

УДК 539.376

## РАЗВИТИЕ КОНЦЕПЦИИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

© 2024 г. Р. Р. Сaitова<sup>1,\*</sup>, Ф. М. Бородич<sup>2,\*\*</sup>, А. Р. Арутюнян<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>Чунцинский университет, Чунцин, Китай

\*e-mail: rigastr@yandex.ru

\*\*e-mail: borodichfm@cqu.edu.cn

\*\*\*e-mail: a.arutyunyan@spbu.ru

Поступила в редакцию 06.12.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 01.02.2024 г.

В обзоре освещено современное состояние исследований в области механики континуального разрушения и механики рассеянного разрушения, включая основные подходы к постановке задач, конкретные результаты и области их практического использования. Статья ориентирована на специалистов по ползучести, длительной прочности и механике разрушений, а также может быть интересна исследователям, занимающимся вопросами прочности и разрушения материалов и конструкций в условиях повышенных температур.

*Ключевые слова:* ползучесть, длительная прочность, поврежденность, механика разрушений, параметр поврежденности, параметр сплошности

DOI: 10.31857/S0032823524020084 EDN: XUGRQI

**1. Введение.** Ю. Н. Работнов был выдающимся ученым, внесшим вклад в различные области механики, включая теорию ползучести [1], механику разрушения [2] и наследственную теорию упругости [3]. В данном обзоре рассматривается развитие концепции поврежденности.

Впервые понятие поврежденности материала  $\omega$  было представлено Ю. Н. Работновым на научном семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, а через пару лет им была опубликована статья, приводившая примеры использования этой концепции в теории ползучести металлов [4]. Практически одновременно Л. М. Качанов ввел понятие параметра сплошности материала  $\psi$  [5]. Учитывая, что  $\omega$  лежит в интервале  $0 \leq \omega \leq 1$ , а  $\psi$  может принимать значения в диапазоне  $1 \geq \psi \geq 0$ , то нетрудно видеть, что  $\omega = 1 - \psi$ . Впоследствии обе концепции и их приложения в механике материалов обсуждались в монографиях и учебниках авторов [1–3, 6, 7].

В качестве простейшего примера задачи с параметром поврежденности  $\omega$  рассмотрим одноосное растяжение силой  $P$  поликристаллического стержня площади  $F$  [6]. Развитие межзеренных микро- и нанометровых трещин эквивалентно уменьшению эффективной площади поперечного сечения образца. Поэтому эффективное напряжение  $\tilde{\sigma}$ , вычисляемое как отношение растягивающей силы  $P$  к эффективной площади поперечного сечения, не равно номинальному напряже-

нию  $\sigma = P / F$ , а определяется по формуле  $\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - \omega)$ . Когда значение параметра поврежденности  $\omega$  достигает единицы, эффективная площадь стремится к нулю, и образец разрушается.

Таким образом, здесь параметр  $\omega$  вводится отношением  $\omega = F_T / F_0$  и характеризует степень уменьшения площади поперечного сечения, где  $F_T$  — это площадь трещин, располагающихся к моменту времени  $t$  в поперечном сечении стержня, а  $F_0$  — начальная площадь поперечного сечения.

К настоящему времени концепция поврежденности получила дальнейшее развитие, является основой механики континуального разрушения и механики рассеянного разрушения, а также обсуждается в ряде специальных монографий и справочников [8–10].

Данная статья содержит обзор работ, посвященных развитию концепции поврежденности в механике материалов и близких областях, а также многочисленным приложениям этой концепции. Основное внимание в ней уделено анализу результатов, полученных в СССР и России.

**2. Скалярное и тензорное определение поврежденности.** В механическом смысле повреждения твердых тел проявляются посредством образования и роста микропустот или микротрещин, которые представляют собой разрывы в среде, считающейся непрерывной в более крупном масштабе.

*2.1. Скалярный параметр поврежденности.* В общем случае возникающие повреждения можно разделить на объемные дефекты, такие как микрополости, и поверхностные дефекты, такие как микротрещины. В связи с этим вводятся различные определения переменной поврежденности. Для их описания удобно ввести понятие представительного элемента объема (ПЭО), в котором все свойства представлены усредненными переменными.

При рассмотрении только пластического повреждения параметр можно определить как объемную плотность микропустот

$$\omega_V = \frac{\delta V_{\text{пустот}}}{\delta V_{\text{пэо}}} \quad (2.1)$$

В более широком смысле, если возможно одновременное существование в материале микрополостей и микротрещин, переменная поврежденности физически определяется поверхностной плотностью микротрещин и сечений микропустот, лежащих в плоскости, пересекающей ПЭО сечения  $\delta S$  (рис. 1). Для плоскости с нормалью  $\vec{n}$ , где эта плотность максимальна, имеем

$$\omega_{(\vec{n})} = \frac{\delta S_{\omega}}{\delta S} \quad (2.2)$$

Если повреждение изотропное, то скалярная переменная  $\omega_{(\vec{n})}$  не зависит от нормали и является скаляром [5], и можно записать

$$\omega = \frac{\delta S_{\omega}}{\delta S} \quad (2.3)$$

Такое определение удобно использовать для случая одномерных задач, а также для простой оценки приблизительного повреждения в трехмерных задачах (особенно при пропорциональной нагрузке).

Определяющие уравнения деформации и повреждения характеризуют материал без объемных или поверхностных неоднородностей. Рассмотрим эффективное напряжение, действующее на сопротивляющуюся область  $\delta S = \delta S - \delta S_{\omega}$  (рис. 1).

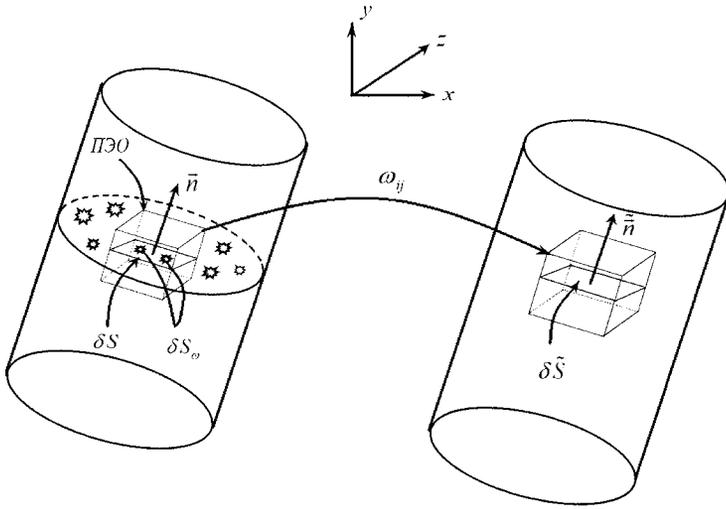


Рис. 1. Физическая поврежденность и математическая непрерывная поврежденность.

В одноосном случае изотропного разрушения, без эффекта закрытия микротрещин при сжатии, это среднее значение микронапряжений просто задается силовым равновесием [11]:

$$\tilde{\sigma} \delta \tilde{S} = \sigma \delta S$$

Записывая (2.3) как

$$\omega = \frac{\delta S_{\omega}}{\delta S} = \frac{\delta S - \delta \tilde{S}}{\delta S}, \quad (2.4)$$

получим

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.5)$$

В многоосном случае изотропного повреждения все компоненты напряжений действуют на одну и ту же эффективную площадь. Аналогично одномерному случаю, эффективный тензор напряжений представляется в следующем виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \omega} \quad (2.6)$$

2.2. Тензорный параметр поврежденности. Для случая анизотропного повреждения гораздо сложнее обеспечить хорошее физическое представление, а также совместимость с термодинамикой. Фактически эффективное напряжение с представлением тензора повреждения второго порядка является аппроксимацией точного эффективного напряжения, выведенного из общего представления повреждения с помощью тензора  $\omega$  четвертого порядка [12–15]. Это эффективное напряжение определяется так же, как и ранее, но здесь через проекцию вектора напряжения на опорный вектор  $\vec{v}$  (рис. 2):

$$v_i \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{n}_j \delta \tilde{S} = v_i \sigma_{ij} n_j \delta S \quad (2.7)$$

или

$$\tilde{\sigma}_{ij} (I_{ijkl} - \omega_{ijkl}) v_k n_l \delta S = \sigma_{kl} v_k n_l \delta S \quad (2.8)$$

Фактически наиболее общим для переменной повреждения является ее представление тензором четвертого порядка, что можно показать несколькими способами [12–15]. Такой тензор сложен в использовании и не нужен для случая повреждений, вызванных мезо- или микропластичностью.

Как и выше, рассмотрим область плоскости повреждения  $\delta S$  с нормалью  $\vec{n}$  и опорным вектором  $\vec{v}$ , такую, что тензор  $v_i n_j \delta S$  определяет геометрическую опорную конфигурацию. Механика континуального разрушения определяет эффективную непрерывную конфигурацию с помощью модифицированной области  $\delta \tilde{S}$  и модифицированной нормали  $\vec{\tilde{n}}$ , как показано на рис. 2.

Повреждение  $\underline{\omega}$  представляет собой оператор, преобразующий тензор второго порядка  $v_i n_j \delta S$  эталонной конфигурации в тензор эффективной конфигурации  $\tilde{v}_i \tilde{n}_j \delta \tilde{S}$ . Это тензор четвертого порядка, где

$$(I_{ijkl} - \omega_{ijkl}) v_k n_l \delta S = v_i \tilde{n}_j \delta \tilde{S} \quad (2.9)$$

со следующими симметриями:  $\omega_{ijkl} = \omega_{jikl} = \omega_{klij} = \omega_{jilk}$ .

### 3. Применение концепции поврежденности при исследовании ползучести металлов.

Описывая разрушение металлов вследствие ползучести, обычно выделяют два основных механизма разрушения: вязкий и хрупкий. Вязкое разрушение наступает в результате ползучести, характеризующейся большими сдвиговыми деформациями, хрупкое же разрушение связано с возникновением микропор и микротрещин и их постепенным слиянием. Под воздействием относительно малых напряжений и высоких температур (близких к половине температуры плавления) в металлических материалах накапливается межкристаллитная пористость, способствующая переходу материала в хрупкое состояние.

Высокотемпературная ползучесть металлов характерна тем, что в теле наряду с накоплением необратимых деформаций ползучести происходит образование и развитие дефектов (пор, микро- и макротрещин), приводящее к разрушению. Возникающая при высокотемпературной ползучести металлов поврежденность приводит к изменению различных механических и физических характеристик материалов, в частности, происходит: уменьшение модуля упругости; уменьшение предела текучести до или после закалки; уменьшение твердости; увеличение скорости деформации ползучести; уменьшение скорости прохождения ультразвуковых волн; уменьшение плотности материала и увеличение электрического сопротивления.

Одна из основных проблем при оценке прочности конструкций, работающих в условиях высоких температур, заключается в определении длительности работы этих конструкций до разрушения. Тогда поврежденность зависит от времени  $t$ , и параметр  $\omega(t)$  характеризует степень поврежденности материала, накапливающейся в процессе ползучести.

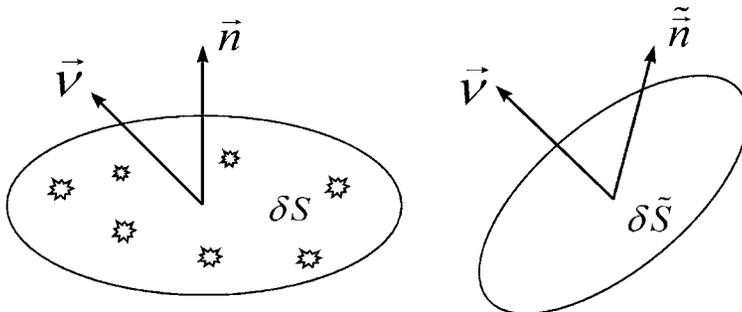


Рис. 2. Эталонные и эффективные конфигурации.

