

УДК 517.9, 517.4

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ БЕРЕГ ПРИБРЕЖНОГО ВОДНОГО КЛИНА

© 2024 г. М. А. Лялинов<sup>1,\*</sup> С. В. Полянская<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия,<sup>2</sup>Северо-Западный институт управления РАНХиГС, С.-Петербург, Россия

\*e-mail: lyalinov@yandex.ru

\*\*e-mail: m.lyalinov@spbu.ru

\*\*\*e-mail: polyanskaya-sv@ranepa.ru

Поступила в редакцию 22.01.2024 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята к публикации 15.05.2024 г.

В линейном приближении гравитационных поверхностных волн малой амплитуды предложены новые интегральные представления для решения классической задачи о набегаении из бесконечности поверхностной волны на берег под углом к береговой линии. Задача ставится для гармонического потенциала скорости жидкости в трехмерном водном клине с краевым условием Робена–Стеклова на свободной поверхности водного клина и условием отсутствия потока по нормали через дно. Эти интегральные представления имеют вид интеграла Зоммерфельда–Маложинца и Ватсона–Бесселя. Подынтегральные выражения вычислены в замкнутом виде на основе решения функционально-разностных уравнений. Установлена связь между полученными представлениями. Приведены критические замечания по поводу известного в литературе решения, имеющего “нефизическую” сингулярность логарифмического типа на береговой линии. Построена асимптотика по расстоянию от берега полученного решения, ограниченного на береговой линии. Вычислен коэффициент отражения волны, уходящей от берега.

*Ключевые слова:* поверхностная волна, интегральные представления, функциональные уравнения, асимптотика

DOI



**1. Введение.** Существуют различные механизмы возникновения прибрежных волновых процессов. Их достаточно подробный обзор можно найти во введении к недавней работе [1]. В данном контексте особую роль в изучении механизмов возникновения прибрежного волнения играют канонические модельные задачи, которые допускают эффективное исследование и использование для качественного и количественного описания соответствующих волновых процессов.

Одной из таких модельных задач является задача о наклонном падении поверхностной волны, бегущей из бесконечности к прямолинейному берегу водного клина (рис. 1). Такая задача рассматривается в литературе (см. [2] и подробные ссылки в ней). В связи с исследуемой задачей уместно упомянуть результаты Исааксона [3] в случае нормального падения, а также ссылки, которые приведены в [2], где также имеется подробный обзор примыкающих результатов. Задача ставится в линейном приближении поверхностных волн малой амплитуды [4], и соответствующая модель, хотя и не описывает адекватно сложные нелинейные процессы движения жидкости вблизи береговой линии, в целом может быть успешно использована для изучения

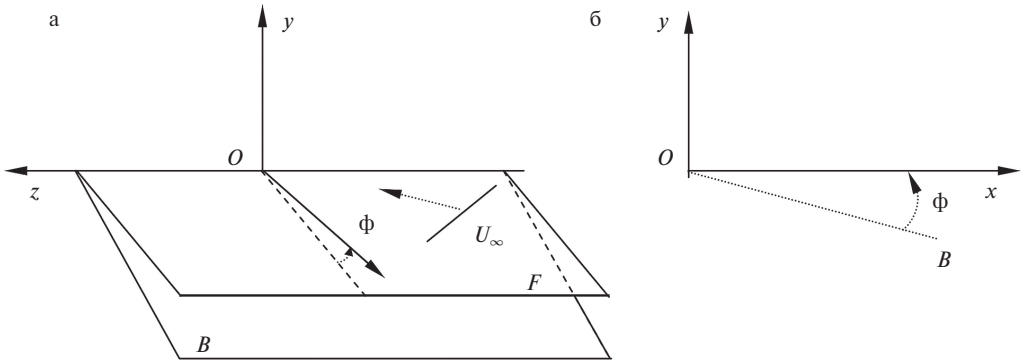


Рис. 1

результата отражения поверхностной гравитационной волны, падающей наклонно на береговую линию водного клина.

Однако, постановка и решение данной задачи, предложенное в работе [2], не является, по нашему мнению, вполне физически обоснованным и математически удовлетворительным. Причина этого в следующем. Автор работы [2] строит решение задачи, в постановке которой предполагается его логарифмическая сингулярность на береговой линии водного клина. Тем самым, плотность кинетической энергии волнового движения жидкости не является локально интегрируемой: интеграл по окрестности вершины угла от квадрата градиента потенциала скорости расходится. Это обстоятельство вряд ли оправдано с физической точки зрения. Кроме того, скорость жидкости стремится к бесконечности при приближении к береговой линии. С другой стороны, к решению задачи с логарифмической сингулярностью можно добавить решение, ограниченное на береговой линии, то есть построенное в нашей работе. Получится новое решение о наклонном падении поверхностной волны на береговую линию с логарифмической сингулярностью. Тем самым, возникает вопрос о математической корректности постановки и физической интерпретации решения с сингулярностью. Ограниченное же на ребре решение существует и единственно, что здесь не доказывается, оно устойчиво при малых возмущениях данных задачи и, тем самым, корректно (по Адамару).

В настоящей работе строится решение рассматриваемой классической модельной задачи, предлагая новые интегральные представления для него, в следующей постановке. В трехмерном водном клине с углом раскрыва  $\Phi$  ( $0 < \Phi \leq \pi / 2$ ) в линейном приближении волн малой амплитуды потенциал скорости

$$U(x, y, z, t) = \Re \{ u(x, y) e^{ikz} e^{-i\omega t} \} \tag{1.1}$$

гармонически зависит от времени ( $\omega$  – круговая частота) и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_{x,y,z} U = 0 \tag{1.2}$$

в водном клине, рис. 1,а. Далее считаем, что бегущая из бесконечности поверхностная волна описывается потенциалом

$$U_{\infty}(x, y, z, t) = \Re \{ u_{\infty}(x, y) e^{ikz - i\omega t} \},$$

где  $u_{\infty}(x, y) = e^{-ik_x x + \delta y}$ ,  $\delta > 0$ ,  $U_{\infty}$  удовлетворяет уравнению Лапласа, что эквивалентно равенству

$$\kappa^2 + k_x^2 = \delta^2$$

и краевому условию на свободной поверхности  $F = \{(x, y, z) : x > 0, y = 0, |z| < \infty\}$ .

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} + g^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_F = 0, \quad (1.3)$$

$g$  – ускорение свободного падения. Отсюда находим подстановкой  $U_\infty$  в (1.3)  $\delta = \gamma$ , где  $\gamma := \omega^2/g > 0$ . Условие на дне имеет вид

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_B = 0, \quad (1.4)$$

$n$  – нормаль к  $B$ . Мы предположили периодическую зависимость от переменной  $z$  в выражении (1.1). Считая  $\kappa$  и  $\gamma$  заданными, находим

$$k_x = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2} > 0,$$

где  $0 < \kappa^2 \leq \gamma^2$ .

