САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Т. Л. Ткаченко, В.И. Яковлева

Решение задач по физике
(Второе начало термодинамики. Циклы)

Санкт-Петербург
2023

УДК 536.4
ББК 22.365

Содержание одобрено Учебно-методической комиссией по УГСН 03.00.00 Физика и астрономия и УГСН 14.00.00 Ядерная энергетика и технологии
Выписка 4 из Протокола № 05/2.1/03-03-2 от 27 февраля 2023 г.

Рецензенты:
Д.ф.-м.н. профессор кафедры молекулярной биофизики и физики полимеров СПбГУ Войтылов Владислав Викторович
К.ф.-м.н. доцент кафедры общей физики – 1 СПбГУ
Балабас Михаил Владленович

Авторы: Т.Л. Ткаченко, В.И. Яковлева.

Решение задач по физике (Второе начало термодинамики. Циклы)
(// СПб.: Изд-во ВВМ, 2023 – 35 с.

ISBN

Данное пособие предназначено для студентов первого курса бакалавриата физического факультета СПбГУ, обучающихся по направлениям: «Физика», «Прикладная физика и математика», «Инженерно-ориентированная физика» , «Электромагнитные и акустические процессы». Содержание пособия опирается на материал лекций по курсу «Молекулярная физика и термодинамика». Программа данной дисциплины включает не только изучение физических законов, но и освоение методов применения этих законов к решению конкретных задач. В пособии представлены задачи с решениями по теме «Второе начало термодинамики. Циклы». Решение большинства задач доведено до численных результатов. Данное пособие имеет целью максимально упростить работу студентов по освоению учебного материала по курсу «Молекулярная физика и термодинамика».

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое методическое пособие содержит примеры подробного решения задач по теме «Термодинамика», традиционно изучаемой студентами физического факультета СПбГУ в рамках курса «Молекулярная физика и термодинамика».

Пособие состоит из двух частей, каждая из которых может рассматриваться как отдельная методическая разработка, включающая определённые вопросы поведения *макросистем*, то есть систем, состоящих из большого числа частиц. При рассмотрении этих вопросов мы используем так называемый термодинамический подход к изучаемым явлениям.

Термодинамика рассматривает происходящие в системах процессы с энергетической точки зрения. В основе этой науки лежат важные законы, так называемые «Начала термодинамики».

Первое начало термодинамики является выражением закона сохранения энергии через изменения макроскопических параметров системы [1]. Второе начало термодинамики позволяет судить о направлении процессов, которые могут происходить в действительности [1]. Оно, совместно с первым началом, позволяет также установить множество точных количественных соотношений между различными макроскопическими параметрами тел в состоянии термодинамического равновесия. Все такие точные соотношения получили общее название термодинамических соотношений.

В предлагаемом пособии «Второе начало термодинамики. Циклы» рассматриваются *круговые процессы (циклы)*, когда система в результате всех изменений возвращается в исходное состояние. Определяются коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины и холодильный коэффициент.

Основоположником второго начала термодинамики считается французский физик и инженер Сади Карно, но ему не удалось дать ясную и четкую формулировку второго начала термодинамики. Это было сделано только в 1850–1851 гг. независимо друг от друга немецким физиком Рудольфом Клаузиусом и шотландским физиком Вильямом Томсоном (лордом Кельвином). Они сформулировали основной постулат, выражающий второе начало термодинамики, и вывели из него главнейшие следствия [2].

Приведём формулировку постулата второго начала термодинамики, сделанную Вильямом Томсоном (1851 год): «*Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет охлаждения теплового резервуара*». Под тепловым резервуаром понимают тело или систему тел, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия и обладающую запасом внутренней энергии. Но тепловой резервуар сам макроскопической работы не совершает, а может только передавать внутреннюю энергию другому телу или системе тел. Если последняя система производит работу за счет внутренней энергии теплового резервуара, то она называется в термодинамике *рабочим телом*. Таким образом, согласно Томсону, *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет уменьшения внутренней энергии теплового резервуара.*

Устройство, в котором в результате прямого кругового цикла тепло превращается в работу, называется тепловой машиной. При этом нагреватель отдает количество теплоты Q_1, холодильник получает количество теплоты Q_2, и на производство работы A идет количество теплоты, равное $A = Q_1 - Q_2$. Коэффициентом полезного действия (КПД) тепловой машины называется величина $\eta = A/Q_1$.

Устройство, в котором реализуется обратный цикл, называется холодильной машиной. В обратном цикле теплота берется от холодильника и передается нагревателю. Для протекания обратного цикла *внешние тела* должны совершать работу A. В результате нагреватель получает количество теплоты Q_1, холодильник отдает количество теплоты Q_2, при этом работа внешних сил равняется $A = Q_1 - Q_2$. Холодильным коэффициентом называется величина $\varepsilon = Q_2/ A$.

Из различных круговых процессов особое значение в термодинамике имеет круговой процесс, или цикл Карно. Это квазистатический процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, в котором систему можно приводить в тепловой контакт с двумя тепловыми резервуарами (нагревателем и холодильником), имеющими постоянные температуры T_1 и T_2. Тепловой резервуар с более высокой температурой T_1 называется нагревателем, а с более низкой температурой T_2 – холодильником. Цикл Карно рассматривается в задачах 1–6 и 8.

Наряду с циклом Карно в теории тепловых процессов используются и другие процессы. Например, цикл Клапейрона, состоящий из двух изотерм и двух изохор, или цикл Отто, состоящий из двух адиабат и двух изохор, и многие другие. В задачах 7, 9–19 рассматриваются именно такие циклы.

Доказанная самим Карно его вторая теорема утверждает, что из всех мыслимых термодинамических циклов, протекающих при данных предельных температурах T_1 и T_2, цикл Карно имеет самый высокий КПД [1].

Величина $1 - T_2/T_1$ определяет верхний предел КПД любой тепловой машины. Всякая периодически действующая тепловая машина может превратить в работу только часть тепловой энергии. И эта часть тем больше, чем выше температура T_1 нагревателя и меньше температура холодильника T_2.

Одним из важнейших соотношений в термодинамике, полученным для произвольного кругового процесса (обратимого или необратимого), является неравенство Клаузиуса: $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ ($\frac{\delta Q}{T}$ – элементарное приведенное количество теплоты). Для квазистатического процесса неравенство Клаузиуса переходит в равенство: $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$. В настоящем пособии это неравенство используется при решении задач 13–19.

Уровень сложности разбираемых задач [3] соответствует тому, который предназначается для аудиторной практики студентов первого курса физического факультета СПбГУ.

Основные законы и формулы.

- Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A, \tag{1}$$

где Q – количество тепла, сообщённое системе или отданное ею; ΔU – изменение её внутренней энергии; A – работа системы против внешних сил.

- Первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{2}$$

Здесь dU – дифференциал внутренней энергии, являющейся функцией состояния системы, δQ – элементарное количество тепла, полученное системой от внешних тел, δA – элементарная работа, совершенная системой. Символ δ используется для того, чтобы подчеркнуть, что элементарное количество тепла или элементарная работа не являются дифференциалами функций состояния, как в случае внутренней энергии. В дальнейшем могут быть использованы обозначения: dQ для элементарного количества тепла и dA для элементарной работы, когда это не вызовет недоразумения, например, в формуле: $dA = PdV$.

- Уравнение состояния идеального газа:

$$PV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT, \tag{3}$$

где ν – число молей газа, m – масса газа, μ – молярная масса газа, P и V – давление и объем данной массы газа, T – термодинамическая температура газа, R – универсальная газовая постоянная. Для одного моля уравнение приобретает вид:

$$PV_0 = RT,$$

где V_0 – объем одного моля.

- Изменение внутренней энергии идеального газа:

$$\Delta U = \nu\, C_V \Delta T = \frac{m}{\mu}\, C_V \Delta T = \frac{m}{\mu}\, C_V (T_2 - T_1), \tag{4}$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме, T_1 и T_2 – соответственно, начальная и конечная температуры газа.

- Молярные теплоёмкости газов при постоянном объёме C_V и постоянном давлении C_P:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_P = C_V + R, \quad C_P = \frac{i+2}{2} R, \tag{5}$$

где i – число степеней свободы молекул газа, R – универсальная газовая постоянная.

- Уравнение политропического процесса:

$$PV^n = \text{Const}, \quad (6)$$

где n – показатель политропы:

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V} \quad (7)$$

и C – молярная теплоемкость процесса, являющаяся постоянной.

- Молярная теплоемкость газа при политропическом процессе:

$$C = R\left[\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{n-1}\right] = \frac{(n-\gamma)R}{(n-1)(\gamma-1)}, \quad (8)$$

где n – показатель политропы, γ – показатель адиабаты $\left(\gamma = \frac{C_P}{C_V}\right)$.

- Элементарная работа, совершаемая газом при малом изменении его объёма:

$$dA = PdV. \quad (9)$$

- Работа газа при изобарном процессе:

$$A = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) \text{ или } A = P(V_2 - V_1); \quad (10)$$

при изотермическом процессе:

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} \text{ или } A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{P_2}{P_1}; \quad (11)$$

при адиабатическом процессе:

$$A = \frac{m}{\mu}C_V(T_1 - T_2) \quad (12)$$

$$\text{или } A = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{P_1V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]; \quad (13)$$

при политропическом процессе:

$$A = \frac{m}{\mu}\frac{R}{n-1}(T_1 - T_2) \quad (14)$$

$$\text{или } A = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{P_1V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \quad (15)$$

где T_1, T_2, V_1, V_2 – соответственно, начальные и конечные температура и объём газа.

- Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (16)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой, Q_2 – количество теплоты, отданное системой, A – работа, совершаемая за цикл.

- Коэффициент холодильной машины (холодильный коэффициент):

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{|A|} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}, \quad (17)$$

где Q_1– количество теплоты, отданное системой, Q_2 – количество теплоты, полученное системой.

- Коэффициент полезного действия (КПД) цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (18)$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

- Холодильный коэффициент обратного цикла Карно:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (19)$$

- Неравенство Клаузиуса:

$$\oint \frac{\delta Q}{\mathrm{T}} \leq 0, \quad (20)$$

где δQ – элементарное количество теплоты, полученное системой.

Для ***квазистатического*** кругового процесса выражение (20) преобразуется в равенство и носит название равенства Клаузиуса.

Обозначения используемых физических величин

T – термодинамическая температура (1 Кельвин = 1 К);

p – давление газа (СИ: 1 Паскаль = 1 Па = 1 Н/м^2, СГС: 1 дина/см^2);

V – объем, занимаемый газом (СИ: 1 м^3, СГС: 1 см^3);

m – масса вещества (СИ: 1 кг, СГС: 1 г);

μ – масса одного моля вещества (молярная масса);

$N_{\text{А}} = 6.022 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$ – число частиц в одном моле (число Авогадро);

$\nu = \frac{m}{\mu}$ – число молей вещества, имеющего массу m;

Q – количество тепла, полученное системой (или отданное ею) (СИ: 1 Джоуль = 1 Дж = 1 кг·м^2/с^2= 1 Н· м, СГС: 1 эрг = 1 г·см^2/с^2 = 1 дин· см);

A – работа системы (СИ: 1 Дж, СГС: 1 эрг);

U – внутренняя энергия системы (СИ: 1 Дж, СГС: 1 эрг);

ΔU – изменение внутренней энергии системы;

C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме (СИ: 1 Дж/(моль ·К), СГС: 1 эрг/(моль ·К));

C_P – молярная теплоемкость при постоянном давлении (СИ: 1 Дж/(моль· К), СГС: 1 эрг/(моль ·К));

$k_{\text{В}} = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К} = 1.38 \cdot 10^{-16}\ \text{эрг/К}$ – постоянная Больцмана;

$R = k_{\text{В}} N_{\text{А}} = 8.314\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ – молярная газовая постоянная (универсальная газовая постоянная).

Задача 1.

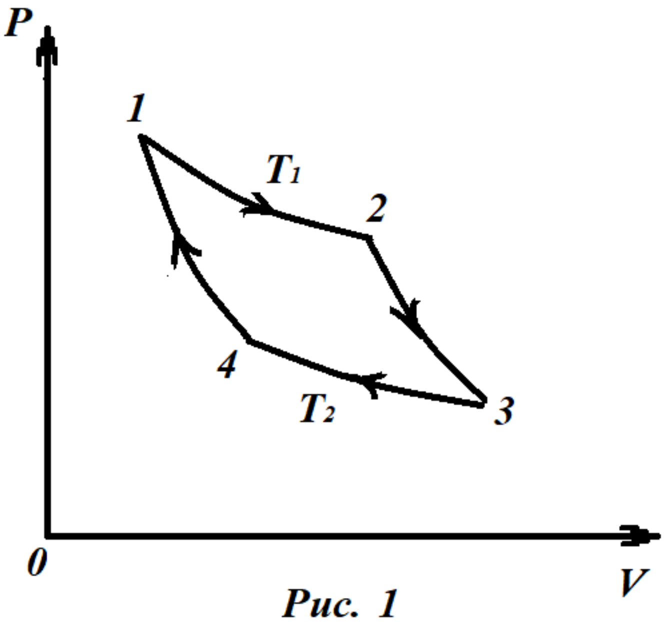

Рис. 1

Идеальный газ, совершающий цикл Карно (рис.1), 80% количества теплоты, полученной от нагревателя, отдаёт холодильнику. Количество теплоты, полученное от нагревателя, равно 7 кДж. Определить:

1) термический КПД цикла,

2) работу A, совершенную при полном цикле.

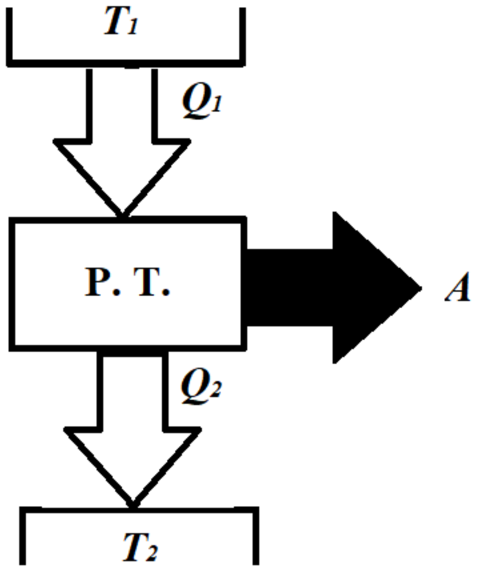

Рис.2

Решение.

На рис.2 изображена схема тепловой машины. В качестве рабочего тела в тепловой машине используется идеальный газ, который совершает цикл Карно. Для нахождения КПД цикла η и совершенной работы A воспользуемся формулой (16):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad A = \eta Q_1,$$

$$\eta = \frac{Q_1(1-k)}{Q_1} = 1 - k,$$

где $Q_2 = kQ_1$, $k = 80\% = 0.8$.

Сделаем численный расчёт:

1) $\eta = 1 - k = 1 - 0.8 = 0.2 \approx 20\%$;

2) $A = 0.2 \cdot 7 \cdot 10^3$ (Дж) $= 1.4 \cdot 10^3$ (Дж).

Задача 2.

Идеальный газ совершает цикл Карно (рис.1). Газ получил от нагревателя количество теплоты 5 кДж и совершил работу 2 кДж Определить:

1) термический КПД цикла η,

2) отношение температур нагревателя T_1 и холодильника T_2.

Решение.

Рабочим телом тепловой машины (рис.2) является идеальный газ, совершающий прямой цикл Карно (рис.1). В результате этого газ получает от нагревателя теплоту Q_1 и совершает положительную работу A. При этом часть теплоты газ, естественно, отдает холодильнику. Для определения КПД цикла η и отношения температур нагревателя T_1 и холодильника T_2 воспользуемся формулами (16) и (18):

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta = 1 - \frac{A}{Q_1}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1-\eta}.$$

Подсчитаем величины η и $\frac{T_1}{T_2}$:

1) $\eta = \frac{2\cdot 10^3}{5\cdot 10^3} = 0.4 \approx 40\%$,

2) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1-0.4} \approx 1.67$.

Напомним формулировку второй теоремы Карно и сделаем соответствующий вывод. Вторая теорема Карно: «***Коэффициент полезного действия всякой тепловой машины не может превосходить коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно с теми же самыми температурами нагревателя и холодильник***» [1]. Таким образом, эта теорема позволяет оценить верхний предел КПД тепловой машины. Из результатов данной задачи следует, что при отношении температуры нагревателя T_1 к температуре холодильника T_2, равном 1.67, КПД такой машины не может превосходить 40 %.

P.S. В дальнейшем будет рассмотрен важный вопрос, в каком случае КПД тепловой машины повысится сильнее: при повышении температуры нагревателя или при понижении температуры холодильника на одну и ту же величину (задача № 6).

Задача 3.

Идеальный газ совершает цикл Карно (рис.1), термический КПД которого равен 0.25. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 200 Дж.

Решение.

Рассмотрим цикл Карно, представленный на рис.1, воспользуемся формулами (1), (11), (12) и введем следующие обозначения.

Процесс *1-2* – это процесс изотермического расширения при температуре T_1*:*

$$A_{12} = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad A_{12} = Q_1 > 0.$$

Процесс *2-3* – это процесс адиабатического расширения:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = -C_V(T_2 - T_1).$$

Процесс *3-4* – это процесс изотермического сжатия при температуре T_2:

$$A_{34} = \nu RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = -\nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}, \; A_{34} = Q_2 < 0.$$

Процесс *4-1* – это процесс адиабатического сжатия:

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -C_V(T_1 - T_2).$$

Суммарная работа за цикл равняется:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = A_{12} + A_{34}. \qquad (3.1)$$

В свою очередь (формула (16)):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \text{ и } A = \eta Q_1 = \eta \mathrm{A}_{12}. \qquad (3.2)$$

Подставляем (3.2) в (3.1) и получаем:

$$A_{12} + A_{34} = \eta A_{12}, \quad A_{34} = A_{12}(\eta - 1).$$

Получим численное значение работы изотермического сжатия:

$$A_{34} = 2 \cdot 10^2(0.25 - 1) \approx -1.5 \cdot 10^2 \approx -150 \text{ (Дж)}.$$

Как и следовало ожидать, работа изотермического сжатия, равная количеству теплоты Q_2, которое рабочее тело (идеальный газ) ***передает*** холодильнику, является величиной отрицательной.

