

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского  
Научно-образовательный Крымский математический центр  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
Региональный научно-образовательный математический центр  
Южного федерального университета  
Российский университет дружбы народов  
Математический Фонд Крыма

**Сборник материалов  
международной конференции  
*КРОМШ-2024***

XXXV Крымская Осенняя  
Математическая Школа-симпозиум  
Н.Д. Копачевского по спектральным  
и эволюционным задачам

Кача (Севастополь), Российская Федерация,  
7 – 16 сентября 2024 г.



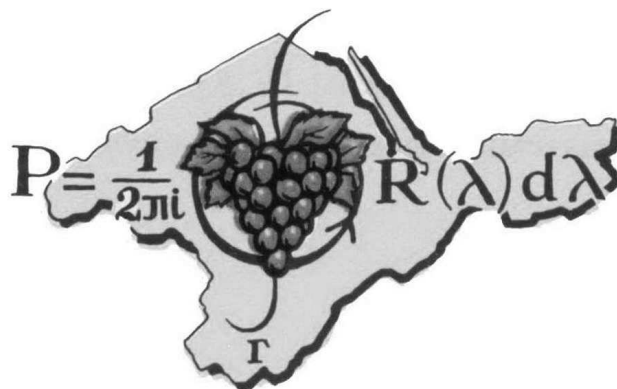
Симферополь  
ИТ «АРИАЛ»  
2024

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского  
Научно-образовательный Крымский математический центр  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
Региональный научно-образовательный математический центр  
Южного федерального университета  
Российский университет дружбы народов  
Математический Фонд Крыма

**Сборник материалов  
международной конференции  
*КРОМШ-2024***

XXXV Крымская Осенняя  
Математическая Школа-симпозиум  
Н.Д. Копачевского по спектральным  
и эволюционным задачам

Кача (Севастополь), Российская Федерация,  
7 – 16 сентября 2024 г.



Симферополь  
ИТ «АРИАЛ»  
2024

УДК 517.9:519.2  
ББК 22.15+22.16+22.17  
С 23

*Печатается по решению Организационного комитета  
XXXV Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума  
по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2024).*

Конференция проводится при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431 от 28 февраля 2024 г.

**Ответственный за выпуск:**

Муратов Мустафа Абдурешитович, д.ф.-м.н., профессор, председатель Организационного комитета КРОМШ-2024.

**Ответственный редактор:**

Закора Дмитрий Александрович, д.ф.-м.н., доцент.

**Редакционная коллегия:**

Муратов М.А., Скубачевский А.Л., Суслина Т.А., Шкаликков А.А.,  
Закора Д.А., Пашкова Ю.С., Старков П.А., Фордук К.В., Якубова А.Р.

С 23      Сборник материалов международной конференции “XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам”. – Симферополь : ИТ «АРИАЛ», 2024. – 134 с.

ISBN 978-5-907742-61-1

В сборнике представлены материалы работ участников международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум Н.Д. Копачевского (КРОМШ-2024)”, посвящённых различным направлениям исследований в области математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, финансовой математики, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, дискретной математики и методики преподавания.

В книге сохранена авторская редакция статей, выполнено лишь частичное техническое редактирование; в связи с этим редакционная коллегия не несёт ответственности за возможные неточности.

Материал, представленный в сборнике, может быть полезен научным сотрудникам, работникам высшего образования, аспирантам и студентам.

УДК 517.9:519.2

- © Коллектив авторов, 2024
- © НО “Крымский математический центр”, 2024
- © Математический Фонд Крыма, 2024
- © ФГАОУ ВО “Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского”, 2024
- © ИТ «АРИАЛ», макет, оформление, 2024

ISBN 978-5-907742-61-1

## Секция 1. Общая и спектральная теория операторов

## Об операторе Шредингера с самоподобными свойствами

АНДРОНОВ Н. И.

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*(Санкт-Петербург, Россия)*

*E-mail: [nickandronick@gmail.com](mailto:nickandronick@gmail.com)*

Изучаются спектральные свойства оператора Шредингера, который формально определен выражением

$$H_\lambda \psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta(x - x_\ell)\psi, \quad x_\ell = a\ell^2/2 + b\ell + c, \quad (1)$$

действует в  $L_2(\mathbb{R}_+)$  и имеет условие Дирихле в нуле.  $\lambda > 0$ ,  $a \in (0, 1)$ ,  $b \in (0, 1)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  — постоянные параметры. Строгий смысл оператору (1) придается, например, в [1]:

$$\mathcal{D}(H_\lambda) = \{\psi \in W_2^1(\mathbb{R}_+) \cap W_2^2(\mathbb{R}_+ \setminus \{x_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}): \psi'(x_\ell+) - \psi'(x_\ell-) = \lambda\psi(x_\ell), \ell = 0, 1, \dots\}.$$

Для исследования спектральных свойств применима модификация теории Гилберта-Пирсон [2], описанная в [3].

Оператор (1) представляет интерес для спектральной теории, наличием сингулярно непрерывного спектра. Для похожего оператора такой спектр был обнаружен в [4], однако там не было исследовано поведение соответствующих обобщенных собственных функций, что планируется сделать.

Исследование решений уравнения (1) сведено к изучению решений разностного уравнения почти Матье

$$\psi_{\ell+1} + \psi_{\ell-1} + 2\nu \cos(\pi(\omega\ell + \theta))\psi_\ell = 0 \quad (2)$$

с комплексной константой связи  $\nu = e^{i\pi\omega/2} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4E}}$ , частотой  $\omega = \{\frac{a\sqrt{E}}{\pi}\}$  и нулевым спектральным параметром. Уравнение почти Матье изучается уже более 40 лет, и в случае с вещественной константой связи известно, что при  $|\nu| > 1$  нет абсолютно непрерывного спектра, а, если к тому же частота  $\omega$  — Лиувиллева, то весь спектр сингулярно непрерывен. У рассматриваем же случае константа связи комплексная, а кроме того и частота, и константа связи, и фаза зависят от спектрального параметра  $E$  исходного уравнения. Это делает задачу интересной и её исследование непростым.

Уравнение (2) записывается в виде системы разностных уравнений с антипериодической матрицей

$$\mathbb{M}(x, \nu) = \begin{pmatrix} -2\nu \sin(\pi x) & -e^{-i\pi x} \\ e^{i\pi x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

А именно: первая компонента векторного решения

$$F_{\ell+1} = \mathbb{M}(\omega\ell + \theta, \nu)F_\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

умноженная на  $e^{i\pi\omega\ell/2}$  является решением уравнения (2), и наоборот.

Пусть  $\ell \mapsto \mathcal{F}_\ell(\omega, \theta, \nu)$  — решение задачи Коши для уравнения (4) с начальным данным  $\mathcal{F}_0(\omega, \theta, \nu)$  равным единичной матрице. Это фундаментальное матричное решение уравнения (4); любое векторное решение (4) тривиально через него выражается. Имеют место явные формулы

$$\mathcal{F}_{\ell+1}(\omega, \theta, \nu) = \mathbb{M}(\omega\ell + \theta, \nu) \dots \mathbb{M}(\omega + \theta, \nu)\mathbb{M}(\theta, \nu), \quad \ell > 0,$$

и

$$\mathcal{F}_\ell(\omega, \theta, \nu) = \mathbb{M}^{-1}(\omega\ell + \theta, \nu) \dots \mathbb{M}^{-1}(-2\omega + \theta, \nu)\mathbb{M}^{-1}(-\omega + \theta, \nu), \quad \ell < 0.$$

Однако они, очевидно, не дают ответа на вопрос о поведении решений уравнения (2) на бесконечности, так как оно определяется поведением  $\mathcal{F}_\ell(\omega, \theta, \nu)$  при больших  $\ell$ . Основной результат работы нацелен на исследование этого поведения.

Вместе с уравнением (4) рассмотрим уравнение

$$\Phi(x + \omega) = \mathbb{M}(x, \nu)\Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Напомним, что решение  $\Phi$  уравнения (5) называется *фундаментальным* матричным решением, если  $\det \Phi$  не зависит от  $x$  и не равен нулю [6].

Доказана следующая теорема:

**Теорема 1** (Перенормировочная формула). *Существует такое фундаментальное матричное решение уравнения (5), что для любого  $N \in \mathbb{Z}$  выполнено*

$$\mathcal{F}_N(\omega, \theta, \nu) = (-1)^L \Phi(\{\theta + N\omega\})\sigma_2 \mathcal{F}_{N_1}(\omega_1, \theta_1, \nu_1)\sigma_2 \Phi^{-1}(\theta), \quad (6)$$

$$N_1 = -[\theta + N\omega], \quad \omega_1 = \{1/\omega\}, \quad \theta_1 = \{\theta/\omega\}, \quad \nu_1 = \nu^{1/\omega}, \quad L \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где  $[x]$  — целая часть  $x$ ,  $\{x\}$  — дробная, а  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  — матрица Паули.

Натуральное число  $L$  зависит от  $N$  и  $\theta$ . Очевидно, множитель  $(-1)^L = \pm 1$  и никак не влияет на поведение  $\mathcal{F}_N(\omega, \theta, \nu)$  при больших  $N$ , поэтому явную формулу для  $L$  здесь не приводим.

Заметим, что, если число  $|N|$  большое, то в правой части (6) большим является только  $|N_1|$ . При этом, так как  $0 < \omega < 1$ , то  $|N_1| < |N|$ . Таким образом, формула (6) позволяет выразить решение (4) с большим  $N$  через решение уравнения того же вида с новыми параметрами и меньшим  $N_1$ . Применяя формулу (6) достаточное число раз (порядка  $\ln(N)$ ), можно выразить решение (4) со сколь угодно большим значением целочисленной переменной  $N$  через решение с  $N$  порядка единицы.

В заметке [5] теорема 1 была намечена, но доказательства нигде не было приведено. В данной работе восполняется этот пробел.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Альбеверио С. *Решаемые модели в квантовой механике* / С. Альбеверио, Р. Хеэг-Крон — М.: Мир, 1991. — 568 с. — ISBN 5-03-001905-7.
- [2] Gilbert D.J. *On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrodinger operators* / D.J. Gilbert, D.B. Pearson // *Journal of mathematical analysis and applications*. — 1987. — Vol. 128, No. 1. — P. 30-56.
- [3] Christ C.S. *Spectral theory of one-dimensional Schrodinger operators with point interactions* / C.S. Christ, G. Stolz // *Journal of mathematical analysis and applications*. — 1994. — Vol. 184, No. 3. — P. 491-516.

- [4] Pearson D.B. *Singular continuous measures in scattering theory* / D.B. Pearson // *Commun.Math. Phys.* – 1978. – Vol. 60. – P. 13–36.
- [5] Fedotov A. *Pointwise existence of the Lyapunov exponent for a quasi-periodic equation* / A. Fedotov, F. Klopp // *Mathematical Results in Quantum Mechanics.* – World Scientific, P. 55-66 – ISBN 978-981-4618-13-7.
- [6] Buslaev V. *On the difference equations with periodic coefficients* / V. Buslaev, A. Fedotov // *Advances in Theor. and Math. Phys.* – 2001. – Vol. 5, No. 6. – P. 1105-1168.

## К теории нормированных идеальных пространств измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

БИКЧЕНТАЕВ А. М.

*Казанский федеральный университет (Казань, Россия)*  
*E-mail: [airat.bikchentaev@kpfu.ru](mailto:airat.bikchentaev@kpfu.ru)*

ДАРВИШ ТАЛЕБ М. Ф.

*Казанский федеральный университет (Казань, Россия)*

МУРАТОВ М. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Пусть  $\mathcal{M}$  — полуконечная алгебра фон Неймана,  $\tau$  — точный нормальный полуконечный след на  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}^{\text{pr}}$  — решетка проекторов ( $P = P^2 = P^*$ ) в  $\mathcal{M}$ ,  $S(\mathcal{M}, \tau)$  — \*-алгебра  $\tau$ -измеримых операторов,  $\mu(t; X)$  — функция сингулярных значений оператора  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ :

$$\mu(t; X) = \inf \{ \|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t \}, \quad t > 0.$$

**Определение.** Линейное подпространство  $\mathcal{E}$  в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  называется *идеальным пространством* (ИП) на  $(\mathcal{M}, \tau)$ , если

- 1) из  $X \in \mathcal{E}$  следует, что  $X^* \in \mathcal{E}$ ;
- 2) из  $X \in \mathcal{E}$ ,  $Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $|Y| \leq |X|$  следует, что  $Y \in \mathcal{E}$ .

**Определение** (см. [2]). Пусть  $\mathcal{E}$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ . Неотрицательная функция  $x \rightarrow \|x\|$  на  $\mathcal{E}$  называется *F-нормой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- 2)  $\|ax\| = \|x\|$  для любого  $x \in \mathcal{E}$  и любого  $a \in \mathbb{K}$  такого, что  $|a| = 1$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in \mathcal{E}$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n x\| = 0$  для любого  $x \in \mathcal{E}$  и  $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ;
- 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a x_n\| = 0$  для любого  $a \in \mathbb{K}$  и  $\{x_n\} \subset \mathcal{E}$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ ;
- 6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n x_n\| \rightarrow 0$  для  $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$  и  $\{x_n\} \subset \mathcal{E}$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ .

Линейное пространство  $\mathcal{E}$  с F-нормой  $\|\cdot\|$  называется *F-пространством*, если оно полно относительно метрики  $\delta(x, y) = \|x - y\|$ .

**Определение.** Линейное подпространство  $\mathcal{E}$  в  $S(\mathcal{M}, \tau)$ , снабженное  $F$ -нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  называется  $F$ -нормированным ИП ( $F$ -НИП) на  $(\mathcal{M}, \tau)$  если

- 1) из  $X \in \mathcal{E}$  следует, что  $X^* \in \mathcal{E}$  и  $\|X^*\|_{\mathcal{E}} = \|X\|_{\mathcal{E}}$ ;
- 2) из  $X \in \mathcal{E}, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $|Y| \leq |X|$  следует, что  $Y \in \mathcal{E}$  и  $\|Y\|_{\mathcal{E}} \leq \|X\|_{\mathcal{E}}$ .

**Теорема 1.**

1. Если  $\mathcal{E}$  – нормированное идеальное пространство (НИП) на  $(\mathcal{M}, \tau)$ , то

$$\|A\|_{\mathcal{E}} \leq \|A + iB\|_{\mathcal{E}} \tag{1}$$

для всех эрмитовых операторов  $A, B \in \mathcal{E}$  (см. [1, 3]).

2. Если операторы  $A, B \in (L_1 + L_{\infty})(\mathcal{M}, \tau)$  эрмитовы, то

$$A \preceq A + iB.$$

**Замечание.** Неравенство (1) не обобщается на идеалы Шаттена–фон Неймана  $\mathfrak{S}_p$ ,  $0 < p < 1$  (см. [4]).

Кроме того, хорошо известно неравенство

$$\mu(t; A) \leq \mu(t; A + iB),$$

которое имеет место для всех  $t > 0$ ,  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$  и эрмитовых  $B \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ , не обобщается на все эрмитовы операторы  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ .

Обозначим через  $K(X)$  преобразование Кэли оператора  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ :

$$K(X) = \frac{X + iI}{X - iI} = (X - iI)^{-1}(X + iI) = (X + iI)(X - iI)^{-1}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{E}$  –  $F$ -НИП на  $(\mathcal{M}, \tau)$  и  $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$  такие, что  $X - Y \in \mathcal{E}$ . Тогда

1.  $\|K(X) - K(Y)\|_{\mathcal{E}} \leq 2\|X - Y\|_{\mathcal{E}}$ .
2. Для всех  $t > 0$  выполнено  $\mu(t; K(X) - K(Y)) \leq 2\mu(t; X - Y)$  (см. [4]).

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fack T. *Type and cotype inequalities for non commutative  $L^p$ -spaces* / Т. Fack // *Journal of Oper. Theory.* – 1987. – Vol. 17. – P. 255-279.
- [2] Rolewicz S. *Metric linear space* / S. Rolewicz. – Warsaw: PWM, 1985. – 459 p. – ISBN 90-277-319-1480-0
- [3] Сукочев Ф.А. *Неравенство треугольника для измеримых операторов относительно порядка Харди–Литтлвуда* / Ф.А. Сукочев, В.И. Чилин // *Изв. АН Уз. ССР, сер. физ.-мат. наук.* – 1988. – № 4. – С. 44-50.
- [4] Bikchentaev A.M. *Ideal spaces of measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II.* / A.M. Bikchentaev, M.F. Darwish, M.A. Muratov // *Ann. Funct. Anal.* – 2024. – Vol. 15, No. 3. – Paper No. 61, 13 pp.

# Нормальные движения пространственного маятника с полостью, целиком заполненной вязкоупругой жидкостью модели Олдройта

Войтицкий В. И.

*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы  
(Москва, Россия)*

*E-mail: voytitskiy\_vi@rudn.ru*

Цветков Д. О.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Рассматривается проблема малых пространственных движений маятника с полостью, целиком заполненной вязкоупругой жидкостью обобщенной модели Олдройта. Считаем, что движения маятника с жидкостью описываются линейаризованным уравнением изменения кинетического момента относительно неподвижной точки, а уравнения жидкости в полости удовлетворяют линейаризованному уравнению Навье-Стокса с дополнительными интегральными слагаемыми (см., например, [1, гл. 7, 11], а также [2])

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho_1 \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (1)$$

$$\vec{v}(t, x) = \vec{u}(t, x) + \sum_{k=1}^q \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}(s, x) ds.$$

Здесь  $\vec{u}(t, x)$  — поле скоростей жидкости;  $p(t, x)$  — поле отклонений давления от равновесного;  $\vec{\omega}(t)$  — вектор угловой скорости;  $\vec{r}$  — радиус-вектор;  $\mu > 0$  — динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости;  $\rho_1 > 0$  — плотность жидкости;  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\beta_k > 0$  — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщенной модели Олдройта (в частном случае при всех  $\alpha_k = 0$  получаем классическую вязкую жидкость);  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа;  $\vec{f}(t, x)$  — малое поле внешних сил, наложенных на гравитационное поле. Также на границе полости  $S_1 = \partial\Omega_1$  задаём условие прилипания  $\vec{u} = \vec{0}$  и начальные условия на основные динамические переменные.

С применением теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, задача сводится к дифференциально-операторному уравнению первого порядка с главным максимальным аккретивным оператором. Отсюда при естественных условиях на начальные данные и правую часть доказывается теорема о существовании и единственности сильного решения.

Соответствующая спектральная задача исследуется методами теории операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой. После замен проблема сводится к исследованию свойств  $J$ -самосопряженного оператора в пространстве Крейна  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Отсюда следует, что задача имеет дискретный спектр, располагающийся в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. Также установлено, что не вещественный спектр содержит не более конечного числа собственных значений, при этом положительные собственные значения имеют в качестве предельных точек бесконечность и  $q$  положительных чисел (являющиеся



нулями характеристической функции, зависящей только от свойств жидкости). Эти результаты обобщают случай классической вязкой жидкости в полости, рассмотренный в [3]. Установлено, что спектральная задача в этом случае имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой на бесконечности.

Также изучены проблемы базисности корневых элементов. Доказано, что часть собственных и присоединенных элементов, соответствующих ветви, сходящейся к бесконечности, образует (после проектирования) базис Рисса с конечным дефектом в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_1$ . Оставшиеся корневые элементы после проектирования образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве  $\mathcal{H}_2$ . Доказательство здесь проводилось теми же методами, что и в статье [4]. Полученные результаты (за исключением наличия ветви сходящейся к нулю) во многом аналогичны свойствам классического пучка С.Г. Крейна, который возникает в задачах для вязкой жидкости с наличием свободной поверхности (см., например, [5, 6]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kopachevsky N.D. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2.* / N.D. Kopachevsky, S.G. Krein. – Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 2003. – 444 p. – ISBN 978-3-0348-9425-8.
- [2] Azizov T.Ya. *An operator approach to the study of the Oldroyd hydrodynamic model* / T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D. Orlova // *Mathematical Notes.* – 1999. – Vol. 65, No. 6. – P. 773-776.
- [3] Батыр Э.И. *Малые движения и нормальные колебания системы сочленённых гироскопов* / Э.И. Батыр, Н.Д. Копачевский // *Современная математика. Фундаментальные направления.* – 2013. – Т. 49. – С. 5-88.
- [4] Azizov T.Ya. *To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container* / T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevsky, R. Mennicken // *Math. Nachr.* – 2003. – Vol. 248-249. – P. 3-39.
- [5] Войтицкий В.И. *О колебаниях сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными жидкостями* / В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский // *Современная математика. Фундаментальные направления.* – 2019. – Т. 65, Вып. 3. – С. 434-512.
- [6] Voytitsky V.I. *Strong Dissipative Hydrodynamical Systems and the Operator Pencil of S. Krein* / V.I. Voytitsky // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* – 2021. – Vol. 42, No. 5. – P. 1094-1112.

## Об общем подходе к построению самосопряжённой дилатации узла диссипативного оператора

Кудряшов Ю. Л.

Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

E-mail: kudryashov\_2889@mail.ru

Пусть  $A$  — диссипативный, плотно заданный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$ ,  $-i \in \rho(A)$ .

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} R &= (A + iI)^{-1}, \\ B_+ &= iR - iR^* - 2R^*R, \\ B_- &= iR - iR^* - 2RR^*, \\ T &= I - 2iR. \end{aligned}$$

**Определение** (см. [1]). Совокупность гильбертовых пространств  $\mathfrak{H}$ ,  $E_-$ ,  $E_+$  и операторов  $\Phi_- \in [E_-, \mathfrak{H}]$ ,  $\Phi_+ \in [\mathfrak{H}, E_+]$ ,  $K \in [E_-, E_+]$ ,  $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ , которые удовлетворяют соотношениям  $B_+ = \Phi_+^*$ ,  $B_- = \Phi_- \Phi_-^*$ ,  $T^* \Phi_- + \Phi_+^* K = 0$ ,  $T \Phi^* + \Phi K^* = 0$ ,  $2\Phi_-^* \Phi_- + K^* K = I_-$ ,  $2\Phi_+ \Phi_+^* + K K^* = I_+$ , где  $I_-$ ,  $I_+$  единичные операторы в пространствах  $E_-$  и  $E_+$ , называется операторным узлом диссипативного оператора  $A$ .

Пусть в гильбертовых пространствах  $H_-$  и  $H_+$  действуют замкнутые максимальные симметрические операторы  $F_\pm$  с индексом дефекта  $(0, q_+)$  и  $(q_-, 0)$ , где  $q_\pm = \dim E_\pm = \dim \mathfrak{R}_\pm$ , а  $\mathfrak{R}_\pm$  — дефектные подпространства операторов  $F_\pm$ .

Существует изометрия  $U_\pm : \mathfrak{R}_\pm \rightarrow E_\pm$ .

**Определение** (см. [2]). Пары  $(\mathfrak{R}_\pm; \Gamma_\pm)$ ,  $\Gamma_\pm : \text{dom}(F_\pm^*) \rightarrow \mathfrak{R}_\pm$  называются граничными двойками операторов  $F_\pm^*$ , если выполняются следующие условия

- 1)  $(F_\pm^* f, g)_{H_\pm} - (f, F_\pm^+ g)_{H_\pm} = 2i(\Gamma_\pm f, \Gamma_\pm g)_{\mathfrak{R}_\pm}$  при всех  $\{f, g\} \subset \text{dom}(F_\pm^*)$ .
- 2) отображение:  $\text{dom}(F_\pm^*) \ni f \rightarrow \Gamma_\pm f \in \mathfrak{R}_\pm$  сюръективно.

Построим гильбертово пространство  $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$  и оператор  $S$  следующим образом. Вектор  $h = (h_-, h_0, h_+)^T$ , где  $h_\pm \in H_\pm$ ,  $h_0 \in \mathfrak{H}$  принадлежит  $\text{dom} S$ , тогда и только тогда, когда

- 1)  $h_\pm \in \text{dom}(F_\pm^*)$ ,
- 2)  $\varphi = h_0 + \Phi_- U_- h_- \in \text{dom} A$ ,
- 3)  $U_+ \Gamma_+ h_+ = -K U_- \Gamma_- h_- + \Phi_+ (A + iI) \varphi$ ,  $Sh = (F_-^* h_-, -ih_0 + (A + iI) \varphi, F_+^* h_+)$

**Теорема.** Оператор  $S$  является самосопряжённой дилатацией узла оператора  $A$ .

В [2] такая дилатация была построена без понятия узла и является частным случаем данной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кудряшов Ю.Л. Самосопряжённая дилатация операторного узла диссипативного оператора / Ю.Л. Кудряшов // Динамические системы. — 2013. — № 1-2. — С. 45-48.
- [2] Третьяков Д.В. Об общем подходе к построению самосопряжённой дилатации диссипативного оператора / Д.В. Третьяков, Ю.Л. Кудряшов // Записки научн. сем. ПОМИ — 2021. — Т. 503. — С. 121-136.

## О пространстве Гельфанда-Шилова типа $\mathcal{S}$

МУСИН И. Х.

ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия)

E-mail: [musin\\_ildar@mail.ru](mailto:musin_ildar@mail.ru)

Пусть  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  — семейство функций  $\mathcal{N}_\nu : \mathbb{Z}_+^n \rightarrow (0, \infty)$  таких, что для любого  $\nu \in \mathbb{N}$ :

$i_1$ ) существуют числа  $a_1 = a_1(\mathcal{N}_\nu) > 0$ ,  $a_2 = a_2(\mathcal{N}_\nu) > 0$  такие, что

$$\mathcal{N}_\nu(\alpha) \geq a_1 a_2^{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

$$i_2) \lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{N}_{\nu+1}(\alpha)}{\mathcal{N}_\nu(\alpha)} = +\infty.$$

Следуя схеме построения пространства  $S^\beta$  Гельфанда-Шилова по семейству  $\mathcal{N}$  введём пространство  $\mathcal{S}^\mathcal{N}$ . Вначале по  $\nu \in \mathbb{N}$  и  $m \in \mathbb{Z}_+$  определим пространство

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{N}_\nu} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{N}_\nu(\alpha)} < \infty\}.$$

Эквивалентная топология в  $\mathcal{S}_m^{\mathcal{N}_\nu}$  может быть введена с помощью норм

$$q_{m,\nu}(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n : |\beta| \leq m}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\mathcal{N}_\nu(\alpha)}.$$

Очевидно, пространство  $\mathcal{S}_{m+1}^{\mathcal{N}_\nu}$  непрерывно вложено в  $\mathcal{S}_m^{\mathcal{N}_\nu}$ . Пусть  $\mathcal{S}^{\mathcal{N}_\nu} := \bigcap_{m=0}^\infty \mathcal{S}_m^{\mathcal{N}_\nu}$ . Наделим  $\mathcal{S}^{\mathcal{N}_\nu}$  топологией, определяемой семейством норм  $\rho_{m,\nu}$  ( $m \in \mathbb{Z}_+$ ). Ввиду условия  $i_2$ )  $\mathcal{S}^{\mathcal{N}_\nu}$  непрерывно вложено в  $\mathcal{S}^{\mathcal{N}_{\nu+1}}$ . Положим  $\mathcal{S}^\mathcal{N} := \bigcup_{\nu=1}^\infty \mathcal{S}^{\mathcal{N}_\nu}$ .

**Теорема.** Пусть функции семейства  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  таковы, что для любого  $\nu \in \mathbb{N}$ :

$i_3$ ) найдутся числа  $s_\nu \in \mathbb{N}$  и  $A_\nu, B_\nu > 0$  такие, что для любого  $m \in \mathbb{N}$

$$\max_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha|=2m} \mathcal{N}_\nu(\alpha) \leq A_\nu B_\nu^{2m} \min_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n : |\beta|=m} \mathcal{N}_{\nu+s_\nu}^2(\beta);$$

$i_4$ ) существуют числа  $l_\nu > 0, Q > 1$  такие, что для любых  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$l_\nu Q^{|\alpha|} \mathcal{N}_\nu(\alpha) \leq \mathcal{N}_{\nu+1}(\alpha).$$

Тогда функция  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  принадлежит пространству  $\mathcal{S}^\mathcal{N}$  тогда и только тогда, когда существуют числа  $p \in \mathbb{N}$  и  $C > 0$  такие, что

$$|(D^\beta f)(x)| \leq C \mathcal{N}_p(\beta), \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

## Оценка близости частичных сумм разложений по корневым функциям регулярного линейного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье

РЫХЛОВ В. С.

*Саратовский государственный университет (Саратов, Россия)*  
*E-mail: RykhlovVS@yandex.ru*

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $L$ , порождённый дифференциальным выражением  $n$ -го порядка на интервале  $[0, 1]$

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad p_j(x) \in L[0, 1],$$

и линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов, является задача о разложении заданной функции в ряд по их корневым функциям (к.ф.). Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удастся доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по к.ф. оператора  $L$  и в тригонометрический ряд Фурье, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена.

Тригонометрическая система является системой к.ф. оператора  $L_0$ , порождённого дифференциальным выражением

$$\ell_0(y) = y^{(n)},$$

и периодическими краевыми условиями

$$y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Изучается влияние свойств коэффициента  $p_1(x)$  и разлагаемой функции  $f(x)$  на оценку близости частичных сумм разложений в ряды по к.ф. операторов  $L$  и  $L_0$ .

Пусть  $\lambda_\nu, \lambda_{0\nu}, \nu = 0, 1, \dots$ , есть собственные значения (с.з.) операторов  $L$  и  $L_0$ , соответственно. Обозначим через  $D_\delta$  область комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , получающуюся из  $\mathbb{C}$  удалением из нее всех с.з. операторов  $L$  и  $L_0$  вместе с кругами с центрами в с.з. и достаточно малого фиксированного радиуса  $\delta > 0$ .

Из асимптотики с.з. [1, с. 74–75] следует, что существует последовательность  $\{r_m\}_{m=1}^\infty$  вещественных чисел, для которых  $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$  и контуры  $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$ , начиная с некоторого достаточно большого  $m$ , лежат в области  $D_\delta$ .

Между соседними контурами находятся не более двух с.з.  $\lambda_\nu$  оператора  $L$ , начиная с некоторого  $m$ , и одно двукратное с.з.  $\lambda_{0\mu}$  оператора  $L_0$ . Рассмотрение таких контуров обусловлено также еще и структурой обычного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Обозначим через  $R_\lambda$  и  $R_{0\lambda}$  резольвенты операторов, соответственно,  $L$  и  $L_0$ . Пусть

$$S_m(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda f \, d\lambda, \quad \sigma_m(f, x) \equiv S_{0m}(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f \, d\lambda.$$

Известно [1, с. 92], что  $S_m(f, x)$  есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции  $f(x)$  по к.ф. оператора  $L$ , содержащая слагаемые, соответствующие с.з.  $\lambda_\nu$ , для которых  $|\lambda_\nu| < r_m$ , а  $\sigma_m(f)$  есть частичная сумма порядка  $m$  обычного тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$  (частичная сумма ортогонального ряда Фурье функции  $f(x)$  по к.ф. оператора  $L_0$ , содержащая слагаемые, соответствующие с.з.  $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$ , для которых  $|\nu| \leq m$ ), то есть

$$\sigma_m(f, x) := \sum_{k=-m}^m (f, e_k)e_k(x), \quad \text{где} \quad (f, e_k) := \int_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi} d\xi.$$

Сформулируем основной результат об оценке близости частичных сумм разложений по к.ф. операторов  $L$  и  $L_0$ . Для этого введём следующие модули непрерывности

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left( \int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{где } 1 \leq p < \infty,$$

$$\omega(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |f(t+h) - f(t)|.$$

Под  $L_\infty[0, 1]$  понимаем пространство  $C[0, 1]$ .

Предположим, что краевые условия (1) регулярны по Биркгофу в смысле определения [1, с. 66–67],  $f(x) \in L_r[0, 1]$ , коэффициент  $p_1(x) \in L_q[0, 1]$ , где параметры  $q$  и  $r$  являются дополнительными, то есть удовлетворяют соотношениям  $1/q + 1/r = 1$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ .

**Теорема 1.** Для любого компакта  $K \subset (0, 1)$  и натурального  $m \gg 1$

$$\|S_m(f, x) - \sigma_m(f, x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K)B_m,$$

где

$$B_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left( \ln m \omega \left( p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + \hat{H}_q(p_1, m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left( f, \frac{1}{k} \right)_r + \left( 1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left( p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left( p_1, \frac{1}{k} \right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}.$$

Здесь

$$\theta_q(p_1, \delta) = \sup_{\tau \in [0, \delta]} \theta_{1q}(p_1, \tau) \quad \text{при } 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \theta_q(p_1, \delta) \equiv 1 \quad \text{при } q = \infty,$$

$$\text{где } \theta_{1q}(p_1, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left( \omega \left( p_1, \frac{1}{k} \right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right);$$

$$\hat{H}_q(p_1, m) = \left( \int_{1/m}^1 \xi^{-1} \hat{\theta}_q^q(p_1, \xi) d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \hat{H}_q(p_1, m) \equiv 1 \quad \text{при } q = \infty,$$

$$\text{где } \hat{\theta}_q(p_1, \xi) = \sup_{\tau \in [0, \xi]} \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau), \quad \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left( \omega \left( p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left( p_1, \frac{1}{k} \right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

**Об изоморфизме минимальных самосопряженных дилатаций общего вида и абсолютно непрерывном спектре**

ТРЕТЬЯКОВ Д. В.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
*E-mail: [dvttvd@mail.ru](mailto:dvttvd@mail.ru)*

Пусть  $\mathfrak{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство (ГП),  $A$  — плотно заданный диссипативный оператор, действующий в  $\mathfrak{H}$ , причем  $-i \in \rho(A)$ ,  $R_{-i} = (A + i)^{-1}$ . Рассмотрим неотрицательные операторы  $B_+ = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^*R_{-i}$ ,  $B_- = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}R_{-i}^*$ , неотрицательные квадратные корни  $Q_{\pm} = \sqrt{B_{\pm}}$  и дефектные подпространства  $\mathfrak{Q}_{\pm} = \text{clos}(Q_{\pm}\mathfrak{H})$  оператора  $A$ .

**Определение 1** (см. [1]). Самосопряженный оператор  $S$ , действующий в ГП  $\mathbb{H}$ , называется *дилатацией* диссипативного оператора  $A$ , если:

- 1)  $\mathfrak{H} \subset \mathbb{H}$  2)  $(A - \lambda)^{-1} = P(S - \lambda)^{-1}|_{\mathfrak{H}}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}^-$ , где  $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  — ортопроектор,  $\mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z < 0\}$ .

Рассмотрим ГП  $\mathfrak{D}_{\pm}$ , в которых действуют замкнутые максимальные симметрические операторы  $F_{\pm}$  с индексом дефекта  $(0, \mathfrak{q}_+)$  и  $(\mathfrak{q}_-, 0)$  соответственно, где  $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{Q}_{\pm} = \dim \mathfrak{N}_{\pm}$ , а  $\mathfrak{N}_{\pm}$  — дефектные подпространства операторов  $F_{\pm}$ . Пусть  $\Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$  — изометрии.

**Определение 2** (см. [2]). Пары  $\langle \mathcal{H}_{\pm}; \Gamma_{\pm} \rangle$ , где  $\mathcal{H}_{\pm}$  — ГП со скалярными произведениями  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_{\pm}}$ ,  $\Gamma_{\pm} : \text{dom}(F_{\pm}^*) \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}$  — операторы, называются *граничными двойками* операторов  $F_{\pm}^*$ , если выполнены следующие условия:

- а)  $\forall f, g \in \text{dom}(F_{\pm}^*) \quad (F_{\pm}^*f, g)_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (f, F_{\pm}^*g)_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \mp 2i(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}g)_{\mathcal{H}_{\pm}}$ ;  
 б) отображения  $\text{dom}(F_{\pm}^*) \ni f \mapsto \Gamma_{\pm}f \in \mathcal{H}_{\pm}$  сюръективны.

Построим ГП  $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$  и оператор  $S$  следующим образом. Вектор  $\mathbf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T$ , где  $h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}$ ,  $h_0 \in \mathfrak{H}$ , принадлежит области определения оператора  $S$  тогда и только тогда, когда: 1)  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ; 2)  $\varphi = h_0 + \sqrt{2}Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$ ; 3)  $\sqrt{2}\Phi_+ \Gamma_+ h_+ = \sqrt{2}T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + iQ_+(A + i)\varphi$ , где  $T^* = I + 2iR_{-i}^*$ ,  $I$  — единичный оператор в  $\mathfrak{H}$ . Для любого вектора  $\mathbf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  положим

$$S\mathbf{h} = S(h_-, h_0, h_+)^T := (F_-^*h_-, -ih_0 + (A + i)\varphi, F_+^*h_+)^T.$$

**Теорема 1** (см. [2]). *Оператор  $S$  является самосопряженной дилатацией оператора  $A$ .*

**Определение 3** (см. [3]). Самосопряженная дилатация  $S$  диссипативного оператора  $A$ , действующего в сепарабельном ГП  $\mathfrak{H}$ , называется *минимальной*, если  $\mathbb{H} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{-i}^n(S)\mathfrak{H}, R_i^n(S)\mathfrak{H}\} \left( \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n \right)$  — замкнутая линейная оболочка линеалов или подпространств  $\mathfrak{F}_n$ .

**Теорема 2** (см. [2]). Самосопряженная дилатация  $S$  диссипативного оператора  $A$  с непустым множеством регулярных точек ( $-i \in \rho(A)$ ) является минимальной тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{D}_{\pm} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{\mp i}^n(F_{\pm})\mathfrak{N}_{\pm}\}$ .

Имеет место

**Теорема 3.** Самосопряженная дилатация  $S$  диссипативного оператора  $A$  с непустым множеством регулярных точек ( $-i \in \rho(A)$ ) минимальна тогда и только тогда, когда операторы  $F_{\pm}$  простые.

**Определение 4** (см. [3]). Самосопряженные дилатации  $S_1$  и  $S_2$  диссипативного оператора  $A$ , действующие в ГП  $\mathbb{H}_1$  и  $\mathbb{H}_2$ , называются *изоморфными*, если существует унитарный оператор  $\mathcal{U} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$ , такой, что: 1)  $\mathcal{U}(0, h_0, 0)^T = (0, h_0, 0)^T \forall h_0 \in \mathfrak{H}$ ; 2)  $\mathcal{U}S_1 \subseteq S_2\mathcal{U}$ ;

Пусть  $\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}$  и  $\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}$  — ГП. Обозначим через  $F_{\pm}$  и  $G_{\pm}$  максимальные простые симметрические операторы, действующие в пространствах  $\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}$  и  $\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}$  соответственно, причем,  $(0, \mathfrak{q}_+)$  — индекс дефекта операторов  $F_+$  и  $G_+$ ,  $(\mathfrak{q}_-, 0)$  — индекс дефекта операторов  $F_-$  и  $G_-$ ,  $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{D}_{\pm}$ ,  $\mathfrak{N}_{\pm}^{(r)}$  — дефектные подпространства. Пусть  $\langle \mathfrak{N}_{\pm}^{(r)}, \Gamma_{\pm}^{(r)} \rangle$ ,  $r = 1, 2$  — граничные двойки операторов  $F_{\pm}$  и  $G_{\pm}$ ,  $V_{\pm}, W_{\pm}$  — преобразования Кэли операторов  $F_{\pm}$  и  $G_{\pm}$ ,  $\Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{D}_{\pm}$ ,  $\Psi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)} \rightarrow \mathfrak{D}_{\pm}$  — изометрии. В пространствах  $\mathbb{H}_r = \mathfrak{D}_{\pm}^{(r)} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_{\pm}^{(r)}$  определим операторы  $S_r$ ,  $r = 1, 2$ . Векторы  $\mathbf{h}_r = \left( h_{\pm}^{(r)}, h_0, h_{\pm}^{(r)} \right)^T$ , где  $h_{\pm}^{(r)} \in \mathfrak{D}_{\pm}^{(r)}$ ,  $h_0 \in \mathfrak{H}$ , принадлежат областям определения операторов  $S_r$ , соответственно, тогда и только тогда, когда

1)  $h_{\pm}^{(1)} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ;  $h_{\pm}^{(2)} \in \text{dom}(G_{\pm}^*)$ ; 2)  $\varphi_1 = h_0 + \sqrt{2}Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} \in \text{dom}(A)$ ;  
 $\varphi_2 = h_0 + \sqrt{2}Q_- \Psi_- \Gamma_-^{(2)} h_-^{(2)} \in \text{dom}(A)$ ; 3)  $\sqrt{2}\Phi_+ \Gamma_+^{(1)} h_+^{(1)} = \sqrt{2}T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} + iQ_+(A+i)\varphi_1$ ;  
 $\sqrt{2}\Psi_+ \Gamma_+^{(2)} h_+^{(2)} = \sqrt{2}T^* \Psi_- \Gamma_-^{(2)} h_-^{(2)} + iQ_+(A+i)\varphi_2$ .

