $\tilde{P}^{(1)}(s_i, \overline{s_i}, T_i) = \begin{cases} 1, & f(\overline{s_i}) > f(s_i) \\ exp(\frac{f(\overline{s_i})-f(s_i)}{kT_i}) \end{cases}$
- $\tilde{P}^{(2)}(s_i, \overline{s_i}, T_i) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{kT_i}, & f(\overline{s_i}) > f(s_i) \\ \frac{1}{kT_i} \end{cases}$

Чтобы получить значения вероятности, поделим значение $\tilde{P}^{(i)}$ на число соседних для s_i состояний. Во всех приведённых формулах k – гиперпараметр.

Квантовый отжиг

- Данная модификация основана на модели элементарной частицы и позволяет совершать «скачки»в пространстве состояний для выхода из окрестностей локальных экстремумов.
- Вероятности перехода будут считаться следующим образом: $\tilde{P}(s_i, \overline{s_i}, \Gamma) = \begin{cases} 1, & f(s_i) > f(\overline{s_i}) \\ e^{-\frac{\sqrt{\Delta} w}{k\Gamma}} & \end{cases}$, где s_i – текущее состояние, $\overline{s_i}$ – кандидат для следующего состояния, k – константа, w – ширина окрестности, Δ – колебание целевой функции на данной окрестности и Γ – число из вещественной монотонно убывающей к нулю последовательности.
- В случае, когда локальный минимум достаточно глубокий, алгоритм с высокой вероятностью будет его избегать [2].

Стохастическое туннелирование

Чтобы избежать попадания в неглубокий локальный минимум на поздних итерациях, применим метод нелинейного преобразования исходной функции. Для этого случайным образом выберем несколько состояний, близких к текущему и посчитаем наилучшее значение целевой функции среди них, пусть это будет f_0.

Тогда новая целевая фукнция будет получена из старой по правилу $f^*(\cdot) = 1 - e^{-\gamma(f(\cdot)-f_0)}$, где γ – произвольная константа. После такого преобразования положения локальных минимумов сохранятся, тогда как значения целевой функции в них уменьшатся, что позволит алгоритму квантового отжига лучше их избегать.

Иллюстративный пример

Рассмотрим следующие значения параметров:

- $\alpha = 0.1; \beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y$
- $x_b = y_b = 1$
- $\mathrm{n} = 25$

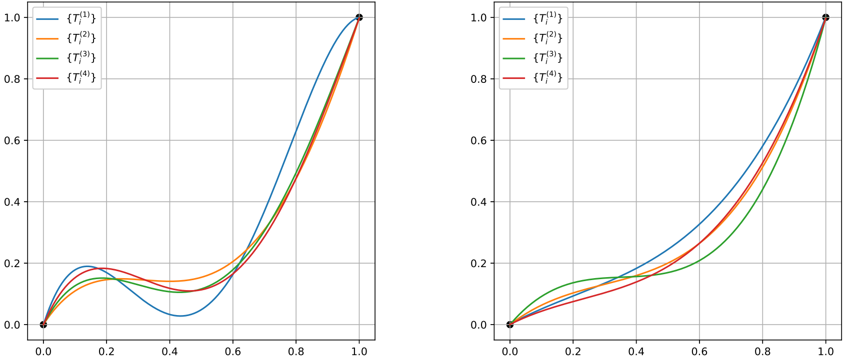

Рис. 1: Сравнение результирующих кривых для метода отжига при различных функциях вероятности перехода и последовательностях $\{T_i\}$: $\tilde{P}^{(1)}$ (слева) и $\tilde{P}^{(2)}$ (справа)

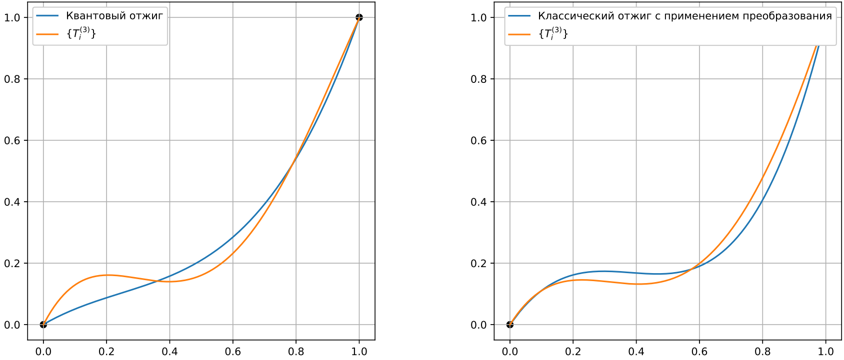

Рис. 2: Сравнение результирующих кривых для квантового отжига с классическим отжигом (слева) и квантовым отжигом со стохастическим туннелированием (справа)

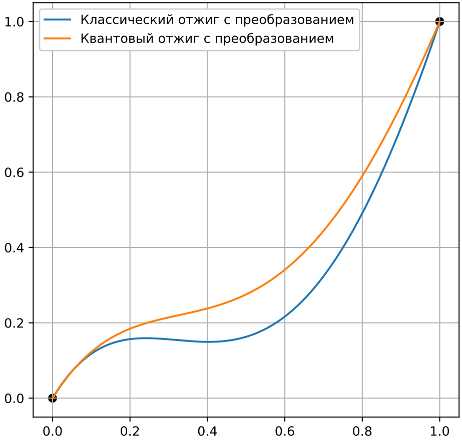

Рис. 3: Сравненине результирующих кривых при применении стохастического туннелирования для классического отжига и квантового отжига

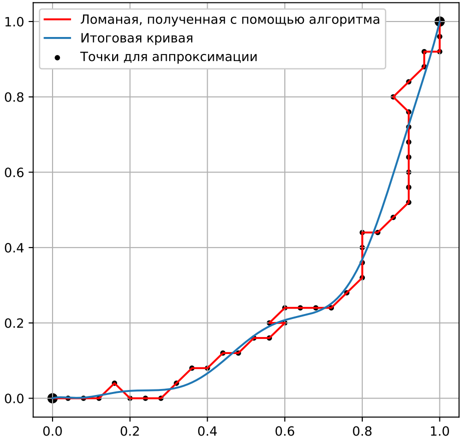

Рис. 4: Сравнение результирующих кривых для квантового отжига со стохастическим туннелированием и метода муравьиной колонии

Список основных источников

1. Abbasov M. E., Sharlay A. S. Searching for the cost-optimal road trajectory on the relief of the terrain. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. 2021. vol. 17, iss. 1, pp. 4–17.

2. Černý V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. Journal of Optimization Theory and Applications, 1985. vol. 45, pp. 41—51.

3. Wenzel W., Hamache K. A Stochastic tunneling approach for global minimization. Physical Review Letters, 1999. vol. 82, iss. 15, pp. 3003–3007.

4. Apolloni, B., Carvalho, C., de Falco, D. Quantum stochastic optimization. Stochastic Pro-cesses and their Applications, 1989. vol. 33, iss. 2, pp. 233–244.

3. Kazharov A. A., Kureychik V. M. Ant colony algorithms for solving transporting problems. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Control theory and systems. 2010, iss. 1, pp 32–45.