Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

М. А. Лялинов

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАЛЮЖИНЦА И ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С МЕРОМОРФНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ЗАДАЧЕ О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛНАХ, БЕГУЩИХ ВДОЛЬ УГЛОВОГО СОЧЛЕНЕНИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ МЕМБРАН

§1. Введение и постановка задачи

В недавней работе [1] были построены решения задачи о распространении локализованных волн бегущих вдоль линии углового сочленения (ребра) двух тонких полубесконечных мембран с одинаковыми свойствами. Построение таких решений сводится к вычислению собственных функций дискретного спектра в задаче для оператора Лапласа в угловой области с краевыми условиями третьего порядка. Интегральное представление решения имеет вид интеграла Зоммерфельда, а неизвестная подынтегральная функция - трансформанта Зоммерфельда, решает задачу для функционального уравнения Малюжинца в подходящем классе мероморфных функций. Построение нужных решений уравнения Малюжинца связано с относительно традиционным, но кропотливым, анализом [1] и требует изучения условий существования области изменения физических параметров задачи, для которых искомые решения уравнения действительно приводят к построению собственных функций, экспоненциально локализованных в окрестности вершины угла.

Ключевые слова: дискретный спектр, угловая область, функционально-разностные уравнения, функциональные уравнения Малюжинца, тонкие упругие мембраны.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, https://rscf.ru/project/22-11-00070.

Однако, для построения соответствующих собственных функций можно также использовать интегральное представление Конторовича-Лебедева (КЛ). Это представление решает уравнение в угловой области и приводит к функционально-разностному уравнению шестого порядка с коэффициентами специального вида после подстановки в краевое условие третьего порядка, которое моделирует тонкую упругую мембрану. В настоящей работе мы устанавливаем связь между решениями уравнения Малюжинца с коэффициентами, которые являются тригонометрическими полиномами, и решениями функционально-разностного (ф.-р.) уравнения шестого порядка. В дополнение, функционально-разностное уравнение шестого порядка сведено к интегральному уравнению на оси, для которого найденные решения порождают собственные функции.

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим полярные координаты в области $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup Ox = \{(r,\varphi) : r > 0,\ |\varphi| < \Phi\}$, (рис. 1), $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, $\partial\Omega = l_+ \cup l_-$. Мы ищем классические решения u в Ω, которые удовлетворяют уравнению

$$-\triangle u(r,\varphi;\varkappa) = -\varkappa^2\, u(r,\varphi;\varkappa), \tag{1}$$

$\triangle = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$. В нашем случае параметр $-\varkappa^2$ отрицательный и удовлетворяет неравенству $-\varkappa^2 < -v_0^2 < 0$, v_0 постоянная такая, что v_0 является корнем уравнения $v^3 - (k_M^2 - k^2)v + \nu_* = 0$, см. [1].[1]

Краевое условие на l_+ имеет вид

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right\} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \nu_* u\Big|_{\varphi=\Phi} = 0\,, \tag{2}$$

где физические параметры в $\nu_* = \rho\omega^2\mathcal{N}_* > 0,\ k_0^2 = k_M^2 - k_e^2 = k_M^2 - (k^2 + \varkappa^2) > 0$ описаны работе [1], нормаль n на l_+ направлена из Ω_+ и $\frac{\partial}{\partial n}\big|_{l_+} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\Phi}$. Такое же условие выполнено на l_-. Заметим, что

[1] Значение $-v_0^2$ определяет нижнюю границу $E_* = -k^2 - v_0^2$ существенного спектра соответствующего полуограниченного самосопряженного оператора, [1], раздел 1.3. Отметим, что при достаточно больших значениях $(k_M^2 - k^2)$, т.е. $(k_M^2 - k^2) \gg 1$, v_0 имеет вид

$$v_0 = \frac{\nu_*}{k_M^2 - k^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{k_M^2 - k^2}\right)\right).$$

оператор, отвечающий нашей задаче о колебаниях в акустической среде, ограниченной мембранами, кратко обсуждается в работе [1], в разделе 1.3.