Задача 4.

Идеальный газ совершает цикл Карно (рис.1). Температура нагревателя $T_1 = 600$ К, холодильника $T_2 = 200$ К. Работа изотермического расширения газа составляет 3 кДж. Определить:

1) термический КПД цикла,

2) количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику.

Решение.

Воспользуемся выражениями (16) и (18) для вычисления КПД цикла Карно, приравняем их и получим:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad Q_2 = Q_1\frac{T_2}{T_1}.$$

В задаче №3 показано, что количество теплоты Q_1 равно работе изотермического расширения, следовательно:

$$Q_1 = A_{12} \quad \text{и} \quad Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} = A_{12} \frac{T_2}{T_1}.$$

Выполним численный расчет величин η и Q_2:

1) $\eta = 1 - \frac{200}{600} \approx 0.66 \approx 66\%$,

2) $Q_2 = 3 \cdot 10^3 \frac{1}{3} = 1 \cdot 10^3$ (Дж).

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что в формуле (16) для расчета КПД тепловой машины в числителе, равном $(Q_1 - Q_2)$, в качестве величины Q_2 нужно использовать ее ***модуль*** $|Q_2|$.То есть более "корректная" запись формулы (16) могла бы выглядеть так: $\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$.

Таким образом, проведенный расчет дал нам величину $|Q_2|$. В действительности, количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии, величина отрицательная и равная $Q_2 = -1 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 5.

Тепловую машину, работающую по циклу Карно с КПД $\eta = 10\%$, используют при тех же тепловых резервуарах как холодильную машину (рис.3). Найти её холодильный коэффициент ε.

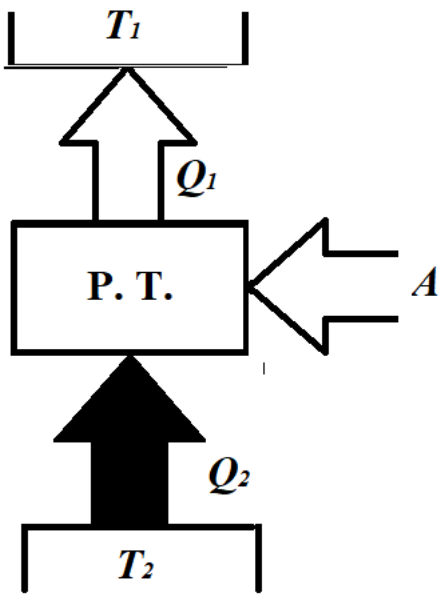

Рис.3

Решение.

Напомним, что тепловая машина может работать как холодильная машина, если цикл Карно (рис.1) запустить в *обратном* направлении. При этом, расширение рабочего тела (вещества) будет происходить на процессах *1-4* и *4-3*, а сжатие – на процессах *3-2* и *2-1*. Совершая расширение *4-3*, рабочее тело будет получать от холодильника количество теплоты Q_2, при сжатии *2-1* оно будет отдавать нагревателю количество теплоты Q_1. То есть при обратном цикле Карно Q_1 – величина отрицательная, а величина Q_2 – положительная. При этом *над холодильной машиной будет произведена работа,* равная (по модулю):

$$|A| = |-Q_1 + Q_2| = Q_1 - Q_2. \qquad (5.1)$$

Воспользуемся выражением (17) для холодильного коэффициента ε и выражением (16) для КПД тепловой машины η :

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{|A|},$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Найдем связь между КПД тепловой машины η и холодильным коэффициентом ε:

$$A = \eta Q_1, \quad Q_1 - Q_2 = \eta Q_1, \; Q_2 = Q_1(1-\eta),$$

$$\varepsilon = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1}{\eta} - 1. \qquad (5.2)$$

Подставим в (5.2) величину η, равную 0,1, и получим:

$$\varepsilon = \frac{1-0.1}{0.1} = 9.$$

Из анализа выражения (5.2) следует, что, поскольку величина η всегда меньше единицы, величина ε, соответственно, больше единицы. И чем меньше КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, тем больше коэффициент холодильной машины, работающей при тех же тепловых резервуарах.

Задача 6.

В каком случае КПД цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

Решение.

Запишем выражение для КПД цикла Карно через температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2 (формула (18)):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Если увеличивать температуру нагревателя на величину ΔT, то выражение для КПД примет следующий вид:

$$\eta_1 = \frac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T}.$$

Если уменьшать температуру холодильника на ту же самую величину ΔT, то получим следующее выражение:

$$\eta_2 = \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T)}{T_1}.$$

Рассмотрим два варианта решения: оценим отношение величин η_1 и η_2 и разность величин η_1 и η_2.

Вариант 1:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\frac{T_1+\Delta T-T_2}{T_1+\Delta T}}{\frac{T_1-(T_2-\Delta T)}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1+\Delta T} \Rightarrow \eta_1 < \eta_2.$$

Следовательно, КПД цикла Карно повысится больше, если охлаждать холодильник.

Вариант 2:

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{(T_1 + \Delta T - T_2)(T_1 + \Delta T) - T_1(T_1 + \Delta T - T_2)}{T_1(T_1 + \Delta T)} =$$
$$= \frac{T_1^2 - T_1T_2 + T_1\Delta T + T_1\Delta T - T_2\Delta T + \Delta T - T_1^2 - T_1\Delta T + T_1T_2}{T_1(T_1 + \Delta T)} =$$
$$= \frac{\Delta T(T_1-T_2)+\Delta T^2}{T_1(T_1+\Delta T)} > 0 \Rightarrow \eta_1 < \eta_2 \ .$$

Получили то же самое соотношение между η_1 и η_2 и, следовательно, КПД цикла Карно повысится больше, если охлаждать холодильник.

Задача 7.

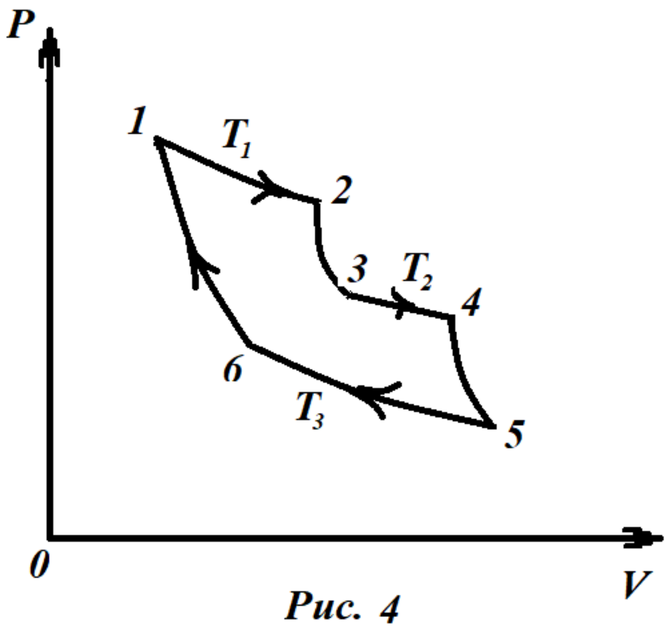

Рис. 4

Идеальный газ совершает цикл, состоящий из чередующихся изотерм и адиабат (рис.4). Температуры, при которых происходят изотермические процессы, равны T_1, T_2 и T_3. Найти КПД такого цикла, если при каждом изотермическом расширении объём газа увеличивается в одно и тоже число раз, равное n.

Решение.

Для нахождения КПД цикла, изображенного на рис. 4, необходимо найти суммарное количество теплоты Q_1, которое идеальный газ получает, и количество теплоты Q_2, которое газ отдает. Так, газ получает тепло на процессах изотермического расширения *1-2* и *3-4*, а отдает тепло на процессе изотермического сжатия *5-6*. Заметим, что на адиабатах, входящих в цикл, количество теплоты равняется нулю.

На изотермах количество теплоты равняется работе ($\Delta U = 0$), воспользуемся формулой (11) и запишем:

$Q_1 = A_{12} + A_{34} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = R(T_1 + T_2)\ln n$ –тепло, которое газ получает,

$Q_2 = A_{56} = RT_3 \ln\frac{V_6}{V_5} = -RT_3 \ln n^2 = -2RT_3 \ln n$ – тепло, которое газ отдает. *Ниже будет показано, что справедливо равенство* $\frac{V_5}{V_6} = n^2$. *(***)*

Величину КПД найдем по формуле (16): $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.

Тогда: $\eta = \frac{R(T_1+T_2-2T_3)\ln n}{R(T_1+T_2)\ln n} = \frac{T_1+T_2-2T_3}{T_1+T_2}$.

