

Санкт–Петербургский государственный университет
Saint–Petersburg State University

Х Поляховские чтения

Материалы
международной научной конференции по механике,
23–27 сентября 2024 г., Санкт–Петербург, Россия

X Polyakhov's Reading

Proceedings
of the International Scientific Conference on Mechanics,
September 23–27, 2024, Saint–Petersburg, Russia

Санкт–Петербург
2024

УДК 531/534+537+539+51-7+52

ББК 22.2

Д 37

Д 37 X Поляховские чтения : Материалы международной научной конференции по механике, 23–27 сентября 2024 г., Санкт–Петербург, Россия. — СПб.: Издательство ВВМ, 2024. 755 с.

ISBN 978-5-9651-1587-7

В сборник включены материалы докладов, представленных на международную научную конференцию по механике «X Поляховские чтения», которая посвящена 300-летию Санкт-Петербургского университета и 300-летию Российской Академии наук. Материалы содержат информацию о проведенных исследованиях и представляют собой статьи небольшого размера, в которых даётся обобщённое изложение полученных результатов. Обсуждаются современные проблемы теоретической и прикладной механики, динамики естественных и искусственных небесных тел, гидроаэромеханики, физико-химической аэромеханики, механики деформируемого твёрдого тела, устойчивости и стабилизации механических и электромеханических систем, биомеханики, физической механики, применения методов искусственного интеллекта в задачах механики и истории механики.

Под редакцией:

Е.В. Кустовой, А.А. Тихонова, О.В. Куновой, Г.В. Павилайнен, А.В. Орехова.

ISBN 978-5-9651-1587-7

© Авторы, 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Поляховские чтения» были впервые проведены в 1997 году в формате Всероссийской конференции в связи с 90-летием выдающегося учёного, профессора Н.Н. Поляхова (1906–1987), оставившего яркий след в истории отечественной науки. Конференция привлекла широкое внимание российских и зарубежных учёных-механиков. С 2003 года «Поляховские чтения» приобрели статус международной конференции и по традиции проводятся в Санкт-Петербурге один раз в три года. Тематика «Поляховских чтений» охватывает практически все фундаментальные направления современной механики и в последнее время имеет ярко выраженный междисциплинарный характер. Эта особенность конференции связана с многогранностью научных интересов профессора Н.Н. Поляхова.

Начиная с 2012 года «Поляховские чтения» концентрируют внимание на памяти крупных отечественных учёных или на памятных датах российской науки, в 2024 году «Поляховские чтения» посвящаются 300-летию Санкт-Петербургского университета и 300-летию Российской Академии наук.

Научные направления конференции:

1. Теоретическая и прикладная механика
2. Динамика естественных и искусственных небесных тел
3. Гидроаэромеханика
4. Физико-химическая аэромеханика
5. Механика деформируемого твёрдого тела
6. Устойчивость и стабилизация механических и электромеханических систем
7. Биомеханика
8. Физическая механика
9. Методы искусственного интеллекта в задачах механики
10. История механики

Рабочие языки конференции — русский и английский.

Организатор конференции:

Санкт–Петербургский государственный университет (СПбГУ)

Соорганизаторы конференции:

- Российская Академия Наук (РАН)
- Национальный Комитет по Теоретической и прикладной механике
- Институт проблем машиноведения РАН
- Санкт–Петербургский Дом ученых им. М. Горького
- ФГУП Крыловский государственный научный центр
- Санкт–Петербургский государственный морской технический университет
- Военно–космическая академия им. А.Ф. Можайского
- Санкт–Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого
- Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова

Председатель конференции:

Морозов Никита Федорович, профессор, академик РАН, СПбГУ

Организационный комитет конференции:

Сопредседатели:

Кустова Е.В. (СПбГУ), Тихонов А.А. (СПбГУ)

Ученый секретарь:

Кунова О.В. (СПбГУ)

Члены оргкомитета:

Быков В.Г. (СПбГУ), Ворошилова Ю.Н. (СПбГУ), Горбулин В.И. (Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского), Датаяшева К.К. (Санкт-Петербургский Дом учёных им. М. Горького), Добров Ю.В. (СПбГУ), Исаев С.А. (СПбГМУ), Кац В.М. (СПбГУ), Морозов В.А. (СПбГУ), Нестерчук Г.А. (СПбГУ), Орехов А.В. (СПбГУ), Павилайнен Г.В. (СПбГУ), Полянский В.А. (Институт проблем машиноведения РАН), Поляхова Е.Н. (СПбГУ), Рябинин А.Н. (СПбГУ), Смирнов А.Л. (СПбГУ), Соловьев С.Ю. (ФГУП Крыловский государственный научный центр), Циркунов Ю.М. (БГТУ «Военмех»), Шакурова Л.А. (СПбГУ).

Научный программный комитет конференции:

Альтенбах Х. (Германия)	Бардин Б.С. (Россия)
Бауэр С.М. (Россия)	Беляев А.К. (Россия)
Босяков С.М. (Беларусь)	Гайфуллин А.М. (Россия)
Георгиевский Д.В. (Россия)	Голубев Ю.Ф. (Россия)
Горячева И.Г. (Россия)	Джайчибеков Н.Ж. (Казахстан)
Егоров И.В. (Россия)	Каспер Р. (Германия)
Козлов В.В. (Россия)	Красильников П.С. (Россия)
Кривцов А.М. (Россия)	Кузнецов Н.В. (Россия)
Кустова Е.В. (Россия)	Магомедов М.Х. (Россия)
Маркеев А.П. (Россия)	Михасев Г.И. (Китай)
Овчинников М.Ю. (Россия)	Паскаль М. (Франция)
Петров Ю.В. (Россия)	Петухов В.Г. (Россия)
Смирнов Е.М. (Россия)	Спасич Д. (Сербия)
Старинова О.Л. (Россия)	Степанов С.Я. (Россия)
Тхай В.Н. (Россия)	Филипов С.Б. (Россия)
Фомин В.М. (Россия)	Фрадков А.Л. (Россия)
Черноусько Ф.Л. (Россия)	Чжао Я-Пу (Китай)
Чиненова В.Н. (Россия)	Шарафутдинов И.З. (Россия)
Шилько С.В. (Беларусь)	Юшков М.П. (Россия)

FOREWORD

The “Polyakhov’s reading” has first been held in 1997 as an all-Russian conference dedicated to the 90th anniversary of the outstanding scientist, Professor N.N. Polyakhov (1906–1987), who left a bright trace in the history of Russian science. The conference attracted the attention of Russian and foreign scientists, involved in problems of modern mechanics. Since 2003, “Polyakhov’s reading” has acquired the status of an international conference and is traditionally held in St. Petersburg once in three years. The conference scope covers almost all the fundamental areas of modern mechanics and lately has had a pronounced interdisciplinary nature. This feature of the conference is associated with broad scientific interests of Professor N.N. Polyakhov.

Since 2012, the “Polyakhov’s reading” have been dedicated to the memory of major Russian scientists or memorable dates in Russian science. These “Polyakhov’s reading” are dedicated to the 300th anniversary of St. Petersburg University and the 300th anniversary of the Russian Academy of Sciences.

Conference Topics:

1. Theoretical and Applied Mechanics
2. Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies
3. Mechanics of Fluids and Gases
4. Physico-chemical aeromechanics
5. Mechanics of Solids
6. Stability and Stabilization of Mechanical and Electromechanical Systems
7. Biomechanics
8. Physical Mechanics
9. Artificial Intelligence Methods in Mechanics
10. History of Mechanics

Working languages of the conference are Russian and English.

Conference organizer:

Saint Petersburg State University (SPbU)

Conference co-organizers:

- Russian Academy of Sciences (RAS)
- Russian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics
- Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS
- Saint Petersburg House of Scientists named after M. Gorky
- Krylov State Research Centre
- Saint Petersburg State Marine Technical University
- A.F. Mozhaysky Military–Space Academy
- Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
- Baltic State Technical University “Voenmech” named after D.F. Ustinov

Conference Chairman:

Nikita Morozov, Academician of the Russian Academy of Sciences, SPbU.

Organizing Committee:

Co-chairs:

Elena Kustova (SPbU), Alexey Tikhonov (SPbU)

Scientific secretary:

Olga Kunova (SPbU)

Members:

Vladimir Bykov (SPbU), Yulia Voroshilova (SPbU), Vladimir Gorbulin (A.F. Mozhaysky Military-Space Academy), Kamila Datayasheva (Saint Petersburg House of Scientists), Yuriy Dobrov (SPbU), Sergey Isaev (Saint-Petersburg State Marine Technical University), Victor Kats (SPbU), Victor Morozov (SPbU), Grigoriy Nesterchuk (SPbU), Andrey Orekhov (SPbU), Galina Pavilaynen (SPbU), Vladimir Polyanskiy (IPMash RAS), Elena Polyakhova (SPbU), Anatoliy Ryabinin (SPbU), Andrey Smirnov (SPbU), Sergey Solovev (Krylov State Research Centre), Yuriy Tsirkunov (Baltic State Technical University “Voenmeh”), Liia Shakurova (SPbU).

Scientific Program Committee:

Holm Altenbach (Germany)	Boris Bardin (Russia)
Svetlana Bauer (Russia)	Alexander Belyaev (Russia)
Sergey Bosiakov (Belarus)	Vera Chinenova (Russia)
Alexander Gaifullin (Russia)	Dimitriy Georgievskii (Russia)
Yuriy Golubev (Russia)	Irina Goryacheva (Russia)
Nurbolat Jaichibekov (Kazakhstan)	Ivan Egorov (Russia)
Roland Kasper (Germany)	Valeriy Kozlov (Russia)
Pavel Krasilnikov (Russia)	Anton Krivtsov (Russia)
Nikolay Kuznetsov (Russia)	Elena Kustova (Russia)
Magomed Magomedov (Russia)	Anatoliy Markeev (Russia)
Gennadiy Mikhasev (China)	Mikhail Ovchinnikov (Russia)
Madeleine Pascal (France)	Yuriy Petrov (Russia)
Viacheslav Petukhov (Russia)	Evgeniy Smirnov (Russia)
Dragan Spasic (Serbia)	Olga Starinova (Russia)
Sergey Stepanov (Russia)	Valentin Tkhai (Russia)
Sergey Filippov (Russia)	Vasiliy Fomin (Russia)
Alexander Fradkov (Russia)	Felix Chernousko (Russia)
Ya-Pu Zhao (China)	Ildar Sharafutdinov (Russia)
Sergey Shil'ko (Belarus)	Mikhail Yushkov (Russia)



Николай Николаевич Поляхов
(1906–1987)

СОДЕРЖАНИЕ (*CONTENTS*)Пленарные доклады
(*Plenary reports*)

<i>Кустова Е.В., Тихонов А.А.</i> Научные школы механики Санкт-Петербургского университета: к 300-летию СПбГУ	28
<i>Гайфуллин А.М., Свириденко Ю.Н.</i> Вихревой след за пассажирским самолетом. От простых моделей к тренажерам	30
<i>Георгиевский Д.В.</i> Два термодинамических постулата механики сплошной среды	33
<i>Босяков С.М., Малец Е.Л., Петрова Л.Г.</i> Математическое моделирование биомеханической системы среднего уха человека	37
<i>Петухов В.Г.</i> Методы оптимального управления в проектировании траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками	41
<i>Сальникова Т.В., Кугушев Е.И.</i> Локализованные траектории в окрестности неустойчивого положения равновесия	45
<i>Исаев С.А., Никущенко Д.В., Клюс А.А., Сероштанов В.В., Чулюнин А.Ю., Душин Н.С.</i> Аномальная интенсификация отрывных течений и теплообмена в наклонных канавках на структурированных энергоэффективных поверхностях	47
<i>Овчинников М.Ю., Ширококов М.Г.</i> Методы проектирования траекторий перелета малых космических аппаратов к Луне	51
<i>Ивашкин В.В., Сидоренко В.В.</i> Академик Т.М. Энеев: ракеты, галактики и молекулы ДНК	55

Секция 1. Теоретическая и прикладная механика
(Theoretical and Applied Mechanics)

<i>Барабанов И.Н., Тхай В.Н.</i> Агрегирование цепочки консервативных систем с притягивающим циклом	59
<i>Бардин Б.С.</i> О тождественном резонансе в задаче об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Гесса	61
<i>Беличенко М.В., Офицерова Т.И.</i> Моделирование двумерного движения вибрационного робота по плоскости	65
<i>Буров А.А.</i> О равновесиях систем, стеснённых связями, задаваемыми кусочно-дифференцируемыми функциями	70
<i>Бурьян С.Н.</i> Вопросы динамики для механических систем с геометрическими особенностями	74
<i>Василов Д.С., Головина В.В., Кудрявцев А.А., Рымкевич О.В.</i> О влиянии сосредоточенного включения на спектр собственных колебаний струны и балки Бернулли-Эйлера	78
<i>Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.</i> Метод выхода робота из аварийной ситуации на спине	82
<i>Дегилевич Е.А., Смирнов А.С.</i> Динамический анализ балочного маятника	86
<i>Дмитриев Н.Н.</i> Сравнение динамики скольжения твердого тела по плоскости с учетом адгезионного и линейного ортотропного трения	90
<i>Досаев М.З.</i> О выборе предпочтительного расположения внутренних движущихся элементов плоской модели капсульного робота с маховиком и дебалансом	94
<i>Ковалёв М.Д.</i> О математических моделях и структурных формулах теории механизмов	97
<i>Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.</i> Аппроксимация критических значений коэффициента демпфирования в бестоковой модели синхронного электромотора	101

Кугушев Е.И., Шахова Т.В.

О точности метода последовательного усреднения в системах с много-
частотными возмущениями 105

Кулешов А.С., Скрипкин А.Д.

О существовании лиувиллевых решений в интегрируемом случае Гесса
задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой 109

Малых Е.В., Смышляева А.В., Черкасов О.Ю.

Оптимальное программирование тяги в двумерной задаче Годдарда . . 114

Маркеев А.П.

Нелинейные колебания трёхосного эллипсоида на гладкой горизон-
тальной плоскости 118

Мельников В.Г., Дударенко Н.А.

Итерационный метод построения последовательностей дифференци-
альных неравенств для оценки устойчивости нелинейных систем 121

Морозов Д.В., Смирнов А.С.

Колебания двойного маятника со степенным законом трения 125

Науменко А., Лаврененко Э., Ардашев Н., Чернов В., Нечумаев А.

Особенности синтеза регулятора с использованием языка программи-
рования Python в задаче движения мобильного робота вдоль стенки . 129

Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А.

Вращательные режимы торможения оперенного тела в сопротивляю-
щейся среде 134

Орёл Н.А.

Оптимальное торможение в сопротивляющейся среде 137

Петров Т.А.

Вычислительное моделирование высокоскоростного удара в преграду
из сфер, опирающихся на тонкую алюминиевую пластину 141

Petrova V.I.

Dynamics of one experimental dynamic stand with a Stewart platform . . 145

Розенблат Г.М., Яшина М.В.

О динамике системы твердых тел с абсолютно гибкими нитями: при-
ложения к подъемно-транспортным механизмам 149

Селин Н.А., Удалов П.П., Лукин А.В., Попов И.А., Николаев И.В.

О методах исследования нелинейной динамики электромагнитного бес-
контактного подвеса 153

Смирнов А.С., Морозов Д.В.

Оптимизация демпфирования колебаний автомобиля 157

<i>Смирнова Н.В.</i>	
Задача о брахистохроне с ограничениями на угол наклона траектории и силой тяги	161
<i>Суханов А.А.</i>	
Механика гибкой нити в жидкости	164
<i>Сухов Е.А., Чекина Е.А., Чекин А.М.</i>	
Алгоритм и программный комплекс для автоматического построения компьютерных моделей систем многих тел	168
<i>Теплова Т.Ю., Юшков М.П.</i>	
Возникновение неголономной связи высокого порядка при управлении движением механической «руки» манипулятора с использованием принципа максимума Понтрягина	172
<i>Турешбаев А.Т.</i>	
Глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точке либрации в задаче Хилла	176
<i>Тхай В.Н.</i>	
Глобальное семейство периодических движений механической системы с параметром	178
<i>Шамолин М.В.</i>	
Инварианты механических систем с диссипацией	182
<i>Shutyomov I.T., Yushkov M.P.</i>	
Problem of target guidance with pursuit method: solution with Udwadia–Kalaba equations (The 300th anniversary of Saint Petersburg State University and D.K. Faddeev Academic Gymnasium)	184

Секция 2. Динамика естественных и искусственных небесных тел (*Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies*)

<i>Бабаджанянц Л.К.</i> , <i>Потоцкая И.Ю., Пупышева Ю.Ю.</i>	
Алгоритм оптимизации вычислений в задачах небесной механики	189
<i>Байков А.Е., Майоров А.Ю.</i>	
Плоская круговая ограниченная задача четырёх тел: исследование внутренних движений	193
<i>Брыкина И.Г., Егорова Л.А.</i>	
О закономерностях распределений по массам фрагментов разрушенных метеороидов и астероидов	197

Васькова В.С.

О наискорейшем перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом 201

Галушина Т.Ю., Летнер О.Н.

Астероиды, сближающиеся с Землей и Юпитером 204

Доброславский А.В., Красильников П.С.

Об эволюции кеплеровских элементов астероида во внешней круговой задаче трех тел 208

Ефимова П.А., Алферов Г.В., Шиманчук Д.В.

Архитектура системы билатерального управления космическим роботом 212

Иванюхин А.В.

Транзитные траектории временного захвата в окрестности точек либрации для проектирования низкоэнергетических межпланетных перелётов 216

Ивашкин В.В., Иванюхин А.В.

Метод Охоцимского–Егорова для решения задачи Эйлера–Ламберта . 220

Клюшин М.А., Максименко М.В., Сахаров В.Ю., Тихонов А.А.

Об электродинамической стабилизации углового движения искусственного спутника Земли на эллиптической орбите 224

Королев В.С., Поляхова Е.Н., Потоцкая И.Ю., Турешбаев А.Т.

Перспективы фотогравитационной небесной механики для управления космическими системами 228

Красильников П.С., Исмагилов А.Р.

О движениях гантели на инвариантном многообразии «гравитационный пропеллер» в обобщённой эллиптической задаче Ситникова 232

Кузнецов Э.Д., Васильева М.А., Перминов А.С., Сафронова В.С.

Оценка возраста пар в молодом семействе астероидов Emilkowalski . . 236

Морозов В.М., Сахаров В.Ю., Тихонов А.А.

О трехосной стабилизации заряженного ИСЗ с центрованным распределением заряда 240

Олемской И.В., Еремин А.С.

Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка 242

Перепелкин В.В.

О возбуждении колебательного процесса земного полюса с частотой прецессии лунной орбиты 246

<i>Перепухов Д.Г., Трофимов С.П.</i> Асимптотический анализ относительного движения космических аппаратов на близких гиперболических траекториях	249
<i>Петров Н.А., Кутеева Г.А.</i> Изучение орбит опасных астероидов	253
<i>Родников А.В.</i> О калибровочных характеристиках солнечного паруса	256
<i>Старинова О.Л., Поляхова Е.Н., Чернякина И.В., Хабибуллин Р.М., Рожков М.А., Демина А.Ю.</i> Солнечные паруса в Самаре — перспективы и проекты	259
<i>Суслов К.С., Ширококов М.Г.</i> Полиномиальная аппроксимация функции управления для оптимизации перелётов с малой тягой	263
<i>Титов В.Б.</i> Траектории периодических орбит общей задачи трех тел в пространстве форм	267
<i>Томилова И.В., Салейко К.В., Бордовицyna Т.В.</i> Определение динамических параметров околоземных объектов по данным позиционных и фотометрических измерений	270
<i>Ширококов М.Г.</i> Быстрый баллистический анализ траекторий перелета к Луне с малой тягой на основе управления с обратной связью	274

Секция 3. Гидроаэромеханика (*Hydroaeromechanics*)

<i>Амелюшкин И.А., Павленко О.В., Кинса С.Б., Реслан М.Г., Февральских А.В.</i> Численные исследования особенностей нарастания льда с работающим воздушным винтом на крыле летательного аппарата	279
<i>Белюсов И.Ю., Виноградов О.Н., Корнушенко А.В., Павленко О.В., Тханг Нгок Чинь</i> Аэродинамические особенности обтекания крыла с солнечными панелями	283
<i>Brutyay M.A., Ye Htun, Pavlenko O.V.</i> Numerical simulation of air humidity influence on the take-off aerodynamic characteristics of a wing airfoil with a flap	287

<i>Галаев С.А., Левченко А.М., Рис В.В.</i> Влияние вращения на течение в П-образном канале с внутренним оребрением	291
<i>Гембаржевский Г.В.</i> Моды и режимы течения в ближнем следе от цилиндров, установленных бок о бок, в рамках простой модели	295
<i>Головкин М.А., Павленко О.В., Раздобарин А.М., Багдади М.К.</i> Особенности воздействия генератора вихрей на отрывную зону крыла	299
<i>Губский В.В., Дружинин О.В., Павленко О.В., Мусса Х.</i> Численные исследования влияния наличия щелей при отклонении механизации крыла на аэродинамические характеристики модели самолета	302
<i>Губский В.В., Павленко О.В., Мусса Х., Февральских А.В.</i> Влияние аэроупругих деформаций на обледенение крыла	306
<i>Дегтярев Н.Д.</i> Численное моделирование трехмерного обтекания модели ЛА с газодинамическими элементами управления	311
<i>Джусайчибеков Н.Ж., Жуманбаева А.С., Курманова Д.Е.</i> Численный расчет движения нефтепродуктов в теплообменнике	315
<i>Ефимов Д.А., Дорофеева Ю.А., Старцева Ю.В.</i> Моделирование движения твердой частицы в пылеулавливающих аппаратах со встречными закрученными потоками с учетом изменения радиуса частицы	318
<i>Засимова М.А., Филатова А.В., Абрамов А.Г., Пожилов А.А.</i> Исследование свободноконвективного течения и теплообмена воздуха в однорядном пучке горизонтальных оребренных труб: вариация температуры труб и расстояния между трубами	322
<i>Исламова А.Г., Шлегель Н.Е., Ткаченко П.П., Стрижак П.А.</i> Вторичное измельчение капель топлив в камерах энергетических установок	326
<i>Исламова А.Г., Шуляев С.А., Стрижак П.А.</i> Столкновение капель дистиллированной воды с поверхностями мембран	330
<i>Казанков В.К., Перегудин С.И., Холодова С.Е.</i> Волновая динамика в геофизических процессах	334
<i>Каун Ю.В., Колычев А.В., Архипов П.А.</i> Тепловая защита центрального тела многокамерной двигательной установки на основе явления термоэлектронной эмиссии	336

<i>Киреев В.Н., Шалабаева Б.С., Джайчибеков Н.Ж.</i> Математическая модель динамики «классических» и «сложных» деформируемых капель под действием электромагнитного поля	338
<i>Кострова М.С., Тетерина И.В.</i> Газодинамические процессы в ракетном двигателе на твердом топливе при отсечке тяги	343
<i>Куйбин П.А.</i> Моделирование неустойчивости винтового вихря на основе локально-индукционного приближения	345
<i>Курбатова Г.И., Клемешев В.А., Виноградова Е.М.</i> Численные и аналитические решения одномерных нестационарных задач транспортировки газа по трубам	349
<i>Лаптинская М.М., Чернышов М.В.</i> Газодинамическое проектирование профиля крыла высокоскоростного летательного аппарата с оптимальными характеристиками	353
<i>Мушка И.Н.</i> Численное моделирование влияния оребрения стенок жаровой трубы на эмиссионные характеристики	355
<i>Paulenko O.V., Fevral'skih A.V., Baghdadi M.K., Natour M.Z.</i> Numerical investigation of the influence of deflection of the airfoil flap in ground effect	358
<i>Павленко О.В., Пигусов Е.А., Айшвария Сантош, Тханг Нгок Чинь</i> Влияние бокового ветра на тягу воздушных винтов, установленных на концах крыла сверхбольшого удлинения	361
<i>Рыбаков М.О.</i> Аэродинамика тонкого профиля планирующего летательного аппарата при трансзвуковом полёте	365
<i>Рябинин А.Н.</i> Демпфирование вращения цилиндров в воздушном потоке	367
<i>Рябинин А.Н., Данилов А.В.</i> Физическое моделирование колебаний груза со стабилизатором в воздушном потоке	371
<i>Смирнов А.А., Циркунов Ю.М.</i> Анализ возможности использования метана и водорода в энергетических установках	374
<i>Смирнов Е.М., Гатаулин Я.А.</i> О развитии локальной турбулентности при отрывном обтекании местного асимметричного сужения круглой трубки	377

Соловьев С.Ю., Храпунов Е.Ф.

Проведение полного цикла экспериментальных исследований для обеспечения аэроупругой устойчивости мостового сооружения 381

Храпунов Е.Ф., Соловьев С.Ю., Новиков А.Н., Можайский С.А.

Методы экспериментального определения динамического отклика гибкой конструкции на воздействие развитого турбулентного потока . . . 385

Секция 4. Физико-химическая аэромеханика *(Physico-chemical aeromechanics)*

Баталов С.А., Кустова Е.В.

Исследование влияния диффузии и объемной вязкости на структуру ударной волны в смеси $\text{CO}_2\text{-Ar}$ 390

Брыкина И.Г., Егорова Л.А.

О неопределенности моделирования траектории, скорости, массы и энерговыделения метеороида в атмосфере, связанной с моделью абляции 394

Быков Н.Ю., Горбачев Ю.Е., Деринг Е.Д., Фёдоров С.А.

Динамика кластеров в сверхзвуковой недорасширенной струе 398

Быков Н.Ю., Захаров В.В., Тонков Д.Н.

Эжекция пыли с поверхности пористого кометного ядра с кавернами . 401

Gorbachev Yu.E., Bykov N.Yu.

Small cluster formation modelling 404

Gorbachev Yu.E., Kunova O.V.

Relaxation within the approximation of one- and two-temperature non-equilibrium dissociation rates 408

Gorbachev Yu.E., Rukolaine S.A.

On two-temperature gas-dynamic equations for a binary gas mixture . . . 412

Косьяничук В.В.

Моделирование течения газовой смеси в разреженном режиме через систему вращающихся турбин 416

Кравченко Д.С., Кунова О.В., Кустова Е.В., Мельник М.Ю.

Роль кинетики окиси азота в высокотемпературных течениях газов . . 420

Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Парёнкина В.И., Сатюков Д.Г.

Функция распределения пар молекул модифицированной бимодальной модели ударной волны 424

Лазарева Г.Г.

Прогноз параметров плазмы в спиральном магнитном поле на основе моделирования и анализ точности численного решения 427

Маламанов С.Ю.

О деталях моделирования воздействия «всплеска» магнитного поля на движение проводящей жидкости 431

Морозов А.А., Титарев В.А.

Динамика изменения формы облака при наносекундном лазерном испарении в вакуум 434

Норкин М.М., Шакурова Л.А., Кустова Е.В.

Континуальные подходы к моделированию течения разреженного газа в задаче Куэтта 438

Прозорова Э.В.