Для любых векторов  $\mathbf{h}_r = \left( h_{\pm}^{(r)}, h_0, h_{\pm}^{(r)} \right)^T \in \text{dom}(S_r)$  положим

$$\begin{aligned} S_1 \mathbf{h}_1 &= S_1 \left( h_{\pm}^{(1)}, h_0, h_{\pm}^{(1)} \right)^T = \left( F_{\pm}^* h_{\pm}^{(1)}, -ih_0 + (A+i)\varphi_1, F_{\pm}^* h_{\pm}^{(1)} \right)^T; \\ S_2 \mathbf{h}_2 &= S_2 \left( h_{\pm}^{(2)}, h_0, h_{\pm}^{(2)} \right)^T = \left( G_{\pm}^* h_{\pm}^{(2)}, -ih_0 + (A+i)\varphi_2, G_{\pm}^* h_{\pm}^{(2)} \right)^T. \end{aligned}$$

Операторы  $S_1$  и  $S_2$  являются минимальными самосопряженными дилатациями оператора  $A$ .

**Теорема 4.** Операторы  $S_1$  и  $S_2$  изоморфны.

Пусть  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  — спектральное семейство оператора  $S$ ,  $E(\delta)$  — соответствующая спектральная мера, определенная на  $\sigma$ -алгебре борелевских подмножествах вещественной оси  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Справедлива

**Теорема 5.** Спектральная мера  $E(\delta)$  минимальной самосопряженной дилатации общего вида вполне несамосопряженного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек эквивалентна мере Лебега на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Спектр минимальной самосопряженной дилатации общего вида вполне несамосопряженного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек абсолютно непрерывен.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.-Nagy B. *Sur les contractions de l'espace de Hilbert* / B. S.-Nagy. // *Acta Sci. Math.* – 1953. – Vol. 15. – P. 87-92.
- [2] Третьяков Д.В. *Об общем подходе к построению самосопряженной дилатации диссипативного оператора* / Д.В. Третьяков, Ю.Л. Кудряшов // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* – 2021. – Т. 503. – С. 121-136.
- [3] Кудряшов Ю.Л. *Дилатации линейных операторов* / Ю.Л. Кудряшов // *Современная математика. Фундаментальные направления.* – 2020. – Т. 66, Вып. 2. – С. 209-220.

## Pointwise and integral coverings and majorants for cones

BAKHTIGAREEVA E. G.

*Steklov Institute of Mathematics (Moscow, Russia)*

*E-mail: [bakhtigareeva-eg@pfur.ru](mailto:bakhtigareeva-eg@pfur.ru)*

GOLDMAN M. L.

*RUDN University (Moscow, Russia)*

Here we use and develop the results of our works [1,2], namely we consider the concepts of pointwise and integral coverings for cones of monotone functions and estimates of their respective majorants. Relationships between pointwise and integral coverings of cones are established and it is shown that pointwise or integral equivalence of two cones implies mutual estimates of their pointwise or, respectively, integral majorants.

Let  $L_0(0, T)$  be a set of all Lebesgue measurable functions on  $(0, T)$ , where  $T \in (0, \infty]$ ;  $L_0^+(0, T) = \{f \in L_0(0, T), f \geq 0\}$ . Let  $K$  be the cone in  $L_0^+(0, T)$ , equipped with a positively homogeneous nondegenerate functional  $\rho_K$ :

$$\begin{aligned} \rho_K : K &\rightarrow (0, \infty]; \quad h \in K, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha h \in K, \quad \rho_K(\alpha h) = \alpha \rho_K(h); \\ \rho_K(h) = 0 &\Rightarrow h = 0 \text{ almost everywhere on } (0, T). \end{aligned}$$

Consider two order relations on the set  $L_0^+(0, T)$ . Pointwise relation:  $f \leq g$  means that  $f(t) \leq g(t)$  for almost all  $t \in (0, T)$ . Let  $q \in (0, \infty)$ ;  $\mu$  be nonnegative Borel measure on  $(0, T)$  such that:

$$0 < M_q(t) := \left( \int_{(0,t]} d\mu \right)^{1/q} < \infty, \quad t \in (0, T).$$

Introduce  $q$  — integral order relation:  $f \prec_q g$  means the estimate for  $q$  — average integral over the measure  $\mu$ :

$$M_q(t)^{-1} \left( \int_{(0,t]} f^q d\mu \right)^{1/q} \leq M_q(t)^{-1} \left( \int_{(0,t]} g^q d\mu \right)^{1/q}, \quad t \in (0, T).$$



Clearly,  $f \leq g \Rightarrow f \prec_q g$ . For the cone  $K$  we introduce a pointwise and a  $q$  – integral majorants for  $t \in (0, T)$ :

$$\lambda_K(t) = \sup \{h(t) : h \in K; \rho_K(h) \leq 1\}, \quad t \in (0, T);$$

$$\tilde{\lambda}_{K,q}(t) = \sup \left\{ M_q(t)^{-1} \left( \int_{(0,t]} h^q d\mu \right)^{1/q} : h \in K; \rho_K(h) \leq 1 \right\}, \quad t \in (0, T).$$

**Definition 1.** The cone  $M$ , equipped with the functional  $\rho_M$ , covers the cone  $K$ , provided functional  $\rho_K$ , pointwise with covering constants  $c_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_1 \in [0, \infty)$ , if for any function  $h_1 \in K$ , there is the function  $h_2 \in M$ , such that

$$\rho_M(h_2) \leq c_0 \rho_K(h_1), \quad h_1(t) \leq h_2(t) + c_1 \rho_K(h_1), \quad t \in (0, T). \quad (1)$$

If  $T = \infty$ , we assume in (1) that  $c_1 = 0$ .

**Definition 2.** The cone  $M$ , equipped with the functional  $\rho_M$ , covers the cone  $K$ , provided functional  $\rho_K$ ,  $q$  – integrally with covering constants  $c_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_1 \in [0, \infty)$ , if for any function  $h_1 \in K$  there is the function  $h_2 \in M$ , such that  $\rho_M(h_2) \leq c_0 \rho_K(h_1)$ , and for  $t \in (0, T)$

$$\left( \int_{(0,t]} h_1^q d\mu \right)^{1/q} \leq \left\{ \int_{(0,t]} h_2^q d\mu + [c_1 \rho_K(h_1) M_q(t)]^q \right\}^{1/q}, \quad 0 < q < 1;$$

$$\left( \int_{(0,t]} h_1^q d\mu \right)^{1/q} \leq \left( \int_{(0,t]} h_2^q d\mu \right)^{1/q} + c_1 \rho_K(h_1) M_q(t), \quad 1 \leq q < \infty. \quad (2)$$

If  $T = \infty$ , we assume in (2) that  $c_1 = 0$ , such that both relations in (2) take the form

$$\left( \int_{(0,t]} h_1^q d\mu \right)^{1/q} \leq \left( \int_{(0,t]} h_2^q d\mu \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty.$$

Let us introduce the notation:  $K \leq M(c_0, c_1)$  for pointwise covering,  $K \prec_q M(c_0, c_1)$  for  $q$  – integral covering.

**Theorem.**

(1) Let  $K \leq M(c_0, c_1)$ . Then the pointwise majorants satisfy the estimate

$$\lambda_K(t) \leq c_0 \lambda_M(t) + c_1, \quad t \in (0, T).$$

(2) Let  $K \prec_q M(c_0, c_1)$ . Then the integral majorants satisfy the estimate

$$\tilde{\lambda}_{K,q}(t) \leq [c_0^q \tilde{\lambda}_{M,q}(t)^q + c_1^q]^{1/q}, \quad t \in (0, T), \quad 0 < q < 1;$$

$$\tilde{\lambda}_{K,q}(t) \leq c_0 \tilde{\lambda}_{M,q}(t) + c_1, \quad t \in (0, T), \quad 1 \leq q < \infty.$$

The work of the first author was performed at the Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences and was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 24-11-00170, <https://rscf.ru/project/24-11-00170/>.

REFERENCES

- [1] Goldman M.L. *Mutual coverings of cones of monotone functions and estimates of their integral majorants* / E.G. Bakhtigareeva, M.L. Goldman, G.Zh. Karshygina // *J. Math. Sci.* – 2023. – Vol. 271. – P. 714-732.
- [2] Bakhtigareeva E.G. *On Calculation of the Norm of a Monotone Operator in Ideal Spaces* / E.G. Bakhtigareeva, M.L. Goldman // *J. Math. Sci.* – 2024. – Vol. 278. – P. 237-253.

## Second four-electron singlet in the impurity Hubbard model

TASHPULATOV S. M.

*Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of  
Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)*

*E-mail: [sadullatashpulatov@yandex.com](mailto:sadullatashpulatov@yandex.com), [toshpul@mail.ru](mailto:toshpul@mail.ru)*

We consider the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model [1] and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the second singlet state. Hamiltonian of the considering system has the form

$$\begin{aligned}
 H = & A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow} + \\
 & + \varepsilon_1 \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + \varepsilon_2 \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}) + \varepsilon_3 a_{0,\uparrow}^+ a_{0,\uparrow} a_{0,\downarrow}^+ a_{0,\downarrow}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Here  $A$  ( $A_0$ ) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site;  $B > 0$  ( $B_0 > 0$ ) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites,  $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \dots, \nu$ , where  $e_j$  are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors,  $U$  ( $U_0$ ) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site;  $\gamma$  is the spin index, and  $a_{m,\gamma}^+$  and  $a_{m,\gamma}$  are the respective electron creation and annihilation operators at a site  $m \in Z^\nu$ ,  $\varepsilon_1 = A - A_0$ ,  $\varepsilon_2 = B - B_0$ ,  $\varepsilon_3 = U - U_0$ . The second singlet state corresponds four-electron bound states (or antibound states) to the basis functions:  ${}^2s_{p,q,r,t \in Z^\nu}^1 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0$ . The subspace  ${}^2\tilde{\mathcal{H}}_s^0$ , corresponding to the second singlet state is the set of all vectors of the form  ${}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} f(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t \in Z^\nu}^0$ ,  $f \in l_2^{as}$ , where  $l_2^{as}$  is the subspace of antisymmetric functions in  $l_2((Z^\nu)^4)$ . In this case, the Hamiltonian  $H$  acts in the antisymmetric Fock space  ${}^2\tilde{\mathcal{H}}_s^0$ . Let  $\varphi_0$  be the vacuum vector in the antisymmetrical Fock space  ${}^2\tilde{\mathcal{H}}_s^0$ . Let  ${}^2\tilde{H}_s^0$  be the restriction  $H$  to the subspace  ${}^2\tilde{\mathcal{H}}_s^0$ .

**Theorem 1.** *The subspace  ${}^2\tilde{\mathcal{H}}_s^0$  is invariant under the operator  $H$ , and the operator  ${}^2H_s^0$  is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator  ${}^2\overline{H}_s^0$  acting in the space  $l_2^{as}$ . The operator  ${}^2H_s^0$  acts on a vector  ${}^2\psi_s^0 \in {}^2\mathcal{H}_s^0$  as*

$${}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} ({}^2\overline{H}_s^0 f)(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t \in Z^\nu}^0. \quad (2)$$

**Lemma 1.** *The spectra of operators  ${}^2\overline{H}_s^0$  and  ${}^2H_s^0$  coincide.*

Let  $F : l_2((Z^\nu)^4) \rightarrow L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^2\widetilde{H}_s^0$  be the Fourier transform, where  $T^\nu$  is the  $\nu$ -dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure  $d\lambda$ , i.e.  $\lambda(T^\nu) = 1$ .

We set  ${}^2\widetilde{H}_s^0 = F {}^2\overline{H}_s^0 F^{-1}$ . In the quasimomentum representation, the operator  ${}^2\overline{H}_s^0$  acts in the  $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ , where  $L_2^{as}$  is the subspace of antisymmetric functions in  $L_2((T^\nu)^4)$ .

**Theorem 2.** *Let  $\nu = 1$ . Then*

A) *If  $\varepsilon_2 = -B$  and  $\varepsilon_1 < -2B$  (respectively,  $\varepsilon_2 = -B$  and  $\varepsilon_1 > 2B$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of eight segments:  $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$ , and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of six eigenvalues:  $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ , where  $z = A + \varepsilon_1$ , here and hereafter  $z_3$  and  $z_4$  are the concrete numbers.*

B) *If  $\varepsilon_1 < 0$  and  $\varepsilon_2 = 2B$  or  $\varepsilon_2 = 0$  (respectively,  $\varepsilon_1 > 0$  and  $\varepsilon_2 = 2B$  or  $\varepsilon_2 = 0$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of eight segments, and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of six eigenvalues.*

C) *If  $\varepsilon_1 = 0$  and  $\varepsilon_2 > 0$  or  $\varepsilon_1 = 0$  and  $\varepsilon_2 < -2B$ , then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of thirteen segments:*

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3],$$

*and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of nine eigenvalues:  $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 4z_2, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4\}$ , where  $z_1 = A - 2BE/\sqrt{E^2 - 1}$  and  $z_2 = A + 2BE/\sqrt{E^2 - 1}$ ,  $E = (B + \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$ .*

D) *If  $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$  (respectively,  $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of eight segments and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of six eigenvalues.*

E) *If  $\varepsilon_2 > 0$  and  $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$  (respectively,  $\varepsilon_2 < -2B$  and  $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of eight segments and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of six eigenvalues.*

F) *If  $\varepsilon_2 > 0$  and  $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$  (respectively,  $\varepsilon_2 < -2B$  and  $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of eight segments and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of six eigenvalues.*

G) *If  $\varepsilon_2 > 0$  and  $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$  (respectively,  $\varepsilon_2 < -2B$  and  $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of sixteen segments, and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of fourteen eigenvalues:  $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + 2z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4, 2z_4, z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_2 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4\}$ .*

H) *If  $\varepsilon_2 > 0$  and  $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$  (respectively,  $\varepsilon_2 < -2B$  and  $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ ), then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of sixteen segments, and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of fourteen eigenvalues.*

I) *If  $-2B < \varepsilon_2 < 0$ , then the essential spectrum of the operator  ${}^2\widetilde{H}_s^0$  is consists of the union of three segments:  $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup$*

$[2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4]$ , and the discrete spectrum of the operator  ${}^2\tilde{H}_s^0$  is consists of three eigenvalues:  $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ .

REFERENCES

[1] Hubbard J. *Electron correlations in narrow energy bands* / J. Hubbard // Proc. Roy. Soc. A. – 1963. – Vol. 276. – P. 238-257.

**About one representations of the values of the Dirichlet beta function at even points**

SAFONOVA T. A.

*Northern (Arctic) Federal University  
named after M.V.Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)  
E-mail: [t.Safonova@narfu.ru](mailto:t.Safonova@narfu.ru)*

Following [1, Chap. 23], by  $\beta(s)$  we denote the sum of the series

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}.$$

The function  $\beta(s)$  is called a Dirichlet beta function and its value at  $s = 2$ , i.e.  $\beta(2)(= G)$  is usually called the Catalan’s constant.

It is well known Euler’s formula

$$\beta(2n+1) = \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!} E_{2n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

where  $E_{2n}$  are the Euler numbers. This formula implies that the numbers  $\beta(2n+1)$  are transcendental. However, various well-known representations for the numbers  $\beta(2n)$ , e.g., the integral representation

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4(2n-1)!} \int_0^1 \frac{E_{2n-1}(x)}{\sin(\pi x)} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

where  $E_n(x)$  are the Euler polynomials, do not allow us to judge their arithmetic nature, and nothing is known about that. In particular, for that reason, finding new representations of these numbers or their combinations is of particular interest.

We (see, for example, [2]) have proposed a method that allows, using the spectral theory of ordinary differential operators, to obtain an integral representation of the sums of certain power series and special functions. In particular, we proved that for the sequence

$$A_m := \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n}}{(2(m-n))!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)} \beta(2n), \quad m = 1, 2, \dots$$

the equality

$$A_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m-1}}{\sin x} dx, \quad m = 1, 2, \dots \tag{1}$$

holds.

The expansion

$$\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)^2 - x^2},$$

implies the validity of the relation

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^j}{\sin x} dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^j \left(\frac{1}{j} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{u^{j+1}}{(2k)^2 - u^2} du\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Calculating the integral on the right-hand side of this equality for  $j = 2m - 1$  and taking further into account obtained equalities in representation (1), we arrive at the validity of the following statement.

**Theorem.** For  $m = 1, 2, \dots$ , the equality

$$\mathcal{A}_m = \frac{(-1)^{m-1} \pi^{2m-1}}{4^m (2m-1)!} \left( \frac{1}{2m-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left( (2k)^{2m-1} \ln \frac{2k-1}{2k+1} + 2 \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1} \right) \right)$$

holds.

In particular, assuming  $m = 1$  in this equality, for Catalan's constant we obtain the relations

$$G = \frac{\pi}{4} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left( 1 + k \ln \frac{2k-1}{2k+1} \right) \right). \quad (2)$$

This equality can be rewritten in the form

$$G = \frac{\pi}{4} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k \ln \frac{2k-1}{2k+1} \right),$$

which implies that

$$e^{\frac{2G}{\pi}} = \sqrt{e} \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{2}{2k+1} \right)^{(-1)^k k}.$$

Constant  $e^{2G/\pi}$  constant is found in physical and mathematical literature. The formulas we obtained may be useful approximate calculations of this constant.

Equality (2) and the well-known identity

$$\ln 2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left( 1 + k \ln \frac{2k-1}{2k+1} \right)$$

allow one to derive that for the value  $e^{G/\pi}$  the equalities

$$e^{\frac{G}{\pi}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{e} \prod_{k=1}^{+\infty} \left( e^{-1} \left( 1 + \frac{2}{4k+1} \right)^{2k+1} \right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt[4]{2}} \prod_{k=1}^{+\infty} \left( e \left( 1 - \frac{2}{4k+1} \right)^{2k} \right),$$

hold, squaring and multiplying them leads to the relation

$$e \cdot e^{\frac{4G}{\pi}} = 9 \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{4}{4k-1} \right) \left( 1 - \frac{4}{(4k+1)^2} \right)^{4k+1}.$$

This formula resembles the identity

$$\pi \cdot e^{\frac{4G}{\pi}} = 8 \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right)^{(-1)^k(2k+1)},$$

which is due to S. Ramanujan.

The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation grant 24-21-00128.

#### REFERENCES

- [1] Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* / M. Abramowitz, I.A. Stegun . – New York: Dover Publ., 1972. – 1046 p.
- [2] Mirzoev K.A. *Ordinary differential operators and the integral representation of sums of certain power series* / K.A. Mirzoev, T.A. Safonova // Trans. Moscow Math. Soc. – 2019. – P. 133-151.

## Секция 2. Секция для молодых учёных и обучающихся

### Интегральные операторы с однородными ядрами и переменными коэффициентами

АВСЯНКИН О. Г.

Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

E-mail: [ogavsyankin@sfedu.ru](mailto:ogavsyankin@sfedu.ru)

В пространстве  $L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где функция  $k(x, y)$  определена на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (здесь и далее предполагается, что  $n \geq 2$ ), измерима и удовлетворяет следующим условиям:

1° однородность степени  $(-n)$ , т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n}k(x, y) \quad \forall \alpha > 0;$$

2° инвариантность относительно группы вращений  $SO(n)$ , т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y) \quad \forall \omega \in SO(n);$$

3° суммируемость, т. е.  $|k(e_1, y)||y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , где  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

Известно (см. [1]), что оператор  $K$  ограничен в пространстве  $L_p(\mathbb{R}^n)$ . Обозначим через  $M_a$  оператор умножения на функцию  $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ . Наша цель — исследование обратимости и нетеровости операторов вида  $\lambda I + M_a K$  в зависимости от свойств «коэффициента»  $a(x)$ . Ниже рассмотрены три типа «коэффициентов».

**1. Стабилизирующиеся коэффициенты.** Обозначим через  $\mathcal{A}$  множество всех функций  $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ , для каждой из которых существуют такие числа  $a_0$  и  $a_\infty$ , что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1/N} |a(x) - a_0| = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| > N} |a(x) - a_\infty| = 0.$$

Через  $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$  обозначим компактификацию локально компактного пространства  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$  одной бесконечно удаленной точкой. Определим на компакте  $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$  функцию  $\sigma_K(m, \xi)$  равенствами

$$\sigma_K(m, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad \sigma_K(\infty) = 0,$$

где  $y' = y/|y|$ , а  $P_m(t)$  — многочлены Лежандра. Функцию  $\sigma_K(m, \xi)$  будем называть *символом* оператора  $K$ .

**Теорема 1.** Пусть  $a \in \mathcal{A}$ . Для того чтобы оператор  $\lambda I + M_a K$  был нетеровым в  $L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lambda + a_0 \sigma_K(m, \xi) \neq 0, \quad \lambda + a_\infty \sigma_K(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (2)$$

Если условия (2) выполнены, то индекс оператора вычисляется по формуле

$$\text{ind}(\lambda I + M_a K) = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind} \left( \frac{\lambda + a_\infty \sigma_K(m, \cdot)}{\lambda + a_0 \sigma_K(m, \cdot)} \right),$$

где  $d_n(m)$  — размерность пространства сферических гармоник порядка  $m$ .

Обозначим через  $\mathfrak{A}$  наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры  $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$ , содержащую все операторы вида  $\lambda I + M_a K + T$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ,  $K$  — оператор вида (1), а  $T$  — компактный оператор. Для алгебры  $\mathfrak{A}$  построено символическое исчисление, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия нетеровости операторов и формула для вычисления индекса.

**2. Слабо осциллирующие радиальные коэффициенты.** Пусть  $\Omega(\mathbb{R}_+)$  — множество всех непрерывных ограниченных на  $\mathbb{R}_+$  функций  $f$ , которые для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}_+$  удовлетворяют условиям:

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{h \in X} |f(t) - f(ht)| = 0, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{h \in X} |f(t) - f(ht)| = 0.$$

Обозначим через  $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$  совокупность всех функций вида  $a(x) = a_0(|x|)$ , где  $a_0 \in \Omega(\mathbb{R}_+)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Следуя [2], функции из  $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$  будем называть *радиально слабо осциллирующими* функциями.

В пространстве  $L_p(\mathbb{R}^n)$ , где  $1 < p < \infty$ , рассмотрим оператор

$$B = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} K_j + T, \quad (3)$$

где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $a_j \in \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $K_j$  — оператор вида (1), а  $T$  — компактный оператор. Для оператора  $B$  вида (3) определен символ. В терминах этого символа получены критерий нетеровости оператора  $B$  и формула для вычисления его индекса. Также исследована банахова алгебра  $\mathfrak{B}$ , порожденная всеми операторами вида (3).

Коэффициенты более общего вида, чем класс  $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ , рассмотрены в статье [3].

**3. Осциллирующие коэффициенты вида  $\exp(i\delta|x|)$ .** В пространстве  $L_p(\mathbb{R}^n)$ , где  $1 < p < \infty$ , рассмотрим оператор

$$D = \lambda I + M_a K + T, \quad (4)$$

где  $a(x) = \exp(i\delta|x|)$  и  $\delta \in \mathbb{R}$ . Доказано, что необходимым и достаточным условием нетеровости оператора  $D$  вида (4) является условие

$$\lambda + \sigma_K(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (5)$$

Если это условие выполнено, то индекс оператора  $D$  вычисляется по формуле

$$\text{ind}(D) = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}(\lambda + \sigma_K(m, \cdot)).$$

Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, Соглашение Минобрнауки России № 075-02-2024-1427.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Karapetiants N. *Equations with Involution Operators* / N. Karapetiants, S. Samko. – Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 2001. – 427 p. – ISBN 978-0-8176-4157-3.
- [2] Авсянкин О.Г. *Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными  $SO(n)$ -инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами* / О.Г. Авсянкин, В.М. Деундяк // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82, Вып. 2. – С. 163-176.
- [3] Avsyankin O.G.  *$C^*$ -algebra generated by integral operators with homogeneous kernels and oscillating coefficients of various types* / O.G. Avsyankin, S.S. Ashikhmin // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 266, Issue 1. – P. 66-76.

## Нелинейное деформирование цилиндрической трубы с учетом распределенных винтовых дислокаций при нагружении давлением

ГАЙБАРЯН С. А.

*Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)*

*E-mail: [sgaybaryan@sfedu.ru](mailto:sgaybaryan@sfedu.ru)*

ЗУБОВ Л. М.

*Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)*

Дефекты микроструктуры твердых тел в виде дислокаций в значительной мере определяют прочностные, упругопластические, деформационные и другие свойства многих конструкционных и наноструктурных материалов. В настоящее время дислокационные модели активно используются для теоретического описания свойств и дефектов кристаллических и наноструктурных материалов [1, 2], а также некоторых явлений в упругом теле, таких как внутреннее трение, пластическое течение, усталость и т.д. Одной из распространенных математических моделей нелинейно-упругих тел с дефектами является континуальная теория непрерывно распределенных дислокаций.

В представленной работе исследуется влияние распределенных дислокаций на нелинейное деформирование упругой цилиндрической трубы, нагруженной давлением, равномерно распределенным по внутренней поверхности. Упругий материал будем считать изотропным и несжимаемым. В теле задано осесимметричное поле винтовых дислокаций  $\boldsymbol{\alpha} = \beta(r) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$ , называемое плотностью дислокаций, где  $\mathbf{i}_3$  — орт, параллельный оси трубы.

Система уравнений, описывающая напряженное состояние упругого несжимаемого тела с непрерывно распределенными дислокациями [3], состоит из уравнений равновесия  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ , уравнения несовместности  $\operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha}$ , условия несжимаемости  $\det \mathbf{C} = 1$  и определяющих соотношений материала [4]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* - p\mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{D}^* = [\tau_1(I_1, I_2) + I_1\tau_2(I_1, I_2)]\mathbf{C} - \tau_2(I_1, I_2)\mathbf{G} \cdot \mathbf{C}.$$

Здесь  $\mathbf{D}$  — несимметричный тензор напряжения Пиолы,  $\mathbf{C}$  — тензор дисторсии,  $\mathbf{G}$  — мера деформации Коши-Грина,  $\tau_1, \tau_2$  — скалярные функции отклика материала,  $p$  — давление в несжимаемом теле,  $I_1, I_2$  — инварианты деформации.

Влияние дислокаций на нагруженное состояние цилиндрической трубы исследуется для двух моделей несжимаемых материалов при заданной плотности дислокаций: материала Бидермана [5], удельная потенциальная энергия деформации которого задается соотношением

$$W(I_1, I_2) = d_0(I_2 - 3) + d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3$$

$$d_0 \geq 0, \quad d_1 \geq 0, \quad d_3 \geq 0, \quad d_1 + d_3 \geq 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15d_1d_3} \geq 0,$$

и модели несжимаемого тела с потенциалом вида

$$W(I_1, I_2) = d(I_1 - 3)^\eta, \quad d > 0, \quad \eta \geq 1/2,$$

описывающего материал, обладающий физической нелинейностью при сколь угодно малых деформациях [6]. В работе рассмотрены два частных случая распределения дислокаций. В одном случае скалярная плотность дислокаций обратно пропорциональна радиальной координате:  $\beta(r) = \beta_0 r^{-1}$ , в другом — принимает постоянное значение при ее изменении:  $\beta(r) = \gamma_0$ . Здесь  $\beta_0, \gamma_0$  — постоянные, называемые параметрами дислокаций.

Для определения нагруженного состояния трубы найдена зависимость внутреннего давления от радиальной координаты внутренней стенки трубы после деформации. Построены диаграммы нагружения трубы как с учетом распределенных дислокаций, так и при их отсутствии.

Рассмотренные наборы материальных констант модели Бидермана ( $d_0 = 0$ ,  $d_1 = 27$ ,  $d_2 = -60$ ,  $d_3 = 80$ ) и физически-нелинейного материала ( $d = 1$ ,  $\eta = 0,51$ ) позволили провести качественное сравнение полученных результатов с результатами работы [7] при отсутствии в теле дислокаций. На основе построенных диаграмм нагружения с учетом распределенных дислокаций описан характер сопротивления трубы деформированию.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Clayton J.D. *Nonlinear Mechanics of Crystals* / J.D. Clayton. – Dordrecht: Springer, 2011. – 700 p. – ISBN 978-94-007-0349-0.
- [2] Gutkin M.Y. *Plastic Deformation in Nanocrystalline Materials* / M.Y. Gutkin, I.A. Ovid'ko. – Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag GmbH, 1997. – 194 p. – ISBN 366209374X.
- [3] Zubov L.M. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies* / L.M. Zubov. – B.: Springer, 2004. – 208 p. – ISBN 978-3-540-68430-5.
- [4] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости* / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
- [5] Оден Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред* / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
- [6] Галаско А.А. *Нелинейная теория кручения упругих цилиндров с винтовой дислокацией* / А.А. Галаско, Л.М. Зубов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2015. – № 4(188) – С. 35-43.
- [7] Зубов Л.М. *Об устойчивости цилиндрической трубы при осевом растяжении и внутреннем давлении* / Л.М. Зубов, Д.Н. Шейдаков // Вестник Южного научного центра РАН. – 2006. – Т. 2, № 3. – С. 8-15.

## Применение нейросетевого подхода для определения значения омонимов в русскоязычных текстах

КОРЗУНИНА А. А.

*Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия)*

*E-mail: [aakorzunina@list.ru](mailto:aakorzunina@list.ru)*

Омонимия — это явление, встречающееся во многих естественных языках, которое заключается в звуковом совпадении различных языковых единиц с несвязанными понятиями. Наличие омонимов в тексте может затруднить его корректную обработку компьютером. Поэтому сегодня процесс устранения омонимии часто рассматривается как отдельный этап анализа текста в контексте машинного перевода, извлечения основного смысла из информации и повышения точности обработки запросов [1].

Автоматический процесс обнаружения омонимов и определения их смыслового значения имеет большое значение в искусственном интеллекте [2]. Люди способны определять омонимию, опираясь на контекст. Правила для компьютерной обработки текстов с омонимами основаны на аналогичном подходе: сначала находится слово-омоним, а затем предсказывается его семантика на основе заданного контекста.

Наиболее актуальной задачей снятия омонимии является для языков со сложным словообразованием и словоизменением, к которым относится и русский язык. В статье рассматривается использование нейросетей для обработки русскоязычного текста с целью определения семантического значения омонимов. Для решения этой задачи была создана специальная архитектура нейронной сети, собран и размечен датасет из текстов с сайта «Национальный корпус русского языка» [3], проведена специальная предобработка данных (токенизация и лемматизация). Разрешение омонимии в этом случае сводится к задаче классификации. Обученная сеть показала приемлемую точность распознавания на тестовых примерах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нгуен Н.З. *Нейросетевой метод снятия омонимии* / Н.З. Нгуен, М.Х. Ле // ТРУДЫ МФТИ. Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). – 2015. – Т. 7, № 4(28). – С. 174-182.
- [2] Сапин А.С. *Построение нейросетевых моделей морфологического и морфемного анализа текста* / А.С. Сапин // Труды Института системного программирования РАН. – 2021. – Т. 33, № 4. – С. 117-130.
- [3] *Национальный корпус русского языка: сайт*. – URL: <https://ruscorpora.ru/> (дата обращения: 08.08.2024). – Текст: электронный.

## Метод Ньютона и метод наискорейшего спуска решения систем нелинейных уравнений

КРАСНОВ М. Г.

ФГБОУ ВО ЧелГУ (Челябинск, Россия)

E-mail: krasnov.max.070204@gmail.com

Рассматривается система нелинейных уравнений с  $p$  неизвестными

$$f_i(x_1, \dots, x_p) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1)$$

где хотя бы одна функция  $f_i$  нелинейная. Для решения такой системы в редких случаях можно применить метод последовательного исключения неизвестных, который приводит решение системы к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным с последующей подстановкой. Однако в подавляющем большинстве случаев нелинейные системы решают итерационными методами. Пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными в верное равенство называется решением системы.

Метод Ньютона применяется к решению систем уравнений вида (1). Введем матрицу Якоби  $J(x)$  для функции  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , которые будем предполагать непрерывно дифференцируемыми

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

Метод Ньютона сходится, если начальное приближение выбрано удачно и матрица  $J(x^*)$  невырождена. На практике итерации обычно оканчиваются, если  $\|x^{n+1} - x^n\| \leq \varepsilon$ . Для выбора начального приближения применяют графический метод, метод проб, метод табулирования и т.д.

В методе наискорейшего спуска решается задача минимизации неотрицательной функции  $\Phi(x_1, \dots, x_p)$ , связанной с решаемой системой (1). Метод наискорейшего спуска также сходится, если начальное приближение выбрано удачно.

<pre>Решение методом Ньютона X=(1.115881, -0.648012, 1.727684) k=5 === Code Execution Successful ===</pre>	<pre>Решение методом наискорейшего спуска X=(1.115885, -0.648011, 1.727681) k=90 === Code Execution Successful ===</pre>
--	--

Рис 1. Результаты работы программы.

Сделан вывод, что результаты решения системы уравнений очень близки друг к другу, погрешность в пределах 0,000003. Метод Ньютона находит решение за гораздо меньшее число итераций (5 против 90), поэтому является более предпочтительным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н.С. *Численные методы: Учебное пособие.* / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 636 с.
- [2] Калиткин Н.Н. *Численные методы.* / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

## Изгиб плиты из вязкоупругого материала с периодическим рядом трещин

МИРОНЧУК А. И.

ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет"  
(Донецк, Россия)

E-mail: [a.i.mironchuk@yandex.ru](mailto:a.i.mironchuk@yandex.ru)

В данной работе рассмотрена задача линейной вязкоупругости для тонкой много-связной анизотропной плиты, содержащей периодический ряд трещин. С использованием метода малого параметра [1], комплексных потенциалов теории изгиба тонких плит [2, 3], разложений голоморфных функций в ряды Лорана [4] и метода наименьших квадратов [5], задача была сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Полученное решение позволяет определять значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов (КИМ) в любой момент времени. Описаны результаты численных исследований для изгиба плиты с периодическим рядом трещин, расположенных вдоль оси  $Ox$ , моментами интенсивности  $m$ , действующими вдоль направления оси  $Oy$ . В ходе численных исследований был проведен анализ зависимости значений и распределения изгибающих моментов от свойств материала плиты, геометрических параметров трещин и времени от начала загрузки до достижения стационарного состояния. В качестве частного случая была рассмотрена вязкоупругая плита из изотропного материала.

Были проведены расчеты напряженного состояния плиты из материалов алюминий (материал М1) и эпоксид (М2) [1]. Анализ показал, что значения моментов в плите изменяются со временем. Наиболее значительные изменения наблюдаются в первые 50 часов после приложения нагрузки. Через 100 часов моменты практически стабилизируются, что указывает на достижение стационарного состояния. В дальнейшем мы будем представлять результаты расчётов для двух конкретных временных моментов: когда  $t = 0$  (начальный момент времени) и  $t = 400$  (момент времени через 400 часов от начала деформации), к которому, как ожидается, установится стационарное состояние.

Для обеспечения высокой точности удовлетворения граничным условиям на контурах трещин количество членов в рядах Лорана варьировалось от 5 до 20, а количество «коллокационных точек» — от 100 до 200. Количество приближений по степеням малого параметра выбиралось таким образом, чтобы последующее приближение изменяло значения изгибающих моментов в предыдущем приближении менее чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра от 6 до 9.

Исследования [6] показали, что при уменьшении отношения  $b_0/a_0$  полуосей эллипсов, моделирующих трещины, значения моментов вблизи конца большой полуоси

возрастают, стремясь к бесконечности. В случае вырождения эллипсов в трещины (при  $b_0/a_0 < 10^{-3}$ ), для них могут быть определены КИМ.

Для изгиба плиты с периодическим рядом трещин длины  $2a_0$ , расположенных вдоль оси  $Ox$ , моментами интенсивности  $m$ , действующими вдоль направления оси  $Oy$ , были получены значения изгибающих моментов  $M_s$  вблизи центральной трещины в зависимости от центрального угла для различных значений  $c/a_0$ , где  $c$  — расстояние между трещинами. Установлено, что при уменьшении расстояния между трещинами значения изгибающих моментов в зоне между трещинами значительно растут. Максимальные изменения моментов наблюдаются в точке, соответствующей углу  $\theta = \pi/2$ . При переходе в стационарное состояние при  $c/a_0 = 0,01$  значения моментов  $M_s$  для плиты из материала М1 уменьшаются на 36%; а для плиты из материала М2 увеличиваются на 10%. Если расстояние между трещинами больше их длины, то влияние одной трещины на напряженное состояние около другой незначительно, и им можно пренебречь.

При сближении трещин друг с другом значения КИМ  $k_1^\pm$  ( $k_{2M}^\pm = 0$ ) для концов трещин возрастают. При этом, для такого расположения трещин и действия моментов, значения КИМ для концов трещины, как и в плоской задаче, от анизотропии не зависят и будут равны. Отсюда следует, что значения КИМ для концов трещины остаются постоянными и не зависят от времени.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Калоеров С.А. *Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями* / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88-98.
- [2] Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки* / С.Г. Лехницкий. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
- [3] Калоеров С.А. *Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит* / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4(50). – С. 113-132.
- [4] Калоеров С.А. *Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела* / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – Киев: А. С. К., 1998. – С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т., Т. 7).
- [5] Калоеров С.А. *Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит* / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141-151.
- [6] Мирончук А.И. *Исследование напряженного состояния вязкоупругой плиты с периодическим рядом эллиптических отверстий* / А.И. Мирончук // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVIII Всероссийской школы, (пос. Дивноморское, 27 - 31 мая 2024 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2024. – С. 70.

## Ряды Фурье в пространствах Лоренца и Марцинкевича

МУРАТОВ М. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: muratovma@cfuv.ru*

ОВСИЕНКО О. Д.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Пусть  $\mu$  — мера Лебега на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и  $S(-\pi, \pi)$  — метрическое пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на  $[-\pi, \pi]$ .

Обозначим через  $\Lambda(\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  множество измеримых функций  $f(x)$ ,  $-\pi < x < \pi$  таких, что

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha)} = \|f\| = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} x^{\alpha-1} f^*(x) dx < +\infty,$$

где  $f^*(x)$  — убывающая перестановка функции  $|f(x)|$ .

**Определение.** Пространство  $(\Lambda(\alpha), \|f\|_{\Lambda(\alpha)})$ ,  $0 < \alpha < 1$  называется пространством Лоренца.

Аналогично, обозначим через  $\mathbf{M}(\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$  множество измеримых функций  $f(x)$ ,  $-\pi < x < \pi$  таких, что

$$\|f\|_{\mathbf{M}(\alpha)} = \sup_E \left\{ \frac{1}{\mu^\alpha(E)} \int_E |f(x)| dx \right\} < +\infty, \tag{1}$$

где  $E$  — произвольное измеримое подмножество на  $(-\pi, \pi)$ .

**Определение.** Пространство  $(\mathbf{M}(\alpha), \|f\|_{\mathbf{M}(\alpha)})$ ,  $0 < \alpha < 1$  называется пространством Марцинкевича.

**Теорема.** Пространства  $(\Lambda(\alpha), \|f\|_{\Lambda(\alpha)})$  и  $(\mathbf{M}(\alpha), \|f\|_{\mathbf{M}(\alpha)})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , являются симметричными банаховыми пространствами.

Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на  $[-\pi, \pi]$ . Обозначим через  $S_n(x)$   $n$ -ю частичную сумму соответствующего функции  $f(x)$  ряда Фурье:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx], \tag{2}$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi. \end{aligned}$$

**Определение.** Суммой Фейера функции  $f(x)$  называется Чезаровское среднее  $n$ -х частичных сумм соответствующего функции  $f(x)$  ряда Фурье:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$$

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in \mathbf{M}(\alpha)$ . Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

является рядом Фурье функции  $f(x)$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\{\sigma_n(x)\}$  сумм Фейера функции  $f(x)$  ряда (3) равномерно ограничена в метрике  $\mathbf{M}(\alpha)$ , т.е. существует такое  $K > 0$ , что

$$\|\sigma_n\|_{\mathbf{M}(\alpha)} \leq K. \quad (4)$$

**Теорема.** Для каждой функции  $f \in \mathbf{M}(\alpha)$  и последовательности  $\{\sigma_n(x)\}$  ее сумм Фейера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n - f\|_{\mathbf{M}(\alpha)} = 0. \quad (5)$$

**Замечание.** Аналогичные теоремы имеют место для пространств Лоренца  $(\Lambda(\alpha), \|f\|_{\Lambda(\alpha)})$ .

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Foundations of Symmetric spaces of measurable functions* / В.-З.А. Rubshtein, G.Ya. Grabarnik, М. А. Muratov, Yu.S. Pashkova. – Development in Mathematics 45: Springer, 2016. – 259 p. – ISBN 978-3-319-42756-0.
- [2] Rolewicz S. *Metric linear space* / S. Rolewicz. – Warsaw: PWM, 1985. – 459 p. – ISBN 90-277-319-1480-0
- [3] Муратов М.А. *Симметричные пространства измеримых функций. Старые и новые достижения* / М.А. Муратов, Б.А. Рубштейн // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2020. – Т. 66, № 2. – С. 221-272.
- [4] Lorentz G.G. *Some new functional spaces* / G.G. Lorentz // Ann. Math. – 1950. – Vol. 51. – P. 37-55.