Воспользуемся известным соотношением между температурой и объемом на адиабате $TV^{\gamma-1} = Const$ [2] и дадим пояснение к выводу равенства $\frac{V_5}{V_6} = n^2$ $(***)$:

$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ – соотношение между T и V на адиабате 2-3, (7.1)

$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_3 V_5^{\gamma-1}$ – соотношение между T и V на адиабате 4-5, (7.2)

$T_3 V_6^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ – соотношение между T и V на адиабате 6-1. (7.3)

Уравнение (7.1) делим на уравнение (7.3):

$$\frac{T_1}{T_1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3}\left(\frac{V_3}{V_6}\right)^{\gamma-1}. \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.2) делим на уравнение (7.1):

$$\frac{T_2}{T_2}\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_1}\left(\frac{V_5}{V_2}\right)^{\gamma-1}. \qquad (7.5)$$

Перемножим левые и правые части уравнений (7.4) и (7.5) и учтём соотношение между объёмами V_2 и V_3 из уравнения (7.1):

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_1} \cdot \left(\frac{V_3}{V_6}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{V_5}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{V_5}{V_6}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_5}{V_6}\right)^{\gamma-1}.$$

В результате получим: $\frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_5}{V_6}$, $\frac{V_5}{V_6} = n^2$.

Задача 8.

Один моль одноатомного идеального газа ($\gamma = \frac{5}{3}$) совершает в тепловой машине цикл Карно между тепловыми резервуарами с температурами $t_1 = 127°\text{C}$ и $t_2 = 27°\text{C}$. Наименьший объём газа в ходе цикла $V_1 = 5$ л, наибольший – $V_3 = 20$ л. Какую работу A совершает эта машина за один цикл? Сколько тепла Q_1 берёт она от высокотемпературного резервуара за один цикл? Сколько тепла Q_2 поступает за цикл в низкотемпературный резервуар?

Решение.

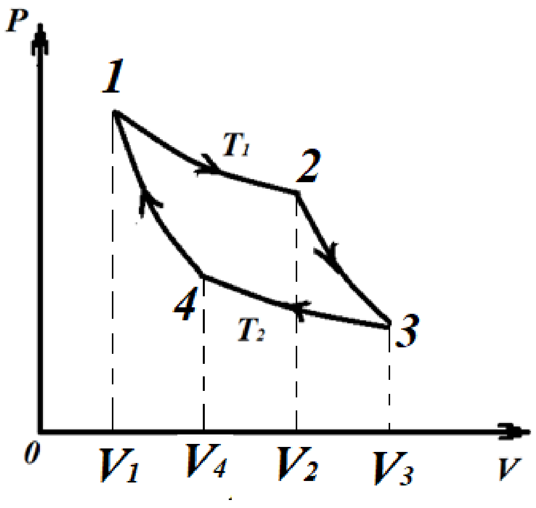

Рис.5

На рис.5 изображен цикл Карно с соответствующими обозначениями объемов и температур. Минимальный объём – V_1, максимальный объём – V_3. Машина берёт тепло Q_1 от высокотемпературного резервуара тогда, когда идеальный газ совершает процесс изотермического расширения *1-2* и, следовательно (11):

$$Q_1 = A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (8.1)$$

Выразим объем V_2 через известный объем V_3, воспользовавшись соотношениями между температурами и объемами на адиабате *2-3* [2]:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \qquad V_2 = V_3\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (8.2)$$

Подставим выражение для V_2 из (8.2) в (8.1) и получим:

$$Q_1 = RT_1 \ln\left[\frac{V_3}{V_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = \frac{RT_1}{\gamma-1}\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (8.3)$$

Тепло Q_2 поступает в низкотемпературный резервуар при изотермическом сжатии идеального газа (процесс *3-4*) и, следовательно (11):

$$Q_2 = A_{34} = RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = -RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}. \qquad (8.4)$$

Выразим объем V_4 через известный объем V_1, воспользовавшись соотношениями между температурами и объемами на адиабате *4-1* [2]:

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow V_4 = V_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (8.5)$$

Подставим выражение для V_4 из (8.5) в (8.4) и получим:

$$Q_2 = -RT_2 \ln\left[\frac{V_3}{V_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = -\frac{RT_2}{\gamma-1}\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (8.6)$$

За один цикл Карно машина совершает работу A, равную сумме величин Q_1 и Q_2 (с учетом знака), так как, во-первых, на адиабатах рабочее тело (идеальный газ) не получает (отдает) тепло и, во-вторых, внутренняя энергия газа в результате кругового процесса остается неизменной. Таким образом, получаем:

$$A = Q_1 + Q_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1}\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right] - \frac{RT_2}{\gamma-1}\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right] \quad (8.7)$$

или $$A = \frac{R(T_1-T_2)}{\gamma-1}\ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (8.8)$$

Сделаем численный расчет:

$$Q_1 = \frac{8.3\cdot 400\cdot 3}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\cdot(4)^{\frac{2}{3}} \approx 3175 \text{ (Дж)},$$

$$Q_2 = -\frac{8.3\cdot 300\cdot 3}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\cdot(4)^{\frac{2}{3}} \approx -2380 \text{ (Дж)},$$

$$A \approx 3175 - 2380 = 795 \text{ (Дж)}.$$

Задача 9.

Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из адиабаты, изобары и изохоры. Найти КПД цикла, если при адиабатическом процессе объём идеального газа:

а) увеличивается в n раз; б) уменьшается в n раз.

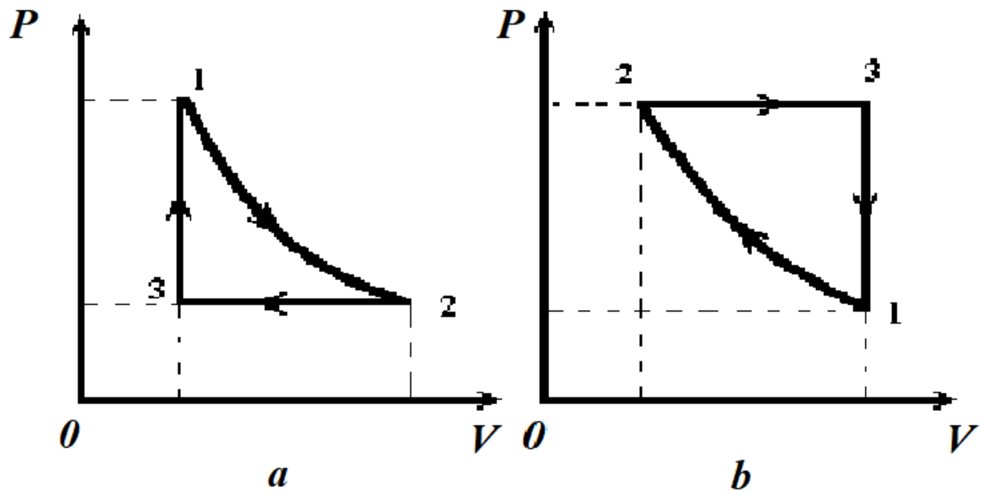

Рис. 6

Решение.

На рис.6а представлена схема прямого цикла, соответствующего условию а) $V_2 = nV_1$. На этом рисунке участок *1-2* соответствует адиабате, участок *2-3* – изобаре, а участок *3-1* – изохоре. Будем считать, что в процессе участвует один моль идеального газа (в данном случае это упрощение не сказывается на общности рассуждений). Для определения η используем формулу (16). В рассматриваемом процессе на участке *1-2* $Q = 0$. На участке *2-3* тепло отдается (над газом совершается работа при постоянном давлении P_2, и газ охлаждается). В соответствии с (16) обозначаем его Q_2. По первому началу термодинамики (1):

$$Q_2 = \Delta U + P_2 \Delta V, \quad \text{где } \Delta U = C_V \Delta T.$$

Из условия задачи известен показатель адиабаты γ, который связывает между собой термодинамические параметры P, V и T на адиабате [2], в частности:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}. \qquad (9.1)$$

Теплоёмкость C_V можно выразить через величину γ следующим образом:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \Rightarrow \gamma C_V = C_P = C_V + R \Rightarrow C_V + R = \gamma C_V \Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \qquad (9.2)$$

Тогда:

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{R \Delta T}{\gamma - 1}. \qquad (9.3)$$

Используя уравнение состояния (3) для одного моля газа для изобарического процесса, имеем:

$$P_2 \Delta V = R \Delta T. \qquad (9.4)$$

Тогда:

$$Q_2 = \frac{P_2 \Delta V}{\gamma - 1} + P_2 \Delta V = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2 (V_1 - V_2) = \frac{\gamma P_2 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{\gamma P_2 V_1}{\gamma - 1}(1 - n). \qquad (9.5)$$

Обратим внимание, что полученная величина $Q_2 < 0$, поскольку $n > 1$.