Работнов [1] впервые использовал этот параметр для аналитического описания разупрочняющейся стадии процесса ползучести, завершающейся разрушением. В качестве начала отсчета времени принимается момент приложения внешней нагрузки  $t$  ( $t = 0$ ). Согласно [4, 5], в начале процесса ползучести принимается условие  $\omega(0) = 0$ , разрушению образца при  $t = t^*$  соответствует значение  $\omega^* = \omega(t^*) = 1$ . Для описания ползучести и длительной прочности конструкционных металлов Работнов [11] предложил использовать уравнение механического состояния, в которое входят несколько структурных параметров, а также систему кинетических уравнений для их определения. Впоследствии этот метод позволил описать многие особенности процесса ползучести вплоть до разрушения. Различные варианты определяющих соотношений теории ползучести со структурными параметрами предложены в работах многих отечественных и зарубежных ученых (в частности [8, 16–27]). Более подробно полученные результаты описаны в следующем разделе.

#### 4. Концепция рассеянной поврежденности и разрушения.

*4.1. Скалярный случай.* Формальное введение параметра поврежденности не может решить проблему прогнозирования процесса ползучести и характеристик длительности разрушения. В большинстве теоретических исследований [4, 5] введение параметра поврежденности  $\omega$  имеет чисто феноменологический характер, при этом связь параметра  $\omega$  с фактическим изменением структуры металла не рассматривается. Однако наряду с ними известно немало экспериментальных работ [28–32], в которых параметр поврежденности связывается с реальным нарушением структуры материала: исследование структуры обычно проводится металлографическими или физическими методами. В некоторых работах исследовалась взаимосвязь между степенью поврежденности и различными физическими величинами: скоростью звука, электрическим сопротивлением, модулем упругости и др. Однако наиболее распространенными можно считать работы, в которых изучаются количество, размеры и распределение пор в процессе ползучести.

Варианты кинетической теории со скалярным параметром поврежденности актуальны и в наше время, поскольку использование скалярного параметра поврежденности позволяет моделировать поведение металлов наиболее простым способом.

Так, относительный размер пор или необратимое изменение объема (разрыхление по терминологии В. В. Новожилова) рассматривалось в [33]. Предложены всевозможные типы кинетических уравнений при моделировании длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния.

В работах О. В. Соснина и его учеников [34–38] предложен энергетический подход для описания изучаемых явлений. В качестве скалярного параметра поврежденности  $\omega$  принята величина рассеянной энергии  $A(t)$ , в качестве условия длительной

прочности рассматривается равенство  $A(t^*) = A_* = \text{const}$ , где  $A_* = \int_0^{t^*} \sigma_{ij} \eta_{ij} dt$  –

рассеянная энергия деформаций ползучести в момент разрушения  $t^*$ , которая для многих материалов является характеристикой и сохраняет свое значение в широком диапазоне температур,  $\eta$  – скорость деформаций ползучести,  $\sigma$  – напряжение [34, 35]. Этот подход позволяет сформулировать постановку проблемы для стационарного и нестационарного пространственных напряженных состояний. В данных работах показано хорошее соответствие экспериментальных и теоретических кривых ползучести вплоть до разрушения. Одним из преимуществ энергетического варианта теории ползучести является совмещение двух следующих задач: нахождение напряженно-деформированного состояния и определение долговечности конструкций. Энергетический подход обсуждался и развивался также в работах других ученых [39, 40].

В статье Д. А. Кулагина и А. М. Локощенко [41] для рассмотрения исследуемого явления авторами предложена вероятностная теория. Предложен новый подход к опи-

санию деформирования и длительного разрушения металлов при одновременном воздействии внешних механических нагрузок при сложном напряженном состоянии в агрессивной окружающей среде. Для моделирования этого воздействия используется структурно-феноменологический подход, при котором материал представляется состоящим из большого количества структурных элементов. Для описания явления длительной прочности вводится понятие вероятности разрушения отдельных элементов, на основании которого выводится кинетическое уравнение для плотности неразрушенных структурных элементов.

В работах F. A. Leckie с соавторами [42–44] проведены исследования, в которых определялись нижняя и верхняя оценки времени до разрушения, устанавливалась связь феноменологического понятия поврежденности с параметрами структуры. При анализе структуры в [44] использовали два параметра: плотность пор и их средний объем.

В ряде статей особенности рассматриваемых явлений моделируются путем введения нескольких скалярных кинетических параметров. Авторы этих исследований рассматривают в качестве кинетических параметров различные характеристики эволюции структуры металлов в процессе ползучести [45, 46]. При моделировании ползучести вплоть до разрушения Q. Xu и D. R. Nayhurst использовали кинетическую теорию с двумя скалярными параметрами, один из которых необходим для описания неустановившейся ползучести, а другой – для описания ускоряющейся стадии ползучести [45]. Z. L. Kowalewski с соавторами рассмотрели обобщение теории Работнова с тремя скалярными параметрами поврежденности [46].

А. Р. Ржаницын [47] вместо общепринятого скалярного параметра поврежденности  $\omega$  ввел скалярный параметр объективной прочности  $r$ , характеризующий мгновенную прочность материала в заданный момент времени. Предполагалось, что параметр  $r$  удовлетворяет некоторому кинетическому уравнению, связывающему скорость изменения прочности с самой прочностью и эквивалентным напряжением  $\sigma_e$ , зависящим от  $\sigma_{\max}$  – максимального главного напряжения и  $\sigma_{ii}$  – интенсивности напряжений. Также было показано, что параметры  $\omega$  и  $r$  связаны конечным соотношением.

J. Lemaître с соавторами изучили накопление повреждений в теле с использованием скалярных параметров состояния в рамках термодинамики необратимых процессов, при этом основное внимание уделялось взаимодействию процессов ползучести и усталости [12, 48].

С. А. Шестериков с соавторами применили подход Работнова для учета дробной модели ползучести и получили условие длительного разрушения, при котором предельное значение параметра поврежденности меньше единицы [49].

M. Chrzanowski и J. Madej [50] в случае плоского напряженного состояния при построении изохорных кривых длительной прочности использовали кинетическое уравнение, с помощью которого можно оценить прочность при кратковременном нагружении и остаточную кратковременную прочность в произвольный момент времени.

S. Murakami и M. Mizuno [51] обобщили теорию Работнова для учета разрыхления металлов при нейтронном облучении и описали ползучесть нержавеющей стали при различных условиях облучения и переменных напряжениях.

В работе [52] В. F. Dyson и D. Taplin за меру поврежденности  $\omega$  принимали длину трещины, а за время разрушения  $t^*$  – время образования трещины длиной в одно зерно. В. F. Dyson и M. S. Loveday [53] при анализе результатов испытаний цилиндрических образцов с выточками показали, что при малых напряжениях межзеренные трещины возникают в окрестности шейки и распространяются к центру образца, при больших напряжениях распространение трещин происходит в противоположном направлении.

В ряде работ не только приведены результаты феноменологического исследования ползучести и длительной прочности металлов, но и выполнен анализ изменения структуры металлов в процессе ползучести [53, 54].

В статьях [14, 54–57] приведены результаты исследований трубчатых образцов при постоянном растягивающем нормальном напряжении и знакопеременном касательном напряжении в условиях ползучести вплоть до разрушения.

F. Trivaudey и P. Delobelle провели статический анализ ориентаций трещин в разрушенных образцах [54, 56]. В качестве предельного значения параметра поврежденности при растяжении принимается отношение суммы длин всех поперечных трещин на фиксированной площади образца к сумме длин всех поперечных межзеренных границ на той же площади. В [54] показано, что вблизи области места разрушения значение  $\omega^* \approx 0.3$ . V. Tvergaard [55] при анализе влияния вида напряженного состояния на длительную прочность поликристаллов учитывал диффузионный рост пор на границах зерен и скольжение вдоль границ зерен. В [57] W. Trąpczyński и D. R. Hayhurst рассматривают феноменологическую модель ползучести при сложном напряженном состоянии. Описаны ползучесть и длительная прочность тонкостенных трубок, которые испытывались в условиях сложного напряженного состояния (растягивающее напряжение во время каждого опыта оставалось постоянным, касательное напряжение в некоторый момент времени меняло знак). В работе F. A. Leckie и E. T. Onat [14] рассматривается анизотропное распределение пор в деформируемом элементе.

Л. Б. Гецов в [58] предложил кинетическое уравнение деформационного типа, состоящее из четырех слагаемых, каждое из которых учитывает повреждения и деформации разного типа. Это уравнение позволяет определять условия разрушения при произвольной программе нагружения и нагрева. Показано, что результаты опытов, проведенных разными авторами в условиях различных программ нагружения, корректно описываются в рамках частных случаев предложенного критерия длительной прочности.

Т. Maruyama и Т. Nosaka [59] измеряли поврежденность материала на основе микрощлифов с помощью использования прозрачной эталонной квадратной сетки; при этом рассматривалось отношение количества узлов, попадающих в область пор и микротрещин, к общему количеству узлов в сетке.

В некоторых статьях (Р. И. Нигматулин и Н. Н. Холин [60], Y. Estrin и Н. Mecking [61]) в качестве структурного параметра анализируется плотность дислокаций.

В работах А. М. Локощенко [62, 63] рассмотрен метод измерения структурных изменений в металле непосредственно при высокотемпературной ползучести, без охлаждения и выгрузки образцов. Предлагается проводить измерения электрического сопротивления образцов при растяжении и сравнивать эти данные с результатами измерения длины образцов при одинаковых значениях времени.

Многие исследователи объясняют протекание процесса ползучести накоплением пор и образованием микротрещин (А. J. Perry [64], Н. Грант [65] и др.). В результате объединения мелких разобщенных трещин возникает разрушающая магистральная трещина. Поврежденность материала можно оценить, как долю суммарного объема пор и трещин в единице объема. Т. Г. Березина и И. И. Трунин [66] пришли к выводу, что поврежденность, полученная указанным способом, практически такая же, как и поврежденность, определенная с помощью измерения плотности.

М. Horiguchi и Т. Kawasaki [67] в качестве  $\omega$  рассматривали размер одиночной поры, а в качестве  $t^*$  — время достижения этим размером критической величины. Н. Riedel [68] за меру поврежденности  $\omega$  принимал отношение радиуса поры к половине расстояния между порами, за  $t^*$  — время, при котором происходит слияние пор.

В работе [69] под  $\omega$  понимается отношение суммарной длины поперечных границ между зернами, занятых порами и микротрещинами, к общей длине всех поперечных межзеренных границ.

Многие авторы [28–32] считают плотность материала наиболее представительной характеристикой пористости и поврежденности. Исследования по изменению плотности в условиях ползучести были представлены во многих публикациях второй половины XX века. Возникновение пор по результатам измерения плотности было обнаружено на самом начальном этапе ползучести. Более того, было показано [30], что залечивание пор наложением гидростатического давления приводит к резкому торможению деформации ползучести и значительному увеличению времени до разрушения. Эти опыты убедительно показали, что разрыхление (необратимое изменение плотности) является основным фактором поврежденности, определяющим работоспособность металлических материалов в процессе ползучести. Дальнейшие исследования [28], в которых процедура наложения гидростатического давления в процессе ползучести повторялась многократно, полностью подтвердили выводы работы [30].

Пористость является основной характеристикой поврежденности, а в качестве интегральной меры пористости принимается изменение плотности вследствие разрыхления материала. Имеющиеся в литературе результаты, полученные для различных металлов и сплавов, указывают на существование единой закономерности накопления разрыхления [31]. Наиболее благоприятная ситуация для разрыхления создается напряжениями, близкими к пределу текучести, когда взаимосвязанные процессы зернограницного проскальзывания и диффузии вакансий создают максимальный эффект для разрыхления. В работе [28] отмечается особая роль предела текучести в процессах пластической деформации и разрушения, анализ которых проводится с позиции фазовых переходов. Показано, что при достижении напряжений, равных пределу текучести, в сплавах происходит фазовый переход в процессе деформирования.

Р. А. Арутюнян [31] в результате детальных исследований на основе анализа ряда экспериментальных данных показал немонотонную зависимость функций разрыхления от напряжения и температуры. С помощью предложенного единого критерия вязко-хрупкого разрушения были описаны все области кривой длительной прочности.

В ряде работ [31, 32, 70–75] описано уменьшение плотности металлов в процессе испытаний на ползучесть. Оно вызывается локальными разрушениями вследствие концентрации напряжений у включений и вблизи стыка трех зерен. Измерение плотности производится, в частности, с помощью метода гидростатического взвешивания (на воздухе и в жидкости). Кинетическое уравнение для определения разрыхления выводится из условия сохранения массы. В. И. Куманин и др. [76] считают, что разрушение материала наступает при накоплении критического количества микроповреждений, которое они определяют по данным измерения плотности и микротвердости. G. Belloni и G. Bernasconi [77] привели подробный обзор литературных данных по исследованию зависимости относительного изменения плотности от деформации, напряжения, температуры и времени.