# О существовании и единственности решения начально-краевой задачи для обобщений одномерных уравнений Навье-Стокса динамики сжимаемой вязкой жидкости на многокомпонентный случай

НОГОВИЩЕВА В. Ю.

*ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский  
государственный университет» (Новосибирск, Россия)*

*E-mail: [v.nogovishcheva@g.nsu.ru](mailto:v.nogovishcheva@g.nsu.ru)*

ПРОКУДИН Д. А.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева Сибирского  
отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия)*

*E-mail: [prokudin@hydro.nsc.ru](mailto:prokudin@hydro.nsc.ru)*

В работе проводится анализ существования и единственности решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой многокомпонентной жидкости в изотермическом (нетеплопроводном) случае (по поводу происхождения модели и ее физического смысла см. [1–3]). В замыкании  $\overline{Q}_T$  области  $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$  ( $T \in \mathbb{R}_+$ ) требуется найти плотность многокомпонентной жидкости  $\rho(t, x) > 0$  и скорости  $u_i(t, x)$  для каждой компоненты с номером  $i = 1, \dots, N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ ), удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j, \quad \alpha_j = \text{const} \in (0, 1), \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad R \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Здесь  $v$  — средневзвешенная скорость среды, числовые коэффициенты вязкостей  $\nu_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  образуют симметричную матрицу вязкостей  $\mathbf{N} > 0$ , функции начальных данных  $\rho_0(x)$ ,  $u_{0i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  заданы.

Как видно исследуемая система представляет собой некоторое обобщение известной системы уравнений Навье-Стокса динамики сжимаемой вязкой однокомпонентной жидкости на многокомпонентный случай. Одной из характерных особенностей рассматриваемой системы является наличие старших производных (производных второго порядка) от скоростей всех компонент в уравнениях (2). В отличие от однокомпонентного случая, когда вязкость является скаляром, в многокомпонентном случае коэффициенты вязкостей  $\nu_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  образуют матрицу вязкостей  $\mathbf{N}$ , элементы которой отвечают за вязкое трение. Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{N}$  отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, а недиагональные элементы отвечают за вязкое трение между компонентами. Если матрица вязкостей диагональна, то уравнения (2) будут связаны только через младшие члены и тогда результаты

известные для уравнений Навье-Стокса автоматически переносятся на многокомпонентный случай. В работе рассматривается более сложная ситуация недиагональной и нетреугольной матрицы вязкостей. Вследствие этого, результаты известные для уравнений Навье-Стокса автоматически не переносятся на уравнения (1), (2). Целью работы является доказательство существования и единственности решения задачи (1)–(4) без каких-либо упрощающих предположений о структуре матрицы  $\mathbf{N}$ , кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности. Вопросы однозначной разрешимости одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой многокомпонентной жидкости в политропном случае изучались в работах [4, 5].

**Определение.** *Сильным решением задачи (1)–(4) называется совокупность функций  $(\rho, u_1, \dots, u_N)$  таких, что*

$$\rho > 0, \quad \rho \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)),$$

$$u_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, 1)), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(Q_T), \quad i = 1, \dots, N,$$

уравнения (1), (2) выполнены почти всюду в  $Q_T$ , начальные условия (3) — для почти всех  $x \in (0, 1)$ , а краевые условия (4) — для почти всех  $t \in (0, T)$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть начальные данные в (3) удовлетворяют условиям*

$$\rho_0 > 0, \quad \rho_0 \in W_2^1(0, 1), \quad u_{0i} \in W_2^1(0, 1), \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (1)–(4).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00381).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rajagopal K.R. *Mechanics of mixtures* / K.R. Rajagopal, L. Tao. – Singapore: World Scientific, 1995. – 250 p.
- [2] Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред, ч. 1* / Р.И. Нигматулин. – Москва: Наука, 1987. – 464 с.
- [3] Мамонтов А.Е. *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory* / А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин // [Сибирские электронные математические известия](#). – 2017. – Т. 14. – С. 388-397.
- [4] Прокудин Д.А. *Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей* / Д.А. Прокудин // [Сибирские электронные математические известия](#). – 2017. – Т. 14. – С. 568-585.
- [5] Prokudin D.A. *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures* / D.A. Prokudin // [Journal of Physics: Conference Series](#). – 2017. – V. 894. – Art. No. 012076.

## Аппроксимация функций в $L_p$ линейными комбинациями индикаторов

ПИЛИПЕНКО И. С.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
(Донецк, Россия)

E-mail: [irinasergeevnapilipenko@yandex.ru](mailto:irinasergeevnapilipenko@yandex.ru)

ВОЛЧКОВ В. В.

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
(Донецк, Россия)

Данная работа связана с теоремой Винера о “замыкании сдвигов”, её уточнениями и аналогами (см., например, [1–5]).

Пусть  $\mathbb{R}^n$  — вещественное евклидово пространство размерности  $n$ ,  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , — пространство функций, суммируемых с  $p$ -й степенью на  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.** Пусть  $r_1, r_2 > 0$ . Открытое множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  будем называть  $(r_1, r_2)$ -областью, если выполняются следующие условия:

- 1)  $G$  содержит замкнутый круг радиуса  $r_1$ ;
- 2)  $G$  является объединением замкнутых кругов радиуса  $r_2$ ;
- 3) центры двух любых замкнутых кругов радиуса  $r_2$ , содержащихся в  $G$ , можно соединить ломаной так, что всякий замкнутый круг радиуса  $r_2$  с центром на этой ломаной содержится в  $G$ .

Основным результатом исследования являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Пусть множество  $G$  является  $(r_1, r_2)$ -областью при  $r_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}$ ,  $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Тогда для любой функции  $f \in L^p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная линейная комбинация  $g_\varepsilon$  индикаторов замкнутых единичных квадратов и замкнутых единичных полуокружностей, содержащихся в  $G$ , таких что

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} < \varepsilon.$$

При  $p = \infty$  данное утверждение неверно.

Утверждение теоремы 1 не может выполняться без каких-либо условий на открытое множество  $G$ , поскольку оно должно содержать хотя бы один замкнутый единичный квадрат или полуокружность. Поэтому возникает вопрос о том, насколько можно ослабить условия на  $G$  из определения 1, содержащиеся в условии теоремы 1. Величину  $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  уменьшить нельзя, т.к. это радиус круга, описанного вокруг единичного квадрата. Следующий результат показывает, что условие 3) о связности множества центров кругов из определения 1 в общем случае убрать нельзя.

**Теорема 2.** Пусть  $r_1 > 0$ ,  $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Тогда существует область  $G \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $G$  содержит замкнутый круг радиуса  $r_1$ ;
- 2)  $G$  является объединением замкнутых кругов радиуса  $r_2$ ;
- 3) для области  $G$  утверждения теоремы 1 не выполняются ни при каком  $p \geq 1$ .

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем развитии теоретической части вопроса. Например, открытыми остаются задачи о скорости аппроксимации и конкретном виде линейных комбинаций индикаторов.

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н.И. *Лекции о теории аппроксимации* / Н.И. Ахиезер. – Москва: Наука, 1965. – С. 162-167.
- [2] Люмис Л. *Введение в абстрактный гармонический анализ* / Л. Люмис. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1956. – 252 с.
- [3] Волчков В.В. *Аппроксимация функций на ограниченных областях в  $\mathbb{R}^n$  линейными комбинациями сдвигов* / В.В. Волчков // ДАН – 1994. – Т. 334, № 5. – С. 560-561.
- [4] Волчков Вит.В. *Аппроксимация функций на сфере линейными комбинациями сдвигов* / Вит.В. Волчков // ДАН – 2004. – Т. 398, № 1. – С. 7-9.
- [5] Rawat R. *The injectivity of the Pompeiu transform and  $L^p$ -analogues of the Wiener Tauberian theorem* / R. Rawat, A. Sitaram // Israel J. Math. – 1995. – Vol. 91, No. 5. – P. 307-316.

## Секция 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения и динамические системы

### Растягивающиеся аттракторы систем, удовлетворяющих аксиоме А

ГРИНЕС В. З.

*НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)*

ЖУЖОМА Е. В.

*НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)*

*E-mail: zhuzhoma@mail.ru*

МЕДВЕДЕВ В. С.

*НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)*

Обозначим через  $\mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$ , множество А-дiffeоморфизмов замкнутого (гладкого и связного) ориентируемого  $n$ -мерного многообразия  $M^n$ ,  $n \geq 3$ , неблуждающее множество которых состоит из  $k \geq 1$  связных ориентируемых растягивающихся аттракторов и сжимающихся репеллеров коразмерности один. Мы показываем, что множество  $\mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$  состоит из  $\Omega$ -устойчивых и структурно неустойчивых diffeоморфизмов. Описана топологическая структура несущего многообразия  $M^n$  для любого  $f \in \mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$ , и получена полная классификация (с точностью до глобальной сопряженности на неблуждающих множествах) diffeоморфизмов из множества  $\mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$ .

*Благодарность.* Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

### Асимптотика решения нулевого порядка для одной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом в критическом случае

КУРИНА Г. А.

*Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)*

*E-mail: kurina@math.vsu.ru*

ХОАЙ Н. Т.

*Научный университет Вьетнамского национального университета (Ханой, Вьетнам)*

Рассматривается задача со слабым управлением, заключающаяся в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = c'x(1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x'(k\varepsilon)W(k\varepsilon, \varepsilon)x(k\varepsilon) + \varepsilon u'(k\varepsilon)R(k\varepsilon, \varepsilon)u(k\varepsilon)] \quad (1)$$

на траекториях системы

$$x(t + \varepsilon) = A(t, \varepsilon)x(t) + \varepsilon B(t, \varepsilon)u(t) + \varepsilon f(t, \varepsilon), \quad (2)$$

$$x(0) = x^0. \quad (3)$$

Здесь  $x(t)$  — вектор состояния в вещественном линейном пространстве  $X$  размерности  $n$ ,  $u(t)$  — управляющий вектор,  $t = k\varepsilon$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $N = 1/\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый шаг,  $c$  — постоянный  $n$ -мерный вектор, штрих означает транспонирование, матрицы  $W(t, \varepsilon)$  и  $R(t, \varepsilon)$  симметрические,  $W(t, \varepsilon)$  положительно полуопределенная,  $R(t, 0)$  положительно определенная, матрицы  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t, \varepsilon)$ ,  $W(t, \varepsilon)$ ,  $R(t, \varepsilon)$  и функция  $f(t, \varepsilon)$  достаточно гладкие по своим аргументам. Для простоты записи пишется  $x(t)$ ,  $u(t)$  вместо соответственно  $x(t, \varepsilon)$ ,  $u(t, \varepsilon)$

Предполагается, что для каждого  $t \in [0, 1]$  собственные значения  $\lambda_j(t)$  матрицы  $A_0(t) = A(t, 0)$  удовлетворяют следующим условиям.

I.  $\lambda_j(t) = 1$  при  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $k < n$ ,  $|\lambda_j(t)| < 1$ ,  $j > k$ .

II. Собственные векторы матрицы  $A_0(t)$ , соответствующие  $\lambda_j(t) = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , линейно независимы.

В силу терминологии [1] рассматриваемый случай является критическим.

Для построения асимптотики решения задачи (1)-(3) строится асимптотика решения двухточечной краевой задачи для состояния системы  $x(t)$  и сопряженной переменной  $\varphi(t)$ , вытекающей из условия оптимальности управления в форме дискретного принципа максимума,

$$\begin{aligned} x(t + \varepsilon) &= A(t, \varepsilon)x(t) + \varepsilon S(t, \varepsilon)\varphi(t + \varepsilon) + \varepsilon f(t, \varepsilon), \\ \varphi(t) &= A(t, \varepsilon)' \varphi(t + \varepsilon) - W(t, \varepsilon)x(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$x(0) = x^0, \quad \varphi(1) = -c, \quad (5)$$

где  $S(t, \varepsilon) = B(t, \varepsilon)R(t, \varepsilon)^{-1}B(t, \varepsilon)'$ .

Оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = R(t, \varepsilon)^{-1}B(t, \varepsilon)' \varphi(t + \varepsilon).$$

При построении асимптотики используются ортогональные проекторы  $P(t)$  и  $Q(t)$  пространства  $X$  на подпространства  $\text{Ker}E(t)$  и  $\text{Ker}E(t)'$ , где  $E(t) = I - A_0(t)$ , соответствующие разложениям пространства  $X$  в ортогональные суммы

$$X = \text{Ker}E(t) \oplus \text{Im}E(t)' = \text{Ker}E(t)' \oplus \text{Im}E(t).$$

В дополнение к условиям I, II предполагаются ещё два условия.

III.  $P(t)W_0(t) \equiv 0$  и  $Q(t)S_0(t) \equiv 0$ , где  $W_0(t) = W(t, 0)$ ,  $S_0(t) = S(t, 0)$ .

IV. Операторы  $(I - P(1))A_0(1)(I - P(1)) : \text{Im}E(1)' \rightarrow \text{Im}E(1)'$  и  $(I - Q(0))A_0(0)'(I - Q(0)) : \text{Im}E(0) \rightarrow \text{Im}E(0)$  обратимы.

Асимптотика решения задачи (4), (5)  $z = (x', \varphi)'$  ищется в виде

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \Pi z(\tau, \varepsilon) + Qz(\sigma, \varepsilon), \quad (6)$$

где  $\tau = t/\varepsilon$ ,  $\sigma = (t - 1)/\varepsilon$ ,  $t = k\varepsilon$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,

$$\bar{z}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j \bar{z}_j(t), \quad \Pi z(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j \Pi_j z(\tau), \quad Qz(\sigma, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j Q_j z(\sigma).$$

Пограничные функции  $\Pi_j z(\tau)$  и  $Q_j z(\sigma)$  находятся при помощи условий

$$\Pi_j z(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad Q_j z(\sigma) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow -\infty.$$

Доказана

**Теорема.** При условиях I-IV члены нулевого порядка в разложении (6) определяются однозначно в следующей последовательности:  $(I - P(t))\bar{x}_0(t)$ ,  $(I - Q(t))\bar{\varphi}_0(t)$ ,  $(I - P(0))\Pi_0 x(\tau)$ ,  $P(0)\Pi_0 x(\tau)$ ,  $(I - Q(0))\Pi_0 \varphi(\tau)$ ,  $Q(0)\Pi_0 \varphi(\tau)$ ,  $(I - P(1))Q_0 x(\sigma)$ ,  $P(1)Q_0 x(\sigma)$ ,  $(I - Q(1))Q_0 \varphi(\sigma)$ ,  $Q(1)Q_0 \varphi(\sigma)$ ,  $P(t)\bar{x}_0(t)$ ,  $Q(t)\bar{\varphi}_0(t)$ .

**Замечание 1.** В [2] рассматривалось асимптотическое решение дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с малым шагом с коэффициентами, не зависящими от шага. При условиях этой статьи уравнение для двухточечной краевой задачи, вытекающей из дискретного принципа максимума, не относится к критическому случаю.

**Замечание 2.** Аналогичный изложенному проекторный подход использовался в [3] для построения асимптотического решения дискретной начальной задачи с малым шагом в критическом случае.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А.Б. *Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях* / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 106 с.
- [2] Глизер В.Я. *Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом* / В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев // *Дифференц. уравнения.* – 1979. – Т. 15, № 9. – С. 1681-1691.
- [3] Курина Г.А. *Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае* / Г.А. Курина, Н.Т. Хоай // *Дифференц. уравнения.* – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 73-84.

## Компьютерно-ориентированные методы динамических систем (представление книги)

ОСИПЕНКО Г. С.

*Филиал МГУ в Севастополе (Севастополь, Россия)*

*E-mail: [george.osipenko@mail.ru](mailto:george.osipenko@mail.ru)*

Рассматриваются методы исследования глобальных свойств динамических систем, основанные на построении символического образа данной системы. Символический образ — это ориентированный граф, который является приближением к динамической системе и строится посредством дискретизации фазового пространства. Символическая динамика, порожденная ориентированным графом, отражает динамику исследуемой системы. Символический образ является инструментом теоретического исследования и основой компьютерно-ориентированных методов численного изучения нелокальных свойств динамических систем.

Предназначается для студентов по направлению прикладная математика и информатика. Издание полезно для аспирантов и исследователей, изучающих динамические системы и их применение.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Динамические системы .....	7
2. Символический образ .....	17
3. Отслеживание траекторий .....	32
4. Аттракторы и фильтрация .....	57
5. Инвариантные меры .....	70
6. Эргодические меры .....	109
7. Энтропия .....	124
8. Усреднение .....	144
9. Показатели Ляпунова .....	188
10. Структурная устойчивость .....	211
11. Численные эксперименты .....	228
12. Дополнение .....	266

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Осипенко Г.С. *Компьютерно-ориентированные методы динамических систем* / Г.С. Осипенко. – ИНФРА-М: Москва, 2024. – 294 с. – ISBN 978-5-16-018137-0.

## Особые периодические решения полиномиальных дифференциальных уравнений

САХАРОВ А. Н.

*Нижегородский государственный аграрно-технологический университет (Нижний Новгород, Россия)*  
*E-mail: [ansakharov2008@yandex.ru](mailto:ansakharov2008@yandex.ru)*

Рассматривается задача о бифуркациях периодических решений уравнения

$$\dot{z} = z^m + a_1(t, \varepsilon)z^{m-1} + \dots + a_{m-1}(t, \varepsilon)z + a_m(t, \varepsilon), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

с периодическими по  $t$  коэффициентами  $a_k(t, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , при изменении параметра  $\varepsilon$ . Замечено (В.А. Плисс [1]), что изменение числа обычных периодических решений связано с появлением *особых периодических решений*, имеющих конечное число разрывов на периоде. Механизм этого явления становится прозрачным после компактификации фазового пространства уравнения, что позволяет описать поведение периодических решений в терминах числа вращения<sup>1</sup>.

Замена  $z = \operatorname{tg}(\theta/2)$  преобразует вещественное уравнение (1) в уравнение

$$\dot{\varphi} = \cos^{m-2} \frac{\theta}{2}, \quad \dot{\theta} = 2 \left[ \sin^m \frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^m a_k(\varphi, \varepsilon) \sin^{m-k} \frac{\theta}{2} \cos^k \frac{\theta}{2} \right], \quad (2)$$

которое определяет поток на торе при четном  $m$  и на бутылке Клейна при нечетном  $m$ . Далее будем считать, что  $m$  — четное. Так как поток на торе неособый и не имеет ячеек Роба, то он имеет единственное число вращения  $\rho(\varepsilon)$ , которое непрерывно

<sup>1</sup>Идея компактификации фазового пространства уравнения Риккати принадлежит академику Я.Б. Зельдовичу. Он использовал это уравнение для моделирования взрывов (в астрофизике) и фактически переоткрыл теорию А. Пуанкаре.



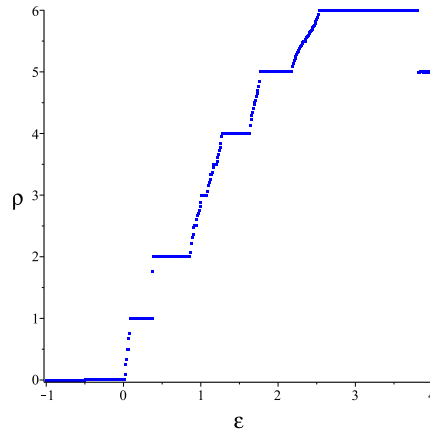


РИС 1. Число вращения системы (2).

зависит от параметра. На графике зависимости числа вращения от параметра системы (2) наблюдаются ступеньки — интервалы постоянства числа вращения (интервалы устойчивости числа вращения по терминологии В.А. Плисса). В этих интервалах число вращения рационально. Критерий принадлежности интервалу постоянства — отсутствие сопряжения (2) линейной системе  $\dot{\varphi} = \alpha$ ,  $\dot{\theta} = \beta$ ,  $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}$ . Это следствие предложения 2.1 из [2].

**Теорема 1.** Система (2) структурно устойчива тогда и только тогда, когда число вращения принадлежит интервалу захвата фазы.

Доказательство опирается на следующий факт: полуустойчивая замкнутая траектория не может принадлежать интервалу постоянства числа вращения (см. [3], лемма 11.2).

Неособые структурно устойчивые потоки на торе имеют  $2k$  замкнутых траекторий, причем  $k$  траекторий асимптотически устойчивы при  $t \rightarrow \infty$  и  $k$  траекторий — при  $t \rightarrow -\infty$  (см. [4, 5]). Все периодические траектории имеют одинаковый гомотопический тип. При достижении параметра конца интервала постоянства числа вращения происходит бифуркация, сводящаяся в силу непрерывности к двум сценариям:

- возникает одно полустойчивое периодическое решение (параболический случай);
- возникает континуум периодических решений (эллиптический случай).

Обоснование этих сценариев легко получается приложением теоремы Данжуа-Вольфа [6] к отображению монодромии.

Так как неособые периодические решения уравнение (1) имеет только при нулевом числе вращения системы (2), то изменение их количества напрямую не связано с указанными сценариями, которые явно приводят только к изменению гомотопического типа периодических решений. Однако, в некоторых случаях компактификация фазового пространства облегчает получить верхние оценки числа таких решений. Рассмотрим уравнение [7]

$$\dot{z} = (z^2 - 1)(z^2 + a(t)z + b(t)), \quad a(t + 2\pi) = a(t), \quad b(t + 2\pi) = b(t).$$

Процедура компактификации дает систему

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad \dot{\theta} = -\cos \theta(1 + b(\varphi) + a(\varphi) \sin \theta + (b(\varphi) - 1) \cos \theta). \quad (3)$$

Эта система имеет два периодических решения  $\theta = \pm\pi/2$ , гомотопных параллели тора, так что число вращения этой системы равно нулю. Эти решения разбивают тор на две инвариантные области, во внутренности которых содержится четное число периодических траекторий<sup>2</sup>. Но сужение системы на эти области не может содержать более двух таких траекторий. Таким образом, система (3) имеет не более шести  $2\pi$ -периодических решений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Плисс В.А. *О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью* / В.А. Плисс // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 5. – С. 965-968.
- [2] *О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона* / А.А. Глюцук, В.А. Клепцын, Д.А. Филимонов, И.В. Щуров // Функц. анализ и его прилож. – 2014. – Т. 48, № 4. – С. 47-64.
- [3] Плисс В.А. *Нелокальные проблемы теории колебаний* / В.А. Плисс – М.: Наука, 1964. – 368 с.
- [4] Майер А.Г. *Грубое преобразование окружности в окружность* / А.Г. Майер // Ученые записки Горьк. гос. университета. – 1939. – № 12. – С. 215-229.
- [5] Колобянина А.Е. *Современное изложение классификации грубых преобразований окружности* / А.Е. Колобянина, Е.В. Ноздринова, О.В. Починка // Журнал СВМО. – 2018. – Т. 20, № 4. – С. 408-418.
- [6] Милнор Дж. *Голоморфная динамика* / Дж. Милнор – Ижевск: РХД, 2000. – 320 с.
- [7] Панов А.А. *О числе периодических решений полиномиальных дифференциальных уравнений* / А.А. Панов // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64, № 5. – С. 720-727.

## Инварианты систем седьмого порядка с диссипацией

ШАМОЛИН М. В.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

*(Москва, Россия)*

*E-mail: [shamolin@rambler.ru](mailto:shamolin@rambler.ru), [shamolin.maxim@yandex.ru](mailto:shamolin.maxim@yandex.ru)*

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к трехмерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как известно [1–3], облегчает их исследование, а иногда позволяет и точно их проинтегрировать. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт вполне естествен —

<sup>2</sup>Если система не сопряжена линейной.

когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции с существенно особыми точками (см. также [4–6]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  нужно знать  $m - 1$  независимый тензорный инвариант (первый интеграл, дифференциальная форма, векторное поле и т.д.). При этом для достижения точной интегрируемости, как правило, приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, вводя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметит также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [5, 7]).

В работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система с тремя степенями свободы на своем шестимерном многообразии. Имеющееся в системе силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Poincaré H. *Calcul des probabilités* / H. Poincaré – Gauthier–Villars, Paris, 1912. – 340 p.
- [2] Колмогоров А.Н. *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе* / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93, № 5. – С. 763-766.
- [3] Козлов В.В. *Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений* / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. – 2019. – Т. 74(445), № 1. – С. 117-148.
- [4] Шамолин М.В. *Об интегрируемости в трансцендентных функциях* / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. – 1998. – Т. 53, № 3. – С. 209-210.
- [5] Шамолин М.В. *Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* / М.В. Шамолин // Доклады РАН. – 2013. – Т. 449, № 4. – С. 416-419.
- [6] Шамолин М.В. *Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией* / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2023. – Т. 514, № 1. – С. 98-106.
- [7] Шамолин М.В. *Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией* / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 507, № 1. – С. 86-92.

## О робастных достаточных условиях равномерной управляемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы

ЦЕХАН О.Б.

*УО Гродненский государственный университет имени Янки Купалы*  
(Гродно, Беларусь)  
*E-mail: tsekhan@grsu.by*

Рассмотрим на отрезке  $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления (ЛНСВС)

$$\dot{z}(t) = A(t, \mu) z(t) + B(t, \mu) u(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad z(t_0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  — параметр,  $\mu \in (0, \mu^0]$ ,  $\mu^0 \ll 1$ ,  $n = n_1 + n_2$ ,  $z'(t) = (x'(t), y'(t))$ , ' — символ транспонирования,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  — вектор медленных переменных,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  — вектор быстрых переменных,  $u(t), t \in T$ , — скалярная функция управления,  $z'_0 = (x'_0, y'_0)$ ,  $A(t, \mu) = M(\mu) [A^0(t) + A^1(t)]$ ,  $B(t, \mu) = M(\mu) B(t)$ ,  $M(\mu) = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu^{-1} E_{n_2}\}$ ,

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ A_3(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_2(t) \\ 0 & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

$A_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  — непрерывные на  $T$  матричные функции соответствующих размеров,  $B_j(t)$ ,  $j = 1, 2$  — непрерывные на  $T$  функции, записанные как вектор-столбцы.

Пусть  $F(t, \mu)$  — какая-либо фундаментальная матрица системы  $\dot{z}(t) = A(t, \mu) z(t)$ .

**Определение 1** (см. [1]). При фиксированном  $\mu \in (0, \mu^0]$  система (1) имеет класс  $k$  на открытом множестве  $\Delta \subset T$ , если  $n$ -вектор-функция  $H(t, \mu) = F(t, \mu)^{-1}B(t, \mu)$   $k$  раз непрерывно дифференцируема на  $\Delta$ .

Для  $\sigma \in \Delta \subset T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , обозначим  $\mathcal{U}_{k\sigma}$  множество импульсных функций вида

$$u = \sum_{j=0}^k a_j \delta_\sigma^{(j)} \tag{2}$$

где  $a_0, \dots, a_k$  — произвольные действительные числа,  $\delta_\sigma$  — дельта-функция Дирака,  $\delta_\sigma^{(j)}$  — производная порядка  $j$  обобщенной функции  $\delta_\sigma$ ,  $\delta_\sigma^{(0)} = \delta_\sigma$ .

**Определение 2.** При фиксированном  $\mu \in (0, \mu^0]$  система (1) управляема в классе импульсных функций  $\mathcal{U}_{k\sigma}$  (2), если она имеет класс  $k$  в окрестности  $\Delta = \Delta(\sigma)$  точки  $\sigma$  и множество  $\{v \in \mathbb{R}^n : v = \int_{t_0}^{t_1} H(\tau, \mu)u(\tau, \mu)d\tau, u \in U_{k\sigma}\}$  совпадает с  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 3.** При фиксированном  $\mu \in (0, \mu^0]$  ЛНСВС (1) называется *равномерно управляемой на  $T$* , если она имеет класс  $n - 1$  на открытом множестве  $\Delta$ , содержащем  $T$ , и управляема в каждом множестве  $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}_{n-1, \sigma}$ ,  $\sigma \in T$ . Если при некотором  $\mu^* \in (0, \mu^0]$  ЛНСВС (1) равномерно управляема на  $T$  для всех  $\mu \in (0, \mu^*]$ , будем говорить, что она *равномерно управляема на отрезке  $T$  робастно относительно  $\mu$* .

Равномерно управляемая система в каждый момент  $\sigma$  может быть мгновенно переведена в любое состояние с помощью импульсных управлений (2) класса  $n - 1$ . Для робастно управляемой ЛНСВС при любом достаточно малом  $\mu \in (0, \mu^0]$  система (1) может в каждый момент  $\sigma$  быть переведена мгновенно в любое состояние с помощью одного и того же независящего от  $\mu$  импульсного управления (2) класса  $n - 1$ .

С ЛНСВС (1) связаны [2] независящие от параметра  $\mu$  подсистемы, которые формально получаются из ЛНСВС, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при  $\mu = 0$ . Если  $\det A_4(t) \neq 0$ ,  $t \in T$ , то вырожденная система (ВС, медленная подсистема) имеет вид

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A_s(t)\bar{x}(t) + B_s(t)\bar{u}(t), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \bar{u} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \quad t \in T, \tag{3}$$

$A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$ ,  $B_s(t) \triangleq B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$ , и является линейной нестационарной  $n_1$ -мерной системой. Система пограничного слоя (СП или «быстрая» подсистема) для системы (1) записывается следующим образом:

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau) + B_2(t_0)\tilde{u}(\tau), \quad \tau = \mu^{-1}(t - t_0) \in T_\mu \triangleq [0, \mu^{-1}(t_1 - t_0)], \tag{4}$$

$\tilde{y}(\tau) = y(t_0 + \mu\tau) - A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \triangleq y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0$ , является линейной стационарной  $n_2$ -мерной системой. Наряду с СП (4) введем  $t$ -семейство быстрых подсистем вида (4) с матрицами  $A_4(t), B_2(t)$ , где  $t \in T$  рассматривается как параметр семейства стационарных систем (*присоединенная система* [3]).

**Определение 4.** ВС (3) называется *равномерно управляемой на  $T$* , если она имеет класс  $n_1 - 1$  на открытом множестве  $\Delta \subset T$  и управляема в каждом множестве  $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}_{n_1-1, \sigma}$ ,  $\sigma \in T$ .  $t$ -семейство быстрых подсистем полностью управляемо на  $T_\mu$ , если каждая подсистема из этого семейства полностью управляема.

Определим  $n$ -вектор функции  $q_k^j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$  рекуррентно:

$$q_k^j(t) = (-A^0(t)q_{k-1}^j(t) - A^1(t)q_{k-1}^{j-1}(t) + \dot{q}_{k-1}^j(t)), \quad q_k^j(t) = 0 \quad \text{при } j < 0 \quad \text{или } j > k.$$

Аналогично [4] можно доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $A_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  непрерывно дифференцируемы на  $T$  и  $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$  для любого  $t \in T$ . Если  $n \geq 2$ , то считаем  $q_k^j(t)$ ,  $k = \overline{0, n-2}$ ,  $j = \overline{0, k}$ , непрерывно-дифференцируемыми на  $T$ . Если вырожденная система (3) равномерно управляема на  $T$  и  $t$ -семейство быстрых подсистем (4) полностью управляемо на  $T$ , то ЛНСВС (1) равномерно управляема на  $T$  робастно относительно  $\mu$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021-2025 годы (шифр задания "Конвергенция 1.2.04").

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гайшун И.В. *Введение в теорию линейных нестационарных систем* / И.В. Гайшун – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1999. – 409 с.
- [2] Kokotović P.V. *Singular perturbations methods in control: analysis and design* / P.V. Kokotović, H.K. Khalil, J. O'Reilly – NY. Academic Press, 1999.
- [3] Тихонов А.Н. *Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных* / А.Н. Тихонов // Матем. сборник. – 1952. – Т. 31(73), № 3. – С. 575-586.
- [4] Цехан О.Б. *Робастные достаточные условия равномерной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы* / О.Б. Цехан // Дифференциальные уравнения и математическая физика, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ РАН, М. – 2023. – Т. 226. – С. 150-164.

## О конфликтном управлении осцилляционными объектами

ЮГАЙ Л. П.

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта (Чирчик, Узбекистан)  
E-mail: [yugailp@mail.ru](mailto:yugailp@mail.ru)

Многие задачи в механике, технике, экономике и других областях человеческой деятельности описываются математическими моделями, решения которых зависят от управляющих параметров и имеют осцилляционный (колебательный) характер [1–6]. Управление объектом значительно усложняется, если объект в процессе движения испытывает некоторое противодействующее влияние. Тогда управление объектом осуществляется в условиях конфликта, тематика таких задач относится к теории дифференциальных игр, и широко развита в работах [1, 2, 6]. В настоящем сообщении речь пойдет о конфликтно управляемых осцилляционных объектах, описываемых динамической системой вида

$$\begin{cases} \ddot{x} + k_1 \dot{x} - x \dot{\varphi} + (a - u_2) \cos(\varphi + \mu \varphi^2) = u_1 + v_1, \\ (b + cx^2) \ddot{\varphi} + 2b \dot{x} \dot{\varphi} + k_2 \dot{\varphi} - (c + bx)(a - u_3) \sin(\varphi + \mu \varphi^2) = u_4 + v_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $k_1, a, \mu, b, c, k_2$  — неотрицательные числа,  $|u_i| \leq \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $|v_j| \leq \beta_j$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_j > 0$ , а  $x$  и  $\varphi$  являются неизвестными функциями времени, точки над ними означают производные.

Для (1) методами [5], указываются положения равновесия, расположенные, вообще говоря, дискретно. Для этих положений равновесия рассматриваются следующие задачи:

- Задача приведения решения системы (1) в некоторую окрестность положения равновесия и удержания решения в этой окрестности (задача управляемости).
- Задача построения управления, обеспечивающего непопадание решения (1) в любую сколь угодно малую окрестность положения равновесия на бесконечном интервале времени.
- Выясняется устойчивость или неустойчивость положений равновесия.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красовский Н.Н. *Позиционные дифференциальные игры* / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1976. — 338 с.
- [2] Мищенко Е.Ф. *Задача уклонения от встречи дифференциальных игр многих лиц* / Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольский, Н.Ю. Сатимов // *Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*. — 1977. — Т. 14. — С. 105-128.
- [3] Черноусько Ф.Л. *Управление колебаниями* / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. — М.: Наука, 1980. — 484 с.
- [4] Каюмов О.Р. *Глобально управляемые механические системы* / О.Р. Каюмов. — М.: Физматлит, 2007. — 165 с.
- [5] Челомей В.Н. *Избранные труды* / В.Н. Каюмов. — М.: Машиностроение, 1989. — 386 с.
- [6] Югай Л.П. *Задача уклонения траекторий конфликтно управляемых систем от разреженных терминальных множеств* / Л.П. Югай // *Прикладная математика и механика (Москва)*. — 2024. — Т. 88, № 1. — С. 67-78.

## Hierarchy levels of subfamilies for some class of polynomial dynamic systems

ANDREEVA I. A.

*Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University*

*(St. Petersburg, Russia)*

*E-mail: [irandr@inbox.ru](mailto:irandr@inbox.ru)*

EFIMOVA T. O., KONDRATIEVA N. V.

*Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University*

*(St. Petersburg, Russia)*

In the course of an in-depth study of one family of polynomial dynamic systems having reciprocal cubic and quadratic forms in the right-hand sides of their equations (hereinafter referred to as the global family), conducted by methods of the qualitative theory of ODEs and DS using the first and second transformations and successive Poincare maps, its naturally occurring splitting into subfamilies of a number of hierarchical levels is carried out. The step initiating such splitting is carried out on the basis of the number and type of factors of the lowest degrees arising from the decomposition of polynomials standing in the right-hand sides of the equations. The next step is done when taking into account the existence or non-existence of multiple roots for characteristic polynomials, specially introduced for each of the equations of the system, as well as the order of these roots on the real axis. Further steps of possible splitting are tied to the subtle characteristics of the revealed pattern of phase trajectories of dynamic systems of the studied subfamily. The key role here begins to be played by the factor of uniqueness or non-uniqueness of the continuation of separatrices from a small neighborhood of a singular point of the system for their entire length. All the subfamilies found at the levels of the hierarchy, deepening for some of the subfamilies to the 3rd, and for another part of them to the 4th level, are studied according to a general strict plan. A complete set of all types of phase portraits of subfamilies, different in topological understanding, with a total number of over two hundred, is described. Phase portraits of subfamilies are constructed in the enclosed Poincare disk. A question of the number of limit cycles for all dynamic systems of the global family has been completely resolved.

### REFERENCES

- [1] *Nilpotent Centers of Cubic Systems* / A.F. Andreev, I.A. Andreeva, L.V. Detchenya, T.V. Makovetskaya, A.P. Sadovskii // *Differential Equations*. – 2017. – Vol. 53, No. 8. – P. 975-980.
- [2] Andreeva I.A. *The Qualitative Study of a Series of Dynamic Systems Families* / I.A. Andreeva // *Proceedings of the International Conference XXXI Crimean Autumn Mathematical School and Symposium for Spectral and Evolutional Problems*. – 2020. – P. 84-86. (In Russian)
- [3] Andreeva I.A. *The Behavior of Trajectories of Special Families of Polynomial Dynamic Systems* / I.A. Andreeva, T.O. Efimova // *Analysis, Modeling, Control, Development of Social and Economical Systems (AMUR-2020)*. Simferopol. – 2020. – P. 11-14. (In Russian)



- [4] Andreeva I.A. *Classes of Dynamic Systems with Various Combinations of Multipliers in Their Reciprocal Polynomial Right Parts* / I.A. Andreeva, T.O. Efimova // IOP Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2090.
- [5] Andreeva I.A. *On the Qualitative Study of Some Family of Cubic Dynamic Systems* / I.A. Andreeva, T.O. Efimova // Mathematical Methods in Technology and Technics. St. Petersburg. – 2021. – Vol. 6. – P. 12-15. (In Russian)
- [6] Andreeva I.A. *On Phase Trajectories and Portraits for Several Classes of Dynamic Systems* / I.A. Andreeva, T.O. Efimova // Analysis, Modeling, Control, Development of Social and Economical Systems (AMUR-2022). Simferopol. – 2022. – P. 22-26. (In Russian)
- [7] Andreeva I.A. *On the Qualitative Study of Phase Portraits for Some Categories of Polynomial Dynamic Systems* / I.A. Andreeva, T.O. Efimova // Studies of Systems, Decision and Control. – 2022. – Vol. 418. – Cyber-Physical Systems: Modeling and Industrial Application. Springer. – P. 39-50.
- [8] Andreeva I.A. *On Patterns of Phase Trajectories for Some Remarkable Family of Polynomial Dynamic Systems* / I.A. Andreeva, T.O. Efimova // Analysis, Modeling, Control, Development of Social and Economical Systems (AMUR-2023). Simferopol. – 2023. – P. 21-24.
- [9] Andreeva I. *Qualitative Research in the Poincare Disk of One Family of Dynamical Systems* / I. Andreeva, A. Andreev // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 281, No. 3. – May 2024. – DOI 10.1007/s10958-024-07110-3.
- [10] Andreeva I. *Qualitative Investigation of Some Hierarchical Family of Cubic Dynamic Systems* / I. Andreeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45(1). – P. 364-375.

## Секция 4. Дифференциальные уравнения в частных производных

### Задача высокочастотной дифракции на сильно вытянутом эллипсоиде

Андронов И. В.

*Михайловская военная артиллерийская академия и  
Санкт-Петербургский государственный университет  
(Санкт-Петербург, Россия)  
E-mail: iva---@list.ru*

Задачи высокочастотной дифракции на вытянутых телах вызывают повышенный интерес. Классические асимптотики Фока в случае вытянутых тел дают корректное представление поля лишь на очень высоких частотах, тем больших, чем сильнее вытянуто тело. Преодолеть этот недостаток позволяют специальные асимптотические разложения [1] для поля дифракции на сильно вытянутых телах, т.е. таких телах, площадь поперечного сечения которых имеет такой же асимптотический порядок как и длина тела, если измерения проводить в длинах волн. Однако этот подход применим только к телам канонической формы, а в [1] рассмотрены только тела вращения. В [2] подход распространён на трёхосный сильно вытянутый эллипсоид, но лишь для случая падения строго вдоль большой оси. Развитие техники, позволяющее рассматривать произвольное падение в парааксиальном приближении, представлено в докладе.

Отметим, что уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в эллипсоидальных координатах. Однако решение, выраженное в виде разложения по волновым функциям Ламэ, оказывается мало пригодным на высоких частотах ввиду медленной сходимости рядов и сложности вычисления волновых функций Ламэ.

Будем рассматривать задачу дифракции в предположении, что в системе эллипсоидальных координат  $(\eta, \nu, \mu)$ , введённых формулами

$$x = p\sqrt{\frac{(\mu - a)(\nu - a)(\eta^2 - a)}{a(a - 1)}}, \quad y = p\sqrt{\frac{(\mu - 1)(\nu - 1)(\eta^2 - 1)}{1 - a}}, \quad z = p\sqrt{\frac{\mu\nu}{a}}\eta,$$

параметр  $kp \gg 1$ , а параметр  $a$  близок к единице, а именно  $a = 1 + \chi/(kp)$ . Координаты  $\mu$  и  $\nu$  подвергнем растяжению

$$\mu = 1 + \frac{\chi}{kp}t, \quad \nu = 1 + \frac{\chi}{kp}s,$$

где  $0 < s < 1 < t$ . Поверхность эллипсоида является координатной и задаётся уравнением  $t = t_0$ . Параметры  $\chi$  и  $t_0$  выражаются через полуоси эллипсоида

$$\chi = k\frac{a_y^2 - a_x^2}{a_z}, \quad t_0 = \frac{a_y^2}{a_y^2 - a_x^2}$$

и предполагаются величинами порядка  $O(1)$ .