Однако, мы рассмотрим только симметричные относительно оси Ox решения, $u(r,\varphi;\varkappa) = u(r,-\varphi;\varkappa)$. Тем самым, достаточно найти u в Ω_+. В итоге, в силу четности по φ мы имеем краевое условие на Ox

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = 0\,, \quad r > 0. \tag{3}$$

Известно, что для формулировки краевой задачи для уравнения второго порядка и краевого условия более высокого порядка, т.е. условия (2) на поверхности тонкой мембраны, необходимо добавить так называемые контактные условия, см. главу 8 в [2]. В нашем случае это условие жесткого защемления края мембраны в точке O,

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\Phi} = 0\,. \tag{4}$$

Контактное условие (4) подразумевает, что мембрана жестко зафиксирована и неподвижна в точке O так, что отсутствует ее смещение в направлении ортогональном к линии l_+ в этой точке.

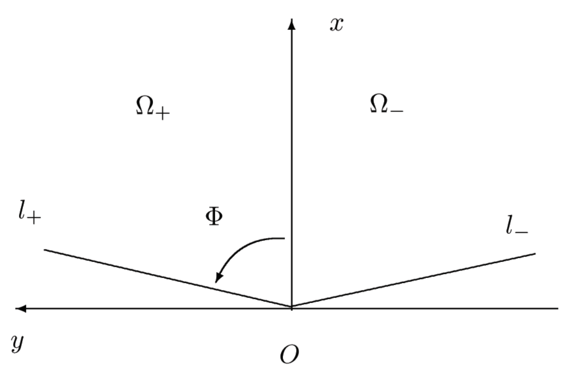

Рис. 1. Область $\overline{\Omega_+ \cup \Omega_-}$, занятая акустической средой.

Строится классическое решение, которое удовлетворяет условию Мейкснера в угловой точке

$$u(r,\varphi) = B + \mathrm{O}(r^{\delta_0}), \quad r \to 0\,, \quad \delta_0 > 0\,, \tag{5}$$

равномерно по φ, B постоянная. Условие (5) означает, что $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_+)$.

Рассмотрим $-\varkappa^2 \in (-\infty, -v_0^2)$, для которых задача (1)–(5) имеет нетривиальные решения, принадлежащие $H^1(\Omega_+)$. Решения должны достаточно быстро убывать на бесконечности в Ω_+. Оказывается, что убывание является экспоненциальным, что отражено в условии локализации решения u,

$$\int_0^\Phi \mathrm{d}\varphi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r |u(r,\varphi;\varkappa)|^2 \mathrm{e}^{2dr} < \infty, \quad d > 0\,. \tag{6}$$

Классическое решение задачи (1)–(6) в угловой области было найдено в [1] в виде интеграла Зоммерфельда с неизвестной мероморфной функцией в подынтегральном выражении – трансформантой Зоммерфельда. Из краевых условий следовало, что неизвестная трансформанта удовлетворяет функциональному уравнению (Малюжинца). Основная техническая часть работы была связана с построением этой неизвестной трансформанты в специальном классе мероморфных функций. Это обстоятельство обеспечило правильное асимптотическое поведение решений задачи на бесконечности в Ω_+, экспоненциальное убывание трансформанты на бесконечности. Асимптотическая оценка интеграла Зоммерфельда при $r \to \infty$ была проведена с помощью метода перевала.

В настоящей работе мы строим решение в виде интерала КЛ и устанавливаем связь полученного решения с интегральным представлением Зоммерфельда. Для этого, в частности, решения уравнения Малюжинца выражаются через решения функционально-разностного уравнения шестого порядка и наоборот. Фактически, ключевую роль здесь играет преобразование Фурье по мнимой оси и использование адекватных задаче классов мероморфных функций.

§2. Интегральное представление КЛ для решения и функционально-разностное уравнение

Решение задачи представим интегралом

$$u(r,\varphi;\varkappa)=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\,\frac{\cos\nu\varphi}{\sin\nu\Phi}\,H(\nu)K_\nu(\varkappa r). \tag{7}$$

Интеграл в (7), если быстро сходится, удовлетворяет уравнению (1), так как функция Макдональда решает уравнение

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)\right)K_\nu(z)=0$$

и $u_\nu(\varphi)=\frac{\cos\nu\varphi}{\sin\nu\Phi}$ является решением

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}+\nu^2\right)u_\nu(\varphi)=0.$$

Интеграл КЛ (7) также удовлетворяет краевому условию (3). Предположим для этого, что неизвестная функция $H(\nu)$ принадлежит классу $\mathcal{M}$, который состоит из функций H таких, что

- H мероморфная и четная, $H(\nu)=H(-\nu)$.
- H голоморфна в полосе
$$\Pi_\delta=\{\nu\in\mathrm{C}:\,|\operatorname{Re}\nu|<\delta\}\,,\quad \delta<1.$$
- H имеет простые полюсы в точках $\nu=\pm1,\pm2,\pm3$ и не имеет других особенностей вплоть до границы полосы Π_3.
- В полосе Π_δ справедлива оценка
$$|H(\nu)|\;\leqslant\;C|\cos(\nu[\pi/2+\tau])|^{-1}$$
для некоторых постоянных $\tau>0$, C.