Роль момента при распределенных шагрузках в механике 442

Скорютин А.И., Юдин И.Б., Морозов А.А.

Численное исследование срыва потока при сверхзвуковом истечении газа из двух соосных кольцевых сопел в камеру низкого давления . . . 446

Тань Л., Баталов С.А., Кустова Е.В.

Исследование структуры ударной волны в CO_2 с учетом колебательной релаксации в рамках континуального и кинетического подходов 449

Титарев В.А., Морозов А.А.

Анализ времяпролетных распределений частиц при наносекундном испарении в вакуум на основе различных кинетических подходов 453

Фёдоров С.А., Быков Н.Ю.

Алгоритмы параллелизации для метода прямого статистического моделирования на основе технологий OpenMP и MPI 456

Шайхутдинова А.А., Мельник М.Ю., Кустова Е.В.

О влиянии учёта свободных электронов и коэффициентов скорости неравновесных химических реакций в послеразрядной зоне 460

Шакурова Л.А., Кустова Е.В., Норкин М.М.

Особенности многотемпературного моделирования течений разреженных газов вблизи твердых тел 463

Шоев Г.В., Шершнев А.А., Шкрядов Т.Ю., Борисов С.П., Кудрявцев А.Н.

Моделирование неравновесных и околоконтинуальных течений в решателе NuCFS-R 466

Секция 5. Механика деформируемого твердого тела
(Mechanics of Solids)

<i>Антонов А.Ю., Вараюнь М.И., Егоров Н.В.</i>	
О деформации сферического катода пондеромоторными силами	473
<i>Антонова М.Н., Чжао Ш., Петров Ю.В., Женг М., Ли Б.</i>	
Моделирование явления зуба текучести и влияние размера зерна на величину инкубационного времени	477
<i>Арутюнян А.Р.</i>	
Изменение механических характеристик образцов капролона после естественного, деформационного и гидротермического старения	481
<i>Банько В.А., Георгиевский Д.В.</i>	
Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести	485
<i>Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.</i>	
О появлении несимметричных форм равновесия у круглых пластин и пологих оболочек, нагруженных нормальным давлением	489
<i>Бочкарёв А.О., Орехов А.В., Павилайнен Г.В.</i>	
Верификация числовых значений потенциальной энергии изгиба нанокантилевера	492
<i>Волков Г.А., Вьюненко Ю.Н., Киселев А.Ю.</i>	
Обратимая память формы в равномассовых кольцевых пучковых элементах из никелида титана	496
<i>Голоскоков Д.П., Матросов А.В.</i>	
Метод начальных функций в расчетах моментной теории упругости	499
<i>Grekov M.A.</i>	
Stress state of a nanoplate with a circular nanohole under uniaxial remote loading	503
<i>Дзедзисашвили Г.Т., Смирнов А.Л., Филиппов С.Б.</i>	
Колебания призматических оболочек	507
<i>Дорофеев Н.П., Наумова Н.В., Нечунаев А.Ф., Филиппов С.Б.</i>	
Поведение системы «ударник – преграда» в случае высокоскоростного удара керамического тела в тонкую алюминиевую преграду	509
<i>Дорофеева Ю.А., Зыков И.Д., Никитин С.В., Самборский Г.Д.</i>	
Применение метода морфологической сшивки для обнаружения критических координатных зон	513

Ильин А.А.

Об аналитическом решении задачи о долговечности тороидальной оболочки под действием двусторонней механохимической коррозии 517

Капитанова С.В., Рэзонницкий А.В.

Математическая корректировка решения задачи А.И. Лурье о цилиндрической оболочке с отверстием, поставленной в 1946 году 521

Кириллова И.В.

Асимптотический метод в задаче об эллиптическом погранслое в тонких оболочках при ударных поверхностных воздействиях нормального типа 524

Козлова А.С., Филиппов С.Б.

Низкочастотные колебания круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами 528

Колесников А.М., Анесян В.М.

Индентирование круговой высокоэластичной мембраны шаровым индентором 530

Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H.

The influence of interfacial properties on stress concentration of nanopatterned interphase regions 534

Котов Л.Н., Судьенков Ю.В., Чертищева С.А., Ласёк М.П.

Опτικο-акустические исследования композитных магнитооптических плёнок ($\text{CoFeB}+\text{SiO}_2$) 538

Малькова Ю.В.

Устойчивость армирующих слоев многослойных эластомерных шарниров 542

Михасев Г.И., Ле Н.Д.

Асимптотическая модель свободных длинноволновых колебаний трехслойной пластины с высококонтрастными упругими свойствами 546

Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.

Винтовые потенциалы гармонических волн в полуизотропных микрополярных средах 550

Наумова Н.В., Иванов Д.Н., Дорофеев Н.П.

Колебания трехслойной пластины 553

Нестерчук Г.А., Смирнов А.Л., Филиппов С.Б.

Собственные частоты и формы колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с концевой пластиной 557

Промина Ю.Г.

Механическое поведение пластин и оболочек с градиентом предела текучести 561

Рожонский А.В., Кашианова С.В.

О реализации метода Ритца в задаче о потери устойчивости пластины с отверстием или включением при растяжении 565

Рябов В.М., Ярцев Б.А., Паршина Л.В.

Демпфирование связанных колебаний неоднородных композитных коробчатых стержней 567

Саитова Р.Р., Арутюнян А.Р.

Описание ступенчатых нагружений при высокотемпературной ползучести 571

Смирнов С.А., Беляев А.К.

Исследование волн в средах со случайными упруго-массовыми параметрами при помощи спектрального разложения 575

Судьенков Ю.В., Зылин Б.А., Ялыч Е.С.

«Микронапряжения» и «скрытая» энергия деформации при упруго-пластическом деформировании 579

Чистяков В.В.

Условие на восстановленную длину — новый подход к определению критической нагрузки продольного изгиба колонны в упруго-пластической области деформаций 583

Шувалов Г.М., Костырко С.А.

Изменение формы рельефа межфазной границы под действием межфазной диффузии 588

**Секция 6. Устойчивость и стабилизация механических
и электромеханических систем**
*(Stability and Stabilization of Mechanical
and Electromechanical Systems)*

Бабич Н.А., Фрадков А.Л.

Управление поворотом транспортного средства на основе нейроинтерфейса 594

Голуб А.П., Зудов В.Б., Локшин Б.Я., Семозкий Ю.Д.

О стабилизации вертикального спуска квадрокоптера с подвешенным к нему грузом 598

Жусубалиев Ж.Т., Коломиец Е.А., Сопуев У.А., Цуканов Д.Ю., Иванова Е.Н., Цаньсин М., Цзылун Н.

Отображение кольца для изучения вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина 602

<i>Zhusubaliyev Zh. T., Sopuev U. A., Abdirasulov A. Z., Kolomiets E. A., Gol'tsov Yu. A., Tsukanov D. Yu.</i> Border collisions and merging phenomena in the unipolar pulse-width modulated control system	606
<i>Зайцева Ю. С., Фрадков А. Л.</i> Об устойчивости системы «мост-пешеходы»	610
<i>Зубов С. В.</i> Стабилизация рассогласования угловых значений в одноканальной системе слежения	613
<i>Иванов Г. Г., Алферов Г. В., Королев В. С.</i> К вопросу асимптотической устойчивости системы автономных дифференциальных уравнений с голоморфной правой частью	616
<i>Красинский А. Я.</i> О рациональном выборе переменных и формы уравнений в задачах устойчивости и стабилизации систем с геометрическими связями	619
<i>Удалов П. П., Лукин А. В., Попов И. А., Штуккин Л. В., Полеткин К. В.</i> Об устойчивости одномерной модели движений чувствительного элемента электромагнитного бесконтактного подвеса	624
<i>Яшина М. В., Таташев А. Г.</i> Обобщенная нумерация Вольфрама для клеточных автоматов, моделирующих динамику одночастичных цепочек Буслаева	628

Секция 7. Биомеханика (*Biomechanics*)

<i>Бауэр С. М., Венатовская Л. А.</i> Механическая модель операции по коррекции зрения при имплантации жесткого кольца в роговицу глаза. Влияние нелинейных свойств роговицы на напряженно-деформированное состояние корнеосклеральной оболочки	634
<i>Босяков С. М., Назаренко Д. В., Рубникович С. П.</i> Биомеханическое моделирование реакции нижней челюсти с полным протезом на продукты питания различной жесткости	636
<i>Герашенко М. В., Бауэр С. М., Венатовская Л. А.</i> Зависимость «объем-давление» для сферического слоя переменной толщины	640

<i>Давыденко Б.Н., Корников В.В.</i> Прогнозирование результата коррекции гиперметропии методом дискриминантного анализа	642
<i>Егорова Н.К.</i> Об учете биомеханических характеристик при моделировании тела человека в условиях вибрации	645
<i>Иванов Д.В., Доль А.В., Бессонов Л.В., Полиенко А.В., Мулдашева А.М., Марьянкин К.А., Киреев С.И.</i> Нагурные и численные эксперименты для оценки подошвенного давления	648
<i>Кучумов А.Г., Хайруллин А.Р., Ракишева И.О., Голуб М.В., Шехмамеев Р.М., Лазарьков П.В.</i> Исследование влияния характеристик межсистемных шунтов на гемодинамические показатели и распределение кислорода	652
<i>Моисеева И.Н., Штейн А.А.</i> Оценка реальных физических характеристик роговицы по данным, получаемым с помощью анализатора реакции глаза (ORA)	656
<i>Паутов А.А., Бауэр С.М., Иванова О.В., Крылова Е.Г.</i> Перистоматическое кольцо и краевое устьичное кольцо — аналогичные структуры устьичных комплексов цветковых растений	660
<i>Сидоренко Д.А., Иванов Д.В., Фалькович А.С.</i> Автоматизированная обработка результатов механических экспериментов по одноосному сжатию губчатой кости головок бедра	664
<i>Шилько С.В.</i> Контактная мезомеханика: на стыке трибологии и механики композитов	668

Секция 8. Физическая механика (*Physical Mechanics*)

<i>Иванов В.С., Кац В.М., Морозов В.А.</i> Распространение плоской упругопластической волны с учетом разгрузки, связанной с пластическими деформациями	672
<i>Колесников Е.К., Клошников Г.Н.</i> О периодических орбитах заряженных частиц в суперпозиции поля магнитного диполя и однородного магнитного поля, коллинеарного магнитному моменту диполя	675

<i>Побережная У.М., Морозов В.А., Кац В.М., Платонов П.С., Илюшин М.А., Зегря Г.Г., Савенков Г.Г.</i> Влияние наноуглеродных добавок (графена, фуллеритов) на эффективность энергонасыщенных композиций пористого кремния с перхлоратами бария и натрия при воздействии импульсного электронного пучка	680
<i>Ренев М.Е., Добров Ю.В., Лашков В.А., Машек И.Ч., Хоронжук Р.С.</i> Исследование динамики температуры следа СВЧ разряда с лазерной безыскровой инициацией при различных давлениях	684
<i>Рулева Л.Б., Солодовников С.И.</i> Нормальный тлеющий разряд в потоке	688
<i>Яковлев А.Б., Белобородов Д.А.</i> Анализ современных подходов к исследованию движения микрочастиц вблизи поверхности безатмосферных небесных тел	691

Секция 9. Методы искусственного интеллекта в задачах механики *(Artificial intelligence methods in mechanics problems)*

<i>Граничин О.Н., Тихонов А.А., Копылова К.Д., Максименко М.В., Сахаров В.Ю., Иванский Ю.В., Амелина Н.О.</i> О проблемах и перспективах учета возмущений и неопределенностей в задачах динамики космических аппаратов	697
<i>Исаков А.А., Гориховский В.И., Мельник М.Ю.</i> Оптимизация расчётов поуровневых коэффициентов скорости колебательных энергообменов для O ₂ и NO-содержащих смесей	701
<i>Истомин В.А., Павлов С.А.</i> Использование методов машинного обучения при моделировании переноса в задаче высокоскоростного обтекания сферы	705
<i>Максудова З.М., Савельев А.С., Кустова Е.В.</i> Нейросетевой подход в вычислении коэффициентов скорости химических реакций	709
<i>Орехов А.В.</i> Машинное обучение и определение момента перехода к следующей стадии ползучести	713
<i>Шиманчук Д.В.</i> Построение нечетких регуляторов в задаче управления движением группировки солнечных парусов вблизи точки либрации системы Солнце–Земля	717

Секция 10. История механики (*History of Mechanics*)

<i>Богданов А.Н., Кондратьев И.М.</i>	
Людвиг Прандтль. 150 лет спустя	722
<i>Кальницкий В.С., Кутеева Г.А.</i>	
Об олимпиаде по фундаментальной механике Petropolitan (Re)Search СПбГУ	726
<i>Кропачева Н.Ю., Павлайнен Г.В., Рудакова Т.В.</i>	
История отечественного кораблестроения. Очерки, второе издание . .	730
<i>Синильщикова Г.А., Кутеева Г.А.</i>	
Лига экскурсоводов — по материалам музея истории физики и мате- матики СПбГУ	736
<i>Смольников Б.А., Смирнов А.С.</i>	
О работах по направлению общей и прикладной механики на кафедре «Механика и процессы управления» Ленинградского политехническо- го института им. М.И. Калинина в 1950–1980-е гг.	740
<i>Смык А.Ф., Яшина М.В.</i>	
Механизмы, спектр квадратной матрицы и численное интегри- рование эллиптических дифференциальных уравнений в трудах С.А. Гершгорина	744
 АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ (<i>AUTHOR INDEX</i>)	 749

Пленарные доклады

Plenary reports

Научные школы механики Санкт-Петербургского университета: к 300-летию СПбГУ

Кустова Е.В., Тихонов А.А.

e.kustova@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В докладе кратко вспоминается история празднуемых юбилейных событий, прослеживается история становления и развития Санкт-Петербургской школы математики и механики от её возникновения до наших дней. Исследуются сложившиеся в Университете традиции научных исследований и передачи знаний в области механики. Уделяется внимание научному и педагогическому наследию видных представителей науки и образования в области механики, трудившихся в СПбГУ.

Ключевые слова: Санкт-Петербургский государственный университет, 300 лет, механика, научные школы.

Введение. Сенатским указом № 444 от 22 января 1724 г. в России была учреждена Академия наук и в её составе Университет и Академическая гимназия. В 1725 г. на берегах Невы приступили к работе профессора из Западной Европы: физик Д. Бернулли (1700–1782), механик Н. Бернулли (1695–1726), математик и механик Я. Герман (1678–1733), физик Г.Б. Бильфингер (1693–1750), астроном Ж.Н. Делиль (1688–1768), математик и механик Л. Эйлер (1707–1783), заложивший фундамент Санкт-Петербургской школы математики и механики.

Основание Санкт-Петербургской школы механики. С установлением в Университете (далее — СПбГУ) организационных подразделений в виде факультетов и кафедр в 1819 г., на физико-математическом факультете была создана кафедра чистой и прикладной математики, причём под прикладной математикой тогда понималась теоретическая механика. С 1819 по 1846 г. эту кафедру возглавлял проф. Д.С. Чижов (1785–1852), который читал весьма обстоятельный и строгий курс механики.

После ухода Д.С. Чижова в отставку в 1846 г., чтение лекций по механике перешло в основном к проф. И.И. Сомову (1815–1876), который читал сильно математизированный и довольно абстрактный курс лекций «Рациональная механика». В то же самое время его знаменитый младший современник — проф. П.Л. Чебышёв (1821–1894) читал курс практической механики. В своих прорывных работах по механике, касающихся структуры механизмов, их кинематического и динамического синтеза, П.Л. Чебышёв достиг выдающихся результатов. Таким образом, академики И.И. Сомов и П.Л. Чебышёв сформировали Санкт-Петербургскую школу теоретической и прикладной механики.

Развитие школы механики в СПбГУ. Преемником И.И. Сомова по кафедре механики Университета стал акад. Д.К. Бобылёв (1842–1917). Работы Д.К. Бобылёва по механике посвящены вопросам гидродинамики, а также динамике системы материальных точек и твёрдого тела. Важной заслугой Д.К. Бобылёва в деле развития школы механики стало написание им «Курса аналитической механики» (1881–1883). Этот первый подробный и систематический курс механики на русском языке имеет такую же структуру, какую имеют в настоящее время полные курсы теоретической механики. Знаменитыми учениками Д.К. Бобылёва, воспитанными на этом курсе и продолжившими развитие Санкт-Петербургской школы механики, стали акад. А.М. Ляпунов (1857–1918), Г.К. Суслев (1857–1935), И.В. Мещерский (1859–1935), Г.В. Колосов (1867–1936), Е.Л. Николаи (1880–1950).

В течение первой четверти XX века научная работа и преподавание всех дисциплин механического профиля проводились на кафедре аналитической и прикладной механики физ.-мат. факультета. В 1929 г. в связи с бурным развитием авиации и кораблестроения были организованы три новые кафедры: 1) аналитической механики, 2) теории упругости, 3) гидроаэромеханики. Все они имеют богатую историю, славные традиции и выдающиеся научные достижения.

В 1932 г., в связи с окончанием экспериментов с наукой и образованием в стране и с приостановкой административных реформ в высшей школе, в СПбГУ была восстановлена факультетская структура, ликвидированная во время послереволюционного лихолетья, и был учреждён НИИ математики и механики (НИИ ММ), содержащий первоначально два отдела — математики и механики. НИИ ММ в те годы планировал и направлял научную работу кафедр. В состав НИИ ММ вошли лаборатория поляризационно-оптического метода исследований напряжений, лаборатория аэродинамики, лаборатория пластических деформаций, лаборатория вибраций.

В 1950-е годы сформировался объединённый неформальный коллектив мат.-мех. факультета и НИИ ММ под общим названием «отделение механики». В него вошли три вышеупомянутые кафедры механики, все лаборатории НИИ ММ и часть Вычислительного центра. Общее руководство отделением механики осуществлял с 1952 до 1986 г. акад. В.В. Новожилов (1910–1987).

В последующие годы состав «отделения механики» неоднократно расширялся. В 1967 г. была создана кафедра физической механики и лаборатория физической кинетики. В 1987 г. была организована первая в СССР кафедра гидроупругости. Состав лабораторий НИИ ММ значительно расширился, а численность сотрудников заметно выросла. В 1982 г. она составляла 486 человек, из них 6 докторов и 95 кандидатов наук. Следует отметить большой синергетический эффект взаимодействия кафедр и лабораторий НИИ ММ в формировании научных школ механики. Краткому знакомству с некоторыми

из этих научных школ, включавших сотрудников как кафедр, так и лабораторий НИИ ММ, посвящена остальная часть доклада. Для более подробного ознакомления с результатами работы некоторых научных школ механики в СПбГУ можно использовать ряд недавних обзорных публикаций [1]–[5], выпущенных в свет к 300-летию юбилею СПбГУ.

Литература

- [1] Ворошилова Ю. Н., Истомина В. А., Кунова О. В., Кустова Е. В., Нагнибеда Е. А., Рыдалевская М. А. Научная школа неравновесной аэромеханики СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10. Вып. 3. С. 406–456.
- [2] Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч.1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10. Вып. 3. С. 457–486.
- [3] Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б. Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10(68). Вып. 4. С. 686–712.
- [4] Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 2 // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11. Вып. 2. С. 259–302.
- [5] Морозов В. А., Богатко В. И., Яковлев А. Б. О математическом моделировании процессов высокоскоростного нагружения материалов на кафедре физической механики СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7. Вып. 4. С. 699–713.

Вихревой след за пассажирским самолетом. От простых моделей к тренажерам

Гайфуллин А.М., Свириденко Ю.Н.

gaifullin@tsagi.ru, ysviridenko@yandex.ru

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского
140180, Российская Федерация, Московская область, Жуковский, ул. Жуковского, 1

Аннотация. Представлено решение трех крупных проблем, связанных с вихревым следом за пассажирским самолетом: определение гидродинамических характеристик вихревого следа, определение сил и моментов, действующих на самолет в зоне влияния вихревого следа, и создание с помощью искусственных нейронных сетей математических моделей для пилотажных стендов и авиационных тренажеров.

Ключевые слова: самолет, вихревой след, неустойчивость, диффузия, диссипация, искусственные нейронные сети, пилотажные стенды, авиационные тренажеры.

Введение. Сходящая с самолета вихревая пелена образует вихревой след. Благодаря эффекту конденсации водяного пара след может стать видимым для земного наблюдателя. Несмотря на свою красоту, след представляет собой опасность для других самолетов, которые случайно или специально, например на режиме дозаправки в воздухе, оказываются в области влияния вихревого следа. Дело в том, что согласно законам механики, на крейсерском режиме вихревой след получает импульс, направленный вниз, такой же как самолет получает импульс вверх. И если даже незначительная часть импульса вихревого следа передается попавшему в след самолету, последствия могут быть существенными.

Интерес к исследованию вихревого следа за самолетом возник сравнительно недавно — в конце 20 века в связи с появлением сверхтяжелых самолетов и с ростом авиационных грузоперевозок в мире, что приводит к увеличению количества самолетов, находящихся одновременно в ограниченной области воздушного пространства.

Необходимость увеличения пропускной способности воздушных трасс привела к введению дополнительных эшелонов полета и на некоторых высотах полета минимума вертикального эшелонирования 300 м вместо традиционных 600 м. При этом практика полетов показала, что близость воздушных судов привела к увеличению докладов пилотов о попадании в зону повышенной турбулентности.

В докладе рассматриваются задачи, связанные с вихревым следом за самолетом и с взаимодействием другого самолета с вихревым следом.

Диффузия и неустойчивость вихревого следа за пассажирским самолетом. За летательным аппаратом с крылом большого удлинения след живет достаточно длительное время, за которое самолет успевает пролететь расстояние в несколько десятков километров. Интенсивность и время жизни вихревого следа в основном зависят от двух факторов: от самолета-генератора следа и от состояния турбулентной атмосферы. Чем тяжелее самолет, тем интенсивнее след за ним и тем больше время его жизни. За тяжелыми самолетами интенсивный вихревой след может наблюдаться на расстоянии 30–40 км и опускаться по вертикали на 200–300 метров. Чем интенсивнее атмосферная турбулентность, тем быстрее затухает циркуляция следа и сокращается время его жизни.

В докладе будут рассмотрены несколько задач, связанных с вихревым следом за пассажирским самолетом. Первая задача — определение характеристик вихревого следа за самолетом. При этом отдельно рассматриваются две области течения: ближняя (самолет и ближний след за ним) и дальняя.

Определение характеристик течения около самолета может производиться различным образом. Это может быть и расчет с помощью уравнений Рейнольдс-

са, и расчет по панельным методам. Особо моделируются струи от двигателей, в которых наблюдаются повышенные скорости и температура.

В дальнем следе длинноволновые синусоидальные возмущения нарушают прямолинейность вихревых структур. По мере удаления от самолета амплитуда возмущений растет, затем вихри (правый и левый) сталкиваются, образуя вихревые кольца. Разрушение вихревых колец завершает стадии развития интенсивного вихревого следа.

Будут рассмотрены задачи о диффузии вихревого следа в ламинарном и турбулентном случаях. При этом будет раскрыт физический механизм потери циркуляции вихревого следа по мере удаления его от самолета. Известно, что большинство стандартных моделей турбулентности, дают завышенную диффузию завихренности в ядре вихря. В работе предложена модификация стандартной модели турбулентности для адекватного описания диффузии завихренности в ядре вихря. Для описания эволюции вихрей и определения времени жизни вихревого следа, как на большой высоте, так и вблизи подстилающей поверхности, построены теории пространственной длинноволновой неустойчивости в идеальной жидкости и в турбулентной атмосфере. Результаты расчетов по созданным моделям и теориям показали хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Дополнительные силы и моменты, действующие на самолет в зоне влияния вихревого следа. В вихревой след от самолета может попасть другой самолет, летящий либо по той же траектории, например при посадке по глиссаде, либо на крейсерском режиме полета по соседнему эшелону. Расстояние между эшелонами всего 300 м и в хорошую слаботурбулентную погоду вихревой след от крупного самолета может опуститься на такое расстояние. Известны случаи и катастроф и повреждений при попадании самолета в вихревой след. В зоне влияния вихревого следа на самолет действуют дополнительные силы и моменты, зависящие от взаимного расположения самолета и вихревого следа. Поэтому вторая задача — определение этих дополнительных сил и моментов. Такая задача решается с помощью панельных методов. В данной работе используется панельный метод с симметризацией гидродинамических особенностей (вихри, источники) на несущих элементах самолета (крыло, оперение) и распределением источников на панелях моделирующих несущие элементы (фюзеляж).

Математическая модель взаимодействия самолета с вихревым следом для пилотажных стендов и тренажеров. Как показывает статистика, наибольшее количество авиационных происшествий вызвано попаданием самолета в сложное пространственное положение и сваливанием, которые приводят к потере пилотом управления в полете. Это происходит из-за внешних атмосферных возмущений (например, из-за попадания в

вихревой след от другого самолета). Таким образом, возникает так называемый «человеческий фактор», связанный с отсутствием у пилота должной тренировки на действия в подобных критических ситуациях. Наиболее эффективным подходом к изучению рисков, связанных с «человеческим фактором», является полунатурное моделирование на пилотажных стендах и тренажерах. Вихревой след невидим и поэтому на современном этапе невозможно предотвратить попадание одного самолета в вихревой след другого самолета. Но, возможно обучить летный состав навыкам управления самолетом в зоне влияния вихревого следа или даже внутри вихревого следа. Третья задача — создание математической модели аэродинамики самолета, попавшего в вихревой след. Модель основана на применении искусственных нейронных сетей для определения в режиме реального времени дополнительных аэродинамических сил и моментов, действующие на самолет в вихревом следе за другим самолетом. При этом модель позволяет адекватно представлять трехмерную искривленную структуру вихревого следа, обусловленную развитием синусоидальной неустойчивости.

Считается, что первый самолет летит прямолинейно и равномерно. Все его параметры известны. Параметры второго самолета задаются случайно. Возможно также моделирование процесса дозаправки самолета в воздухе. К настоящему времени проведено моделирование для оценки уровня опасности, для отработки методов пилотирования, разработки систем визуализации опасных зон и выработки возможных сценариев уклонения от попадания в них на пилотажных стендах ЦАГИ, РСК ОАО МИГ и ФАЛТ МФТИ с участием летчиков-испытателей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

Два термодинамических постулата механики сплошной среды

Георгиевский Д.В.

georgiev@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Обсуждаются единая интегральная форма записи пяти постулатов механики сплошной среды, возможная непротиворечивая аксиоматика феноменологического построения четвертого и пятого из них — законов об изменении внутренней энергии и энтропии, а также роль закона Фурье или его гиперболического обобщения в определении температуры. Показывается, что в отличие от статистического и молекулярного подходов в данном случае внутренняя энергия и энтропия индивидуального объема могут быть полностью определены посредством задания своих

источника, потока через границу и производства. Тем самым два термодинамических постулата выполняют роль определений. Обсуждаются энергетические сопряжённые пары величин различной физической природы и возможности расширения таблицы постулатов.