После выделения быстро осциллирующего множителя  $u = \exp(ikp\eta)U$  и применения преобразования В.Э. Петрова [3] задача сводится к решению конфлюэнтного уравнения класса Гойна [4], а именно

$$\zeta(1 - \zeta) \frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} + \left[\frac{\chi^2}{4} \zeta(1 - \zeta) + \chi\lambda \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) + \alpha\right] F(\zeta) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\alpha$  — параметры разделения переменных. После вычисления собственных чисел  $\alpha_n$  краевой задачи для (1) на отрезке  $[0, 1]$  старший член асимптотического разложения полного поля записывается в виде

$$u = \frac{e^{ikp\eta}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right)^{i\lambda} \sum_n A_n(\lambda) F_n(s) \left(F_n(t) - R_n(\lambda) G_n(t)\right) d\lambda. \quad (2)$$

Здесь  $F_n(s)$  — нормированные собственные функции,  $F_n(t)$  — их продолжение,  $G_n(t)$  — решения уравнения (1), удовлетворяющие условию излучения при  $\zeta \rightarrow +\infty$ ,  $R_n(\lambda)$  — парциальные коэффициенты отражения,  $R_n = \dot{F}_n(t_0)/\dot{G}_n(t_0)$  в случае условия Неймана и  $R_n = F_n(t_0)/G_n(t_0)$  в случае условия Дирихле, а

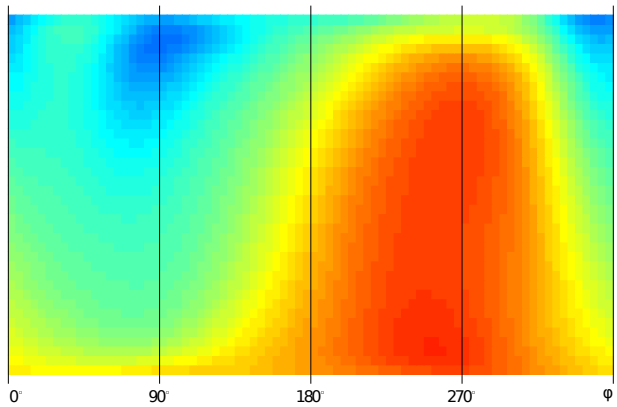
$$A_n = \frac{1}{\pi F_n(t)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta}\right)^{i\lambda} \int_0^1 U_i(s, t, \eta) F_n(s) \frac{ds}{\sqrt{s(1 - s)}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (3)$$

где  $U_i$  — функция ослабления падающей волны. Суммирование в (2) ведётся по модам четырёх семейств в соответствии с чётностью–нечётностью поля по переменным  $x$  и  $y$ . Для случая падения плоской волны под малым углом к большой оси сфероида

$$U_i = \exp \left\{ \frac{i\eta}{2} (\chi t + \chi s - \chi - \vartheta_0^2) + i\sqrt{\chi} \vartheta_0 \sqrt{1 - \eta^2} \left( \sqrt{(1 - s)(t - 1)} \sin \varphi_0 + \sqrt{st} \cos \varphi_0 \right) \right\},$$

где  $\sqrt{\chi} \vartheta_0$  — угол падения, а  $\varphi_0$  — угол, задающий плоскость падения в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ .

Асимптотика (2) позволяет провести исследование распределения поля на поверхности сильно вытянутого эллипсоида. Для примера, распределение амплитуды поля в случае падения плоской волны под углом  $5^\circ$  и  $\varphi_0 = 45^\circ$  на эллипсоид с полуосями  $ka_z = 200$ ,  $ka_x = 106$   $ka_y = 20$  приведено на рисунке справа. При расчёте суммирование ограничивалось тремя модами для каждого типа симметрии, а интегрирование — интервалом  $[-4, 2]$ .



Подставляя выражение (2) в формулу Грина, можно получить асимптотику диаграммы рассеянной волны, справедливую в узком конусе за эллипсоидом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Andronov I.V. *Problems of high frequency diffraction by elongated bodies* / I.V. Andronov. – Singapore: Springer, 2023. – XII+188 p. – ISBN 978-981-99-1275-9.  
 [2] Андронов И.В. *Дифракция плоской волны на сильно вытянутом трёхосном эллипсоиде* / И.В. Андронов, Н.И. Андронов // *Акустический журн.* – 2021. – Т. 67, № 4. – С. 351-360.

- [3] Петров В.Э. *Обобщённое сингулярное уравнение Трикоми как уравнение свёртки* / В.Э. Петров. // Доклады АН – 2006. – Т. 411, № 2. – С. 173-177.
- [4] Славянов С.Ю. *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей* / С.Ю. Славянов, В. Лай. – Санкт-Петербург: Невский Диалект, 2002. – 312 с. – ISBN 5-7940-0096-1.

## Асимптотический анализ решений задачи Чэфи-Инфанте с дробным оператором Лапласа

ГАРКУША К. С.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
E-mail: [garkusha.kris@gmail.com](mailto:garkusha.kris@gmail.com)

ЛУКЪЯНЕНКО В. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

ГРЕБЕНЕВА А. А.

*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (Москва, Россия)*

Рассматривается обобщенная модель начально-краевой задачи Чэфи-Инфанте [1] с условиями типа Дирихле, описывающая процессы распространения тепла и являющаяся динамической системой:

$$\begin{aligned} u_t &= \delta u + \beta(-\Delta)^{1/2}u + \alpha u - u^3, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Данное уравнение (1) является нелинейным параболическим уравнением с псевдодифференциальным оператором  $(-\Delta)^{1/2}$  (дробным оператором Лапласа), действие которого определяется с помощью собственных функций.

Используя метод Галеркина, построены приближенные решения начально-краевой задачи в виде разложения:

$$u(x, t) = z_1 \sin x + z_3 \sin 3x + z_5 \sin 5x + z_7 \sin 7x + q_3(z(t), x) + q_5(z(t), x) + q_7(z(t), x) + \dots, \quad (2)$$

где  $z = (z_1, z_3, z_5, z_7)$ ,  $q_k(z(t), x)$ ,  $k = 1, 3, 5, 7$  — формы  $k$ -ой степени относительно  $z$ , коэффициенты которых являются собственными функциями (модами) соответствующей (1) линеаризованной задачи, а  $z = (z_1, z_3, z_5, z_7)$  удовлетворяют условию:

$$\dot{z}_k = (\alpha + \beta - k^2)z_k + b_k^3(z) + b_k^5(z) + \dots, \quad k = 1, 3, 5, 7. \quad (3)$$

Здесь  $b_k^3(z)$ ,  $b_k^5(z)$  — формы  $k$ -ой степени относительно  $z$ .

После подстановки разложения получим гамильтонову систему:

$$\frac{dz_k}{dt} = -\frac{dG(z, \alpha, \beta)}{dz_k}, \quad k = 1, 3, 5, 7, \quad (4)$$

где

$$G(z, \alpha, \beta) = \frac{1}{4}z_1^2 \left( \frac{1}{4}z_1^2 - z_1z_3 + 3z_3^2 - 3z_3z_5 + 3z_5^2 - 2(\alpha + \beta - 1) \right) + \\ + \frac{1}{4}z_3^2 \left( z_3z_5 + \frac{3}{4}z_3^2 - 2z_3z_5 - 2(\alpha + \beta - 9) \right) + \frac{3}{16}z_5^2z_7^2 - 2(\alpha + \beta - 25).$$

Потенциальная функция  $G$  является функцией Ляпунова уравнения (4). Так как  $G$  ограничена снизу, то решения (4) ограничены на положительной полупрямой. Аттракторами являются лишь особые точки системы. При  $0 < \alpha < 1$  функция  $G(z, \alpha, \beta)$  является положительно определенной на всем пространстве. Следовательно, при  $0 < \alpha < 1$  нулевое решение (4) является глобально устойчивым. В точке  $\alpha = 1$  имеет место бифуркация типа «вилки» и от нуля ответвляется две устойчивые симметричные точки:  $z_{1,2} = \pm(z_1(\alpha), z_3(\alpha), z_5(\alpha), z_7(\alpha))$ . При этом имеет место равенство  $z_1(\alpha) = 2\sqrt{\alpha - 1} + O((\alpha - 1)^{3/2})$ .

Для анализа структуры и устойчивости решений при углублении бифуркационного параметра  $\alpha$  в область надкритичности, достаточно изменять параметр  $\alpha$  и для каждого из его значений находить собственные значения матрицы Якоби. Получена зависимость критического значения параметра  $\alpha$  (при котором происходит потеря устойчивости) от бифуркационного параметра  $\beta$  [2].

Работа В.А. Лукьяненко поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chafe N. *A bifurcation problem for a nonlinear parabolic equation* / N. Chafe, E. Infante // J. Appl. Math. – 1974. – Vol. 4. – P. 17-37.
- [2] *Асимптотические решения одного параболического уравнения типа реакция-диффузия* / В.А. Лукьяненко, А.А. Гребенева, Ю.А. Хазова, К.С. Гаркуша // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2024, Симферополь, 23-25 апреля 2024 г. – Симферополь: ИП Корниенко А.А. – 2024. – С. 7-13. – EDN KCQHVZ.

## Представление начально-краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в виде нелинейного интегрального уравнения

ГРЕБЕНЕВА А. А.

*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы  
(Москва, Россия)*

*E-mail: [agrebenevaa@yandex.ru](mailto:agrebenevaa@yandex.ru)*

ЛУКЪЯНЕНКО В. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

В работе рассмотрено дифференциально-разностное уравнение — обобщенная модель начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения ван-дер-полевского типа со сдвигом по пространственной переменной, когда область распространения реакции вещественная ось  $x \in \mathbb{R}$ . Дробная степень оператора Лапласа (в отличие от модели Зельдовича [1], где  $\alpha = 1/2$ ) изменяется в интервале  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= 2\varepsilon [\dot{u}(1 - \mu\dot{u}^2) - \rho^{-2}(-\Delta)\dot{u} + \beta\rho^{-1}(-\Delta)^\alpha\dot{u}] + au(x - h, t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Частные решения задачи (1) представимы в виде  $u(x, t) = e^{\lambda t}e^{i\omega x}$ , где  $\omega$  — вещественный параметр. Действие дробной степени оператора Лапласа определены следующим образом:  $(-\Delta)^\alpha e^{i\omega x} = \omega^{2\alpha}e^{i\omega x}$ , так как  $-\Delta e^{i\omega x} = \omega^2 e^{i\omega x}$ .

Характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной задаче, имеет вид:

$$\lambda^2 - 2\varepsilon q(\rho, \omega)\lambda + 1 - ae^{i\omega h} = 0, \tag{2}$$

где  $q(\rho, \omega) = 1 - \rho^{-2}\omega^2 + \beta\rho^{-1}\omega^{2\alpha}$ .

Интерес представляет исследование случая чисто мнимых собственных значений характеристического уравнения ( $\lambda = \pm i\nu$ ). Тогда общему решению уравнения (1) соответствует нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x, t) = u_0(x) \cos \nu t + u_1(x) \sin \nu t - \frac{2\varepsilon}{\nu} \int_0^t \frac{\sin \nu(t - \tau)}{\sin 2\nu\tau} G(x, \tau) d\tau. \tag{3}$$

Используя преобразования Фурье и Лапласа, доказана:

**Теорема.** *Задача Коши для нелинейного уравнения спинового горения со сдвигом по пространственной переменной (1) представима в виде нелинейного интегрального уравнения типа свертки:*

$$u(x, t) = k_1 * u_0 + k_2 * u_1 + 2\mu\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} k_3(x - \xi, t - \tau) \dot{u}^3(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{4}$$

где  $k_j(x, t) = (\mathcal{F}^{-1}L^{-1}K_j)(x, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $K_1(\xi, t) = \frac{2\varepsilon q(\xi) - s}{s^2 - 2\varepsilon qs + 1 - ae^{ih\xi}}$ ,  
 $K_2(\xi, t) = -\frac{1}{s^2 - 2\varepsilon qs + 1 - ae^{ih\xi}}$ ,  $K_3(\xi, t) = -\frac{2\varepsilon}{s^2 - 2\varepsilon qs + 1 - ae^{ih\xi}}$ ,  
 $q(\xi) = 1 - \rho^{-2}\xi^2 + \beta\rho^{-1}\xi^{2\alpha}$ .

Ранее авторами рассмотрена обобщенная математическая модель Зельдовича, когда зона распространения реакции вся плоскость или тонкостенная цилиндрическая труба [2, 3], вещественная ось [4], а также продолжено исследование для толстостенной (кольцо) трубы и круга [5] с точки зрения теории бифуркации. Следуя Лионсу, с помощью метода компактности в сочетании с методом Галеркина, доказаны теоремы о разрешимости и существовании аттракторов [6]. Задача для тонкого кольца  $R < r < R + \delta$  при  $\delta \rightarrow 0$  сводится к задаче на окружности.

Работа В.А. Лукьяненко поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алдушин А.П. *К феноменологической теории спинового горения* / А.П. Алдушин, Я.Б. Зельдович, Б.А. Маломед // ДАН СССР. – 1980. – Т. 251, № 5. – С. 1102-1106.
- [2] Хазова Ю.А. *Анализ устойчивости и формы приближенных периодических решений уравнения спинового горения* / Ю.А. Хазова, А.А. Гребенева // Таврический вестник информатики и математики. – 2022. – № 1(54). – С. 75-87. – EDN INYHQТ.
- [3] Лукьяненко В.А. *Нестационарные режимы феноменологической модели спинового горения* / В.А. Лукьяненко, Ю.А. Хазова, А.А. Гребенева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2023. – Т. 4. – С. 86-98. – EDN LUMUSH.
- [4] Гребенева А.А. *Некоторые задачи феноменологического уравнения спинового горения* / А.А. Гребенева, В.А. Лукьяненко // Таврический вестник информатики и математики. – 2022. – № 3(56). – С. 7-29. – EDN BZFWDK.
- [5] Grebeneva A. *Problem of spin combustion in the annular regions* / A. Grebeneva, V. Lukianenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – P. 1-17. – DOI: 10.1007/s10958-024-07118-9.
- [6] Grebeneva A. *Structure of the problem of spin combustion in the ring* / A. Grebeneva, V. Lukianenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – DOI: 10.1007/s10958-023-06898-w.

## О малых движениях многокомпонентной вязкой несжимаемой жидкости

ГРИБКОВА О. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

ЗАКОРА Д. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: dmitry.zkr@gmail.com*

Пусть ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с липшицевой границей  $\partial\Omega$  полностью заполнена гомогенной смесью  $n \geq 2$  несжимаемых вязких жидкостей. Введём систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , жёстко связанную с областью  $\Omega$ , таким образом, что ось  $Ox_3$  направлена против действия силы тяжести  $-g\mathbf{e}_3$ ,  $g > 0$ , а начало координат находится в области  $\Omega$ . Задача о малых движениях рассматриваемой системы имеет следующий вид (см. нелинейную систему уравнений в [1, 2]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_i} \mu_{ij} \Delta \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_i} a_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_i &= 0, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \Omega, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_i(0, x) &= \mathbf{u}_i^0(x), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t, x)$  ( $x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ ) — поле скоростей  $i$ -й компоненты смеси,  $\rho_i = \operatorname{const} > 0$  — плотность  $i$ -й компоненты смеси,  $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(t, x)$  — поле внешних массовых сил,  $\mu_{ij}$  — коэффициенты вязкостей,  $a_{ij} = a_{ji} > 0$  — коэффициенты, отвечающие за обмен импульсами между компонентами. Матрица  $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , называемая матрицей вязкостей, является симметричной и положительной:  $\mathbf{M} > 0$ .

Система уравнений (1) следует из работ [1, 2], в которых исследуются вопросы разрешимости соответствующих нелинейных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей. В работах [3, 4] изучены спектральные свойства операторов, возникающих при исследовании линейных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей.

Начально-краевая задача (1) с использованием метода ортогонального проектирования трактуется в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} := \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{J}_0(\Omega)$ :

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A} + \mathcal{B})\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \{\delta_{ij}\rho_j I\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{M} := \{\mu_{ij}I\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{A} := \{\delta_{ij}A\}_{i,j=1}^n, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{D}(A), \\ \xi &:= (\mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n)^\tau, \quad \xi^0 := (\mathbf{u}_1^0; \dots; \mathbf{u}_n^0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (P_0\mathbf{f}_1(t); \dots; P_0\mathbf{f}_n(t))^\tau, \\ \mathcal{B} &:= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}I - a_{11}I & -a_{12}I & \dots & -a_{1n}I \\ -a_{21}I & \sum_{j=1}^n a_{2j}I - a_{22}I & \dots & -a_{2n}I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}I & -a_{n2}I & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj}I - a_{nn}I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $I$  — единичный оператор в  $\mathbf{J}_0(\Omega)$ ,  $A$  — оператор Стокса,  $\tau$  — операция транспонирования,  $P_0$  — ортопроектор пространства  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  на  $\mathbf{J}_0(\Omega)$ .



**Определение.** Поля  $\mathbf{u}_i$  и функции  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) называются *сильным по времени решением* начально-краевой задачи (1), если функция  $\xi$  является решением задачи Коши (2). В свою очередь, функция  $\xi$  является *решением* задачи Коши (2), если  $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ ,  $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{A}\xi \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ , выполнено уравнение из (2) при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и начальное условие.

Введём, кроме матрицы вязкостей  $\mathbf{M}$ , матрицу плотностей  $\mathbf{R} := \{\delta_{ij}\rho_j\}_{i,j=1}^n$ , связанную с оператором  $\mathcal{R}$ , и матрицу обмена импульсами  $\mathbf{B}$ , связанную с оператором  $\mathcal{B}$ . Основное содержание работы составляет следующая теорема.

**Теорема.**

- 1) Пусть  $\mathbf{u}_i^0 \in \mathcal{D}(A)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а функции  $\mathbf{f}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) удовлетворяют локальному условию Гёльдера. Тогда начально-краевая задача (1) имеет единственное сильное по времени решение.
- 2) Спектр оператора  $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A} + \mathcal{B})$  расположен на положительной полуоси, дискретен и имеет следующее асимптотическое распределение:

$$\lambda_k(\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A} + \mathcal{B})) = \left( \frac{|\Omega|}{3\pi^2} \operatorname{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2} \right)^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty.$$

- 3) Система собственных элементов оператора  $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{A} + \mathcal{B})$  образует ортонормированный базис пространства  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}^1$  и представима в виде  $\{\xi_k^p = \alpha_k^{(p)} \mathbf{u}_k(A)\}_{k \in \mathbb{N}, p=1, \dots, n}$ , где  $\alpha_k^{(p)} := (\alpha_{k,1}^{(p)}; \dots; \alpha_{k,n}^{(p)})^T$  ( $p = 1, \dots, n$ ) — нормированные специальным образом собственные элементы матричной спектральной задачи  $(\lambda_k(A)\mathbf{M} + \mathbf{B})\alpha = \lambda\mathbf{R}\alpha$ .

В терминах собственных значений и собственных элементов оператора Стокса найдено представление для голоморфной полугруппы, разрешающей задачу Коши (2).

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мамонтов А.Е. *Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей* / А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин // *Изв. РАН. Сер. матем.* – 2018. – Т. 82, № 1. – С. 151-197.
- [2] Мамонтов А.Е. *Разрешимость нестационарных уравнений трехмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей* / А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин // *Изв. РАН. Сер. матем.* – 2021. – Т. 85, № 4. – С. 147-204.
- [3] Zakora D.A. *Spectral Properties of the Operator in the Problem of Oscillations in a Mixture of Viscous Compressible Fluids* / D.A. Zakora // *Differential Equations.* – 2023. – Vol. 59, No. 4. – P. 473-490.
- [4] Загора Д.А. *Спектральные свойства операторов в задаче о нормальных колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей* / Д.А. Загора // *Современная математика. Фундаментальные направления.* – 2023. – Т. 69, № 1. – С. 73-97.

---

<sup>1</sup> $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$  — энергетическое пространство оператора  $\mathcal{R}$ .

## Регулярность слабых решений модельной задачи с составными граничными условиями для недиагональных параболических систем

ГРИШИНА Г. В.

*МГТУ имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия)*

*E-mail: ggrishina@bmstu.ru*

В полуцилиндре рассматривается модельная задача для линейной параболической системы с недиагональной главной матрицей. Компоненты решения  $u(z) = \{u^k(z)\}^{k \leq N}$ ,  $N > 1$ ,  $z = (x, t)$  связаны граничными условиями типа Дирихле и Неймана с помощью некоторой матрицы на плоской части  $\Gamma$  боковой границы полуцилиндра  $Q_1^+ = B_1^+ \times (-1, 0)$ :

$$u_t - \operatorname{div}(a(z)\nabla u) = -\operatorname{div}F(z) + f(z), \quad z \in Q_1^+, \tag{1}$$

$$u'(z) - bu''(z) = 0, \quad z \in \Gamma; \tag{2}$$

$$b^* \left( \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)' + \left( \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' = -(b^*F'(z) + F''(z)), \quad z \in \Gamma. \tag{3}$$

Здесь  $u' = \{u^k\}^{1 \leq k \leq m}$ ,  $u'' = \{u^k\}^{m+1 \leq k \leq N}$ , где  $0 \leq m \leq N$  — фиксированное число;  $\nabla u = \{u_{x_\alpha}^k\}_{\alpha \leq n}^{k \leq N}$ ;  $B_1^+ = B_1(0) \cap \{x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $B_1(0)$  — единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma = (\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}) \times (-1, 0)$ ;  $\mathbf{n}(x) = (0, \dots, 0, -1)$  — единичная внешняя к  $B_1^+$  нормаль в точках  $z \in \Gamma$ . Эллиптический оператор в системе определен равенством

$$\operatorname{div}(a(z)\nabla u) = \left\{ \sum_{\alpha, \beta \leq n; l \leq N} (a_{kl}^{\alpha\beta}(z) u_{x_\beta}^l)_{x_\alpha} \right\}_{k \leq N};$$

вектор конормальной производной  $\frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} = \left( \left( \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)', \left( \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' \right)$ , где

$$\left( \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)' = - \left\{ \sum_{\beta \leq n; l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(z, u) u_{x_\beta}^l \right\}_{k \leq m},$$

$$\left( \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}_a} \right)'' = - \left\{ \sum_{\beta \leq n; l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(x, u) u_{x_\beta}^l \right\}_{m+1 \leq k \leq N};$$

$b$  — матрица размера  $[m \times (N - m)]$ ,  $b^*$  — транспонированная к  $b$ . Случай  $b = 0$  не исключается.

Устанавливается непрерывность по Гёльдеру слабых решений задачи (1)-(3) в окрестности  $\Gamma$ . При доказательстве используется модификация метода  $A$ -калорической аппроксимации, адаптированного к рассматриваемой задаче.

Регулярность слабых решений линейных и квазилинейных эллиптических систем с недиагональной главной матрицей в окрестности части плоской границы изучалась в [1]. В [1] установлена непрерывность по Гёльдеру слабых решений для линейных систем и частичная регулярность слабых решений для простейших квазилинейных систем. Регулярность слабых решений доказана при оптимальных ограничениях на гладкость матриц  $a(x)$ ,  $b(x)$  и функций  $F, f$ .

В [1] разработана модификация метода  $A$ -гармонической аппроксимации, названная "методом  $(A, b)$ -гармонической аппроксимации" с постоянными матрицами  $A$  и  $b$ . Метод  $A$ -гармонической аппроксимации основан на идеях Де Джорджи. Для

параболических систем он известен как метод  $A$ -калорической аппроксимации, В соответствии с этим методом решения приближаются локально в  $L_2$ -норме решениями простейшей параболической системы с постоянной матрицей  $A$ .

В данной работе метод  $A$ -калорической аппроксимации адаптирован к изучению граничной задачи с составными граничными условиями (2)-(3). Рассматривается модельная задача в цилиндре с плоской частью боковой поверхности  $\Gamma$ . Доказана  $C^\alpha$ -гладкость слабых решений в окрестности  $\Gamma$  при оптимальных ограничениях на гладкость матриц  $a(z)$ ,  $b(z)$  и функций  $F$ ,  $f$ .

Сложность доказательства основного результата состоит в том, что множество допустимых функций в интегральном тождестве зависит от матрицы  $b$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Arkhipova A.A. *Regularity of weak solutions to nondiagonal elliptic systems with composite boundary conditions* / A.A. Arkhipova, G.V. Grishina // Journal of Math. Sci., New York. – 2020. – Vol. 247, No. 6. – P. 33-57.
- [2] Arkhipova A.A. *Regularity of solutions to quasilinear parabolic systems with time-nonsmooth principal matrix and the Neumann boundary condition* / A.A. Arkhipova, G.V. Grishina // J. Math. Sci., New York. – 2018. – Vol. 232, No. 3. – P. 232-253.
- [3] Архипова А.А. *О регулярности решений модельной задачи с заданной кривой производной для квазилинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами* / А.А. Архипова, Г.В. Гришина // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64), Вып. 1. – С. 3-26.

## Усреднение операторов типа Леви с периодическими коэффициентами

ЖИЖИНА Е. А., ПЯТНИЦКИЙ А. Л.

*Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
(Москва, Россия)*

*E-mail: [elena.jijina@gmail.com](mailto:elena.jijina@gmail.com), [apiatnitski@gmail.com](mailto:apiatnitski@gmail.com)*

СЛОУЩ В. А., СУСЛИНА Т. А.

*Санкт-Петербургский государственный университет  
(Санкт-Петербург, Россия)*

*E-mail: [v.slouzh@spbu.ru](mailto:v.slouzh@spbu.ru), [t.suslina@spbu.ru](mailto:t.suslina@spbu.ru)*

В пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассматривается нелокальный оператор  $\mathbb{A}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , формально заданный соотношением

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} d\mathbf{y}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Предполагается, что  $\mu \in L_\infty(\mathbb{R}^{2d})$  и

$$\begin{aligned} 0 < \mu_- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu_+ < \infty, \quad \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d; \\ \mu(\mathbf{x} + \mathbf{m}, \mathbf{y} + \mathbf{n}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned} \tag{1}$$

Точное определение дается в терминах квадратичной формы

$$a_\varepsilon[u, u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}, \quad u \in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d). \quad (2)$$

При условии (1) и  $0 < \alpha < 2$  форма (2) допускает оценки

$$\mu_- a_0[u, u] \leq a_\varepsilon[u, u] \leq \mu_+ a_0[u, u], \quad u \in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d),$$

где форма  $a_0$  отвечает значению  $\mu = 1$  и представима в виде

$$a_0[u, u] = c_0(d, \alpha) \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^\alpha |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}, \quad u \in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d),$$

а  $\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})$  — Фурье-образ функции  $u$ . Отсюда следует замкнутость форм  $a_0$  и  $a_\varepsilon$ . По определению,  $\mathbb{A}_\varepsilon$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , порожденный замкнутой неотрицательной формой (2).

В [1] показано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  резольвента  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  сильно сходится к оператору  $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ . Здесь  $\mathbb{A}^0$  — эффективный оператор того же вида, что  $\mathbb{A}_\varepsilon$ , с постоянным коэффициентом

$$\mu^0 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad \Omega = (0, 1)^d.$$

Оператор  $\mathbb{A}^0$  можно представить в виде

$$\mathbb{A}^0 = c_0(d, \alpha) \mu^0 (-\Delta)^{\alpha/2}, \quad \text{Dom } \mathbb{A}^0 = H^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Мы доказываем, что резольвента оператора  $\mathbb{A}_\varepsilon$  сходится по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

**Теорема 1.** *При условии (1) и  $0 < \alpha < 2$  справедлива оценка*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ \varepsilon(1 + |\log \varepsilon|)^2, & \alpha = 1, \\ \varepsilon^{2-\alpha}, & 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Погрешность  $O(\varepsilon^\alpha)$  оптимальна. Таким образом, при  $0 < \alpha < 1$  уже старший член аппроксимации резольвенты дает оптимальное приближение. При  $1 < \alpha < 2$  мы улучшаем точность приближения за счет учета корректоров.

Для описания корректоров нам понадобятся вспомогательные задачи на ячейке. Пусть  $\tilde{H}^{\alpha/2}(\Omega)$  — периодическое подпространство в классе Соболева  $H^{\alpha/2}(\Omega)$ . Пусть  $v_j \in \tilde{H}^{\alpha/2}(\Omega)$  (где  $j = 1, \dots, d$ ) удовлетворяет тождеству

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} (v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y}) + x_j - y_j) (\overline{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})}) = 0, \quad \varphi \in \tilde{H}^{\alpha/2}(\Omega),$$

причем  $\int_{\Omega} v_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ . Подразумевается, что функции  $v_j$  и  $\varphi$  периодически продолжены на  $\mathbb{R}^d$ . Положим

$$\mu_*(\mathbf{z}) := \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{z}) d\mathbf{x} - \mu^0$$

и определим  $(d \times d)$ -матрицу  $g$  с элементами

$$g_{lj} = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_*(\mathbf{z}) \frac{z_l z_j}{2|\mathbf{z}|^{d+\alpha}} d\mathbf{z} + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} ((x_l - y_l)(v_j(\mathbf{x}) - v_j(\mathbf{y})) + (x_j - y_j)(v_l(\mathbf{x}) - v_l(\mathbf{y}))).$$

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (1),  $k \in \mathbb{N}$  и  $2 - \frac{1}{k} < \alpha < 2$ . Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} - \sum_{m=1}^k \varepsilon^{m(2-\alpha)} \mathbb{K}_m \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \begin{cases} \varepsilon, & 2 - \frac{1}{k} < \alpha \leq 2 - \frac{1}{k+1}, \\ \varepsilon^{(k+1)(2-\alpha)}, & 2 - \frac{1}{k+1} < \alpha < 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\mathbb{K}_m = (\operatorname{div} g \nabla)^m (\mathbb{A}^0 + I)^{-m-1}$ , а  $g$  – постоянная матрица, определенная выше.

Таким образом, при каждом фиксированном  $1 < \alpha < 2$  можно подобрать  $k$  настолько большим, что при учете первых  $k$  корректоров мы получаем приближение к резольвенте  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  с погрешностью  $O(\varepsilon)$ .

Для доказательства результатов мы модифицировали теоретико-операторный подход на случай нелокальных периодических операторов; см. [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 22-11-00092).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kassmann M. *Homogenization of Levy-type operators with oscillating coefficients* / M. Kassmann, A. Piatnitski, E. Zhizhina // SIAM J. Math. Anal. – 2019. – Vol. 51. – P. 3641-3665.
- [2] *Операторные оценки при усреднении операторов типа Леви с периодическими коэффициентами* / Е.А. Жижина, А.Л. Пятницкий, В.А. Слоущ, Т.А. Суслина // ПОМИ препринт 6/2024.

## Условия подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов в пространствах Соболева

ЛИМАНСКИЙ Д. В.

*Институт прикладной математики и механики (Донецк, Россия)*  
E-mail: [d.limanskiy.dongu@mail.ru](mailto:d.limanskiy.dongu@mail.ru)

Доклад посвящен обзору результатов об априорных оценках для систем минимальных дифференциальных операторов в шкале пространств  $L^p(\Omega)$ , где  $p \in [1, \infty]$ . Приведены результаты о характеристике эллиптических и  $l$ -квазиэллиптических систем при помощи априорных оценок в изотропных и анизотропных пространствах Соболева  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . При заданном наборе  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  доказаны критерии существования  $l$ -квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем, а

также указаны широкие классы слабо коэрцитивных в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , неэллиптических и неквазиэллиптических систем. Кроме того, описаны линейные пространства операторов, подчиненных в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ -норме тензорному произведению двух эллиптических дифференциальных полиномов.

Исследования выполнены в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лиманский Д. В. *Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов* / Д.В. Лиманский, М.М. Маламуд // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2024. – Т. 70, № 1. – С. 121-149.
- [2] Лиманский Д. В. *Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева* / Д.В. Лиманский, М.М. Маламуд // Матем. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75-112.

**Асимптотическое поведение решения  
начально-краевой задачи для одномерных уравнений  
динамики сжимаемой вязкой баротропной смеси**

МАМОНТОВ А. Е., ПРОКУДИН Д. А.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева Сибирского  
отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия)  
E-mail: [aem@hydro.nsc.ru](mailto:aem@hydro.nsc.ru), [prokudin@hydro.nsc.ru](mailto:prokudin@hydro.nsc.ru)*

Рассматривается начально-краевая задача для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой баротропной многокомпонентной смеси [1–3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial p(\rho)}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \tag{3}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Здесь  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$  — число компонент смеси;  $\rho(t, x)$  — плотность смеси и  $u_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  — скорости компонент смеси, являются искомыми функциями времени  $t$  и точки  $x$ ;  $v$  — средневзвешенная скорость,  $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ ,  $\alpha_j = \text{const} \in (0, 1)$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ ;  $p \in C^1(0, \infty)$  — давление,

является заданной функцией плотности  $\rho$ , причем  $p > 0$ ,  $\frac{dp}{d\rho} > 0$ ;  $\nu_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  — постоянные коэффициенты вязкостей, образуют матрицу  $\mathbf{N} = \mathbf{N}^* > 0$ ;  $\rho_0 > 0$ ,  $\rho_0 \in W_2^1(0, 1)$ ,  $u_{0i} \in W_2^1(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, N$  — начальные данные.

Доказывается стабилизация решения начально-краевой задачи (1)–(4) при неограниченном возрастании времени без упрощающих предположений о структуре матрицы  $\mathbf{N}$ , кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности [4]. Существование, единственность и асимптотическое поведение решений при  $t \rightarrow +\infty$  рассматриваемых одномерных уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных смесей в изотермическом и политропном случаях исследовались в работах [5–10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред. Часть 1* / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
- [2] Rajagopal K.L. *Mechanics of mixtures* / K.L. Rajagopal, L. Tao. – Singapore: World Scientific, 1995. – 250 p.
- [3] Mamontov A.E. *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory* / A.E. Mamontov, D.A. Prokudin // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2017. – Vol. 14. – P. 388-397.
- [4] Mamontov A.E. *Asymptotic behavior of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional motions of a barotropic compressible viscous multicomponent fluid* / A.E. Mamontov, D.A. Prokudin // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2024. – Vol. 45. – P. 1680-1688.
- [5] Prokudin D.A. *On the stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics* / D.A. Prokudin // *Mathematics*. – 2023. – Vol. 11. – Art. No. 3065.
- [6] Прокудин Д.А. *О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред* / Д.А. Прокудин // *Сибирские электронные математические известия*. – 2021. – Т. 18. – С. 1278-1285.
- [7] Mamontov A.E. *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multicomponent fluids* / A.E. Mamontov, D.A. Prokudin // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. – 2019. – Vol. 21. – Art. No. 9.
- [8] Mamontov A.E. *Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids* / A.E. Mamontov, D.A. Prokudin // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2018. – Vol. 15. – P. 631-649.
- [9] Прокудин Д.А. *Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей* / Д.А. Прокудин // *Сибирские электронные математические известия*. – 2017. – Т. 14. – С. 568-585.
- [10] Prokudin D.A. *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures* / D.A. Prokudin // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2017. – Vol. 894. – Art. No. 012076.

## Об автомодельных решениях задачи Стефана на полуоси

ПАНОВ Е. Ю.

Новгородский государственный университет

(Великий Новгород, Россия)

E-mail: [evpanov@yandex.ru](mailto:evpanov@yandex.ru)

В области  $t, x > 0$  рассматривается многофазная задача Стефана для уравнения теплопроводности

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1)$$

где  $u_0 < u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} + \infty$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  — температуры фазовых переходов,  $a_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, m$ , — коэффициенты диффузии  $i$ -ой фазы. Рассматриваются непрерывные, кусочно  $C^2$ -гладкие решения  $u = u(t, x)$ , удовлетворяющие (1) в классическом смысле в областях  $u_i < u(t, x) < u_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , заполненных соответствующими фазами. На неизвестных линиях  $x = x_i(t)$  фазовых переходов, где  $u = u_i$ , должно выполняться условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0, \quad (2)$$

в котором  $k_i > 0$  — коэффициент теплопроводности  $i$ -ой фазы, а  $d_i \geq 0$  — скрытая удельная теплота  $i$ -го фазового перехода. Односторонние пределы  $u_x(t, x_i(t)+)$ ,  $u_x(t, x_i(t)-)$  на линии  $x = x_i(t)$  берутся из областей с более высокой (соответственно — более низкой) температурой. Добавим к нашей задаче также начальное условие и краевое условие Дирихле

$$u(0, x) = u_0, \quad u(t, 0) = u_D > u_0. \quad (3)$$

Число  $n \in \overline{0, m}$ , такое что  $u_n < u_D \leq u_{n+1}$  (то есть, число фазовых переходов, претерпеваемых решением), будем называть типом решения. Ввиду инвариантности задачи (1), (2), (3) относительно группы преобразований  $(t, x) \rightarrow (\lambda^2 t, \lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ , естественно искать автомодельное решение  $u = u(t, x) = u(\xi)$ ,  $\xi = x/\sqrt{t}$ . Из условий (3) следует, что  $u(0) = u_D$ ,  $u(+\infty) \doteq \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_0 < u_D$ , так что функция  $u(\xi)$  убывает. Решение задачи (1), (2), (3) получается “склеиванием” автомодельных решений уравнений теплопроводности (1) и имеет вид:

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad (4)$$

$$\xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

где  $+\infty = \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_n > \xi_{n+1} = 0$ ,  $F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2/4} ds$  и  $u_{n+1} = u_D$ . Параболы  $\xi = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , на которых  $u = u_i$ , являются неизвестными линиями фазовых переходов и подлежат определению из условий (2):

$$d_i \xi_i / 2 + \frac{k_i (u_{i+1} - u_i) F'(\xi_i/a_i)}{a_i (F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i))} - \frac{k_{i-1} (u_i - u_{i-1}) F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1} (F(\xi_i/a_{i-1}) - F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0.$$

Оказалось, что эта нелинейная система алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора параметров  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  градиентна, то есть имеет вид  $\nabla E_n(\bar{\xi}) = 0$ , где

$$E_n(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^n k_i (u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^2 / 4,$$



$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega_n$ , открытый выпуклый конус  $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$  задан неравенствами  $\xi_1 > \dots > \xi_n > 0$ . Первым нашим результатом является следующая

**Теорема 1.** *Функция  $E_n(\bar{\xi})$  коэрцитивна и строго выпукла в  $\Omega_n$ . Поэтому, она имеет единственную критическую точку  $\bar{\xi}^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_n^n) \in \Omega_n$ , которая является точкой глобального минимума. Координаты этой точки определяют единственное решение (4) задачи (1), (2), (3).*

Рассмотрим теперь задачу Стефана-Неймана с условиями на фиксированных границах

$$u(0, x) = u_0, \quad k(u)_x(t, 0) = t^{-1/2}b_N, \quad (5)$$

где  $k(u)$  — кусочно линейная непрерывная функция на  $[u_0, +\infty)$ , определяемая условиями  $k'(u) = k_i$  при  $u_i < u < u_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ . Снова рассматриваются автомодельные решения  $u = u(x/\sqrt{t})$ , для которых условия (5) превращаются в равенства  $u(+\infty) = u_0$ ,  $k(u)'(0) = b_N$ . При  $b_N < 0$  решение  $u(\xi)$  убывает и имеет вид

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)}(F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

$$u(\xi) = u_n + \frac{a_n b_N \sqrt{\pi}}{k_n}(F(\xi/a_n) - F(\xi_n/a_n)), \quad 0 < \xi < \xi_n.$$

Здесь  $n \geq 0$  — тип решения, определяемый из условия  $u_n < u(0) \leq u_{n+1}$ . При  $n > 0$  система условий Стефана на свободных границах  $\xi = \xi_i$  является градиентной и имеет вид  $\nabla \tilde{E}_n = 0$ , где

$$\tilde{E}_n(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i))$$

$$+ a_n b_N \sqrt{\pi} F(\xi_n/a_n) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^2, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega_n.$$

Определим отображение  $\Phi_n^{DN}$ , которое переводит значение  $r = u(0) \in (u_n, u_{n+1}]$  в  $-k_n u'(0)$ , где  $u = u^r(\xi)$  — решение задачи Стефана-Дирихле (1), (2), (3) с  $u_D = r$ . Из представления (4) следует, что  $\Phi_n^{DN}(r) = \frac{k_n(r - u_n)}{a_n \sqrt{\pi} F(\xi_n^n/a_n)}$ , где  $\xi_n^n = \xi_n^n(r)$  зависит от  $r$ .