Для функций из этого класса интеграл (7) экспоненциально и равномерно по r,φ сходится. Он решает уравнение и мы подставим его в краевое условие ($R=\varkappa r$)

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{k_0^2}{\varkappa^2}\right\}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\nu_*}{\varkappa^3}u\bigg|_{\varphi=\Phi}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\left(\left\{\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{k_0^2}{\varkappa^2}\right\}\frac{K_\nu(R)}{R}\,\frac{-\nu\sin\nu\Phi}{\sin\nu\Phi}-\frac{\nu_*}{\varkappa^3}\cot(\nu\Phi)K_\nu(R)\right)H(\nu)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\pi} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \sin \pi\nu \left(\left\{ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + D \right\} \frac{-1}{2} \left(K_{\nu+1}(R) - K_{\nu-1}(R) \right) - \frac{\nu_*}{\varkappa^3} \cot(\nu\Phi) K_\nu(R) \right) \times H(\nu) = 0,$$

где мы использовали формулу 8.846(10), $\frac{K_\nu(z)}{z} = \frac{1}{2\nu} \left(K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z) \right)$ из [4] и ввели обозначение $D = \frac{k_0^2}{\varkappa^2}$. Выполним дифференцирование под знаком интеграла и воспользуемся соотношениями (см. 8.486(11) в [4]),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} K_\nu(z) = \frac{-1}{2} \left(K_{\nu+1}(z) + K_{\nu-1}(z) \right),$$

и

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} K_\nu(z) = \frac{1}{4} \left(K_{\nu+2}(z) + 2K_\nu(z) + K_{\nu-2}(z) \right),$$

получим

$$\frac{1}{\mathrm{i}\pi} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \sin \pi\nu \Big(\frac{-1}{8} (K_{\nu+3}(R) + 2K_{\nu+1}(R) + K_{\nu-1}(R) - K_{\nu+1}(R) - 2K_{\nu-1}(R) - K_{\nu-3}(R)) H(\nu) - \frac{D}{2} (K_{\nu+1}(R) - K_{\nu-1}(R)) H(\nu) - \frac{\nu_*}{\varkappa^3} \cot(\nu\Phi) K_\nu(R) H(\nu) \Big) = 0.$$

В последнем соотношении мы сделаем соответствующие замены переменных так, чтобы функции Макдональда имели один и тот же значок ν, $(\nu \pm 3 \to \nu,\ \nu \pm 1 \to \nu)$, контур интегрирования сдвинется параллельно мнимой оси вправо или влево соответственно. Продеформируем полученные контуры так, чтобы вернуться к интегрированию вдоль мнимой оси. Заметим, что особенности $H(\nu)$ в Π_3 компенсируются нулями $\sin \pi\nu$. Опуская некоторые детали преобразований, получаем

$$\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \sin \pi\nu\, K_\nu(R) \Big(H(\nu+3) - H(\nu-3) + (1+4D)[H(\nu+1) - H(\nu-1)] + \frac{8\nu_*}{\varkappa^3} \cot(\nu\Phi) H(\nu) \Big) = 0.$$

Из выше сказанного приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Если для некоторых* $\Lambda = \frac{4\nu_*}{\varkappa^3}$ *функционально-разностное (ф.-р.) уравнение*

$$H(\nu+3)-H(\nu-3)+(1+4D)[H(\nu+1)-H(\nu-1)]-2\mathrm{i}\Lambda W(\nu)H(\nu)=0, \quad (8)$$

имеет нетривиальное решение из класса $\mathcal{M}$, *(*$W(\nu) = \mathrm{i}\cot(\nu\Phi)$, $D = \frac{k_0^2}{\varkappa^2}$*), то представление КЛ в* (7) *является классическим решение уравнения* (1) *и удовлетворяет краевым условиям* (2), (3).