Для физического анализа решения удобно ввести «угол скольжения»  $\alpha$  набегающей волны в соответствии с равенством

$$\left( \frac{\kappa}{\gamma} \right)^2 + \left( \frac{k_x}{\gamma} \right)^2 = 1 \text{ или } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

где  $\cos \alpha = \kappa/\gamma$ . Выбирая указанные зависимости от времени и координаты  $z$  вдоль береговой линии, сведем задачу к вычислению  $u$  в выражении (1.1), т. е. рассмотрим двумерную задачу в угле (рис. 1,б). Точную постановку задачи для  $u$  будет изложено в следующем разделе. Кроме (1.1)–(1.3) потребуем ограниченность  $u$  для всех  $z$  при  $(x, y) \rightarrow 0$ , а также на бесконечности. Заметим, что при указанном выборе параметров  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $k_x$  выражение  $u_\infty$  представляет собой поверхностную волну  $U_\infty$ , бегущую к берегу, как показано на рис. 1,а, которая экспоненциально убывает с глубиной,

$$u_\infty(x, y) = e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}x + iy}. \quad (1.5)$$

В следующем разделе ставится задача в классических терминах и устанавливается связь ее с полуограниченным самосопряженным оператором, спектр которого описан в литературе. По существу, построение решения задачи эквивалентно построению собственной функции такого оператора для отрицательной части непрерывного (точнее, существенного) спектра. В этой задаче существует и дискретный спектр, который конечен. Собственные функции дискретного спектра, которые были получены Урселом в элементарной форме, изучались в ряде работ (см. [5, 6]).

В разд. 3 с помощью интегрального представления решения интегралом Зоммерфельда задача сводится к построению решения некоторого функционального уравнения Малюжинца в классе мероморфных функций. Обсуждается поведение решения на больших расстояниях от берега. Старшие слагаемые в асимптотике являются суммой поверхностной падающей и отраженной волн. В окрестности береговой линии решение остается ограниченным. Это является физически и математически обоснованным поведением в отличие от результата работы Эренмарка [2], в которой решение имеет логарифмическую особенность на береговой линии.

В разд. 4 обсуждается альтернативное представление для решения в виде интеграла Ватсона–Бесселя [8]. В отличие от собственных функций дискретного спектра, для которых могут быть использованы интегральные представления Конторовича–Лебедева [9], так как соответствующие подынтегральные выражения быстро убывают, для обобщенных собственных функций существенного спектра представления Конторо-

вича – Лебедева должны быть заменены на интегралы Ватсона–Бесселя. Неизвестная подынтегральная функция удовлетворяет функционально-разностному уравнению второго порядка, которое, как показано далее, эквивалентно функциональному уравнению Малюжинца из предыдущего раздела.

**2. Постановка задачи.** Для того, чтобы найти потенциал (1.1) в нашей задаче, необходимо найти решение  $u(x, y)$  и, значит, сформулировать задачу для  $u = u(x, y)$  в угле (рис. 1,б). Остановимся на классической постановке.

Прямой подстановкой в уравнение Лапласа (1.2) находим, что  $(0 < \kappa^2 \leq \gamma^2)$

$$-\Delta u = -\kappa^2 u \text{ в } W, \quad (2.1)$$

$E = -\kappa^2$  спектральный параметр, из условия (1.3) на свободной поверхности имеем краевое условие Робена–Стеклова

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma u \right) \Big|_F = 0; \quad \gamma = \omega^2/g \quad (2.2)$$

и, аналогично, на дне  $B$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_B = 0. \quad (2.3)$$

Решение должно удовлетворять условию Мейкснера вблизи угловой точки, (см. разд. 2.2 в книге [10], где подробно обсуждается условие Мейкснера)

$$u = C + O(r^{\delta_1}), \quad \delta_1 > 0, \quad (2.4)$$

$C$  – константа. Здесь и в дальнейшем будут использоваться полярные координаты  $(r, \varphi)$ :  $x = r \cos(\varphi - \Phi)$ ,  $y = r \sin(\varphi - \Phi)$ , связанные с линией  $B$ ,  $\varphi = 0$ ,  $r > 0$ ,  $\Phi < \pi/2$  (рис. 1,в).

Обратимся к условию на бесконечности,  $r \rightarrow \infty$ . Асимптотика решения имеет вид

$$u(x, y) = e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}x + \gamma y} + u_*(x, y), \quad (2.5)$$

где  $u_*(x, y)$  определяется отраженной волной  $u_r$ , которая ограничена при  $r \rightarrow \infty$  (а, значит, везде) и локализована в окрестности свободной поверхности  $F$ , см. [6]. Далее будут уточнены оценки  $u_*$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Нетривиальность решения задачи (2.1)–(2.5) определяется заданием  $u_\infty(x, y; \kappa) = e^{-ik_x + \gamma y}$ ,  $k_x = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}$  в асимптотике (2.5) и свойствами спектра оператора, отвечающего задаче, что обсуждается ниже. Решение  $u$  дважды непрерывно дифференцируемо в  $W$  и имеет непрерывные производные на границе  $F$  и  $B$ .

С задачей (2.1)–(2.5) связан полуограниченный самосопряженный оператор  $A_\gamma = A_\gamma^*$ , который определяется полуторалинейной полуограниченной формой  $a_\gamma$ ,

$$a_\gamma[u, u] = \int_W |\nabla u|^2 dx dy - \gamma \int_{\partial W} |u|^2 ds; \quad u \in H^1(W).$$

Эта форма замыкаема и однозначно порождает полуограниченный самосопряженный оператор  $A_\gamma$  (см. [7] и ссылки в ней). Спектр этого оператора  $\sigma(A_\gamma)$  состоит из конечного числа  $N_\Phi$  собственных чисел, расположенных левее

$-\gamma^2$ ,  $E_m = -\kappa_m^2 = -\frac{\gamma^2}{\sin^2(\Phi[2m - 1])}$ ;  $m = 1, 2, \dots, N_\Phi$ , и существенного спектра

$\sigma_e(A_\gamma) = [-\gamma^2, \infty)$ . Собственные функции находятся в элементарной форме (волны Урссела, см., напр., [5]). В настоящей работе фактически строятся интегральные представления для обобщенных собственных функций непрерывного (существенного) спектра для отрезка спектра  $-\gamma^2 \leq -\kappa^2 < 0$ ,  $E = -\kappa^2$ . В соответствии с их асимпто-

тикой при  $r \rightarrow \infty$  эти решения связываются с рассеянием поверхностной волны, бегущей наклонно к береговой линии и отражающейся от нее в виде уходящей поверхностной волны. Вычисляется соответствующий коэффициент отражения.

**3. Интегральное представление Зоммерфельда и функциональные уравнения Малюжинца.** Решение задачи (2.1)–(2.5) ищется в виде интеграла Зоммерфельда

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{kr \cos z} f(z + \varphi) dz, \tag{3.1}$$

где контур  $\Gamma$  состоит из двух петель  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  и показан на рис. 2.

Неизвестная пока функция  $f$  (в интеграле Зоммерфельда ее называют еще трансформантой Зоммерфельда) принадлежит классу  $M$  мероморфных функций, т. е. таких, что

- $f$  голоморфна в полосе  $\Pi\left(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi\right\}$ ,
- $f$  не имеет особенностей вне полосы  $|\Im z| < b_*$  для некоторого  $b_* > 0$ ,
- $f(\pm i\infty)$  существуют и  $f(i\infty) = -f(-i\infty)$ , справедлива оценка

$$|f(z) - f(\pm i\infty)| < C e^{-\delta|\Im z|}, \quad \delta > 0, \quad z \in \Pi\left(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi\right), \quad z \rightarrow \pm i\infty,$$

$f$  имеет полюсы в  $z = \pm z_0$ ,  $z_0 = \frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0$ ,  $\tau_0 = \operatorname{arcch}(\omega^2/g\kappa)$ ,  $\operatorname{ch}(\tau_0) = \gamma/\kappa > 1$ , т. е.  $f(z) - \frac{\beta/2}{z \mp z_0}$  голоморфны в проколотой окрестности точек  $z = \pm z_0$  и не имеет других особенностей на границе полосы. Постоянная  $\beta$  будет выбрана далее.