В монографии Л. Р. Ботвиной [78] основное внимание уделено стадии накопления несплошностей в зоне локализации разрушения и взаимосвязи накопленной поврежденности с изменением акустических свойств материала. Для описания кинетики разрушения под действием различных факторов использована теория фазовых переходов и предложен единый подход к анализу кинетических процессов в разных средах и на различных масштабных уровнях.

В монографии Й. Чадека [79] дано математическое описание рассматриваемых процессов и проанализирован физический смысл параметров уравнений. Рассмотрены результаты изучения дефектной структуры, формирующейся при ползучести, ее роли в подготовке и развитии процессов разрушения. Обсуждены различные теоретические модели и механизмы ползучести.

В работах Р. А. Арутюняна, А. Р. Арутюняна, Р. Р. Саитовой используются физико-механические методы для описания деградационных процессов металлических материалов при длительных температурно-силовых воздействиях [80–84]. Работоспособность металлов определяется процессами поврежденности, которые способствуют охрупчиванию материала и возникновению эффекта тепловой хрупкости. Физическими методами исследований установлено, что явление тепловой хрупкости свойственно всем металлическим материалам и связано с процессами накопления пористости по границам зерен по механизму диффузии вакансий и зернограничного проскальзывания. В работах эти процессы рассматриваются феноменологически, методами механики рассеянного повреждения и разрушения. При формулировке уравнений ползучести и критерия длительной прочности в области хрупких разрушений учтено условие сжимаемости и сформулированы реологические соотношения ползучести и критерии длительной прочности, основанные на законе сохранения массы. В этом случае в качестве параметра поврежденности рассмотрено необратимое изменение плотности (разрыхление) материала.

*4.2. Векторный случай.* Очевидно, что наиболее простые соотношения имеют место при использовании скалярного параметра поврежденности. Однако дефекты, определяющие накопление повреждений (полости, микропоры, микротрещины), обусловлены нагрузками, под действием которых эти дефекты возникают. Как известно, микротрещины обычно развиваются приблизительно перпендикулярно максимальному из главных напряжений. Увеличение этих микротрещин приводит к разрушению межзеренных связей в поликристалле, в результате чего происходит разрушение. Для описания такого типа разрушений недостаточно использовать скалярный параметр поврежденности, необходимо применять векторный или тензорный параметры поврежденности. Применение этого подхода, как правило, приводит к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

В первую очередь среди ученых, работавших в данном направлении, следует отметить Л. М. Качанова [85–87], который предложил учитывать, как величину повреждения  $\omega$ , так и его направление. Скорость накопления поврежденности в каждой плоскости зависит от нормального напряжения, действующего в этой плоскости; локальное разрушение происходит, когда величина  $\omega$  в каком-либо направлении достигает предельного значения; полное разрушение наступает после прохождения фронта разрушения через рассматриваемый объем.

Также в разработке этого направления принимали участие И. В. Наместникова и С. А. Шестериков [88]. Ими был предложен следующий подход. В качестве параметра

поврежденности принимается величина  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ , где величины  $\omega_i$  связаны с главными напряжениями  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  следующими зависимостями:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \begin{cases} f(\sigma_i, \omega_i), & \sigma_i > 0 \\ 0, & \sigma_i \leq 0 \end{cases}$$

Эти зависимости описывают накопление проекций вектора поврежденности на направления главных напряжений в процессе ползучести. Величина вектора поврежденности удовлетворяет следующим условиям:  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega(t^*) = 1$ .

В работе [89] В. А. Пелешко задает поврежденность для каждого направления в векторном пространстве напряжений. С. L. Chow, X. J. Yang, E. Chu [90] с помощью векторного подхода описали явление анизотропной поврежденности.

В цикле работ А. М. Локощенко с В. В. Назаровым [91–95] выполнено обобщение модели, предложенной в статье [88]. С этой целью вводится коэффициент прочностной анизотропии материала  $\alpha_0$  и учитываются компоненты вектора поврежденности, накапливаемые в процессе кратковременного квазистатического нагружения,

а также учитывается взаимная зависимость компонент  $\omega$ . Коэффициент прочностной анизотропии  $\alpha_0$  определяется для трубчатых образцов как отношение осевого и поперечного нормальных напряжений, приводящих при растяжении в этих направлениях к разрушению образца за одно и то же время  $t^*$ .

В [96] получен анализ серии испытаний с использованием различных критериев длительной прочности и приведены значения  $\alpha_0$ . Впервые экспериментально получено [91] и впоследствии с помощью предложенной модели [95] определено время до разрушения при стационарном сложном напряженном состоянии при различных программах кратковременного нагружения  $t^*$ . Предложен ряд кинетических уравнений, описывающих этот результат. Получено, что при одних и тех же значениях  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_u$ , т.е. при одних и тех же значениях эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ , различным видам напряженного состояния могут соответствовать различные значения времени до разрушения.

В некоторых работах используются и скалярный, и векторный параметры поврежденности.

С. А. Шестериков с соавторами [97] отметили, что в процессе ползучести при сложном напряженном состоянии фактически появляется анизотропия свойств материала с накопленной поврежденностью, и предложили модель, в которой комбинируются скалярный и векторный подходы. Для моделирования поведения материалов, в которых либо расширяются сферические поры, либо максимальное главное напряжение значительно больше остальных главных напряжений, может быть использован скалярный параметр. В случае развития трещиновидных дефектов при описании длительного разрушения следует использовать векторный подход.

В свою очередь, А. А. Чижик и Ю. К. Петреня [98] считают, что в области микропор параметр поврежденности является векторной величиной, а в области клиновидных трещин – скаляром.

О. К. Морачковский [99] использует скалярный параметр для описания установившейся и ускоряющейся стадий ползучести, а векторный параметр для описания процесса ползучести на неустановившейся стадии.

М. Chrzanowski, J. Madej [100] при описании изохронных кривых используют скалярный или векторный подход в зависимости от времени до разрушения.

Г. М. Хажинский [101] использует в качестве скалярного параметра внутризеренную поврежденность, а в качестве векторного параметра – межзеренную поврежденность.

Д. Nayhurst с соавторами при моделировании длительного разрушения различных сплавов при сложном напряженном состоянии в качестве параметра  $\omega$  рассматривают часть объема, занятую порами [57, 102]. При этом для описания поведения алюминиевого сплава используется скалярный параметр, а при описании медных образцов следует учитывать изменение направления (векторный параметр) максимального главного напряжения при изломе траектории нагружения.

В статьях [103, 104] рассматривается ползучесть до разрушения трубчатых образцов при касательных напряжениях, которые однократно или периодически меняют знак. В [103] рассмотрены результаты известных испытаний трубчатых образцов при постоянном осевом напряжении и постоянном или знакопеременном касательном напряжении [54], моделирование полученных экспериментальных результатов проведено с помощью подхода Качанова. Циклическое изменение знака касательных напряжений приводит в экспериментах к значительному увеличению времени до разрушения. В [104] выполнено моделирование известных результатов испытаний на длительную прочность в условиях нестационарного сложного напряженного состояния. При описании экспериментальных данных [105] используется векторный параметр поврежденности с кусочно-постоянной скоростью накопления поврежденности. Моделируется длительная прочность трубчатых образцов при одновременном

действию постоянного осевого напряжения и касательного напряжения, однократно или циклически меняющего знак. Моделирование длительной прочности при скачкообразном изменении интенсивности напряжений проведено двумя способами — с помощью метода Л. М. Качанова и метода И. В. Наместниковой и С. А. Шестерикова. Все варианты предложенных кинетических уравнений приводят к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

*4.3. Тензорный вариант.* Многие авторы используют тензорный параметр поврежденности при исследовании зависимости времени до разрушения от различных характеристик анизотропии материала (как исходной, так и приобретенной). При этом рассматриваются тензоры второго, четвертого и восьмого рангов.

Впервые тензорный параметр поврежденности был предложен в классической монографии Ю. Н. Работнова [11]. В работах [11, 106] в качестве характеристики напряженного состояния принимается линейная комбинация  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_u$ , где  $\sigma_{\max}$  — максимальное главное напряжение и  $\sigma_u$  — интенсивность напряжений.

Также первые систематические исследования ползучести металлов при сложном напряженном состоянии были опубликованы в Великобритании в работе А. Е. Johnson [107]. В качестве основной связи компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести (скоростей деформации ползучести) принимается гипотеза пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести. В работе А. Е. Johnson [108] коэффициент пропорциональности в этих соотношениях включает вторые инварианты тензора напряжений и тензора скоростей деформаций ползучести.

В работе [109] В. П. Тамуж рассмотрел возможности построения теории длительной прочности при сложном напряженном состоянии, используя скалярный, векторный и тензорный параметры поврежденности. В. П. Тамуж и А. Ж. Лагзыньш применили тензорный подход при моделировании накопления повреждений в виде круглых мелких трещин различной ориентации в изотропных [110] и анизотропных [111] средах.

Н. Altenbach и Р. Schieße [112, 113] указали основные типы параметра поврежденности и рассмотрели возможность описания связи условий нагружения с поврежденностью на уровне структуры материала, а также учета различия свойств при растяжении и сжатии и анизотропии процесса накопления поврежденности. В работе [114] Н. Altenbach с соавторами представили модель ползучести, зависящую от диапазона напряжений. При низких уровнях напряжений описывается ползучесть диффузионного типа, а при умеренных уровнях напряжений рассматривается ползучесть степенного типа. Конструктивная модель неупругих процессов при высокой температуре, включая ползучесть, вязкопластичность и термомеханическую усталость, представлена К. Naumenko с соавторами [115]. Конструктивная модель с тензором поврежденности разработана и применена для анализа тонкостенных конструкций в работе Н. Altenbach с соавторами [116]. К. Naumenko и Н. Altenbach предложили разработать и идентифицировать модель анизотропной ползучести для металла многопроходного шва [117].

В 1967 г. А. А. Ильюшин [118] ввел понятия тензоров и мер повреждений, которые определяются с помощью функционалов для заданных процессов изменения во времени тензоров напряжений и моментов. Данный подход был развит в монографии Э. Б. Завойчинской и И. А. Кийко [119]. Введен оператор повреждений, предложено обобщение механических теорий прочности, исследованы предельные процессы нагружения в пространстве А. А. Ильюшина.

В работе Б. Е. Победри [120] рассмотрены операторные определяющие соотношения среды, включающие меру поврежденности А. А. Ильюшина, введены моментные напряжения для учета возможных несовершенств материала, проведен термодинамический анализ процесса эволюционного разрушения материала.

В. А. Копнов использовал предложенные в статье [118] интегральные операторы для получения феноменологических критериев длительной прочности анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии [121].

А. А. Лебедев и В. М. Михалевич с использованием разработанного математического аппарата сформулировали критериальные соотношения для накопленных повреждений в виде уравнения наследственного типа с разностным ядром [122–125].

J. Betten [126, 127] выделяет деформационную анизотропию и анизотропию, вызываемую накоплением повреждений.

C. Chow, J. Wang [15] предложили тензорное уравнение для накопленных повреждений для анизотропной среды с учетом больших деформаций.

S. Bodner [128] предложил использовать в определяющем уравнении для анизотропной среды параметр поврежденности в виде тензора второго порядка.

S. Murakami с соавторами [17, 19, 129, 130] использовали сочетание методов механики сплошной среды и материаловедения для исследования анизотропного характера тензорного параметра поврежденности. Параметр поврежденности в виде тензора второго ранга характеризует плотность пор в трех главных плоскостях. В качестве основных причин появления поврежденности материала рассматриваются зарождение и рост межзеренных пор, полостей и микротрещин. Для проверки полученных результатов проведены испытания для перфорированных пластин с различной ориентацией перфорации. Показано, что при малой плотности пор длительное разрушение можно описывать с помощью скалярного параметра поврежденности.

В. И. Астафьев [131] использовал тензорную меру поврежденности для описания развития пор, их слияния и превращения пор в микротрещины, расположенные на площадках, ортогональных направлению наибольшего главного напряжения.