Ключевые слова: термодинамика, сплошная среда, постулат, внутренняя энергия, теплопередача, энтропия.

Единая форма записи постулатов. Классическая механика сплошной среды аксиоматически базируется на пяти феноменологических постулатах, имеющих единую интегральную форму записи в виде законов изменения (сохранения) тех или иных термомеханических величин $A_V(t)$:

$$\frac{dA_V}{dt} = B_V + C_\Sigma + D_V, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A_V(t) &= \int_V \rho a(\mathbf{x}, t) dV, & B_V(t) &= \int_V \rho b(\mathbf{x}, t) dV, \\ C_\Sigma(t) &= \int_\Sigma c(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}, t) d\Sigma, & D_V(t) &= \int_V d(\mathbf{x}, t) dV, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — скалярное поле объёмной плотности в точке \mathbf{x} в момент времени t ; $a(\mathbf{x}, t)$ — массовая плотность величины $A_V(t)$ в объёме V ; $b(\mathbf{x}, t)$ — массовая плотность величины $B_V(t)$, являющейся источником A_V в V ; $c(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}, t)$ — поверхностная плотность величины $C_\Sigma(t)$ — потока A_V через границу Σ объёма V , в каждой точке которой определена единичная внешняя нормаль \mathbf{n} , $\mathbf{y} \in \Sigma$; $d(\mathbf{x}, t)$ — объёмная плотность величины $D_V(t)$ — производства A_V в V . В (2) V — произвольный конечный объём среды, в любой момент состоящий из одних и тех же лагранжевых частиц [1]–[7].

В таблице для каждого из пяти постулатов I–V указано, чему соответствуют введённые в (1) и (2) обозначения. Здесь \mathbf{v} — скорость частиц; \underline{v} — симметричный тензор скоростей деформаций; $\underline{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений Коши; \mathbf{F} — массовые силы; $\mathbf{P}^{(n)} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ — поверхностные силы на Σ ; q — массовая плотность источников тепла в V ; \mathbf{q} — вектор теплового потока; u и s — массовые плотности внутренней энергии и энтропии в V ; w^* — объёмная плотность рассеивания в V ; T — абсолютная температура.

Таблица постулатов термомеханики сплошной среды.

	a	b	$c \cdot \mathbf{n}$	d
I	1	0	0	0
II	\mathbf{v}	\mathbf{F}	$\mathbf{P}^{(n)}$	0
III	$\mathbf{x} \times \mathbf{v}$	$\mathbf{x} \times \mathbf{F}$	$\mathbf{y} \times \mathbf{P}^{(n)}$	0
*	$\frac{ \mathbf{v} ^2}{2}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	$\mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{v}$	$-\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$
IV	$\frac{ \mathbf{v} ^2}{2} + u$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + q$	$\mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$	0
V	s	$\frac{q}{T}$	$-\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T}$	$\frac{w^*}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}$

Постулаты IV и V. Первые три постулата I–III — закон сохранения массы и законы изменения количества движения и момента количества движения — оперируют изотермическими величинами. Четвёртая строка таблицы, помеченная звёздочкой, соответствует интегральному утверждению, называемому теоремой о кинетической энергии, или теоремой живых сил. Обычно она записывается в конечных дифференциалах:

$$dK = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}, \quad (3)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho |\mathbf{v}|^2 dV, \quad \delta A^{(i)} = - \int_V \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon} dV,$$

$$\delta A^{(e)} = \int_V \rho \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P}^{(n)} \cdot d\mathbf{u} d\Sigma,$$

где K — кинетическая энергия объёма V ; $\delta A^{(e)}$ — сумма изменений работ массовых и поверхностных сил на действительных перемещениях $d\mathbf{u}$; $\delta A^{(i)}$ — изменение работы внутренних сил. Если внешние нагрузки \mathbf{F} и $\mathbf{P}^{(n)}$ обладают скалярными потенциалами по \mathbf{u} , а также для данной среды существует скалярный потенциал напряжений $\underline{\sigma}$ по деформациям $\underline{\varepsilon}$, то дифференциальное соотношение (3) допускает первый интеграл, называемый интегралом энергии.

Теорема о кинетической энергии (3) не является независимым постулатом (поэтому ей не присвоен отдельный номер в таблице), а представляет собой следствие постулатов I–III. Но она играет важную роль в энергетическом переходе к формулировке неизоатермического постулата IV — закона об изменении внутренней энергии. При таком переходе утверждается, что в изменении напряжённо-деформированного состояния среды могут участвовать тепловые эффекты, определяемые массовой плотностью $q(\mathbf{x}, t)$ источников тепла внут-

ри объёма V и потоком тепла $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}, t)$ через границу Σ . Вектор теплового потока определён, вообще говоря, во всём объёме V .

Тогда строка IV таблицы образуется расширением строки * следующим образом. Положим, что массовая плотность полной энергии, сосредоточенной в объёме V , складывается из слагаемого $|\mathbf{v}|^2/2$, уже присутствующего в строке *, и некоторой функции $u(\mathbf{x}, t)$, которой придадим смысл массовой плотности внутренней энергии. Потребуем от этой функции, чтобы: а) её источником в V были лишь источники тепла $q(\mathbf{x}, t)$; б) её потоком через Σ был лишь тепловой поток $-(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}, t)$ внутрь Σ ; в) производство полной энергии при этом было нулевым.

В силу линейности соотношения (1) по a , b , c и d строки таблицы допускают линейные комбинации. Беря разность строк IV и *, получим локальное равенство для функции u , известное как локальное уравнение энергии. Его интегральный аналог, записанный в конечных дифференциалах:

$$dU = \delta Q - \delta A^{(i)},$$

$$U = \int_V \rho u dV, \quad \delta Q = dt \left(\int_V \rho q dV - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \right)$$

является одной из формулировок первого закона термодинамики.

Таким образом, строку IV естественно считать определением той новой функции, а именно массовой плотности $u(\mathbf{x}, t)$ внутренней энергии, которая появилась в ней по сравнению со строкой *. Эта функция как один из четырёх возможных термодинамических потенциалов (все они связаны друг с другом преобразованиями Лежандра) играет большую роль в теории определяющих соотношений термомеханики сплошной среды.

Выводы. С точки зрения феноменологического построения аксиоматики к двум термодинамическим постулатам и соотношению, связывающему вектор теплового потока с градиентом температуры, можно подходить как к определениям внутренней энергии, энтропии и изменения температуры. Это не противоречит тому, что локальные уравнения энергии, энтропии, а также закон Фурье или его гиперболические обобщения присутствуют в замкнутых системах уравнений. Ведь помимо них в эти же системы входят определяющие соотношения среды, конкретизирующие зависимость функции u как термодинамического потенциала от своих независимых параметров состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 24-21-20008.

Литература

- [1] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004. 640 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.

- [3] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [4] Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
- [5] Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- [6] Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
- [7] Нигматулин Р. И. Механика сплошной среды. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014. 528 с.

Математическое моделирование биомеханической системы среднего уха человека

Босьяков С.М.,¹ Малец Е.Л.,² Петрова Л.Г.³

bosiakov@bsu.by, malets-al@yandex.by, petrova_l@tut.by

¹Белорусский государственный университет,

220030, Республика Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4,

²Республиканский научно-практический центр оториноларингологии,

220004, Республика Беларусь, Минск, ул. Сухая, 8,

³Белорусский государственный медицинский университет,

220083, Республика Беларусь, Минск, пр. Дзержинского, 83

Аннотация. В настоящей работе представлены результаты математического моделирования колебательной системы среднего уха человека, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссикулопластике, трансплантации тимпанальной мембраны после удаления ретракционного кармана, а также аэрации барабанной полости в условиях хронической дисфункции слуховой трубы. Полученные результаты позволяют сопровождать и планировать лечение потери слуховой проводимости, связанной с перфорациями тимпанальной мембраны, возникновением различных отитов, пороков развития или неправильным формированием.

Ключевые слова: математическое моделирование, среднее ухо, тимпанальная мембрана, аэрация барабанной полости, тимпанопластика, хрящевой трансплантат.

Введение. Моделирование биомеханической системы среднего уха и механизма слуховой проводимости в нормальном и патологических состояниях относится к одной из основных задач медицинской биомеханики. Результаты такого моделирования позволяют прогнозировать особенности их функционирования, а также формулировать рекомендации при назначении лечения, по выполнению профилактических мероприятий и послеоперационной реабилитации пациентов. В настоящей работе представлены результаты определения собственных частот свободных колебаний среднего уха человека, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссикулопластике, с учетом подвижности подножной пластины стремена, оценки геометрических параметров хрящевых

трансплантатов тимпанальной мембраны, устанавливаемых после удаления ретракционного кармана, а также результаты моделирования аэрации полостей среднего уха при различных дисфункциях слуховой трубы.

Свободные колебания среднего уха после тотальной тимпанопластики и оссикулопластики. Математическая модель для определения частот свободных колебаний среднего уха после тимпанопластики учитывает изгибные колебания кольцевой пластинки, используемой для восстановления барабанной перепонки, плоскостные движения протеза, замещающего звено «молоточек — наковальня» и соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану с подвижным основанием подножной пластины стремени. Соответствующая схема представлена на рис. 1.

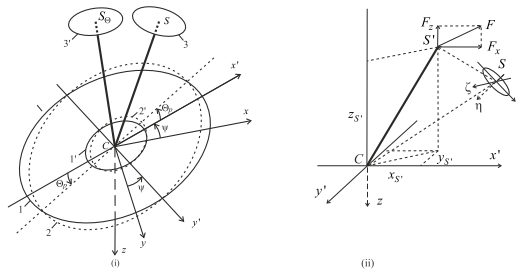


Рис. 1. Начальное и конечное положения пластинки и протеза после элементарного поворота на угол Θ_p (i) и силы, действующие на подножную пластину стремени (ii): $(Cxyz)$ — глобальная система координат; $Cx'y'z'$ — локальная система координат; $S(x_S, y_S, z_S)$ — точка закрепления конца стержня протеза на подножной пластине стремени; Cy' — один из узловых диаметров, вокруг которого протез совершает повороты; ψ — угол между осями Cy и Cy' ; S, S_Θ и S' — начальное положение ствола протеза, его положение при повороте протеза на угол Θ_p и его положение после поступательного перемещения вдоль оси Cz и поворота на угол S_Θ ; F_x и F_z — реакции стержня протеза вдоль осей Cx' и Cz ; F_x' и F_z' — реакции стержня протеза вдоль осей x и z ; $(x_{S'}, y_{S'}, z_{S'})$ — координаты точки S' в системе координат $(Cx'y'z')$; 1 и 1', 2 и 2' и 3 и 3' — положения тимпанальной мембраны, основания протеза и подножной пластины стремени до и после поворота на угол Θ_p ; $S(\xi, \eta, \zeta)$ — локальная система координат, связанная с подножной пластиной стремени.

Здесь ось Cz перпендикулярна плоскости реконструированной тимпанальной мембраны и направлена в сторону внешнего слухового прохода. Предполагается, что протез является недеформируемым твердым телом. Формы собственных колебаний механической системы «тимпанальная мембрана–протез–подножная пластина стремени» классифицируются на основании возможных форм колебаний круглой кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную тимпанальную мембрану с учетом жесткого сращивания пластинки с осно-

хрящевым трансплантатом различной толщины. Установлено, что при хирургической операции по восстановлению целостности тимпанальной мембраны наиболее эффективно использовать хрящевой трансплантат толщиной около $0,193 \pm 0,031$ мм.

Моделирование аэрации полостей среднего уха. Параметризованная модель среднего уха, соответствующая детям двух и двенадцати лет, включающая сосцевидный отросток, барабанную полость, колебательную систему среднего уха и слуховую трубу, представлена на рис. 3.

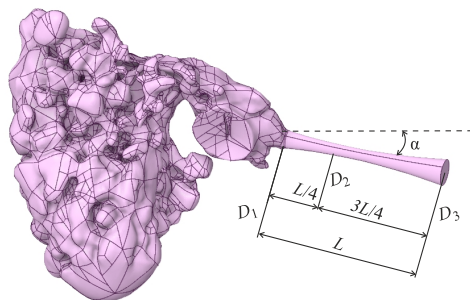


Рис. 3. Твёрдотельная модель среднего уха, параметризованная по углу α наклона слуховой трубы и ее диаметрам на уровнях D_1 , D_2 и D_3 (L — длина слуховой трубы).

Расчет распределения давления и линий тока воздуха в сосцевидном отростке, барабанной полости и слуховой трубе осуществляется для случаев в норме, при патологии проходимости евстахиевой трубы, уменьшающей величины полуосей эллиптических поперечных сечений на трех различных уровнях трубы в два, три и десять раз, патологии сосцевидного отростка, приводящей к уменьшению площади его поверхности на 30% по отношению к площади поверхности в норме.

Закключение. Установленные закономерности изменения спектров частот свободных колебаний среднего уха после установки хрящевого трансплантата и протеза среднего уха, а также закономерности распределения давления в полостях среднего уха при дисфункции слуховой трубы и сосцевидного отростка позволяют планировать хирургические операции по улучшению слуховой проводимости.

Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 ГПНИ «Конвергенция».

Литература

- [1] Mikhasev G., Ermochenko S., Bornitz M. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis // *Math. Med. Biol.* 2010. Vol. 27. No. 4. P. 289–312.
- [2] Mikhasev G., Bosiakov S., Petrova L., Maisyuk M., Yurkevich K. Assessment of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system: effect of the cartilage transplant // *Dyn. Sys. Mod.* 2016. Vol. 181. P. 243–255.

Методы оптимального управления в проектировании траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками

Петухов В.Г.

PetukhovVG@mai.ru

НИИ прикладной механики и электродинамики МАИ,
125080, Российская Федерация, Москва, Ленинградское шоссе, 5, а/я 43

Аннотация. Рассматриваются задачи оптимизации траекторий космических аппаратов с электроракетными двигателями. Приводится обоснование важности решения таких задач при проектировании перспективных космических миссий, описание многообразия возникающих задач, фундаментальных проблем, осложняющих процесс их решения и разработанных методов преодоления этих проблем. Приводятся численные результаты оптимизации межорбитальных, лунных и межпланетных траекторий.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, оптимизация траекторий, космический аппарат, электроракетный двигатель.

Технический облик космических аппаратов (КА) во многом определяется результатами проектно-баллистического анализа, включающего выбор основных траекторных и проектных параметров КА и определение технических требований к его бортовым системам. Во многих космических миссиях выведение КА на целевые орбиты требует больших затрат характеристической скорости, что приводит к целесообразности использования электроракетных двигателей (ЭРД) с большим удельным импульсом тяги с целью сокращения затрат топлива на реализацию перелета. Современные ЭРД имеют скорость истечения в 5...20 раз больше, чем традиционные жидкостные ракетные двигатели. Соответственно, при одинаковых затратах массы, ЭРД может обеспечить приращение характеристической скорости в 5...20 раз больше, чем жидкостные ракетные двигатели. Однако тяга ЭРД пропорциональна располагаемой электрической мощности, поэтому реактивное ускорение, создаваемое ЭРД, очень невелико. В типичных случаях это реактивное ускорение составляет доли мм/с², поэтому для набора, скажем, 1 км/с характеристиче-

ской скорости в типичных случаях требуются десятки суток или даже месяцы работы ЭРД. Перспективность применения ЭРД для космических транспортных операций была осознана задолго до начала практической космонавтики. В нашей стране был выполнен ряд приоритетных работ в этом направлении, включая создание первого в мире экспериментального ЭРД и первое применение ЭРД на борту КА. Однако, для эффективного практического применения ЭРД технологии доросли только в 1990-х годах, когда ЭРД стали применять для коррекции долгоживущих геостационарных КА и только в последнее десятилетие в России ЭРД стали применяться для решения прикладных космических транспортных задач. Главной задачей в проектировании космических транспортных операций является обеспечение их эффективности, выражающейся в минимизации какого-либо функционала, например массы топлива или времени перелета. Следует также отметить исключительную важность оптимизации траекторий при проектировании КА и для обеспечения корректного сравнения влияния вариации различных проектных параметров на показатели эффективности проектируемой космической миссии. Так как динамика управляемого орбитального движения КА представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то задача оптимизации траектории естественным образом сводится к задаче оптимального управления, в которой необходимые условия оптимальности могут быть представлены в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина. С помощью принципа максимума рассматриваемые задачи оптимального управления сводятся к краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной сложностью является разработка эффективных и устойчивых численных методов решения таких краевых задач. По особенностям траекторий КА с маршевыми ЭРД можно выделить три типа перелетов: межорбитальные перелеты, перелеты условиях действия сильных возмущений (например, перелеты к Луне) и межпланетные перелеты. В зависимости от задачи применяются различные математические модели ЭРД: идеально-регулируемые двигатели, двигатели с ограниченной тягой и заданным удельным импульсом, многорежимные двигатели. Возможно рассмотрение вариантов работы этих типов двигателей при постоянной или переменной электрической мощности, зависящей от гелиоцентрического удаления КА. Модель идеально-регулируемого двигателя позволяет относительно легко получать начальные приближения для решения задач с более реалистичными математическими моделями ЭРД. При постановке задач оптимизации траекторий КА с ЭРД используются различные функционалы, типы граничных условий и ограничений. К числу основных особенностей траекторий КА с ЭРД, существенно усложняющих процесс решения задачи, следует отнести большую длительность активных участков; многовитковость; существенные возмущения, которые могут на порядок превосходить управляющее реактивное ускорение; многоэкстремальность; возможное наличие ограничений на управление

и фазовые координаты; разрывность управления; наличие проблемы неизвестности границ области существования решения; негладкость краевых задач с нефиксированной структурой управления. В результате многолетних исследований мы определили пути эффективного преодоления большинства фундаментальных проблем, осложняющих процесс решения задач оптимизации траекторий КА с конечной тягой, и реализовали эти пути в численных методах и программном обеспечении. Применяемая нами в большинстве случаев схема решения задачи оптимизации траектории с конечной тягой заключается в ее постановке в виде задачи оптимального управления, применении принципа максимума для редукции задачи оптимального управления к краевой задаче и метода продолжения для редукции краевой задачи к задаче Коши [1, 2]. Нами разработана и реализована вычислительная схема решения типичных задач оптимизации, позволяющая в качестве начального приближения использовать пассивное движение КА, которая снимает проблему выбора начального приближения для сопряженных переменных [3, 4]. Решение задачи минимизации тяги позволяет провести диагностику существования решения [5], а использование траектории с идеально-регулируемым двигателем в качестве промежуточного звена процесса оптимизации вместе со сглаживанием релейного управления позволяет обеспечить хорошую вычислительную устойчивость [3, 4]. Во многих случаях возмущающие ускорения настолько велики, что их необходимо учитывать уже на ранних стадиях проектирования. Мы справились с этой задачей с помощью использования алгебры комплексных дуальных чисел, позволяющих с высокой точностью автоматически вычислять первые и вторые производные от сложных функций [6]. Наиболее важное прикладное значение имеют межорбитальные перелеты КА с ЭРД. В задачах оптимизации многовитковых перелетов существует множество локальных экстремалей с различной угловой дальностью траектории, поэтому важной задачей является вычисление оптимального соотношения между длительностью и угловой дальностью перелета. Для решения этой задачи оказалось эффективным использование уравнений движения в равноденственных орбитальных элементах с вновь введенной угловой независимой переменной — вспомогательной долготой [4]. Очень полезным оказался метод осреднения, который позволил получить асимптотические решения [1], построить на их основе алгоритм квазиоптимального управления с обратной связью [7] и методы быстрого оценки основных параметров оптимальных многовитковых межорбитальных перелетов, включая перелеты с использованием комбинации двигателей большой и малой тяги [8]. Было показано, что при использовании таких комбинированных схем на современных средствах выведения с помощью существующих ЭРД можно увеличить массу доставляемого на геостационарную орбиту КА в 1.5... 3 раза. Существенный прогресс получен и в разработке методов оптимизации сильно возмущенных (например, лунных [9, 10]) и межпланетных [11, 12] траекторий КА с ЭРД. В частности,

разработаны методы сквозной оптимизации таких траекторий с учетом притяжения Солнца, планет (и, при необходимости, Луны) на всех участках траектории. Показана возможность существенного снижения затрат топлива при оптимальном использовании эффектов притяжения удаленных небесных тел. Разработаны методики оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой, использующих гравитационные маневры или последовательный пролет или сопровождение нескольких небесных тел. В проектно-баллистическом анализе, как правило, не удастся разделить задачи оптимизации основных проектных параметров и траектории КА. Для ее решения разработан метод совместной оптимизации управления, свободных траекторных параметров и основных проектных параметров КА [13].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00329, <https://rscf.ru/project/22-19-00329/>.

Литература

- [1] Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // *Космические исследования*. 2004. Т. 42. № 3. С. 260–279.
- [2] Петухов В. Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // *Космические исследования*. 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237.
- [3] Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // *Космические исследования*. 2012. Т. 50. № 3. С. 258–270.
- [4] Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G., Testoyedov N., Yoon S.W. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // *Acta Astronautica*. 2022. V. 197. P. 354–367.
- [5] Иванюхин А. В., Петухов В. Г. Задача минимизации тяги и ее приложения // *Космические исследования*. 2015. Т. 53. № 4. С. 320–331.
- [6] Petukhov V. G., Yoon S. W. Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 1: Theory and method // *Cosmic Research*. 2021. Vol. 59. No. 5. P. 401–413.
- [7] Петухов В. Г. Квазиоптимальное управление с обратной связью для многовиткового перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // *Космические исследования*. 2011. Т. 49. № 2. С. 128–137.
- [8] Konstantinov M. S., Petukhov V. G. Easy engineering technique of optimal electric propulsion trajectory estimation // *AIAA 57th International Astronautical Congress, IAC 2006. Valencia, 2006*. P. 6277–6287.
- [9] Petukhov V., Yoon S.W. End-to-End Optimization of Power-Limited Earth–Moon Trajectories // *Aerospace*. 2023. V. 10. No. 231. P. 1–22.
- [10] Yoon S. W., Petukhov V. Minimum-fuel low-thrust trajectories to the Moon // *Acta Astronautica*. 2023. Vol. 210. P. 102–116.

- [11] Петухов В. Г., Юн С. У. Оптимизация гелиоцентрических траекторий с малой тягой между коллинеарными точками либрации различных планет // Космические исследования. 2023. Т. 61. С. 406–419.
- [12] Константинов М. С., Петухов В. Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. М.: Издательство МАИ, 2015. 260 с.
- [13] Петухов В. Г., Иванюхин А. В., Вук В. С. Совместная оптимизация управления и основных траекторных и проектных параметров межпланетного космического аппарата с электроракетной двигательной установкой // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 3. С. 212–228.

Локализованные траектории в окрестности неустойчивого положения равновесия

Сальникова Т.В., Кугушев Е.И.

tatiana.salnikova@gmail.com, kugushevei@yandex.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Если в положении равновесия потенциальная энергия натуральной системы достигает строгого локального минимума, то в силу теоремы С.В. Болотина [Болотин С. В. , 1978], при малых положительных значениях полной энергии системы существует хотя бы одно периодическое движение. В этом случае положение равновесия устойчиво по Ляпунову. В настоящей работе рассматривается ситуация, когда положение равновесия невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости не ноль и меньше числа степеней свободы системы. Показывается, что для любого достаточно малого положительного значения полной энергии системы найдется движение с данным значением энергии, которое начинается на границе области возможности движения и не выходит из малой окрестности положения равновесия. Такие движения мы называем локализованными.

Ключевые слова: натуральная механическая система, степень неустойчивости, гироскопические и диссипативные силы, метод Важевского, локализованные движения.

Натуральная система. Рассмотрим натуральную механическую систему с обобщенными координатами $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ и лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$. Предполагается, что $V(\mathbf{q})$ и $A(\mathbf{q})$ дважды непрерывно дифференцируемы по \mathbf{q} .

Теорема 1. Пусть положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости η лежит в пределах $1 \leq \eta \leq n - 1$. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $h_0 > 0$ такая, что для любого значения энергии системы h , лежащего в пределах $0 \leq h \leq h_0$ существует движение системы $\mathbf{q}(t)$, с энергией h , все время лежащее в окрестности $q_1^2 + \dots + q_n^2 < \varepsilon$.

Доказательство опирается на теорему о центральном многообразии [1].

Система с гироскопическими и диссипативными силами. Пусть гироскопические и диссипативные обобщенные силы имеют вид $Q = C\dot{\mathbf{q}} + O(\mathbf{q}^2 + \dot{\mathbf{q}}^2)$, где C — постоянная $n \times n$ матрица. Будем говорить, что гироскопические и диссипативные силы малы, если $\|C\| \leq \psi$, где ψ — некая положительная малая величина, определяемая параметрами исходной натуральной системы.

Теорема 2. Пусть положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ невырождено и неустойчиво по Ляпунову, причем его степень неустойчивости η лежит в пределах $1 \leq \eta \leq n - 1$. И пусть гироскопические и диссипативные силы малы. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $h_0 > 0$ такая, что для любого значения энергии системы h , лежащего в пределах $0 \leq h \leq h_0$, существует движение системы $\mathbf{q}(t)$ с начальной энергией h , все время лежащее в окрестности $q_1^2 + \dots + q_n^2 < \varepsilon$.

Доказательство существенно использует топологический метод Важевского, применяющий концепцию ретракта [2].

Численный анализ локализованных движений для систем с двумя степенями свободы. Важным примером задачи, которая попадает в класс рассматриваемых в статье систем, является плоская ограниченная круговая задача трех тел. На вращающейся орбитальной плоскости, связанной с двумя массивными взаимно тяготеющими телами, три из пяти положений относительного равновесия тела малой массы — коллинеарные точки либрации — имеют степень неустойчивости 1, так что по теореме Кельвина–Четаева их нельзя стабилизировать добавлением диссипативных и гироскопических сил, в отличие от треугольных точек либрации, являющихся точками локального максимума для приведенного потенциала — их степень неустойчивости равна двум, и возможна гироскопическая стабилизация в линейном приближении.

Численный анализ локализованных движений в окрестности коллинеарных точек либрации системы Земля–Луна иллюстрирует непротиворечивость теоремы 2.

Заметим, что рассматриваемая здесь механическая система является системой Ляпунова, и, в согласии с соответствующей теоремой Ляпунова, в окрестности точек либрации имеются периодические решения. Мы доказываем существование локализованных движений, начинающихся на границе области возможности движения. В отличие от теоремы Ляпунова, которая не доказывает существование периодического решения при наличии непостоянной матрицы гироскопических сил $c(t)$, наша теорема в этом случае также применима. И это также демонстрируется при численном моделировании системы с добавле-

нием магнитных полей, связанных с Землей, и магнитных полей, вызванных влиянием Солнца.

Литература

- [1] Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотика решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Ижевск: РХД, 2001.
- [2] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 320 с.