Последние два условия нуждаются в комментариях. Ограниченность  $f$  на  $\pm i\infty$  и соответствующая оценка эквивалентны условию Мейкснера (2.4), а наличие полюсов  $f$  в точках  $z = \pm z_0$  с заданными вычетами связано с необходимостью присутствия в асимптотике (2.5) (при  $r \rightarrow \infty$ ) падающей поверхностной волны  $u_\infty$ . Как будет видно далее, при вычислении асимптотики интеграла (3.1) по методу прева-

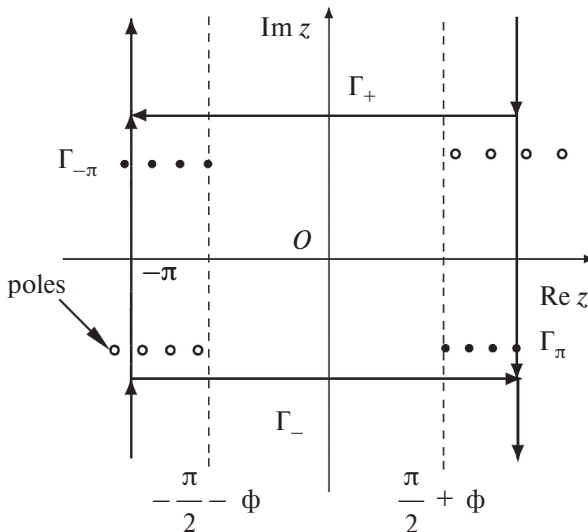


Рис. 2

ла приходится деформировать контур  $\Gamma$  в перевальные  $\Gamma \rightarrow \Gamma_{+\pi} \cup \Gamma_{-\pi}$ , пересекая полюсы трансформанты Зоммерфельда  $f$ . В частности,  $z + \varphi = \pm z_0$  дают вклад в асимптотику и определяют бегущую наклонно к берегу падающую волну под углом скольжения  $\alpha$ . Вычеты  $f$  в этих полюсах пропорциональны неизвестной постоянной  $\beta$ , которая находится из условия того, что вклад этих вычетов должен совпасть с единичной амплитудой падающей волны.

Если  $f \in M$ , то интеграл Зоммерфельда быстро и равномерно по  $(r, \varphi)$  сходится, и прямой подстановкой проверяется, что он удовлетворяет уравнению (2.1), см. также [10]. Краевое условие (2.3) на дне выполнено, если

$$f(z) + f(-z) = 0,$$

т.е.  $f$  нечетна. Действительно, пользуясь симметрией контура  $\Gamma$  интеграл (3.1) записывается в виде

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \frac{1}{2} \{f(z + \varphi) - f(-z + \varphi)\} dz,$$

или, учитывая, что  $f(z) = -f(-z)$ , имеем

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \frac{1}{2} \{f(z + \varphi) + f(z - \varphi)\} dz. \tag{3.2}$$

Из представления (3.2) и дифференцирования под знаком интеграла следует краевое условие (2.3),  $\varphi = 0$ .

Обратимся к краевому условию (2.2) на свободной поверхности,  $\varphi = \Phi$ . Прямая подстановка интеграла (3.1) в краевое условие и интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \left( f'(z + \Phi) - \frac{\gamma}{\kappa} \kappa r f(z + \Phi) \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \left( \sin z f(z + \Phi) - \frac{\gamma}{\kappa} f(z + \Phi) \right) = 0. \end{aligned}$$

Используем теорему Малюжинца об обращении интеграла Зоммерфельда в ноль для  $f \in M$  (см. [11, § 3.4], получим функциональное уравнение (Малюжинца)

$$\left( \sin z - \frac{\gamma}{\kappa} \right) f(z + \Phi) - \left( -\sin z - \frac{\gamma}{\kappa} \right) f(-z + \Phi) = 0. \tag{3.3}$$

Тем самым, можно утверждать, что справедлива

*Лемма 1.* Если нечетная мероморфная функция  $f \in M$  является решением функционального уравнения (3.3), то интеграл Зоммерфельда (3.1) (или (3.2)) удовлетворяет уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2), (2.3) в классическом смысле.

Как следует из этого утверждения, ключевым обстоятельством построения решения является вычисление решения  $f$  уравнения (3.3), такого, что  $f \in M$  и является нечетным. Именно этому посвящена оставшаяся часть данного раздела, а также обсуждению условий (2.4), (2.5).

Обратимся к построению подходящего решения  $f$  функционального уравнения (3.3). Представим искомую трансформанту в виде

$$f(z) = F(z) + \psi_i(z), \quad F(z) = f_0(z)S(z), \tag{3.4}$$

где

$$\psi_i(z) = \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{z + z_0}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{z - z_0}{2}} \right\}$$

имеет полюсы в двух точках  $z = \pm z_0$ . Напомним, что вклад этих полюсов в асимптотику при вычислении ее из интеграла Зоммерфельда обеспечит присутствие выражения падающей поверхностной волны в асимптотике. Неизвестная функция  $F(z)$  в (3.4) представлена произведением двух мероморфных вспомогательных функций  $f_0(z)$  и  $S(z)$ . Их роль в построении решения уравнения (3.3) описывается следующей леммой.

*Лемма 2.* Пусть  $f_0(z)$  является четным мероморфным решением уравнения

$$(\sin z - \sin \theta)f_0(z + \Phi) - (-\sin z - \sin \theta)f_0(-z + \Phi) = 0, \quad (3.5)$$

где  $\sin \theta = \frac{\gamma}{\kappa}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} + i\tau_0$ ,  $\operatorname{ch} \tau_0 = \frac{\gamma}{\kappa} > 1$ . Кроме того,  $f_0$  не имеет полюсов внутри полосы  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$  и  $f_0(z) = O\left(\cos \frac{\pi z}{2\Phi}\right)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  в этой полосе. Предположим также, что  $S(z)$  это нечетное мероморфное решение уравнения

$$S(z + \Phi) - S(-z + \Phi) = (-1) \left\{ \frac{\psi_i(z + \Phi)}{f_0(z + \Phi)} - \frac{\psi_i(-z + \Phi)}{f_0(-z + \Phi)} \right\}, \quad (3.6)$$

причем,  $F(z) = f_0(z)S(z) = O(1)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  в  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ ,  $S(\cdot)$  голоморфна в этой полосе. Тогда искомая трансформанта  $f \in \mathbf{M}$  задается выражениями (3.4) и обеспечивает требуемые свойства интеграла Зоммерфельда (3.2) как решения задачи (2.1)–(2.5).