D. Krajcinovic с соавторами [132–134] построили теорию длительной прочности металлов с использованием параметра поврежденности в виде антисимметричного тензора второго ранга.

В. А. Маньковский [135] при исследовании изменения поврежденности во времени учитывает ее случайный характер. В результате исключения фактора случайности и использования тензорного подхода получен новый критерий длительного разрушения при сложном напряженном состоянии.

P. Delobelle с соавторами [56, 136], анализируя результаты испытаний, проведенных при сложном нагружении, показали необходимость учета механизмов как изотропного, так и кинематического упрочнения материала. Также приведены подробные данные об ориентации микротрещин, образующихся в ходе испытаний.

J. Lemaître [137] применил кинетическую теорию при решении задач обработки металлов, в частности, задачи о глубокой вытяжке полос. Также Lemaître установил, что при произвольном пути нагружения возможны различные предельные кривые разрушения.

В работах А. М. Локощенко [138, 139] приведены обзоры экспериментально-теоретических исследований длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния с помощью кинетической теории. В этих обзорах показано, что большинство публикаций направлены на разработку новых теоретических моделей, однако основное внимание должно быть уделено экспериментальной проверке этих моделей.

В статье К. А. Агахи и Д. В. Георгиевского [140] дается обзор известных вариантов определяющих соотношений теории ползучести изотропного тела с учетом поврежденности материала в процессе деформирования. Обсуждается кинетический смысл скалярной функции и тензорной меры поврежденности. Предлагается обобщение на трехмерный случай определяющих соотношений теории ползучести с поврежденностью, куда входят две материальные нелинейные тензор-функции двух тензорных аргументов.

**5. Поврежденность и нелокальные критерии разрушения.** В дальнейшем идеи Ю. Н. Работнова были использованы при развитии критериев разрушения. Одним из самых известных критериев можно считать критерий нелокальной механики разрушения Нейбера-Леонова-Новожилова [141–143]. В разное время и на основе различного уровня рассмотрений Г. Нейбером [141], М. Я. Леоновым [142] и В. В. Новожиловым [143] был предложен критерий разрушения  $\frac{1}{d} \int_0^d \sigma dr \leq \sigma_c$ ,

где  $\sigma$  – главное растягивающее напряжение в окрестности вершины трещины ( $r = 0$ ) и  $\sigma_c$  – предел прочности бездефектного материала. Главной особенностью критерия является явное введение некоторого структурного размера  $d$ .

Большое распространение получил критерий раскрытия трещины. Этот критерий независимо друг от друга был введен М. Я. Леоновым и В. В. Панасюком в 1959 г. [144] и D. S. Dugdale в 1960 г. [145]. Подходы и физическое обоснование у этих авторов различны, но приводят к одной и той же математической формализации. “Критерий раскрытия трещины” может быть сформулирован следующим образом: трещина начнет распространяться тогда, когда раскрытие трещины достигнет критического значения. Также классическим критерием является критерий Г. И. Баренблатта [146].

Основываясь на экспериментальных работах С. Н. Журкова, В. С. Куксенко и А. И. Слуцкера [147, 148], Ю. Н. Работнов [3] отметил, что в тонких пленках из некоторых полимерных материалов при действии растягивающей нагрузки возникают субмикроскопические трещины с размером порядка от 10 до 100 нм, а при критической концентрации расстояния между трещинами оказывается того же порядка, что размер трещины. Можно предположить, что рост трещины происходит, когда плотность микротрещин на ее кончике или степень поврежденности достигает критического значения. Модель А. И. Зобнина [149] посвящена описанию такого процесса и тесно связана с теорией пластического разрыхления В. В. Новожилова.

С. Н. Журков [150] ввел концентрационный критерий разрушения, который гласит, что микротрещины имеют одинаковый размер  $l_*$ , и они накапливаются в объеме напряженного материала до тех пор, пока средняя дистанция между трещинами  $\langle l \rangle$  не превышает некоторого критического значения  $l_c$ . Когда  $\langle l \rangle = l_c$ , микротрещины сливаются, и это приводит к глобальному разрушению образца. Как показали эксперименты [150], для многих материалов критическая дистанция  $l_c$  примерно равна  $3l_*$ .

Ф. М. Бородич [151] отметил, что в полифазных материалах поврежденность может иметь различные масштабные уровни и развитие глобальной трещины сопровождается каскадным накоплением поврежденности и слияния трещин на этих масштабах  $L(m)$ , где  $m$  – номер масштабного уровня. Развивая концентрационный критерий разрушения, Ф. М. Бородич сформулировал принцип онтогенеза множественного разрушения: для создания трещины масштабного уровня  $L(m)$  в объеме неповрежденного материала, процесс разрушения должен пройти все предыдущие стадии накопления повреждений и слияния трещин более низкого масштабного уровня.

Позже было предложено сочетать идею каскадного накопления поврежденности на различных масштабных уровнях с многомасштабным подходом Вавакина–Салганика и использовать такой подход к моделированию свойств пороупругих материалов, используемых в порошковой металлургии [152].

В работах Е. В. Ломакина и соавторов [153, 154] предполагается использование концепции поврежденности для описания прочности и поврежденности полимерных композиционных материалов. Вводятся два параметра поврежденности, первый связан с разрушением волокон, второй – с разрушением матрицы композита. В на-

чальном состоянии поврежденность 1, в момент разрушения 0. Предполагается, что характеристики прочности композита являются функциями двух скалярных параметров  $\psi_1, \psi_2$  и их скоростей  $\{\psi_1, \psi_2, d\psi_1 / dt, d\psi_2 / dt\}$ .

**6. Концепция поврежденности в задачах трибологии.** Понятие поврежденности используется также при изучении различных задач трибологии [155]. И. Г. Горячева и О. Г. Чекина [156] ввели модель накопления поврежденности и усталостного износа в упругом полупространстве. Разнообразные модели дискретного контакта подробно описаны И. Г. Горячевой [157]. Эти модели были использованы в моделях накопления поврежденности и усталостного износа покрытий [158, 159]. И. Г. Горячева и Е. В. Торская разработали модель для подсчета накопления поврежденности в покрытиях при фрикционном контакте [160]. Дальнейшее развитие эта модель получила в работах [155, 158, 159], в частности, рассматривались мономолекулярные антиадгезионные покрытия микроэлектромеханических систем.

**Заключение.** Многие оригинальные идеи и результаты Ю. Н. Работнова послужили основой для новых научных направлений, развиваемых его учениками и последователями. Широчайший научный кругозор и научное предвидение позволили Ю. Н. Работнову точно оценить перспективность тех или иных научных направлений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 80 с.
3. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
4. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5–7.
5. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
6. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 743 с.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 420 с.
8. Krajcinovic D. Damage Mechanics. Elsevier, 1996. Т. 41.
9. Lemaître J., Desmorat R. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, 2005.
10. Voyiadjis G. Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Springer, 2015. 1635 p.
11. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1963. № 2. С. 113–123.
12. Lemaître J., Chaboche J.-L. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement // J. Méc. Appl. 1978. V. 2. № 3. P. 317–365.
13. Krajcinovic D., Fonseka G. U. The Continuous damage theory of brittle materials. Pt. 1: General theory // J. Appl. Mech. 1981. V. 48 (4). P. 809–815.  
<https://doi.org/10.1115/1.3157739>
14. Leckie F.A., Onat E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables // in: Physical Non-Linearities in Structural Analysis. IUTAM / Ed. by Hult J., Lemaître J. Berlin; Heidelberg: Springer, 1981. P. 140–155.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_20)
15. Chow C.L., Wang J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture // Eng. Fract. Mech. 1987. V. 27. № 5. P. 547–558.  
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90108-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90108-1)
16. Hao L., Ke P., June W. An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates // Engng. Fract. Mech. 1985. V. 21. № 5. P. 1031–1054.
17. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // ASME Trans. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 2. P. 280–286.  
<https://doi.org/10.1115/1.3173673>
18. Murakami S., Kamiya K. Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics // Int. J. Mech. Sci. 1997. V. 39. № 4. P. 473–486.
19. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // in: Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R. S., Hayhurst D. R. Berlin; Heidelberg: Springer. 1981. P. 422–444.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_28)

20. *Najar J.* Continuous damage of brittle solids // in: *Continuum Damage Mechanics Theory and Application*. Vienna: Springer, 1987. P. 233–294.
21. *Hutchinson J. W.* Linking scales in fracture mechanics // *Adv. in Fract. Res.* 1997. V. 1. P. 1–14.
22. *Pardoen T., Hutchinson J. W.* An extended model for void growth and coalescence // *J. Mech. & Phys. of Solids*. 2000. V. 48. № 12. P. 2467–2512.
23. *Hult J.* Continuum damage mechanics—capabilities, limitations and promises // *Mech. Deform. & Fract.* 1979. P. 233–347.
24. *Lemaitre J.* *A Course on Damage Mechanics*. Springer, Sci. & Business Media, 2012.
25. *Cocks A. C. F., Leckie F. A.* Creep constitutive equations for damaged materials // *Adv. in Appl. Mech.* 1987. V. 25. P. 239–294.
26. *Leckie F. A., Murrell S. A. F.* The constitutive equations of continuum creep damage mechanics // *Phil. Trans Roy. Soc. London A: Math., Phys. & Engng. Sci.* 1978. V. 288. № 1350. P. 27–47.
27. *Evans A. G., Wilshaw T. R.* Quasi-static solid particle damage in brittle solids—I. Observations analysis and implications // *Acta Metall.* 1976. V. 24. № 10. P. 939–956.
28. *Betekhtin V. I.* Porosity of solids // *Trans. St.-Petersburg Acad. Sci. for Strength Probl.* 1997. V. 1. P. 202–210.
29. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2015. 506 с.
30. *Ratcliffe R. T., Greenwood G. W.* Mechanism of cavitation in magnesium during creep // *Phil. Mag.* 1965. V. 12. P. 59–69.
31. *Арутюнян Р. А.* Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252 с.
32. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // *Mech. of Solids*. 2015. V. 50. Iss. 2. P. 191–197.
33. *Новожилов В. В.* О пластическом разрыхлении // *ПММ*. 1965. № 4. С. 681–689.
34. *Соснин О. В.* О варианте теории ползучести с энергетическими параметрами упрочнения // в сб.: *Механика деформируемых тел и конструкций*. М.: Машиностроение. 1975. С. 460–463.
35. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Ин-т гидродин. им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 1986. 96 с.
36. *Соснин О. В., Любашевская И. В., Новоселя И. В.* Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // *ПМТФ*, 2008. Т. 49. № 2. С. 123–130.
37. *Соснин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // *Пробл. прочн.* 1973. № 5. С. 45–49.
38. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести // *Пробл. прочн.* 1976. № 11. С. 3–8.
39. *Павлов П. А., Неделько Е. Ю.* Экспериментальное определение работы необратимой деформации при разрушении некоторых металлов // *Изв. вузов. Стр-во и архит.* 1981. № 9. С. 55–58.
40. *Золочевский А. А.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // *Изв. вузов. Машиностр.* 1986. № 12. С. 7–10.
41. *Кулагин Д. А., Локощенко А. М.* Моделирование влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов при сложном напряженном состоянии // *Изв. РАН. МТТ*. 2004. № 1. С. 188–199.
42. *Leckie F. A., Hayhurst D. R.* Creep rupture of structures // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1974. V. 340. № 1622. P. 323–347.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0155>
43. *Leckie F. A., Wojewodzki W.* Estimates of rupture life—constant load // *Int. J. Solids Struct.* 1975. V. 11. № 12. P. 1357–1365.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90063-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90063-3)
44. *Leckie F. A., Hayhurst D. R.* Constitutive equations for creep rupture // *Acta Metall.* 1977. V. 25. № 9. P. 1059–1070.  
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(77\)90135-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90135-3)
45. *Xu Q., Hayhurst D. R.* The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550 °C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* 2003. V. 80. № 10. P. 689–694.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2003.08.005>