На участке *3-1* газ только получает тепло: при изохорическом процессе, чтобы увеличить давление газа, его необходимо нагреть. Это тепло, в соответствии с (16), обозначаем Q_1. В этом процессе $(V = Const)$ работа не совершается:

$$Q_1 = \Delta U. \qquad (9.6)$$

Из уравнения (3) для одного моля идеального газа для изохорического процесса получаем:

$$V_1 \Delta P = R \Delta T. \qquad (9.7)$$

Учитывая (9.3) и (9.7), для Q_1 получаем:

$$Q_1 = \frac{V_1 \Delta P}{\gamma - 1} = \frac{P_2 V_1}{\gamma - 1}\left(\frac{P_1}{P_2} - 1\right) = \frac{P_2 V_1}{\gamma - 1}(n^\gamma - 1). \quad (9.8)$$

Полученные абсолютные значения величин Q_2 и Q_1 подставляем в (16) и окончательно для η получаем следующий ответ:

$$\eta = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{n^\gamma - 1}. \quad (9.9)$$

Теперь рассмотрим случай б), в котором $V_1 = nV_2$. Соответствующий процесс изображен на рис.6b. Участок *1-2* – адиабатический процесс. Для этого процесса, как всегда, $Q = 0$. Участок *2-3* соответствует изобарическому процессу. Для того чтобы газ увеличил свой объем при том же давлении, ему необходимо получить тепло извне. В этом случае Q_1 равняется:

$$Q_1 = \frac{P_2 \Delta V}{\gamma - 1} + P_2 \Delta V = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2 (V_1 - V_2) = \frac{\gamma P_2 V_2}{\gamma - 1}(n - 1).$$

Учитывая (9.1) и соотношение объемов $V_1 = nV_2$, можно записать:

$$P_2 V_2 = P_1 \frac{V_1^\gamma}{V_2^\gamma} \cdot \frac{V_1}{n} = P_1 V_1 \frac{n^\gamma}{n} = P_1 V_1 n^{\gamma - 1}.$$

И, окончательно, для Q_1 получаем:

$$Q_1 = \frac{\gamma P_1 V_1}{\gamma - 1} n^{\gamma - 1}(n - 1). \quad (9.10)$$

На участке *3-1* давление газа уменьшается при том же объеме, что может произойти только при его охлаждении, то есть на этом участке газ тепло отдает. Тогда:

$$Q_2 = \frac{V_1 \Delta P}{\gamma - 1} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}(1 - n^\gamma). \quad (9.11)$$

Как и следовало ожидать, это тепло «отрицательно», поскольку на пути *3-1* рабочее тело тепло отдает. Поэтому при подстановке в (16) мы берем его абсолютную величину:

$$|Q_2| = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}(n^\gamma - 1). \quad (9.12)$$

Таким образом, для η с учетом (9.10) и (9.12) получим:

$$\eta = 1 - \frac{P_1 V_1}{P_1 V_1} \frac{(n^\gamma - 1)}{n^{\gamma - 1}\gamma(n-1)} = 1 - \frac{(n^\gamma - 1)}{\gamma(n-1)n^{\gamma - 1}}. \quad (9.13)$$

Как видно из формул (9.9) и (9.13) КПД цикла при заданном n зависит от рода газа (γ) и, естественно, для одинаковых n и γ от вида цикла.

Следует заметить, что величины Q_1 и Q_2 можно сосчитать просто через теплоемкости рассматриваемых процессов. Так, для изобарического процесса $Q = C_P \Delta T$, для изохорического процесса $Q = C_V \Delta T$ и, наконец, $Q = C \Delta T$, где $C = 0$, если процесс адиабатический.

Задача 10.

Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы, адиабаты и политропы, причем, изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Найти КПД такого цикла, если температура T в его пределах изменяется в k раз.

Решение.

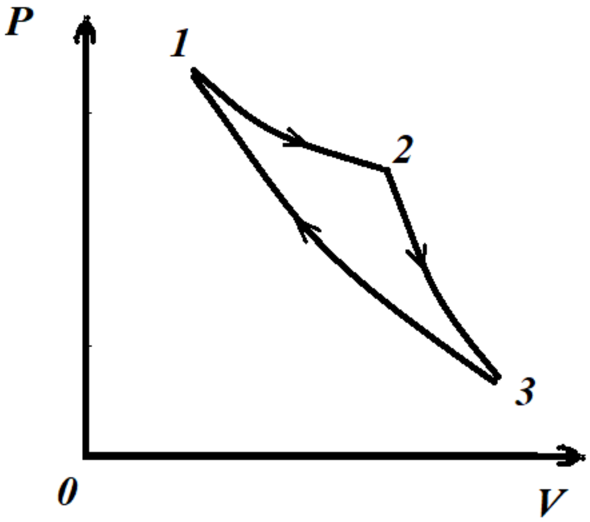

Рис. 7

Рассмотрим процессы *1-2* (изотерма), *2-3* (адиабата) и *3-1* (политропа) (рис. 7) и рассчитаем для каждого из них работу A и количество тепла Q (1). Заметим, что на изотерме *1-2* температура максимальна и равна T_1, а в состоянии *3* температура минимальна и равна T_2.

Для вычисления работ A_{12}, A_{23} и A_{31} воспользуемся формулами (11), (12) и (14).

Процесс *1-2* – изотермический, следовательно,

$$Q_{12} = A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0. \qquad (10.1)$$

Величина Q_{12} положительная, поэтому на изотерме *1-2* система получает тепло.

Процесс *2-3* – адиабатический, следовательно,

$$A_{23} = C_V(T_1 - T_2) = \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) \text{ и } Q_{23} = 0, \qquad (10.2)$$

где $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$ (формула (9.2) из задачи № 9).

Процесс *3-1* – политропический с показателем политропы n. Отсюда следует, что

$$A_{31} = \frac{R}{n-1}(T_2 - T_1). \qquad (10.3)$$

Используя формулы (1), (4) и (10.3), получим для количества теплоты на политропе *3-1* следующее выражение:

$$Q_{31} = A_{31} + \Delta U_{31} = \frac{R(T_2-T_1)}{n-1} + \frac{R(T_1-T_2)}{\gamma-1} = R(T_1 - T_2)\left[\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{n-1}\right]. \quad (10.4)$$

Исходя из формулировки Томсона постулата второго начала термодинамики [1] следует, что величина Q_{31} должна быть отрицательной, то есть на политропе *3-1* тепло от системы должно отводиться. Отсюда следует, что политропический процесс *3-1* идёт при отрицательной теплоёмкости (формула (8)):

$$C = R\left[\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{n-1}\right] < 0.$$

Из последнего неравенства получается следующее соотношение для γ и n: $1 < n < \gamma$.

Таким образом, можно сделать вывод, что круговой процесс, представленный на рис.7, возможен только для таких политропических процессов, у которых показатель политропы n лежит в диапазоне между 1 и γ.

В выражение (10.1) для Q_{12} на изотерме *1-2* входит логарифм отношения объемов $\ln\frac{V_2}{V_1}$. Выразим его через известное соотношение между температурами T_1 и T_2 . Для этого сначала выразим отношения между объемами и температурами на адиабате *2-3* и политропе *3-1* [2]:

на адиабате *2-3*: $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1},$ (10.5)

на политропе *3-1*: $T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_3^{n-1} \;\Rightarrow\; \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{n-1} = \frac{T_1}{T_2}.$ (10.6)

Используя выражения (10.5) и (10.6), получим:

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{10.7}$$

Тогда:

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right] \ln\frac{T_1}{T_2}. \tag{10.8}$$

Далее, подставив выражение (10.8) в (10.1), для количества теплоты Q_{12} получим:

$$Q_{12} = RT_1\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right] \ln\frac{T_1}{T_2} > 0.$$

Количество теплоты $Q_{31} < 0$, и в формуле (16) для вычисления КПД цикла будет использоваться *по модулю*.

И окончательно, для коэффициента полезного действия цикла по формуле (16) получаем:

$$\eta = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}} = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}} \;,$$

$$\eta = 1 - \frac{R(T_1 - T_2)\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right]}{RT_1 \ln\frac{T_1}{T_2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right]} = 1 - \frac{k-1}{k \ln k}.$$

Задача 11.

Найти КПД обратимого цикла, изображенного на рис.8, как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температур вещества в этом цикле. Цикл совершает машина с идеальным газом в качестве рабочего тела. Найти также количество тепла, получаемое рабочим веществом на каждом этапе цикла.

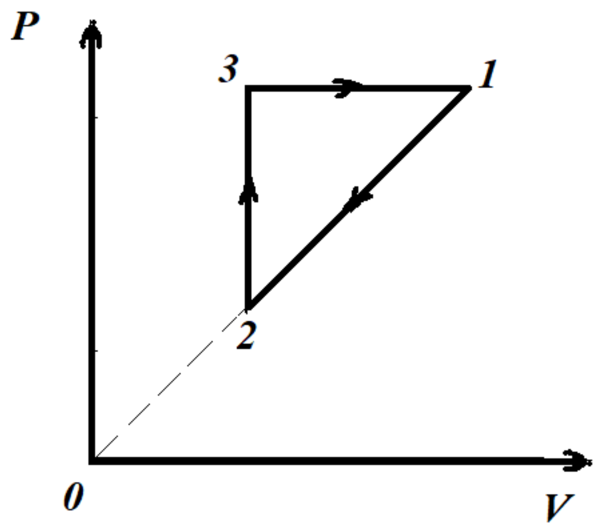

Рис.8

Решение.

Введем следующие обозначения для параметров системы в состоянии 1: P_1, V_1, T_1; в состоянии 2: P_2, V_2, T_2; в состоянии 3: P_3, V_3, T_3. Отметим, что $V_2 = V_3$; $P_1 = P_3$ и $T_1 > T_3 > T_2$.

Рассмотрим процессы *1-2*, *2-3*, *3-1* и рассчитаем для них значения работы A и количества тепла Q. Для вычисления работ A_{12} и A_{31} воспользуемся формулами (14) и (10), а для вычисления количества тепла – формулой $Q = C\Delta T$.