Аномальная интенсификация отрывных течений и теплообмена в наклонных канавках на структурированных энергоэффективных поверхностях

Исаев С.А.^{1,2}, *Никущенко Д.В.*¹, *Клюс А.А.*², *Сероштанов В.В.*^{3,1},
*Чулюнин А.Ю.*⁴, *Душин Н.С.*⁵

isaev3612@yandex.ru, ndmitry@list.ru, alinaklyus@gmail.com,
serosht_vv@spbstu.ru, chulyu-n@mail.ru, ndushin@bk.ru

¹Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
190121, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Лоцманская, 3,

²Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации имени
Главного маршала авиации А.А. Новикова,

196210, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38,

³Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29,

⁴Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова,
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1,

⁵Казанский научный центр Российской академии наук,
420111, Российская Федерация, Казань, ул. Лобачевского, 2/31

Аннотация. Рассматривается численно и экспериментально явление аномальной интенсификации ламинарных и турбулентных отрывных течений и теплообмена в наклонных канавках на пластинах и стенках каналов. Оно открывает широкие перспективы формирования энергоэффективных структурированных поверхностей для разнообразных мультидисциплинарных и мультимасштабных приложений.

Ключевые слова: интенсификация, отрывные течения, конвективный теплообмен, структурированные поверхности, наклонные канавки.

Интенсификация процессов теплообмена на структурированных поверхностях давно привлекает внимание исследователей и инженеров [1]. Интерес к ним усилился благодаря бурному развитию аддитивных технологий и прогрессу в материаловедении. Практически любой созданный на компьютере рельеф может быть воссоздан в твердотельной конструкции. Конечно, существуют еще

проблемы разработки жаростойких материалов, но они постепенно решаются. Также совершенствуются вихревые технологии, в особенности в приложении к энергетике. Хотя широта их применения не ограничивается этой областью народного хозяйства. Интенсификация тепло- и массообменных процессов занимает в мировой теплофизике одно из значимых мест. Здесь внимание концентрируется на сравнительно недавних исследованиях [2]–[10], открытого явления аномальной интенсификации отрывных течений и теплообмена в наклонных канавках на пластинах и стенках каналов. Такие канавки, которые образуются из двух половинок сферических лунок, соединенных траншейной вставкой, были запатентованы. Явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена было установлено численно в однорядных наклонных канавках на нагретой стенке узкого канала для редких [2] и уплотненных [3] компоновок и подверглось систематическому анализу на стабилизированном гидродинамическом участке структурированного канала [4, 5, 6]. Ультравысокие скорости возвратного и вторичного течений, доходящие, а подчас и превосходящие максимальную скорость в плоскопараллельном канале, обуславливаются экстраординарными перепадами давления между зонами торможения струйного входящего в лунку потока на наветренной кромке и разрежения в месте генерации смерчеобразного вихря на входном сферическом сегменте. Выполненная в [10] компьютерная визуализация отрывного обтекания наклонной канавки демонстрирует формирование в ее входной части торнадоподобного вихря, резко понижающего статическое давление. Возникает перепад давления между зоной торможения входящего в канавку струйного потока и области разрежения в ядре торнадо. Внутри канавок образуются области аномально высоких поверхностных градиентов течения и теплообмена, в которых многократно (до 6...9 раз) увеличиваются абсолютные величины относительного трения и тепловых потоков по сравнению с параметрами на плоской стенке. Следует отметить, что над входом в наклонную канавку образуется зона высоких скоростей пристенного потока, которые в случае узкого канала с однорядными канавками превышают максимальную скорость для плоскопараллельного канала в 1.5 и более раз. Установлено, что угол наклона канавки θ по отношению к набегающему потоку играет кардинально важную роль в явлении аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в канавках, а также ускорения пристенного потока над структурированной стенкой. Диапазон углов наклона канавки θ на пластине, при которых реализуются значительные экстремальные скорости возвратного и вторичного течений, составляет от 30 до 75°. Наблюдаемые явления характерны также для начального гидродинамического участка течения около пластины и стенок канала с одно- и многорядными наклонными канавками, причем здесь наблюдается мультипликативный эффект усиления интенсивности пристенного и отрывного течений, а также теплообмена в канавке по мере ее удаления от начала структурированного участка. Для двух-

рядного плотного пакета из 26-ти наклонных канавок [9] равномерный входной профиль скорости трансформируется в конце канала (в окрестности 22-й канавки) в сдвиговой профиль с локальным максимумом в центре канала в случае V-образной схемы расположения канавок и приобретает два локальных максимума у стенок в случае Λ-образной схемы. Экспериментальное подтверждение установленных численно явлений получено в Институте механики МГУ и в КазНЦ РАН, где на стендах измерялись перепады статического давления в единичных канавках на пластине при варьировании угла наклона ОТЛ θ от 0 до 90° для чисел Рейнольдса набегающего потока $6.7 \cdot 10^4$ и $1.67 \cdot 10^5$, а также поля скорости ламинарного и турбулентного течений воздуха в узких каналах с двухрядными канавками под углами наклона $\pm 45^\circ$ и $\pm 135^\circ$ [11, 12].

В [13, 14] при экспериментальных и численных теплофизических исследованиях выявлена аномальная интенсификация теплообмена при турбулентном отрывном обтекании воздухом удлиненной канавки умеренной глубины на пластине, наклоненной под углом 45° к набегающему потоку. Область исследования включала прямоугольный участок, нагретый до 100 °С насыщенным водяным паром. Число Рейнольдса менялось от 10^3 до $3 \cdot 10^4$. Методом градиентной теплотриии установлено двукратное возрастание коэффициента теплоотдачи на дне канавки при числе Рейнольдса $Re = 3 \cdot 10^4$ в сравнении с плоской пластиной. Относительное число Нуссельта для различных участков канавки определялось как в ходе физического эксперимента, так и путём расчёта на основе RANS подхода с применением многоблочных вычислительных технологий и SST-модели в пакете VP2/3. Хорошее совпадение результатов получено в турбулентном режиме течения при $Re = (5, 10 \text{ и } 30) \cdot 10^3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ: грант № 22-19-00056 (эксперимент) и грант № 23-19-00083 (методическое обоснование).

Литература

- [1] Калинин Э. К., Дрейцер Г. А., Копп И. З., Мякочин А. С. Эффективные поверхности теплообмена. Москва: Энергоатомиздат, 1998. 407 с.
- [2] Isaev S., Gritckevich M., Leontiev A., Popov I. Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // *Acta Astronautica*. 2019. Vol. 163 (Part A). P. 202–207. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.01.033
- [3] Isaev S. A., Gritckevich M. S., Leontiev A. I., Milman O. O., Nikushchenko D. V. Vortex enhancement of heat transfer and flow in the narrow channel with a dense packing of inclined one-row oval-trench dimples // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. Vol. 145. P. 118737. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118737
- [4] Исаев С. А., Грицкевич М. С., Леонтьев А. И., Попов И. А., Судаков А. Г. Аномальная интенсификация турбулентного отрывного течения в наклоненных од-

- норядных овально-траншейных лунках на стенке узкого канала // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 5. С. 797–800.
- [5] Исаев С. А., Мазо А. Б., Никущенко Д. В., Попов И. А., Судаков А. Г. Влияние на аномальную интенсификацию отрывного турбулентного течения угла наклона однорядных овально-траншейных лунок на стабилизированном гидродинамическом участке узкого канала // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. № 21. С. 18–21.
- [6] Исаев С. А., Леонтьев А. И., Никущенко Д. В., Судаков А. Г., Усачов А. Е. Интенсификация отрывного течения в наклонных однорядных овально-траншейных лунках на стенке узкого канала // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 1. С. 160–168.
- [7] Исаев С. А., Чулюнин А. Ю., Никущенко Д. В., Судаков А. Г., Усачов А. Е. Анализ аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена на стабилизированном участке узкого канала с однорядными наклонными овально-траншейными лунками при использовании различных сеток и моделей турбулентности // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59. № 1. С. 116–125.
- [8] Зубин М. А., Зубков А. Ф. Структура отрывного обтекания цилиндрической каверны на стенке плоского канала // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 81–89.
- [9] Исаев С. А. Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 5. С. 13–24.
- [10] Исаев С. А. Аэрогидродинамические механизмы интенсификации физико-энергетических процессов на структурированных энергоэффективных поверхностях с вихревыми генераторами // Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30. № 1. С. 83–88.
- [11] Исаев С. А., Гувернюк С. В., Никущенко Д. В., Судаков А. Г., Синявин А. А., Дубко Е. Б. Взаимосвязь аномальной интенсификации отрывного течения и экстраординарных перепадов давления в канавке на пластине при изменении угла наклона от 0 до 90° // Письма в журнал технической физики. 2023. Т. 49. № 15. С. 39–42.
- [12] Исаев С. А., Судаков А. Г., Никущенко Д. В., Усачов А. Е., Зубин М. А., Синявин А. А., Чулюнин А. Ю., Дубко Е. Б. Тесты для валидационных задач аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена на структурированных поверхностях с экстраординарными перепадами давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 5. С. 70–81.
- [13] Isaev S. A., Sapozhnikov S. Z., Nikushchenko D. V., Mityakov V. Yu., Seroshtanov V. V., Dubko E. B. Anomalous intensification of vortex heat transfer in the case of separated air flow over an inclined groove in a hot isothermal region of a flat plate // Fluid Dynamics. 2024. Vol. 59. No. 1. P. 45–59. doi: 10.1134/S0015462823602310
- [14] Селезнева М. Д., Князев С. А., Ключ А. А., Сероштанов В. В. Интенсификация теплообмена в одиночной овально-траншейной лунке на пластине при изменении

угла наклона от 0 до 90° // *Аэрокосмическая техника и технологии*. 2023. Т. 1. № 4. С. 30–41.

Методы проектирования траекторий перелета малых космических аппаратов к Луне

Овчинников М.Ю., Ширококов М.Г.
ovchinni@keldysh.ru, shirobokov@keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

Аннотация. Доклад посвящен методам проектирования траекторий перелета малых космических аппаратов к Луне. Рассматриваются различные варианты доставки малого аппарата к Луне: попутный запуск к Луне, предварительный вывод на высокоапогейную орбиту, вывод на обходную траекторию, спиральная раскрутка с двигателем малой тяги. Дается математическое описание методов, демонстрируются примеры их использования, обсуждаются открытые вопросы построения траекторий перелета.

Ключевые слова: малый космический аппарат, малая тяга, низкоэнергетическая траектория.

Современный этап освоения космоса отличается повышенным вниманием исследователей, космических агентств, частных фирм и государств к окололунному пространству и самой Луне. Это обусловлено планами по созданию окололунной орбитальной станции, развертыванию навигационной спутниковой сети, добыче лунных ресурсов и проведению научных исследований. Стремление коммерческих и государственных организаций к испытанию, совершенствованию и демонстрации инновационных технологий стимулирует их интерес к реализации миссий малых космических аппаратов, нацеленных на исследование Луны. Однако, миссии малых аппаратов характеризуются жесткими ограничениями по массе и энергопотреблению, что оказывает значительное влияние на размер и состав полезной нагрузки, количество топлива и размер солнечных батарей. Для проектировщиков миссий это означает необходимость разработки оптимальных траекторий перелета и программ управления.

Наибольшее влияние на динамику и затраты топлива оказывают стартовые условия и тип используемой двигательной установки. Стартовые условия зависят от типа запуска: целевого или попутного. При целевом запуске стартовые условия, такие как орбита и дата старта, оптимизируются под конкретную миссию, в то время как при попутном запуске начальные условия могут быть неоптимальными или даже неудобными для отправки малого аппарата к цели. Двигательные установки, в свою очередь, также можно разделить на две категории: с двигателями «большой» тяги и низким удельным импульсом (на

гидразине, воде и т.д.) и с двигателями малой тяги, но высоким удельным импульсом (электрореактивные). Выбор типа двигательной установки определяет форму траектории и механико-математические методы ее проектирования.

Методы проектирования траектории в каждом случае основываются на двух дополняющих друг друга математических инструментах: теории динамических систем и методах оптимизации. Методы теории динамических систем используются для глубокого изучения механико-математических свойств потоков динамических систем, описывающих модели задач трех и четырех тел, а также для применения основанных на них динамических эффектов, таких как эффект Оберта, гравитационные маневры, резонансные сближения и низкоэнергетические (обходные) траектории. Построение траекторий зачастую сводится к определению положений равновесия, периодических и квазипериодических орбит, связанных с ними устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий, поверхностей Хилла, анализу значений интегралов энергии, поиску удачных конфигураций системы Солнце–Земля–Луна. Анализ фазового пространства зачастую помогает сузить пространство поиска траекторий перелета и качественно объяснить их поведение.

Методы оптимизации траекторий перелета применяются для нахождения строго оптимальных по расходу топлива траекторий, построения (квази)периодических орбит в высокоточных моделях движения, а также для обнаружения устойчивых или слабо неустойчивых орбит вокруг Луны. Численные методы оптимизации позволяют находить решения в ситуациях, когда аналитический подход крайне сложен, а также адаптировать траектории или орбиты, полученные в одних моделях движения, к высокоточным моделям. Необходимые условия оптимальности, сформулированные в виде условий Каруша–Куна–Таккера, достаточных условий оптимальности, принципа максимума Понтрягина или условий оптимальности Беллмана, предоставляют информацию о свойствах оптимальных решений. Язык теории вероятности, как инструмент методов оптимизации, оказывается естественным для синтеза управления, учитывающего неопределенность в модели движения и нештатные ситуации — типичные ситуации в миссиях малых космических аппаратов.

Цель данной работы — выделить типичные сценарии полета на Луну малых космических аппаратов и сообщить о полезных математических инструментах, основанных на теории динамических систем и методах оптимизации, позволяющих строить траектории перелета.

В зависимости от типа запуска и двигательной установки можно выделить четыре сценария полета на Луну, характеризующихся различной динамикой и методами проектирования траектории:

- целевой запуск с двигателем большой тяги,
- целевой запуск с двигателем малой тяги,
- попутный запуск с двигателем большой тяги,

— попутный запуск с двигателем малой тяги.

Для целевого запуска с двигательной установкой большой тяги требуется разгонный блок специально для вывода малого аппарата на отлетную траекторию или высокоапогейную орбиту. Полезным оказывается использование разгонного блока для торможения у Луны, так как иначе множество достижимых окололунных орбит оказывается сильно ограниченным. Для проектирования используются прямые перелеты, низкоэнергетические (обходные) траектории, а также устойчивые и неустойчивые многообразия либрационных орбит, связанных с точками либрации L_1 и L_2 [1, 2, 3].

Целевой запуск с двигательной установкой малой тяги предполагает многовитковую раскрутку траектории, прохождение радиационных поясов, окрестности точки либрации L_1 , баллистический захват Луной и многовитковую скрутку траектории к целевой орбите. На первом этапе необходимо обеспечить быстрый выход за радиационные пояса в связи с деградацией в них солнечных панелей, а также подобрать долготу восходящего узла стартовой орбиты, чтобы минимизировать попадание аппарата в тень Земли, где подпитка энергией двигателей отсутствует и управление невозможно. На этапе полета до точки либрации решается задача оптимального по затратам топлива или времени управления, используются методы построения многовитковых траекторий перелета, резонансные сближения с Луной и, в случае имеющегося разгонного блока, обходные траектории [4]–[9].

Попутный запуск с двигательной установкой большой тяги возможен только если основная миссия направляется к Луне по прямому или обходному пути. Выход на низкие окололунные орбиты возможен только с использованием разгонного блока основной миссии. Без разгонного блока возможны выходы на высокоэллиптические, почти прямолинейные гало-орбиты (near-rectilinear halo orbits, NRHO) и на либрационные орбиты. Для проектирования траекторий здесь используется серия гравитационных маневров или резонансных сближений с Луной, а также обходные траектории для баллистического захвата траектории и выбора ориентации финальной орбиты [10, 11].

Попутный запуск с двигательной установкой малой тяги отличается от запуска с установкой большой тяги тем, что импульсы скорости заменяются продолжительными активными участками, число гравитационных маневров у Луны сокращается, а доступными становятся низкие окололунные орбиты. Для построения траекторий используются гравитационные маневры у Луны, эффект Оберта, продолжительные участки торможения двигателем и методы построения многовитковых траекторий для скрутки на окололунные орбиты [12].

Доклад включает описание указанных методик, примеры их применения в реальных миссиях малых аппаратов к Луне, а также обсуждение открытых вопросов построения траекторий перелета.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-11-00038).

Литература

- [1] Parker J., Cheetham B., Gardner T., et al. CAPSTONE: Pathfinder for the Lunar Gateway // Proceedings of the 73rd International Astronautical Congress, Paris, France, September 18–22, 2022, 10 p.
- [2] Sweetser T. H., Broschart S. B., Angelopoulos V., et al. ARTEMIS Mission Design // In: Russell C., Angelopoulos V. (eds) The ARTEMIS Mission. Springer, New York, 2012. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9554-3_4
- [3] Tselousova A., Trofimov S., Shirobokov M., et al. Geometric Analysis of Sun-Assisted Lunar Transfer Trajectories in the Planar Bicircular Four-Body Model // Applied Sciences. 2023. Vol. 13. N 8. Article 4676. <https://doi.org/10.3390/app13084676>
- [4] Racca G. D., Marini A., Stagnaro L., et al. SMART-1 mission description and development status // Planetary and space science. 2002. Vol. 50. N 14–15. P. 1323–1337. [https://doi.org/10.1016/S0032-0633\(02\)00123-X](https://doi.org/10.1016/S0032-0633(02)00123-X)
- [5] Yoon S. W., Petukhov V. Minimum-fuel low-thrust trajectories to the Moon // Acta Astronautica. 2023. Vol. 210. P. 102–116. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.05.006>
- [6] Shirobokov M., Trofimov S., Barabash S., et al. Low-Thrust Microspacecraft Delivery to a Lunar Orbit After the Launch to GTO or MEO // Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC, 2020. 8 p.
- [7] Shirobokov M., Trofimov S., Ovchinnikov M. Pareto-Optimal low-Thrust lunar transfers with resonant encounters // Advances in the Astronautical Sciences. 2017. Vol. 161. P. 485–498.
- [8] Shirobokov M., Trofimov S. Parametric analysis of low-thrust lunar transfers with resonant encounters // Advances in the Astronautical Sciences. 2016. Vol. 158. P. 579–603.
- [9] Иванюхин А. В., Петухов В. Г. Низкоэнергетические квазиоптимальные траектории с малой тягой к точкам либрации и гало-орбитам // Космические исследования. 2020. Т. 58. № 2. С. 165–176. <https://doi.org/10.31857/S0023420620020053>
- [10] Baresi N., Chikazawa T., Dei Tos D. A., et al. The New Trajectory Design of EQUULEUS // International Symposium on Space Technology and Science (ISTS), Fukui, Japan. 2019. P. 1–8.
- [11] Glazunova I., Trofimov S., Tselousova A. Single-Launch Deployment of Lunar Constellations from a Sun-Assisted Lunar Transfer Trajectory // Proceedings of the 74th International Astronautical Congress, Baku, Azerbaijan, October 2–6, 2023, 18 p.
- [12] Bosanac N., Cox A. D., Howell K. C., Folta D. C. Trajectory design for a cislunar cubesat leveraging dynamical systems techniques: The lunar icecube mission // Acta Astronautica. 2018. Vol. 144. P. 283–296.

Академик Т. М. Энеев: ракеты, галактики и молекулы ДНК

Ивашкин В.В., Сидоренко В.В

vvsidorenko@list.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

Аннотация. В сентябре 2024 г. исполняется сто лет со дня рождения замечательного российского ученого–механика, академика Тимура Магометовича Энеева. Т.М. Энеев внес большой вклад в формирование механики космического полета, как научной дисциплины. Он был непосредственным участником первых советских космических проектов. Во многих случаях баллистические решения в этих проектах основывались на идеях Т.М. Энеева. После того, как космонавтика вошла в стадию эволюционного развития, предметом научных исследований Т.М. Энеева стали разнообразные задачи астрофизики и геофизики, системотехники и генетики.

Ключевые слова: история науки, космонавтика, астрономия, генетика.

Начало. Путь в науку у Т.М. Энеева не был простым. В 17 лет, после нападения Германии на Советский Союз, он пытается попасть на фронт. Так как мобилизации подлежали только достигшие 18 лет, военкомат направил Т.М. Энеева работать токарем на военном заводе. Несчастный случай — неисправный станок лишает Т.М. Энеева правой руки. Проявив невероятную твердость и волю, он научился писать и даже чертить левой рукой. В 1943 г. Т.М. Энеев поступает на механико–математический факультет МГУ.

Ракетодинамика и космонавтика. В середине 40-ых годов прошлого века, еще до завершения второй мировой войны, становится понятно, что ракеты являются техническим устройством, позволяющим уже в ближайшем будущем решить много новых задач. В МГУ формируется группа студентов, занимающихся под руководством профессора А.А. Космодемьянского проблемами ракетодинамики. Эта группа, в которую, в частности, входили Т.М. Энеев, Д.Е. Охочимский, В.А. Егоров, В.А. Сарычев, в дальнейшем стала основой подразделения Математического института имени В.А. Стеклова, работающего по космической тематике.

Вместе с Д.Е. Охочимским Т.М. Энеев нашел оптимальные законы управления стартующей ракетой. В 1953 г. Т.М. Энеев рассчитал унос массы и тепловые потоки при баллистическом спуске космического аппарата сферической формы и установил, что такой спуск вполне позволяет обеспечить безопасное возвращение человека с околоземной орбиты. Этот результат фактически определил конструкцию космического корабля «Восток».

Т.М. Энеев участвовал в разработке первых методик определения орбит искусственных спутников Земли (ИСЗ) по данным наблюдений и построении



Тимур Магометович Энеев
(23.09.1924 – 08.09.2019)

оценок продолжительности существования низкоорбитальных ИСЗ, испытывающих существенное торможение атмосферой. В 60-ые годы, когда начались полеты к другим планетам, он обосновал целесообразность предварительного выведения космического аппарата на орбиту ИСЗ. Эта схема получила название «звездочка» и используется до сих пор при запусках в дальний космос.

В XXI веке Т.М. Энеев стал инициатором нескольких проектов исследования малых тел Солнечной системы с помощью космических аппаратов. Ему также принадлежит идея отслеживания из космоса опасных сближений астероидов с Землей («космический патруль»).

Астрофизика. В 70-ые годы академик Я.Б. Зельдович обратился к Т.М. Энееву с вопросом: можно ли объяснить конфигурации взаимодействующих галактик только гравитационным притяжением звезд, входящих в эти

галактики? Положительный ответ на вопрос Я.Б. Зельдовича был получен с помощью численного интегрирования уравнений, описывающих движение отдельных звезд. Для того, чтобы производить содержательные вычисления на доступных в то время ЭВМ, Т.М. Энеевым вместе с его сотрудником Н.Н. Козловым был разработан специальный метод численного интегрирования уравнений движения небесных тел — метод «виртуальных контактов». Позже этот метод в группе Т.М. Энеева использовался для моделирования образования Солнечной системы.

В 90-ые годы за орбитой Нептуна было обнаружено большое количество малых небесных тел. Область Солнечной системы, в которой происходит движение этих небесных тел, принято называть поясом Койпера. Стоит отметить, что на основе своих результатов, касающихся формирования Солнечной системы, в 1980 г. Т.М. Энеев сделал предположение о наличии такого пояса за пределами орбиты Нептуна.

Генетика. В конце 80-ых годов Т.М. Энеев вместе с Н.Н. Козловым и Е.И. Кугушевым начинают новый большой научный проект: теоретическое изучение свойств молекул жизни — молекул ДНК. Работа велась в двух направлениях: моделирование пространственных структур, образуемых молекулами ДНК (решение проблемы конформации) и изучение закономерностей генетического кода. В очередной раз интуиция позволила Т.М. Энееву выбрать область исследований, ставшую через несколько лет одной из важнейших для современной науки.

В качестве свидетельства высокой эффективности алгоритмов, разработанных Т.М. Энеевым, Н.Н. Козловым и Е.И. Кугушевым, можно упомянуть, что, используя только скромные вычислительные возможности персональных ЭВМ, они добились такой доли правильного восстановления пространственной структуры для тестовых наборов молекул ДНК, которая у зарубежных исследователей в те годы получалась только с помощью суперкомпьютеров.

Ответственность и принципиальность. Отношение Т.М. Энеева к любому делу отличалось высочайшей ответственностью. В научных дискуссиях он избегал аргументов, в истинности которых не был абсолютно уверен. С другой стороны, отстаивая какие-то правильные в его понимании решения, Т.М. Энеев не признавал никаких компромиссов.

Именно такая бескомпромиссная позиция позволила Т.М. Энееву вместе с рядом единомышленников из АН СССР добиться в конце 80-ых годов закрытия недостаточно проработанного проекта поворота северных рек на юг.

Литература

- [1] Энеев Тимур Магометович // Большая советская энциклопедия: [в 30 т.] / под ред. А. М. Прохорова 3-е изд. М.: Советская энциклопедия, 1969.

Секция 1

Теоретическая и прикладная
механика

*Theoretical and Applied
Mechanics*

Агрегирование цепочки консервативных систем с притягивающим циклом

Барабанов И.Н., Тхай В.Н.

ivbar@ipu.ru, tkhai@ipu.ru

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается множество из m консервативных систем произвольных порядков с колебаниями одного периода и индивидуальными фазовыми сдвигами в них. Решается задача агрегирования связанной системы с притягивающим циклом. Формируется цепочка консервативных систем, в которой предыдущая система действует на последующую через одностороннюю универсальную связь–управление.

Ключевые слова: консервативная система, одночастотное колебание, метод агрегирования, связь–управления, ведущая система, ведомая система, притягивающий цикл, стабилизация.

Введение. Модели, содержащие связанные подсистемы, изучаются в различных областях знаний. В механике такой моделью (классической) стали симпатические маятники А. Зоммерфельда.

Агрегирование заключается в конструировании на основе данного множества систем одной связанной системы, которая будет обладать желаемым динамическим свойством. Это свойство в задаче стабилизации колебания достигается, в частности, в притягивающем цикле связанной системы. Само агрегирование происходит путем нахождения подходящих связующих управлений между системами.

Задача агрегирования в [1] решалась для набора консервативных систем с одной степенью свободы. Предполагалось, что они содержат невырожденные семейства колебаний, которые в несвязанной системе, как в целом, также образуют невырожденное семейство. Исследовался случай, когда колебания в системах были синхронизированными по фазе. Эти результаты обобщались на множество консервативных систем произвольного порядка в [2]. Вопросы агрегирования множества обратимых систем второго порядка при наличии сдвигов в колебаниях подсистем рассматривались в [3]; изучались различные сочетания невырожденных и вырожденных семейств в системах на плоскости. Способы агрегирования сложной системы методом Ляпунова приводятся в [4].

В докладе излагаются результаты агрегирования цепочки консервативных систем с притягивающим циклом.