46. *Kowalewski Z. L., Lin J., Hayhurst D. R.* Investigation of a high accuracy uniaxial creep testpiece with slit extensometer ridges // Arch. Mech. 1995. V. 47. № 2. P. 261–279.
47. *Ржаницын А. П.* Теория длительной прочности при произвольном одноосном и двухосном нагружении // Строит. мех. и расчет сооруж. 1975. № 4. С. 25–29.
48. *Lemaître J., Sermage J. P.* One damage law for different mechanisms // Comput. Mech. 1997. V. 20. № 1–2. P. 84–88.  
<https://doi.org/10.1007/s004660050221>
49. *Шестериков С.А., Лебедев С.Ю., Юмашева М.А.* Новые функциональные соотношения для описания процессов ползучести и длительной прочности // в сб: Тр. IX конф. по прочности и пластичности. Т. 3 (22.01–26.01.1996, Москва). М.: ИПМ РАН, 1996. С. 130–134.
50. *Chrzanowski M., Madej J.* Isochronous creep rupture curves in plane stress // Mech. Res. Commun. 1980. V. 7. № 1. P. 39–40.  
[https://doi.org/10.1016/0093-6413\(80\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0093-6413(80)90023-3).
51. *Murakami S., Mizuno M.* A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress // Int. J. Solids Struct. 1992. V. 29. № 19. P. 2319–2328.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90218-I](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90218-I).
52. *Dyson B.F., Taplin D.* Creep damage accumulation // Grain Bound. Inst. Met. Spring. Resident. Conf. 1976. Ser. 3. № 5. P. E/23–E/28.
53. *Dyson B.F., Loveday M. S.* Creep fracture in Nimonic 80A under triaxial tensile stressing // Creep in Structures. IUTAM / Ed. by *Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, 1981. P. 406–421.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_27)
54. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading—Part I: Experiments // J. Eng. Mater. Technol. 1990. V. 112. № 4. P. 442–449.  
<https://doi.org/10.1115/1.2903355>
55. *Tvergaard V.* On the stress state dependence of creep rupture // Acta Metall. 1986. V. 34. № 2. P. 243–256.  
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(86\)90195-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(86)90195-1)
56. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading—Part II: Model and simulations // J. Eng. Mater. Technol. 1990. V. 112. № 4. P. 450–455.  
<https://doi.org/10.1115/1.2903356>
57. *Trąmpczyński W., Hayhurst D. R.* Creep deformation and rupture under non-proportional loading // Creep in Structures. IUTAM / Ed. by *Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, P. 388–405.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_26)
58. *Getsov L. B.* Kinetic equations of failure in complex programs of cyclic loading // Strength of Materials. Springer Nature. 1978. V. 10. Iss. 7. P. 767–775.  
<https://doi.org/10.1007/BF01521098>
59. *Maruyama T., Nosaka T.* Estimation of Creep Damage from Observation of Creep Voids in Centrifugal Cast Tube Alloys // J. Soc. Mater. Sci. (Jap.) 1979. V. 28. № 308. P. 372–378.  
<https://doi.org/10.2472/jsms.28.372>
60. *Нигматуллин Р.И., Холин Н.Н.* Дислокационная кинетика сверхпластичности и ползучести металлов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 2. С. 303–306.
61. *Estrin Y., Mecking H.* A unified phenomenological description of work hardening and creep based one-parameter models // Acta Met. 1984. V. 32. № 1. P. 57–70.
62. *Lokoshchenko A. M.* The investigation of the metal damage at the creep by the method of electrical resistance measuring // Acta Mech. Sinica. V. 7, Iss. 2. 1991. P. 157–161.
63. *Lokoshchenko A. M.* A new method for measuring creep damage in metals // Mech. of Solids. V. 40. Iss. 5. 2005. P. 82–92.
64. *Perry A. J.* Review cavitation in creep // J. Mater. Sci. 1974. V. 9. P. 1016–1039.
65. *Грант Н.* Разрушение в условиях высокотемпературной ползучести // Разрушение. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 538–578.
66. *Березина Т.Г., Трунин И.И.* Взаимодействие предельно допустимой деформации ползучести с поврежденностью материала паропроводов // Металлшвед. и термич. обработка металл. 1980. № 12. С. 34–37.
67. *Horiguchi M., Kawasaki T.* Creep rupture of stainless steels at high temperatures // J. Jap. Soc., Strength&Fract. Mat. 1977. V. 12. № 1. P. 34–43. (in Japan)

68. *Riedel H.* The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // Creep in Structures: Proc. 3rd IUTAM Symp., Leicester, 1980. Berlin: 1981. P. 504–515.
69. *Локощенко А. М.* Исследование поврежденности материала при ползучести и длительной прочности // ПМТФ. 1982. № 6. С. 129–133.
70. *Розенберг В. М., Шалимова А. В., Зверева Т. С.* Влияние температуры и напряжений на образование пор при ползучести // Физика металл. и металловед. 1968. Т. 25. Вып. 2. С. 326–332.
71. *Cane V. J.* Deformation induced intergranular creep cavitation in alpha-iron // Metal Sci. 1978. V. 12. № 2. P. 102–108.
72. *Гойхенберг Ю. Н., Березина Т. Т., Ашихмина Л. А., Ерагер С. И., Шербакова А. Ф.* Исследование разрушения теплоустойчивых сталей в процессе ползучести // Сб. науч. тр. Челябин. Политехн. ин-т. 1979. Т. 89. № 229. С. 72–77.
73. *Бетехтин В. И., Кадомцев А. Г., Петров А. И.* Особенности микроразрушения металлов при высокотемпературной ползучести // Металловед. и термич. обработка металл. 1980. № 12. С. 24–26.
74. *Арутюнян Р. А.* О критериях разрушения в условиях ползучести // Пробл. прочн. 1982. № 9. С. 42–45.
75. *Арутюнян Р. А.* Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 96–104.
76. *Куманин В. И., Трунин И. И., Богомольная Р. Б.* Изучение процесса накопления повреждаемости в условиях высокотемпературной ползучести // Научн. тр. Всес. заочн. машиностр. ин-т (ВЗМИ). 1973. Т. 1. С. 55–65.
77. *Belloni G., Bernasconi G.* Creep damage models // Creep Eng. Mater.&Struct. Proc. Semin. Ispra (Varese). 1979. P. 195–227.
78. *Ботвина Л. Р.* Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. М.: Наука, 2008. 334 с.
79. *Чадек Й.* Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 302 с.
80. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R.* The Criterion of High-Temperature Creep of Metals Based on Relative Changes of Density // WSEAS Trans. on Appl.&Theor. Mech. 2019. V. 14. P. 140–144.
81. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R.* High-temperature creep and damage of metallic materials // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1474. Iss. 1. № : 012005.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012005>
82. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R.* The Definition of Damage Parameter Changes from the Experimental High-Temperature Creep Curves // Lecture Notes in Mech. Engng. 2020. P. 53–59.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5_5)
83. *Arutyunyan A.R., Saitova R.R.* Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength // J. Phys. Conf. Ser. 2022. V. 2231. Iss. 1. № : 012001.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012001>
84. *Arutyunyan A.R., Saitova R.R.* Exact and approximate solutions of the modified system of interrelated kinetic equations for damage parameter and creep deformation // Lecture Notes in Mech. Engng. 2023. P. 196–201.
85. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
86. *Качанов Л. М.* К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 1. С. 92–96.
87. *Качанов Л. М.* Разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 11–15.
88. *Наместникова И. В., Шестериков С. А.* Векторное представление параметра поврежденности // в сб.: Тр. Ин-та механики МГУ им. М. В. Ломоносова. Деформирование и разрушение твердых тел. М.: МГУ, 1985. С. 43–52.
89. *Пелешко В. А.* Использование поверхности поврежденности для описания ползучести и длительной прочности при сложном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 124–138.
90. *Chow C.L., Yang X.J., Chu E.* Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading // J. Eng. Mater. Technol., 2001. V. 123. № 4. P. 403–408.  
<https://doi.org/10.1115/1.1395575>

91. Локощенко А. М. Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // в сб.: Тр. Центр. котлотурбин. ин-та. 1986. № 230. С. 107–109.
92. Локощенко А. М. Методы моделирования длительной прочности металлов при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях // Упругость и неупругость: Матер. междунауч. научн. симпоз., посвящ. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (20–21.01.2011, Москва). М.: Моск. ун-т, 2011. С. 389–393.
93. Локощенко А. М., Назаров В. В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двусосном растяжении // Авиац.-косм. техн. и технол., 2005. № 10. С. 73–78.
94. Локощенко А. М., Назаров В. В. Анализ длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии с помощью критериального и кинетического подходов // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. 3 (Нижегород, 22–28.08.2006): Нижегород. гос. ун-т. 2006. С. 135–136.
95. Локощенко А. М., Назаров В. В. Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // ПМТФ. 2009. № 4. С. 150–157.
96. Lokoshchenko A. M., Platonov D. O. Creep rupture of anisotropic tubes under complex stress state // Proc. of the 7th Int. Conf. "Biaxial/Multiaxial Fatigue and fracture", Berlin, June 28 – July 1, 2004. Berlin: DVM. 2004. P. 567–571.
97. Дачева М. Д., Шестериков С. А., Юмашева М. А. Поврежденность при сложном нестационарном напряженном состоянии // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 44–47.
98. Петреня Ю. К., Чижик А. А. Разрушение вследствие ползучести и механизмы микроразрушения // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 6. С. 1331–1333.
99. Морачковский О. К. К вопросу о разрушении при ползучести анизотропных материалов // Пробл. машиностр., 1978. № 6. С. 41–43.
100. Chrzanowski M., Madej J. Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzenia // Mech. Teor. Stosow., 1980. V. 18. № 4. P. 587–601. (in Polish)
101. Хажинский Г. М. Деформирование и длительная прочность металлов. М.: Научный мир, 2008. 136 с.
102. Hayhurst D. R., Trąmpczyński W., Leckie F. A. Creep rupture under non-proportional loading // Acta Metall. 1980. V. 28. № 9. P. 1171–1183.  
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(80\)90072-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(80)90072-3)
103. Локощенко А. М. Применение векторного параметра поврежденности при моделировании длительной прочности металлов // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 93–99.
104. Локощенко А. М. Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии // ПММ. 2018. Т. 82. № 1. С. 84–97.
105. Murakami S., Sanomura I., Saitoh K. Formulation of cross-hardening in creep and its effects on the creep damage process of copper // J. Eng. Mater. Technol. 1986. V. 108, № 2. P. 167–173.  
<https://doi.org/10.1115/1.3225856>
106. Rabotnov Y. N. Creep rupture // in: Applied Mechanics. IUTAM / Ed. by Hetényi M., Vincenti W. G., Heidelberg: Springer, P. 342–349.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2_26)
107. Johnson A. E., Khan B. Creep under changing complex-stress systems in copper at 250 °C // Int. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 12. P. 791–810.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(65\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(65)90033-0)
108. Johnson A. E. Complex stress creep of metals // Int. Met. Rev., 1985. V. 30. № 1. P. 447–506.  
<https://doi.org/10.1179/mftr.1960.5.1.447>
109. Тамуж В. П. Об одной возможности построения теории длительного разрушения // Пробл. прочн. 1971. № 2. С. 59–64.
110. Тамуж В. П., Лагздыньш А. Ж. Вариант построения феноменологической теории разрушения // Мех. полим. 1968. № 4. С. 638–647.
111. Лагздыньш А. Ж., Тамуж В. П. К построению феноменологической теории разрушения анизотропной среды // Мех. полим. 1971. № 4. С. 634–644.
112. Altenbach H., Schießle P. Modelling of the constitutive behavior of damaged materials // in: Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selec. Pap. 8th Int. Conf. Fract. Kyiv, June 8–14, 1993. Oxford: Pergamon, 1994. P. 51–57.
113. Altenbach H., Schießle P., Zolochovsky A. A. Zum Kriechen isotroper Werkstoffe mit komplizierten Eigenschaften // Rheologica Acta. 1991. V. 30(4). P. 388–399.

