Санкт-Петербургский государственный университет

Условия локальной параметрической идентифицируемости для некоторого класса систем с бесконечномерным параметром

Шалгин Владимир Сергеевич,
аспирант

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Сергей Юрьевич Пилюгин

Волгоград
2023

Задача локальной параметрической идентификации

- → Реальный объект или процесс, который исследуется.
- → Выбирается подходящий класс моделей.
- → Необходимость определения подходящих значений параметров модели.

Цель задачи параметрической идентификации

— установление условий *принципиальной возможности* определения значений неизвестных параметров на основе результатов наблюдений.

Свойство локальной параметрической идентифицируемости

— возможность определения неизвестного параметра *в окрестности заданного значения параметра* (номинального или расчётного значения параметра).

- → Часто дифференциальные уравнения и динамические системы, содержащие параметры, играют роль моделей реальных объектов.

- Ранее в задаче локальной идентифицируемости в основном изучался случай *конечномерного параметра*.
- Однако задача в случае *бесконечномерного параметра* изучена гораздо меньше.

Задачи

- Установление *достаточных условий* локальной идентифицируемости бесконечномерного параметра.
- Установление *типичности* полученных условий, будут ли почти все (в топологическом смысле) системы и параметры удовлетворять этим условиям.

Обзор

- Н. А. Бодунов. *Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости.* (2006)
— монография, охватывающая различные постановки задачи локальной идентификации, но с конечномерным параметром.
- Н. А. Бодунов, Г. И. Вольфсон. *Локальная идентифицируемость систем с переменным параметром.* (2009)
— Получено достаточное условие локальной идентифицируемости параметра-функции у системы дифференциальных уравнений по наблюдению в одной точке.
- Н. А. Бодунов, С. А. Колбина, С. Ю. Пилюгин. *Локально параметрически идентифицируемые системы типичны.* (2012)
— Показана типичность (топологическая) локальной идентифицируемости конечномерного параметра у систем типа вход-выход.
- Н. А. Бодунов, С. А. Колбина, С. Ю. Пилюгин. *Превалентность локально параметрически идентифицируемых систем.* (2015)
— Показана превалентность (типичность относительно меры) локальной идентифицируемости конечномерного параметра у систем типа вход-выход.

Постановка задачи

- Рассматривается система дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = f(t, x, p) \tag{1}$$
x, $p \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, вектор-функция f непрерывна по (t, x, p), непрерывно дифференцируема по (x, p), матрица $\frac{\partial f}{\partial p}$ класса C^1.
- **Параметр** p **— функция** от t класса C^1.
- Обозначим $\{p\} = \{p(t) \,:\, t \in [0, T]\}$,
$x(t, \{p\})$ — решение с фиксированным начальным данным $(0, x_0)$.
- Предполагается, что для любого p система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности, и решение $x(t, \{p\})$ определено на $[0, T]$.
- Система (1) рассматривалась в статье [1]. Однако наблюдение решения $x(t, \{p\})$ производилось только в одной точке $t = T$.
- В данной работе предлагается новый метод получения достаточных условий локальной идентифицируемости бесконечномерного параметра. При выполнении этих условий параметр, принадлежащий определенным классам, локально идентифицируется по наблюдению решения на конечном наборе точек.

Определение (1)

Система (1) ***локально идентифицируема*** *при* p_0 *по наблюдениям решения на множестве* $\mathcal{T} \subset [0, T]$, *если существует такое* $\delta > 0$, *что для любого* $p \neq p_0$, *удовлетворяющего условию* $||p - p_0|| < \delta$, *для каждого* $t \in \mathcal{T}$ *выполнено*

$$x(t, \{p_0\}) \neq x(t, \{p\}).$$

- Фиксируем параметр p_0. Обозначим

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t)).$$

Определение (2)

Система (1) *принадлежит* ***классу*** $\mathcal{F}(p_0)$, *если все нули определителя* $\det \mathcal{D}(t)$ *простые и их конечное число.*

Основные определения

- Пусть $\tau \in [0, T]$, обозначим через $Y_\tau(t)$ нормированную при $t = \tau$ фундаментальную матрицу линейной системы
$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t))}{\partial x} y.$$
- Определим семейство операторов $\Psi_{\tau,\theta} : \ C^1[0, T] \to \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau < \theta \le T$:
$$\Psi_{\tau,\theta}(p) = \int_\tau^\theta Y_\tau^{-1}(s)\mathcal{D}(s)p(s)\, ds.$$
- Для непрерывной функции $q(t), \ t \in [a, b]$ обозначим
$$||q||_{a,b} = \max_{t\in[a,b]} |q(t)|,$$
$$\|q\|_{i,a,b} = \int_a^b |q(t)|\, dt,$$

Теорема (1)

Пусть система (1) принадлежит классу $\mathcal{F}(p_0)$. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_s$ – нули определителя $\mathcal{D}(t)$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{s+1} = T$. Фиксируем индекс $k = 0, \ldots, s$. *Пусть $\tau = \tau_k$ и $\theta = \tau_{k+1}$. Обозначим $\Delta p(t) = p(t) - p_0(t)$.*
Введем два класса $A([\tau, \theta])$, $B([\tau, \theta])$ параметр-функций $p(t) \in C^1$. Общее условие принадлежности к ним: существует $\alpha > 0$, что

$$\|\Delta p\|_{i,\tau,\theta} \geq \alpha \|\Delta p\|_{\tau,\theta}.$$

$p(t) \in A([\tau, \theta])$, *если существует $\beta > 0$, что*

$$|\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \beta \|\Delta p\|_{i,\tau,\theta}.$$