Постановка задачи. Рассматривается множество Ξ из m консервативных систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода: в i -й системе вектор обобщенных координат обозначается как $q^i = (q_1^i, \dots, q_{n_i}^i)^T$. Предполагается, что отдельная система допускает одночастотные колебания, которые

образуют семейство $\Sigma_i(h_i) = \{\varphi_i(h_i, t + \delta_i)\}$ по постоянной энергии h_i . Рассматривается невырожденное семейство, на котором, по определению, период $T_i(h_i)$ монотонно меняется с параметром h_i . Через δ_i обозначены сдвиги по времени начальной точки на траектории.

Предполагается, что множество Ξ из m систем, рассматриваемое как одна консервативная система, допускает одночастотное колебание. Тогда колебание всегда принадлежит невырожденному семейству $\Sigma(h)$ по параметру h : $h = h_1 + \dots + h_m$ — постоянная энергии всей системы. При этом для i -й системы на семействе $\Sigma(h)$ период $T_i(h_i(h))$ становится функцией h ; сдвиг δ_i в колебании i -й системы считается произвольным.

Ставится задача агрегирования множества Ξ в цепочку связанных консервативных систем с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем и произвольными фазами в каждой системе. Применяются универсальные связи–управления между системами, пригодные для любой консервативной системы.

Метод агрегирования. Агрегируется управляемая система, содержащая m слабо связанных консервативных систем, которые описываются уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^i}{\partial \dot{q}_s^i} - \frac{\partial L^i}{\partial q_s^i} = \varepsilon \sigma_i u_s^i(q, \dot{q}), \quad s = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь через L^i обозначается лагранжиан i -й системы, $u^i = (u_1^i, \dots, u_{n_i}^i)^T$ — вектор управления, ε — коэффициент усиления связи между подсистемами в (1), а числа σ_i имеют смысл переключателей режима в связанной системе и равняются +1 или (−1).

Выбираются универсальные связи–управления

$$\begin{aligned} u_s^1 &= \left[1 - K_1(h_1) \sum_{s=1}^{n_1} (q_s^1)^2 \right] \sum_{j=1}^{n_i} r_{sj}^1 \dot{q}_j^1, \\ u_s^i &= \left[1 - K_i(h_1, h_i, \delta_i) \sum_{s=1}^{n_i} (q_s^{i-1})^2 \right] \sum_{j=1}^{n_i} r_{sj}^i \dot{q}_j^i, \quad i = 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2)$$

с постоянными положительно определенными матрицами $\|r_{sj}^1\|$ и $\|r_{sj}^i\|$. Таким образом, в (1) выделяется система с номером $i = 1$, которая назначается ведущей для системы с номером $i = 2$. При этом система с номером $i = 2$ становится ведущей для системы с номером $i = 3$ и т.д. В результате агрегируется цепочка из m консервативных систем.

В методе находятся функции (2), которые гарантируют независимость функционирования ведущей системы от ведомой системы.

Агрегированная управляемая система подчиняется декомпозиции на m самостоятельных управляемых систем с универсальными связями, предложенными в [5]. Каждая из ведомых систем допускает притягивающий цикл, который навязывается ведущей системой. Ведущая система с номером $i = 1$ замкнута сама на себя и всегда допускает притягивающий цикл; соответствующий анализ приводится в [2].

Литература

- [1] Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация цикла в связанной механической системе // *АиТ*. 2022. № 1. С. 67–76.
- [2] Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Агрегирование многомерных консервативных систем с колебаниями // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2024 (в печати).
- [3] Тхай В.Н. Притягивающий цикл в связанной механической системе с фазовыми сдвигами в колебаниях подсистем // *АиТ*. 2023. № 12. С. 120–132.
- [4] Александров А.Ю., Платонов А.В. Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб: Изд-во СПбГУ. 2012.
- [5] Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы // *АиТ*. 2019. № 11. С. 83–92.

О тождественном резонансе в задаче об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Гесса

Бардин В.С.

bsbardin@yandex.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук,
101000, Российская Федерация, Москва, Малый Харитоньевский переулок, 4

Аннотация. Исследуется орбитальная устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Гесса. Показано, что в системе уравнений возмущенного движения реализуется тождественный резонанс и имеет место трансцендентная ситуация, когда вопрос об устойчивости не решается членами сколь угодно высокого порядка в разложении гамильтониана уравнений возмущенного движения. Доказано, что для большинства значений параметров задачи маятниковые колебания орбитально неустойчивы.

Ключевые слова: тяжелое твердое тело, тождественный резонанс, случай Гесса, орбитальная устойчивость.

Введение. Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой O в однородном поле тяжести. Введем абсолютную систему координат $OXYZ$, ось Z которой направлена вертикально вверх, и жестко связанную с телом подвижную систему координат $Oxyz$, оси x , y и z которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через A, B и C . Далее предполагается, что геометрия масс тела отвечает случаю Гесса [1]: все три главных момента инерции различны ($A < C < B$), а центр масс тела лежит в плоскости $Oxyz$, причем его координаты x_c, y_c удовлетворяют соотношению $y_c\sqrt{B(C-A)} = x_c\sqrt{A(B-C)}$.

Поскольку центр масс тела лежит в плоскости главных осей инерции, то возможны маятниковые колебания тела относительно оси инерции Oz , сохраняющей неизменное горизонтальное положение в пространстве. Период маятниковых колебаний зависит от начальных условий, поэтому они неустойчивы по Ляпунову. Однако, с теоретической и прикладной точек зрения значительный интерес представляет задача об орбитальной устойчивости.

В данной работе исследуется вопрос об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний твердого тела.

Гамильтониан уравнений возмущенного движения. Уравнения движения тела можно записать в гамильтоновой форме, выбирая в качестве канонических переменных углы Эйлера ψ, θ, φ и соответствующие им обобщенные импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$. Координата ψ является циклической, поэтому импульс p_ψ принимает на движениях тела постоянное значение. При исследовании задачи об орбитальной устойчивости будем рассматривать только такие возмущения, для которых $p_\psi = 0$.

Введем безразмерное время $\tau = \mu t$ и безразмерные канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2 :

$$q_1 = \varphi - \frac{3\pi}{2} + \beta, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{p_\varphi}{C\mu}, \quad p_2 = \frac{p_\theta}{C\mu}, \quad (1)$$

где β — угол между осью Ox и радиус-вектором центра масс.

Функция Гамильтона задачи имеет вид

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{4} (\operatorname{tg}^2 q_2 [2v \sin 2q_1 + (u+1) \cos 2q_1 + u+3] + 2) p_1^2 - \cos q_1 \cos q_2 + \\ & + \frac{1}{4} [u+3 - 2v \sin 2q_1 - (u+1) \cos 2q_1] p_2^2 + \\ & + \frac{1}{4} \operatorname{tg} q_2 [2v \cos 2q_1 - (u+1) \sin 2q_1] p_1 p_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где безразмерные параметры u, v определяются формулами

$$u = \frac{C}{A} + \frac{C}{B} - \frac{3}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{(B-C)(C-A)}{AB}}. \quad (3)$$

На невозмущенном маятниковом движении $p_2 = q_2 = 0$, а переменные p_1, q_1 удовлетворяют системе уравнений с гамильтонианом $H_0 = \frac{1}{2}p_1^2 - \cos q_1$.

Введём новые переменные I, w так, чтобы на невозмущенном движении они являлись переменными действие-угол [2]

$$q_1 = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(s, k)], \quad p_1 = 2k \operatorname{cn}(s, k), \quad s = 2\pi^{-1} K(k) w, \quad (4)$$

где $k = k(I)$ — функция, обратная к функции $I = 8\pi^{-1} [E(k) - (1 - k^2) K(k)]$. В невозмущенном движении

$$I = I_0 = \text{const}, \quad w = \omega \tau + w(0), \quad (5)$$

где $\omega = \pi / (2K(k))$, причем $k^2(I_0) = (h + 1)/2$ (где h — значение интеграла энергии $H_0 = h$; в случае маятниковых колебаний $|h| < 1$).

Таким образом, в задаче об орбитальной устойчивости имеется три параметра: u, v и h . Параметры u, v определяют геометрию масс, а h является параметром семейства периодических орбит.

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$ и разложим гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$ в ряд по q_2, p_2, r_1 :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2m} + \dots, \quad (6)$$

где через Γ_{2m} в (6) обозначены члены порядка $2m$.

Задача об орбитальной устойчивости плоских периодических движений эквивалентна задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (6) по отношению к переменным q_2, p_2, r_1 .

Линейный анализ устойчивости. В первом приближении задача об орбитальной устойчивости периодической орбиты $I = I_0$ сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$ следующей линейной системы с 2π -периодическими по w коэффициентами

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_2}. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение системы (7) имеет вид

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (8)$$

где $\varkappa = (x_{11} + x_{22})/2$, а x_{11}, x_{22} — диагональные элементы матрицы монодромии.

Линейная система (7) имеет первый интеграл $J_* = [p_2 \sin(q_1(w)) - p_1(w) q_2 \cos(q_1(w))]/e^{vq_1(w)}$, где функции $q_1(w), p_1(w)$ задаются формулами (4). Это позволяет построить матрицу монодромии этой системы в следующем явном виде.

$$X_{osc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$b_{21} = -(1+h) \sqrt{2} \left[u Z_{osc}(h, v) + h \frac{\partial}{\partial h} Z_{osc}(h, v) \right],$$

$$Z_{osc}(h, v) = \int_{-\arccos(-h)}^{\arccos(-h)} \frac{e^{2vt}}{\sqrt{h + \cos t}} dt.$$

Из (9) следует, что при всех значениях параметров задачи характеристическое уравнение (8) имеет кратный корень равный единице, т.е. имеет место так называемый тождественный резонанс первого порядка [3]. В данном резонансном случае выводы об устойчивости линейной системы не распространяются на полную нелинейную систему с гамильтонианом (6). Поэтому на основании проведенного здесь линейного анализа можно сделать выводы лишь об орбитальной устойчивости (при $b_{21} = 0$) или неустойчивости (при $b_{21} \neq 0$) в линейном приближении.

Об орбитальной неустойчивости маятниковых колебаний. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний необходим дополнительный анализ. Если $b_{21} \neq 0$, то при помощи линейной и 2π -периодической по w замены переменных $w, r_1, q_2, p_2 \rightarrow W, R, Q, P$ гамильтониан (6) можно привести к виду

$$\tilde{\Gamma} = \omega R + \frac{1}{2} P^2 + \tilde{\Gamma}_4 + \dots + \tilde{\Gamma}_{2m} + \dots \quad (10)$$

Оказалось, что в данной задаче имеет место особый случай, когда вопрос об устойчивости не решается на основании нелинейного анализа с учетом членов любого сколь угодно высокого порядка в разложении гамильтониана (10). Поэтому здесь обща методика исследования устойчивости, основанная построении нормальной формы гамильтониана уравнений возмущенного движения, неприменима. Следуя терминологии А.М. Ляпунова, будем называть такой случай трансцендентным. Ранее трансцендентный случай был обнаружен и исследован в задаче об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений твердого тела в интегрируемом случае Горячева–Чаплыгина [4].

Наличие трансцендентного случая в данной задаче связано с тем, что период маятниковых колебаний зависит только от постоянной интеграла энер-

гии [5]. Поэтому в фазовом пространстве системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите существует целое семейство периодических решений одного и того же периода. В этом случае на основании результатов работы [6] можно сделать строгий вывод об орбитальной неустойчивости маятниковых колебаний.

Литература

- [1] Hess W. Über die Eulerschen bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* 1890. V. 37. No. 2. P. 153–181.
- [2] Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // *Прикладная математика и механика.* 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
- [3] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [4] Бардин Б. С. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2007. №. 2. С. 14–21.
- [5] Гашененко И. Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // *Механика твердого тела.* 2010. Вып. 40. С. 12–20.
- [6] Бардин Б. С. Об устойчивости периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы в одном трансцендентном случае // *ДАН.* 2018. Т. 479. № 5. С. 485–488.

Моделирование двумерного движения вибрационного робота по плоскости

Беличенко М.В., Офицерова Т.И.*

**tuzemec1@rambler.ru*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Рассматривается движение вибрационного робота с двумя подвижными внутренними массами, способного совершать движение в двумерном пространстве. Моделирование движения робота произведено благодаря упрощению поведения сил трения в точках контакта робота и поверхности. Для выбранного случая получено, что в зависимости от параметров движения внутренних масс корпус робота может оставаться в покое, совершать движение по плоскости или совершать движение с подскоками. В случае движения центр робота следует по зигзагообразной траектории, среднее перемещение по которой происходит по окружности.

Ключевые слова: вибрационные роботы, перемещение посредством внутренних масс, капсульные роботы.

Введение. В современном мире всё больше задач выполняется роботизированными системами. Одним из классов роботов являются вибрационные

роботы — устройства, способные перемещаться за счёт движения внутренних масс. Такие роботы обладают рядом достоинств. Они могут быть выполнены в виде герметичных капсул и выполнять задачи в агрессивных средах, они могут быть выполнены в миниатюрных размерах и выполнять задачи в труднодоступных местах. Исследованию динамики таких систем посвящено множество работ. В ряде исследований рассматривается движение робота по шероховатой плоскости вдоль прямой [1, 2, 3]. В работах [4, 5] рассматривается вопрос о движении робота по плоскости, однако, предложенное движение внутренней массы является довольно сложным. В данной работе рассматривается движение робота, способного совершать двумерное движение по плоскости благодаря вращению двух подвижных масс. Такая конструкция легка в реализации и способна расширить возможности исследованных ранее роботов.

Уравнения движения робота. Рассмотрим движение вибрационного робота, состоящего из корпуса массы M и двух материальных точек K и H равной массы m (рис. 1). Корпус представляет собой треугольную прямоугольную призму, грани которой вертикальны, а в основании лежит равнобедренный треугольник. Основание треугольника равно $2b$, высота треугольника $3a$. Подвижные массы вращаются по окружностям радиусов R и r с постоянной угловой скоростью ($\psi = \omega t$) в вертикальных плоскостях, отстоящих от плоскости симметрии призмы на расстоянии c . Центры этих окружностей лежат на оси Oy , перпендикулярной плоскости симметрии призмы, проходящей через центр масс корпуса. Корпус двигается по шероховатой плоскости и касается её в трёх угловых точках A, B и C , коэффициент трения равен f .

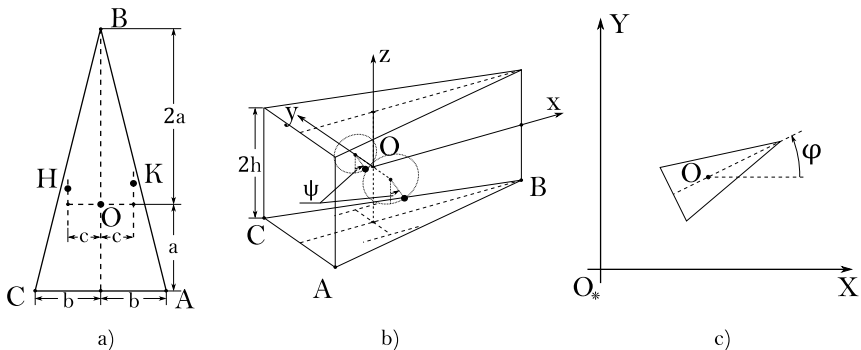


Рис. 1. Конструкция робота.

Положение робота зададим координатами центра O корпуса x, y и углом φ .

Ускорения точек K и H в проекциях на оси $Oxyz$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{W}_K &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + \ddot{\varphi}c - \dot{\varphi}^2 R \sin \omega t - \omega^2 R \sin \omega t \\ \ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 c + \dot{\varphi} R \sin \omega t + 2\dot{\varphi} \omega R \cos \omega t \\ \omega^2 R \cos \omega t \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{W}_H &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi - \ddot{\varphi}c - \dot{\varphi}^2 r \sin \omega t - \omega^2 r \sin \omega t \\ \ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 c + \dot{\varphi} r \sin \omega t + 2\dot{\varphi} \omega r \cos \omega t \\ \omega^2 r \cos \omega t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Запишем для корпуса теорему об изменении количества движения (1) на оси неподвижной системы координат O_*XYZ и теорему об изменении кинетического момента (2) относительно осей $Oxyz$, связанных с корпусом тела.

$$\begin{aligned}M\ddot{x} &= F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} + \Phi_{x1,2}, & M\ddot{y} &= F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} + \Phi_{y1,2}, \\ & & 0 &= N_A + N_B + N_C - Mg - 2mg + \Phi_{z1,2},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}0 &= ((F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy}) \cos \varphi - (F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx}) \sin \varphi)h + \\ & \quad + (N_C - N_A)b + M_{Ox}(\Phi_{1,2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= -((F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx}) \cos \varphi + (F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy}) \sin \varphi)h + \\ & \quad + mg(R + r) \sin \omega t + (N_A + N_C - 2N_B)a + M_{Oy}(\Phi_{1,2}),\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}J\ddot{\varphi} &= ((2F_{By} - F_{Ay} - F_{Cy})a + (F_{Ax} - F_{Cx})b) \cos \varphi + \\ & \quad + ((F_{Ax} - 2F_{Bx} + F_{Cx})a + (F_{Ay} - F_{Cy})b) \sin \varphi + M_{Oz}(\Phi_{1,2}).\end{aligned}$$

Здесь J — момент инерции корпуса относительно оси Oz , N_A, N_B, N_C — реакции опоры точках касания, F_{Ax}, F_{Bx}, F_{Cx} и F_{Ay}, F_{By}, F_{Cy} — проекции сил трения в точках касания на оси O_*X и O_*Y , вектора $\overrightarrow{\Phi}_{1,2} = (\Phi_{x1,2}, \Phi_{y1,2}, \Phi_{z1,2})^T$ и $\overrightarrow{M}_O(\Phi_{1,2}) = (M_{Ox}(\Phi_{1,2}), M_{Oy}(\Phi_{1,2}), M_{Oz}(\Phi_{1,2}))^T$ — вектора главного вектора сил инерции и главного момента сил инерции точек K и H . Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Phi}_{1,2} &= -m\overrightarrow{W}_H - m\overrightarrow{W}_K, & \overrightarrow{M}_O(\Phi_{1,2}) &= -\overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{W}_H - \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{W}_K, \\ \overrightarrow{OK} &= (R \sin \omega t, -c, -R \cos \omega t)^T, & \overrightarrow{OH} &= (r \sin \omega t, c, -r \cos \omega t)^T.\end{aligned}$$

Описанная система из шести уравнений (1), (2) содержит шесть неизвестных — ускорения $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}$ и реакции N_A, N_B, N_C . Также рассматриваемый робот движется под действием трёх сил трения в точках A, B, C . При использовании модели сухого кулоновского трения наличие данных сил приводит к системе уравнений с разрывными правыми частями, для которых необходимо рассмат-

ривать множество частных случаев движения. Для преодоления данной сложности используем приближенную модель силы трения:

$$\vec{F}_A = -\frac{2}{\pi} \arctan(10000|\vec{V}_A|) \frac{\vec{V}_A}{|\vec{V}_A|} f N_A.$$

При использовании такой модели сила трения направлена против скорости точки, совершающей скольжение, причём при существенных скоростях множитель при стандартном значении силы трения стремится к единице, а при скоростях, сравнимых с погрешностью, этот коэффициент по модулю меньше единицы, что моделирует силу трения покоя. Такая модель силы трения была также применена к исследованным ранее вибрационным роботам, и показала приемлемую точность получаемого решения.

Движение робота. Целью данной работы является выявление качественного характера движения подобного вибрационного робота. Было произведено численное интегрирование полученных уравнений для заданных параметров робота

$$a = 0.8, \quad b = 0.6, \quad c = 0.3, \quad h = 0.7, \quad M = 2$$

при различных значениях параметров m, f, R, r, ω .

Полученные решения можно разделить на три класса. В случае недостаточной интенсивности движения масс, корпус робота покоится. В случае значительной интенсивности, точки контакта робота способны отрываться от плоскости, и возможно опрокидывание робота. В остальных случаях корпус совершает зигзагообразное движение, при котором центр корпуса совершает среднее перемещение по дуге окружности, лежащей в стороне подвижной массы с меньшим радиусом.

На рис. 2(a) приведён пример траектории решения системы при

$$m = 0.5, \quad R = 0.5, \quad r = 0.25, \quad f = 0.3, \quad \omega = 7.$$

На рис. 2(b) построена диаграмма типов движения при

$$m = 0.5, \quad R = 0.5, \quad r = R - dr, \quad f = 0.3, \quad \omega = 7$$

в плоскости параметров ω и dr . Здесь при малых угловых скоростях имеет место область покоя I , при сильных — область подскока H , а между ними находится область движения робота M .

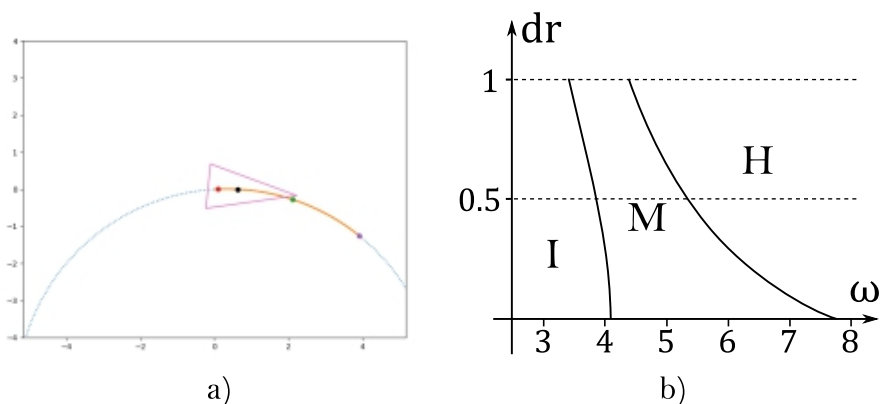


Рис. 2. Траектория и диаграмма типов движения робота.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/>.

Литература

- [1] Бардин Б. С., Панёв А. С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. Т. 84.
- [2] Bardin B. S., Rachkov A. A. On periodic motions of a body with an internal moving mass on a rough horizontal plane in the case of anisotropic friction // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. P. 012005.
- [3] Бардин Б. С., Рачков А. А., Чекина Е. А., Чекин А. М. О периодических режимах движения тела по горизонтальной шероховатой плоскости, реализуемых посредством перемещения двух внутренних масс // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16. № 1. С. 17–34.
- [4] Черноусько Ф. Л. Плоские движения тела, управляемого при помощи подвижной массы // Докл. РАН. 2020. Т. 494. С. 69–74.
- [5] Черноусько Ф. Л. Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. № 4. С. 414–425.

О равновесиях систем, стеснённых связями, задаваемыми кусочно-дифференцируемыми функциями

Бузов А.А.

jtm@narod.ru

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 44/2

Аннотация. На примерах обсуждаются особенности реализации односторонних голономных связей, заданных кусочно-дифференцируемыми функциями, в частности, чувствительность свойств равновесий систем, стеснённых связями, к способу реализации этих связей.

Ключевые слова: односторонние голономные связи, способы реализации связей, равновесия систем, стеснённых голономными связями, чувствительность свойств движения к способу реализации связи.

Введение. Как известно, метод Рауса [1] (см. также [2]) и его модификации позволяют эффективно решать задачу о существовании и устойчивости как равновесий, так и установившихся движений механических систем, стеснённых связями. Однако в ряде случаев, таких, как, например, случай непрерывности, но лишь кусочной дифференцируемости функций, задающих налагаемые связи, при применении метода Рауса можно обнаружить определённые затруднения, связанные в частности, с необходимостью дифференцирования негладких функций (см., например, [3]). В докладе на примерах систем на плоскости обсуждаются возможные пути преодоления таких трудностей в случае, когда механическая природа связи известна, а также особенности такого рода связей.

Мотивирующий пример. Начнём с основного мотивирующего примера, размышления над которым привели к дальнейшим рассуждениям.

Пример. Тяжёлая материальная точка движется в области вертикальной плоскости, задаваемой неравенством

$$f = |x| - y \leq 0, \quad (1)$$

где Oxy — система отсчёта, ось Ox которой горизонтальна, а ось Oy направлена вдоль восходящей вертикали. Потенциальная энергия имеет вид $U = mgy$, где m — масса точки, $g > 0$ — ускорение силы тяжести, и интуитивно ясно, что $(0, 0)$ — точка её строгого минимума в этой области (рис. 1). Тогда соответствующее этой точке положение равновесия устойчиво в силу хотя бы принципа Торричелли (см., например, [4]).

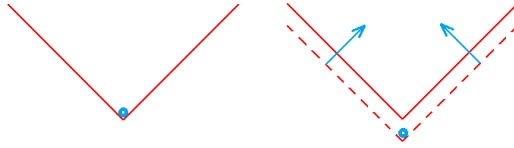


Рис. 1.

Для того, чтобы доказать, что точка $(0, 0)$ — устойчивое положение равновесия, формально говоря, следует применить метод множителей Лагранжа: для отыскания критических точек и исследования их типа выпisać функцию Лагранжа

$$W = U + mg\lambda f$$

и рассмотреть задачу на безусловный экстремум.

Однако, трудность состоит прежде всего в том, что непрерывная функция $y = |x|$, определяющая границу неударживающей связи (1), не дифференцируема в классическом смысле в точке $(0, 0)$. Для преодоления возникающих трудностей можно либо использовать обобщения понятия дифференцирования, либо применять какие-либо приёмы (см., например, [5]–[9]) или их обобщения.

Основное предложение. Пусть механическая система на плоскости (x, y) стеснена неударживающей связью, граница которой задаётся кусочно–дифференцируемой функцией. Пусть такая связь допускает реализацию, при которой область, где движение допустимо, задаётся парой неравенств

$$f_1(x, y) \leq 0, \quad f_2(x, y) \leq 0, \quad (2)$$

причём задающие границы области кривые $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ трансверсально пересекаются в точке потери гладкости.

Тогда для освобождения от связи можно считать, что она реализована потенциальными силами с потенциалом

$$U_N = \frac{1}{2} N \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y), \quad (3)$$

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) : f_k(x, y) \leq 0 \\ f_k^2(x, y), & (x, y) : f_k(x, y) > 0 \end{cases}, \quad k = 1, 2.$$

$N > 0$ — безразмерный параметр, значение которого неограниченно возрастает.

Пример: решение. Непосредственные вычисления показывают, что для примера

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y) : |x| - y \leq 0 \\ 2(x^2 + y^2), & (x, y) : |x| + y \leq 0 \\ (x - y)^2, & (x, y) : x - |y| \geq 0 \\ (x + y)^2, & (x, y) : x + |y| \leq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

и имеется равновесие

$$x(N) = 0, \quad y(N) = -\frac{mg}{2N}, \quad (5)$$

расположенное в области $|x| + y \leq 0$ и стремящееся при $N \rightarrow \infty$ к равновесию $(0, 0)$. Исследование второй вариации функции U_N на этом решении показывает, что оно устойчиво в вековом смысле для всех значений параметра $N > 0$.

Замечание 1. Подход допускает распространение на случай систем произвольной размерности.

Замечание 2. Касаемо общих подходов к исследованию устойчивости в системах с неудерживающими связями см. [10, 11].