<https://doi.org/10.1007/BF00404197>

114. *Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K.* Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges // *Acta Mech.* 2008. V. 195 (1–4). P. 263–274.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5>
115. *Naumenko K., Kutschke A., Kostenko Y., Rudolf T.* Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9–12% Cr steels at high temperature // *Engng. Fract. Mech.* V. 78. 2011. P. 1657–1668.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.002>
116. *Altenbach H., Huang C., Naumenko K.* Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // *J. Strain Anal. for Engng. Design.* 2002. V. 37. P. 265–275.  
<https://doi.org/10.1243/0309324021515023>
117. *Naumenko K., Altenbach H.* A phenomenological model for anisotropic creep in a multipass weld metal // *Arch. Appl. Mech.* 2005. V. 74. P. 808–819.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-005-0409-2>
118. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности // *Инж. ж. Механ. тверд. тела.* 1967. № 3. С. 21–35.
119. *Завойчинская Э. Б., Куйко И. А.* Введение в теорию процессов разрушения твердых тел. М.: МГУ, 2004. 168 с.
120. *Победря Б. Е.* О моделях повреждаемости реономных сред // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 4. С. 128–148.
121. *Копнов В. А.* Длительная прочность анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии // *Пробл. прочн.* 1982. № 2. С. 40–44.
122. *Михалевич В. М.* Тензорні моделі накопичання пошкоджень. Вінниця: Універсум-Вінниця, 1998. 195 с. <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/13977>
123. *Михалевич В. М.* Тензорные модели длительной прочности. Сообщ. 3. Критерияльные зависимости при нагружении с изменением напряженного состояния и направлений главных напряжений // *Пробл. прочн.* 1996. № 3. С. 101–112.
124. *Лебедев А. О., Михалевич В. М.* До теорії тривалої міцності // *Доп. НАНУ.* 1998. № 5. С. 57–62.
125. *Лебедев А. А., Михалевич В. М.* Критерияльные соотношения для определения остаточного ресурса материалов // *Пробл. прочн.* 2006. № 4. С. 31–38.
126. *Betten J.* Net-stress analysis in creep mechanics // *Ing. Arch.* 1982. V. 52. № 6. P. 405–419.  
<https://doi.org/10.1007/BF00536211>
127. *Betten J.* Damage tensors in continuum mechanics // *J. Mec. Theor. Appl.* 1983. V. 2. № 1. P. 13–22.
128. *Bodner S.R.* A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials // in: *Physical Non-Linearities in Structural Analysis.* IUTAM / Ed. by *Hult J., Lemaitre J.* Heidelberg: Springer, 1981. P. 21–28.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_4)
129. *Liu Y., Kageyama Y., Murakami S.* Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity // *Int. J. Mech. Sci.* 1998. V. 40. № 2–3. P. 147–158.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00045-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00045-3)
130. *Murakami S., Imaizumi T.* Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Mec. Theor. Appl.* 1982. V. 1. № 5. P. 743–761.
131. *Астафьев В. И.* Описание процесса разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1986. № 4. С. 164–169.
132. *Krajcinovic D.* Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. № 4. P. 829–834.  
<https://doi.org/10.1115/1.3169154>
133. *Krajcinovic D., Rinaldi A.* Statistical damage mechanics—Part I: Theory // *J. Appl. Mech.* 2005. V. 72. № 1. P. 76–85.  
<https://doi.org/10.1115/1.1825434>
134. *Krajcinovic D., Selvaraj S.* Creep rupture of metals—An analytical model // *J. Eng. Mater. Techn.* 1984. V. 106. № 4. P. 405–409.  
<https://doi.org/10.1115/1.3225738>
135. *Маньковский В. А.* Критерии поврежденности и длительной прочности конструкционных материалов // *Машиновед.* 1985. № 1. С. 87–94.

136. *Delobelle P., Trivaudey F., Oytana C.* High temperature creep damage under biaxial loading: INCO 718 and 316 (17–12 SPH) steels // Nucl. Eng. Des., 1989. V. 114. № 3. P. 365–377.  
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90114-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90114-3)
137. *Lemaître J.* A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits // Mech. Behav. Mater.: Proc. of the 4th Int. Conf. Stockholm, Sweden, August 15–19, 1983. Oxford: Pergamon, 1984. P. 1047–1053.  
<https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-8372-2.50132-9>
138. Локощенко А. М. Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 4. С. 149–164.
139. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Терауд В. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 2. С. 275–318.
140. Агахи К. А., Георгиевский Д. В. Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // Изв. Тульск. гос. ун-та. Естеств. науки. 2013. № 2. С. 2–9.
141. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
142. Леонов М. Я. Основы механики упругого тела. Фрунзе: Изд-во АН Киргизской ССР, 1963. 328 с.
143. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
144. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. мех. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
145. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
146. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
147. Журков С. Н., Куксенко В. С., Слуцкер А. И. Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой // Физика твердого тела. 1969. Т. 11. Вып. 1. С. 296–302.
148. Журков С. Н., Куксенко В. С., Слуцкер А. И. Микромеханика разрушения полимеров // Пробл. прочн.. 1971. № 2. С. 45–50.
149. Зобнин А. И. Распространение трещин в полимерном материале // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 53–56.
150. Журков С. Н., Куксенко В. С., Петров В. А., Савельев В. Н., Султанов У. О прогнозировании разрушения горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 6. С. 11–18.
151. Borodich F. M. Self-similar models and size effect of multiple fracture // Fractals. 2001. V. 9 (1). P. 17–30.
152. Manoylov A. V., Borodich F. M., Evans H. P. Modelling of elastic properties of sintered porous materials // Proc. R. Soc. A. 2013. V. 469. Iss. 2154. Art. No. 20120689.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0689>
153. Lomakin E., Fedulov B., Fedorenko A. Strain rate influence on hardening and damage characteristics of composite materials // Acta Mech. 2021. V. 232. P. 1875–1887.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02806-4>
154. Fedulov B., Fedorenko A., Safonov A., Lomakin E. Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions // Acta Mech. 2017. V. 228. P. 2033–2040.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1817-4>
155. Almuramady N., Borodich F. M., Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // Tribol. Int. 2019. V. 129. P. 202–213.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.07.049>
156. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Модель усталостного разрушения поверхностей // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 3. С. 1–11.
157. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Kluwer. 1998. V. 61. 346 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>
158. Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. V. 268 (11). P. 1417–1422.

159. *Торская Е. В.* Моделирование усталостного изнашивания тел с покрытиями при фрикционном нагружении // Физич. мезомех. 2016. Т. 19 (1). С. 68–74.
160. *Goryacheva I. G., Torskaya E. V.* Stress and fracture analysis in periodic contact problem for coated bodies // *Fatig.&Fract. Engng. Mater.&Struct.* 2003. V. 26. № 4. P. 343–348.

## Development of the Damage Concept in Mechanics of Materials

**R. R. Saitova<sup>a, #</sup>, F. M. Borodich<sup>b, ##</sup>, A. R. Arutyunyan<sup>a, ###</sup>**

<sup>a</sup>*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

<sup>b</sup>*Chongqing University, Chongqing, China*

<sup>#</sup>*e-mail: rigastr@yandex.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: borodichfm@cqu.edu.cn*

<sup>###</sup>*e-mail: a.arutyunyan@spbu.ru*

The review highlights the current state of research in the field of continuum fracture mechanics and dispersed fracture mechanics, including the main approaches to problem formulation, specific results and areas of their practical use. The article is aimed at specialists in creep, long-term strength and fracture mechanics, and may also be of interest to researchers in the field of issues of strength and fracture of materials and structures at high temperatures.

*Keywords:* creep, long-term strength, damage, fracture mechanics, damage parameter, continuity parameter

## REFERENCES

1. *Rabotnov Y. N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
2. *Rabotnov Y. N.* Introduction to Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1987. 80 p. (in Russian)
3. *Rabotnov Y. N.* Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (in Russian)
4. *Rabotnov Y. N.* On the mechanism of long-term fracture // in: Questions of the Strength of Materials and Structures. Moscow: Acad. Sci. Pub., 1959. pp. 5–7. (in Russian)
5. *Kachanov L. M.* On the fracture time under creep conditions // *Izv. AN SSSR. Dep. Tech. Sci.*, 1958, no. 8. pp. 26–31. (in Russian)
6. *Rabotnov Y. N.* Deformable Solid Mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 743 p. (in Russian)
7. *Kachanov L. M.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. Moscow: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian)
8. *Krajcinovic D.* Damage Mechanics. Elsevier, 1996. T. 41.
9. *Lemaitre J., Desmorat R.* Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, 2005.
10. *Voyiadjis G.* Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Springer, 2015. 1635 p.
11. *Rabotnov Y. N.* On fracture due to creep // *App. Mech.&Tech. Phys.*, 1963, no. 2. pp. 113–123. (in Russian)
12. *Lemaitre J., Chaboche J.-L.* Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement // *J. Méc. Appl.*, 1978, vol. 2, no. 3, pp. 317–365.
13. *Krajcinovic D., Fonseka G. U.* The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part 1: General Theory // *J. Appl. Mech.*, 1981, vol. 48 (4), pp. 809–815.  
<https://doi.org/10.1115/1.3157739>
14. *Leckie F.A., Onat E. T.* Tensorial nature of damage measuring internal variables // in: Physical Non-Linearities in Structural Analysis. IUTAM / Ed. by *Hult J., Lemaitre J.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. pp. 140–155.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_20)
15. *Chow C.L., Wang J.* An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture // *Eng. Fract. Mech.*, 1987, vol. 27, no. 5, pp. 547–558.  
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90108-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90108-1)

16. *Hao L., Ke P., June W.* An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates // *Engng. Fract. Mech.*, 1985, vol. 21, no. 5, pp. 1031–1054.
17. *Murakami S.* Mechanical modeling of material damage // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, no. 2, pp. 280–286.  
<https://doi.org/10.1115/1.3173673>
18. *Murakami S., Kamiya K.* Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics // *Int. J. Mech. Sci.*, 1997, vol. 39, no. 4, pp. 473–486.
19. *Murakami S., Ohno N.* A continuum theory of creep and creep damage // in: *Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, 1981. pp. 422–444.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_28)
20. *Najar J.* Continuous damage of brittle solids // in: *Cont. Damage Mech. Theory&Appl.* Vienna: Springer, 1987. pp. 233–294.
21. *Hutchinson J. W.* Linking scales in fracture mechanics // *Adv. in Fract. Res.*, 1997, vol. 1. pp. 1–14.
22. *Pardoen T., Hutchinson J. W.* An extended model for void growth and coalescence // *J. Mech.&Phys. of Solids*, 2000, vol. 48, no. 12, pp. 2467–2512.
23. *Hult J.* Continuum damage mechanics-capabilities, limitations and promises // *Mech. Deform.&Fract.*, 1979, pp. 233–347.
24. *Lemaitre J.* *A Course on Damage Mechanics.* Springer Sci.&Business Media, 2012.
25. *Cocks A.C.F., Leckie F.A.* Creep constitutive equations for damaged materials // *Adv. in Appl. Mech.*, 1987, vol. 25, pp. 239–294.
26. *Leckie F.A., Murrell S.A.F.* The constitutive equations of continuum creep damage mechanics // *Phil. Trans. Roy. Soc. London A: Math., Phys.&Engng. Sci.*, 1978, vol. 288, no. 1350, pp. 27–47.
27. *Evans A.G., Wilshaw T. R.* Quasi-static solid particle damage in brittle solids. I. Observations analysis and implications // *Acta Metall.*, 1976, vol. 24, no. 10, pp. 939–956.
28. *Betekhtin V.I.* Porosity of solids // *Trans. St.-Petersburg Acad. Sci. for Strength Probl.*, 1997, vol. 1, pp. 202–210.
29. *Lokoshchenko A. M.* *Creep and Long-Term Strength of Metals.* Moscow: Fizmatlit, 2015. 506 p. (in Russian)
30. *Ratcliffe R. T., Greenwood G. W.* Mechanism of cavitation in magnesium during creep // *Phil. Mag.*, 1965, vol. 12, pp. 59–69.
31. *Arutyunyan R. A.* The problem of strain aging and long-term fracture in the mechanics of materials. St. Petersburg: St. Petersburg State Univ. Pub., 2004. 252 p. (in Russian)
32. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // *Mech. of Solids*, 2015, vol. 50, iss. 2, pp. 191–197.
33. *Novozhilov V. V.* On plastic loosening // *Appl. Math.&Mech.*, 1965, no. 4, pp. 681–689. (in Russian)
34. *Sosnin O. V.* On a variant of the theory of creep with energy parameters of hardening // in: *Mechanics of Deformable Bodies and Structures.* Moscow: Mashinostroenie, 1975. pp. 460–463. (in Russian)
35. *Sosnin O.V., Gorev B. V., Nikitenko A. F.* Energy Variant of the Theory of Creep. Novosibirsk: Lavrentiev Hydrodyne. Inst., 1986. 96 p. (in Russian)
36. *Sosnin O.V., Lyubashevskaya I. V., Novoselya I. V.* Comparative estimation of high-temperature creep and fracture of structural materials // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 123–130. (in Russian)
37. *Sosnin O. V.* Energy variant of the theory of creep and long-term strength. Creep and fracture of non-hardening materials. Message 1 // *Problemi Prochnosti*, 1973, no. 5, pp. 45–49. (in Russian)
38. *Sosnin O.V., Gorev B. V., Nikitenko A. F.* On the substantiation of the energy version of the theory of creep // *Probl. Strength*, 1976, no. 11, pp. 3–8. (in Russian)
39. *Pavlov P.A., Nedelko E. Y.* Experimental determination of the work of irreversible deformation during the fracture of some metals // *Izv. vuzov. Constr.&Arch.*, 1981, no. 9, pp. 55–58. (in Russian)
40. *Zolochevsky A. A.* Energy variant of the theory of creep and long-term strength of materials that resist tension and compression differently // *Izv. vuzov. Engng.*, 1986, no. 12, pp. 7–10. (in Russian)
41. *Kulagin D.A., Lokoshchenko A. M.* Modeling the influence of an aggressive environment on the creep and long-term strength of metals under a complex stress state // *Izv. RAN. MTT*, 2004, no. 1, pp. 188–199. (in Russian)
42. *Leckie F.A., Hayhurst D. R.* Creep rupture of structures // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1974, vol. 340, no. 1622, pp. 323–347.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0155>