Фактически, построение решений задачи в виде интеграла КЛ свелось к нахождению нетривиальных решений из $\mathcal{M}$ ф.-р. уравнения (8). Мы это проделаем непрямым путем, обратимся к связи этого уравнения с уравнением Малюжинца в рассматриваемой задаче. Требуемые решения последнего находятся в квадратурах [1].

§3. Интеграл Зоммерфельда и связь уравнения Малюжинца с ф.-р. уравнением (8)

Мы воспользуемся формальными преобразованиями, которые можно последовательно оправдать. Обратимся к представлению Зоммерфельда для функции Макдональда

$$K_\nu(R) = \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_\Gamma \mathrm{d}z \mathrm{e}^{R\cos z} \frac{\sin \nu z}{\sin \pi\nu}$$

и подставим в (7),

$$u(r,\varphi;\varkappa) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \sin\pi\nu \, \frac{\cos\nu\varphi}{\sin\nu\Phi}\, H(\nu) \left(\frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_\Gamma \mathrm{d}z \mathrm{e}^{\varkappa r\cos z} \frac{\sin\nu z}{\sin\pi\nu} \right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int\limits_\Gamma \mathrm{d}z \mathrm{e}^{\varkappa r\cos z} \left(\frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\, \frac{\cos\nu\varphi}{\sin\nu\Phi} \sin\nu z H(\nu) \right).$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{2}F(z,\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\, \frac{\sin\nu z\cos\nu\varphi}{\sin\nu\Phi}\, H(\nu)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\, \frac{1}{2} \frac{\sin(\nu[\varphi+z] + \sin(\nu[z-\varphi])}{\sin\nu\Phi}\, H(\nu)\,.$$

получим

$$F(z,\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\, \frac{\sin(\nu[\varphi+z] + \sin(\nu[z-\varphi])}{\sin\nu\Phi}\, H(\nu)$$
$$= f(z+\varphi) - f(-z+\varphi)\,,$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\, \frac{\sin(\nu z)}{\sin\nu\Phi}\, H(\nu) \;=\; \frac{v.p.}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z}}{\mathrm{i}\sin\nu\Phi}\, H(\nu). \qquad (9)$$

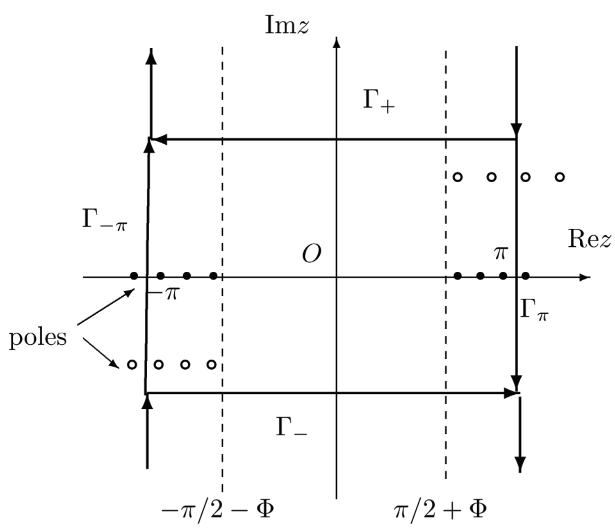

Рис. 2. Контур интегрирования $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ и некоторые особенности трансформанты в интеграле Зоммерфельда.

Мы приходим к представлению Зоммерфельда

$$
\begin{aligned}
u(r,\varphi;\varkappa) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}z \mathrm{e}^{\varkappa r \cos z} \frac{1}{2}(f(z+\varphi) - f(-z+\varphi)) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}z \mathrm{e}^{\varkappa r \cos z} f(z+\varphi)\,,
\end{aligned} \tag{10}
$$

где мы использовали симметрию контура интегрирования Γ и нечетность трасформанты Зоммерфельда f. Формула (9) устанавливает связь между H и трансформантой f и позволяет ввести естественный класс для f. Обозначим M класс мероморфных функций таких, что

- f мероморфная и нечетная, $f(z) = -f(-z)$.
- f голоморфна в полосе $\Pi_{\pi/2+\Phi}$ и непрерывна вплоть до границы.
- В этой полосе $\Pi_{\pi/2+\Phi}$ справедлива оценка

  $$|f(z) - f(\mathrm{i}\infty)| \leqslant C|\exp(-\delta_0 \operatorname{Im}(z))|, \quad \operatorname{Im} z \to \infty$$

  для некоторых постоянных $\delta_0 > 0$, C.