Отметим, что  $f_0$  не принадлежит классу  $\mathbf{M}$  мероморфных функций, тогда как  $f$  после ее построения будет принадлежать. Проверка этого утверждения проводится прямой подстановкой выражения (3.4) в уравнение (3.3) и использованием уравнений (3.5) и (3.6). Напомним, что  $f_0(z + \Phi) = -\frac{\sin z + \sin \theta}{\sin z - \sin \theta} f_0(z - \Phi)$ .

*Лемма 3.* Существует четное мероморфное решение  $f_0$  уравнения (3.5), которое голоморфно в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$  и в этой полосе задается выражением

$$f_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\zeta \log \left( \frac{\cos \frac{\pi z}{\Phi} + \cos \frac{\pi \zeta}{\Phi}}{1 + \cos \frac{\pi \zeta}{\Phi}} \right) W_0(\zeta) \right\},$$

где

$$W_0(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \log(-R(\zeta, \theta)) = W_0(-\zeta), \quad W_0(\zeta) = O\left(\frac{1}{\cos \zeta}\right), \quad \zeta \rightarrow \pm i\infty,$$

$$R(\zeta, \theta) = \frac{\sin \zeta + \sin \theta}{\sin \zeta - \sin \theta}.$$

Ветвь  $\log(-R(z, \theta))$  выделена условием  $\log(-R(z, \theta)) \Big|_{z=i\infty} = -i\pi$ , а разрезы проведены из точек  $\frac{\pi}{2} + i\tau_0$ ,  $\frac{\pi}{2} - i\tau_0$ ,  $-\frac{\pi}{2} + i\tau_0$ ,  $-\frac{\pi}{2} - i\tau_0$  на  $+\infty$  или  $-\infty$  параллельно вещественной оси, не пересекая полосу  $\Pi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , из каждой точки. Мероморфное продолжение  $f_0$  из полосы голоморфности проводится с помощью уравнения (3.5).

Проведем вычисление, приводящее к утверждению Леммы 3. Из уравнения (3.5) для логарифмической производной  $f_0$ ,

$$\chi_0(z) = \frac{d}{dz} \log f_0(z), \quad z \in \Pi\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

получаем уравнение

$$\chi_0(z + \Phi) - \chi_0(z - \Phi) = W_0(z), \tag{3.7}$$

причем  $\chi_0(z) = -\chi_0(-z)$ . Воспользуемся преобразованием Фурье по мнимой оси

$$\chi_0(z) = -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} W(t) dt, \quad W(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{it\zeta} \chi_0(\zeta) d\zeta.$$

Аналогично имеем

$$W_0(z) = -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} r_0(t) dt, \quad r_0(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{it\zeta} W_0(\zeta) d\zeta.$$

Из уравнения (3.7) следует

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} W(t) (-2i) \frac{[e^{-i\Phi t} - e^{i\Phi t}]}{(-2i)} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} r_0(t) dt,$$

откуда получаем

$$W(t) = \frac{ir_0(t)}{2\sin(\Phi t)},$$

$\chi_0(z)$  восстанавливается обратным преобразованием,  $|\Re z| < \Phi$ ,

$$\begin{aligned} \chi_0(z) &= -\frac{v.p.}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-izt} \frac{ir_0(t)}{2\sin(\Phi t)} dt = -\frac{i}{4\pi} v.p. \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{e^{-izt}}{\sin(\Phi t)} \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{it\tau} W_0(\tau) d\tau \right) = \\ &= \left( -\frac{i}{4\pi} \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \left\{ v.p. \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{e^{it(\tau-z)}}{\sin(\Phi t)} \right\} = \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{i \sin(t(\tau-z))}{\sin(\Phi t)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{4\Phi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\Phi} [z - \tau] \right) = \frac{1}{4\Phi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\Phi} [z - \tau] \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\Phi} [z + \tau] \right) \right\}, \end{aligned}$$

где переставлен порядок интегрирований и использована формула 3.981 из [12]. Дополнительным интегрированием восстановим вспомогательное решение  $f_0$ ,

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \exp \left\{ \int_0^z \chi_0(\zeta) d\zeta \right\} = \exp \left\{ \int_0^z d\zeta \left[ \frac{-i}{4\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Phi} \zeta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \tau\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \zeta\right)} \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau W_0(\tau) \log \left( \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \tau\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{\Phi} z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} \tau\right)} \right) \right\}; \quad |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi, \end{aligned}$$

где  $\log(\dots)|_{z=0} = 0$ .

Пояснения требует голоморфность функции  $f_0(\cdot)$  в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ , тогда как голоморфность при  $|\Re z| < \Phi$  очевидна (знаменатель  $\cos\frac{\pi}{\Phi} z + \cos\frac{\pi}{\Phi} \tau$  не обращается в ноль в этой полосе, если  $\tau \in i\mathbb{R}$ ). Оказывается, что можно продеформировать контур интегрирования  $i\mathbb{R}$  в последнем интеграле вправо  $i\mathbb{R} \rightarrow i\mathbb{R} + h$ ,  $0 < h < \frac{\pi}{2}$ , так как  $W_0(\cdot)$  голоморфна в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Тогда  $f_0(\cdot)$  голоморфна в полосе  $\Pi(0, \Phi + h)$  и по четности в полосе  $\Pi(-h - \Phi, \Phi + h)$ ,  $0 < h < \frac{\pi}{2}$ . Используя принцип аналитического продолжения, получаем голоморфность в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ .

Совершенно аналогично строится частное решение уравнения (3.6), (см. [10, §7.3.2])



$$\begin{aligned}
 S(z) &= \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \chi(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi} \tau}{\cos \frac{\pi}{2\Phi} \tau - \sin \frac{\pi}{2\Phi} z} - \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \chi(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi} \tau}{\cos \frac{\pi}{2\Phi} \tau + \sin \frac{\pi}{2\Phi} z} = \\
 &= \frac{i}{2\Phi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \chi(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{2\Phi} \tau \sin \frac{\pi}{2\Phi} z}{\cos \frac{\pi}{\Phi} \tau + \cos \frac{\pi}{\Phi} z},
 \end{aligned}$$

где

$$\chi(z) = - \left\{ \frac{\psi_i(z + \Phi)}{f_0(z + \Phi)} - \frac{\psi_i(-z + \Phi)}{f_0(-z + \Phi)} \right\} \text{ и } |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi.$$

Мероморфное продолжение  $S$  на комплексную плоскость осуществляется с помощью функционального уравнения (3.6). Отметим, что  $S(z) = -S(-z)$

и  $S(z) = O\left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\Phi} z}\right)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  в полосе  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Вместе с асимптотической для  $f_0(z)$  при  $z \rightarrow \pm i\infty$  последняя оценка означает, что

$$f(z) = f(\pm i\infty) + O\left(e^{\pm i\delta z}\right), \quad z \rightarrow \pm i\infty, \quad \delta > 0,$$

что эквивалентно условиям Мейкснера (2.4).