$p(t) \in B([\tau, \theta])$, *если существует $\beta > 0$, что*

$$|\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \beta \|\mathcal{D}\Delta p\|_{i,\tau,\theta},$$

и $\det \mathcal{D}(\tau) = \det \mathcal{D}(\theta) = 0$, *и существует $\gamma > 0$, что*

$$\Delta p(t) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{D}(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + \gamma),$$

$$\Delta p(t) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{D}(\theta)), \quad t \in (\theta - \gamma, \theta].$$

Тогда существует $\delta > 0$, что если $p(t) \in A$ или $p(t) \in B$,

$$x(\tau_k, \{p\}) = x(\tau_k, \{p_0\}), \quad k = 1, \ldots, s+1,$$

и $\|p - p_0\|_{0,T} < \delta$, то $p(t) \equiv p_0(t)$ при $t \in [0, T]$.

Типичность свойства локальной идентифицируемости

- Рассмотрим систему, линейно зависящую от параметра
$$\dot{x} = f(t, x, p) = F(t, x) + G(t)p(t), \tag{2}$$
где $G(t) \in \mathcal{G}^{(r)}$ — множество диагональных матриц размера $n \times n$ класса C^r, $r \geq 1$ с сильной или слабой C^r-топологией.
- В этом случае $\dfrac{\partial f}{\partial p} = G(t)$.

Теорема (2)

Пусть $\mathcal{A}$ – множество матриц-функций $G(t) \in \mathcal{G}^{(r)}$, при которых утверждение теоремы 1 верно для системы с правой частью вида (2) *при любых начальном данном x_0, вектор-функции $F(t, x)$ и параметр-функции $p_0(t)$. Тогда $\mathcal{A}$ открыто и плотно в $\mathcal{G}^{(r)}$ с C^r-топологией с любым $r \geq 1$.*

Заключение

- Для систем класса $\mathcal{F}(p_0)$ выделены классы таких возмущений параметр-функции $p_0(t)$, что этот параметр локально идентифицируем в указанных классах возмущений по наблюдению решений в нулях определителя матрицы $\mathcal{D}(t)$, а также в точке T.
- Рассмотрен случай системы, линейно зависящей от параметра, и показано, что система вида

$$\dot{x} = F(t,x) + G(t)p$$

  с диагональной матрицей $G(t)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(p_0)$ для открытого и плотного в C^r-топологии множества матриц $G(t)$ при любом $r \geq 1$.

Спасибо!

Литература

[1] Бодунов, Н. А. Локальная идентифицируемость систем с переменным параметром / Н. А. Бодунов, Г. И. Вольфсон // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2009. – № 2. – С. 17–31.

[2] Бодунов, Н. А. Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости / Н.А. Бодунов. – Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2006 – 144 с.

[3] Бодунов Н. А., Локально параметрически идентифицируемые системы типичны / Н. А. Бодунов, С. А. Колбина, С. Ю. Пилюгин // Вестник СПбГУ. – 2012. –Сер. 1, № 2. – С. 16–20.

[4] Бодунов Н. А. Превалентность локально параметрически идентифицируемых систем / Н. А. Бодунов, С. А. Колбина, С. Ю. Пилюгин // Вестник СПбГУ. – 2015. –Сер. 1, Т. 2(60), № 4. – С. 517–523.

[5] Хирш, М. Дифференциальная топология / М. Хирш. – Москва: Мир, 1979. – 280 с.

Схема доказательства теоремы 1

- Доказательство опирается на линейное представление решения $x(\theta, \{p\})$, полученное в [1]:

$$x(\theta, \{p\}) - x(\theta, \{p_0\}) = Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p) + G_{\tau,\theta}(\Delta p),$$

$$G_{\tau,\theta}(\Delta p) = o(\|\Delta p\|_{\tau,\theta})$$

- С помощью технической леммы показывается, что из условий, наложенных на класс $B([\tau, \theta])$ следуют условия, наложенные на класс $A([\tau, \theta])$.
- По условию теоремы $x(\theta, \{p\}) - x(\theta, \{p_0\}) = 0$.
- Производятся противоположные оценки частей равенства

$$Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p) = -G_{\tau,\theta}(\Delta p)$$

  с помощью мининормы матрицы, неравенств из условия теоремы и малости $G_{\tau,\theta}(\Delta p)$ по сравнению с Δp. Делается вывод о равенстве Δp нулю.

Схема доказательства теоремы 2

- Открытость множества $\mathcal{A}$ следует из условий, наложенных на класс $\mathcal{F}(p_0)$.
- Сопоставляем матрице $G(t) = \mathrm{diag}(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ вектор $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$. Плотность множества $\mathcal{A}$ показывается в два этапа.
- По теореме трансверсальности $g(t)$ приближается таким вектором $\widetilde{g}(t)$, что $\widetilde{g}^{-1}(R_1)$ есть набор изолированных точек интервала, где R_1 — объединение гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ с ровно одной нулевой компонентой.
- Затем, с помощью струйной теоремы трансверсальности вектор $\widetilde{g}(t)$ в окрестности каждой точки множества $\widetilde{g}^{-1}(R_1)$ приближается вектором $\bar{g}(t)$ таким, что определитель соответствующей ему диагональной матрицы имеет только простые нули.