Анализируя условия существования точки минимума строго выпуклого потенциала  $\tilde{E}_n$ , выводим следующий результат:

**Лемма.** *Функция  $\Phi_n^{DN}(r)$  строго возрастающая непрерывная функция на  $(u_n, u_{n+1}]$  такая, что*

$$\Phi_n^{DN}(u_n+) = \lim_{r \rightarrow u_n+} \Phi_n^{DN}(r) = \gamma_n \doteq \frac{k_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{\pi} a_{n-1} F(\xi_{n-1}^n/a_{n-1})}, \quad \Phi_n^{DN}(u_{n+1}) = \gamma_{n+1}$$

(считаем, что  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_{m+1} = +\infty$ ). В частности,  $\gamma_{n+1} > \gamma_n$  для всех  $n = 0, \dots, m$ .

Из этой леммы вытекает, что функции  $\Phi_n^{DN}(r)$  “склеиваются” в глобальное отображение Дирихле→Нейман

$$\Phi^{DN}(r) = \Phi_n^{DN}(r) \quad \text{при } u_n < r < u_{n+1}, \quad n = 0, \dots, m,$$

являющееся возрастающей непрерывной биекцией  $(u_0, +\infty)$  на  $(0, +\infty)$ . Отсюда и из Теоремы 1 вытекает следующий результат:

**Теорема 2.** При любом  $b_N < 0$  существует единственное автомодельное решение задачи Стефана-Неймана (1), (2), (5). Тип  $n$  этого решения определяется из условия  $\gamma_n < -b_N \leq \gamma_{n+1}$ .

## Задача усреднения во внутренних лакунах

СЛОУЩ В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

(Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: v.slouzh@spbu.ru

Доклад представляет собой обзор результатов об усреднении эллиптических и параболических задач, связанных с краем внутренней спектральной лакуны периодического эллиптического оператора.

В пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ , рассматривается эллиптический дифференциальный оператор (ДО) второго порядка

$$A_\varepsilon = \mathbf{D}^*g(x/\varepsilon)\mathbf{D} + \varepsilon^{-2}p(x/\varepsilon), \quad \mathbf{D} = -i\nabla,$$

с периодическими коэффициентами. Через  $A$  обозначается оператор  $A_{\varepsilon_0}$  при  $\varepsilon_0 = 1$ . Оператор  $A$  — периодический, эллиптический, самосопряженный, полуограниченный снизу ДО. Предполагается, что спектр оператора  $A$  начинается в точке  $\lambda_0 = 0$  (этого всегда можно добиться за счет добавления к  $p(x)$  подходящей константы). Операторы  $A_\varepsilon$  и  $A$  связывает масштабное преобразование  $T_\varepsilon : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $T_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{d/2}u(\varepsilon x)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Именно, справедливо соотношение

$$A_\varepsilon = T_\varepsilon^*(\varepsilon^{-2}A)T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Спектр оператора  $A_\varepsilon$  имеет зонную структуру

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\nu_j, \mu_j]. \tag{2}$$

Отрезки  $[\nu_j, \mu_j]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , называются спектральными зонами, разделяющие их интервалы называются лакунами в спектре; при  $d > 1$  зоны могут перекрываться. В соответствии с (1) и (2) спектр оператора  $A_\varepsilon$  имеет вид

$$\sigma(A_\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\varepsilon^{-2}\nu_j, \varepsilon^{-2}\mu_j]. \tag{3}$$

Классические задачи усреднения предполагают исследование асимптотик при  $\varepsilon \rightarrow 0$  следующих оператор-функций

$$(A_\varepsilon + I)^{-1}, \quad e^{-tA_\varepsilon}, \quad t > 0. \tag{4}$$

В работах [1]– [4] М.Ш. Бирманом и Т.А. Суслиной был предложен теоретико-операторный подход к решению этих задач, позволяющий получать (см., также [5,6]) асимптотики оператор-функций (4) в операторной норме (из  $L_2(\mathbb{R}^d)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  и в так называемой "энергетической" норме).

Предположим теперь, что зоны  $[\nu_{j-1}, \mu_{j-1}]$  и  $[\nu_j, \mu_j]$  разделены непустой внутренней лакуной  $(\mu_{j-1}, \nu_j) \neq \emptyset$ . Можно исследовать (ср. (3)) асимптотику оператор-функций

$$(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu_{j-1} + \varkappa^2)I)^{-1}, \quad (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu_j - \varkappa^2)I)^{-1}, \quad e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\nu_j, +\infty), \quad t > 0. \quad (5)$$

Здесь через  $E_{A_\varepsilon}(\cdot)$  обозначена спектральная мера оператора  $A_\varepsilon$ .

В докладе будет рассказано о работах [7]–[13], посвященных поиску асимптотик оператор-функций (5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в операторной норме из  $L_2(\mathbb{R}^d)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  и в "энергетической" норме. При этом особый упор будет сделан на случай  $d = 1$ , который удастся исследовать более полно, чем многомерный случай.

Исследование поддержано РНФ (проект 22-11-00092).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бирман М.Ш. *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения* / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, №5. – С. 1-108.
- [2] Суслина Т.А. *Об усреднении периодических параболических систем* / Т.А. Суслина // Функци. анализ и его прил. – 2004. – Т. 38, № 4. – С. 86–90.
- [3] Бирман М.Ш. *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора* / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Алгебра и анализ. – 2005. – Т. 17, № 6. – С. 1-104.
- [4] Бирман М.Ш. *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$*  / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Алгебра и анализ. – 2006. – Т. 18, № 6. – С. 1–130.
- [5] Василевская Е.С. *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора* / Е.С. Василевская // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 1. – С. 3-60.
- [6] Suslina T.A. *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space  $H^1(\mathbb{R}^d)$*  / T.A. Suslina // Math. Model. Nat. Phenom. – 2010. – Vol. 5, No. 4. – P. 390-447.
- [7] Бирман М.Ш. *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны* / М.Ш. Бирман // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 4. – С. 61-71.
- [8] Бирман М.Ш. *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны* / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2004. – Т. 318. – С. 60-74.
- [9] Суслина Т.А. *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны* / Т.А. Суслина, А.А. Харин // Проблемы математического анализа. – 2009. – Т. 41. – С. 127-141.
- [10] Суслина Т.А. *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны* / Т.А. Суслина, А.А. Харин // Проблемы матем. анализа. – 2011. – Т. 59. – С. 177-193.
- [11] *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap* / A.R. Akhmatova, E.S. Aksenova, V.A. Sloushch, T.A. Suslina // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022. – Vol. 67, No. 3. – P. 523-555.

- [12] Мишулович А.А. *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме* / А.А. Мишулович, В.А. Слоущ, Т.А. Суслина // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2022. – Т. 519. – С. 114–151.
- [13] Мишулович А.А. *Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю внутренней лакуны* / А.А. Мишулович // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2022. – Т. 516. – С. 135–175.

## Колебания системы тел, частично заполненных жидкостью, под действием упруго-демпфирующего устройства

ФОРДУК К. В.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
E-mail: [forduk\\_kv@mail.ru](mailto:forduk_kv@mail.ru)

Работа посвящена исследованию линеаризованных двумерных задач о малых движениях и нормальных колебаниях системы твёрдых тел, частично заполненных идеальными либо вязкими жидкостями, и последовательно соединённых пружинами. Первое и последнее тела прикреплены пружинами к двум опорам с заданным законом движения (см. рис. 1).

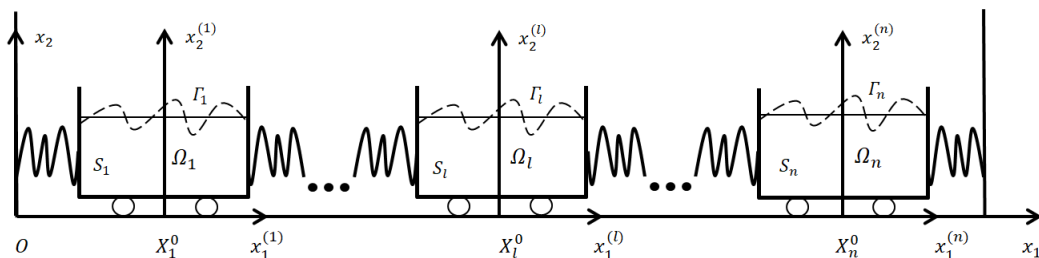


Рис. 1. Схема гидромеханической системы.

Основные результаты состоят в следующем:

- сформулированы и доказаны теоремы о разрешимости начально-краевой задачи, описывающей малые движения системы тел, частично заполненных идеальными либо вязкими жидкостями, под действием упруго-демпфирующих сил (см. [1, 3]);
- сформулирована и доказана теорема о дискретности, локализации и асимптотическом поведении спектра задачи о нормальных колебаниях системы тел, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упруго-демпфирующих сил, а также теорема о базисности по Аблелю-Лидскому системы корневых элементов задачи (см. [2]);
- сформулирована и доказана теорема о структуре, локализации и асимптотическом поведении спектра задачи о нормальных колебаниях системы тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упруго-демпфирующих сил, теорема о  $r$ -базисности системы корневых элементов задачи (см. [4]).

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Forduk K.V. *Problem on small motions of a system of bodies filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device* / D.A. Zakora, K.V. Forduk // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No. 5. – P. 889-900.
- [2] Forduk K.V. *A problem of normal oscillations of a system of bodies partially filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device* / D.A. Zakora, K.V. Forduk // Сиб. электрон. матем. изв. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 997–1014.
- [3] Фордук К.В. *Колебания системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства* / К.В. Фордук // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2022. – Т. 42. – С. 103-120.
- [4] Forduk K.V. *The problem on normal oscillations of a system of bodies partially filled with viscous fluids under the action of elastic-damping forces* / D.A. Zakora, K.V. Forduk // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 4. – P. 1388–1403.

## Решение системы нелинейных уравнений параболического типа

ХАЗОВА Ю. А.

Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

E-mail: [hazova.yuliya@hotmail.com](mailto:hazova.yuliya@hotmail.com)

Рассматривается математическая модель, описывающая процессы формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью. Динамика нелинейной фазовой модуляции  $u(r, t)$ , которая характеризует набег фазы световой волны в нелинейной среде, описывается системой уравнений в частных производных параболического типа

$$u_t + u = D\Delta u + K|A(r, z = 0, t)|^2, \quad r = (x, y),$$

$$A(r, z = 0, t + t_r) = (1 - R)^{1/2} A_{in}(r) + Re^{i\varphi_0} \exp iL\Delta \{A(r, z = 0, t) \exp iu(r, t)\},$$

$$-2ik_0 \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial z} = \Delta A(r, z, t).$$

Здесь  $r = (x, y)$  — радиус-вектор в поперечном сечении светового поля;  $z$  — продольная координата;  $t$  — время;  $\Delta$  — лапласиан, описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде;  $D$  — нормированный коэффициент диффузии;  $K$  — коэффициент нелинейности среды;  $|A(r, z = 0, t)|^2$  — интенсивность светового поля, попадающего на нелинейную среду;  $A(r, z, t)$  — комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора. Комплексная амплитуда внутрирезонаторного поля перед слоем нелинейной среды  $A(r, z = 0, t)$  складывается из двух частей: комплексной амплитуды входного поля после прохождения зеркала и комплексной амплитуды поля после распространения в резонаторе.  $R$  — коэффициент отражения зеркал по интенсивности;  $A_{in}(r)$  — комплексная амплитуда входной световой волны;  $t_r$  — время

распространения поля в резонаторе;  $\varphi_0$  — постоянный фазовый сдвиг световой волны в резонаторе;  $L$  — длина резонатора, нормированная на дифракционную длину, которая определяется диаметром апертуры резонатора или входного пучка.

Исследована соответствующая линеаризованная задача с условиями на узком кольце в классе периодических функций. Найдено представление решений линеаризованной задачи в виде ряда по собственным функциям и в виде интегрального представления. Проанализирована зависимость решения от параметров задачи и определены случаи смены устойчивости решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лукьяненко В.А. *Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи* / В.А. Лукьяненко, Ю.А. Хазова // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2019. – Т. 27, № 4. – С. 85-98.

[2] Kornuta A.A. *Stable Structures of Nonlinear Parabolic Equations with Transformation of Spatial Variables* / A.A. Kornuta, V.A. Lukianenko // Lobachevskii J. Math. – 2021. – Vol. 42. – P. 911-930.

[3] Корнута А.А. *Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа* / А.А. Корнута, В.А. Лукьяненко // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 28, № 5. – С. 1-21.

## Toeplitz matrices in the BC-method

BELISHEV M. I., KARAZEEVA N. A.

*St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute  
(St. Petersburg, Russia)*

The dynamical system of the form

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u - \langle \nabla \ln \rho, \nabla u \rangle &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+^2 \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0 && \text{in } \overline{\mathbb{R}_+^2}, \\ u_y|_{y=0} &= f && \text{for } 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

is considered in  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ , where  $\rho = \rho(x, y) > 0$  is smooth,  $f = f(x, t)$  is a Neumann boundary control,  $u = u^f(x, y, t)$  is a solution (wave). The control operator of the system acts from  $L_2(\mathbb{R} \times [0, T])$  to  $L_2(\mathbb{R}_+^2)$  by  $f \xrightarrow{W^T} u^f(\cdot, \cdot, T)$ . The response operator acts in  $L_2(\mathbb{R} \times [0, T])$  by  $f \xrightarrow{R^T} u^f|_{y=0}$ . The connecting operator  $C^T = (W^T)^*W^T$  acts in  $L_2(\mathbb{R} \times [0, T])$  and is expressed via  $R^{2T}$  in a simple explicit form well known in the Boundary Control Method.

Let  $R_\sigma^{2T}$  be the response operator given on controls supported in  $\sigma \times [0, T]$ , where  $\sigma \subset \mathbb{R}$  is a finite interval. The *inverse problem* is to determine  $\rho|_{x \in \sigma, 0 \leq y \leq T}$  from the given  $R_\sigma^{2T}$ . To solve it numerically, one needs to invert the Gram matrix  $G_{ij} = (C^T f_i, f_j)_{L_2(\mathbb{R} \times [0, T])}$  for a rich enough set of controls  $f_1, \dots, f_N$  (with  $N \sim 100$ ). This matrix is positive but strongly ill posed.

In the talk, we propose a way to reduce the inversion of  $G_{ij}$  to inversion of a matrix  $\tilde{G}_{ij}$ , which is simply determined by  $G_{ij}$  and has a block-Töplitz structure. This significantly reduces the amount of computation.

## REFERENCES

- [1] Belishev M.I. *Toeplitz matrices in the Boundary Control method for the plane domains* / M.I. Belishev, N.A. Karazeeva // Zap. Nauch. Semin. POMI – 2021. – Vol. 506. – P. 21-36.
- [2] Heinig G. *Fast algorithms for Toeplitz and Hankel matrices* / G. Heinig, K. Rost // Linear Algebra Its Appl. – 2011. – Vol. 435. – P. 1-59.

## On the Cauchy problem for an ordinary differential equation with involution

DEKHKONOV F. N.

*Namangan State University (Namangan, Uzbekistan)*

*E-mail: [f.n.dehqonov@mail.ru](mailto:f.n.dehqonov@mail.ru)*

USMONOVA G. M.

*Namangan State University (Namangan, Uzbekistan)*

Consider the differential equation

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(f(x)), \quad (1)$$

with initial condition

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

where function  $f(x)$  as

$$f(x) = \log_a(b - a^x), \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0,$$

where if  $a > 1, x < \log_a b$ , if  $0 < a < 1, x > \log_a b$ .

When studying the general properties of functional differential equations, it is always important to find and solve selected classes of equations as explicitly as possible, using methods that are capable of generalization. Differential equations with involutions is one of those classes.

The concept of involution is fundamental for the theory of groups and algebras, but, at the same time, being an object in mathematical analysis properties allow the obtaining of further information concerning this object. In order to be clear in this respect, let us define what we understand by involution in this analytical context.

**Definition 1** (see [1, 2]). Let  $A \subset \mathbb{R}$  be a set containing more than one point and  $f : A \rightarrow A$  a function such that  $f$  is not the *identity* Id. Then  $f$  is an *involution* if

$$f^2 \equiv f \circ f = Id$$

or, equivalently, if

$$f = f^{-1}.$$

If  $A = \mathbb{R}$ , we say that  $f$  is a strong involution [2].

**Example.** The following involutions are the most common examples:

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x$  is an involution known as *reflection*.
2.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  known as *inversion*.
3. Let  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $cb + a^2 \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx - a},$$

is a family of functions known as *bilinear involutions*.

Differential equations with involutions were introduced for the first time [3]. The system of differential equations associated with involution is studied in [4].

**Definition 2.** An expression of the form

$$F(x, y(f_1(x)), \dots, y(f_k(x)), \dots, y^{(n)}(f_1(x)), \dots, y^{(n)}(f_k(x))) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

where  $f_1, \dots, f_k$  are involutions and  $F$  is a real function of  $nk + 1$  real variables is called *differential equations with involutions*.

**Lemma.** Let  $f(x) = \log_a(b - a^x)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ . Then the Cauchy problem (1)-(2) is equivalent to the following Cauchy problem:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \ln^2 a \frac{a^x}{a^x - b} y(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0.$$

**Theorem.** Let  $f(x) = \log_a(b - a^x)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ . Then the solution of the Cauchy problem (1)-(2) exists and is unique.

#### REFERENCES

- [1] Carleman T. *Sur la theorie des equations integrales et ses applications* / T. Carleman – Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. I. Zurich., 1932. – P. 138-151.
- [2] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional-Differential Equations* / J. Wiener – World Scientific Publishing, New Jersey, 1993.
- [3] Wiener J. *Differential equations in Partial Derivatives with Involutions* / J. Wiener // Differential Equations – 1970. – Vol. 6. – P. 1320-1322.
- [4] Dekhkonov F.N. *Differential equation associated with involutions* / F.N. Dekhkonov // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics – 2021. – Vol. 3. – P. 7-13.



## Control problem for a heat equation with involution and Neumann condition

DEKHKONOV F. N.

*Namangan State University (Namangan, Uzbekistan)*

*E-mail: f.n.dehqonov@mail.ru*

Consider the following parabolic equation with involution in the domain  $\Omega_T := (0, \pi) \times (0, T)$

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \varepsilon u_{xx}(\pi - x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

with Neumann boundary conditions

$$u_x(0, t) = -\nu(t), \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

and initial condition

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3)$$

where  $\varepsilon$  is a nonzero real number such that  $|\varepsilon| < 1$ , and  $\nu(t)$  is the control function. If the control function  $\nu(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$  satisfies the conditions  $\nu(0) = 0$  and  $|\nu(t)| \leq 1$  on the half-line  $t \geq 0$ , then we call it an admissible control.

Differential equations with modified arguments are equations in which the unknown function and its derivatives are evaluated with modifications of time or space variables; such equations are called, in general, functional differential equations. Among such equations, one can single out, equations with involutions [1].

**Definition** ([2, 3]). A function  $f(x) \neq x$  maps bijectively a set of real numbers  $\Omega$ , such that

$$f(f(x)) = x \quad \text{or} \quad f^{-1}(x) = f(x),$$

is called an involution on  $\Omega$ .

Due to the widespread use of partial differential equations in physics and technology, there is always a great interest in the study of boundary value control problems. For this purpose, various boundary problems for parabolic and pseudo-parabolic equations have been widely studied by many researchers.

It is known that boundary control problems for the parabolic equation in the case  $\varepsilon = 0$  were studied in details in work [4].

Assume that the function  $\rho(x) \in W_2^2(0, \pi)$  satisfies the conditions

$$\rho'(x) \leq 0, \quad \rho''(x) \geq 0, \quad \int_0^\pi \rho(x) dx = 1.$$

**Control Problem.** For the given function  $\phi(t)$  problem consists of looking for the admissible control  $\nu(t)$  such that the solution  $u(x, t)$  of the initial-boundary problem (1)-(3) exists and for all  $t \geq 0$  satisfies the equation

$$\int_0^\pi \rho(x) u(x, t) dx = \phi(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

The optimal control problem for the parabolic type equations was studied by Fattorini and Friedman [5, 6]. The boundary control problem for a parabolic equation with a

piecewise smooth boundary in an  $n$ -dimensional domain was studied in [7] and an estimate for the minimum time required to reach a given average temperature was found.

Assume that  $M > 0$  is a constant. Then we denote by  $W(M)$  the set of functions  $\phi \in W_2^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\phi(t) = 0$  for all  $t \leq 0$  which satisfy the condition

$$\|\phi\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+)} \leq M.$$

**Theorem.** *There exists  $M > 0$  such that for any function  $\phi \in W(M)$  the solution  $\nu(t)$  of the equation (4) exists and it satisfies condition  $|\nu(t)| \leq 1$ .*

#### REFERENCES

- [1] Cabada A. *General Results for Differential Equations with Involutions* / A. Cabada, F.A.F. Tojo // *In: Differential Equations with Involutions, Atlantis Press – 2015. – P. 17-23.*
- [2] Carleman T. *Sur la theorie des equations integrales et ses applications* / T. Carleman – *Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. I. Zurich., 1932. – P. 138-151.*
- [3] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional-Differential Equations* / J. Wiener – *World Scientific Publishing, New Jersey, 1993.*
- [4] Dekhkonov F.N. *On the time-optimal control problem associated with the heating process of a thin rod* / F.N. Dekhkonov, E.I. Kuchkorov // *Lobachevskii Journal of Mathematics – 2023. – Vol. 44. – P. 1134-1144.*
- [5] Fattorini H.O. *Time-optimal control of solutions of operational differential equations* / H.O. Fattorini // *SIAM J. Control – 1964. – Vol. 2. – P. 49-65.*
- [6] Friedman A. *Optimal control for parabolic equations* / A. Friedman // *J. Math. Anal. Appl. – 1967. – Vol. 18. – P. 479-491.*
- [7] Albeverio S. *On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process* / S. Albeverio, Sh.A. Alimov // *Applied Mathematics and Optimization – 2008. – Vol. 57. – P.58-68.*

## The $\infty$ -radii theorem on the Bessel-Kingmann hypergroup

KRASNOSCHEKIKH G. V.

*Donetsk State University (Donetsk, Russia)*

*E-mail: [wolverimred@mail.ru](mailto:wolverimred@mail.ru)*

VOLCHKOV VIT. V.

*Donetsk State University (Donetsk, Russia)*

*E-mail: [volna936@gmail.com](mailto:volna936@gmail.com)*

Let  $\mathbb{R}^n$  be a Euclidean space of dimension  $n \geq 2$ ,  $L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  be the space of locally summable functions on  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Delta$  be the Laplace operator in  $\mathbb{R}^n$ . Denote by  $J_\nu$  the Bessel function of the first kind of order  $\nu > -1$ . Let  $\gamma_{\nu,1}, \gamma_{\nu,2}, \dots$  be a sequence of all positive zeroes of the function  $J_\nu$  numbered in the ascending order. It is known (see [1, Part 2, Chap. 1, Theorem 1.12]) that for a function  $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  the following statements are equivalent:

- (i)  $f$  has zero integrals over all balls in  $\mathbb{R}^n$  with radii  $\gamma_{n/2,1}, \gamma_{n/2,2}, \dots$  ;
- (ii)  $\Delta f + f = 0$  on  $\mathbb{R}^n$  in the sense of distributions.

We are studying a similar phenomenon on the Bessel-Kingmann hypergroup (see, for example, [2]).

Let  $\alpha > -1/2$ ,  $L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$  be the space of all even locally summable functions with respect to the measure  $|x|^{2\alpha+1}dx$  on  $\mathbb{R}$ ,  $T_x^\alpha$  be the generalized Bessel translation operator, i.e.

$$T_x^\alpha f(y) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta})(\sin \theta)^{2\alpha} d\theta. \tag{1}$$

The function  $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) J_\alpha(x) x^{-\alpha}$  is an eigenfunction of the operator (1):

$$T_x^\alpha j_\alpha(y) = j_\alpha(x) j_\alpha(y)$$

(see [2]). If  $f, g \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$  and at least one of these functions has a compact support, then the Bessel convolution

$$(f \star_\alpha g)(y) = \int_0^\infty (T_y^\alpha f)(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx \tag{2}$$

is defined, which belongs to the class  $L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ . The convolution (2) naturally extends to even distributions  $f, g$  at least one of which has a compact support. The main properties of this convolution are contained in [2].

Let  $r > 0$ ,  $\delta_r$  be an even measure on  $\mathbb{R}$  which corresponds to an even function  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  with the number  $\varphi(r)$ . We set

$$\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}) : f \star_\alpha \delta_r = 0 \text{ on } \mathbb{R} \right\}.$$

We have obtained the following result.

**Theorem.** *Let  $\lambda > 0$ . Then:*

- (i) if  $\alpha \neq 1/2$ , then

$$f \in \bigcap_{l=1}^\infty \mathcal{M}_{\gamma_{\alpha,l}/\lambda}(\mathbb{R}) \iff f(x) = c j_\alpha(\lambda x), \quad c \in \mathbb{C};$$

- (ii) if  $\alpha = 1/2$ , then

$$f \in \bigcap_{l=1}^\infty \mathcal{M}_{\gamma_{\alpha,l}/\lambda}(\mathbb{R}) \iff f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_{k,\lambda}(f) \frac{\sin(\lambda k x)}{\lambda k x},$$

where

$$a_{k,\lambda}(f) = 2\pi k \int_0^1 f\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \sin(\pi k x) x dx$$

and the series converges in the space of even distributions on  $\mathbb{R}$ .

The study was conducted on the topic of the state assignment (registration number 124012400352-6).

## REFERENCES

- [1] Volchkov V.V. *Integral geometry and convolution equations* / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p. – ISBN 1-4020-1628-X.
- [2] Selmi B. *A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup* / B. Selmi, M.M. Nessibi // *J. Math. Anal. Appl.* – 2007. – Vol. 329. – P. 163-190.

## Local dynamics of Cahn–Hilliard equation

PLYSHEVSKAYA S. P.

*V.I. Vernadsky Crimean Federal University (Simferopol, Russia)*

*E-mail: [splyshevskaya@mail.ru](mailto:splyshevskaya@mail.ru)*

The study of kinetics of fibering in binary mixtures with fixed concentration of components is one of the up to date objectives of condensed state physics [1]. Cahn–Hilliard equation [2] is one of the models used while studying spontaneous phase separation (binary) of a substance (an alloy), where the unknown function is a relative concentration of a substance component.

We study the generalized Cahn–Hilliard equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3 \right]. \quad (1)$$

Together with (1) we study periodic edge conditions of

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

In (1) we perform the substitution:  $u(t, x) = v(t, x) + c$ .

As a result we obtain the boundary-value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right], \quad (3)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (4)$$

where  $\beta = 1 + 2bc - 3c^2$ ,  $\gamma = b - 3c$ . It is important to note that the condition

$$M(v(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0, x) dx = 0$$

at all  $t > t_0$  leads to the fact that the condition

$$M(v(t, x)) = 0 \quad (5)$$

holds.

Thus, the set of all solutions of (1), (2), for which  $M(v(t, x)) = c$ , is an invariant integral manifold. It leads to correctness of setting the following problem: the study of local – in zero balance-state neighborhood – dynamics of the whole family, depending on the parameter  $c$ , of the boundary-value problems (3), (4) under the side condition (5). Note that the boundary-value problems (1), (2) were studied in [3].

While studying the local dynamics of the boundary-value problem (3)-(5) the important role is played by the arrangement of roots of  $\lambda_k$  of the standard equation for the linearized in zero boundary-value problem:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3\lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Below we suppose that a critical case takes place. Let the value of  $c = c_0$  be such that

$$\alpha = \beta = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2. \quad (7)$$

Fix arbitrarily the value of  $c_1$  and assume in (3)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (8)$$

where  $\varepsilon$  is a small positive parameter, i. e.

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (9)$$

We study the behavior of all the solutions of the boundary-value problem (3)-(5) from some sufficiently small and not depending on  $\varepsilon$  neighborhood of zero balance state under the conditions (7)-(9).

In this case the standard equation has a pair of pure imaginary roots of  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$ , and all its remaining roots have negative (and separated from the imaginary axis) real parts. Thus, the conditions of Andronov–Hopf bifurcation are fulfilled.

Introduce into consideration a formal series

$$v = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ix - i\lambda t)] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(t, \tau, x) + \dots \quad (10)$$

Here  $\tau = \varepsilon t$  — is slow "time"; the functions  $v_j(t, \tau, x)$  are  $2\pi/\lambda$ -periodic in  $t$  and  $2\pi$ -periodic in  $x$ .

Substitute (10) into (3)-(5) and start equating the coefficients at like powers of  $\varepsilon$ . At the third step for finding  $v_3(t, \tau, x)$  we come the boundary-value problem. The solvability condition of the boundary-value problem in the indicated class of functions is in performing the equality

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad (11)$$

where

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3, \quad A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}.$$

From this and from the general statements we have the following result.

**Theorem.** *Let  $\delta \neq 0$  and  $\text{Re}\sigma \neq 0$ . Then at all sufficiently small  $\varepsilon$  the dynamics of the equation (11) defines the local dynamics of the boundary-value problem (3)–(5).*

#### REFERENCES

- [1] Краснюк И.Б. *Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учётом поверхностных эффектов* / И.Б. Краснюк, Л.И. Стефанович, В.М. Юрченко // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, № 11. – С. 55-62.
- [2] Cahn J. *Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy* / J. Cahn, J. Hilliard // J. Chem. Phys. – 1958. – Vol. 28. – P. 258-267.

- [3] Кащенко С.А. *Бифуркации в уравнении Курамото – Сивашинского* / С.А. Кащенко // *Теоретическая и математическая физика*. – 2017. – Т. 192, № 1. – С. 23-40.

## Testing analyticity of a function in a ball of $\mathbb{C}^n$

VOLCHKOVA N. P.

*Donetsk National Technical University (Donetsk, Russia)*

*E-mail: volna936@gmail.com*

VOLCHKOV VIT. V.

*Donetsk State University (Donetsk, Russia)*

*E-mail: volna936@gmail.com*

The analyticity problem for functions that satisfy restrictions connected with integral means was studied by many authors, see [1, 2] and the references in those monographs. Well-known examples of such restrictions were the integral Morera condition, existence of "areolar derivatives prescribed asymptotic behavior of line integrals, vanishing of integral moments, and others. As a rule, classical results in this direction were obtained under the assumption that the restriction holds for a sufficiently wide class of integration sets (for example, closed curves of arbitrarily small diameter, balls of arbitrary radii, etc.) In modern studies, the choice of such sets was essentially smaller. In particular, a series of articles was devoted to the case of integration over sets that were congruent to a fixed figure with respect to a transformation group. This aspect of the analyticity problem is closely connected with the fact that the integral Pompeiu transform is injective.

The following assertion (see, for example, [1, Part 5, Ch. 4]) shows a relationship between analyticity and the Pompeiu property.

**Theorem 1.** *Let  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$  be a family of domains in  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ , where  $n \geq 1$ , with piecewise-smooth boundaries. Assume that the closures  $\overline{\mathcal{A}}_1, \dots, \overline{\mathcal{A}}_m$  form a Pompeiu family with respect to a domain  $\mathcal{D}$  in  $\mathbb{C}^n$ . If  $f \in C^1(\mathcal{D})$  and*

$$\int_{\partial(g(A_j))} f(z) \Omega_\alpha(z) = 0 \quad \text{for all } g \in G_{\overline{\mathcal{A}}_j, \mathcal{D}}, j \in \{1, \dots, m\}, \alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

where

$$\Omega_\alpha(z) = (-1)^{\alpha-1} d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\alpha-1} \wedge d\bar{z}_{\alpha+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

then  $f$  is analytic on  $\mathcal{D}$ .

Theorem 1 together with known sufficient condition for Pompeiu sets implies various refinements of the classical Morera theorem [1, 2].

Here we study the case in which  $\mathcal{D}$  is a deleted ball in  $\mathbb{C}^n$  (without the center),  $f \in C^\infty(\mathcal{D})$ , and integration in (1) is performed over all spheres of two fixed radii inside  $\mathcal{D}$ . Notice that Theorem 1 cannot be applied because  $f$  may be a function with a singularity at the center of  $\mathcal{D}$ . We find conditions on the radii and size of  $\mathcal{D}$  implying that  $f$  is an analytic function, see Theorem 2 below. We note that these conditions cannot be weakened in the general case.

We proceed to the formulation of the main result. Let  $\langle z, w \rangle$  be the Hermitian scalar product of vectors  $z, w \in \mathbb{C}^n$ , and let  $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ . We denote

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{a,b}^{2n} &= \{z \in \mathbb{C}^n : a < |z| < b\}, \quad 0 \leq a < b, \\ \mathcal{B}_a^{2n}(z) &= \{w \in \mathbb{C}^n : |w - z| < a\}, \quad \mathcal{S}_a^{2n-1}(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w - z| = a\}, \\ \mathcal{B}_a^{2n} &= \mathcal{B}_a^{2n}(0), \quad \mathcal{S}_a^{2n-1} = \mathcal{S}_a^{2n-1}(0). \end{aligned}$$

For  $n \geq 1$ , we put  $\mathcal{E}_n = \{\xi_{n,m}/\xi_{n,j} : m, j = 1, 2, \dots\}$ , where  $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots$  is the increasing sequence of positive zeros of the Bessel function  $J_n$ .

If a function is defined in a deleted neighborhood of the origin in  $\mathbb{C}^n$ , is continuous in this neighborhood, and admits a continuous extension to the origin then we consider the corresponding extension instead of the initial function.

We have obtained the following result.

**Theorem 2.**

- (i) Let  $n \geq 1$ ,  $0 < r_1 < r_2$ ,  $r_1/r_2 \notin \mathcal{E}_n$ , and  $R \geq r_1 + r_2$ . Assume that  $f \in C^\infty(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$  and the condition

$$\int_{\mathcal{S}_{r_j}^{2n-1}(w)} f(z) \Omega_\alpha(z) = 0 \tag{2}$$

holds for all  $w \in \mathcal{B}_{R-r_j}^{2n} \setminus \mathcal{S}_{r_j}^{2n-1}$ ,  $j \in \{1; 2\}$ , and  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ . Then the function  $f$  is analytic on  $\mathcal{B}_{0,R}^{2n}$ . In particular, if  $n \geq 2$  then  $f$  is analytic on  $\mathcal{B}_R^{2n}$ .

- (ii) If either  $r_1/r_2 \in \mathcal{E}_n$  or  $R < r_1 + r_2$  then there exists a function  $f \in C^\infty(\mathcal{B}_R^{2n})$  that is not analytic on  $\mathcal{B}_{0,R}^{2n}$  and satisfies condition (2) for all  $w \in \mathcal{B}_{R-r_j}^{2n}$ ,  $j \in \{1; 2\}$ , and  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ .

This result yields known Morera-type theorems established by L. Zalcman, J.D. Smith, C.A. Berenstien and R. Gay [1, 2]. A complete solution of the analyticity problem for a function  $f \in C(\mathcal{B}_R^{2n})$  satisfying the condition

$$\int_{\mathcal{S}_{r_j}^1(w)} f(z) dz = 0, \quad w \in \mathcal{B}_{R-r_j}^2, \quad j \in \{1; 2\},$$

is obtained in [1, Part 5] (in particular, Theorem 5.7 shows that the condition  $f \in C^\infty(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$  of Theorem 2 cannot be, in general, replaced with requirement that  $f$  be  $m$ -smooth on  $\mathcal{B}_R^{2n}$  for arbitrarily large number  $m$ ).

The study was carried out within the framework of the state contract (project no. 124012400352-6).

REFERENCES

[1] Volchkov V.V. *Integral geometry and convolution equations* / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p. – ISBN 1-4020-1628-X.  
 [2] Volchkov V.V. *Offbeat integral geometry on symmetric spaces* / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p. – ISBN 978-3-0348-0571-1.

## Секция 5. Математическое моделирование, численный анализ и приближенные методы

**Численно-аналитическое исследование модели распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной среде с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью**

ГЛУХОВ А. А.

ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет"

(Донецк, Россия)

E-mail: [antonglukhov2012@yandex.ru](mailto:antonglukhov2012@yandex.ru)

СТОРОЖЕВ С. В.

ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет"

(Донецк, Россия)

Численно-аналитическое исследование актуальных моделей распространения нормальных и локализованных плоских волн деформаций в функционально-градиентных анизотропных средах с экспоненциальными законами изменения физико-механических свойств для частного случая волн сдвига описано, в частности, в работе [2] при выборе единого закона неоднородности для всех характеристик упругих свойств и параметра плотности; в работах [1], [3] и [4] — для сред с двухфакторной неоднородностью при задании различных законов изменения параметра плотности и всех остальных параметров упругости. В представляемом исследовании рассматривается подход к анализу модели распространения упругих волн для трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды с трёхфакторной неоднородностью при введении различных законов экспоненциальной неоднородности для всех ее физико-механических характеристик.

Без ограничения общности рассматривается распространение волн SH-типа с циклической частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  вдоль координатного направления  $Ox_1$  в отнесенном прямоугольным координатам  $Ox_1x_2x_3$  трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с коллинеарными  $Ox_3$  направлением неоднородности и осью изотропии, описываемое уравнением

$$\partial_1(c_{66}\partial_1u_2) + \partial_3(c_{44}\partial_3u_2) - \rho\partial_t^2u_2 = 0, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1)$$

в котором комплексная функция волновых упругих перемещений  $u_2(x_1, x_3, t)$  имеет вид

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (2)$$

а физико-механические характеристики материала массива задаются выражениями

$$c_{44} = c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3), \quad c_{66} = c_{660} \exp(\lambda_{66}x_3), \quad \rho = \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_3). \quad (3)$$

Интегрирование уравнения относительно амплитудной функции  $u_{20}(x_3)$ , к которому сводится (1) с учетом (2), (3)

$$c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3)u''_{20} + \lambda_{44}c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3)u'_{20} +$$



$$+ (\rho_0 \omega^2 \exp(\lambda_\rho x_3) - k^2 c_{660} \exp(\lambda_{66} x_3)) u_{20} = 0, \quad (4)$$

реализуется с использованием представлений

$$u_{20}(x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x_3^m, \quad (5)$$

$$\exp(\lambda_{44} x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^n}{n!} x_3^n, \quad \exp(\lambda_{66} x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{66}^n}{n!} x_3^n, \quad \exp(\lambda_\rho x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^n}{n!} x_3^n, \quad (6)$$

в результате чего записываются соотношения связи коэффициентов

$$\sum_{m=0}^p [(m+1)(m+2)c_{440} \lambda_{44}^{p-m} ((p-m)!)^{-1} a_{m+2} + (m+2)c_{440} \lambda_{44}^{p-m+1} ((p-m)!)^{-1} a_{m+1} + (\rho_0 \omega^2 \lambda_\rho^{p-m} - c_{660} k^2 \lambda_{66}^{p-m}) ((p-m)!)^{-1} a_m] = 0 \quad (p = \overline{0, \infty}), \quad (7)$$

и при альтернативном выборе  $a_0 = 1, a_1 = 0$  либо  $a_0 = 0, a_1 = 1$  из порождаемых (7) рекуррентных формул определяются коэффициенты для двух соответствующих представлений базисных частных решений (4) рядами вида (5). Рассмотрены также вопросы получения дисперсионных соотношений для некоторых типов поверхностных и нормальных волн с использованием построенных базисных решений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Викторов И.А. *Звуковые поверхностные волны в твердых телах* / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 142 с.
- [2] Yang Y.-H. *Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves* / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval, 2010. – Vol. 29. – P. 233-240.
- [3] Majhi S. *Propagation of SH waves in a visco-elastic layer overlying an inhomogeneous isotropic half-space* / S. Majhi, P.S. Pal, S. Kumar // Ain Shams Engineering Journal, 2018. – Vol. 9, No. 4. – P. 675-680.
- [4] Сторожев В.И. *Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое* / В.И. Сторожев, А.А. Глухов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки, 2024. – № 1. – С. 58-64.

# Использование библиотек Python для построения приближенных решений дифференциальных уравнений

ГРЕБЕНЕВА Я. А.

*Крымский инженерно-педагогический институт им. Февзи Якубова  
(Симферополь, Россия)  
E-mail: yaroslava.grebeneva.06@yandex.ru*

ПЕРВУН О. Е.

*Крымский инженерно-педагогический институт им. Февзи Якубова  
(Симферополь, Россия)*

В работе рассмотрено применение одного из языков программирования Python для решения различных типов дифференциальных уравнений, начиная от простейших обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и заканчивая более сложными системами и дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП).

Приведены методы, включая как аналитические, так и численные, реализованные на специализированных библиотеках Python, которые удобно использовать при решении ОДУ и УЧП [1].

Одним из ключевых пакетов в Python является библиотека SymPy, предназначенная для символьных математических вычислений, позволяющая находить аналитическое решение дифференциальных уравнений.

Для численного решения дифференциальных уравнений используется библиотека SciPy, которая включает различные методы, например, такие как метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.

Наконец, для решения дифференциальных уравнений в частных производных используется библиотека NumPy, предоставляющая реализацию вычислительных алгоритмов (в виде функций и операторов), оптимизированную для работы с многомерными массивами.

С помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка построено решение системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику хищник-жертва — модель Лотки-Вольтерра [2].