Остается убедиться в справедливости условия на бесконечности (2.5) и конкретизировать выражение  $u_*$ . Для этого обратимся к вычислению асимптотики интеграла Зоммерфельда (3.1). Асимптотика  $u(r, \varphi; \kappa)$  при  $r \rightarrow \infty$  вычисляется применением метода перевала к интегралу Зоммерфельда (3.2). Точки перевала  $z = \pm \pi$  удовлетворяют уравнению  $(\cos z)' = 0$ , а перевальные контуры совпадают с  $\Gamma_{+\pi}$  и  $\Gamma_{-\pi}$  на рис. 2. При деформации  $\Gamma$  в перевальные контуры  $\Gamma_{\pm\pi}$  захватываются полюсы  $f(z + \varphi)$  мероморфной трансформанты Зоммерфельда. Как установлено при построении  $f(\cdot)$ , трансформанта не имеет полюсов внутри полосы  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Ближайшие к мнимой оси полюсы расположены на границе полосы и дают основной вклад в асимптотику, тогда как остальные полюсы вносят экспоненциально малый вклад при  $r \rightarrow \infty$ , а вклад точек перевала имеет порядок  $O\left(\frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{r}}\right)$ . Тем самым, для вычисления ограниченного старшего члена асимптотики необходимо найти все полюсы на границе полосы  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Два симметричных относительно начала полюса определяют заданную падающую волну в (3.1),

$$z + \varphi = z_0, \quad z + \varphi = -z_0, \quad z_0 = \frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0$$

и, тем самым, постоянную  $\beta$  в выражении (3.4) для  $f$ . При деформации  $\Gamma$  в перевальные эти полюсы пересекаются и дают вклад в асимптотику по теореме о вычетах. С изменением  $\varphi \in [0, \Phi]$  эти полюсы мигрируют, и их вклад ограничен лишь для  $\varphi = \Phi$ . Для остальных направлений он экспоненциально мал,  $r \rightarrow \infty$ . Оказывается, что помимо этих полюсов, отвечающих падающей поверхностной волне, существуют два полюса, которые также дают ограниченный вклад в асимптотику при  $\varphi = \Phi$ . Найдем эти полюсы и вычеты в них. Для этого рассмотрим функциональное уравнение (3.3), записанное в виде  $(\theta = \frac{\pi}{2} + i\tau_0)$

$$f(\zeta) = \frac{\sin(\zeta - \Phi) + \sin\theta}{\sin(\zeta - \Phi) - \sin\theta} f(\zeta - 2\Phi).$$

Из-за нечетности  $f(\cdot)$  достаточно рассмотреть  $\Re z > 0$ . Если  $\zeta$  принадлежит малой окрестности  $\Re z = \frac{\pi}{2} + \Phi$ , то  $\zeta - 2\Phi$  находится в области голоморфности  $f(\cdot)$ . Поэтому все особенности правой части (полюсы) определяются решениями уравнения  $\sin(\zeta - \Phi) - \sin\theta = 0$ , которые лежат в малой окрестности  $\Re z = \frac{\pi}{2} + \Phi$ . Это полюс

$\zeta = \pi - \theta + \Phi = \frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0$ . Симметричный полюс находится в  $\zeta = -(\frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0)$ . Соответствующий вычет  $f(\cdot)$  имеет вид

$$\operatorname{res}_{z=\zeta} f(z) = 2 \operatorname{tg} \theta f\left(\frac{\pi}{2} - \Phi - i\tau_0\right), \quad \zeta = \frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0.$$

Вычет  $f$  в полюсах  $\zeta = \pm(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0)$ , отвечающих падающей волне, пропорционален постоянной  $\beta$ . Вклад этих полюсов в асимптотику определяется величиной  $4 \operatorname{tg} \theta f(\pi/2 - \Phi + i\tau_0)$ , которую надо приравнять единице, т.е. амплитуде падающей волны,  $\exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0 - \varphi)) = u_\infty$ . Это определяет постоянную  $\beta$ .

Учитывая сказанное выше, приходим к асимптотике при  $r \rightarrow \infty$

$$u(r, \varphi) = \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0 - \varphi)) + R \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0 - \varphi)) + \delta u \quad (3.8)$$

$$R = 4 \operatorname{tg} \theta f\left(\frac{\pi}{2} - \Phi - i\tau_0\right),$$

где  $\delta u$  экспоненциально мало равномерно по  $\varphi$  при  $\varphi \in [0, \Phi]$  по сравнению с первыми двумя слагаемыми. Второе слагаемое — это отраженная поверхностная волна с коэффициентом отражения  $R$ . Первое слагаемое в (3.8) падающая поверхностная волна

$$u_\infty = \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi + i\tau_0 - \varphi)) = \exp(-ik_x x + \gamma y); \quad k_x = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2},$$

а второе слагаемое

$$u_r = R \exp(kr \cos(\frac{\pi}{2} + \Phi - i\tau_0 - \varphi)) = R \exp(ik_x x + \gamma y)$$

— отраженная от берега поверхностная волна. Отметим, что бегущая к берегу поверхностная волна отражается от него по закону геометрической оптики: угол падения равен углу отражения. Поправочный член  $\delta u$  имеет порядок  $O(\exp(-kr)/\sqrt{r})$ , если не захватываются другие полюсы, лежащие в полосах  $\frac{\pi}{2} < |\Re(z + \varphi)| < \pi$ . В противном случае поправочный член  $\delta u$  имеет порядок  $O(\exp(-hr))$ , где  $h$  — это модуль вещественной части полюса, лежащего в полосах  $\frac{\pi}{2} < \Re(z + \varphi) < \pi$ , ближайшего к мнимой оси.

Основной результат данного раздела сформулируем в виде следующего Предложения.

**Предложение 1.** Существует классическое решение задачи (2.1)–(2.5), представленное интегралом Зоммерфельда (3.1) и имеющее в старшем порядке по  $r \rightarrow \infty$  асимптотику  $u_\infty + u_r$  в виде суммы падающей и отраженной волн.

Авторы статьи убеждены, что решение единственно, хотя доказательство этого факта требует отдельного обсуждения.

**4. Интегральное представление Ватсона–Бесселя и функционально-разностное уравнение второго порядка. Связь с интегралом Зоммерфельда.** В этом разделе рассматривается альтернативное представление для решения задачи (2.1)–(2.5), а именно представление Ватсона–Бесселя (ВБ), и проясняется его связь с интегралом Зоммерфельда (3.1). Представление ВБ является естественной заменой интегральному представлению Конторовича–Лебедева (КЛ), которое было успешно использовано при построении собственных функций дискретного спектра [8]. Однако, в нашем случае построение решения для существенного (непрерывного) спектра ( $-\gamma^2 \leq E = -\kappa^2 < 0$ ) представление КЛ не подходит ввиду проблем со сходимостью интеграла КЛ и возможностью подставлять это представление в краевое условие на  $F$ . Этого недостатка лишено представление ВБ. С этой проблемой сталкивается и автор работы [2] при проверке условия на свободной поверхности ([2, Appendix D]), причем, его мотивировка не выглядит достаточно прозрачной и убедительной.

Второе обстоятельство, которое стоит здесь прокомментировать, состоит в том, что как представление ВБ, так и представление КЛ не приспособлены для вычисления асимптотики при  $r \rightarrow \infty$ . Однако, эта задача решена с помощью интеграла Зоммерфельда в предыдущем разделе. Отметим, что представление ВБ для решения позволяет построить асимптотическое разложение при  $r \rightarrow 0$  довольно просто и эффективно, хотя этот анализ здесь опускается.