Процесс *1-2* – политропический, так как из рисунка видно, что давление пропорционально объёму *(P=kV)*. Следовательно, $PV^{-1} = Const$ и:

$$n = -1 \tag{11.1}$$

Показатель политропы n связан с теплоёмкостями следующим соотношением (7):

$$n = \frac{C_P - C}{C_V - C}. \tag{11.2}$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{C_P - C}{C_V - C} = -1 \text{ и } C = \frac{C_P + C_V}{2}. \tag{11.3}$$

Заметим, что для идеального газа всегда считается известной C_V, а, следовательно, и C_P.

Используем полученные соотношения (11.1) и (11.3) для вычисления работы и количества теплоты в политропическом процессе 1-2:

$$A_{12} = \frac{R}{n-1}(T_1 - T_2) = -\frac{R}{2}(T_1 - T_2) = \frac{R}{2}(T_2 - T_1), \tag{11.4}$$

$$Q_{12} = C(T_2 - T_1) = \frac{C_P + C_V}{2}(T_2 - T_1) < 0. \tag{11.5}$$

Величина Q_{12} отрицательная, следовательно, на политропе *1-2* система тепло отдаёт.

Процесс *2-3* – изохорический, поэтому:

$$A_{23} = 0, \tag{11.6}$$

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) > 0. \tag{11.7}$$

Процесс *3-1* – изобарический. Отсюда следует, что:

$$A_{31} = P_3(V_1 - V_3) = R(T_1 - T_3), \tag{11.8}$$

$$Q_{31} = C_P(T_1 - T_3) > 0. \tag{11.9}$$

Величины Q_{23} и Q_{31} положительные, следовательно, на изохоре *2-3* и изобаре *3-1* система получает тепло.

Установим связь между температурами T_3, T_1 и T_2.

На изохоре *2-3*:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{T_3}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_3}{T_2}\ . \tag{11.10}$$

На политропе *1-2*:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_2}. \tag{11.11}$$

На изобаре *3-1*:

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_3}. \tag{11.12}$$

Из полученных соотношений (11.10 – 11.12) вытекает связь:

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{T_3}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \sqrt{T_1 T_2}. \tag{11.13}$$

Для вычисления КПД цикла воспользуемся формулой (16) и получим:

$$\eta = \frac{(Q_{23} + Q_{31}) - Q_{12}}{(Q_{23} + Q_{31})} = 1 - \frac{Q_{12}}{Q_{23} + Q_{31}}. \qquad (11.14)$$

В формуле (11.14) отрицательная величина Q_{12} берется *по модулю* и, окончательно, получаем:

$$\eta = 1 - \frac{(C_P + C_v)(T_1 - T_2)}{2\left[C_v\left(\sqrt{T_1T_2} - T_2\right) + C_P\left(T_1 - \sqrt{T_1T_2}\right)\right]}. \qquad (11.15)$$

Задача 12.

Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изобары *1-2*, адиабаты *2-3* и изотермы *3-1* (рис.9). Найти КПД машины как функцию максимальной T_1 и минимальной T_2 температур рабочего вещества, используемого в этом цикле. Найти также количество тепла, получаемое рабочим веществом на каждом этапе цикла.

Решение.

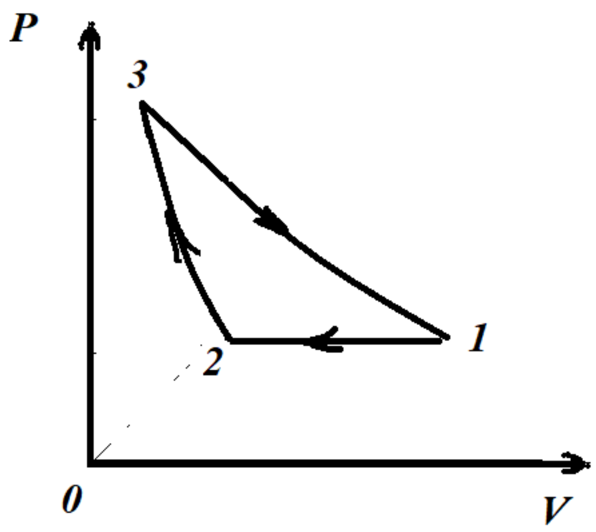

Рис.9

Рассчитаем для процессов *1-2*, *2-3* и *3-1* работу и количества теплоты, используя выражения (10), (11) и (12).

Процесс *1-2* – изобарический, следовательно:

$$A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1),$$

$$Q_{12} = C_P(T_2 - T_1) < 0.$$

Величина Q_{12} отрицательная, поэтому на изобаре *1-2* рабочее тело отдаёт тепло.

Процесс *2-3* – адиабатический, следовательно, $Q_{23} = 0$,

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = C_V(T_1 - T_2) = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1), \qquad (12.1)$$

где $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ (см. формулу (9.2)).

Процесс *3-1* – изотермический, откуда следует, что

$$Q_{31} = A_{31} = RT_1 \ln\frac{V_1}{V_3} > 0. \qquad (12.2)$$

В формуле (12.2) перейдём от соотношения между объёмами к соотношению между давлениями:

$$Q_{31} = RT_1 \ln\frac{V_1}{V_3} = RT_1 \ln\frac{P_3}{P_1} = RT_1 \ln\frac{P_3}{P_2} > 0\ . \qquad (12.3)$$

Воспользуемся известным соотношением между T и V на адиабате *2-3* [2]:

$T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_3^{\gamma-1}$ или $P_2T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_3T_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ ($V = \frac{RT}{P}$ для одного моля вещества).

Следовательно,

$$\frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \qquad (12.4)$$

Подставляем (12.4) в (12.3) и получаем:

$$Q_{31} = A_{31} = \frac{RT_1\cdot\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_1}{T_2} = C_V\gamma T_1\ln\frac{T_1}{T_2} = C_PT_1\ln\frac{T_1}{T_2} > 0. \qquad (12.5)$$

Величина Q_{31} положительная, поэтому на изотерме *3-1* рабочее тело получает тепло.

Таким образом, используя формулу (16), для КПД машины получим следующее выражение:

$$\eta = \frac{Q_{31} - Q_{12}}{Q_{31}} = 1 - \frac{Q_{12}}{Q_{31}} = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1\ln\frac{T_1}{T_2}}\,. \qquad (12.6)$$

Напомним, что в формуле (16) для расчёта КПД тепловой машины в числителе $(Q_{31} - Q_{12})$ используется модуль величины $|Q_{12}|$.

Задача 13.

Доказать, что пересечение двух квазистатических адиабат невозможно (это противоречит второму началу).

Решение.

Доказательство строим от противного. Пусть две квазистатические адиабаты ***AC*** и ***BC*** пересекаются в одной точке ***C***. Изобразим их на рис.10 в координатах *P*,*V*.

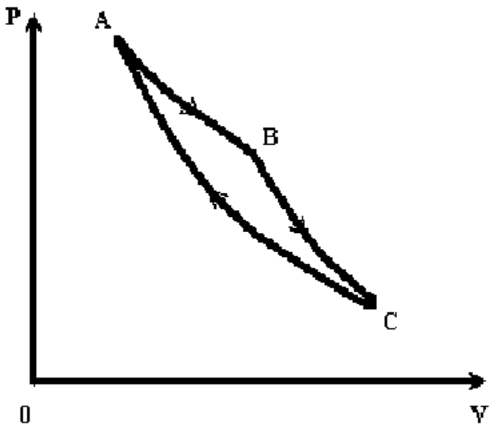

Рис.10

Проведём изотерму ***AB***, по которой систему можно перевести из состояния ***A*** в состояние ***B***. ***ABCA*** – обратимый циклический процесс. При совершении такого процесса система получает тепло Q только на участке $\boldsymbol{AB}$. Работа системы в результате такого процесса определяется площадью фигуры $\boldsymbol{ABC}$. Эта работа положительна ($A > 0$). Так как в результате совершения такого процесса внутренняя энергия системы не изменилась, по первому началу $A = Q$, следовательно, и $Q > 0$. Таким образом, мы получили, что тепло, полученное системой, полностью перешло (преобразовалось) в работу, а это противоречит второму началу. Следовательно, квазистатические адиабаты пересекаться не могут.

Задача 14.

Тепловая машине совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с несколькими тепловыми резервуарами (нагревателями и холодильниками). Пользуясь неравенством Клаузиуса, показать, что КПД такой машины не может превосходить величину $\frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}$, где $T_{\text{макс}}$ – максимальная температура, а $T_{\text{мин}}$ – минимальная температура тепловых резервуаров, с которыми машина обменивается теплом.

Решение.

Запишем неравенство Клаузиуса (20):

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \tag{14.1}$$

Представим его через два интеграла:

$$\int \frac{\delta Q_1}{T_1} + \int \frac{\delta Q_2}{T_2} \leq 0, \tag{14.2}$$

где δQ_1 – элементарное тепло, получаемое машиной в круговом процессе от нагревателя, а δQ_2 – элементарное тепло, отдаваемое холодильником. (Заметим, что δQ_1 – величина положительная, а δQ_2 – отрицательная).