С помощью метода конечных разностей найдены решения уравнения теплопроводности и нелинейного уравнения диффузии вида:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x(\kappa(u)\partial_x u), \quad x \in [0; 1], \\ u(0, t) &= u_1, \quad u(1, t) = u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где функция проводимости  $\kappa(u) = u^{5/2}$  является степенной.

Заметим, что сложность решения может значительно возрасти в зависимости от характеристик конкретного дифференциального уравнения, включая его порядок, тип, начальные и краевые условия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ершов Н.М. *Практическое введение в решение дифференциальных уравнений в Python: практическое руководство* / Н.Ершов. – Москва: ДМК Пресс, 2022. – 176 с.

- [2] Гребенева Я.А. *Программная реализация решений нелинейных дифференциальных уравнений* / Я.А. Гребенева, О.Е. Первун // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО-2024): Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции, Симферополь, 23-25 апреля 2024 года. – Симферополь: ИП Корниенко А.А.. – 2024. – С. 164-169. – EDN AUDVKQ.

## Математические сценарии распределения взаимодействующих популяций на неоднородном двумерном ареале

ЗЕЛЕНЧУК П. А.

*Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)*

*E-mail: [zelenchuk@sfedu.ru](mailto:zelenchuk@sfedu.ru)*

ЦИБУЛИН В. Г.

*Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)*

Рассматриваются сценарии распределения популяций на неоднородном двумерном ареале  $D = [0, a] \times [0, b]$  для математической модели хищник–жертва:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla q_1 + u \left[ \mu_1 f_{nm}(u, p) - \lambda_1 \frac{v}{p} \right], \quad q_1 = -k_1 \nabla u + \alpha_1 u \nabla \ln p - \alpha_2 u \nabla \ln u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla q_2 + v \left[ \mu_2 \frac{u}{p} - \lambda_2 \right], \quad q_2 = -k_2 \nabla v + \alpha_3 v \nabla \ln v, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (2)$$

здесь  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  — плотности популяции жертвы и хищника соответственно,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — параметры, отвечающие за прирост видов, а  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — за их смертность,  $k_1$ ,  $k_2$  — коэффициенты диффузии, а  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  — таксиса. Неоднородность ареала определяется неравномерно распределенным ресурсом  $p = p(x, y)$ . Закон роста жертвы задается функцией  $f_{nm}(u, p)$ :

$$f_{nm}(u, p) = \frac{u^n}{p^m} \left( 1 - \frac{u}{p} \right), \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

На границе ареала  $\partial D$  потоки отсутствуют:

$$q_j \cdot n = 0, \quad j = 1, 2, \quad (x, y) \in \partial D. \quad (4)$$

Начальные условия задаются для обоих видов

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v^0(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

При выполнении условий  $k_1 = \alpha_1 - \nu \alpha_2$  и  $k_2 = \nu \beta_1$  ( $\nu = n + 1 - m$ ) система имеет стационарное решение, в котором распределение жертвы на ареале пропорционально функции ресурса  $p(x, y)$ , а распределение хищника принимает различные формы в зависимости от параметра  $\nu$  [1]:

$$u = Ap, \quad v = B_n p^\nu, \quad A = \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad B_n = \frac{\mu_1}{\lambda_1} A^n (1 - A). \quad (6)$$

В работе формулируются и доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** В отсутствие потоков ( $q_1 = q_2 = 0$ ) и при  $m = n$  ( $\nu = 1$ ) система (1)–(5) обладает стационарным решением (6), удовлетворяющим концепции идеального свободного распределения (ИСР), когда плотности видов пропорциональны ресурсу  $p(x, y)$ .

**Теорема 2.** Если функции направленной миграции имеют вид [2]

$$Q_1 = \ln p, \quad Q_2 = \ln u, \quad Q_3 = \ln v, \tag{7}$$

и выполнены условия:

$$\alpha_1 = k_1 + \nu\alpha_2, \quad \alpha_3 = \nu k_2, \tag{8}$$

то (6) является решением полной ( $q_1 \neq q_2 \neq 0$ ) системы (1)–(5).

Приводятся различные сценарии распределения популяций в зависимости от параметра  $\nu$ . В таблице 1 представлены условия на параметры диффузии и миграции для некоторых значений этого параметра.

ТАБЛИЦА 1. Условия на параметры для ИСР.

$\nu$	$\alpha_1$	$\alpha_3$
2	$k_1 + 2\alpha_2$	$2k_2$
1	$k_1 + \alpha_2$	$k_2$
0	$k_1$	0
-1	$k_1 - \alpha_2$	$-k_2$

Случай  $\nu = 0$  соответствует отсутствию таксиса хищника относительно добычи ( $\alpha_3 = 0$ ). Если  $\alpha_3 = -k_2$  ( $\nu = -1$ ), то таксис хищника направлен на минимальные значения плотности жертвы. Данные сценарии иллюстрируются в работе вычислительными экспериментами на основе модифицированного метода смещенных сеток, реализованного в среде MATLAB [3]. Так, в случае  $\nu = 0$  ( $m = n + 1$ ) получается равномерное распределение хищника по ареалу, а для  $\nu < 0$  ( $m > n$ ) распределение хищника обратно пропорционально распределению жертвы. При прочих  $\nu$  наблюдаются более выраженные концентрации хищника, которые могут рассматриваться как ИСР-подобные.

Приведена визуализация распределения плотностей популяций для основных сценариев ИСР ( $\nu = -1, 0, 1$ ) и изучена устойчивость решений к малым возмущениям параметров системы. Представлены примеры колебательных режимов, для которых сохраняется пропорциональность функции ресурса, а амплитуды  $A, B_n$  (6) являются функциями времени. Дана биологическая интерпретация полученных результатов.

Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФ, грант № 23-21-00221.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Tsybulin V. *Predator–Prey Dynamics and Ideal Free Distribution in a Heterogeneous Environment* / V.G. Tsybulin, P.A. Zelenchuk // *Mathematics*. – 2024. – Vol. 12. – Art. 275.

[2] Зеленчук П.А. *Идеальное свободное распределение в модели «хищник–жертва» при многофакторном таксисе* / П.А. Зеленчук, В.Г. Цибулин // *Биофизика*. – 2021. – Т. 66, № 3. – С. 546-554.

- [3] Зеленчук П.А. *Математическая модель идеального свободного распределения в системе хищник–жертва* / П.А. Зеленчук, В.Г. Цибулин // *Современная математика. Фундаментальные направления.* – 2023. – Т. 69, № 2. – С. 237-249.

## Нелинейное уравнение степенной геометрии в задачах прогнозирования

ЛИВАНОВА В. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
*E-mail: [veratyutyunnik200@yandex.ru](mailto:veratyutyunnik200@yandex.ru)*

ЛУКЪЯНЕНКО В. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Самые разные катастрофические события могут развиваться по одним законам. В работе исследована обратная задача моделирования катастрофических процессов, получено дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого является сглаженная кривая, описывающая быстрый катастрофический рост события.

Постановка задачи может быть сформулирована следующим образом: требуется указать дифференциальное уравнение, решением которого является функция

$$x(t) = A + B(t_c - t)^\alpha [1 + C \cos(\omega \log(t_c - t)) - \varphi]. \quad (1)$$

Перепишем выражение (1) в следующем виде:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[ A + B(t_c - t)^\alpha (1 + \tilde{C}_1 (t_c - t)^{i\omega \log e}) \right],$$

где  $\tilde{C}_1 = C e^{-i\varphi}$ .

Далее рассмотрим комплекснозначную функцию

$$z(t) = A_1 + B_1(t_c - t)^\alpha + C_1(t_c - t)^\beta, \quad (2)$$

где  $A_1 = A$ ,  $B_1 = B$ ,  $C_1 = B\tilde{C}_1$ ,  $\beta = \alpha + i\omega \log e$  (при  $\log_e = \ln$ ,  $\ln e = 1$ ).

Исследование такого типа функций (степенных многочленов) развивается в рамках комплексной степенной геометрии А.Д. Брюно [1].

Определим функцию

$$\begin{aligned} w(t) &= z(t) - A_1 = B_1(t_c - t)^\alpha + C_1(t_c - t)^\beta = \\ &= B_1 \exp[\ln(t_c - t)^\alpha] + C_1 \exp[\ln(t_c - t)^\beta] = B_1 \exp \alpha \tau + C_1 \exp \beta \tau, \end{aligned}$$

где  $\tau = \ln(t_c - t)$ ,  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t_c - t}$ ,  $e^\tau = t_c - t$ ,  $t = t_c - e^\tau$ . Тогда

$$w(t) = w(t_c - e^\tau) = u(\tau) = B_1 \exp \alpha \tau + C_1 \exp \beta \tau.$$

Дифференцируя функцию  $w(t)$ , получим соответствующее ОДУ 2-го порядка с неизвестными коэффициентами:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + a_1 \frac{du}{d\tau} + a_0 u = 0. \quad (3)$$

Функция (1) является решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, которое в исходных переменных имеет вид:

$$(t - t_c)^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + (1 - (\alpha + \beta)(t - t_c)) \frac{dw}{dt} + \alpha \beta w = 0, \quad (4)$$

либо системы уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} (t - t_c) \frac{dv}{dt} = (\alpha + \beta)v - \alpha \beta w, \\ (t - t_c) \frac{dw}{dt} = v. \end{cases} \quad (5)$$

Для прогнозирования динамических процессов используются методы математического и компьютерного моделирования, синтез моделей, методы прогнозирования глобальных процессов и процессов с «тяжелым хвостом» [2].

Работа В.А. Лукьяненко поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях* / А.Д. Брюно – М.: Наука. Физмалит, 1998. – 288 с.
- [2] *Синтез моделей прогнозирования сложных процессов* / М.Г. Козлова, В.А. Лукьяненко, В.Г. Корнута, В.А. Тютюнник // XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам. КРОМШ-2023: Сборник материалов международной конференции, Кача (Севастополь), 08–17 сентября 2023 года. – Симферополь: Общество с ограниченной ответственностью Издательство Типография «Ариал», 2023. – С. 32-33.

## Моделирование поляритонного излучения на примере программируемого поляритонного лазера

ЛУКЬЯНЕНКО Д. В.

*Национальный исследовательский институт «МИФИ»*

*(Москва, Россия)*

*E-mail: lukianenko\_dmitry@mail.ru*

РЫНДЯ С. М.

*Национальный исследовательский институт «МИФИ»*

*(Москва, Россия)*

В работе рассмотрено одно из направлений твердотельной, микро- и нано-электроники — создание полупроводниковых гетероструктур. Изучается модель поляритонного лазера — излучателя когерентного света, основанного на Бозе-Эйнштейновском конденсате свето-материальных квазичастиц: экситонных поляритонов.

На примере схемы программируемого поляритонного симулятора [1] освоены и исследованы особенности моделирования полупроводниковых и поляритонных лазеров в программной среде COMSOL Multiphysics.

В разработанную систему положен принцип, основанный на использовании слабых лазерных пучков, модифицирующих потенциальный ландшафт для поляритонов. Такой подход позволяет с высокой точностью осуществлять контроль фазы комплексного взаимодействия бозе-конденсатов, что успешно продемонстрировано на массивах вплоть до 16 узлов. Крайне важно, что оптически наведенные потенциальные барьеры позволяют осуществить селективный контроль взаимодействия не только между ближайшими узлами (конденсатами), но и следующими ближайшими узлами в решетке.

Схема прецизионного контроля относительных фаз бозе-конденсатов позволяет исследовать различные спиновые состояния в физике твердого тела и моделировать процессы в универсальных спиновых моделях с хорошо определенными условиями задачи.

При компьютерном моделировании [2, 3] получен пространственный профиль интенсивности нерезонансного возбуждающего лазерного излучения для создания ячейки  $1 \times 2$  из двух поляритонных конденсатов в координатном и импульсном пространствах.

Введение оптическим методом потенциального барьера в профиле возбуждения между двумя конденсатами переключает фазовую конфигурацию системы в антиферромагнитное состояние, что подтверждается изменением интерференционной картины в координатном и импульсном пространствах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Павлос Л. *Патент № 2745206 С1 Российская Федерация, МПК G02F 1/35. Программируемый поляритонный симулятор: № 2020129915: заявл. 10.09.2020: опубл. 22.03.2021 / Л. Павлос, Ю.А. Сергей, А. Алексис // Заявитель Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский институт науки и технологий». – EDN RTRRWX.*
- [2] Лукьяненко Д.В. *Компьютерное моделирование поляритонных лазеров / Д.В. Лукьяненко, С.М. Рындя // Мокеровские чтения: сборник трудов 15-ой Научно-практической конференции по физике и технологии наногетероструктурной СВЧ-электроники, Москва, 22-23 мая 2024 года. – Москва: НИЯУ МИФИ. – 2024. – С. 43-45.*
- [3] Лукьяненко Д.В. *Моделирование поляритонного лазера / Д.В. Лукьяненко, С.М. Рындя // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО-2024): Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции, Симферополь, 23-25 апреля 2024 года. – Симферополь: ИП Корниенко А.А.. – 2024. – С. 262-268. – EDN EGKMBX.*

## Об эффективном алгоритме построения матрицы инцидентности фундаментального уравнения компонентной сети Петри с учетом временной характеристики

ЛУКЬЯНОВА Е. А.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: [lukyanovalua@mail.ru](mailto:lukyanovalua@mail.ru)*

БОЧКО А. Ю.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Удобным формализмом для построения моделей реальных объектов, систем индустриального типа — распределённых систем различного уровня сложности и внутренней организации, является математический аппарат сетей Петри и его различных расширений, в том числе — сетей Петри с учётом временной характеристики [1], компонентных сетей Петри [2] и компонентных сетей Петри с учётом временной характеристики [3]. Требования, предъявляемые к модели: 1) адекватность исследуемой системе; 2) размеры, позволяющие провести её эффективный анализ; 3) возможность установления свойств модели для дальнейшей интерпретации в характеристике системы. Мощным средством исследования свойств моделей Петри являются  $S$ - и  $T$ -инварианты или инварианты состояния и инварианты поведения сети Петри с учётом временной характеристики, которые находятся как решения фундаментального уравнения сети — соответствующей системы линейных однородных диофантовых уравнений. Основным, решающим элементом этого уравнения является матрица инцидентности, коэффициенты  $a_{ij}$  которой представляют число фишек (маркеров), которые перемещаются, изменяются и добавляются в место  $p_i$  при срабатывании перехода  $t_j$  в сети (модели).

Моделируемая система характеризуется множеством всех возможных последовательностей действий, которые могут происходить. В распределённых системах отношения местоположений элементов играют существенную роль с точки зрения функционирования системы, её анализа и синтеза. В работе [4] была дана новая трактовка получения модели Петри, ориентированная на список работ (операций), необходимых для достижения ожидаемого результата на каждом шаге функционирования системы, процесса и дальнейших шагов-преобразований, приводящих к построению модели Петри.

В результате проведения работ по построению моделей различных задач, процессов, систем выявлены возможности значительного улучшения имеющегося алгоритма, а именно, перехода от матричной организации данных (ресурсов и событий) исследуемой сложной системы к матрице инцидентности ее сетевой модели — модели Петри. Для этого потребовалось: 1) определить понятие квазисмежности — характеристики организации связи данных, отражающей отношение (квазиарность) между несколькими событиями и действием (действиями) и наоборот; 2) построить матричную организацию данных (ресурсов и событий) исследуемой системы согласно введенной квазисмежности; 3) сформировать последовательность шагов эффективного перехода от матричной организации к матрице инцидентности сетевой модели Петри.



При этом проблема экспоненциального роста состояний модели решается переходом от полученной матрицы инцидентности к соответствующей усеченной матрице [5] инцидентности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Penzhek W. *Advances in Verification of Time Petri Nets and Timed Automata. A temporal logic approach* / W. Penzhek, A. Potrola. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – Vol. 20. – 280 p.
- [2] Лукьянова Е.А. *Исследование однотипных структурных элементов CN–сети в процессе компонентного моделирования и анализа сложной системы с параллелизмом* / Е.А. Лукьянова, А.В. Дереза. // Кибернетика и системный анализ, 2012. – № 6. – С. 20-29.
- [3] Лукьянова Е.А. *О специальном отношении на множестве вершин временной модели сложной системы* / Е.А. Лукьянова, А.В. Дереза. – Материалы XXIX Международной научно-технической конференции Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации. СПб: ГУАП, 2020. – С. 191 – ISBN 978-5-98803-4353.
- [4] Лукьянова Е.А. *О сетевом моделировании в медицинской области* / Е.А. Лукьянова, А.Ю. Бочко. // Сборник научных трудов МИКМО. – 2024. – С. 277-283.
- [5] Лукьянова Е.А. *ГО структурировании задействованной дискретной информации моделей Петри с целью ускорения вычисления инвариантов* / Е.А. Лукьянова, А.В. Дереза. // ТВИМ – 2017. – № 2(35). – С. 62-71.

## Приложение многоагентной маршрутизации к задаче доставки товаров

МАКАРОВ О. О., КОЗЛОВА М. Г.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
*E-mail: [fantom2.00@mail.ru](mailto:fantom2.00@mail.ru)*

Рассматриваемые многоагентные задачи маршрутизации на сложных (большой размерности) сетевых структурах относятся к  $NP$ -трудным задачам дискретной оптимизации. Представляет интерес подход, основанный на решении близких задач, который опирается на систему «задача — близкая задача — алгоритм».

Авторами описаны этапы формирования решения оригинальной задачи  $TSP_j$  по близкой  $\widetilde{TSP}_j$  (Traveling Salesman Problem, задача коммивояжера). В качестве близости задач понимается близость их математических моделей и близость участвующих в решении фрагментов сложной сети. Метод определения близости фрагментов (кластеров  $C_j$ ) состоит в нахождении взвешенного метрического расстояния между векторами метаэвристических параметров соответствующих графов [1].

В данной работе приведен эксперимент, направленный на подтверждение гипотезы, что векторы метрических характеристик у близких задач находятся на небольшом расстоянии друг от друга. Также описаны вспомогательные эксперименты, показывающие максимальное допустимое различие между графами, при котором будем

считать их близкими. Приведен эксперимент, подтверждающий гипотезу, что мета-эвристический алгоритм, работающий оптимально для определенной задачи, будет оптимально работать и для близкой. В решении многоагентных задач типа коммивояжера большой размерности производится согласованная декомпозиция на локальные кластерные задачи маршрутизации. На локальном уровне выбираются подходящие алгоритмы.

Под агентами понимаются транспортные средства, для которых построение маршрутов доставки товаров приводит к модели многоагентной маршрутизации, рассмотренной выше. Решение задачи направлено на снижение транспортных расходов по доставке товаров. Существует ряд ограничений, связанных с качеством дорожной инфраструктуры, большим количеством объектов (потребителей), разбросом расстояний между поставщиками и потребителями, наличием баз (промежуточных складов) разного уровня для хранения товаров, ограниченными возможностями транспортного парка и условиями его аренды. При этом необходимо: обеспечение своевременного исполнения заявок с учетом временных окон доставки; сокращение общих расходов по доставке; уменьшение количества транспортных средств (ТС); составление оптимального расписания графиков использования имеющихся ТС. С точки зрения прикладной многоагентной маршрутизации в таких задачах нужно найти рациональные, близкие к оптимальным, решения [2].

Авторами разработано программное решение «Маршрутизатор доставки товаров» (МДТ) в Республике Крым для оптимизации процесса доставки товаров [3]. Приложение основано на решении многоагентной задачи маршрутизации с временными окнами, а также поддерживает иерархическую модификацию этой задачи. В качестве исходных данных представляются: карта автомобильных дорог с отмеченными объектами поставщиков и потребителей товаров; информация о парке автотранспортных средств разного типа; заявки потребителей по товарам; матрица расстояний, привязанная к дорожной сети региона. Инфраструктурная сеть дорог характеризуется большим графом с большим числом узлов (перекрестков, точек обслуживания), висячих вершин, точек сочленения, мостов. То есть сети дорог ставится в соответствие ориентированный граф, вершинами которого являются узлы дорожной сети региона. Каждой дуге (ребру) соответствует расстояние между вершинами (узлами) и другие характеристики дуг и вершин. Ищется набор оптимальных маршрутов агентов (ТС), начинающихся и заканчивающихся в заданных точках с учетом сетевых, агентных, оконных ограничений, депо различного уровня иерархии и других. Важной частью является предварительная кластеризация всех вершин на основе среднего расстояния между вершинами графа, что позволяет оптимизировать процесс построения маршрутов и ускоряет вычисления. Иерархическая составляющая приложения заключается в выделении из общего числа вершин базы первого уровня и баз второго уровня.

Работа М.Г. Козловой поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Models and Algorithms for Multiagent Hierarchical Routing with Time Windows* / M.G. Kozlova, D.V. Lemtyuzhnikova, V.A. Lukyanenko, O.O. Makarov // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2023. – No. 62. – P. 862-883. – DOI 10.1134/S106423072305009X.

- [2] Козлова М.Г. *Построение многоагентных маршрутов в сети с иерархией вершин* / М.Г. Козлова, В.А. Лукьяненко, О.О. Макаров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2023. – № 3. – С. 32-50. – DOI 10.17308/sait/1995-5499/2023/3/32-50.
- [3] *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024615891 Российская Федерация*. Программа для ЭВМ «Программа построения иерархических маршрутов в задачах маршрутизации на сложных сетях» : № 2024614604 : заявл. 05.03.2024 : опубл. 13.03.2024 / М.Г. Козлова, В.А. Лукьяненко, О.О. Макаров ; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»».

## Схемы повышенного порядка точности для моделирования популяционной динамики и фильтрационной конвекции

НГУЕН Б. Х., ЦИБУЛИН В. Г.

*Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)*

СЕЛИЩЕВ А. А.

*Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)*

*E-mail: [selishev@sfedu.ru](mailto:selishev@sfedu.ru)*

Исследование моделей, описываемых системами нелинейных уравнений в частных производных, требует математического анализа свойств рассматриваемых задач и квалифицированного вычислительного эксперимента. Использование компактных разностных схем без расширения сеточных шаблонов позволяет эффективнее проводить расчетов в результате повышения порядка аппроксимации уравнений [1]. При решении пространственно неоднородных задач представляется полезным применение смещенных сеток, когда плотности величин и их потоки вычисляются в разных узлах. Эти случаи построения компактных схем мало изучены и вопросы сохранения характерных свойств исходных систем при таких дискретизациях остаются открытыми.

В данном докладе с единых позиций рассматриваются две проблемы, в которых обнаружено свойство косимметрии [2], сопровождаемое возникновением семейств стационарных решений. Представлены аппроксимации систем нелинейных уравнений на смещенных сетках и аналитически установлено повышение порядка для линейных вариантов рассматриваемых систем и численно подтверждены улучшенные свойства развитых схем для нелинейных задач.

Первая задача, посвящена моделированию поведения хищника и жертвы на основе уравнений реакции-диффузии-адвекции с переменными коэффициентами [3]. Для дискретизации неоднородной задачи с нелинейными членами таксисного и локального взаимодействия используется метод баланса. Для случая одномерного кольцевого ареала развита конечно-разностная схема на трехточечном шаблоне. На основной сетке рассчитываются плотности видов, а в узлах смещенной сетки вычисляются потоки. Для интегрирования системы по времени используется метод Рунге-Кутты. В работе [4] представлены результаты вычислительного эксперимента для расчета

стационарных и нестационарных решений. Процесс Эйткена применялся к результатам расчета на последовательности пространственных сеток для определения точности разработанной схемы. Для диффузионной задачи получались значения порядка точности не меньше четырех, а некоторое их уменьшение было отмечено при учете направленной миграции. Аналогичные выводы были получены и для случаев нестационарных колебательных режимов.

Вторая задача, рассматриваемая в данном исследовании, была посвящена конвекции Дарси в прямоугольной области [5]. Для дискретизации использовались сетки четырех типов: в узлах основной сетки рассчитывалась температура, а в смещенных узлах вычислялись две компоненты скорости и давление. При аппроксимации осуществлялся дискретный переход от системы в естественных переменных к задаче относительно функции тока и девиации температуры. Полученная схема использует девятиточечный шаблон и имеет четвертый порядок точности. Кроме того, конечномерный аналог задачи сохраняет свойство косимметрии. С помощью данного подхода была разработана схема четвертого порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне для задачи анизотропной конвекции Дарси. Представлены результаты вычислений критических чисел Рэлея и оценена эффективность использования развитой компактной схемы [6]. Проведено сравнение разностных схем для спектральной задачи и рассчитаны возникающие конвективные режимы.

Работа выполнена в Южном Федеральном Университете при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-21-00221)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Толстых А.И. *Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных* / А.И. Толстых. – М.: Наука, 2015. – 349 с. – ISBN 978-5-02-039189-5.
- [2] Юдович В.И. *Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции* / В.И. Юдович // *Математические заметки*. – 1991. – Т. 49, № 5. – С. 540-545.
- [3] Budyansky A.V. *Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat* / A.V. Budyansky, K. Frischmuth, V.G. Tsybulin // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. – В. – 2019. – Vol. 24, No. 2. – P. 547-561.
- [4] Нгуен Б.Х. *Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале* / Б.Х. Нгуен, В.Г. Цибулин // *Известия вузов. ПНД*. – 2024. – Т. 32, № 3. – С. 294-304.
- [5] Karasozen B. *Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection* / B. Karasozen, V.G. Tsybulin // *Computer Physics Communications*. – 2005. – Vol. 167, No. 3. – P. 203-213.
- [6] Селищев А.А. *Разностная схема повышенного порядка для анализа фильтрационной конвекции* / А.А. Селищев, В.Г. Цибулин // *Таврический вестник информатики и математики*. – 2023. – Т. 61, № 4. – С. 92-102.

## Моделирование исследования вязкоупругого деформирования упругих тел

НЕСКОРОДЕВ Р. Н.

*ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет"*

*(Донецк, Россия)*

*E-mail: nromn72@mail.ru*

Механические свойства наследственно-упругих материалов, к которым можно отнести многие горные породы, пластмассы, металлы и сплавы, а также полимерные и композитные материалы на полимерной основе, при длительном нагружении в значительной степени зависят от времени. В условиях эксплуатации элементы конструкций из таких материалов подвергаются постоянным или меняющимся во времени режимам нагружения, в результате действия которых происходит перераспределение напряжений и деформаций заметно изменяющее картину распределения напряжений и деформаций по сравнению с упругим случаем. Уточнение перераспределения напряжений и деформаций может быть полезным при оценке долговечности и несущей способности элементов конструкций.

Одним из наиболее используемых при решении задач линейной теории вязкоупругости является метод, основанный на принципе В. Вольтерра, идея которого заключается в следующем: *для решения задач вязкоупругости необходимо построить решение задачи линейной теории упругости и в окончательном результате заменить упругие постоянные операторами, расшифровав полученные комбинации операторов или функции от операторов.*

Непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно деформированного состояния анизотропных сред является весьма затруднительным. Это связано с тем, что существует лишь незначительное число задач теории упругости, для которых известна явная зависимость от упругих постоянных, если использовать упругое решение в обычной форме. В общем случае это решение может содержать иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных. Это делает невозможным непосредственное использование алгебры резольвентных операторов к решению таких задач. Поэтому, для решения упругих задач, применяются приближенные методы, идея которых состоит в поиске решения, когда его зависимость от упругих постоянных устанавливается в явном виде. Степенные ряды, в которые раскладываются иррациональные и трансцендентные функции, как правило, сходятся медленно. Поэтому для получения достаточно точного решения нужно сохранять большое число членов ряда. Это приводит к громоздким вычислениям и потере точности. Чтобы обойти проблему вычисления суммы ряда, в работе [1] описана методика использования цепных дробей, которая обеспечивает быстро сходящийся процесс последовательных приближений. В работе [2] выполнен обзор, посвященный теоретическим и экспериментальным исследованиям процессов деформирования и длительного разрушения вязкоупругих тел вследствие медленного докритического развития трещин.

Широкое применение также нашло использование рядов по малому параметру. Этот параметр выбран в виде разности между коэффициентом Пуассона и его мгновенно упругим значением. В этом случае задача сводится к рекуррентной последовательности граничных условий для определения комплексных потенциалов и к последующей расшифровке временных операторов. Этим методом решено множество задач для изотропных и анизотропных многосвязных сред с отверстиями и трещинами [3, 4].

В данном докладе предлагается численно-аналитическая методика исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных сред. Предложенный алгоритм не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Методика основана на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды. Численное определение резольвент интегральных уравнений предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке. Для этого предлагается способ сглаживания и восполнения таблицы экспериментальных данных. На основе таких таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Эти соотношения получены на основе алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которые не связаны с каким-либо специальным видом ядер. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости [5].

При помощи модели слоистого массива горных пород осадочного происхождения с плоскостями изотропии, параллельными слоям, расположенными под различными углами к дневной поверхности, предложенная методика использована для исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния, возникающего вблизи горизонтальных выработок с усложненными формами сечений в зависимости от физико-механических свойств пород и времени их эксплуатации [6].

Осуществлено применение методики нахождения вязкоупругого напряженного состояния к решению задач изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит в уточненной постановке [7].

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 29.02.2024 № 075-02-2024-1446)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Каминский А.А. *Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел* / А.А. Каминский // Прикл. механика. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 39-63.
- [2] Каминский А.А. *Механика длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами: теория, эксперимент (обзор)* / А.А. Каминский // Прикл. механика. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 3-79.
- [3] Калоеров С.А. *Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит* / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикл. механика и техническая физика – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141-151.
- [4] Калоеров С.А. *Решение задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных анизотропных плит* / С.А. Калоеров, А.А. Кошкин // Прикл. механика – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 92-107.
- [5] Шевченко В.П. *Численно-аналитический метод решения задач линейной вязкоупругости* / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Прикл. механика – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 42-53.
- [6] Сторожев В.И. *Ползучесть массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения* / В.И. Сторожев, Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – Вып. 3-4. – С. 95-106.
- [7] Нескородев Р.Н. *Изгиб ортотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке* / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 4(73). – С. 24-32.

## Моделирование пульсирующего инвазионного процесса

ПЕРЕВАРЮХА А. Ю.

*Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН*  
(Санкт-Петербург, Россия)  
E-mail: [madelf@rambler.ru](mailto:madelf@rambler.ru)

Разрабатываем модель для актуального сценария агрессивного инвазионного процесса, который происходит пульсирующими вспышками активности вида-вселенца (или вируса в организме). Модель включает запаздывание при создаваемых биотической средой факторах противодействия. Все агрессивные виды в результате инвазии сталкиваются ответом местных видов, адаптирующихся к ситуации. Значимость моделирования противодействия с адаптацией обоснована необходимостью биологической борьбы с чужеродными организмами и инфекциями, когда после вселения нежелательного вида проводится целенаправленная интродукция антагонистов. В результате в некоторый момент после начала инвазии создается конкурентная система противоборства. Рассматриваемая проблема отличается тем, что возникает вариативность итогового состояния, но полного подавления инвазивного вида не происходит. Для построения иммунологических и инвазионных моделей необходимо адекватное включение фактора запаздывания в разные функциональные составляющие модели с целью оценить скорость прохождения возникающей депрессии. Оказываемое воздействие с запаздывающей активацией мы выразим нелинейной зависимостью, так как адаптирующееся давление является следствием трудно формализуемой многоуровневой схемы регуляции, но распространенной в сообществах с высоким индексом биоразнообразия. Время отставания начала реакции фактор, определяющий течение процесса, что не так критично для видов в экосистеме, но для иммунной системы регуляция скорости ответа это вопрос выживания и запаздывание более  $\bar{\tau}$  критическое для биосистемы. Предложим последовательные усовершенствования моделей пульсирующего варианта инвазионного процесса с адаптивным включением противоборства триггерным образом. Так резко начинается действие эффекторной фазы иммунного ответа против COVID, так как коронавирус блокирует выработку нашими клетками интерферонов и тормозит защитный ответ. В результате происходит дисрегуляция воспаления «цитокиновый шторм» по принципу положительной обратной связи.

Включение в модель запаздывания  $x(t - \tau)$  способ разнообразить варианты поведения траектории, не расширяя структуру и не увеличивая размерность фазового пространства. Вопрос определения связи величины  $\tau$  с сущностной непосредственной популяционной характеристикой часто неоднозначен. Представим несколько трактовок аспектов запаздывания. Модификации моделей с запаздыванием представляют значимость для исследования редких сценариев популяционной динамики, которые относим к типу экстремальных. Для предложенной модели получен вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения  $r$ ,  $H = 1/3K$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \gamma)), \quad \gamma < \tau. \quad (1)$$

Модель была основана на нашей идее, что для механизмов контроля имеет значение переход  $N(t - \gamma)$  через предкритический порог  $H$ . Величина  $H$  трактовалось как мягкое пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при  $N(t) \rightarrow H + \epsilon$  популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду [1]. В сценарии

на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение  $[H - N(t - \gamma)]$ , притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель описала вычислительный сценарий с «выбросом» траектории из цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент  $\max N_*(t_{max}; r\tau\gamma)$  предельного для экосистемы уровня траектория далее  $N(t) \rightarrow \infty$  с остановкой расчетов. В модели релаксационный цикл оказывается переходным режимом существования, а образование неограниченной траектории оценено нами как катастрофическая динамика.

Используем в новой форме модели вместо квадратичной зависимости логарифмическую форму регуляции. В таком варианте уравнения с внешним воздействием биотической среды дополнение модели фактором противодействия с отдельным запаздыванием изменит качественный характер решения:

$$\frac{dN}{dt} = r \ln \left( \frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau)} \right) - \mathcal{Q}N(t - \nu), \tag{2}$$

Определим запаздывание адаптационным  $\nu$  и будем отличать его от феноменологического регуляционного  $\tau$  из уравнений Хатчинсона или Николсона. Для  $f(N) = rN \ln(K/N)$  ордината точки перегиба  $N_p$  на кривой решения  $\dot{N} = f(N)$  лежит ниже  $K/2$ , так как  $f'(N_p) = 0, N_p = K/e$ . В данной модификации мы используем в обозначение  $\mathcal{K}$ , так как достижение уровня может быть кратковременным при больших  $r$ . В вычислительном сценарии с наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций. При уменьшении  $r$  траектория демонстрирует обычные гармонические колебания  $N_*(t; \tau r)$ . Усовершенствуем (1) с включением нелинейности  $F(N) = -\mathcal{Q}N^k(t - \nu), \tau \geq \nu$ , что обосновано ситуацией, когда текущее воздействие может определяться предшествующим состоянием популяции. Модель с пульсациями описывает череду эпидемических волн COVID. Рассмотрим пульсирующий эпидемический процесс, который свойственен быстро мутирующему коронавирусу. В изолированной Новой Зеландии летом в 2024 г. пятая волна заражений. В 2024 г. волна штамма КР.3 из ветви ВА.2.86 нарушила стабильное затухание. При росте числа переболевших формируется популяционный иммунитет, но случайные мутации с неслучайным отбором ведут к образованию ветвей эволюции конкурирующих штаммов вируса. Момент активации нового штамма вероятно вариативен  $[\tau_1, \tau_1 + \Delta]$ . С учетом стохастического возмущения  $\tau_1$  случайной величиной  $\gamma$  в диапазоне  $\gamma(\omega) \in [1, 2]$  опишем с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием  $(t - \tau_1\gamma)$  волн эпидемии при смене доминирующего штамма:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\zeta Y(t - \gamma\tau) - \varepsilon \sqrt{(J - N(t - \tau))^2}), \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln \left( \frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - Y(t))^2} - \varphi Y(t), \end{cases} \quad \delta > q, \quad \gamma(\omega) \in [1, 2]. \tag{3}$$

В системе (3) учтен эффект борьбы штаммов при эволюции на уклонение от связывания с антителами. При  $Y(0) < J < \mathcal{K}$   $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$  происходит смена характеристик осцилляционного режима. Положение экстремумов колебаний  $N(t) \rightarrow N_*(t)$ ,  $\max N_*(t) < J$ ,  $\min N_*(t)$  зависит от возмущения запаздывания. Конкуренция штаммов поддерживает эволюцию в направлении на уклонение S-белка от антител.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект РФФ № 23-21-00339.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Переварюха А.Ю. *Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели* / А.Ю.Переварюха // *Нелинейный мир*. – 2012. – Т. 10, № 4. – С. 255-262.

## Численно-аналитический метод для квазилинейных уравнений типа Колмогорова — Петровского — Пискунова с сингулярным возмущением

Пикулин С. В.

ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия)

*E-mail:* [spikulin@gmail.com](mailto:spikulin@gmail.com)

Безродных С. И.

ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия)

*E-mail:* [sbezrodnykh@mail.ru](mailto:sbezrodnykh@mail.ru)

В докладе представлен численно-аналитический метод решения квазилинейных параболических задач для уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \lambda > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $F(x, u, w)$  — некоторая заданная непрерывная функция. Отметим, что класс уравнений (1) включает в себя, в том числе, уравнения Колмогорова — Петровского — Пискунова [1], а также уравнение Бюргерса [2].

Начально-краевые задачи для уравнения (1) будем рассматривать в прямоугольнике  $[0, L] \times [0, T]$ , предполагая выполнение для искомой функции  $u(x, t)$  начального условия  $u(x, 0) = u_0(x)$  и граничных условий одного из следующих трех типов:

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \varphi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \psi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(L, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

т. е. условий Дирихле (2), смешанных (3) либо периодических (4) краевых условий.

Вычислительные методы решения нелинейных уравнений, как правило, включают в себя этап линеаризации, т. е. редукцию к последовательности линейных задач. В предлагаемом методе применяется явно- неявная схема линеаризации [3], а именно, сочетание явной схемы Адамса — Бэшфорта для аппроксимации нелинейного члена  $F(x, u, \partial_x u)$  уравнения (1) и неявной модифицированной схемы Кранка — Николсон приближения линейных членов этого уравнения. Новизна предлагаемого вычислительного алгоритма для уравнения (1) заключается в разработанном двух-этапном методе решения возникающих линейных задач. На первом этапе строятся приближенные частные решения линейного уравнения по отдельности на каждом из  $N$  промежутков пространственной дискретизации отрезка  $[0, L]$ . На втором этапе в аналитическом виде строится решение неоднородной краевой задачи на всем

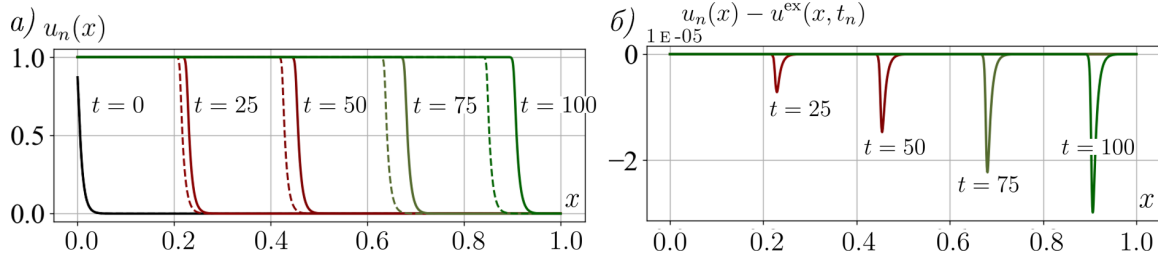


Рис. 1. а) Графики решения обобщенного уравнения Фишера (5), (7), найденное численно-аналитическим (сплошная линия) и разностным методом (пунктир), в различные моменты времени. б) Разность численно-аналитического приближения и точного решения (6).

отрезке интегрирования с использованием явного вида фундаментальной системы решений. Построенный алгоритм имеет алгоритмическую сложность  $O(N)$ . Предложенный метод сохраняет эффективность и в тех случаях, когда коэффициент  $\lambda$  мал, т. е. соответствующая начально-краевая задача является сингулярно возмущенной.

В качестве примера рассмотрим следующее обобщенное уравнение Фишера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(x)(1 - u^\alpha(x)), \quad \alpha, \lambda > 0, \quad (5)$$

обладающее хорошо известным явным решением типа бегущей волны

$$u^{ex}(x, t) = 2^{-2/\alpha} \left[ 1 - \operatorname{th} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda(4+2\alpha)}} (x - \omega t) \right) \right]^{2/\alpha}, \quad \omega := \frac{4 + \alpha}{\sqrt{(4 + 2\alpha)/\lambda}}. \quad (6)$$

На рис. 1 а) даны результаты численного решения соответствующей начально-краевой задачи с краевыми Дирихле (2) при следующих значениях параметров:

$$L = 1, \quad T = 100, \quad \lambda = 10^{-5}, \quad \alpha = 10, \quad \omega \approx 0.009 \quad (7)$$

с шагом по времени  $\tau = 10^{-3}$ . Вычисления были проведены независимо двумя способами. В первом из них вспомогательные линейные задачи решались предлагаемым численно-аналитическим методом, — графики на рис. 1 а) даны сплошными линиями, а во втором — методом прогонки на основе разностной схемы, — соответствующие графики даны пунктиром. На рис. 1 б) приведены графики погрешности численно-аналитического приближения. Отметим, что график точного решения (6) визуально совпадает с графиком численно-аналитического приближения. В то же время разностный метод демонстрирует существенное отставание моделируемой бегущей волны от целевого режима распространения со скоростью  $\omega$ , заданной формулой (6).