Представление ВБ имеет вид

$$u(r, \varphi) = iv.p. \int_{C_0^b} e^{-i\pi v/2} J_v(ikr) \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\varphi)} H(v) dv, \tag{4.1}$$

где  $H(\cdot)$  неизвестная мероморфная функция, принадлежащая специальному классу **H**, описанному ниже, и такая, что интеграл ВБ в (4.1) быстро сходится на контуре  $C_0^b$ , рис. 3. Представление (4.1) удовлетворяет уравнению (2.1) и краевому условию (2.3), если, в частности, неизвестная функция  $H$  принадлежит классу **H**, который задается условиями

1.  $H$  мероморфная четная функция,  $H(v) = H(-v)$ .
2.  $H$  голоморфна в  $\Pi_\delta = \{v \in \mathbb{C} : -\delta < \text{Re } v < \delta\}$  для некоторого  $\delta > 0$ .
3. Все полюсы  $H$  находятся внутри полосы  $|\text{Re } v| < b$  для некоторого  $b > 0$ .
4.  $|H(v)| < \text{Const} \exp(-|v| \sin|\psi| \frac{\pi}{2})$ ,  $|v| \rightarrow \infty$ ,  $\pm \psi \in [0, \pi/2]$  при  $v = |v| \exp(i\psi)$  вне полосы  $|\text{Re } v| < b$ .
5.  $H(v+1)$  голоморфна в полосе  $\Pi(-1, 0)$ ,  $H(v-1)$  голоморфна в полосе  $\Pi(0, 1)$ .

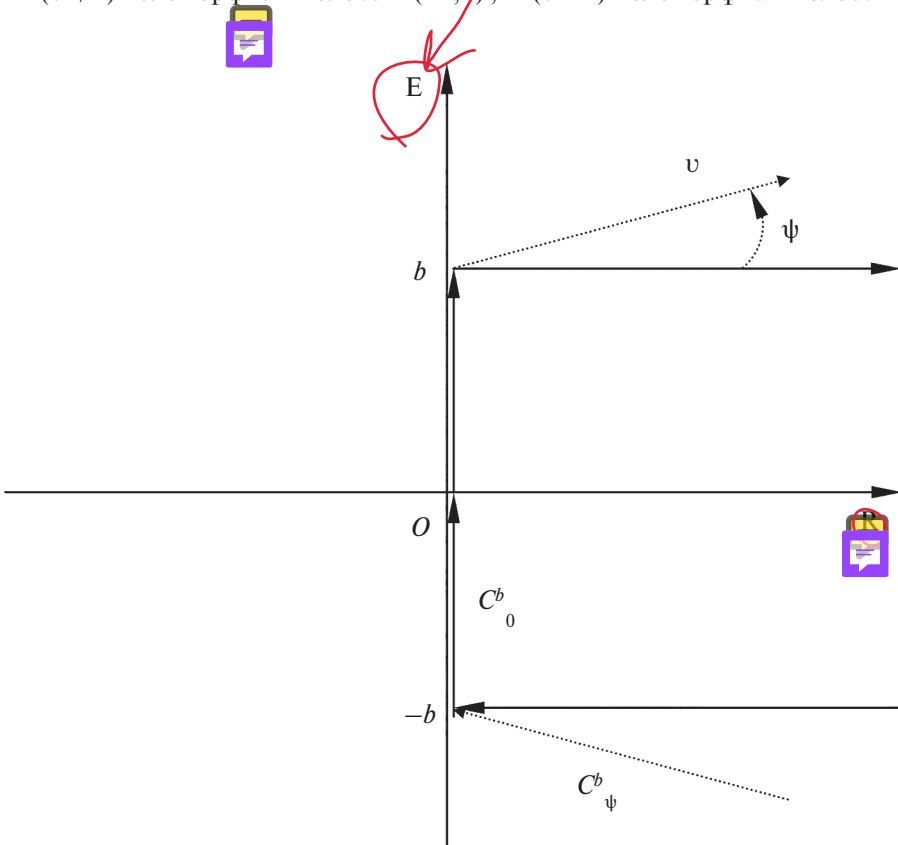


Рис. 3

Прямой подстановкой интеграла (4.1) в уравнение (2.1) и краевое условие (2.4) можно убедиться в их выполнении. Учтем, что

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left( 1 + \frac{v^2}{z^2} \right) \right\} J_\nu(iz) = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + v^2 \right) \cos(v\varphi) = 0$$

Возможность подстановки и дифференцирования под знаком интеграла обеспечивается быстрой сходимостью интеграла ввиду оценки на  $C_\psi^b$  и  $|v| \gg 1$ ,  $\psi \in [0, \pi/2]$ ,

$$\left| e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(i\kappa t) \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\varphi)} H(v) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|v|}} \left| e^{-i\pi\nu/2} \frac{\exp\{-v(\log v - 1) + v \log \frac{i\kappa r}{2}\}}{\exp\{\frac{\pi\nu}{2} \sin|\psi|\}} \right| \leq \\ \leq \frac{C}{\sqrt{|v|}} \exp\{-|v|([\log|v| - 1] - \log \frac{\kappa r}{2}) \cos \psi + |v|[\psi \sin|\psi| - \frac{\pi}{2} \sin|\psi|]\},$$

где использованы асимптотики  $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $\nu \in C_\psi^b$ , а также формулу Стирлинга для гамма-функции.

Подстановка интеграла ВБ в краевое условие (2.2) позволяет получить функционально разностные уравнения второго порядка для  $H$ , которое ему эквивалентно (см. [9, 13]). Однако, здесь используется немного иной путь. Устанавливается связь между интегралом ВБ в (4.1) и представлением Зоммерфельда (3.1), а затем проверяется “равносильность” функционального уравнения Малюжинца (3.3) и функционально разностного уравнения для его решения  $H$  как результат установленной связи.

Стоит прокомментировать сходимость при  $\nu = 0$  в смысле главного значения в (4.1). Интеграл в (4.1) может быть представлен суммой интегралов по отрезку  $[-ib, ib]$  мнимой оси и по  $C_0^b \setminus [-ib, ib]$  (см. рис. 3). Воспользуемся симметрией отрезка интегрирования  $[-ib, ib]$  относительно начала координат и преобразуем интеграл по нему с целью его регуляризации при  $\nu = 0$ ,

$$i\nu.p. \int_{-ib}^{ib} \frac{e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(i\kappa r) + e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(i\kappa r) \cos(v\varphi)}{2 \sin(v\varphi)} H(v) dv = \\ = \frac{i}{\pi} \nu.p. \int_{-ib}^{ib} \frac{\pi (e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(i\kappa r) - e^{i\pi\nu/2} J_{-\nu}(i\kappa r)) \sin(\pi\nu)}{2 \sin(\pi\nu) \sin(\Phi\nu)} \cos(v\varphi) H(v) dv = \\ = \frac{i}{\pi} \int_{-ib}^{ib} K_\nu(\kappa r) \frac{\sin(\pi\nu) \cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v) dv,$$

где для функции Макдональда  $K_\nu(z)$  использована формула 8.485 [12]. В последнем интеграле очевидно, что  $\nu = 0$  является устранимой особенностью, и интеграл (4.1) допускает регуляризацию при  $\nu = 0$ .