Отметим, что утверждается конечность пределов $f(\mathrm{i}\infty) = -f(-\mathrm{i}\infty)$.

Преобразование в (9) от H к f является пребразованием типа Фурье по мнимой оси. Полезно получить и формулу обращения. В области голоморфности f продифференцируем (9), имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \, \frac{\nu \cos(\nu z)}{\sin \nu\Phi} \, H(\nu) \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z} \, \frac{\nu H(\nu)}{\sin \nu\Phi}\,.$$

Заметим, что $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z)$ убывает на бесконечности вдоль мнимой оси. Вспоминая формулу обращения для преобразования Фурье, получим

$$H(\nu) = \frac{\sin(\Phi\nu)}{\mathrm{i}\pi\nu} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}z \, \cos(\nu z) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \frac{\sin(\Phi\nu)}{\mathrm{i}\pi\nu} \mathrm{d}z \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu z} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z). \tag{11}$$

Проверим теперь следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $H \in \mathcal{M}$ и для некоторого Λ является решением уравнения* (8)*, тогда трансформанта f, связанная с H формулами*

(9), (11), *принадлежит* M *и удовлетворяет функциональному уравнению Малюжинца*

$$[\sin^3 z-(1+D)\sin z+\nu_*/\varkappa^3]f(z+\Phi)$$
$$-[\sin^3(-z)-(1+D)\sin(-z)+\nu_*/\varkappa^3]f(-z+\Phi)$$
$$=\sin z(c_0+c_1\cos z),\quad (12)$$

где c_0, c_1 *некоторые постоянные.*

В работе [1] функциональное уравнение (12) получено прямой подстановкой интеграла Зоммерфельда (10) в краевое условие (2). Здесь мы выведем это уравнение из (8), используя формулы связи (9), (11). Воспользуемся представлением (9) для f,

$$\frac{\nu_*}{\varkappa^3}(f(z+\varphi)+f(z-\varphi))=\frac{\nu_*}{\varkappa^3}\frac{1}{4\mathrm{i}}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\,2\sin(\nu z)\cot(\nu\Phi)\,.\,H(\nu)$$

Аналогично получаем

$$\sin z(f(z+\varphi)-f(z-\varphi))=\frac{1}{4\mathrm{i}}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\,2\sin(z)\cos(\nu z)\,H(\nu)$$
$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\,(\sin(z[\nu+1])\,H(\nu)-\sin(z[\nu+1])\,H(\nu).$$

и

$$-(1+D)\sin z(f(z+\varphi)-f(z-\varphi))$$
$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\,(-1-D)\,(\sin(z[\nu+1])\,H(\nu)-\sin(z[\nu+1])\,H(\nu).$$

Наконец, имеем

$$\sin^3 z(f(z+\varphi)-f(z-\varphi))$$
$$=\frac{\sin z}{4\mathrm{i}}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\ (\sin z\sin(z[\nu+1])-\sin z\sin(z[\nu+1]))\ H(\nu)$$

$$= \frac{\sin z}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \, \left(\cos(\nu z) - \frac{1}{2}\cos(z[\nu+2]) - \frac{1}{2}\cos(z[\nu-2]) \right) \, H(\nu)$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \left(\frac{1}{2}[\sin(z[\nu+1]) - \sin(z[\nu-1])] - \frac{1}{4}[\sin(z[\nu+3]) - \sin(z[\nu+1])] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}[\sin(z[\nu-1]) - \sin(z[\nu-3])] \right) H(\nu)\,.$$

Используем полученые равенства и получим

$$\sin^3 z(f(z+\varphi) - f(z-\varphi)) - (1+D)\sin z(f(z+\varphi) - f(z-\varphi))$$
$$+ \frac{\nu_*}{\varkappa^3}(f(z+\varphi) + f(z-\varphi)) = [\sin^3 z - (1+D)\sin z + \nu_*/\varkappa^3]f(z+\Phi)$$
$$- [\sin^3(-z) - (1+D)\sin(-z) + \nu_*/\varkappa^3]f - (z+\Phi)$$
$$= \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \Big\{ \left(-\frac{1}{4}\sin(z[\nu+3])H(\nu) + \frac{1}{4}\sin(z[\nu-3])\frac{1}{4} \right)$$
$$+ \left((-\frac{1}{4} - D)\sin(z[\nu+1])H(\nu) - (-\frac{1}{4} - D)\sin(z[\nu-1])H(\nu) \right)$$
$$+ 2\frac{\nu_*}{\varkappa^3}\cot(\nu\Phi)\, \sin(\nu z)H(\nu) \Big\}.$$