Представленный в докладе метод изложен в статье [4] и является обобщением предложенного авторами ранее [5] численно-аналитического метода для уравнения Бюргера.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Математическая теория горения и взрыва* / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. — Москва: Наука, 1980. — 478 с.
- [2] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны* Дж. Уизем. — Москва: Мир, 1977. — 638 с.
- [3] Hundsdorfer W. *Numerical Solutions of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations* / W. Hundsdorfer, J.G. Verwer. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. — 471 p.

- [4] Безродных С.И. Численно–аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова – Петровского – Пискунова / С.И. Безродных, С.В. Пикулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физики – 2024. – Т. 64, № 11. – (В печати)
- [5] Безродных С.И. Численно–аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием / С.И. Безродных, С.В. Пикулин // Современ. математика. Фундам. направления – 2023. – Т. 69, № 2. – С. 208–223.

## Закон Гомперца и пространственно-неоднородные волны инфекции

РАССАДИН А. Э.

*Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики» (Нижегород, Россия)  
E-mail: [brat\\_ras@inbox.ru](mailto:brat_ras@inbox.ru)*

БУГРОВ В. О.

*Нижегородское математическое общество  
(Нижегород, Россия)*

РУБЦОВ М. И.

*Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики» (Нижегород, Россия)*

Пандемия COVID-19 вызвала всплеск интереса к математической эпидемиологии (см. [1] и ссылки там), который возымел своим результатом как дальнейшее развитие и углублённое изучение её прежних моделей, так и появление новых. В частности, в докладе [2] пространственно-временная эволюция безразмерной линейной плотности инфицированных  $u(x, t)$  описывалась следующей задачей Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t) \frac{\partial u}{\partial x} = -u \ln u, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

В отличие от работы [1] кинетическая часть в модели (1) построена на законе Гомперца [3], а не на логистической модели. Далее, в задаче Коши (1)  $c(t)$  — это скорость переноса заболевания, зависящая от времени.

В данном докладе рассмотрена более реалистичная чем (1) модель распространения инфекции, в которой адвективный член зависит от пространственной координаты  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u}{\partial x} = -u \ln u, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Таким образом, модель (2) соответствует движению инфекции по пересечённой местности.

Задача Коши (2) решается методом характеристик [4]. Уравнения характеристик для неё имеют вид ( $y$  — лагранжева координата [4]):

$$\frac{du}{dt} = -u \ln u, \quad u|_{t=0} = u_0(y) \quad (3)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = c(x), \quad x|_{t=0} = y. \quad (4)$$

Точное решение задачи Коши (3) равно:

$$u = [u_0(y)]^{\exp(-t)}. \quad (5)$$

Решение задачи Коши (4) задаётся следующим образом:

$$t = \int_y^x \frac{d\xi}{c(\xi)}. \quad (6)$$

При заданной функции  $c(x)$  из соотношения (6) можно найти зависимость лагранжевой координаты  $y = Y(x, t)$  от эйлеровой координаты и времени. Подставив эту функцию в формулу (5), получим общее решение задачи Коши (2):

$$u(x, t) = [u_0(Y(x, t))]^{\exp(-t)}. \quad (7)$$

В данной работе выражение (7) найдено в явном виде для двух зависимостей скорости переноса инфекции от координаты:  $c(x) = 1/\cosh(x)$ , соответствующей сначала разгоняющемуся, а потом останавливающемуся движению инфицированных, и  $c(x) = 1 + 1/(1 + \exp(x))$ , соответствующей плавному замедлению движения инфицированных.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве нулевого приближения для построения асимптотического решения следующего обобщения модели (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u}{\partial x} = -u \ln u + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

в рамках теории сингулярных возмущений, описанных в монографии [5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Logistic equation and COVID-19* / E. Pelinovsky, A. Kurkin, O. Kurkina, M. Kokoulina, A. Epifanova // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2020. – Vol. 140. – Article 110241.
- [2] Alekseeva E. *The Gompertz law and spatial waves of COVID-19* / E. Alekseeva, A. Rassadin // Международная конференция «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2021): сборник материалов. – Симферополь: “Полипринт”, 2021. – С. 109.
- [3] Gompertz B. *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies* / B. Gompertz // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. – 1825. – Vol. 115. – P. 513-585.
- [4] Гурбатов С.Н. *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложение к нелинейной акустике* / С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко, А.И. Саичев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с. – ISBN 978-5-9221-1042-6.
- [5] Васильева А.Б. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений* / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с. – ISBN 5-06-001634-X.

## О математическом моделировании нагрева однородной мишени пульсирующим электронным зондом

СТЕПОВИЧ М. А.

*Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского*  
(Калуга, Россия)  
E-mail: [m.stepovich@mail.ru](mailto:m.stepovich@mail.ru)

ТУРТИН Д. В.

*Ивановский государственный университет (Иваново, Россия)*

КАРТАНОВ А. А.

*ООО «КАМИН-Классик» (Калуга, Россия)*

КАЛМАНОВИЧ В. В.

*Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского*  
(Калуга, Россия)

ГОЛОВАНЬ В. Л.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
(Москва, Россия)

В электронно-зондовых технологиях для катодолюминесцентных (КЛ) измерений используется пульсирующий электронный зонд, что позволяет исследовать слабо люминесцирующие материалы [1–3]. В настоящей работе рассмотрена математическая модель, описывающая изменение температуры образца, основанная на классическом нестационарном уравнении теплопроводности с правой частью, в которой плотность источников тепла  $\rho(\vec{r}, t)$  модулирована некоторой функцией:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\vec{r}, t) + \frac{1}{c_0 \rho_0} \rho(\vec{r}, t). \quad (1)$$

Здесь  $u(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) - T_0$  — температура перегрева образца,  $T(\vec{r}, t)$  — температура мишени в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ ,  $T_0$  — температура образца до облучения,  $a^2 = \lambda / (c_0 \rho_0)$  — температуропроводность и  $\lambda$  — теплопроводность образца,  $c_0$  — теплоёмкость образца,  $\rho_0$  — плотность образца,  $\rho(\vec{r}, t)$  — плотность источников тепла в точке  $\vec{r}$  мишени в момент времени  $t$ . В декартовой системе координат  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

Начальное и краевые условия в декартовой системе координат запишем в следующем виде:

$$u(x, y, z, 0) = 0; \quad u(x, y, z, t) < \infty; \quad x, y \in (-\infty, \infty); \quad z \in [0, \infty); \quad t \in [0, \infty). \quad (2)$$

Отметим, что для задачи (1), (2) выполняются условия:  $u(x, y, z, t) \rightarrow 0$  при  $x, y, z \rightarrow \infty$  и  $t \in [0, \infty)$ .

Плотность источников тепла  $\rho(\vec{r}, t)$  в правой части дифференциального уравнения (1) представим в виде произведения стационарной части, множителя  $\rho^*(\vec{r})$ , описывающего потери энергии электронным зондом в мишени при её стационарном

облучении (см. [2] и литературу там же), и множителя  $f(t)$ , описывающего зависимость нестационарного характера облучения мишени от времени:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho^*(\vec{r}) \cdot f(t).$$

Согласно [4] решение задачи (1), (2) может быть записано в виде:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{c_0 \rho_0} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^*(\xi) f(\tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^3} \exp\left[-\frac{|\vec{r}-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\xi d\tau.$$

Здесь  $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ ,  $\rho^*(\xi) = \rho^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $|\vec{r}-\xi|^2 = (x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2$ , а  $f(t)$  задаёт функцию, модулирующую нестационарное воздействие электронного зонда на мишень.

Модельные расчеты проведены для процесса нагрева в однородном монокристаллическом нитриде галлия, одном из перспективных материалов микро- и нанoeлектроники.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069, <https://rscf.ru/project/23-21-10069/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yacobi V.G. *Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids* / V.G. Yacobi, D.V. Holt. – New York: Plenum Press, 1990. – 354 p.
- [2] Степович М.А. *Количественная катодолуминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук* / М.А. Степович. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 351 с.
- [3] *Оценка значений электрофизических параметров полупроводниковых материалов по результатам измерений катодолуминесценции экситонов* / А.Н. Поляков, М. Noltemeyer, Т. Nempel [и др.] // Прикладная физика. – 2012. – № 6. – С. 41-46.
- [4] Владимирова В.С. *Уравнения математической физики* / В.С. Владимирова. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 512 с.

## Субградиентные методы с шагом Поляка для слабо выпуклых задач с острым минимумом и аддитивной неточностью в значениях субградиента

СТОНЯКИН Ф. С.

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет (Москва, Россия))*  
E-mail: [fedyor@mail.ru](mailto:fedyor@mail.ru)

ЛУШКО Е. А.

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет (Москва, Россия))*

АБЛАЕВ С. С.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
E-mail: [seydamet.ablaev@yandex.ru](mailto:seydamet.ablaev@yandex.ru)

Во многих приложениях часто встречаются задачи невыпуклой оптимизации, в частности, задачи минимизации  $\mu$ -слабо выпуклых функций. Функция  $f(x)$ , называется  $\mu$ -слабо выпуклой ( $\mu \geq 0$ ), если функция  $f(x) + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2$  является выпуклой. Слабо выпуклыми являются, например, задача восстановления фазы, задача восстановления малоранговых матриц в случае неевклидовой метрики, также слабо выпуклые функции встречаются в задачах анализа данных и в машинном обучении [4, 5]. Известно [1, 2], что методы субградиентного типа с шагом Поляка сходятся на классе  $\mu$ -слабо выпуклых функций с острым минимумом со скоростью геометрической прогрессии. Напомним, что функция  $f(x) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  имеет острый минимум в точке  $x_*$ , если для любого  $x \in Q$  справедливо неравенство

$$f(x) - f_* \geq \alpha \min_{x_* \in X_*} \|x - x_*\|_2,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f_* = f(x_*)$  — минимальное значение функции, норма  $\|\cdot\|_2$  — евклидова.

На итерациях субградиентного метода с шагом Поляка используются значения функции и субградиента в текущих точках процесса. Однако, возможна ситуация, когда значения субградиента известны лишь приближенно. В работе получены результаты о сходимости метода в ситуации, когда значения субградиента, используемые на итерациях метода, известны с погрешностью. Отметим, что вопросы влияния неточности доступной информации на вычислительные гарантии оптимизационных методов достаточно актуальны [3].

Итак, рассмотрим задачу минимизации вида

$$\min_{x \in Q} f(x), \tag{1}$$

где  $Q$  — выпуклое замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  —  $\mu$ -слабо выпуклая функция, удовлетворяющая условию острого минимума. Также предположим, что функция  $f(x)$  — липшицева с константой  $M > 0$ , то есть для любых  $x, y \in Q$  справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|_2.$$

Пусть в каждой (запрашиваемой на итерациях метода) точке  $x$  доступен аддитивно неточный [6] субградиент  $\tilde{\nabla}f(x)$ :  $\|\tilde{\nabla}f(x) - \nabla f(x)\|_2 \leq \Delta$  для некоторого достаточно малого  $\Delta > 0$ .

Для решения задачи (1) будем использовать следующую вариацию субградиентного метода с шагом Поляка

$$x_{k+1} := \text{Proj}_Q \left( x_k - \frac{f(x_k) - f_*}{\|\tilde{\nabla}f(x_k)\|_2^2} \tilde{\nabla}f(x_k) \right). \quad (2)$$

Для простоты будем считать, что  $\tilde{\nabla}f(x_k) \neq 0$  при  $k \geq 0$ . Если же существует  $k$ , при котором  $\tilde{\nabla}f(x_k) = 0$ , то для этого  $k$  решение задачи (1) найдено.

**Теорема 1.** Пусть  $f$   $\mu$ -слабо выпуклая липшицева (с константой  $M > 0$ ) функция, удовлетворяющая условию острого минимума, а начальная точка  $x_0$  такова, что  $\min_{x_* \in X_*} \|x_0 - x_*\|_2 \leq \frac{\alpha}{2\mu}$ , а также справедливо неравенство  $4\Delta < \alpha$ . Тогда субградиентный метод (2) сходится со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|x_n - x_*\|_2^2 \leq \left( 1 - \frac{\alpha^2 - 4\Delta\alpha}{2M^2} \right)^n \|x_0 - x_*\|_2^2. \quad (3)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Subgradient methods for sharp weakly convex functions* / D. Davis, D. Drusvyatskiy, K.J. MacPhee, C. Paquette // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2018. – Vol. 179. – P. 962-982.
- [2] *Субградиентные методы для слабо выпуклых и относительно слабо выпуклых задач с острым минимумом* / Ф.С. Стонякин, С.С. Аблаев, И.В. Баран, М.С. Алкуса // Компьютерные исследования и моделирование. – 2023. – Т. 15, № 2. – С. 393-412.
- [3] Stonyakin F.S. *Stopping Rules for Gradient Methods for Non-convex Problems with Additive Noise in Gradient* / F.S. Stonyakin, I.A. Kuruzov, B.T. Polyak // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2023. – Vol. 198. – P. 531-551.
- [4] Davis D. *The nonsmooth landscape of phase retrieval* / D. Davis, D. Drusvyatskiy, C. Paquette // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2020. – Vol. 40, No. 4. – P. 2652-2695.
- [5] *Nonconvex robust low-rank matrix recovery* / X. Li, Z. Zhu, A. Man-Cho So, R. Vidal // SIAM Journal of Optimization. – 2020. – Vol. 30, No. 1. – P. 660-686.
- [6] *Решение сильно выпукло-вогнутых композитных седловых задач с небольшой размерностью одной из групп переменных* / М.С. Алкуса, А.В. Гасников, Е.Л. Гладин [и др.] // Матем. сборник. – 2023. – Т. 214, № 3. – С. 3-53.



## Численный алгоритм решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана на рынке Хестона на основе прямых-обратных СДУ и нейронных сетей

ЧУБАТОВ А. А.

Научно-технологический университет «Сириус» (Сочи, Россия)

E-mail: [chaa@inbox.ru](mailto:chaa@inbox.ru)

Рассмотрим уравнение, описывающее цену оптимального портфеля на рынке Хестона с одним рисковым активом с ценой  $s$  и волатильностью  $y$ . А именно, мы рассмотрим оптимизационную задачу для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, описывающую максимизацию ожидаемой полезности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \max_{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2(y) \pi^2(t, s, y) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \pi(t, s, y) \left( \mu(y) \frac{\partial u}{\partial s} + \rho \sigma(y) a(y) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} \right) \right\} + \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b(y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(T, s, y) = h(s), \quad (t, s, y) \in [0; T] \times D \times R,$$

где  $u = u(t, s, y)$ .

Оптимальная стратегия управления имеет вид

$$\pi^*(t, s, y) = - \frac{\mu(y) \frac{\partial u(t, s, y)}{\partial s} + \rho a(y) \sigma(y) \frac{\partial^2 u(t, s, y)}{\partial s \partial y}}{\sigma^2(y) \frac{\partial^2 u(t, s, y)}{\partial s^2}}.$$

В итоге получим задачу Коши для полностью нелинейного параболического УЧП

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2(y) \pi^{*2}(t, s, y) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b(y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(t, s, y) = h(s). \quad (1)$$

В статье [1] представлен вероятностный подход и основанный на нем численный метод решения задачи Коши для полностью нелинейных параболических уравнений.

Задача (1) представляет собой частный случай задачи вида (здесь и далее  $d = 2$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + f(\tau, x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0, \quad u(T, x) = h(x), \quad (\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

где  $u = u(\tau, x)$ ,  $x = (s, y) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\nabla_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ ,  $\nabla_{kj}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$ ,  $k, j = 1, \dots, d$ .

Следуя [2], сведем уравнение (2) к системе квазилинейных параболических уравнений. Для этого введем обозначения, предполагая, что матрица  $\frac{\partial f(\tau, x, u, v, \gamma)}{\partial \gamma}$  положительно определена

$$v = \nabla u \in \mathbb{R}^d, \quad \gamma = \nabla^2 u = \nabla v \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad AA^+ = 2 \frac{\partial f(\tau, x, u, v, \gamma)}{\partial \gamma} \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

где  $v_k = \nabla_{x_k} u$ ,  $\gamma_{kj} = \nabla_{x_j} v_k$ ,  $A = A(\tau, x, u, v, \gamma) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

С помощью дифференциального продолжения получим квазилинейную систему

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \text{Tr}[AA^+ \nabla^2 u] + \varphi(\tau, x, u, v, \nabla v) = 0, \quad u(T, x) = h(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \text{Tr}[AA^+ \nabla^2 v_k] + \psi_k(\tau, x, u, v, \nabla v) = 0, \quad k = 1, \dots, d, \quad v(T, x) = g(x), \quad (4)$$

где  $\varphi(\tau, x, u, v, \gamma) = f(\tau, x, u, v, \gamma) - \frac{1}{2} \text{Tr}[AA^+ \gamma]$ ,  $\psi(\tau, x, u, v, \gamma) = \nabla_x f + \frac{\partial f}{\partial u} v + \gamma \nabla_v f$ ,  $g(x) = \nabla h(x)$ .

Далее строится вероятностное представление вязкостного решения системы (3), (4). Для построения этого представления мы используем теорию прямых-обратных стохастических дифференциальных уравнений (ПОСДУ).

Запишем ПОСДУ, ассоциированное с (3), (4)

$$dX(t) = A(t, X, U, V, \Gamma) dW(t), \quad X(\tau) = x, \quad t \in [\tau, T], \tau \in [0, T], \quad (5)$$

$$dU(t) = -\varphi(t, X, U, Z, G) dt + Z(t)^+ A(t, X, U, V, G) dW(t), \quad U(T) = h(X(T)), \quad (6)$$

$$dV(t) = -\psi(t, X, U, V, G) dt + G(t)^+ A(t, X, U, V, G) dW(t), \quad V(T) = g(X(T)), \quad (7)$$

где  $W(t) \in \mathbb{R}^d$  — процесс Винера, процессы  $U, Z, V, G$  задаются следующим образом

$$U(t) = u(t, X(t)), \quad Z(t) = \nabla u(t, X(t)), \quad V(t) = v(t, X(t)), \quad G(t) = \nabla v(t, X(t)).$$

Для получения численного результата, решение ПОСДУ сводится к решению некоторой оптимизационной задачи [3], для решения которой мы применяем недавно разработанный подход, основанный на нейронных сетях [4]. Мы следуем методологии, предложенной Раисси [5] для квазилинейных параболических уравнений, и модифицируем эту методологию, чтобы применить ее к решению ПОСДУ (5)–(7), соответствующих полностью нелинейным параболическим уравнениям вида (2).

Полученные численные решения задачи проверяются для специальных видов (логарифмического, экспоненциального, степенного) функций полезности  $h(x)$ . В этом случае решение задачи (1) сводится к задаче Коши для линейного параболического уравнения, решение которой вычисляется численно с помощью формулы Фейнмана-Каца.

**Благодарность.** Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю проф., д.ф.-м.н. Я.И. Белопольской за неоценимые советы и рекомендации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белопольская Я.И. *Оптимизация инвестиционного портфеля в модели Хестона* / Я.И. Белопольская, А.А. Чубатов // *Вероятность и статистика*. 35, Посвящается юбилею Яны Исаевны Белопольской, Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2023. – Т. 526. – С. 29-51.
- [2] Белопольская Я.И. *Марковские процессы, связанные с нелинейными параболическими системами* / Я.И. Белопольская, Ю.Л. Далецкий // *Докл. Акад. Наук СССР*. – 1980. – Т. 250, № 3. – С. 521-524.
- [3] Ma J. *Forward-Backward stochastic differential equations and their applications* / J. Ma, J. Yong. – Berlin-New York: Springer, 2007. – 284 p. – ISBN 3-540-65960-9.
- [4] E.W. *Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations* / W. E, J. Han, A. Jentzen // *Commun. Math. Stat.* – 2017. – Vol. 5, No. 4. – P. 349-380.
- [5] Raissi M. *Forward-backward stochastic neural networks: Deep learning of high-dimensional partial differential equations* // *preprint arXiv:1804.07010*. – 2018.

## Секция 6. Дискретная математика и информатика. Методика преподавания математики в высшей школе и история математики

### Международная медаль за выдающиеся открытия в математике

БАРАН И. В.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный  
университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*  
E-mail: [matemain@mail.ru](mailto:matemain@mail.ru)

На VII Международного математического конгресса, проходившего в 1924 году в Торонто, Джон Филдс предложил награждать математиков золотой медалью в знак признания их выдающихся заслуг. В 1936 году на X конгрессе в Осло были вручены первые две медали. Их получили Ларе Альфорс (Финляндия) и Джесси Дуглас (США).

Филдсовская премия — самая престижная премия и медаль в области математики, неофициально называемой «нобелевской премией по математике», которую вручают один раз в четыре года молодым математикам в возрасте не старше 40 лет на каждом международном математическом конгрессе. Лауреатами Филдсовской премии неоднократно становились советские и российские математики: С.П. Новиков (1970), Г.А. Маргулис (1978), В.Г. Дринфельд (1990), Е.И. Зельманов (1994), М.Л. Концевич (1998), В.А. Воеводский (2002), Г.Я. Перельман (2006, от премии отказался), А.Ю. Окуньков (2006), С.К. Смирнов (2010).

Воеводский В.А. стал лауреатом премии Филдса за доказательство гипотезы Милнора. Предложенное им решение считается одним из самых ярких достижений математики за последнее время. Перельман Г.Я. награжден с формулировкой «за вклад в геометрию и его революционные прозрения в аналитическую и геометрическую структуру потоков Риччи». Окуньков А.Ю. получил высшую математическую награду за развитие теории представлений, алгебраической геометрии и теории вероятностей. Смирнову С.К. присуждена медаль «за доказательство конформной инвариантности в перколяции и плоской модели Изинга в статистической физике».

Дизайн медали Филдса разработал канадско-американский скульптор Р. Тэйт Маккензи. Она изготавливается из 14-каратного золота. На лицевой стороне медали Филдса надпись: «Превзойти свою человеческую ограниченность и покорить Вселенную» и изображение Архимеда. А на обороте: «Математики, собравшиеся со всего света, чествуют замечательный вклад в познания».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Курбера Г. *Блестящее наследие Филдса* / Г. Курбера. — М.: Де Агостини, 2014. — 160 с.
- [2] Монастырский М.И. *Лауреаты премии Филдса* / М.И. Монастырский // Историко-математические исследования. — 1989. — № 31. — С. 88-115.

## **"Метод карточек" для повторения курса геометрии учащимися 11 классов и выпускниками колледжей**

БЕЛЯЛОВ М. Х., ПАШКОВА Ю. С.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Введение новых федеральных государственных образовательных стандартов требует пересмотра подходов к проектированию и реализации образовательного процесса. Это обстоятельство актуализировало необходимость изменения путей к выбору технологий и методов обучения, в том числе и обучения математике, обеспечивающих достижение новых образовательных результатов.

Использование на уроке математики карточек с заданием в рамках учебного процесса способствует активизации познавательного интереса, побуждает обучающихся к достижению цели, которая превращается в «совместную эстафету» получения и подачи знания в процессе обучения.

"Метод карточек" показывает высокие результаты в кружковой работе. Суть метода состоит в следующем: после краткого объяснения материала преподавателем, учащимся выдаются карточки с заданиями. Карточка содержит несколько заданий, решение которых основано на методе, изложенном преподавателем. Уровень сложности заданий на карточке возрастает последовательно. Каждая задача на карточке оценивается определенным количеством баллов. В конце занятия учащийся получает оценку, которая считается как сумма баллов за решенные задачи. Формирующийся таким образом рейтинг создает эффект соревнования и повышает мотивацию решения задач.

В работе предлагается применить "метод карточек" к организации повторения материала по курсу геометрии (планиметрии) для школьников одиннадцатых классов и студентов второго курса колледжей. Актуальность исследования обусловлена тем, что этот материал не изучается в старших классах школ и в колледжах, но необходим для успешного выполнения заданий ЕГЭ базового и профильного уровня, а также внутренних вступительных экзаменов университетов. При этом в карточке естественно внести не только задачи для решения, но и теоретический вопрос по рассматриваемой теме. Этот вопрос может быть как базового уровня (задание № 1 в карточке), так и повышенного уровня сложности (одно из последних заданий), возможно сформулированный в виде задачи. Метод не планируется использовать для задач высокого уровня сложности, так как основная цель состоит в создании краткого курса повторения материала по геометрии для широкого круга учащихся. При этом реализация предполагается как в классическом формате, так и в форме приложения.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

## О перечислении помеченных гладких графов

Воблый В. А.

ВИНИТИ РАН (Москва, Россия)

E-mail: vitvobl@yandex.ru

Гладким графом называется связный граф без концевых вершин.

Обозначим через  $V_n$  — число помеченных гладких графов с  $n$  вершинами, а через  $C_n$  — число помеченных связных графов с  $n$  вершинами.

**Теорема.** При  $n \geq 3$  верна формула

$$V_n = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{n-m} C_m . \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $A_n$  — число помеченных связных графов с  $n$  вершинами, не являющихся деревьями. В силу формулы Кэли  $A_n = C_n - n^{n-2}$ .

Рид [1] нашел соотношение между производящими функциями

$$\sum_{n=3}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{z^m}{m!} e^{-mz} .$$

Отсюда имеем

$$V_n = n! [z^{-1}] \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{z^m}{m!} e^{-mz} \right) z^{-n-1} ,$$

где  $[z^{-1}]$  — оператор формального вычета [2, с. 25]. После разложения в ряд экспоненты получим

$$V_n = n! [z^{-1}] \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{z^m}{m!} \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m^p z^p}{p!} \right) z^{-n-1} = n! \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_m (-1)^p \frac{m^p}{m! p!} [z^{-1}] z^{m+p-n-1} .$$

Следовательно, имеем

$$V_n = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \frac{n!}{m!(n-m)!} m^{n-m} A_m .$$

Выражая  $A_m$  через  $C_m$ , найдем

$$V_n = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{n-m} C_m - Z_n ,$$

где через  $Z_n$  обозначено выражение

$$Z_n = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{n-m} m^{m-2} .$$

Используем тождество Теппера [3, с. 46]:

$$S_{r,p,q} = \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{r}{m} (q-m)^p = 0, \quad 0 \leq p \leq r,$$

$$Z_n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{n-2} = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (n-m)^{n-2} = S_{r,n-2,n} = 0.$$

Формула (1) доказана.

Граф блоков — это граф, у которого все блоки — полные графы.

**Следствие.** Пусть  $SH_n$  — число помеченных гладких графов блоков с  $n$  вершинами, а  $H_n$  — число помеченных связных графов блоков с  $n$  вершинами. Тогда при  $n \geq 3$  верна формула

$$SH_n = \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{n+k-m-1} S(m-1, k),$$

где  $S(n, k)$  — число Стирлинга 2-го рода.

**Доказательство.** Известно выражение [4]

$$H_m = \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1, k) m^{k-1}.$$

Подставляя  $H_m$  вместо  $C_m$  в формулу (1), получим утверждение следствия.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Read R.C. *Some unusual enumeration problems* / R.C. Read // Ann. N.Y. Acad. Sci. — 1970. — Vol. 175. — P. 314-326.
- [2] Гульден Я. *Перечислительная комбинаторика* / Я. Гульден, Д. Джексон — М.: Наука, 1990. — 504 с.
- [3] Егорычев Г.П. *Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм* / Г.П. Егорычев — Новосибирск: Наука, 1971. — 286 с.
- [4] *Enumerative problems inspired by Mayer of cluster integrals* / P. Leroux // Electron. J. Comb. — 2004. — Vol. 11, No. 32.

## Абелевские премии и прогресс современной математики

ОРЛОВ И. В.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: [igor\\_v\\_orlov@mail.ru](mailto:igor_v_orlov@mail.ru)*

В 2002 году правительством Норвегии была учреждена международная премия по математике, названная в честь знаменитого норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. Премия присуждается ежегодно выдающимся математикам.

Одной из основных целей Абелевской премии является является популяризация современной математики среди молодежи.

Абелевской премии за прошедший период были удостоены:

1) Жан-Пьер Серр (2003, Франция, Коллеж де Франс) за ключевую роль в придании современной формы многим разделам математики, включая топологию, алгебраическую геометрию и теорию чисел.

2) Майкл Атья (2004, Великобритания, Эдинбургский университет), Изадор Зингер (США, Массачусетский технологический институт) за открытие и доказательство

теоремы об индексе, объединившей топологию, геометрию и анализ, а также за их выдающуюся роль в наведении новых мостов между математикой и теоретической физикой.

3) Питер Лакс (2005, США, Курантовский институт математических наук) за революционный вклад в теорию и применение дифференциальных уравнений в частных производных и вычисление их решений.

4) Леннарт Карлесон (2006, Швеция, Королевский технологический институт) за глубокий и основополагающий вклад в гармонический анализ и теорию гладких динамических систем.

5) Сатхамангалам Варадхан (2007, США, Курантовский институт математических наук) за фундаментальный вклад в теорию вероятностей, в частности, за создание единой теории больших отклонений.

6) Джон Томпсон (2008, США, Флоридский университет), Жак Титс (Франция, Коллеж де Франс) за значительные достижения в алгебре, в частности, за формирование современной теории групп.

7) Михаил Громов (2009, Франция, Институт высших научных исследований) за его революционный вклад в геометрию.

8) Джон Тейт (2010, США, Техасский университет в Остине) за огромное и продолжительное влияние, оказанное им на развитие теории чисел.

9) Джон Милнор (2011, США, Университет Стоуни-Брук) за новаторские открытия в топологии, геометрии и алгебре.

10) Эндре Семереди (2012, Венгрия / США, Институт математики Альфреда Реньи / Ратгерский университет) за фундаментальный вклад в дискретную математику и теоретическую информатику.

11) Пьер Делинь (2013, США, Институт перспективных исследований) за революционный вклад в алгебраическую геометрию, который преобразил теорию чисел, теорию представлений и смежные области.

12) Яков Синай (2014, США / Россия, Принстонский университет / Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН) за фундаментальный вклад в изучение динамических систем, эргодическую теорию и математическую физику.

13) Джон Нэш (2015, США, Принстонский университет), Луис Ниренберг (США, Курантовский институт математических наук) за выдающийся и революционный вклад в теорию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и её приложения к геометрическому анализу.

14) Эндрю Уайлс (2016, Великобритания, Оксфордский университет) за потрясающее доказательство Великой теоремы Ферма.

15) Ив Мейер (2017, Франция, Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay) за решающую роль в разработке математической теории вейвлетов.

16) Роберт Ленглендс (2018, США, Институт перспективных исследований) за прогностическую программу, связывающую теорию представлений с теорией чисел.

17) Карен Уленбек (2019, США, Техасский университет в Остине) за новаторские достижения в геометрической теории уравнений в частных производных, теории калибровочной инвариантности, теории интегрируемых систем, а также за фундаментальное влияние этих работ на анализ, геометрию и математическую физику в целом.

18) Григорий Маргулис (2020, США, Йельский университет), Гилель Фюрстенберг (Израиль, Еврейский университет в Иерусалиме) первопроходцам применения вероятностных и динамических методов в теории групп, теории чисел и комбинаторике.

19) Ави Вигдерзон (2021, США, Институт перспективных исследований), Ласло Ловас (Венгрия, Институт математики Альфреда Реньи / Будапештский университет) за фундаментальный вклад в теоретическую информатику и дискретную математику, а также за ведущую роль в их становлении как центральных направлений современной математики.

20) Деннис Салливан (2022, США, Университет штата Нью-Йорк в Стони-Бруке / Городской университет Нью-Йорка) за новаторский вклад в топологию в её самом широком смысле и, в частности, её алгебраический, геометрический и динамический аспекты.

21) Луис Каффарелли (2023, Аргентина / США, Техасский университет в Остине) за основополагающий вклад в теорию регулярности для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, включая задачи со свободными границами и уравнение Монжа—Ампера.

22) Мишель Талагран (2024, Франция, Национальный центр научных исследований) за новаторский вклад в теорию вероятностей и функциональный анализ и выдающиеся приложения к математической физике и статистике.

Глубокий анализ и обсуждение материала, приведенного в настоящей заметке, представляется весьма полезным при изучении современного периода истории математики студентами и аспирантами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Holden H. *The Abel Prize 2003-2007: The First Five Years* / H. Holden, R. Piene (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 328 p.
- [2] Holden H. *The Abel Prize 2008-2012* / H. Holden, R. Piene (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. – 571 p.
- [3] Holden H. *The Abel Prize 2013-2017* / H. Holden, R. Piene (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2019. – 785 p.
- [4] Holden H. *The Abel Prize 2018-2023* / H. Holden, R. Piene (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2024. – 883 p.

## **Определение эффектов влияния значимых показателей (предикторов) на исследуемые компоненты психологической безопасности и их составляющие**

ПАРФЕНОВА Н. Б.

*Псковский государственный университет (Псков, Россия)*

*E-mail: [nadezhdaparfenova@yandex.ru](mailto:nadezhdaparfenova@yandex.ru)*

Для целей моделирования психологической безопасности в изменяющихся условиях образования необходимо опираться на математико-статистические технологии, или апостериорную модель. Устойчивость структурно-содержательных компонентов анализируется с помощью, применения эмпирической математической модели (ЭММ), предполагающей многостороннее описание психологического феномена, возможный вариант динамики и определение эффектов влияния значимых показателей



(предикторов) на исследуемые компоненты и их составляющие с помощью однофакторного дисперсионного анализа (ANOVA) [3].

Поскольку психологическая безопасность является комплексным понятием, мы включаем в ее состав, опираясь на результаты теоретико — методологических и эмпирических исследований [1, 2, 4], информационно-когнитивный, личностно-смысловой и поведенческий компоненты. В содержание информационно-когнитивного компонента входят представления студентов об изменяющихся социальных, политических условиях жизнедеятельности, изменяющихся условиях образования (ИУО), собственных способностях и навыках, необходимых для успешного обучения, затруднениях в условиях цифрового обучения. В качестве системообразующего компонента мы рассматриваем личностно-смысловой, т.е. личностные характеристики, определяющие чувство защищенности (ответственность, жизнестойкость, субъективное благополучие и уверенность в будущем, самооффективность в способах совладания с ожидаемыми затруднениями, базисные убеждения личности). Среди личностных особенностей центральным ресурсом для повышения успешности студентов в обучении и совладании с трудными жизненными ситуациями является жизнестойкость. Поведенческий компонент представлен стратегиями учебной деятельности в цифровой среде и типичными способами совладания с трудностями.

Тестирование проводилось на базе Псковского государственного университета 2022–2023 уч. г. ( $n = 157$ ).

С помощью разработанных и проверенных по критериям психометрической эффективности шкал, измеряющих компоненты и их составляющие психологической безопасности, мы получили 141 переменную, после чего была проведена факторизация по соответствующим шкалам с помощью метода главных компонент (метод вращения Varimax). В результате факторного анализа были выделены 34 фактора первого порядка, чьи собственные значения больше единицы, значимость факторных весов переменных, входящих в каждый фактор, больше 0,4, накопленные проценты дисперсии по каждому интегральному индексу составляли выше 50%.

Значимый фактор «Жизнестойкость» (вовлеченность, контроль, принятие риска) представлен по уровням выраженности в трех градациях (на основе стандартизованных  $Z$  — оценок): 3 группа, с высокими значениями (диапазон значений равен и выше 0,6; 2 группа, со средними значениями (от - 0,6 до 0,6); 1 группа, с низкими показателями (ниже - 0,6).

Особенно важен в процессе дальнейшего проектирования психологической безопасности участников образовательного процесса эффект влияния жизнестойкости на стратегии поведения в ИУО.

Неконструктивные стратегии поведения наиболее выражены у студентов с низкими показателями жизнестойкости, поскольку у них также представлены и затруднения в учебной деятельности. Средние показатели таких неконструктивных стратегий как отказ от действий, уход представлен у студентов с высокими и средними показателями жизнестойкости.

Иной эффект влияния представлен на проявления конструктивных стратегий. Студенты с высокими и средними показателями жизнестойкости пытаются анализировать ситуацию, обращаются к компетентным взрослым за помощью, сохраняют оптимизм.

Т.о., применение однофакторного дисперсионного анализа (ANOVA) позволяет определить эффекты влияния значимых показателей (предикторов) на исследуемые компоненты и их составляющие для дальнейшего проектирования условий психологической безопасности студенческой молодежи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Моделирование психологической безопасности студенческой молодежи в изменяющихся условиях образования. Учебно-методическое пособие* / Сост. Парфенова Н.Б. – ПсковГУ. – СПб.: ИД «Петрополис». – 2023. – 62 с.
- [2] СерEDA Е.И. *Психологическая безопасность молодежи в условиях ожидаемой террористической угрозы* / Е.И. СерEDA, Н.Б. Парфенова. – Псков: Псковский государственный университет. – 2013. – 288 с.
- [3] Парфенова Н.Б. *Эмпирическая математическая модель исследования психологической устойчивости студентов в условиях дистанционного образования* / Н.Б. Парфенова // Таврический вестник информатики и математики. – 2022. – Т. 54, № 1. – С. 53-66.
- [4] Parfenova N. *Perception of global warming in the context of studying the psychology of environmental safety* / N. Parfenova, E. Mititsina, A. Bizaeva // Digital Future Economic Growth, Social Adaptation and Technological Perspectives. Lecture Notes in Networks and Systems. Eds. T. Kolmykova, E. Kharchenko. – 2020. – Vol. 111. – P. 865-875.

## Крымская олимпиада школьников по математике

ПАШКОВА Ю. С., СМЕРНОВА С. И., ТЕРЕНТЬЕВ П. С.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

Ежегодно на базе и по инициативе ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" проводится Крымская олимпиада школьников по математике. Олимпиада проходит в два тура. Первый тур проводится в виде компьютерного тестирования и является обязательным для участия во втором, итоговом туре. Итоговый тур проводится в очном формате.

К участию в Олимпиаде приглашаются школьники 7-11 классов, а также учащиеся 1-2 курсов колледжей и техникумов.

Победители и призеры Олимпиады получают льготы для поступления в Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского.

Олимпиадные задачи по математике для школьников являются одним из эффективных способов стимулирования интереса учеников к предмету. Решение сложных задач требует от них не только знаний, но и способности логически мыслить, анализировать и решать проблемы. Успех на олимпиадах дает ученикам не только удовлетворение от победы, но и уверенность в своих способностях, что мотивирует их к дальнейшему изучению математики.

Олимпиадные задачи могут быть различной сложности и покрывать различные темы математики — от элементарных задач на знание базовых алгоритмов до сложных головоломок и теорем. Участие в олимпиадах также способствует развитию коммуникативных навыков, так как в ходе решения задач ученики могут обсуждать свои идеи и решения с товарищами.

При разработке задач Крымской олимпиады школьников учитываются возрастные и региональные особенности учащихся, а также острая необходимость популяризации математики в Крыму. При этом, на первом этапе наиболее важным является не

только отбор учащихся для участия во втором этапе, но и вовлеченность школьников в математическом соревновании.

Основными целями и задачами Олимпиады являются выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к научной, научно-исследовательской, инженерно-технической, изобретательской деятельности, пропаганды научных знаний, содействия профессиональной ориентации школьников.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

## Востребованность массового открытого онлайн-курса по цифровой доступности математического контента

ЧУКСИНА Е. В.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: [chuksina2002@mail.ru](mailto:chuksina2002@mail.ru)*

В мире насчитывается более 250 миллионов лиц с глубокими нарушениями зрения (слабовидением и слепотой) [1], все эти люди нуждаются в особом подходе при организации образовательного процесса [2]. Современные преподаватели математических дисциплин (в школе и вузе), как правило, не имеют достаточного опыта работы с лицами, имеющими инвалидность по зрению, и специальных компетенций, обеспечивающих корректность преподавания математики обучающимся с нарушением зрения [2, 3]. Можно предположить, что разработка массового открытого онлайн-курса (МООК) по цифровой доступности математического контента позволит закрыть существующие пробелы в компетентности преподавателей.

**Цель исследования** — проанализировать распространенность МООК, содержащих сведения о разработке математического контента, доступного для обучающихся с нарушением зрения, и, на основании выполненного анализа, разработать программу собственного МООК по цифровой доступности математической нотации.

**Материал и методы.** Исследование выполнялось в ноябре-декабре 2023 года в несколько этапов: 1) изучение особенностей разработки математической нотации для людей с нарушением зрения (метод — анализ литературы); 2) поиск и анализ МООК, содержащих методические указания к разработке доступного математического контента (методы — поиск в Google по ключевым словам, контент-анализ); 3) разработка программы МООК «Цифровая доступность математического контента» (метод — педагогический дизайн).