Чувствительность к способу реализации связей. Возникает вопрос, в какой мере полученные результаты относительно существования и устойчивости найденных равновесий чувствительны к способу реализации связей. Для ответа на этот вопрос рассмотрим другой пример.

Пример. Пусть связь, наложенная на систему такова, что тяжёлая точка должна оставаться в первом квадранте плоскости (x, y) (рис. 2(a)). Нетрудно видеть, что система обладает однопараметрическим семейством безразличных

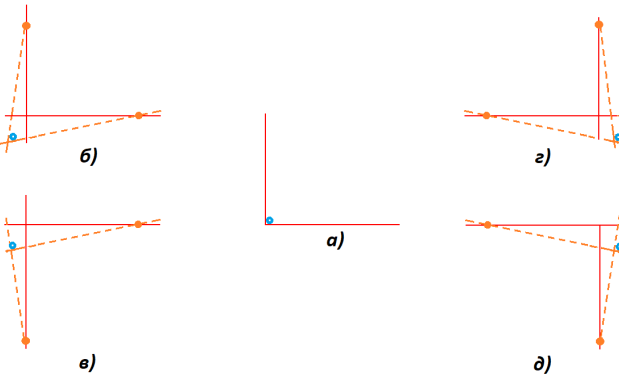


Рис. 2.

равновесий, заполняющим положительную полуось оси Ox .

Границы области, где движение возможно — прямые, которым принадлежат оси системы отсчёта Oxy . Предположим, что эти границы подвешены упруго с помощью пружин, работающих на кручение (на рисунке 2 помечены как оранжевые точки на осях координат). Тогда, как показывают вычисления, для расположения пружин как на рис. 2(б, в) слева система будет обладать единственным равновесием, в то время как для расположения пружин как на рис. 2(г, д) равновесий не будет совсем. Это утверждение остаётся справедливым при сколь угодно больших значениях крутильной жёсткости пружин, пропорциональной параметру $N \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 24-21-20143.

Литература

- [1] Routh E. J. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. L.: MacMillan, 1877. 108 p.
- [2] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. М.: Изд-во URSS, 1998. 168 с.
- [3] Várkonyi P. L., Domokos G. Symmetry, optima and bifurcations in structural design // *Nonlinear Dynamics*. 2006. Vol. 43. P. 47–58.
- [4] Березкин Е. Н. Курс теоретической механики. М.: МГУ, 1974. 647 с.
- [5] Rubin H., Ungar P. Motions under a strong constraining force // *Communs Pure and Appl. Math.* 1957. V. 10. No. 1. P. 65–87.
- [6] Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1972. Vol. 1. No. 1. P. 1–16.
- [7] Козлов В. В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неударяющими связями // *ПММ*. 1988. Т. 52. № 6. С. 883–894.
- [8] Дерябин М. В. О реализации неударяющих связей // *ПММ*. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 136–140.
- [9] Буров А. А. О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // *ПММ*. 2003. Т. 67. № 2. С. 222–230.
- [10] Иванов А. П. Об устойчивости в системах с неударяющими связями // *ПММ*. 1984. Т. 48. № 5. С. 725–732.
- [11] Leine R. I., van de Wouw N. *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 236 p.

Вопросы динамики для механических систем с геометрическими особенностями

Бурьян С.Н.

burianserg@yandex.ru

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем,
191167, Российская Федерация, Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, 29

Аннотация. Рассматривается движение голономных механических систем с особыми точками конфигурационного пространства. Классические уравнения Лагранжа не описывают движение вблизи особенностей. Предложен общий метод построения динамики для систем с геометрическими особыми точками. Некоторые голономные связи заменяются на дополнительный упругий потенциал с большим коэффициентом жесткости. Изучаются траектории системы с дополнительным потенциалом, когда параметр жесткости неограниченно возрастает. Для консервативных сил предельное движение должно лежать на многообразии с особенностями. В данной работе анализируется модельный случай, когда конфигурационное пространство является объединением двух пересекающихся или двух касающихся кривых на плоскости с единственной общей точкой. Поставлены новые задачи для анализа движения механизма через особую точку конфигурационного пространства. Эти задачи будут рассматриваться на примере сингулярного маятника с пружиной.

Ключевые слова: голономные связи, множители Лагранжа, реализация связей, особые точки, многообразия с особенностями.

Введение. В теории механизмов параллельной структуры рассматриваются различные типы особенностей. Сравнение и анализ некоторых классификаций особенностей можно найти в статье [1]. Кинематические особенности возникают, когда вырождается матрица скоростей активных звеньев или матрица скоростей пассивных звеньев. В этом случае система может терять управляемость, так как не всегда есть однозначное сопоставление скоростей. Также существуют механические системы с избыточными связями, в которых число связей больше числа степеней свободы [2].

Особенности уравнений движения возникают в системах с сухим трением по закону Амонтона–Кулона и связаны с «парадоксами» Пенлеве. С учетом силы трения матрица системы, содержащая силы реакции и обобщенные силы трения, может иметь неполный ранг. В результате может возникать заклинивание или резкое торможение движения [3].

Другой тип особенностей связан со свойствами конфигурационного пространства. Например, в некоторых положениях механизма могут возникать точки ветвления. Свойства динамики механической системы могут резко меняться при переходе от одного типа движения к другому. В статье [4] рассматривается пример механизма параллельной структуры с мгновенным увеличением степени подвижности. В статье [5] описывается движение балки с двумя

коньками вблизи множества вырождения неголономных связей (коранга 1). В работе [6] рассматриваются перестройки конфигурационного пространства при изменении параметров связи для особенностей типа двух пересекающихся кривых на плоскости.

Основной целью данной работы является исследование движения механической системы непосредственно через особые точки конфигурационного пространства. Следует заметить, что движение через особую точку не рассматривается в литературе. Основные понятия, такие как «вектор скорости» и «траектория движения» не определены для особых точек. Вывод уравнений движения неприменим в окрестности особенностей. Это свойство отличает тип «геометрических» особенностей от других типов, для которых возможно ввести обобщенные координаты и составить уравнения Лагранжа.

Новизна данной работы заключается в постановке новых задач в динамике систем с геометрическими особенностями. Также предлагается новый метод для исследования движения механических систем вблизи особых точек.

Общий метод. Пусть конфигурационное пространство $X \subset \mathbb{R}^N$ механической системы является объединением двух гладких многообразий M_1 и M_2 . Многообразия M_1 и M_2 пересекаются по гладкому многообразию S . Предполагается, что в пространстве \mathbb{R}^N задан лагранжиан L (для системы без связей) и вектор обобщенных сил \mathbf{Q} . Каждое многообразие M_1 и M_2 может быть задано некоторой системой уравнений (голономных связей) $f_1(\mathbf{x}) = 0$ и $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому возможно рассмотреть индуцированную динамику на M_1 и M_2 , которая порождается лагранжианом L и голономными связями многообразий $f_1(\mathbf{x}) = 0$ или $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Динамика на многообразии M_1 или M_2 задается уравнениями Лагранжа с множителями [7]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_\infty} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_\infty} = \mathbf{Q} + \lambda \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_\infty}, \quad f_i(\mathbf{x}_\infty) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Для построения уравнений на многообразии с особенностями X применяется метод с введением дополнительного потенциала μW . Предполагается, что функция W равна нулю на множестве X и строго положительна вне множества X . Для каждого конечного значения параметра μ получается система уравнений Лагранжа второго рода, которую можно численно проинтегрировать. Реализация голономных связей с помощью дополнительного потенциала для систем без особенностей рассматривается в [8]. Уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_\mu} = \mathbf{Q} - \mu \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_\mu}, \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Потенциал W является штрафной функцией при отклонении траектории от множества X . Интерес представляет движение системы (2) при больших значениях параметра μ . Предполагается, что при $\mu \rightarrow \infty$ траектории \mathbf{x}_μ все меньше отклоняются от множества X на каждом конечном интервале времени.

Задачи динамики. Для исследования описанного метода построения динамики на многообразиях с особенностями рассматривается несколько задач о качественном поведении траекторий \mathbf{x}_μ системы (2) при $\mu \rightarrow \infty$. Для упрощения формулировок рассматривается модельное конфигурационное пространство X , которое является объединением двух гладких кривых Γ_1 и Γ_2 на плоскости. Кривые Γ_1 и Γ_2 пересекаются (локально) в единственной точке $\mathbf{s} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Множество S особых точек конфигурационного пространства X состоит из одной точки \mathbf{s} .

Задача 1 (Движение из начального положения вне особенности). Пусть $\mathbf{x}_\mu(t_0) \in \Gamma_1 \setminus S$ и $\dot{\mathbf{x}}_\mu(t_0) \in T_{\mathbf{x}_\mu(t_0)}\Gamma_1$. Необходимо определить условия, при которых траектории системы (2) сходятся к траекториям системы (1) для движения по одной гладкой кривой Γ_1 при $\mu \rightarrow \infty$. Аналогично для второй кривой Γ_2 .

Задача 2 (Движение под действием ортогональной обобщенной силы). Пусть две кривые Γ_1 и Γ_2 на плоскости пересекаются в точке \mathbf{s} под ненулевым углом. Предположим, что $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_1 \setminus S$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0}\Gamma_1$. На систему действует внешняя сила \mathbf{Q} , ортогональная кривой Γ_1 . Необходимо определить, возможен ли «излом» траектории \mathbf{x}_μ системы (2) при $\mu \rightarrow \infty$ при действии силы \mathbf{Q} , то есть может ли траектория \mathbf{x}_μ двигаться по кривой Γ_2 после прохождения особой точки \mathbf{s} .

Задача 3 (Движение из особенности с нулевой начальной скоростью). Рассматривается случай пересечения кривых Γ_1 и Γ_2 под ненулевым углом. Начальные данные для системы (2): $\mathbf{x}_\mu(t_0) = \mathbf{s}$ и $\dot{\mathbf{x}}_\mu(t_0) = 0$. Тогда если обобщенная сила \mathbf{Q} приложена по направлению касательной к кривой Γ_1 (или Γ_2), то при $\mu \rightarrow \infty$ движение из особой точки с нулевым начальным вектором скорости идет вдоль кривой Γ_1 (или Γ_2).

Задача 4 (Динамическая неопределенность). Пусть кривые Γ_1 и Γ_2 имеют касание 1-го порядка в общей точке \mathbf{s} . Рассматривается траектория \mathbf{x}_μ системы (2) для начальных данных: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{s}$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{s}}\Gamma_1 = T_{\mathbf{s}}\Gamma_2$. В модели (1) с голономными связями возникает неопределенность движения: существуют две возможные траектории с заданными начальными данными. Необходимо определить, существует ли предельное движение \mathbf{x}_μ при $\mu \rightarrow \infty$ в системе (2) и есть ли динамическая определенность для предельного движения.

Описанные задачи рассматриваются для модельной механической системы сингулярного маятника, который ранее исследовался автором в работах [9, 10].

Конфигурационное пространство сингулярного маятника может иметь особенности типа двух пересекающихся или двух касающихся кривых на плоскости. Для применения метода с дополнительным потенциалом один из стержней этого механизма заменяется на упругую пружину жесткости μ . В результате получается механическая система с двумя степенями и без особенностей. Геометрическая особенность возникает при $\mu = \infty$. Исследуются свойства сингулярного маятника с пружиной при возрастании жесткости пружины μ . В докладе будет рассказано о свойствах полученных траекторий сингулярного маятника с пружиной при численном моделировании и некоторых качественных наблюдениях о поведении траекторий для достаточно большой жесткости пружины.

Литература

- [1] Ларюшкин П.А. Классификация и условия возникновения особых положений в механизмах параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. Т. 1(682). С. 16–23. doi: 10.18698/0536-1044-2017-1-16-23.
- [2] Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints // Bulletin of the Technological University. 2014. Vol. 17. No. 11. P. 236–242
- [3] Dupont P. E., Yamajako S. P. Jamming and wedging in constrained rigid-body dynamics // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and automation. 8–13 May 1994. P. 2349–2354. doi: 10.1109/ROBOT.1994.350935
- [4] Zlatanov D., Bonev I. A., Gosselin C. M. Constraint Singularities as C-Space Singularities // 8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics (ARK 2002). Caldes de Malavella, Spain. June 24–28 2002. P. 1–14. doi: 10.1007/978-94-017-0657-5_20
- [5] Закалюкин И. В. Особенности вырождения неголономных связей и управляемость // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. № 39. С. 1–18.
- [6] Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16.
- [7] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П., Товстик П. Е., Солтаханов Ш. Х., Филиппов С. Б., Петрова В. И. Теоретическая и прикладная механика. Том 1. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2022. 560 с.
- [8] Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force // Communications on pure and applied mathematics. 1957. Vol. 10. P. 65–87. doi: 10.1002/CPA.3160100103
- [9] Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Art. 030004. doi: 10.1063/1.5034584
- [10] Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9(67). Вып. 2. С. 278–293. doi: 10.21638/spbu01.2022.209

О влиянии сосредоточенного включения на спектр собственных колебаний струны и балки Бернулли–Эйлера

Вавилов Д.С.,¹ Головина В.В.,¹ Кудрявцев А.А.,² Рымкевич О.В.¹
londr@yandex.ru, kudryavtsev_aa@spbstu.ru

¹Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,

197198, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13,

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29Б

Аннотация. Работа посвящена исследованию малых поперечных колебаний струны и балки Бернулли–Эйлера с сосредоточенным включением. Рассматривается задача об определении параметров включения, таких как местоположение и масса, по измерению сдвига резонансной частоты. В качестве основного метода используется разложение функции перемещения по собственным формам. Предложен метод нахождения частотных уравнений, полностью определяющих его влияние на спектр колебаний. На основе предложенного метода выведены выражения, позволяющие идентифицировать параметры включения, и построены зависимости этих параметров от сдвига резонансной частоты. Показана возможность независимого определения массы и местоположения дефекта по измерению сдвига двух собственных частот.

Ключевые слова: балка Бернулли–Эйлера, струна, спектральная задача, собственные частоты, сосредоточенное включение.

Введение. Современные материалы часто обладают сложной многокомпонентной структурой, которая включает в себя большое разнообразие включений и дефектов, отличающихся друг от друга, как по геометрическим, так и энергетическим характеристикам. В рамках данной работы мы ограничимся рассмотрением механической системы, состоящей из балки или струны с сосредоточенным включением, полностью характеризующимся только двумя параметрами, а именно, его местоположением и массой. Данная упрощенная модель дефекта позволяет получить точные аналитические выражения для его характеристик в зависимости от смещения резонансной частоты. В отличие от статьи [1] здесь предлагается более общий подход, связанный с получением частотных уравнений, который позволяет использовать для определения параметров включения любую пару собственных частот.

Вывод частотных уравнений. Рассмотрим свободные изгибные колебания шарнирно-закрепленной балки Бернулли–Эйлера длины l с точечной массой m , расположенной в точке с координатой ξ , отсчитываемой от левого конца балки [2].

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\omega^2 v}{\mu^2} = \frac{\omega^2 v m \delta(x - \xi)}{\rho \mu^2}. \quad (1)$$

Здесь ω — частота, $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию Дирака. Параметр $\mu^2 = \frac{EJ}{\rho}$ равен отношению изгибной жесткости балки к ее линейной плотности.

Выполнив разложение в ряд по собственным формам балки без включения $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{\pi n x}{l}$ и используя метод Гринберга [3] можно найти выражение для неизвестных коэффициентов:

$$v_n = \frac{2m\omega^2}{\rho l} \frac{v(\xi)}{\frac{\mu^2 \pi^4 n^4}{l^4} - \omega^2} \sin \frac{\pi n \xi}{l}. \quad (2)$$

Подставив (2) в $v(x)$ и положив $x = \xi$, получим характеристическое уравнение:

$$\frac{\pi m a}{4 \rho l} F(a, \xi) = 1, \quad (3)$$

где $a^2 = \frac{\omega l^2}{\pi^2 \mu}$ — параметр, определяющий смещение собственной частоты балки, $F(a, \xi) = \frac{\cos(\pi a(1 - \frac{2\xi}{l})) - \cos \pi a}{\sin \pi a} + \frac{\cosh(\pi a(1 - \frac{2\xi}{l})) - \cosh \pi a}{\sinh \pi a}$, т. е. изменение спектра колебаний зависит от двух параметров: отношения массы включения к массе балки $\alpha = \frac{m}{\rho l}$ и его относительного положения $\beta = \frac{\xi}{l}$.

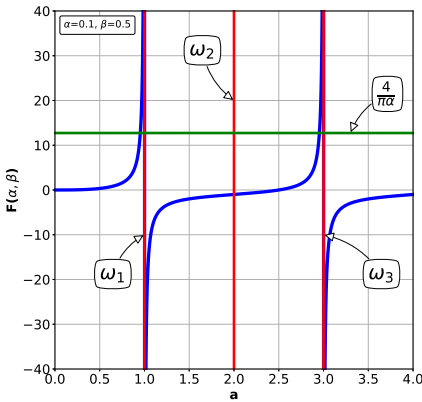


Рис. 1. Спектр колебаний балки.

ные колебания струны с инерционным включением:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t} = \frac{m \delta(x - \xi) \ddot{w}}{T}, \quad (4)$$

Пример графического решения уравнения (3) при $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.5$ для первых трёх частот приведён на рис. 1.

Искомое значение параметра a находится в точке пересечения графика $aF(a, \beta)$ с горизонтальной прямой $\frac{4}{\pi \alpha}$. Вертикальные прямые на графике, при которых a принимает целые значения, соответствуют собственным частотам балки без включения. Отсутствие корня вблизи прямой $a = 2$ объясняется тем, что рассматривается случай, когда дефект расположен в узле второй формы и не может оказать влияние на её частоту.

Разумеется, описанный выше подход применим и для уравнения второго порядка, моделирующего поперечные колебания струны с инерционным включением:

где T — сила натяжения струны, $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ — скорость распространения звука в ней.

Выполняя те же преобразования для уравнения (4), можно показать, что в этом случае характеристическое уравнение, определяющее спектр собственных колебаний, имеет вид:

$$\frac{\pi m a}{2 \rho l} F(a, \xi) = 1, \quad (5)$$

где $a = \frac{\omega l}{\pi c_0}$ и $F(a, \xi) = \frac{\cos(\pi a(1 - \frac{2\xi}{l})) - \cos \pi a}{\sin \pi a}$.

Параметры включения. Если известно расположение точечного включения на балке, то уравнение (3) может быть использовано для определения его массы по измеренному сдвигу первой резонансной частоты, определяющему параметр a . Зависимость $a(\alpha)$ при различных значениях параметра β показана на рис. 2.

С помощью уравнения (5) можно найти не только массу, но и указать относительное расстояние между положением включения и центром струны, т.е. определить величину $r = |\frac{1}{2} - \beta|$. Решение соответствующего тригонометрического уравнения приводит к следующему результату:

$$r = \frac{1}{2\pi a} \arccos\left(\cos \pi a + \frac{2 \sin \pi a}{\alpha \pi a}\right). \quad (6)$$

Область допустимых значений параметра a регулируется выполнением неравенства: $|\cos \pi a + \frac{2 \sin \pi a}{\alpha \pi a}| \leq 1$. Кривые, соответствующие выражению (6), представлены на рис. 3.

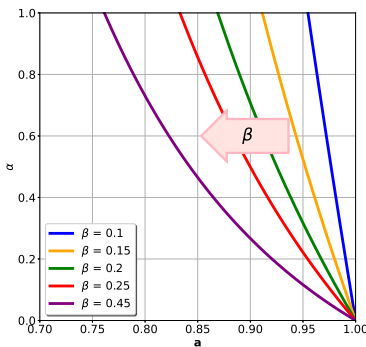


Рис. 2. Зависимость $\alpha(a)$.

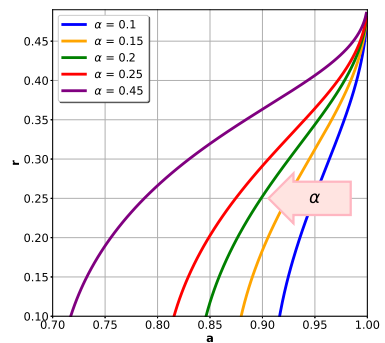


Рис. 3. Зависимость $r(a)$.

Однако при проведении исследования чаще складывается ситуация, когда имеется очень мало априорной информации о свойствах дефекта, т.е. неизвестны и масса, и его положение. Покажем, что выражение (6) может быть использовано для определения обоих параметров, если существует возможность провести измерение не одной, а двух собственных частот, в качестве которых можно, к примеру, взять $\omega_1 = \frac{a_1 \pi c_0}{l}$ и $\omega_2 = \frac{a_2 \pi c_0}{l}$. Для этого заметим, что данное выражение остаётся справедливым независимо от номера частоты:

$$r_1 = \frac{1}{2\pi a_1} \arccos \left(\cos \pi a_1 + \frac{2 \sin \pi a_1}{\alpha \pi a_1} \right); r_2 = \frac{1}{2\pi a_2} \arccos \left(\cos \pi a_2 + \frac{2 \sin \pi a_2}{\alpha \pi a_2} \right). \quad (7)$$

Рассматривая в соотношениях (7) α как независимый параметр, построим на одном графике зависимости $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$. Тогда точка пересечения этих кривых определит относительную массу включения α и его расстояние r относительно центра струны. Пример построения этих кривых при $a_1 = 0.788$ и $a_2 = 1.856$ приведён на рис. 4.

Заключение Таким образом, в результате проведённого исследования были получены частотные уравнения для струны и балки Бернулли-Эйлера с сосредоточенным включением, характеризующимся его положением и массой. С помощью полученных уравнений можно определить массу дефекта в зависимости от изменения резонансной частоты. Для струны удаётся решить обратную задачу: найти местоположение дефекта с заданной массой. Также предложен метод определения обоих параметров включения по сдвигам двух резонансных частот.

Литература

- [1] Bouchaala A., Nayfeh A.H., Younis M.I. Frequency shifts of micro and nano cantilever beam resonators due to added masses // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2016. V. 138. No. 9. P. 091002.
- [2] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М: Высшая школа, 1972. 406 с.

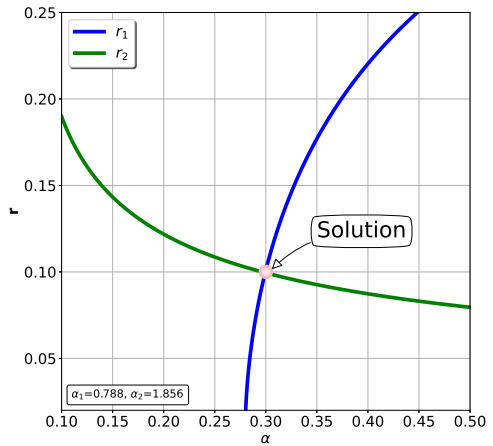


Рис. 4. Зависимость $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$.

- [3] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 414 с.

Метод выхода робота из аварийной ситуации на спине

Голубев Ю.Ф.,¹ Корянов В.В.,¹ Мелкумова Е.В.²
golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4,

³Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Предложен метод раскачивания шестиногого робота с целью обеспечить его переворот из положения «навзничь» («вверх ногами»). В качестве опоры рассмотрена плоскость, последовательно повернутая вокруг трех координатных осей. Плоскость имеет небольшой уклон в сторону переворота. Дополнительные повороты могут соответствовать помехам при раскачивании. В области контакта возможно наличие ямки, рядом с ней возможно наличие бугорка. Показано, что переворот возможен при помощи циклического движения группы ног, если корпус имеет верхнюю оболочку в виде усеченного цилиндра. Выполнено аналитическое исследование, а также компьютерное моделирование полной динамики робота, контактирующего с опорой, средствами программного комплекса «Универсальный механизм».

Ключевые слова: шестиногий робот, аварийная ситуация, переворот корпуса, раскачивание.

Введение. Данная работа развивает результаты, представленные в [1], в части построения алгоритмов управления поведением робота в экстремальных ситуациях с использованием методов компьютерного моделирования. Жуки или черепахи для переворота из положения «вверх ногами» используют приемы подтягивания и отжимания от опорной поверхности [2]. В [3] аналогичные методы используются для переворота робота с корпусом в виде полусферы.

В данной работе предлагается другой метод переворота робота в рабочее положение с использованием динамических эффектов, которые возникают, когда робот, оказавшись в перевернутом положении, начинает без опоры ногами о грунт раскачивать корпус за счет специально сформированного движения ног, обеспечивающего увеличение амплитуды качаний. В результате амплитуда достигает такого значения, что робот обязательно переворачивается.

По сравнению с работами [4, 5] в данной работе усложнена опорная поверхность.

Раскачивание робота. Для облегчения переворота корпус имеет форму выпуклой вверх части цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси

цилиндра. В модельной задаче рассматривается раскачивание однородного сегмента круга без проскальзывания на опорной прямой (рис. 1). К правому концу B хорды сегмента плоским шарниром прикреплен стержень (нога) массы m_1 , который может вращаться относительно сегмента на угол ψ . На другом конце хорды в точке E расположена точечная масса m_2 , уравнивающая ногу.

Аналитически раскачивание в этом случае описывается при помощи теоремы об изменении кинетического момента системы относительно подвижной точки A касания дуги окружности сегмента с опорной прямой [4]. Из анализа модельной задачи следует, что управляющий угол отклонения активных ног следует задавать в виде кусочно-постоянной функции. Переключение должно происходить между двумя значениями, соответствующими предельным положениям ног при махах в сторону пассивных ног и обратно, в моменты времени, когда угловая скорость корпуса обращается в ноль.

С помощью компьютерного моделирования выполняется уточнение управления с учетом наличия трения в контакте, а также наклонов опорной поверхности. При задании управляющего угла между постоянными значениями выполняются линейные переходы. Полная динамическая модель робота формируется автоматически средствами комплекса «Универсальный механизм» [6]. Механическая система имеет 24 степени свободы.

При наличии небольшого наклона опорной плоскости в сторону переворота необходимо сокращать мах активных ног в сторону от пассивных ног. При наличии ямки и бугорка необходимо увеличивать массу ног. Структура движения сохраняется, если при этом суммарная масса ног меньше, чем масса корпуса. На рис. 2 приведены фрагменты типичного раскачивания при комбинации помех. Поворот опорной поверхности задается сначала вокруг горизонтальной оси, направленной вправо, на 15° , затем, в повернутой системе координат, вокруг оси, сонаправленной с продольной осью робота, на 10° . Третий поворот выполняется в полученной системе координат вокруг вертикальной оси на $\gamma_s = 38^\circ$. В результате ямка оказывается ориентирована так, что мах ног в сторону, противоположную направлению переворота, «усиливается», а обратный мах «ослабляется».

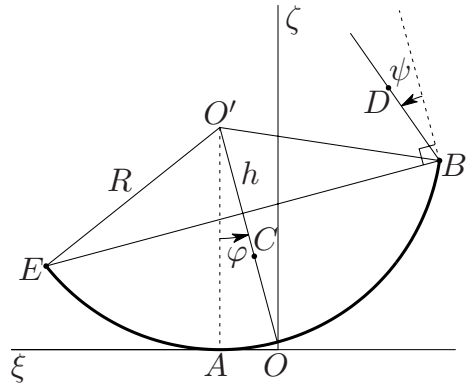


Рис. 1. Перевернутое положение робота.