43. *Leckie F.A., Wojewodzki W.* Estimates of rupture life-constant load // *Int. J. Solids Struct.*, 1975, vol. 11, no. 12, pp. 1357–1365.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90063-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90063-3)
44. *Leckie F.A., Hayhurst D.R.* Constitutive equations for creep rupture // *Acta Metall.*, 1977, vol. 25, no. 9, pp. 1059–1070.  
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(77\)90135-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90135-3)
45. *Xu Q., Hayhurst D.R.* The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550 °C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2003, vol. 80, no. 10, pp. 689–694.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2003.08.00546>
46. *Kowalewski Z.L., Lin J., Hayhurst D.R.* Investigation of a high accuracy uniaxial creep testpiece with slit extensometer ridges // *Arch. Mech.*, 1995, vol. 47, no. 2, pp. 261–279.
47. *Rzhanitsyn A.R.* Theory of long-term strength under arbitrary uniaxial and biaxial loading // *Stroit. Mekh. & Calc. Constr.*, 1975, no. 4, pp. 25–29. (in Russian)
48. *Lemaître J., Sermage J.P.* One damage law for different mechanisms // *Comput. Mech.*, 1997, vol. 20, no. 1–2, pp. 84–88.  
<https://doi.org/10.1007/s004660050221>
49. *Shesterikov S.A., Lebedev S. Yu., Yumasheva M.A.* New functional relations for describing the processes of creep and long-term strength // *Proc. IX Conf. on Strength and Plasticity. Vol. 3 (22.01–26.01.1996, Moscow)*. Moscow: IPM RAN, 1996. pp. 130–134. (in Russian)
50. *Chrzanowski M., Madej J.* Isochronous creep rupture curves in plane stress // *Mech. Res. Commun.*, 1980, vol. 7, no. 1, pp. 39–40.  
[https://doi.org/10.1016/0093-6413\(80\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0093-6413(80)90023-3)
51. *Murakami S., Mizuno M.* A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress // *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, no. 19, pp. 2319–2328.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90218-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90218-1)
52. *Dyson B.F., Taplin D.* Creep damage accumulation // *Grain Bound. Inst. Met. Spring. Resident. Conf.*, 1976, Ser. 3, no. 5, pp. E/23–E/28.
53. *Dyson B.F., Loveday M.S.* Creep fracture in Nimonic 80A under triaxial tensile stressing // in: *Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, 1981. pp. 406–421.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_27)
54. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading. Pt. I: Experiments // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 442–449.  
<https://doi.org/10.1115/1.2903355>
55. *Tvergaard V.* On the stress state dependence of creep rupture // *Acta Metall.*, 1986, vol. 34, no. 2, pp. 243–256.  
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(86\)90195-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(86)90195-1)
56. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading. Pt. II: Model and simulations // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 450–455.  
<https://doi.org/10.1115/1.2903356>
57. *Trąpczyński W., Hayhurst D.R.* Creep deformation and rupture under non-proportional loading // in: *Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, pp. 388–405.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_26)
58. *Getsov L.B.* Kinetic equations of failure in complex programs of cyclic loading // in: *Strength of Materials. Springer Nature*, 1978. Vol. 10, Iss. 7, pp. 767–775.  
<https://doi.org/10.1007/BF01521098>
59. *Maruyama T., Nosaka T.* Estimation of creep damage from observation of creep voids in centrifugal cast tube alloys // *J. Soc. Mater. Sci. (Jap.)*, 1979, vol. 28, no. 308, pp. 372–378.  
<https://doi.org/10.2472/jsms.28.372>
60. *Nigmatullin R.I., Kholin N.N.* Dislocation kinetics of superplasticity and creep of metals // *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1976, vol. 231, no. 2, pp. 303–306. (in Russian)
61. *Estrin Y., Mecking H.* A unified phenomenological description of work hardening and creep based one-parameter models // *Acta met.*, 1984, vol. 32, no. 1, pp. 57–70.

62. *Lokoshchenko A. M.* The investigation of the metal damage at the creep by the method of electrical resistance measuring // *Acta Mech. Sinica*, vol. 7, iss. 2, 1991, pp. 157–161.
63. *Lokoshchenko A. M.* A new method for measuring creep damage in metals // *Mech. Solids*, vol. 40, iss. 5, 2005, pp. 82–92.
64. *Perry A. J.* Review cavitation in creep // *J. Mater. Sci.*, 1974, vol. 9, pp. 1016–1039.
65. *Grant N.* Fracture under conditions of high-temperature creep // in: *Destruction*. Vol. 3. Moscow: Mir, 1976. pp. 538–578. (in Russian)
66. *Berezina T.G., Trunin I. I.* Interaction of the maximum allowable creep strain with damage for the material of steam pipelines // *Metal Sci.&Thermal Proces. Metals*, 1980, no. 12, pp. 34–37. (in Russian)
67. *Horiguhi M., Kawasaki T.* Creep rupture of stainless steels at high temperatures // *J. Jap. Soc. Strength&Fract. Mat.*, 1977, vol. 12, no. 1, pp. 34–43. (in Japan)
68. *Riedel H.* The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // *Creep in Struct. Proc. 3rd IUTAM Symp., Leicester, 1980*. Berlin: 1981. pp. 504–515.
69. *Lokoshchenko A. M.* Investigation of material damage during creep and long-term strength // *Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1982, no. 6, pp. 129–133. (in Russian)
70. *Rosenberg V.M., Shalimova A. V., Zvereva T. S.* Influence of temperature and stresses on the formation of pores during creep // *Phys. Metals&Metall.*, 1968, vol. 25, iss. 2, pp. 326–332. (in Russian)
71. *Cane B. J.* Deformation induced intergranular creep cavitation in alpha-iron // *Metal. Sci.*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 102–108.
72. *Goykhenberg Y.N., Berezina T. T., Ashikhmina L. A., Erager S. I., Shcherbakova A. F.* Investigation of the fracture of heat-resistant steels in the process of creep // *Coll. Sci. Works of Chelyabinsk Polytech. Inst.*, 1979, vol. 89, no. 229, pp. 72–77. (in Russian)
73. *Betekhtin V.I., Kadomtsev A. G., Petrov A. I.* Features of microfracture of metals during high-temperature creep // *Metal Sci.&Therm. Proc. Metals*, 1980, no. 12, pp. 24–26. (in Russian)
74. *Arutyunyan R. A.* On the criteria of fracture under creep conditions // *Strength Probl.*, 1982, no. 9, pp. 42–45. (in Russian)
75. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // *Solid State Mech.*, 2015, no. 2, pp. 96–104. (in Russian)
76. *Kumanin V.I., Trunin I. I., Bogomolnaya R. B.* Study of the process of damage accumulation under conditions of high-temperature creep // *Nauch. Tr. VZMI*, 1973, vol. 1, pp. 55–65. (in Russian)
77. *Belloni G., Bernasconi G.* Creep damage models // *Creep Eng. Mater.&Struct., Proc. Sem. Ispra (Varese)*, 1979. pp. 195–227.
78. *Borvina L. R.* *Destruction: Kinetics, Mechanisms, General Rules*. Moscow: Nauka, 2008. 334 p. (in Russian)
79. *Chadek J.* *Creep of Metallic Materials*. Moscow: Mir, 1987. 302 p. (in Russian)
80. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R. A., Saitova R. R.* The criterion of high-temperature creep of metals based on relative changes of density // *WSEAS Trans. on Appl.&Theor. Mech.*, 2019, vol. 14, pp. 140–144.
81. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R. A., Saitova R. R.* High-temperature creep and damage of metallic materials // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, vol. 1474, iss. 1, art. no. 012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012005>
82. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R. A., Saitova R. R.* The definition of damage parameter changes from the experimental high-temperature creep curves // *Lect. Notes in Mech. Engng.*, 2020. pp. 53–59. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5_5)
83. *Arutyunyan A.R., Saitova R. R.* Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2022, vol. 2231, iss. 1. art. no. 012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012001>
84. *Arutyunyan A.R., Saitova R. R.* Exact and approximate solutions of the modified system of inter-related kinetic equations for damage parameter and creep deformation // *Lect. Notes in Mech. Engng.*, 2023, pp. 196–201.
85. *Kachanov L. M.* *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Moscow: Nauka, 1974. 312 p. (in Russian)
86. *Kachanov L. M.* On the issue of brittle fractures under creep conditions under complex loading // *Vestn. Leningrad. Univ.*, 1972, no. 1, pp. 92–96. (in Russian)