**Результаты.** Обнаружено, что в англоязычном сегменте 11 МООК соответствовали теме исследования, из них три были недоступны для просмотра и изучения, восемь — содержали краткие сведения о цифровой доступности математического контента и описание инструментов для ее реализации. Поиск по русскоязычным ключевым словам не выявил ни одного МООК, имеющего отношение к доступности математической нотации для людей с нарушением зрения. Полученные данные подтвердили актуальность разработки русскоязычного МООК «Цифровая доступность математического контента». На основании выполненного анализа была разработана программа МООК, содержащая модули: «Основные понятия цифровой доступности и математического контента», «Инструкции по разработке доступных математических формул, изображений, видео и аудио». В качестве платформы для размещения МООК выбран Stepik. Публикация и запуск МООК запланированы в 2024 году.

**Заключение.** В результате анализа представленности MOOK по цифровой доступности математического контента подтверждена актуальность разработки русскоязычного MOOK, предназначенного для формирования компетенций преподавателей математики по организации и поддержке образовательного процесса для обучающихся с нарушением зрения. Новый MOOK может быть использован в процессе дополнительного профессионального образования, а также для самообучения учителей и преподавателей вузов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *World Blind Union / WBU. – 2024. – Electronic data // WBU: [site]. – URL: (дата обращения: 30.08.2024). – Текст: электронный.*
- [2] Косова Е.А. *Подготовка преподавателей математических дисциплин к обучению студентов с глубокими нарушениями зрения / Е.А. Косова // Гуманитарные науки. – 2018. – № 2(42). – С. 157-167.*
- [3] Косова Е.А. *Мотивация и готовность преподавателей к использованию дистанционных образовательных технологий в обучении студентов с ограниченными возможностями здоровья. / Е.А. Косова // Информатика и образование. – 2020. – № 9. – С. 43-52.*

## Секция 7. Теория вероятностей и математическая статистика. Случайные процессы. Финансовая математика

### Экспонента случайного поля

БУФЕТОВ А. И.

*Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*

*(Москва, Россия)*

*E-mail: bufetov@mi-ras.ru*

В обзорном докладе, начиная от мотивировок, восходящих к работам А.Н. Колмогорова по гидродинамической турбулентности, мы обсудим общий формализм, позволяющий строить мультипликативный хаос — экспоненты случайных полей, гауссовых и близких к гауссовым, как в субкритическом, так и в критическом случае.

Деметрий Фалерей, основатель Александрийской библиотеки, провел перепись населения в Афинах в конце IV в. до Р.Х., а первым дошедшим до нас трудом по теории точечных процессов принято считать книгу Джона Граунта о таблицах смертности (1662). Новую главу теории точечных процессов открыли работы Р. Фишера, Дж. Вишарта, Е. Вигнера и Ф. Дайсона о случайных матрицах.

Какова инфинитезимальная вероятность, по мере Хаара, что аргументы собственных чисел унитарной матрицы формата  $N \times N$  лежат в каждом из дизъюнктивных бесконечно малых интервалов  $(\theta_1, \theta_1 + d\theta_1), \dots, (\theta_l, \theta_l + d\theta_l)$ ? Формула Вейля для характеров даёт ответ:

$$\det K_N(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1,\dots,l} d\theta_1 \dots d\theta_l, \quad \text{где} \quad K_N(\theta, \theta') = \frac{\sin \frac{N}{2}(\theta - \theta')}{\sin \frac{1}{2}(\theta - \theta')} \quad -$$

ядро Дирихле. Предельный переход при  $N \rightarrow \infty$  со скейлингом  $\theta = 2\pi t/N$  привёл Дайсона к фундаментальному определению: синус-процессом называется мера на пространстве бесконечных подмножеств прямой без точек накопления, такая, что инфинитезимальная вероятность обнаружить частицу в каждой из бесконечно малых окрестностей  $(t_1, t_1 + dt_1), \dots, (t_l, t_l + dt_l)$  задаётся формулой

$$\det \mathcal{S}(t_i, t_j)_{i,j=1,\dots,l} dt_1 \dots dt_l, \quad \text{где} \quad \mathcal{S}(t, t') = \frac{\sin \pi(t - t')}{\pi(t - t')} \quad -$$

синус-ядро, ядро ортогонального проектора на пространство Пэли—Винера. Рассматривая вместе с синус-ядром и более общие ядра, мы приходим к общему определению детерминантного точечного процесса — точечного процесса, чьи корреляционные функции задаются детерминантами. Возникающие в самых разных задачах — помимо случайных матричных моделей с унитарной симметрией, например, в асимптотической комбинаторике и теории представлений бесконечномерных групп — детерминантные процессы допускают, вместе с тем, богатую общую теорию.

В случае, когда корреляционное ядро — проектор, естественно спросить, как связаны реализации точечного процесса с образом проектора? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема, полученная совместно с Янци Цью (Тулуза, Пекин) и А. Шамовым (Харьков, Реховот).

**Теорема.** *Реализация детерминантного точечного процесса почти наверное есть множество единственности для гильбертова пространства, образа нашего проектора.*

В частном случае процессов со счётным фазовым пространством теорема принадлежит Р. Лайонсу, в случае синус-процесса — С. Гошу.

Вернёмся к собственным числам унитарных матриц.  $N$ -точечное подмножество окружности является, конечно, множеством единственности для образа ядра Дирихле — пространства тригонометрических многочленов степени  $N - 1$ , причём оно является и минимальным таким множеством. При переходе к бесконечному числу частиц ситуация меняется и имеет место

**Теорема.** *Почти наверное реализация синус-процесса имеет избыток 1 для пространства Пэли—Винера.*

Иными словами, реализация становится полным и минимальным множеством после удаления одной частицы. Причина появления избытка 1 при переходе к бесконечному числу частиц состоит в том, что случайные целые функции, обобщённые произведения Эйлера, сопоставляемые синус-процессу, сходятся при скейлинге по распределению к нетривиальной случайной мере — гауссову мультипликативному хаосу.

С технической точки зрения, рассуждение опирается на квази-инвариантность синус-процесса под действием диффеоморфизмов прямой с компактным носителем, а также на оценки остаточного члена в скейлинговом пределе формулы Бородина—Окунькова—Джеронимо—Кейса, обобщающего Сильную Теорему Сергё в форме И.А. Ибрагимова. Для детерминантного процесса с ядром Бесселя точные оценки недавно получил С.М. Горбунов.

## Доверительный интервал оценивания нелинейной однопараметрической парной регрессии

ГЕТМАНСКАЯ И. В.

*Московский государственный технический университет связи и информатики (Москва, Россия)*

Математическая модель какого-либо явления, как правило, это функциональная зависимость  $y = r(x, \theta)$  его количественных характеристик, одни из которых зависимая  $y \in R$  и независимые  $x \in R^s$  переменные, а другие параметры  $\theta \in R^q$ . В связи с неучтёнными факторами или ошибками измерений характеристик в модель вносят случайную составляющую, и строится она в вероятностной схеме постановки задачи, а используется и уточняется методами математической или прикладной статистики. В регрессионном анализе функциональная модель  $y = r(x, \theta)$  называется регрессией, а параметры  $\theta$  — регрессионными коэффициентами (РК).

Адекватная функциональная модель позволяет решать задачу оценивания её параметров  $\theta$  по измеренным значениям  $y_i, x_i$  зависимой  $y$  и независимых  $x$  переменных, где  $i = \overline{1, n}$ .

В математической и прикладной статистике оценивание параметров генеральной совокупности или регрессионных моделей по сути — это вычисление приближений параметров, главной характеристикой которых является точность. В статистике оценка

точности приближения осуществляется с помощью формулы [1] доверительного интервала со следующей её интерпретацией

$$P\{\theta \in U(\tilde{\theta}, \rho)\} = \gamma. \quad (1)$$

Здесь  $U(\tilde{\theta}, \rho)$  — окрестность радиуса  $\rho$  точечной оценки  $\tilde{\theta}$  оцениваемого параметра  $\theta$ ,  $\gamma$  — надёжность, с которой окрестность  $U(\tilde{\theta}, \rho)$  накрывает оцениваемый параметр  $\theta$ . Надо иметь в виду, что в этой формуле окрестность  $U(\tilde{\theta}, \rho)$  со случайным центром  $\tilde{\theta}$ , зависящим от случайных составляющих формулу  $\tilde{\theta}$ , а оцениваемый параметр  $\theta$  закономерная, неслучайная величина. Поэтому принято выражение: "окрестность  $U(\tilde{\theta}, \rho)$  накрывает  $\theta$  с надёжностью  $\gamma$ ", а не " $\theta$  попадает в окрестность  $U(\tilde{\theta}, \rho)$  с вероятностью  $\gamma$ ".

В работе [2] формула точечного оценивания нелинейной однопараметрической ( $q = 1$ ) парной ( $s = 1$ ) регрессии представлена 4-мя вариантами, с помощью 2-х из которых найдены [2] интервалы, достоверно накрывающие истинное значение оцениваемого параметра  $\theta$ .

В данной работе строятся интервальные оценки параметров тех же регрессий по формуле доверительного интервала (1) с центром в одной из двух отложенных в [2] точечной оценке:  $\tilde{\theta} = \bar{\theta}^\times$ , которая среднее подмножества наблюдаемых реализаций РК (НРК)  $\theta_i^*$

$$\bar{\theta}^\times = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \theta_{k_i}^*}{m_1}. \quad (2)$$

НРК  $\theta_i^*$  — результат решения обратной задачи: нахождения РК по измеренным значениям  $y_i, x_i, i = \overline{1, n}$  зависимой  $y$  и независимой  $x$  переменных функции регрессии. Так как  $y_i$  содержит в себе погрешность, то НРК, как функция от случайного аргумента  $(x_i, y_i)$ , является случайной величиной, с найденными [3] приближениями различной точности основных числовых характеристик (ЧХ), необходимых для построения доверительного интервала.

В работе [3] оценка точности приближений ЧХ НРК осуществляется через степень исправленного выборочного среднеквадратичного отклонения  $\bar{\sigma}$  наблюдений  $y_i$  (исходных данных). Поэтому, с точностью  $\bar{\sigma}^2$   $E[\bar{\theta}^\times] = \theta$ , а с точностью  $\bar{\sigma}^3$

$$Var[\bar{\theta}^\times] = (\sigma_{\bar{\theta}^\times})^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{m_1^2} \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{(r'_\theta(x_{k_i}, \theta))^2}.$$

В данной работе на основании центральной предельной теоремы в форме Ляпунова, которая обоснована для больших объёмов ( $m_1 \geq 10$ ) исходных данных, строится доверительный интервал (1) применительно к оценке (2) по формуле

$$P\{|\bar{\theta}^\times - E[\bar{\theta}^\times]| < \rho\} = 2\Phi\left(\frac{\rho}{\sigma_{\bar{\theta}^\times}}\right) - 1 \implies \\ P\{\theta \in U(\bar{\theta}^\times, \rho)\} = 2\Phi\left(\frac{\rho \cdot m_1}{\bar{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{(r'_\theta(x_{k_i}, \theta))^2}}}\right) - 1, \quad (3)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

— функция (Лапласа) нормального стандартного распределения, а также на основании неравенства Чебышева в центрированной форме

$$P\{|\bar{\theta}^\times - E[\bar{\theta}^\times]| < \rho\} \geq 1 - \frac{Var[\bar{\theta}^\times]}{\rho^2} \implies$$

$$P\{\theta \in U(\bar{\theta}^x, \rho)\} \geq 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{m_1^2 \cdot \rho^2} \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{(r'_\theta(x_{k_i}, \theta))^2}. \quad (4)$$

Надёжность интервала, построенная по формуле (4), имеет значение  $\gamma \in [\gamma_0, 1]$ , где

$$\gamma_0 = 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{m_1^2 \cdot \rho^2} \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{(r'_\theta(x_{k_i}, \theta))^2}.$$

Анализ результатов 38-и численных экспериментов приводит к выводу о том, что вне зависимости от объёма исходных данных:

1) надёжность интервала (3), найденного по центральной предельной теореме, не противоречит надёжности  $\gamma \in [\gamma_0, 1]$  интервала (4), построенного по неравенству Чебышева;

2) если радиус  $\rho$  окрестности  $U(\bar{\theta}^x, \rho)$  точечной оценки  $\bar{\theta}^x$  больше  $\bar{\sigma}^3$ , то интервал  $U(\bar{\theta}^x, \rho)$  накрывает оцениваемый параметр  $\theta$ ;

3) относительная частота случайного события  $A = \{\text{доверительный интервал накрывает истинное значение параметра}\}$  согласуется с вычисленной по формуле (3) надёжностью доверительного интервала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Математическая статистика* / В.Б. Горянинов, И.В. Павлов, Г.М. Цветкова [и др.] – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с.
- [2] Гетманская И.В. *Интервальное оценивание нелинейной параметрической регрессии в пассивном эксперименте* / И.В. Гетманская // Таврический вестник информатики и математики. – 2021. – № 4 (53). – С. 27-40.
- [3] Гетманская И.В. *Состоятельная оценка параметра однопараметрической парной регрессии* / И.В. Гетманская // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2006. – № 3. – С. 3-11.

## Построение оптимального портфеля ценных бумаг с использованием нечётких множеств второго порядка

ЗЕМЛЯКОВА И. А.

МОиМО ИММиКН ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия)

E-mail: [izemlyakova@sfedu.ru](mailto:izemlyakova@sfedu.ru)

Принятие финансовых решений неразрывно связано с понятием неопределённости. В случае, когда следует выразить субъективное отношение к возникающей неопределённости, используют нечёткие множества первого порядка. Данный тип множеств был впервые упомянут в работе Заде [1]. В классической теории множество  $A$  может быть задано с помощью характеристической функции (функции принадлежности), заданной на универсальном множестве:

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}. \quad (1)$$

В случае нечёткого множества  $\tilde{B}$  характеристическая функция принимает не только бинарные, а любые значения на отрезке  $[0, 1]$ . Задача формирования кредитного



портфеля наименьшего риска в контексте нечётко-множественного подхода базируется на предположении о том, что доходности  $\mu_i, i = 1, \dots, n$  и ожидаемая доходность портфеля  $m$  являются нечёткими числами:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \tilde{\sigma}_{ij} \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n x_i \tilde{\mu}_i &> \tilde{m}, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\ x_i^l &\leq x_i \leq x_i^r, \quad i = 1, \dots, n \\ x_i &> 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Зачастую нечёткие множества первого типа не могут полностью описать всю имеющуюся неопределённость и обеспечить получение достоверного решения. Также введённая для данных множеств функция принадлежности практически не содержит неопределённости, что противоречит рассматриваемому понятию нечёткости. Справиться с этими проблемами могут нечёткие множества второго порядка. Нечёткое множество типа два можно представить в виде:

$$\tilde{\mu}(x) = \{((x, u), \tilde{\mu}_A^-(x, u)) : \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}.$$

Заменяем в задаче (2) нечёткие числа первого порядка на нечёткие числа второго порядка. Для решения полученной задачи нечёткого линейного программирования определим границы носителя нечёткого коэффициента целевой функции воспользуемся подходом, основанным на использовании дискретных  $\alpha$ -уровней [2]. В итоге для каждого  $\alpha$ -уровня формируется задача линейного программирования, имеющая нечёткое решение  $\tilde{x}_{ik}$ . Чёткое ожидаемое оптимальное решение, выраженное в виде вектора  $x^*$ , можно получить, используя метод дефаззификации. Данный метод позволяет преобразовывать нечёткое множество в чёткое число следующим образом:

$$x^* = \frac{\sum_{k=1}^K x_{ik} \alpha_k}{\sum_{k=1}^K \alpha_k}$$

В результате получаем чёткое ожидаемое оптимальное решение, выраженное в виде вектора  $x^*$ , состоящего из долей того или иного актива, входящего в рассматриваемый портфель.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zade L.A. *Fuzzy sets* / L.A. Zade // Information and control. – 1965. – Vol. 8, No. 3. – P. 338-353.
- [2] Стародубцев И.Ю. *Решение задачи линейного программирования с нечеткими параметрами* / И.Ю. Стародубцев, И.А. Землякова // Технические науки — от теории к практике. – 2012. – № 6-1. – С. 127-132.
- [3] Ремезова Е.М. *Нечеткие множества второго порядка: понятие, анализ и особенности применения* / Е.М. Ремезова, И.А. Землякова // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 5. – С. 435.

## Интегрирование по частям

МАРЯНИН Б. Д.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: marjaninbd@mail.ru*

СМИРНОВА С. И.

*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

*E-mail: si\_smirnova@mail.ru*

Пусть  $B$  — вещественное сепарабельное банахово пространство,  $\mu$  — конечная вещественная мера на  $B$ ,  $h : B \rightarrow B$  — векторное поле,  $S_t^h$  — интегральный поток поля,  $L_h\mu(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu(S_t^h A)$  — производная меры  $\mu$  вдоль  $h$ .

Известно, что  $\mu'_h$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$ , а

$$\frac{\mu'_h(dx)}{\mu(dx)} = \rho_\mu(h, x)$$

— логарифмическая производная  $\mu$  вдоль  $h$ .

Вторая производная меры  $\mu$  вдоль пары векторных полей  $f$  и  $g$  обозначается  $D^2\mu(f, g)$  и определяется равенством

$$D^2\mu(f, g) = L_f L_g \mu - L_{fg} \mu.$$

При этом из равенства  $\int_B D_\mu^2(f, g) dx = 0$  следует, что

$$\int_B \rho(f)\rho(g)\mu(dx) = \int_B [\rho(f'_g) - L_g\rho(f)] \mu(dx).$$

Для канонической гауссовой меры это равенство означает (при  $f = g : H_- \rightarrow H_+$ ), что

$$\int_{H_-} [(f(x), x) - \text{Tr } f'(x)]^2 \mu(dx) = \int_{H_-} [\|f\|^2 + \text{Tr}(f'(x))^2] \mu(dx).$$

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Далецкий Ю.Л. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах* / Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1983. — 383 с.
- [2] Далецкий Ю.Л. *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия* / Ю.Л. Далецкий, Я.И. Белополюская. — Киев: Выща шк., 1989. — 293 с.

## Статистические модели индекса удобочитаемости математических формул

ПАСТУХОВА Ю. И.

*Центральный экономико-математический институт РАН*

*(Москва, Россия)*

*E-mail: [pastjul@mail.ru](mailto:pastjul@mail.ru)*

Современный русский язык в последние годы претерпевает определенные изменения. Среди многих факторов, оказывающих на него значительное влияние, следует особо выделить сеть Рунет с ее информационными ресурсами и возможностями взаимодействия пользователей социальных сетей и блогинга. Особенно плотно в этот процесс вовлечена молодежь. В ее среде сформировался новый стиль общения и поэтому способность понимания печатного текста, в данном случае математического, подчас имеет отличия от восприятия этой информации их предшественниками. Проблеме простоты языка, удобочитаемости или читабельности, в разное время уделялось значительное внимание во многих странах, но в особенности в США. Для англоязычных текстов разработано немало индексов, позволяющих численно оценить простоту текста, используя удобные параметры. Русский язык с силу своих особенностей представляет сложность при интерпретации иноязычных формул читабельности текстов. Кроме того, различные области знаний требуют и различных подходов к удобочитаемости источников. Например, индекс SMOG наиболее точно оценивает сложность медицинских текстов. Индексы удобочитаемости, разработанные непосредственно для русскоязычных текстов, практически неизвестны. Как правило адаптируются индексы для англоязычных текстов. Например, индекс туманности Геннинга с поправочным коэффициентом для русского языка 0,78 имеет вид

$$0,4 \cdot (0,78 \cdot Nws + 100 \cdot Nwf),$$

где  $Nws$  — средние число слов в предложении, а  $Nwf$  — средние число слов с длиной 3 и более слогов, приходящихся на одно предложение текста. Диапазон изменения значений индекса от 1 до 20. Наиболее удобной для восприятия является шкала от 1 до 100, которую имеет исторически первый и наиболее известный индекс Рудольфа Флеша (FRE), вычисляемый по формуле:

$$FRE = 206,835 - (1,015 \cdot ASL) - (84,6 \cdot ASW).$$

Здесь  $ASL$  — средняя длина предложения в словах,  $ASW$  — средняя длина слова. Принято считать, что значения FRE около 30 соответствует научным и техническим текстам, 90 и выше — детской литературе, стандартным текстам — от 60 до 70 и 50-55 — деловым журналам и интеллектуальной литературе. Представилась полезной и интересной задачей получение индекса удобочитаемости методических и учебных текстов по различным математическим дисциплинам для студентов высших учебных заведений. Для этого студентам нескольких групп 3 курса, изучающих математическую статистику, были предложены различные фрагменты текстов по теме "Постановка задачи статистического оценивания параметров распределений". Тексты выбирались из различных источников: интернет-ресурсов, учебников и учебных пособий, известных монографий, справочной литературы. Каждый фрагмент рекомендовано было оценить двумя способами: 1 — (удобочитаемый) или 0 — (не удобочитаемый) и указать в процентах личное удобство восприятия и понимания смысла. Для выбора

параметров модели (независимых переменных) предлагалось оценить степень (слабая — 1, умеренная — 2, значительная — 3) влияние на восприятие текста следующих факторов:

1. Длинные сложные предложения
2. Обилие математических формул и символов
3. Много специальных терминов
4. Мало математических формул и символов
5. Обилие различных знаков препинания
6. Другое

Анализ полученных ответов выявил, что наибольшее влияние на восприятие предложенных текстов оказывают факторы: среднее количество слов в предложении  $x_1$  и доля математических терминов  $x_2$ . Естественно возникает мысль построить уравнение множественной регрессии вида

$$\bar{y} = k_1x_1 + k_2x_2 + b \quad \text{или} \quad \bar{y} = k_1x_1 + k_2x_2.$$

Зависимая переменная  $y$  -процент читаемости, аргументы — указанные выше факторы. Наиболее подходящей оказалась модель без свободного члена с  $R^2 = 0,886$ . Итак, можно предложить формулу индекса удобочитаемости (ИН1)

$$\text{ИН1} = 3,125x_1 + 38,962x_2.$$

В редких случаях может оказаться, что  $\text{ИН1} < 1$  или  $\text{ИН1} > 100$ . Тогда следует полагать  $\text{ИН1} = 1$  или  $\text{ИН1} = 100$  соответственно. Более перспективным видится подход, состоящий в оценивании вероятности события А — удобочитаемость текста, используя бинарные данные опроса

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{— текст признан удобочитаемым} \\ 0 & \text{— противоположный случай} \end{cases}$$

Для оценивания вероятности наступления события используется логистическая функция распределения

$$F(z) = (1 + e^{-z})^{-1}, \quad \text{где} \quad z = a_1x_1 + a_2x_2 + b$$

и метод максимального правдоподобия. Функция правдоподобия в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} L(y_1, \dots, y_n) &= \prod_{y_i=1} P(y_i=1/x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}) \times \prod_{y_i=0} P(y_i=0/x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}) = \\ &= \prod_{i=1}^n F(z_i)^{y_i} (1 - F(z_i))^{1-y_i}, \quad z_i = a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + b. \end{aligned}$$

Данный подход представляет собой logit-модель бинарного выбора, в результате расчета которой получаем оценку вероятности события

$$\hat{p} = e^{0,056x_1 + 0,647x_2} (1 + e^{0,056x_1 + 0,647x_2})^{-1}.$$

Модель хорошо описывает исходные данные, что подтверждается таблицей попаданий и промахов. Таким образом, индекс удобочитаемости (ИН2) можно вычислить по формуле

$$\text{ИН2} = \frac{\exp(0,056x_1 + 0,647x_2)}{1 + \exp(0,056x_1 + 0,647x_2)}.$$

В заключение отметим, что предложенные формулы не являются окончательными, т.к. требуются расширения исходной базы текстов и привлечение студентов разных курсов и уровней подготовки. В отличие от известных индексов удобочитаемости предложенные варианты применимы для математических (без обилия формул) и возможно технических текстов на русском языке учебно-методической направленности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зязин В.П. *О читабельности математических текстов* / В.П. Зязин, Ю.И. Пастухова // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. – 2022. – Т. 29, Вып. 3.

# СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1. Общая и спектральная теория операторов.....	3
<b>Андронов Николай Иванович</b> <i>Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)</i>	
ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА С САМОПОДОВНЫМИ СВОЙСТВАМИ.....	3
<b>Бикчентаев Айрат Мидхатович</b> <i>Казанский федеральный университет (Казань, Россия)</i>	
<b>Дарвиш Талейб Мохаммад Фирас</b> <i>Казанский федеральный университет (Казань, Россия)</i>	
<b>Муратов Мустафа Абдурешитович</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
К ТЕОРИИ НОРМИРОВАННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА ..	5
<b>Войтицкий Виктор Иванович</b> <i>Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (Москва, Россия)</i>	
<b>Цветков Денис Олегович</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
НОРМАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ МОДЕЛИ ОЛДРОЙТА	7
<b>Кудряшов Юрий Леонтьевич</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
ОБ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ САМОСОПРЯЖЁННОЙ ДИЛАТАЦИИ УЗЛА ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА .....	8
<b>Мусин Ильдар Хамитович</b> <i>ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия)</i>	
О ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬФАНДА-ШИЛОВА ТИПА $S$ .....	10
<b>Рыхлов Виктор Сергеевич</b> <i>Саратовский государственный университет (Саратов, Россия)</i>	
ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ РЕГУЛЯРНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ.....	11
<b>Третьяков Дмитрий Вадимович</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ МИНИМАЛЬНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИЛАТАЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ.....	13
<b>Bakhtigareeva Elza</b> <i>Steklov Institute of Mathematics (Moscow, Russia)</i>	
<b>Goldman Mikhail</b> <i>RUDN University (Moscow, Russia)</i>	
POINTWISE AND INTEGRAL COVERINGS AND MAJORANTS FOR CONES .....	15
<b>Tashpulatov S. M.</b> <i>Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)</i>	
SECOND FOUR-ELECTRON SINGLET IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL .....	17
<b>Safonova Tatiana Anatolievna</b> <i>Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)</i>	
ABOUT ONE REPRESENTATIONS OF THE VALUES OF THE DIRICHLET BETA FUNCTION AT EVEN POINTS .....	19

Секция 2. Секция для молодых учёных и обучающихся....	22
<b>Авсянкин Олег Геннадиевич</b> Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)	
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.....	22
<b>Гайбарян Сусанна Арутюновна</b> Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)	
<b>Зубов Леонид Михайлович</b> Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)	
НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВИНТОВЫХ ДИСЛОКАЦИЙ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ДАВЛЕНИЕМ ..	24
<b>Корзунина Алина Антоновна</b> Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия)	
ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ОМОНИМОВ В РУССКОЯЗЫЧНЫХ ТЕКСТАХ.....	26
<b>Краснов Максим Григорьевич</b> ФГБОУ ВО ЧелГУ (Челябинск, Россия)	
МЕТОД НЬЮТОНА И МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ .....	27
<b>Мирончук Алена Игоревна</b> ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет" (Донецк, Россия)	
ИЗГИБ ПЛИТЫ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЯДОМ ТРЕЩИН.....	28
<b>Муратов Мустафа Абдурешитович</b> Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)	
<b>Овсиенко Олег Денисович</b> Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)	
РЯДЫ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА И МАРЦИНКЕВИЧА .....	30
<b>Ноговищева Виктория Юрьевна</b> ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирск, Россия)	
<b>Прокудин Дмитрий Алексеевич</b> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия)	
О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА МНОГОКОМПОНЕНТНЫЙ СЛУЧАЙ .....	32
<b>Пилипенко Ирина Сергеевна</b> ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (Донецк, Россия)	
<b>Волчков Валерий Владимирович</b> ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (Донецк, Россия)	
АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ В $L_p$ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ИНДИКАТОРОВ.....	34
Секция 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения и динамические системы.....	36
<b>Гринес Вячеслав Зигмундович</b> НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)	

**Жужома Евгений Викторович** *НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)*

**Медведев Владислав Сергеевич** *НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)*

РАСТЯГИВАЮЩИЕСЯ АТТРАКТОРЫ СИСТЕМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АКСИО-  
МЕ А..... 36

**Курина Галина Алексеевна** *Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)*

**Нгуен Тхи Хоай** *Научный университет Вьетнамского национального университета (Ханой, Вьетнам)*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ  
ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ШАГОМ В КРИТИЧЕСКОМ  
СЛУЧАЕ..... 36

**Осипенко Георгий Сергеевич** *Филиал МГУ в Севастополе (Севастополь, Россия)*

КОМПЬЮТЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
(ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КНИГИ)..... 38

**Сахаров Александр Николаевич** *Нижегородский государственный аграрно-технологический университет (Нижний Новгород, Россия)*

ОСОБЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ-  
НЫХ УРАВНЕНИЙ..... 39

**Шамолин Максим Владимирович** *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)*

ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ..... 41

**Цехан Ольга Борисовна** *УО Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Гродно, Беларусь)*

О РОБАСТНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ  
ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ..... 43

**Югай Лев Павлович** *Узбекский государственный университет физической культуры и спорта (Чирчик, Узбекистан)*

О КОНФЛИКТНОМ УПРАВЛЕНИИ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫМИ ОБЪЕКТАМИ..... 45

**Andreeva Irina Alexeevna** *Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)*

**Efimova Tatiana Olegovna** *Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)*

**Kondratieva Natalia Vasilievna** *Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)*

HIERARCHY LEVELS OF SUBFAMILIES FOR SOME CLASS OF POLYNOMIAL  
DYNAMIC SYSTEMS..... 47

**Секция 4. Дифференциальные уравнения в частных про-  
изводных..... 49**

**Андронов Иван Викторович** *Михайловская военная артиллерийская академия и Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)*

ЗАДАЧА ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ДИФРАКЦИИ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ ЭЛЛИП-  
СОИДЕ..... 49

**Гаркуша Кристина Сергеевна** *Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*



**Лукьяненко Владимир Андреевич** *Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

**Гребенева Анастасия Андреевна** *Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (Москва, Россия)*

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЧЭФИ-ИНФАНТЕ С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА ..... 51

**Гребенева Анастасия Андреевна** *Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (Москва, Россия)*

**Лукьяненко Владимир Андреевич** *Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ..... 53

**Грибкова Ольга Алексеевна** *Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

**Загора Дмитрий Александрович** *Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)*

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ..... 55

**Гришина Галина Владимировна** *МГТУ имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия)*

РЕГУЛЯРНОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С СОСТАВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ..... 56

**Жижина Елена Анатольевна** *Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН (Москва, Россия)*

**Пятницкий Андрей Львович** *Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН (Москва, Россия)*

**Слоуц Владимир Анатольевич** *Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)*

**Суслина Татьяна Александровна** *Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)*

УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ЛЕВИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ ..... 58

**Лиманский Дмитрий Владимирович** *Институт прикладной математики и механики (Донецк, Россия)*

УСЛОВИЯ ПОДЧИНЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА ..... 60

**Мамонтов Александр Евгеньевич** *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия)*

**Прокудин Дмитрий Алексеевич** *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия)*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ БАРО- ТРОПНОЙ СМЕСИ .....	61
<b>Панов Евгений Юрьевич</b> <i>Новгородский государственный университет (Вели- кий Новгород, Россия)</i>	
ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПОЛУОСИ .....	63
<b>Слоущ Владимир Анатольевич</b> <i>Санкт-Петербургский государственный уни- верситет (Санкт-Петербург, Россия)</i>	
ЗАДАЧА УСРЕДНЕНИЯ ВО ВНУТРЕННИХ ЛАКУНАХ .....	65
<b>Фордук Карина Викторовна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Рос- сия)</i>	
КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГО-ДЕМПФИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА .....	67
<b>Хазова Юлия Александровна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Рос- сия)</i>	
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА .	68
<b>Belishev Michail Igorevich</b> <i>St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute (St.Petersburg, Russia)</i>	
<b>Karazeeva Natalia Anatolyevna</b> <i>St.Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, (St. Petersburg, Russia)</i>	
TOEPLITZ MATRICES IN THE BC-METHOD .....	69
<b>DekhkonoV Farrukh Nuriddin ogli</b> <i>Namangan State University (Namangan, Uzbekistan)</i>	
<b>Usmonova Gulshanoy Mamurjon kizi</b> <i>Namangan State University (Namangan, Uzbekistan)</i>	
ON THE CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION .....	70
<b>DekhkonoV Farrukh Nuriddin ogli</b> <i>Namangan State University (Namangan, Uzbekistan)</i>	
CONTROL PROBLEM FOR A HEAT EQUATION WITH INVOLUTION AND NEUMANN CONDITION .....	72
<b>Krasnoschekikh Gleb Vitalievich</b> <i>Donetsk State University (Donetsk, Russia)</i>	
<b>Volchkov Vitaliy Vladimirovich</b> <i>Donetsk State University (Donetsk, Russia)</i>	
THE $\infty$ -RADIИ THEOREM ON THE BESSEL-KINGMANN HYPERGROUP .....	73
<b>Plyshevskaya Svetlana Petrovna</b> <i>V.I. Vernadsky Crimean Federal University (Sim- feropol, Russia)</i>	
LOCAL DYNAMICS OF CAHN-HILLIARD EQUATION .....	75
<b>Volchkova Natalya Petrovna</b> <i>Donetsk National Technical University (Donetsk, Russia)</i>	
<b>Volchkov Vitaliy Vladimirovich</b> <i>Donetsk State University (Donetsk, Russia)</i>	
TESTING ANALYTICITY OF A FUNCTION IN A BALL OF $\mathbb{C}^n$ .....	77

**Секция 5. Математическое моделирование, численный анализ и приближенные методы** ..... 79

**Глухов Антон Александрович** ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет" (Донецк, Россия)

**Сторожев Сергей Валериевич** ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет" (Донецк, Россия)

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ТРЕХФАКТОРНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ** ..... 79

**Гребенева Ярослава Андреевна** Крымский инженерно-педагогический институт имени Февзи Якубова (Симферополь, Россия)

**Первун Ольга Евгеньевна** Крымский инженерно-педагогический институт имени Февзи Якубова (Симферополь, Россия)

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИБЛИОТЕК RUTHON ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ** ..... 81

**Зеленчук Павел Анатольевич** Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

**Цибулин Вячеслав Георгиевич** Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЦЕНАРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ НА НЕОДНОРОДНОМ ДВУМЕРНОМ АРЕАЛЕ** ..... 82

**Ливанова Вера Андреевна** Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

**Лукьяненко Владимир Андреевич** Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

**НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ** ..... 84

**Лукьяненко Дмитрий Владимирович** Национальный исследовательский институт «МИФИ» (Москва, Россия)

**Рындя Сергей Михайлович** Национальный исследовательский институт «МИФИ» (Москва, Россия)

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯРИТОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОГРАММИРУЕМОГО ПОЛЯРИТОННОГО ЛАЗЕРА** ..... 85

**Лукьянова Елена Александровна** Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

**Бочко Анна Юрьевна** Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

**ОБ ЭФФЕКТИВНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПОНЕНТНОЙ СЕТИ ПЕТРИ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ** ..... 87

**Макаров Олег Олегович** Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

**Козлова Маргарита Геннадьевна** Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)

ПРИЛОЖЕНИЕ МНОГОАГЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ К ЗАДАЧЕ ДОСТАВКИ ТОВАРОВ .....	88
<b>Нгуен Быу Хоанг</b> Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)	
<b>Селищев Александр Андреевич</b> Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)	
<b>Цибулин Вячеслав Георгиевич</b> Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)	
СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ И ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ .....	90
<b>Нескородев Роман Николаевич</b> ФГБОУ ВО "Донецкий государственный университет" (Донецк, Россия)	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ .....	92
<b>Переварюха Андрей Юрьевич</b> Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН (Санкт-Петербург, Россия)	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИНВАЗИОННОГО ПРОЦЕССА .....	94
<b>Пикулин Сергей Владимирович</b> ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия)	
<b>Безродных Сергей Игоревич</b> ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия)	
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГорова — ПЕТРОВСКОГО — ПИСКУНОВА С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ .....	96
<b>Рассадин Александр Эдуардович</b> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия)	
<b>Бугров Владимир Олегович</b> Нижегородское математическое общество (Нижний Новгород, Россия)	
<b>Рубцов Максим Игоревич</b> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия)	
ЗАКОН ГОМПЕРЦА И ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫЕ ВОЛНЫ ИНФЕКЦИИ .....	98
<b>Степович Михаил Адольфович</b> Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского (Калуга, Россия)	
<b>Туртин Дмитрий Витальевич</b> Ивановский государственный университет (Иваново, Россия)	
<b>Картанов Артем Александрович</b> ООО «КАМИН-Классик» (Калуга, Россия)	
<b>Калманович Вероника Валерьевна</b> Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского (Калуга, Россия)	
<b>Головань Вера Леонидовна</b> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)	
О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НАГРЕВА ОДНОРОДНОЙ МИШЕНИ ПУЛЬСИРУЮЩИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ .....	100
<b>Стонякин Фёдор Сергеевич</b> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия)	
<b>Лушко Есения Андреевна</b> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия)	
<b>Аблаев Сейдамет Серверович</b> Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)	

СУБГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ С ШАГОМ ПОЛЯКА ДЛЯ СЛАБО ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ С ОСТРЫМ МИНИМУМОМ И АДДИТИВНОЙ НЕТОЧНОСТЬЮ В ЗНАЧЕНИЯХ СУБГРАДИЕНТА .....	102
<b>Чубатов Андрей Алексеевич</b> <i>Научно-технологический университет «Сириус» (Сочи, Россия)</i>	
ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОВИ-БЕЛЛМАНА НА РЫНКЕ ХЕСТОНА НА ОСНОВЕ ПРЯМЫХ-ОБРАТНЫХ СДУ И НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ .....	104
<b>Секция 6. Дискретная математика и информатика. Методика преподавания математики в высшей школе и история математики .....</b>	<b>106</b>
<b>Баран Инна Викторовна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
МЕЖДУНАРОДНАЯ МЕДАЛЬ ЗА ВЫДАЮЩИЕСЯ ОТКРЫТИЯ В МАТЕМАТИКЕ .	106
<b>Белялов Мемет Хайриевич</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
<b>Пашкова Юлия Сергеевна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
"МЕТОД КАРТОЧЕК" ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА ГЕОМЕТРИИ УЧАЩИМИСЯ 11 КЛАССОВ И ВЫПУСКНИКАМИ КОЛЛЕДЖЕЙ .....	107
<b>Воблый Виталий Антониевич</b> <i>ВИНИТИ РАН (Москва, Россия)</i>	
О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ПОМЕЧЕННЫХ ГЛАДКИХ ГРАФОВ .....	108
<b>Орлов Игорь Владимирович</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
АБЕЛЕВСКИЕ ПРЕМИИ И ПРОГРЕСС СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ .....	109
<b>Парфенова Надежда Борисовна</b> <i>Псковский государственный университет (Псков, Россия)</i>	
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ВЛИЯНИЯ ЗНАЧИМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ (ПРЕДИКТОРОВ) НА ИССЛЕДУЕМЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ И ИХ СОСТАВЛЯЮЩИЕ .....	111
<b>Пашкова Юлия Сергеевна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
<b>Смирнова Светлана Ивановна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
<b>Терентьев Павел Сергеевич</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
КРЫМСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ .....	113
<b>Чуксина Екатерина Владимировна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	
ВОСТРЕБОВАННОСТЬ МАССОВОГО ОТКРЫТОГО ОНЛАЙН-КУРСА ПО ЦИФРОВОЙ ДОСТУПНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОНТЕНТА .....	114

<b>Секция 7. Теория вероятностей и математическая статистика. Случайные процессы. Финансовая математика.....</b>		<b>116</b>
<b>Буфетов Александр Игоревич</b> <i>Математический институт имени В.А. Стеклова РАН (Москва, Россия)</i>	<b>ЭКСПОНЕНТА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ .....</b>	<b>116</b>
<b>Гетманская Ирина Васильевна</b> <i>Московский государственный технический университет связи и информатики (Москва, Россия)</i>	<b>ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ОЦЕНИВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ .....</b>	<b>117</b>
<b>Землякова Ирина Александровна</b> <i>МОиМО ИММиКН ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия)</i>	<b>ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ ВТОРОГО ПОРЯДКА .....</b>	<b>119</b>
<b>Марянин Борис Давидович</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>		
<b>Смирнова Светлана Ивановна</b> <i>Физико-технический институт, ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского" (Симферополь, Россия)</i>	<b>ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ .....</b>	<b>121</b>
<b>Пастухова Юлия Ивановна</b> <i>Центральный экономико-математический институт РАН (Москва, Россия)</i>	<b>СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНДЕКСА УДОБОЧИТАЕМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....</b>	<b>122</b>

Научное издание

Сборник материалов  
международной конференции  
*КРОМШ-2024*

XXXV Крымская Осенняя  
Математическая Школа-симпозиум  
Н.Д. Копачевского по спектральным  
и эволюционным задачам

Кача (Севастополь), Российская Федерация,  
7 – 16 сентября 2024 г.

*В авторской редакции*

Формат 60x84/8. Усл. печ. л. 15,58. Тираж 80 экз. Заказ № 09А/04.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТИПОГРАФИЯ «АРИАЛ».  
295015, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Севастопольская, 31-а/2,  
тел.: +7 978 71 72 901, e-mail: it.arial@yandex.ru, сайт: arialprint.ru

Отпечатано с оригинал-макета в типографии «ИТ «АРИАЛ».  
295015, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Севастопольская, 31-а/2,  
тел.: +7 978 71 72 901, e-mail: it.arial@yandex.ru, сайт: arialprint.ru