В первых двух слагаемых подынтегрального выражения сделаем соответственно замену переменной интегрирования $\nu-3 \to \nu$, $\nu+3 \to \nu$, а в следующих двух $\nu-1 \to \nu$, $\nu+1 \to \nu$. При этом, контур интегрирования вдоль мнимой оси сдвинется параллельно и соотвественно замене переменной. Пользуясь аналитическими свойствами подынтегральных выражений, продеформируем контуры обратно на мнимую ось. В процессе деформации будут пересечены полюсы функций $H(\nu \pm 1), H(\nu \pm 3)$, в результате имеем

$$[\sin^3 z - (1+D)\sin z + \nu_*/\varkappa^3]f(z+\Phi)$$
$$- [\sin^3(-z) - (1+D)\sin(-z) + \nu_*/\varkappa^3]f - (z+\Phi)$$
$$= \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \, \frac{1}{4}\sin(\nu z) \Big\{ [H(\nu+3) - H(\nu-3)]$$

$$+ (1+4D)[H(\nu+1) - H(\nu-1)] + 8\frac{\nu_*}{\varkappa^3}\cot(\nu\Phi)\,\sin(\nu z)H(\nu)\Big\}$$
$$+(-2\pi\mathrm{i})\Big(-\frac{1}{4}\mathrm{res}_{-2}H(\nu+3)(-\sin(2z))+\frac{1}{4}(1+4D)\mathrm{res}_{-1}H(\nu+1)(-\sin(z))\Big)$$
$$+ 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\mathrm{res}_2 H(\nu-3)\sin(2z) - \frac{1}{4}(1+4D)\mathrm{res}_1 H(\nu-1)\sin(z)\right).$$

Мы пришли к соотношению

$$[\sin^3 z - (1+D)\sin z + \nu_*/\varkappa^3]f(z+\Phi)$$
$$- [\sin^3(-z) - (1+D)\sin(-z) + \nu_*/\varkappa^3]f-(z+\Phi)$$
$$= \frac{1}{4\mathrm{i}}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\frac{1}{4}\sin(\nu z)\Big\{[H(\nu+3)-H(\nu-3)]+(1+4D)[H(\nu+1)-H(\nu-1)]$$
$$+\frac{8\nu_*}{\varkappa^3}\cot(\nu\Phi)\,\sin(\nu z)H(\nu)\Big\} + \sin z(c_0 + c_1\cos z),$$

где c_0, c_1 постоянные. С учетом (8) получаем уравнение Малюжинца (12).

В работе [1] приведена процедура построения решений уравнения (12) из требуемого класса. Вычислена и асимптотика собственных функций.

Список литературы

1. M. A. Lyalinov, *Localized waves propagating along an angular junction of two thin semi-infinite elastic membranes terminating an acoustic medium.* — Russian J. Mathem. Physics, **30**, No. 3 (2023), 345–359.
2. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
3. M. A. Lyalinov, d N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions* (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication). Edison, NJ: SciTech-IET (2012).
4. I. S. Gradstein, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products.* 4th ed., Academic Press, Orlando (1980).

Lyalinov M. A. On the connection of solutions of the Malyuzhinets equations and the high-order functional difference equation with meromorphic coefficients in the problem of localized waves propagating along the angular junction of thin elastic membranes.

The paper studies the connection of the Kontorovich–Lebedev and Sommerfeld integral representations for solving the problem of localized acoustic waves propagating along the contact line of the angular junction of thin elastic membranes. The construction of solutions in the form of the Kontorovich–Lebedev integral is reduced to solving a sixth-order functional difference equation with a meromorphic potential of a special kind. On the other hand, explicit formulas (i.e. in quadratures) are obtained using Sommerfeld integrals and constructing meromorphic solutions of the Malyuzhinets equations. In this work we establish a connection between solutions of the sixth-order functional difference equation and solutions of the Malyuzhinets equation.

Санкт-Петербургский университет,
Российская Академия Народного Хозяйства
и Государственной Службы
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 22 сентября 2024 г.