87. *Kachanov L. M.* Fracture under creep conditions under complex loading // *Izv. Acad. Sci. USSR. MTT*, 1972, no. 5, pp. 11–15. (in Russian)
88. *Namestnikova I. V., Shesterikov S. A.* Vector representation of the damage parameter // *Deform.&Destr. Solids. Coll. Works Inst. of Mech. Lomonosov Moscow State Univ. Moscow: Moscow Univ. Pub.*, 1985. pp. 43–52. (in Russian)
89. *Peleshko V. A.* Using the damage surface to describe creep and long-term strength under complex loading // *Izv. RAN. MTT*, 2003, no. 2, pp. 124–138. (in Russian)
90. *Chow C. L., Yang X. J., Chu E.* Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under non-proportional loading // *J. Eng. Mater. Technol.*, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 403–408. <https://doi.org/10.1115/1.1395575>
91. *Lokoshchenko A. M.* Investigation of long-term strength under complex stress state using the kinetic approach // *Tr. Centr. Kotloturb. Inst.*, 1986, no. 230, pp. 107–109. (in Russian)
92. *Lokoshchenko A. M.* Methods for modeling the long-term strength of metals in stationary and non-stationary complex stress states // in: *Elast.&Inelast. Mater. Int. Sci. Symp. Dedic. 100th Aniv. Birth of A. A. Ilyushin Jan. 20–21, 2011, Moscow: Moscow State Univ. Pub.*, 2011. pp. 389–393. (in Russian)
93. *Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V.* Kinetic approach to studying the long-term strength of metals under biaxial tension // *Aerosp. Enginng.&Techn.*, 2005, no. 10, pp. 73–78. (in Russian)
94. *Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V.* Analysis of the long-term strength of metals under a complex stress state using the criterion and kinetic approaches // *IX All-Russ. Congr. on Theor.&Appl. Mech. Nizhny Novgorod, August 22–28, 2006, Annot. Rep.*, vol. 3, 2006, pp. 135–136. (in Russian)
95. *Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V.* Long-term strength of metals under equiaxed plane stress state // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2009, no. 4, pp. 150–157. (in Russian)
96. *Lokoshchenko A. M., Platonov D. O.* Creep rupture of anisotropic tubes under complex stress state // *Proc. 7th Int. Conf. Biaxial/Multi-ax. Fatig.&Fract.*, Berlin, June 28 – July 1, 2004. Berlin: DVM, 2004. pp. 567–571.
97. *Dacheva M. D., Shesterikov S. A., Yumasheva M. A.* Damage under complex non-stationary stress state // *Izv. RAN. MTT*, 1998, no. 1, pp. 44–47. (in Russian)
98. *Petrenya Y. K., Chizhik A. A.* Fracture due to creep and mechanisms of microfracture // *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1987, vol. 297, no. 6, pp. 1331–1333. (in Russian)
99. *Morachkovsky O. K.* On creep fracture of anisotropic materials // *Probl. Engng.*, 1978, no. 6, pp. 41–43. (in Russian)
100. *Chrzanowski M., Madej J.* The construction of failure limit curves by means of a damage // *J. Theor. Appl. Mech.*, 1980, vol. 18, no. 4, pp. 587–601. (in Polish)
101. *Khazhinsky G. M.* Deformation and Long-Term Strength of Metals. Moscow: Sci. World, 2008. 136 p. (in Russian)
102. *Hayhurst D. R., Trzampczyński W., Leckie F. A.* Creep rupture under non-proportional loading // *Acta Metall.*, 1980, vol. 28, no. 9, pp. 1171–1183. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(80\)90072-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(80)90072-3)
103. *Lokoshchenko A. M.* Application of the damage vector parameter in modeling the long-term strength of metals // *Izv. RAN. MTT*, 2016, no. 3, pp. 93–99. (in Russian)
104. *Lokoshchenko A. M.* Modeling of the long-term strength of metals in a non-stationary complex stress state // *PMM*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 84–97. (in Russian)
105. *Murakami S., Sanomura I., Saitoh K.* Formulation of cross-hardening in creep and its effects on the creep damage process of copper // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1986, vol. 108, no. 2, pp. 167–173. <https://doi.org/10.1115/1.3225856>
106. *Rabotnov Y. N.* Creep rupture // in: *Applied Mechanics. IUTAM / Ed. by Hetényi M., Vincenzi W. G.* Heidelberg: Springer, pp. 342–349. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2_26)
107. *Johnson A. E., Khan B.* Creep under changing complex-stress systems in copper at 250 °C // *Int. J. Mech. Sci.*, 1965, vol. 7, no. 12, pp. 791–810. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(65\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(65)90033-0)
108. *Johnson A. E.* Complex stress creep of metals // *Int. Met. Rev.*, 1985, vol. 30, no. 1, pp. 447–506. <https://doi.org/10.1179/mtlr.1960.5.1.447>
109. *Tamuzh V. P.* On a possibility of constructing a theory of long-term fracture // *Probl. Strength*, 1971, no. 2, pp. 59–64. (in Russian)

110. *Tamuzh V.P., Lagzdynsh A. Zh.* A variant of constructing a phenomenological theory of fracture // *Mech. Polym.*, 1968, no. 4, pp. 638–647. (in Russian)
111. *Lagzdynsh A. Zh., Tamuzh V.P.* On the construction of a phenomenological theory of fracture of an anisotropic medium // *Mech. Polym.*, 1971, no. 4, pp. 634–644. (in Russian)
112. *Altenbach H., Schieße P.* Modelling of the constitutive behavior of damaged materials // *Adv. in Fract. Resist.&Struct. Integr.: Select. Pap. 8th Int. Conf. Fract. June 8–14, 1993, Kyiv. Oxford: Pergamon, 1994.* pp. 51–57.
113. *Altenbach H., Schieße P., Zolochovsky A.A.* Zum Kriechen isotroper Werkstoffe mit komplizierten Eigenschaften // *Rheol. Acta*, 1991, vol. 30(4), pp. 388–399.  
<https://doi.org/10.1007/BF00404197>
114. *Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K.* Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges // *Acta Mech.*, 2008, vol. 195, pp. 263–274.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5>
115. *Naumenko K., Kutschke A., Kostenko Y., Rudolf T.* Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9–12% Cr steels at high temperature // *Engng. Fract. Mech.*, 2011, vol. 78, pp. 1657–1668.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.002>
116. *Altenbach H., Huang C., Naumenko K.* Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // *J. Strain Anal. for Engng. Design*, 2002, vol. 37, pp. 265–275.  
<https://doi.org/10.1243/0309324021515023>
117. *Naumenko K., Altenbach H.* A phenomenological model for anisotropic creep in a multipass weld metal // *Arch. Appl. Mech.*, 2005, vol. 74, pp. 808–819.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-005-0409-2>
118. *Ilyushin A.A.* On a theory of long-term strength // *Eng. J. Mech. Solid Bodies*, 1967, no. 3, pp. 21–35. (in Russian)
119. *Zavoychinskaya E.B., Kiyko I.A.* Introduction to the Theory Fracture Processes of Solids. Moscow: Moscow State Univ. Pub., 2004. 168 p. (in Russian)
120. *Pobedrya B.E.* On damage models of rheonomic media // *Izv. RAN. MTT*, 1998, no. 4, pp. 128–148. (in Russian)
121. *Kopnov V.A.* Long-term strength of anisotropic materials under complex stress state // *Probl. Strength*, 1982, no. 2, pp. 40–44. (in Russian)
122. *Mikhalevich V.M.* Tensor Models of Damage Accumulation. Vinnytsia: Vinnytsia Univ. Pub., 1998. 195 p. (in Ukrainian) <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/13977>
123. *Mikhalevich V.M.* Tensor models of long-term strength. Message 3. Criteria dependences under loading with a change in the stress state and directions of principal stresses // *Probl. of Strength*, 1996, no. 3, pp. 101–112. (in Russian)
124. *Lebedev A.O., Mikhalevich V.M.* To the theory of long-term strength // *Add. NASU*, 1998, no. 5, pp. 57–62. (in Ukrainian)
125. *Lebedev A.A., Mikhalevich V.M.* Criteria relations for determining the residual resource of materials // *Probl. of Strength*, 2006, no. 4, pp. 31–38. (in Russian)
126. *Betten J.* Net-stress analysis in creep mechanics // *Ing. Arch.*, 1982, vol. 52, no. 6, pp. 405–419.  
<https://doi.org/10.1007/BF00536211>
127. *Betten J.* Damage tensors in continuum mechanics // *J. Mech. Theor. Appl.*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–22.
128. *Bodner S.R.* A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials // in: *Physical Non-Linearities in Structural Analysis. IUTAM / Ed. by Hult J., Lemaitre J.* Heidelberg: Springer, 1981. pp. 21–28.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_4)
129. *Liu Y., Kageyama Y., Murakami S.* Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity // *Int. J. Mech. Sci.*, 1998, vol. 40, no. 2–3, pp. 147–158.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00045-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00045-3)
130. *Murakami S., Imaizumi T.* Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982, vol. 1, no. 5, pp. 743–761.
131. *Astafiev V.I.* Description of the fracture process under creep conditions // *Izv. Acad. Sci. USSR. MTT*, 1986, no. 4, pp. 164–169. (in Russian)

132. *Krajcinovic D.* Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.*, 1985, vol. 52, no. 4, pp. 829–834.  
<https://doi.org/10.1115/1.3169154>
133. *Krajcinovic D., Rinaldi A.* Statistical damage mechanics. Pt. I: Theory // *J. Appl. Mech.*, 2005, vol. 72, no. 1, pp. 76–85.  
<https://doi.org/10.1115/1.1825434>
134. *Krajcinovic D., Selvaraj S.* Creep rupture of metals. An analytical model // *J. Eng. Mater. Tech.*, 1984, vol. 106, no. 4, pp. 405–409.  
<https://doi.org/10.1115/1.3225738>
135. *Mankovsky V.A.* Criteria for damage and long-term strength of structural materials // *Mashinovedenie*, 1985, no. 1, pp. 87–94. (in Russian)
136. *Delobelle P., Trivaudey F., Oytana C.* High temperature creep damage under biaxial loading: INCO 718 and 316 (17–12 SPH) steels // *Nucl. Eng. Des.*, 1989, vol. 114, no. 3, pp. 365–377.  
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90114-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90114-3)
137. *Lemaître J.* A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits // *Mech. Behav. Mater. Proc. 4th Int. Conf. Stockholm, Sweden, Aug. 15–19, 1983.* Oxford: Pergamon, 1984. pp. 1047–1053.  
<https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-8372-2.50132-9>
138. *Lokoshchenko A.M.* Application of kinetic theory in the analysis of long-term high-temperature fracture of metals under conditions of a complex stress state (Review) // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 4, pp. 149–164. (in Russian)
139. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Teraud V.V., Basalov Yu.G., Agababyan V.S.* Creep and long-term strength of metals under non-stationary complex stress states (Review) // *Vestn. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.&Math. Sci.*, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318. (in Russian)
140. *Agakhi K.A., Georgievsky D.V.* Tensorial nonlinear constitutive relations of isotropic creep theory with tensor damage measure // *Izv. Tula State Univ. Natural Sci.*, 2013, no. 2, pp. 2–9. (in Russian)
141. *Neuber G.* Stress Concentration. Moscow; Leningrad: Gostekhteorizdat, 1947. (in Russian)
142. *Leonov M. Ya.* Fundamentals of Elastic Body Mechanics. Frunze: Acad. Sci. Kirghiz SSR Pub., 1963. 328 p. (in Russian)
143. *Novozhilov V.V.* On the necessary and sufficient criterion of brittle strength // *Appl. Math.&Mech.*, 1969, vol. 33, no. 2, pp. 212–222. (in Russian)
144. *Leonov M. Ya., Panasyuk V.V.* Development of the smallest cracks in a solid // *Appl. Mech.*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391–401. (in Russian)
145. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, pp. 100–104.
146. *Barenblatt G.I.* Mathematical theory of equilibrium cracks formed during brittle fracture // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1961, no. 4, pp. 3–56. (in Russian)
147. *Zhurkov S.N., Kuksenko V.S., Slutsker A.I.* Formation of submicroscopic cracks in polymers under load // *Phys. Solid State*, 1969, vol. 11, iss. 1, pp. 296–302. (in Russian)
148. *Zhurkov S.N., Kuksenko V.S., Slutsker A.I.* Micromechanics of polymer fracture // *Journal Strength of Materials*. 1971. no. 2. pp. 45–50. (in Russian)
149. *Zobnin A.I.* Propagation of cracks in a polymer material // *Izv. Acad. Sci. USSR. MTT*, 1974, no. 1, pp. 53–56. (in Russian)
150. *Zhurkov S.N., Kuksenko V.S., Petrov V.A., Savelyev V.N., Sultanov U.* On predicting the destruction of rocks // *Izv. Acad. Sci. USSR. Phys. of the Earth*, 1977, no. 6, pp. 11–18. (in Russian)
151. *Borodich F.M.* Self-similar models and size effect of multiple fracture // *Fractals*, 2001, vol. 9 (1), pp. 17–30.
152. *Manoylov A.V., Borodich F.M., Evans H.P.* Modelling of elastic properties of sintered porous materials // *Proc. R. Soc. A*, 2013, vol. 469, iss. 2154, art. no. 20120689.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0689>
153. *Lomakin E., Fedulov B., Fedorenko A.* Strain rate influence on hardening and damage characteristics of composite materials // *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, pp. 1875–1887.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02806-4>

154. Fedulov B., Fedorenko A., Safonov A., Lomakin E. Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions // *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, pp. 2033–2040.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1817-4>
155. Almuramady N., Borodich F. M., Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // *Tribol. Int.*, 2019, vol. 129, pp. 202–213.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.07.049>
156. Goryacheva I. G., Chekina O. G. Surface fatigue damage model // *Frict. & Wear*, 1990, vol. 11, no. 3, pp. 1–11. (in Russian)
157. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Kluwer, 1998. vol. 61. 346 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>
158. Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half space in contact with periodic system of indenters // *Wear*, 2010, vol. 268 (11), pp. 1417–1422.
159. Torskaya E. V. Modeling of fatigue damage of coated bodies under frictional loading // *Phys. Meso-mech.*, 2016, vol. 19 (1), pp. 68–74. (in Russian)
160. Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Stress and fracture analysis in periodic contact problem for coated bodies // *Fatig. & Fract. Engng. Mater. & Struct.*, 2003, vol. 26, no. 4, pp. 343–348.