Обратимся теперь к связи интеграла ВБ в (4.1) с интегралом Зоммерфельда. Воспользуемся интегральным представлением

$$J_\nu(i\kappa r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_-} e^{\kappa r \cos z} e^{i\pi\nu/2 - iz\nu} dz,$$

которое следует из 8.412(4) в [12], подставим в (4.1) и поменяем порядки интегрирования, что оправдано при  $H \in \mathbf{H}$ ,

$$u(r, \varphi; \kappa) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} dz e^{\kappa r \cos z} 2 \left\{ \frac{\nu.p.}{2} \int_{C_0^b} e^{-iz\nu} \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v) dv \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} dz e^{i\kappa r \cos z} 2F_1(z, \varphi), \tag{4.2}$$

где  $\Im z < 0$ ,  $z \in \Pi(-\pi - \delta, \pi + \delta)$ ,  $\delta > 0$ ,

$$F_1(z, \varphi) = \frac{v.p.}{2} \int_{C_0^b} e^{-izv} \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v) dv.$$

Функция  $F_1(z, \varphi)$  допускает аналитическое продолжение из области  $\{z : \Im z < 0\} \cap \{z : -\pi - \delta < \Re z < \pi + \delta\}$  в полосу  $\Pi(-\pi - \delta, \pi + \delta)$ . Для этого необходимо воспользоваться оценкой  $|H(v)| < C \exp\{-\frac{\pi}{2}|v|\sin\psi\}$ ,  $\psi \in [0, \pi/2]$ , так как  $H \in \mathbf{H}$ . В действительности, справедлива асимптотика  $H(v) = O\left(\frac{1}{\cos(v[\frac{\pi}{2} + i\tau_0])}\right)$ ,  $|v| \rightarrow \pm\infty$  на  $C_\psi^b$  (см. [9]) в аналогичной задаче. Деформируем контур  $C_0^b \rightarrow C_\psi^b \rightarrow C_{\frac{\pi}{2}}^b$ , имеем

$$F_1(z, \varphi) = v.p. \frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv e^{-izv} \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v),$$

и, учитывая четность  $H$ ,  $\varphi \in [0, \Phi]$ ,

$$F_1(z, \varphi) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \sin(vz) \frac{\cos(v\varphi)}{\sin(v\Phi)} H(v); \quad |\Re z| < \frac{\pi}{2}. \quad (4.3)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} F_1(z, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(v[z + \varphi]) + \sin(v[z - \varphi])}{\sin(v\Phi)} \right\} H(v) = \\ &= \frac{1}{2} \{f(z + \varphi) + f(z - \varphi)\}, \end{aligned}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \frac{\sin(zv)}{\sin(v\Phi)} H(v) \quad (4.4)$$

или

$$f(z) = v.p. \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-ivz} \frac{H(v)}{2\sin(v\Phi)} dv, \quad |\Re z| < \frac{\pi}{2} + \Phi, \quad (4.5)$$

причем,  $f(\cdot)$  голоморфна в этой полосе. Из представлений (4.2) и (4.3), с учетом того, что  $F_1(z, \varphi) = \frac{1}{2}\{f(z + \varphi) + f(z - \varphi)\}$ , получается интегральное представление Зоммерфельда (3.2).

В предыдущем разделе найдена трансформанта Зоммерфельда  $f(\cdot)$  в замкнутой форме. Естественно, что по  $f(\cdot)$  можно восстановить  $H$  в представлении ВБ (4.1) с использованием (4.4), (4.5). Отметим, что  $f(z) \rightarrow \text{const}$   $z \rightarrow i\infty$  в полосе голоморфности  $\Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ . Проинтегрируем (4.5) при  $z \in \Pi(-\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi)$ , заметим, что  $f'(z)$  убывает экспоненциально при  $z \rightarrow \pm i\infty$

$$\frac{df(z)}{dz} = v.p. \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-ivz} \frac{vH(v)}{2i\sin(v\Phi)} dv = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(vz)}{\sin(v\Phi)} vH(v) dv,$$

и применим формулы обращения преобразования Фурье

$$H(v) = \frac{\sin(v\Phi)}{i\pi v} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{ivz} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = \frac{\sin(v\Phi)}{i\pi v} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\zeta \cos(\zeta v) \frac{df(\zeta)}{d\zeta}. \quad (4.6)$$

$H(\cdot)$  голоморфна в окрестности мнимой оси, можно проверить, что  $H \in \mathbf{H}$  (см. [9]).

Справедливо утверждение

**Лемма 4.** Если  $H \in \mathbf{H}$  является решением функционально-разностного уравнения второго порядка

$$H(v + 1) - H(v - 1) - 2i \frac{\gamma}{\kappa} \left\{ \frac{\text{ctg}(\Phi v)}{(-i)} \right\} H(v) = 0; \quad v \in \mathbb{C}, \quad (4.7)$$

то  $f \in M$  в (4.5) является решением уравнения Малюжинца (3.3) из класса  $M$ . Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство Леммы 4 основано на формуле (4.5), имеем

$$-\frac{\gamma}{\kappa} [f(z + \Phi) + f(z - \Phi)] = -\frac{\gamma}{\kappa} \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} 2 \sin(vz) \frac{\cos(\Phi v)}{\sin(\Phi v)} H(v) dv.$$

и

$$\sin z [f(z + \Phi) - f(z - \Phi)] = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv H(v) \{ \sin(z[v + 1]) - \sin(z[v - 1]) \}$$

Складывая эти равенства, получим

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dv \left\{ H(v) \sin(z[v + 1]) - H(v) \sin(z[v - 1]) - \frac{\gamma}{\kappa} 2 \sin(vz) \text{ctg}(\Phi v) H(v) \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}+1} dv \{ H(v-1) \sin(zv) \} - \\ &\quad - \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}-1} dv \{ H(v+1) \sin(zv) \} - \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}} dv \frac{2\gamma}{\kappa} H(v) \text{ctg}(\Phi v) = \\ &= \frac{(-1)}{2i} \int_{i\mathbb{R}+1} dv \sin(vz) \left\{ H(v+1) - H(v-1) + \frac{2\gamma}{\kappa} \text{ctg}(\Phi v) H(v) \right\}, \end{aligned}$$

где была использована деформация контуров  $i\mathbb{R} \pm 1$  в мнимую ось  $i\mathbb{R}$ , а также учтено, что  $H \in \mathbf{H}$ , т.е.  $H(v + 1)$  голоморфна в  $\Pi(-1, 0)$  и  $H(v - 1)$  голоморфна в  $\Pi(0, 1)$ . Из полученного равенства следует утверждение Леммы 4. Обратное утверждение – это следствие обращения преобразования Фурье по мнимой оси.

Уравнение (4.7) нуждается в комментарии. Его решение из  $\mathbf{H}$  при  $\gamma/\kappa \geq 1$  дается выражением (4.6), где  $f(\cdot)$  вычислена в квадратурах. Коэффициент  $V(v) = \text{ctg}(\Phi v)/(-i)$  называется мероморфным потенциалом в уравнении. Этот потенциал специального вида, который допускает применение процедуры решения аналогичной той, которая используется для линейных дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами, т.е. решения посредством интегрального представления Лапласа. Аналогичный прием, применяемый к уравнению (4.7), сводит его к разностному уравнению первого порядка, которое уже допускает решение в квадратурах. В данной работе такой подход не используется, так как уже получено решение уравнения (4.7) в форме интеграла (4.6).