Соотношение размеров корпуса и звеньев ног имеет вид: $a : b : R : r : l_1 : l_2 = 1 : 0.79 : 0.4 : 1.5 : 0.5 : 0.33$, где a, b — размеры прямоугольного плоского сечения двух прямых круговых цилиндров, образующих корпус робота; R, r — радиусы оснований цилиндров; l_1, l_2 — длины звеньев ног. Масса корпуса робота 25.42 кг.

Параметры ямки и бугорка на рис. 2: $\zeta_{0pit} = 0.45$ м (вертикальная координата центра ямки в связанной с ней системе координат, то есть, без учета поворота опоры), $R_{pit} = 0.6$ м (радиус основания цилиндра, образующего ямку); $\zeta_{0bump} = 0.45$ м, $R_{bump} = 0.55$ м, $\xi_{0bump} = 0.75$ м (горизонтальная координата

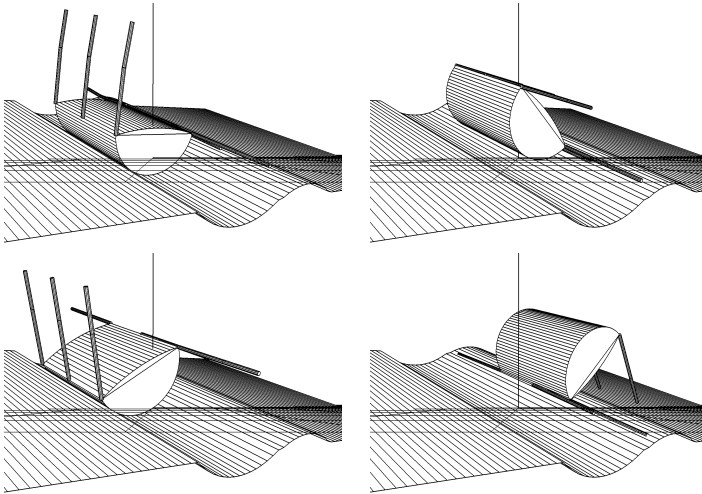


Рис. 2. Фрагменты движения: начальная позиция, типичный мах в сторону пассивных ног, обратный мах, позиция после завершения переворота.

центра бугорка в упомянутой выше связанной с ямкой системе координат, то есть, без учета поворотов опоры); масса одной ноги $m_{leg} = 2.4$ кг (масса всех ног равна $6m_{leg}$). В численных экспериментах $\gamma_s = 38^\circ$ оказалось предельным значением (в смысле увеличения угла), при котором раскачивание продолжало срабатывать с указанными параметрами.

Этот вариант раскачивания соответствует наиболее глубокой ямке для выбранных параметров системы и поворотов опоры. Массу ноги m_{leg} можно увеличивать для сокращения времени всего маневра, при условии, что суммарная масса ног должна быть меньше массы корпуса. Для определенности приведены конкретные значения величин, но, вообще говоря, размеры могут быть заданы относительно размеров корпуса, масса ноги относительно его массы.

На рис. 3 представлены графики изменения по времени углов $\varphi = \pi + \psi$, ψ (рад) и угловой скорости $\dot{\psi}$ (рад/с) для варианта раскачивания, фрагмен-

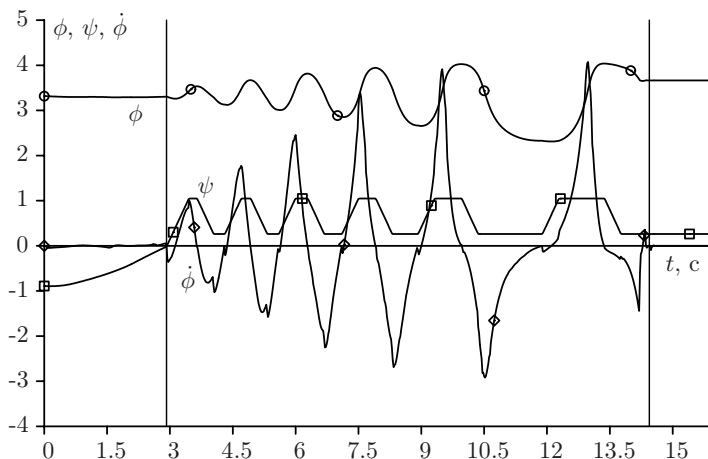


Рис. 3. Зависимость основных параметров движения от времени для варианта раскачивания.

ты которого приведены на рис. 2. Опорные значения угла ψ , соответствующие махам в сторону пассивных ног и обратно, на графике равны 60° и 15° , переведенным в радианы. Приведены данные, соответствующие перестроению позы перед раскачиванием, самому раскачиванию (его начало и конец отмечены вертикальными линиями), и первому этапу перестроения в рабочее положение, из которого робот может продолжить движение по поверхности.

Литература

- [1] Голубев Ю. Ф., Корянов В. В. Экстремальные локомоторные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 212 с.
- [2] Как переворачивается жук (бронзовка). <https://www.youtube.com/watch?v=nbExQQ5uqqk>
- [3] Peng S., Ding X., Yang F., Xu K. Motion planning and implementation for the self-recovery of an overturned multi-legged robot // *Robotica*. 2017. Vol. 35, Issue 5. P. 1107–1120.
- [4] Голубев Ю. Ф., Корянов В. В., Мелкумова Е. В. Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами» // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2019. № 6. С. 163–176.
- [5] Голубев Ю. Ф., Корянов В. В., Мелкумова Е. В. Выход робота из аварийной ситуации на спине // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной

механике: сборник тезисов докладов в 4 томах. 21–25 августа 2023 г. Т. 1. СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. С. 166–168.

[6] Универсальный механизм. <http://www.umlab.ru> (дата обращения: 10.02.2020).

Динамический анализ балочного маятника

Дегилевич Е.А.,^{1,2} *Смирнов А.С.*^{2,3}

degilevichegor@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com

¹ООО «СМТ»,

194044, Российская Федерация, Санкт-Петербург,

Большой Сампсониевский пр., 28/2,

²Институт проблем машиноведения Российской академии наук,

199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61,

³Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Аннотация. Настоящая статья посвящена определению частот колебаний балочного маятника (БМ), представляющего собой балку, шарнирно подвешенную в поле силы тяжести. Такая система является обобщением классической схемы цепного маятника (ЦМ), основанной на модели гибкой нити, при учете изгибной жесткости. Для нахождения частот колебаний БМ применяются как численное исследование уравнения движения системы, так и метод Ритца с использованием форм колебаний обычной балки с надлежащими граничными условиями в качестве координатных функций.

Ключевые слова: балка, цепь, частоты колебаний, метод Ритца, функции Крылова.

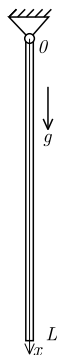


Рис. 1. Расчетная схема БМ.

Введение. Цепные системы, встречающиеся в повседневной жизни в виде отдельных цепей, тросов, канатов или шнуров, а также в составе конструкций механизмов, мостов и различных строений, дают весьма широкий простор для их исследования в рамках статики, динамики, устойчивости и оптимизации [1]. При этом большое практическое значение представляет учет изгибной жесткости подобных систем, т. к. тяжелые провода, которые в определенном приближении представляют собой цепные системы, в общем случае не являются идеально гибкими. Такое усложнение приводит к тому, что точное аналитическое решение становится уже невозможным, и это побуждает либо прибегать к численным процедурам в пакетах прикладных программ, либо использовать упрощенные ко-

нечисленные модели, которые позволят приближенно получить желаемые результаты с достаточно высокой точностью.

В качестве цели настоящего исследования принимается определение частот колебаний БМ (см. рис. 1), представляющего собой шарнирно подвешенную тяжелую балку, используя для этого численное исследование уравнения движения, а также метод Ритца.

Бесконечномерная модель. Рассмотрим расчетную схему БМ в поле силы тяжести с точкой шарнирного подвеса O , испытывающего действие распределенной нагрузки собственного веса (рис. 1). Как известно, уравнение колебаний этой системы в рамках модели Бернулли — Эйлера имеет вид [2]:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left[(L - x) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где x — продольная координата, v — поперечное перемещение сечений балки, t — время, L — длина балки, F — площадь сечения балки, J — момент инерции сечения балки, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность материала балки, E — модуль Юнга материала балки. Разыскивая решение уравнения (1) в виде $v(x, t) = V(x) \sin(kt + \alpha)$, после подстановки и преобразований будем иметь:

$$EJ \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho F g \left[(L - x) \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{dV}{dx} \right] - k^2 \rho F V = 0. \quad (2)$$

Введем безразмерные величины: продольную координату ξ ; параметр δ , определяющий соотношение инерционных и упругих свойств БМ; и частоту p :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{EJ}{\rho F g L^3}, \quad k = p \sqrt{\frac{g}{L}} = p \sqrt{\frac{EJ}{\rho F L^4 \delta}}, \quad (3)$$

после чего уравнение (2) для амплитудной функции $V(x)$ преобразуется к виду:

$$\delta V^{IV} - (1 - \xi) V'' + V' - p^2 V = 0, \quad (4)$$

где штрихом обозначается производная по безразмерной координате ξ . Нетрудно видеть, что при малых и при больших значениях параметра δ уравнение (4) переходит в уравнения, отвечающие классическому ЦМ [1] и классической балке без учета силы тяжести [3] соответственно, как этого и следовало ожидать:

$$\delta \rightarrow 0: \quad [(1 - \xi)V']' + k^2 \frac{L}{g} V = 0; \quad \delta \rightarrow \infty: \quad V^{IV} - k^2 \frac{\rho F L^4}{EJ} V = 0. \quad (5)$$

В общем случае уравнение (4) не допускает построения аналитического решения, поэтому далее следует прибегать к его численному исследованию.

Конечномерная модель. Перейдем к построению математической конечномерной модели БМ, основанной на применении метода Ритца [4]. С этой целью запишем кинетическую и потенциальную энергии системы, используя безразмерную координату ξ и безразмерный параметр δ согласно (3):

$$T = \frac{1}{2} \rho FL \int_0^1 \dot{v}^2 d\xi, \quad \Pi = \frac{1}{2} \rho Fg \int_0^1 [(1 - \xi)v'^2 + \delta v''^2] d\xi. \quad (6)$$

В рамках метода Ритца перемещение задается в виде $v(\xi, t) = \sum_{s=1}^n f_s(\xi)q_s(t)$, где $f_s(\xi)$ — координатные функции, которые должны удовлетворять геометрическому граничному условию $f_s(0) = 0$ для обеспечения неподвижности верхнего конца БМ, а $q_s(t)$ — обобщенные координаты. В качестве координатных функций примем формы колебаний классической балки, шарнирно закрепленной на одном конце и с другим свободным концом, используя для этого функции Крылова K_2 и K_4 , и ограничимся рассмотрением случая $n = 2$ [3]:

$$f_1(\xi) = \xi, \quad f_2(\xi) = K_2(\lambda_1)K_2(\lambda_1\xi) - K_4(\lambda_1)K_4(\lambda_1\xi). \quad (7)$$

Здесь учтено, что поскольку балка может поворачиваться как твердое тело, то в классическом варианте существует нулевая частота, которой отвечает форма в виде прямой, а $\lambda_1 = 3.927$ — первый ненулевой корень частотного уравнения $\text{th } \lambda = \text{tg } \lambda$. Ясно, что с учетом (6) и выражения для $v(\xi, t)$ формулы для инерционных и квазиупругих коэффициентов примут следующий вид:

$$a_{ij} = \rho FL \int_0^1 f_i(\xi)f_j(\xi)d\xi, \quad c_{ij} = \rho Fg \int_0^1 [(1 - \xi)f'_i(\xi)f'_j(\xi) + \delta f''_i(\xi)f''_j(\xi)] d\xi. \quad (8)$$

Подставляя в них координатные функции (7), получим после вычислений соответствующие матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \rho FL \begin{vmatrix} 0.33 & 0 \\ 0 & 80.32 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \rho Fg \begin{vmatrix} 0.5 & 3.32 \\ 3.32 & 740.56 + 19092\delta \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Наконец, подставляя матрицы (9) в уравнение $\det(\mathbf{C} - k^2\mathbf{A}) = 0$ и переходя к безразмерной частоте p согласно (3), приходим к частотному уравнению:

$$p^4 - (10.72 + 237.70\delta)p^2 + 13.42 + 356.55\delta = 0, \quad (10)$$

после решения которого находим искомые частоты в безразмерном варианте:

$$p_{1,2} = \sqrt{5.36 + 118.85\delta \pm \sqrt{14125.32\delta^2 + 917.52\delta + 15.31}}. \quad (11)$$

Сопоставление результатов и выводы. Обратимся к построению графиков зависимости первых двух частот колебаний БМ p_1 и p_2 в безразмерном варианте от безразмерного параметра δ для исходной бесконечномерной модели, для которой эти частоты находятся путем численного исследования уравнения (4), а также для конечномерной модели, где они определяются по формулам (11). Указанная графическая иллюстрация приведена на рис. 2.

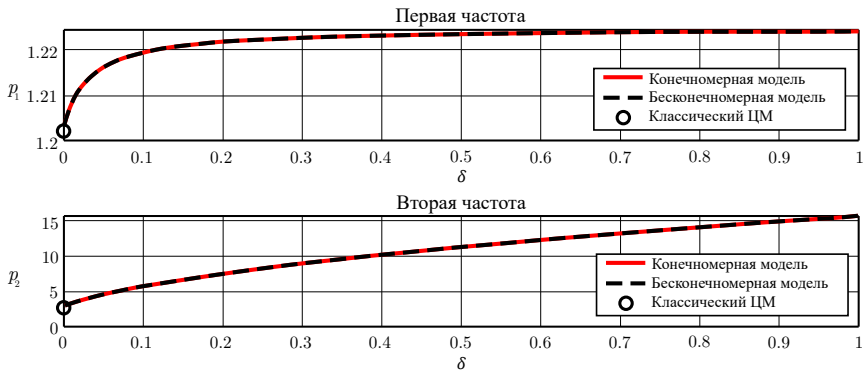


Рис. 2. Графики зависимости частот колебаний p_1 и p_2 от параметра δ .

Из сопоставления графиков на рис. 2 видно, что применение метода Рунца к задаче о колебаниях БМ позволяет определить первые две частоты его колебаний с достаточно высокой точностью. Так, при малых значениях δ , когда основную роль играют инерционные характеристики БМ, безразмерные частоты стремятся к частотам классического гибкого ЦМ: в точном варианте они равны 1.202 и 2.760 [1], а в приближенном решении согласно (11) они при $\delta \rightarrow 0$ будут равны 1.203 и 3.045, т. е. больше точных значений на 0.08% и 10.3% соответственно. Напротив, в случае больших значений δ , когда преобладают упругие характеристики БМ, частоты колебаний будут стремиться к частотам классической балки при отсутствии силы тяжести. Из формул (3) ясно, что для получения безразмерных частот в стандартных терминах поперечных колебаний балок здесь следует поделить p на $\sqrt{\delta}$, а далее совершить предельный переход при $\delta \rightarrow \infty$. Тогда в точном варианте будем иметь значения 0 и 15.418 [3], а в приближенном варианте будем иметь согласно (11) те же результаты, т. к. в качестве координатных функций были приняты именно

формы колебаний классической балки. Таким образом, рассмотренная модель БМ является хорошим примером того, как можно связать воедино два различных объекта (цепь и балка), а полученная приближенная формула (11) для вычисления первых двух частот колебаний БМ оказывается весьма простой и лаконичной.

Литература

- [1] Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 246 с.
- [2] Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 186 с.
- [3] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- [4] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.

Сравнение динамики скольжения твердого тела по плоскости с учетом адгезионного и линейного ортотропного трения

Дмитриев Н.Н.

dn7@rambler.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Построена математическая модель движения твердого тела по плоскости с ортотропным адгезионным трением. Получены условия равновесия твердого тела, условия начала движения и определены величины начального ускорения и его направление. Решена задача о финальном движении тонкого кольца и диска по плоскости с ортотропным адгезионным трением. Проведено сравнение с соответствующими результатами при наличии линейного ортотропного трения.

Ключевые слова: анизотропное трение, ортотропное трение, динамика систем с трением.

Введение. В [1, 2] вводится ассоциированный закон ортотропного трения. В соответствии с этими работами предполагается, что оси прямоугольной декартовой системы координат являются главными осями скольжения: сила трения, действующая на материальную точку, вдоль оси Ox равна $f_x N$, вдоль оси Oy — $f_y N$, N — нормальная реакция плоскости. Конец вектора силы трения

скольжения описывает в плоскости Oxy эллипс

$$\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2} = 1. \quad (1)$$

Вектор силы трения не пересекает границу эллипса трения (1). Поэтому справедливо неравенство

$$F(T_x, T_y) = \sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}} - 1 \leq 0. \quad (2)$$

В предельном состоянии выполнено соотношение $F(T_x, T_y) = 0$. Составим функцию Лагранжа в виде суммы диссипативной функции и предельной функции (2):

$$L = -(T_x v_x + T_y v_y) + \lambda \left(\sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}} - 1 \right), \quad (3)$$

где λ — множитель Лагранжа. В соответствии с теоремой Куна–Такера для действительного движения функция Лагранжа (3) должна иметь экстремум, что означает необходимость обращения в ноль производных по T_x и T_y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_x} &= -v_x + \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}}} \cdot \frac{T_x}{f_x^2 N^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_y} &= -v_y + \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{T_x^2}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}}} \cdot \frac{T_y}{f_y^2 N^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Откуда следуют соотношения

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{f_y^2}{f_x^2} \cdot \frac{v_y}{v_x}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f_y^2}{f_x^2} \cdot \operatorname{tg} \vartheta, \quad (5)$$

где α — угол, который составляет с осью Ox вектор силы трения $\mathbf{T} = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j}$, ϑ — угол, определяющий направление вектора скорости $\mathbf{v} = v (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j})$. Откуда с учетом (4) находятся проекции силы трения на оси Ox и Oy :

$$T_x = -\frac{N f_x^2 \cos \vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2 \vartheta + f_y^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad T_y = -\frac{N f_y^2 \sin \vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2 \vartheta + f_y^2 \sin^2 \vartheta}}. \quad (6)$$

Движение материальной точки под действием адгезионной ортотропной силы трения. Тангенциальная и нормальная оси естественного трехгранника имеют орты

$$\tau = \cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j}, \mathbf{n} = -\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j}. \quad (7)$$

Следовательно, уравнения движения материальной точки на указанные оси имеют вид

$$m\dot{v} = T_\tau = -\frac{N(f_x^2 + (f_y^2 - f_x^2)\sin^2 \vartheta)}{\sqrt{f_x^2 \cos^2 \vartheta + f_y^2 \sin^2 \vartheta}}, m v \dot{\vartheta} = T_n = -\frac{N(f_y^2 - f_x^2)\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{f_x^2 \cos^2 \vartheta + f_y^2 \sin^2 \vartheta}}. \quad (8)$$

Деление первого уравнения на второе и последующее разделение переменных приводит к зависимости

$$\frac{dv}{v} = \frac{f_x^2 + (f_y^2 - f_x^2)\sin^2 \vartheta}{(f_y^2 - f_x^2)\sin \vartheta \cos \vartheta},$$

интегрирование которого при начальных условиях $t = 0$, $v = v_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, приводит к соотношению

$$v = v_0 |\operatorname{tg} \vartheta|^{\frac{f_x^2}{f_y^2 - f_x^2}} \frac{1}{\cos \vartheta} \cdot C_0, \quad C_0 = \frac{\cos \vartheta_0}{|\operatorname{tg} \vartheta_0|^{\frac{f_x^2}{f_y^2 - f_x^2}}}. \quad (9)$$

Формула (8) показывает, что скорость материальной точки стремится к нулю при стремлении угла ϑ к нулю или π .

Замечание. Если в линейном законе ортотропного трения [3, 4, 5] и в законе адгезионного ортотропного трения коэффициенты f_x и f_y одинаковы, то имеет место соотношение

$$T_{\tau \text{ line}}^2 - T_{\tau \text{ adg}}^2 = -N^2(f_y - f_x)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \leq 0, \quad f_y \geq f_x.$$

Откуда можно сделать вывод, что остановка материальной точки, движущейся по инерции при ортотропном адгезионном трении, произойдет за время не более, чем в случае линейного ортотропного трения.

Движение твердого тела по горизонтальной плоскости, опирающегося на кольцевую площадку. Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела по горизонтальной плоскости опирающейся

на кольцевую область записываются в виде

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \tau_x r dr d\psi, & m\ddot{y} &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \tau_y r dr d\psi, \\
 J\dot{\omega} &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} mom_{Cz}(\tau) r dr d\psi, \\
 \tau_x &= -p \cdot \frac{f_x^2 (v \cos \vartheta - \omega r \sin(\vartheta + \psi))}{\sqrt{f_x^2 (v \cos \vartheta - \omega r \sin(\vartheta + \psi))^2 + f_y^2 (v \sin \vartheta + \omega r \cos(\vartheta + \psi))^2}}, \\
 \tau_y &= -p \cdot \frac{f_y^2 (v \sin \vartheta + \omega r \cos(\vartheta + \psi))}{\sqrt{f_x^2 (v \cos \vartheta - \omega r \sin(\vartheta + \psi))^2 + f_y^2 (v \sin \vartheta + \omega r \cos(\vartheta + \psi))^2}}, \\
 mom_{Cz}\tau &= \tau_y \cdot r \cos(\vartheta + \psi) - \tau_x \cdot r \sin(\vartheta + \psi), \\
 p &= \frac{mg}{\pi R_2^2 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В этих соотношениях двойные интегралы не удается свести к эллиптическим интегралам, так как это было сделано при линейном трении [5]. Но в случае тонкой кольцевой области, применив теорему о среднем, можно произвести предельный переход при $R_1 \rightarrow R_2$, после чего остается одинарный интеграл по переменной ψ что значительно упрощает исследование системы (10). Если область круговая ($R_1 = 0$), то можно проинтегрировать выражения в (10) по радиальной переменной, что так же приводит к некоторым упрощениям.

Можно показать, что финальное движение твердого тела, опирающегося на круговую и тонкую кольцевую области, при ортотропном адгезионном трении, как и в случае линейного ортотропного трения, характеризуется стремлением угла ϑ к нулю. Предельные значения $\delta_* = \frac{\omega_*}{v_*}$ в момент остановки представлены в таблицах 1 и 2 ($f_x = 0,42, \mu = f_y - f_x$).

Таблица 1. Значение $\delta_* = \frac{\omega_*}{v_*}$ в момент остановки для тонкого кольца.

μ	Адгезионное трение	Линейное трение
0,03	0,973	0,990
0,06	0,924	0,975
0,09	0,848	0,956
0,12	0,729	0,934
0,15	0,526	0,907
0,18	—	0,876
0,21	—	0,839

Таблица 2. Значение $\delta_* = \frac{\omega_*}{v_*}$ в момент остановки для диска.

μ	Адгезионное трение	Линейное трение
0,03	1,368	1,435
0,06	1,123	1,345
0,09	1,119	1,285
0,12	1,009	1,225
0,15	0,789	1,172
0,18	—	1,123
0,21	—	1,018

Литература

- [1] Mroz Z., Stupkiewicz S. An Anisotropic friction and wear model // Int. J. Solids Structures. 1994. Vol. 31. No. 8. P. 1113–1131
- [2] Konyukhov A., Vielsack P., Schweizerhof K. On coupled models of anisotropic contact surfaces and their experimental validation // Wear. 2008. No. 264. P. 579–588
- [3] Zmitrowicz A. A theoretical model of anisotropic dry friction // Wear. 1981. Vol. 73. P. 9–39
- [4] Александрович А. И., Векшин В. С., Потапов И. Н. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 6. С. 996–1004
- [5] Дмитриев Н. Н. Движение диска и кольца по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2002. Т. 23. № 1. С. 10–15

О выборе предпочтительного расположения внутренних движущихся элементов плоской модели капсульного робота с маховиком и дебалансом

Досаев М.З.

dosayev@imec.msu.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Рассматривается механическая система с изменяемой внутренней конфигурацией - плоский капсульный робот, содержащий маховик и несбалансированный ротор (дебаланс). Корпус робота опирается двумя точками на шероховатую плоскость. Движение корпуса робота вдоль опорной плоскости происходит за счет управляемого вращения внутренних дебаланса и маховика, а также за счет сухого трения в точках опоры. При выбранном алгоритме управления дебаланс реализует контролируемое изменение опорных реакций, а вращение маховика позволяет сохранить ориентацию корпуса. При произвольном расположении внутренних вращающихся элементов внутри корпуса робота величина управляющего углового ускорения маховика

может оказаться большой. Предложена конфигурация робота, позволяющая существенно уменьшить величины угловых ускорений в процессе реализации алгоритма управления.

Ключевые слова: механическая система с изменяемой внутренней конфигурацией, сухое трение, управляющее ускорение, конфигурация робота.

Введение. С развитием технологий растет интерес к разработке новых типов роботизированных устройств, которые приводятся в движение внутренними движущимися элементами за счет взаимодействия с внешней средой только корпуса. Применение таких роботов актуально в агрессивной среде, а также в труднодоступных местах, например, в различных типах труб. Подобная система была предложена в [1, 2]. Корпус предложенного робота содержит один дебаланс и один маховик и опирается на шероховатую плоскость двумя точками. Управление движением робота реализуется за счет контролируемого вращения дебаланса и маховика. Дебаланс обеспечивает изменение величин опорных реакций, а вращение маховика позволяет сохранить ориентацию корпуса. Алгоритм программного управления роботом подразумевает переключение двух режимов: режим «разгона», при котором происходит набор дебалансом необходимого количества движения, и режим «полета», при котором обнуляются нормальные реакции в точках опоры, то есть происходит отрыв корпуса от опорной поверхности. Расположение осей вращения дебаланса и маховика в корпусе робота может существенно повлиять на величины управляющих угловых ускорений этих элементов механической системы, необходимых для реализации этапов алгоритма. В данной работе приведены расчеты величин угловых ускорений дебаланса и маховика для случайно выбранного относительного положения их осей вращения. Предложена конфигурация робота, для которой величины этих ускорений при реализации алгоритма существенно снижены.