Если вместо T_1 поставить максимальную $T_{\text{мин}}$, а вместо T_2 минимальную температуру $T_{\text{макс}}$, то неравенство (14.2) только усилится. Следовательно,

$$\frac{1}{T_{\text{макс}}} \int \delta Q_1 \leq -\frac{1}{T_{\text{мин}}} \int \delta Q_2. \tag{14.3}$$

Или, после интегрирования:

$$\frac{Q_1}{T_{\text{макс}}} \leq -\frac{Q_2}{T_{\text{мин}}}, \tag{14.4}$$

где Q_1 – полное количество тепла, полученное машиной от нагревателей, а Q_2 – полное количество тепла, отданное холодильникам.

Из неравенства (14.4) следует, что

$$\frac{T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}} \leq -\frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (14.5)$$

Вычтем единицу из правой и левой части неравенства (14.5) и получим следующее соотношение:

$$\frac{T_{\text{мин}}-T_{\text{макс}}}{T_{\text{макс}}} \leq -\left(\frac{Q_2+Q_1}{Q_1}\right). \qquad (14.6)$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\frac{Q_2+Q_1}{Q_1} \leq \frac{T_{\text{макс}}-T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}. \qquad (14.7)$$

Или $\eta \leq \frac{T_{\text{макс}}-T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}$, что и требовалось доказать.

Задача 15.

Показать, что для любого вещества политропа может пересекать изотерму не более, чем в одной точке (рис.11).

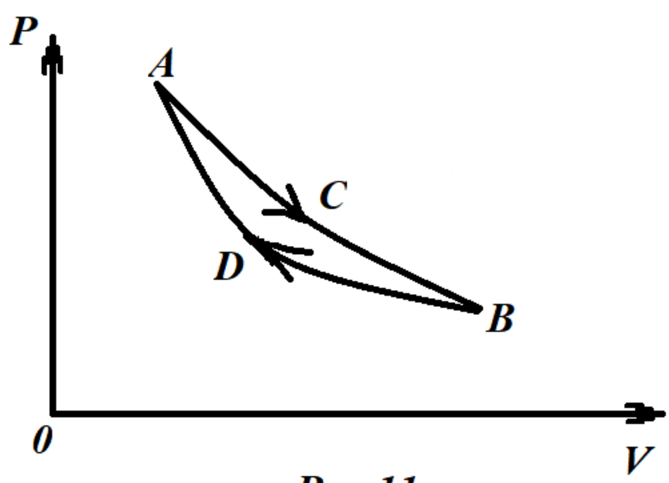

Рис.11

Решение

Допустим противоположное. Предположим, что ***A*** и ***B*** – это соседние точки, в которых политропа (***BDA***) пересекается с изотермой (***ACB***).

Применим к циклу ***ACBDA*** равенство Клаузиуса (20), поскольку цикл является квазистатическим:

$$\oint_{ACBDA} \frac{\delta Q}{T} = 0. \qquad (15.1),$$

На политропе ***BDA*** теплоёмкость C постоянна, поэтому

$$\int_{BDA} \frac{\delta Q}{T} = C \int_{T_B}^{T_A} \frac{\delta T}{T} = 0. \qquad (15.2)$$

Интеграл обращается в нуль, так как $T_A = T_B$ (точки ***A*** и ***B*** лежат на изотерме).

На изотерме ***ACB:***

$$\int_{ACB} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_{ACB} \delta Q = \frac{Q}{T}. \qquad (15.3)$$

Таким образом, равенство Клаузиуса сводится к следующему выражению:

$$\oint_{ACBDA}\frac{\delta Q}{T}=\int_{ACB}\frac{\delta Q}{T}+\int_{BDA}\frac{\delta Q}{T}=\frac{Q}{T}=0\ , \qquad (15.4)$$

где Q – теплота, полученная системой.

Поскольку для кругового процесса $Q=A$, значит площадь цикла ***ACBDA***, являющаяся работой, равна нулю. Это может быть тогда и только тогда, когда между точками ***A*** и ***B*** политропа и изотерма пересекаются между собой. Это противоречит предположению, что ***A*** и ***B*** соседние точки пересечения политропы с изотермой.

Задача 16.

Цикл состоит из двух изохор и двух изобар (рис.12). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями C_V и C_P температуры в точках *1, 2, 3, 4* связаны соотношением $T_1\cdot T_3=T_2\cdot T_4$.

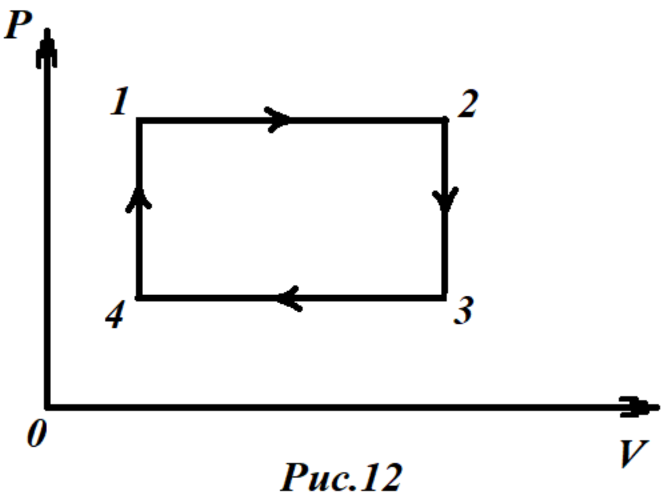

Рис.12

Решение.

Цикл *1-2-3-4-1* – круговой квазистатический, поэтому применим к нему равенство Клаузиуса (20):

$$\oint_{12341}\frac{\delta Q}{T}=0. \qquad (16.1)$$

Представим этот интеграл как сумму двух интегралов на изобарах *1-2* и *3-4* и двух интегралов на изохорах *2-3* и *4-1:*

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{C_P dT}{T}+\int_{T_2}^{T_3}\frac{C_V dT}{T}+\int_{T_3}^{T_4}\frac{C_P dT}{T}+\int_{T_4}^{T_1}\frac{C_V dT}{T}=0\ . \qquad (16.2)$$

Отсюда получаем:

$$C_P\ln\frac{T_2}{T_1}+C_V\ln\frac{T_3}{T_2}+C_P\ln\frac{T_4}{T_3}+C_V\ln\frac{T_1}{T_4}=0\ . \qquad (16.3)$$

Проведя соответствующие преобразования, приходим к следующим выражениям:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_P}\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{C_V}\left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{C_P}\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{C_V}=1\ , \qquad (16.4)$$

$$T_2^{(C_P-C_V)} \cdot T_4^{(C_P-C_V)} = T_1^{(C_P-C_V)} \cdot T_3^{(C_P-C_V)} \ . \qquad (16.5)$$

Отсюда получаем искомый результат:

$$T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_4 \ .$$

Задача 17.

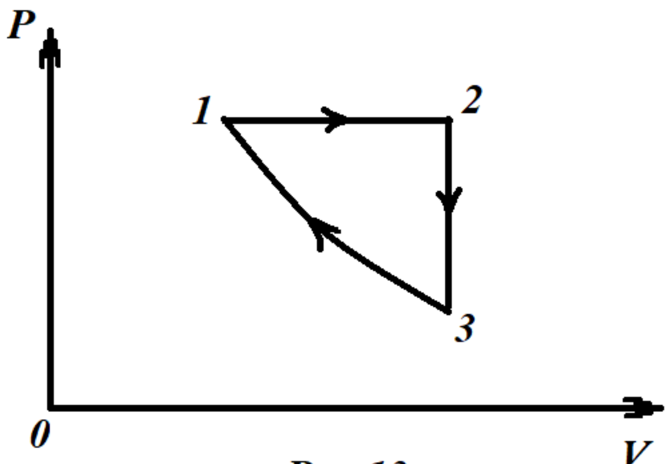

Рис.13

Цикл состоит из изобары *1-2*, изохоры *2-3* и адиабаты *3-1* (рис.13). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями C_V и C_P температуры в точках *1, 2, 3* связаны соотношениями $\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}$.

Решение.

Применим к круговому квазистатическому циклу *1-2-3-1* равенство Клаузиуса (20):

$$\oint_{1231} \frac{\delta Q}{T} = 0 \ . \qquad (17.1)$$

Представим этот интеграл как сумму трёх интегралов: на изобаре *1-2*, на изохоре *2-3* и на адиабате *3-1*. Тогда:

$$\int_1^2 \frac{C_P dT}{T} + \int_2^3 \frac{C_V dT}{T} + \int_3^1 \frac{\delta Q}{T} = 0 \ . \qquad (17.2)$$

Последний интеграл равенства (17.2) равен нулю, так как на адиабате $\delta Q = 0$.

Следовательно,

$$C_P \ln\frac{T_2}{T_1} + C_V \ln\frac{T_3}{T_2} = 0 \qquad (17.3)$$

или

$$C_P \ln\frac{T_2}{T_1} = C_V \ln\frac{T_2}{T_3} \ . \qquad (17.4)$$

Отсюда получаем: $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_P} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{C_V} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma}$, где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

Задача 18.

Определить работу цикла, совершаемого любым веществом, и состоящего из изотермы *1-2*, политропы *2-3* и адиабаты *3-1* (рис.14). Известно, что теплоемкость тела на политропе *2-3* равна C, а температуры на изотерме *1-2* и в состоянии *3* равны, соответственно, T_1 и T_3.

Решение.