В работе [13] предложен общий подход к изучению спектральных свойств уравнений вида (4.7) с потенциалом из достаточно широкого класса мероморфных функций. Обсуждаются достаточные условия существования дискретного спектра и его конечность. Потенциал  $V(v) = \frac{\text{ctg}(\Phi v)}{(-i)}$  попадает в упомянутый класс, но он выделен тем, что отвечающее ему модельное уравнение (4.7) является явно решаемой моделью.

**Заключительные замечания.** В настоящей работе получены интегральные представления для решения задачи о наклонном распространении поверхностной волны к береговой линии прибрежного водного клина. Решение представлено интегралом Зоммерфельда с трансформантой Зоммерфельда  $f$ , которая является мероморфным решением функционального уравнения. Решение ограничено вблизи береговой линии, а на больших расстояниях представимо суммой падающей и отраженной волн, оценена поправка к старшим членам асимптотики. С другой стороны, решение, полученное в [2] и имеющее логарифмическую сингулярность на береговой линии, не является, по нашему мнению, достаточно обоснованным с физической и математической точки зрения. В частности, его использование для описания физических результатов рассеяния наклонно падающей на берег поверхностной волны не кажется оправданным.

Наряду с представлением Зоммерфельда, получено решение в виде интеграла Ватсона–Бесселя. Показано, что неизвестная функция  $H(v)$  в подынтегральном выражении представима в терминах вычисленной ранее трансформанты Зоммерфельда  $f(z)$  и удовлетворяет разностному уравнению второго порядка с мероморфным потенциалом  $V(v) = \text{ctg}(\Phi v)/(-i)$ .

Насколько нам известно, физически обоснованное решение сформулированной модельной задачи в виде интегральных представлений Зоммерфельда и Ватсона–Бесселя получено впервые. Вычислена асимптотика,  $r \rightarrow \infty$ . Естественно ожидать, что решение может быть использовано в дальнейших качественных и количественных исследованиях волновой динамики жидкости вблизи и на удалении от берега умеренного наклона в рамках используемой модели.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант 22-11-00070, <https://rscf.ru/project/22-11-00070>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shrira V.I. et al.* Can edge waves be generated by wind? // *J. of Fluid Mech.* 2022. V. 934. P. A16–136.
2. *Ehrenmark U.T.* Oblique wave incidence on a plane beach: The classical problem revisited // *J. of Fluid Mech.* 1998. V. 368. P. 291–319.
3. *Isaacson E.* Water waves over a sloping bottom // *Commun. Pure Appl. Maths.*, 1950. V. 3. P. 11–31.
4. *Kuznetsov N., Maz'ya V., Vainberg B.* Linear Water Waves. Cambridge: Univ. Press, 2002. 513 p.
5. *Ursell F.* Edge waves on a sloping beach // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1952. V. 214. P. 79–97.
6. *Лялинов М.А.* Комментарий о собственных функциях и собственных числах оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робэна // *Зап. науч. сем. Санкт-Петербургского отд. математического института им. В.А. Стеклова РАН.* 2019, Т. 483. №49. С. 116–127.
7. *Khalile M., Pankrashkin K.* Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors // *Math. Nachrichten.* 2018. V. 291. №5–6. P. 928–965.
8. *Lyalinov M.A.* Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations // *Europ. J. of Appl. Math.* 2021. V. 33. P. 538–559.
9. *Лялинов М.А.* О собственных функциях существенного спектра модельной задачи для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом // *Матем. сб.* 2023. Т. 214(10). С. 3–29.
10. *Babich V.M., Lyalinov M.A., Grikurov V.E.* Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique. Oxford: Alpha Sci. Int., 2008. 215 p.
11. *Малюжинец Г.Д.* Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с произвольными поверхностными импедансами // *ДАН СССР.* 1985. Т. 3. С. 752–55.
12. *Gradshteyn I.S., Ryzhik M.I.* Table of Integrals, Series, and Products. New York: Acad. Press, 2007. 1108 p.
13. *Lyalinov M.A.* Functional Difference Equations and their link with Perturbations of the Mehler operator // *Rus. J. of Math. Phys.* 2022. V. 29. №3. P. 379–397.

## Integral Representations of Solution in the Problem on Skew Incidence of a Surface Wave on the Straight Shoreline Water Wedge

M.A. Lyalinov<sup>a,##</sup>, S.V. Polyanskaya<sup>ab,###</sup>

<sup>a</sup>Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

<sup>b</sup>North-Western Institute of Management RANEPА, St. Petersburg, Russia

<sup>#</sup>e-mail: lyalinov@yandex.ru

<sup>##</sup>e-mail: m.lyalinov@spbu.ru

<sup>###</sup>e-mail: polyanskaya-sv@ranepa.ru

In the linear approximation of the surface gravitational waves of small amplitude a classical model problem about the incursion of a surface wave under some angle on the shoreline is solved. The problem is formulated for the harmonic potential of velocity of the fluid in the 3D water wedge with the Robin-Steklov boundary condition on the free surface and with the no-flow condition along the normal on the bed of the water domain. Some critical comments about a known in the literature solution having a “non-physical” singularity of the logarithmic type on the coastal line are given. The asymptotics with respect to distance from the shoreline of the obtained solution, bounded on the edge, is constructed. The reflection coefficient of the wave reflected from the shoreline is calculated.

*Keywords:* surface wave, integral representations, functional equations, asymptotics

### REFERENCES

1. *Shrira V.I. et al.* Can edge waves be generated by wind? // *J. of Fluid Mech.*, 2022, vol. 934, pp. A16–136.
2. *Ehrenmark U.T.* Oblique wave incidence on a plane beach: The classical problem revisited // *J. of Fluid Mech.*, 1998, vol. 368, pp. 291–319.
3. *Isaacson E.* Water waves over a sloping bottom // *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, vol. 3, pp. 11–31.
4. *Kuznetsov N., Maz'ya V., Vainberg B.* *Linear Water Waves.* Cambridge: Univ. Press, 2002. 513 p.
5. *Ursell F.* Edge waves on a sloping beach // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1952, 214, pp. 79–97.
6. *Лялинов М.А.* Комментарий о собственных функциях и собственных числах оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робэна // *Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН*, 2019, Т. 483, №49. С. 116–127.
7. *Khalile M., Pankrashkin K.* Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors // *Math. Nachrichten*, 2018, vol. 291, no. 5–6, pp. 928–965.
8. *Lyalinov M.A.* Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations // *Europ. J. of Appl. Math.*, 2021, vol. 33, pp. 538–559.
9. *Лялинов М.А.* О собственных функциях существенного спектра модельной задачи для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом // *Математический сборник*, 2023, Т. 214(10). С. 3–29.
10. *Babich V.M., Lyalinov M.A., Grikurov V.E.* *Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique.* Oxford: Alpha Sci. Int., 2008. 215 p.
11. *Малюжинец Г.Д.* Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с произвольными поверхностными импедансами // *ДАН СССР*, 1985. Т. 3. С. 752–55.
12. *Gradshteyn I.S., Ryzhik M.I.* *Table of Integrals. Series, and Products.* N.Y.: Acad. Press, 2007. 1108 p.
13. *Lyalinov M.A.* Functional Difference Equations and their link with Perturbations of the Mehler operator // *Rus. J. of Math. Phys.*, 2022, vol. 29, no. 3, pp. 379–397.