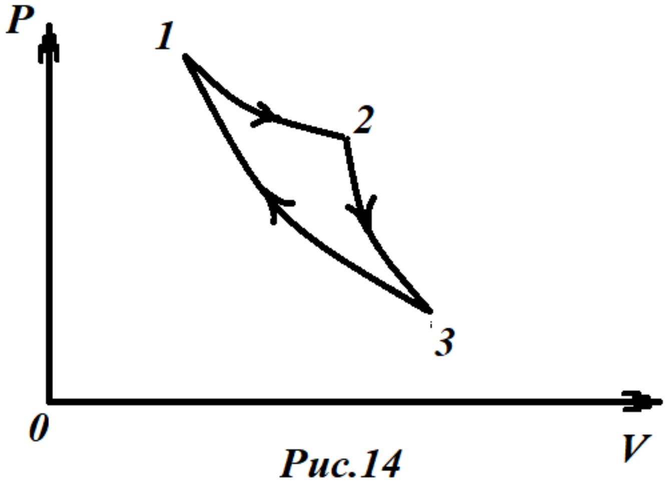

Рис.14

Применим к круговому квазистатическому циклу*1-2-3-1* равенство Клаузиуса (20):

$$\oint_{1231} \frac{\delta Q}{T} = 0\ . \qquad (18.1)$$

Представим этот интеграл как сумму трёх интегралов: на изотерме *1-2*, на политропе *2-3* и адиабате *3-1*. Тогда:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q_{23}}{T} + \int_3^1 \frac{\delta Q_{31}}{T} = 0. (18.2)$$

Учитывая, что $\delta Q_{31} = 0$, а $\delta Q_{23} = CdT$, получаем:

$$\frac{1}{T_1}\int_1^2 \delta Q_{12} + C\int_2^3 \frac{dT}{T} = 0\ . \qquad (18.3)$$

Исходя из условий задачи, преобразуем выражение (18.3):

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + C\int_{T_1}^{T_3} \frac{dT}{T} = 0\ .$$

И получаем, что

$$Q_{12} = T_1 C \ln\frac{T_1}{T_3}\ . \qquad (18.4)$$

Работа, совершенная за цикл, равняется:

$$A = Q_{12} + Q_{23}, \quad (\Delta U = 0). \qquad (18.5)$$

Из выражения (18.4) следует, что Q_{12} – величина положительная. Следовательно, исходя из формулировки Томсона второго начала термодинамики [1], величина Q_{23} должна быть отрицательной. То есть на политропе *2-3* вещество отдаёт тепло:

$$Q_{23} = C(T_3 - T_1) < 0\ , \qquad (18.6)$$

где $C > 0$. Таким образом,

$$A = T_1 C \ln\frac{T_1}{T_3} + C(T_3 - T_1).$$

Задача 19.

Цикл состоит из двух изотерм *1-2*, *3-4* с температурами T_1 и T_2 и двух изохор *2-3*, *4-1* (рис.15). На изотерме с температурой T_1 получено тепло Q_1. Определить работу цикла, если теплоемкость рабочего вещества C_V зависит только от его температуры, но не зависит от объёма.

Решение.

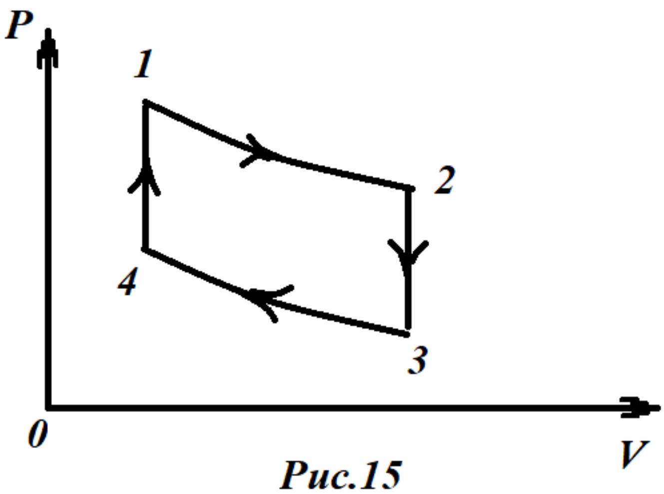

Рис.15

Поскольку круговой цикл *1-2-3-4-1* квазистатический, применим к нему равенство Клаузиуса (20):

$$\oint_{12341} \frac{\delta Q}{T} = 0 . \qquad (19.1)$$

Представим этот интеграл по замкнутому контуру через сумму четырёх интегралов: по двум изохорам *2-3* и *4-1* и по двум изотермам *1-2* и *3-4*.

Тогда равенство (19.1) приобретёт следующий вид:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q_{23}}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q_{34}}{T} + \int_4^1 \frac{\delta Q_{41}}{T} = 0 .$$

Принимая во внимание характер рассматриваемых процессов, получим:

$$\frac{1}{T_1}\int_1^2 \delta Q_{12} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V(T)dT}{T} + \frac{1}{T_2}\int_3^4 \delta Q_{34} + \int_{T_2}^{T_1} \frac{C_V(T)dT}{T} = 0 . \qquad (19.2)$$

В выражении (19.2) сумма двух интегралов на изохорах равна нулю, так как эти интегралы равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно,

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Q_2 = -\frac{T_2}{T_1} Q_1 , \qquad (19.3)$$

где Q_1 – тепло, полученное на изотерме *1-2* с температурой T_1, а Q_2 – тепло, отданное на изотерме *3-4* с температурой T_2.

Известно, что в круговом цикле $A = Q_1 + Q_2$, при этом $\Delta U = 0$. Тогда получаем:

$$A = Q_1 + Q_2 = Q_1 - \frac{T_2}{T_1} Q_1 = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Задача 20.

Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния *1* в равновесное состояние *2* двумя способами. В первом способе система адиабатически охлаждается до температуры T_0, затем изотермически получает тепло и, наконец, адиабатически переходит в состояние *2*. Во втором способе переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается выше T_0 (рис.16). Показать, что в первом способе для перевода системы из состояния *1* в состояния *2* требуется меньшая затрата тепла, чем во втором.

Решение.

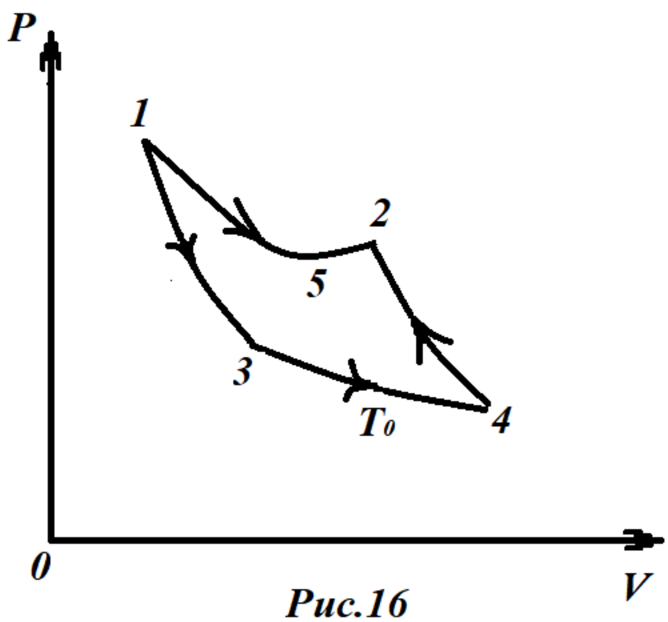

Рис.16

На рис.16 процесс *1-3-4-2* соответствует первому способу перехода системы, а процесс *1-5-2* – второму.

По условию задачи процесс *1-5-2* – квазистатический, значит, его можно провести в обратном направлении: *2-5-1*.

Объединим два квазистатических процесса в один круговой *1-3-4-2-5-1*.

Применим к циклу равенство Клаузиуса (20):

$$\oint_{134251} \frac{\delta Q}{T} = 0. \tag{20.1}$$

Учитывая, что на адиабатах *1-3* и *4-2* система теплоту не получает, можем выражение (20.1) записать в виде:

$$\oint_{134251} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1342} \frac{\delta Q}{T} + \int_{251} \frac{\delta Q}{T} = \int_{34} \frac{\delta Q}{T} + \int_{251} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \text{или}$$

$$\int_{152} \frac{\delta Q}{T} = \int_{34} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}, \tag{20.2}$$

где Q_0 – теплота, полученная на изотерме *3-4*.

По условию, на переходе *1-5-2* температура $T > T_0$ и $\delta Q > 0$. Поэтому:

$$\int_{152} \frac{\delta Q}{T} < \int_{152} \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{Q}{T_0}, \tag{20.3}$$

где Q – теплота, полученная на пути *1-5-2*.

Сравнивая соотношения (20.2) и (20.3), получаем:

$$Q > Q_0.$$

Литература.

1. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика, М.,Наука, Физматлит,1990, 591 с.

2. М.С. Фриш, В.И. Яковлева. Молекулярная физика. Элементы термодинамики и статистики (Конспект лекций) КМУООУП физ. фак-та СПбГУ, 2007, 215с. ISBN 979-5-98340-167-8

3. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика. Под ред. Д. В. Сивухина, М., Наука, 1976, 207с.