Содержательная часть. Примем далее обозначения, принятые в [1, 2] для безразмерных величин. Величины углового ускорения дебаланса на этапе «разгона» задаются следующим соотношением:

$$\varphi'' = [\mu(-L) + \varphi'^2(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)] / (\cos \varphi - \mu \sin \varphi). \quad (1)$$

На этапе «полета» величины углового ускорения дебаланса зависят от фазовых переменных следующим образом:

$$\varphi'' = L(1 + \cos \varphi) / \sin^2(\varphi/2) / \sin \varphi. \quad (2)$$

В выражения (1) и (2) кроме фазовых переменных входят только два параметра: коэффициент трения μ и массовый параметр L . Таким образом угловое ускорение дебаланса не зависит от расположения элементов в корпусе робота. Величины углового ускорения маховика, напротив, сильно зависят от взаим-

ного расположения осей дебаланса и маховика, и точек опоры. Получим эти величины для режима «полета»:

$$\begin{aligned} \gamma'' = & ((Ly_{B0} + y_{A0} + y_{B0}) \cos \varphi - 1 - (J_{30} + 1)L)/(J_{20} \sin \varphi) + \\ & + (-Lx_{B0} - x_{A0} - x_{B0})/J_{20} + \\ & + (-1 - (J_{30} + 1)L) \cos \varphi + Ly_{B0} + y_{A0} + y_{B0})/(J_{20} \sin^2(\varphi/2) \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Наконец, величины углового ускорения маховика в режиме «разгона» задаются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} \gamma'' > & [x_{Z0}m_{10} + (x_{Z0} - x_{A0})m_{20} + (x_{Z0} - x_{B0} - \sin \varphi) - \\ & - \varphi'' (J_{30} + (x_{B0} - x_{Z0} + \sin \varphi) \sin \varphi + (y_{B0} - y_{Z0} - \cos \varphi) \cos \varphi) - \\ & - \varphi'^2 (\cos \varphi (x_{B0} - x_{Z0}) + \sin \varphi (y_{B0} - y_{Z0}))] / J_{20}; \\ \gamma'' < & [x_{P0}m_{10} + (x_{P0} - x_{A0})m_{20} + (x_{P0} - x_{B0} - \sin \varphi) - \\ & - \varphi'' (J_{30} + (x_{B0} - x_{P0} + \sin \varphi) \sin \varphi + (y_{B0} - y_{P0} - \cos \varphi) \cos \varphi) - \\ & - \varphi'^2 (\cos \varphi (x_{B0} - x_{P0}) + \sin \varphi (y_{B0} - y_{P0}))] / J_{20}. \end{aligned} \quad (4)$$

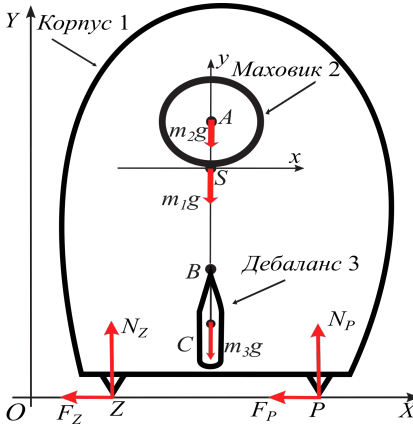


Рис. 1. Вертикальная компоновка робота с маховиком и дебалансом.

Удалось показать, что при вертикальном расположении осей маховика и дебаланса (рис. 1) возможно существенно уменьшить требуемые для реализации алгоритма управления угловые ускорения этих вращающихся элементов системы. Показано, что для такой конфигурации на режиме «разгона» маховик может оставаться в покое относительно корпуса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-11-00144.

Литература

- [1] Dosaev M., Samsonov V., Hwang S. S. Construction of control algorithm in the problem of the planar motion of a friction-powered robot with a flywheel and an eccentric weight // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 89. P. 1517–1527.
- [2] Dosaev M. Algorithm for controlling an inertioiod robot with a flywheel and an unbalance in conditions of restrictions on the angular acceleration of the unbalance // Applied Mathematical Modelling. 2022. Vol. 109. P. 797–807.

О математических моделях и структурных формулах теории механизмов

Ковалёв М.Д.

mdkovalev@mtu-net.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. До сих пор теория плоских шарнирных устройств (механизмов и ферм) не была в должной степени математически оформлена. Будет рассказано, что даёт для понимания геометрической природы этих устройств математическая формализация. Будет показано, как на основе описания строения шарнирно-рычажных устройств графами на современном уровне решается вопрос о применимости так называемых структурных формул теории механизмов, по которым вычисляется число степеней свободы устройства.

Ключевые слова: математическая модель, шарнирно-рычажный механизм, конфигурационное пространство, структурные формулы.

Математическая модель. Начальным разделом теории механизмов является их структурный анализ. Основной задачей структурного анализа механизма является определение его числа степеней свободы. Для этого имеются так называемые структурные формулы, выражающие число степеней свободы через числа звеньев и кинематических пар. Однако, эти формулы не всегда дают верный результат [1].

Разобраться в этом вопросе на современном уровне позволяет математическая формализация. Её несложно провести для механизмов простой природы, построив математические модели плоских шарнирно-рычажных механизмов [2, 3], и плоских механизмов с вращательными парами [4]. Причём, первичной является модель шарнирно-рычажных механизмов [4]. Её мы и обсудим.

Математическая модель шарнирно-рычажного механизма основывается на введении исчерпывающе описывающего строение механизма графа. Этот граф G строится иначе, чем обычно используемый в теории механизмов граф Γ . Если

граф Γ состоит из отвечающих звеньям механизма вершин и отвечающих кинематическим парам рёбер, то вершины графа G отвечают шарнирам, а его рёбра — рычагам механизма. Рычагом мы называем прямолинейный стержень, несущий на концах по шарниру. Если соединить концевыми шарнирами два рычага, то мы получим обычную вращательную пару. Если соединить в одном шарнире три и более рычагов, то получим так называемый сложный или совмещённый шарнир, допускающий произвольное взаимное проворачивание вокруг одной и той же оси любой пары соединённых им рычагов. В являющемся концом лишь одного рычага шарнире кинематической пары нет, его будем называть 0-шарниром. Если в шарнире сходится $k + 1$ рычаг, то назовём его k -шарниром, 1-шарнир — это обычная вращательная пара.

Граф G имеет вершины двух сортов: отвечающие свободным (незакреплённым) шарнирам (кружочки на рисунках), и отвечающие закреплённым в плоскости шарнирам (крестики). На него естественно наложить следующие условия: 1. G связан, 2. его подграф на кружочках также связан, 3. нет рёбер, соединяющих крестик с крестиком.

Исходя из графа $G = G(V, E)$ и положений (x_i, y_i) в плоскости шарниров легко выписать систему уравнений вида

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = l_{ij}^2, \quad (i, j) \in E,$$

где l_{ij} — длина рычага, определяющую конфигурационное пространство механизма. При этом следуя традиционному пониманию механизма как устройства для передачи или преобразования движения мы считаем, что каждой компоненте связности положительной размерности множества решений этой системы отвечает свой шарнирный механизм. Идеализация нашей модели состоит в том, что в ней различные рычаги могут пересекаться, а несмежные шарниры совпадать, чего не всегда можно избежать в реальной конструкции разнося её части по разным параллельным плоскостям.

Структурные формулы. Простейшей и исторически первой структурной формулой является формула Чебышёва, получающаяся простым подсчётом числа степеней свободы в устройстве с вращательными парами:

$$W = 3\rho - 2\mu, \quad (1)$$

где ρ — число звеньев за исключением стойки (для шарнирно-рычажных механизмов это число r рычагов механизма), μ — число его вращательных пар. Она справедлива лишь в случае отсутствия совмещённых шарниров.

Такой же подсчёт для нашей шарнирно-рычажной модели, но основанный на общем числе степеней свободы всех свободных шарниров, и справедливый

также в случае наличия совмещённых шарниров, даёт формулу

$$W = 2m - r, \quad (2)$$

где m — число всех свободных шарниров, r — число рычагов. Действительно, число степеней свободы всех незакреплённых шарниров как точек в плоскости равно $2m$, а число условий связи в случае их независимости равно r .

Заметим, что число концов рёбер в графе G равно

$$2r = m_0 + 2m_1 + 3m_2 + \dots + n_1 + 2n_2 + \dots,$$

где m_i — число свободных i -шарниров ($i = 0, 1, 2, \dots$), n_i — число закреплённых шарниров, смежных i рычагам. Отсюда

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \dots = 2r - m_1 - 2m_2 - \dots - n_1 - 2n_2 - \dots$$

И подстановка этого равенства в (2) даёт аналог формулы Чебышёва, справедливый и в случае наличия совмещённых шарниров:

$$W = 3r - 2(m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + n_1 + 2n_2 + \dots). \quad (3)$$

Формулой (1) обычно пользуются в теории механизмов для подсчёта числа степеней свободы механизма. Однако, эта формула, как и формулы (2), (3), не всегда даёт правильный ответ. Машинисты для её исправления вводят добавочные слагаемые, которые соотносят наличие избыточных или пассивных (паразитных) связей [1]. Их приходится выявлять в каждом случае отдельно. Введённая модель шарнирно-рычажных устройств позволяет решить этот вопрос на современном уровне. Причины, по которым нарушаются формулы (1)–(3), оказываются двух родов.

Во-первых, структурная формула может быть верна в типичном случае, и терять силу при специальном подборе размеров звеньев механизма. Например, плоский шарнирный четырёхзвенник становится фермой, если длина одного из его рычагов равна сумме длин остальных трёх. Множество таких исключительных механизмов представляет собой подмножество меньшей размерности в пространстве параметров, у нас длин рычагов.

Во-вторых, структурная формула может быть не верна в типичном случае. Это происходит по той причине, что число степеней свободы определяется не только числом звеньев и шарниров, но и строением устройства. Строение же может быть такое, что налагаемые кинематическими парами связи зависимы для всех устройств.

Пример этого приведён на рисунке 1. Типичное устройство с таким графом является шарнирным механизмом с одной степенью свободы, по существу, шар-

нирным четырёхзвенником, хотя структурные формулы (2) и (3) дают нулевое число степеней свободы.

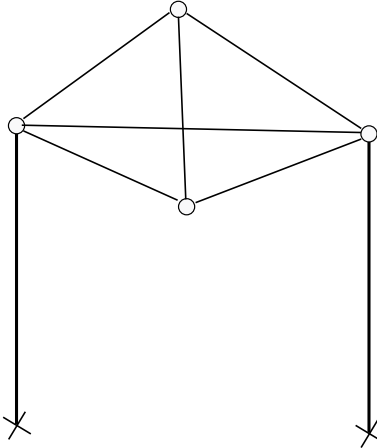


Рис. 1. Шарнирный четырёхзвенник с избыточной связью в шатунном звене. Закреплённые в стойке шарниры обозначены крестиками.

Вопрос независимости связей в типичной шарнирно-рычажной конструкции в математике давно решён [2]. А именно, имеется критерий применимости в типичном случае структурных формул (1), (2). Чтобы его сформулировать нужно построить по графу G закреплённого шарнирно-рычажного устройства граф \bar{G} . Если в графе G имеется k отвечающих закреплённым шарнирам вершин, v_1, v_2, \dots, v_k , то для этого достаточно добавить к G рёбра v_1v_2, \dots, v_1v_k , и рёбра v_2v_3, \dots, v_2v_k .

Теорема. Степень подвижности типичного плоского шарнирно-рычажного устройства вычисляется по формулам (1), (2) тогда и только тогда, когда для произвольной совокупности (пусть $e > 0$ штук) ребер отвечающего ей графа \bar{G} число v инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству $e \leq 2v - 3$.

Например, граф \bar{G} получается из изображённого на рисунке 1 графа G добавлением ребра, соединяющего две обозначенные крестиками вершины. В графе \bar{G} содержится полный подграф K_4 , для которого $v = 4$, $e = 6$, и $e > 2v - 3 = 5$. Таким образом, здесь причиной ошибочности структурных формул (2) и (3) является зависимость налагаемых входящими в K_4 рычагами связей.

Отметим ещё, что описание строения шарнирно-рычажного устройства традиционным графом Γ не всегда равносильно описанию его графом G [4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Литература

- [1] Левитский Н. И. Теория механизмов и машин, Москва: Наука, 1990.
- [2] Ковалёв М. Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая. 1994. Т. 58. № 1. С. 45–70.
- [3] Ковалёв М. Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 с.
- [4] Ковалёв М. Д. О структурных графах теории механизмов // РАН Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2023. № 1. С. 39–44.
- [5] Ковалёв М. Д. О графах и структурных формулах теории механизмов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26. № 3. С. 42–55.

Аппроксимация критических значений коэффициента демпфирования в бестоковой модели синхронного электромотора

Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.

konos.donetsk@yandex.ru

Институт прикладной математики и механики,
283050, Российская Федерация, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает модель синхронного электромотора, явно не содержащую электрических токов. Предложены пять способов аппроксимации критических значений коэффициента линейного диссипативного момента в этом уравнении. Вычислены максимумы модулей абсолютных и относительных погрешностей таких аппроксимаций.

Ключевые слова: синхронный электромотор, критическое значение, глобальная устойчивость, метод сведения.

Введение. Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает модель синхронного электромотора, явно не содержащую электрических токов, играет роль эталонного уравнения в методе сведения Г.А. Леонова. Этот метод дает условия, когда из глобальной асимптотической устойчивости одного такого уравнения следует глобальная асимптотическая устойчивость многомерной фазовой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (то есть любое ее решение с течением времени стремится к одному из счетного набора стационарных состояний). Как установил Ф. Трикоми, для коэффициента линейного демпфирующего момента, входящего в это уравнение, существует критическое значение, которое отделяет случай глобальной

устойчивости этого уравнения от случаев, когда глобальной устойчивости нет. Это критическое значение не имеет явного представления. В докладе рассмотрены пять способов линейной, синусоидальной и квадратичной аппроксимации критических значений и вычислены максимальные по модулю абсолютные и относительные погрешности таких аппроксимаций.

Бестоковая модель синхронного электромотора. В теории фазовых систем обыкновенных дифференциальных уравнений важное место занимает дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает упрощенную модель синхронного электромотора, не содержащую явно электрических токов [1]. Путем введения безразмерных параметров $a, c > 0$ и безразмерного времени τ , это уравнение приводится к следующему виду

$$\theta'' = -a\theta' - \sin \theta + c. \quad (1)$$

Здесь θ — угол рассогласования между равномерно вращающимся магнитным полем статора и магнитным полем ротора, штрихом обозначено дифференцирование по τ .

При $c \in (0, 1)$ уравнение (1) имеет два счетных семейства стационарных решений при значениях $\theta_n^{(0)}, \theta_n^{(1)}$ угла θ , равных

$$\begin{aligned} \theta_n^{(0)} &= \theta_0 + 2\pi n, & \theta_n^{(1)} &= \theta_1 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \theta_0 &= \arcsin c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), & \theta_1 &= -\pi - \theta_0 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Локальный анализ по линейному приближению показывает, что решениям первого семейства соответствуют асимптотически устойчивые стационарные точки уравнения (1) — устойчивый фокус или устойчивый узел, а решениям второго семейства соответствуют неустойчивые седловые стационарные точки.

Подробный анализ уравнения (1) методами качественной теории дифференциальных уравнений провел Ф. Трикоми [2]. Он установил, что для коэффициента линейного демпфирования a , входящего в уравнение (1), существует критическое значение $a_{cr}(c)$, которое отделяет случай, когда для данного уравнения имеет место глобальная устойчивость, от двух случаев, когда глобальная устойчивость отсутствует. Для каждого из этих случаев Ф. Трикоми указал структуру фазового портрета рассматриваемого уравнения.

Так как $c = \sin \theta_0$ согласно (2), величина $a_{cr}(c)$ может рассматриваться как функция $a_{cr}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. При заданном значении θ_0 соответствующее значение $a_{cr}(\theta_0)$ определяется условием совпадения сепаратрис, направленных навстречу одна другой из соседних седловых точек. Отсюда следует, что для критического значения не существует явного выражения. Поэтому усилия мно-

гих математиков были направлены на получение аналитических оценок критического значения сверху и снизу [3]. Обобщающие результаты в этом направлении получил Е.А. Барбашин [3].

Расчет критических значений коэффициента демпфирования. Уравнение (1) содержит только два безразмерных параметра. Это открывает широкие возможности для его анализа средствами современной вычислительной техники. Некоторые результаты такого анализа приведены в [4].

Во-первых, в [4] с помощью компьютера получены фазовые портреты этого уравнения и отмечены свойства его фазовых траекторий, которые трудно

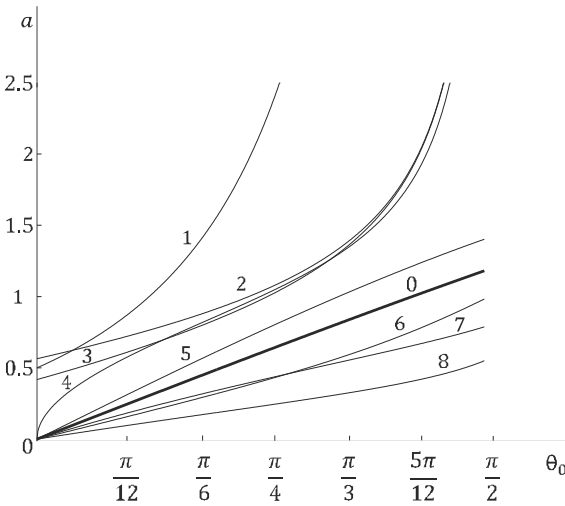


Рис. 1. Графики функции $a_{cr}(\theta_0)$ и ее теоретических оценок.

найденных 1) Л. Америо, 2) Ф. Трикоми, 3) В. Табуевой, 4) Г. Зайфертом, 5) К. Бёмом. Ниже расчетной кривой лежат графики правых частей нижних оценок, полученные 6) К. Бёмом, 7) В. Хейзом, 8) Ф. Трикоми (см. [3]).

Аппроксимация критических значений коэффициента демпфирования.

Рис. 1 показывает, что вычисленная кривая выпукла вверх и близка к прямой, соединяющей концы ее графика. Это позволяет предложить для функции $a_{cr}(\theta_0)$ линейную (L), синусоидальную (S) и параболическую (P) аппроксима-

заметить на известных фазовых портретах, полученных аналитическими методами. Построен также график зависимости критического значения $a_{cr}(\theta_0)$ коэффициента демпфирования a от главного устойчивого стационарного значения θ_0 угловой переменной, определенного в (2).

Он получен путем вычисления функции $a_{cr}(\theta_0)$ в 200 точках промежутка $[0, x_{0\max}]$, где $x_{0\max}$ соответствует 89 градусам. Этот график показан на рис. 1 утолщенной линией (кривая 0). Выше его лежат графики правых частей верхних теоретических оценок этой функции,

ции

$$\begin{aligned}
 a_{crL}(\theta_0) &= K_L \theta_0 \quad (K_L > 0), \\
 a_{crS}(\theta_0) &= A_S(\Omega) \sin(\Omega \theta_0) \quad (\Omega > 0), \\
 a_{crP}(\theta_0) &= A_P(\theta_{0P}) \theta_0 + B_P(\theta_{0P}) \theta_0^2 \quad (\theta_{0P} \in [0, x_{0\max}]).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $K_L = a_{cr}(\theta_{0\max})/\theta_{0\max}$ — угловой коэффициент прямой, проходящей через начальную и конечную точки графика функции $a_{cr}(\theta_0)$. Максимумы модулей абсолютной и относительной погрешностей L -аппроксимации обозначаются через δ_L и Δ_L . При каждом значении $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ ($\Omega_{\max} = \pi/(2\theta_{0\max})$) коэффициент $A_S(\Omega)$ однозначно определяется граничным условием $a_{crS}(\theta_{0\max}) = a_{cr}(\theta_{0\max})$. При каждом значении $\theta_{0P} \in [0, x_{0\max}]$ коэффициенты $A_P(\theta_{0P})$ и $B_P(\theta_{0P})$ однозначно определяются граничным условием $a_{crP}(\theta_{0\max}) = a_{cr}(\theta_{0\max})$ и условием $a_{crP}(\theta_{0P}) = a_{cr}(\theta_{0P})$.

Свободные параметры Ω и θ_{0P} в (3) определяются двумя способами. Во-первых, они однозначно находятся из условия минимума по Ω или θ_{0P} максимума по θ_0 модуля *абсолютной* погрешности S или P аппроксимации (аппроксимации типов S_1 и P_1). Определяемые этим условием значения параметров Ω и θ_{0P} обозначаются через Ω_{S_1} , θ_{0P_1} . Через δ_{S_1} , δ_{P_1} и Δ_{S_1} , Δ_{P_1} обозначаются соответствующие этим значениям максимумы по θ_0 модулей абсолютных и относительных погрешностей. Во-вторых, данные параметры однозначно находятся из условия минимума по Ω или θ_{0P} максимума по θ_0 модуля *относительной* погрешности S или P аппроксимации (аппроксимации типов S_2 и P_2). Определяемые этим условием значения параметров Ω и θ_{0P} обозначаются через Ω_{S_2} , θ_{0P_2} , а через δ_{S_2} , δ_{P_2} и Δ_{S_2} , Δ_{P_2} обозначаются соответствующие максимальные абсолютные и относительные погрешности. Аппроксимации типов L , S_1 рассматривались в [4].

Таблица 1. Характеристики аппроксимаций критических значений.

L	K_L 0.760087			δ_L $1.49876 \cdot 10^{-2}$	Δ_L $3.22269 \cdot 10^{-2}$
S_1	A_{S_i} 2.76621		Ω_{S_i} 0.283887	δ_{S_i} $3.3363 \cdot 10^{-5}$	Δ_{S_i} $1.35226 \cdot 10^{-4}$
S_2	2.76417		0.284111	$5.75594 \cdot 10^{-5}$	$8.32632 \cdot 10^{-5}$
P_1	A_{P_i} 0.797802	B_{P_i} -0.0242799	θ_{0P_i} 0.780718	δ_{P_i} $1.8424 \cdot 10^{-3}$	Δ_{P_i} $1.98731 \cdot 10^{-3}$
P_2	0.789660	-0.0190385	0.263988	$4.24223 \cdot 10^{-3}$	$5.42711 \cdot 10^{-3}$

В таблице 1 даны результаты расчета параметров и погрешностей предложенных аппроксимаций критических значений коэффициента демпфирования для уравнения (1). Они показывают, что такие аппроксимации обеспечивают достаточно высокую точность вычисления критических значений.

Литература

- [1] Леонов Г. А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. Т. 10. С. 47–85.
- [2] Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. 1933. Vol. 2. No. 2: P. 1–20.
- [3] Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука., 1969. 300 с.
- [4] Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Компьютерный анализ модели синхронного электромотора, не содержащей электрических токов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 499–515. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.305>

О точности метода последовательного усреднения в системах с многочастотными возмущениями

Кугушев Е. И., Шахова Т. В.

kugushevei@yandex.ru, tatiana.shahova@math.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых содержат функции, периодически зависящие от времени с некоторыми частотами. В результате введения дополнительных переменных и последовательного усреднения по этим переменным строится усредненная система. Дается оценка сверху отклонения решения усредненной системы от решения исходной системы. Многочастотные системы рассматриваются в «медленном времени» на конечном интервале времени. Приводятся примеры двухчастотных систем, для анализа которых применяются полученные утверждения.

Ключевые слова: многочастотное возмущение, последовательное усреднение.

Введение. Движение механических систем, в которых присутствуют элементы, совершающие вынужденные колебания, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими функции, периодически зависящие от времени с некоторыми частотами. При анализе уравнений движения таких систем используются методы усреднения, ключевым моментом которых является наличие оценки отклонения решения усредненной системы от решения исходной системы. В многочастотном случае при наличии резонансов движение системы может существенно отличаться от движения усредненной системы. Тем не менее и в этой ситуации применимы методы усреднения, например, в случае разделения колебаний на быстрые и медленные. Анализ применения методов усреднения в многочастотных системах можно найти в [1]–[6].

В данной работе используется метод последовательного усреднения и приводится оценка точности метода вне зависимости от соизмеримости частот [7].

Системы с разделяющимися правыми частями. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \nu_1 t) + \dots + \mathbf{f}_k(\mathbf{x}, \nu_k t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \nu_i > 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Здесь функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \tau)$ непрерывно дифференцируемы по переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$, функции $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \tau)$ периодические по τ с периодом 1, не зависящие от ν_1, \dots, ν_k , и их среднее на периоде равно нулю. Усреднив правую часть системы (1) по переменным τ_1, \dots, τ_k , запишем усредненную систему

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Утверждение 1. Пусть для некоторого $a > 0$ и любых $\nu_i > 0$ ($i = 1, \dots, k$) решения $\mathbf{x}(t, \nu_1, \dots, \nu_k, \mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{z}(t, \mathbf{x}_0)$ систем (1), (2) с начальными условиями $\mathbf{x}(0, \nu_1, \dots, \nu_k, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{z}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, где \mathbf{x}_0 лежит в некоторой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^n$, существуют на отрезке $0 \leq t \leq a$ и лежат в некоторой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$. Тогда найдутся такие положительные константы c_1, \dots, c_k , что для всех $\mathbf{x}_0 \in U$ выполнено

$$\|\mathbf{x}(t, \nu_1, \dots, \nu_k, \mathbf{x}_0) - \mathbf{z}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{c_1}{\nu_1} + \dots + \frac{c_k}{\nu_k} \quad \text{при } 0 \leq t \leq a.$$

Замечание. Если система одночастотная, то есть $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \nu_i t) \equiv 0$ для $i = 2, \dots, k$ или $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_k$, то утверждение 1 дает такую же оценку, что и теорема Крылова–Боголюбова об усреднении.

Последовательное усреднение в системах общего вида. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \nu_1 t, \nu_2 t, \dots, \nu_k t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ — функция, непрерывно дифференцируемая по всем переменным, периодическая по переменным τ_1, \dots, τ_k с периодом 1, не зависящая от ν_1, \dots, ν_k . Будем считать, что частоты ν_i перенумерованы в порядке убывания

$$\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_k > 0.$$

Усредним правую часть системы (3) по τ_1, \dots, τ_k и запишем усредненную систему

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad \text{где} \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k. \quad (4)$$

Утверждение 2. Пусть для некоторого $a > 0$ и любых $\nu_1, \dots, \nu_k > 0$ решения $\mathbf{x}(t, \nu_1, \dots, \nu_k, \mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{z}(t, \mathbf{x}_0)$ систем (3), (4) с начальными условиями $\mathbf{x}(0, \nu_1, \dots, \nu_k, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{z}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, где \mathbf{x}_0 лежит в некоторой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^n$, существуют на отрезке $0 \leq t \leq a$ и лежат в некоторой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$. Тогда найдутся такие положительные константы $c_1, \dots, c_k, c_1^*, \dots, c_{k-1}^*$, что для всех $\mathbf{x}_0 \in U$ при $0 \leq t \leq a$ выполнено

$$\|\mathbf{x}(t, \nu_1, \dots, \nu_k, \mathbf{x}_0) - \mathbf{z}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{c_1}{\nu_1} + \frac{c_2}{\nu_2} + \dots + \frac{c_k}{\nu_k} + \frac{c_1^* \nu_2}{\nu_1} + \frac{c_2^* \nu_3}{\nu_2} + \dots + \frac{c_{k-1}^* \nu_k}{\nu_{k-1}}.$$

Математический маятник с вибрирующей точкой подвеса. В качестве примера рассмотрим движущийся в неподвижной вертикальной плоскости Oxz математический маятник длины l , точка подвеса которого совершает колебания, причем компоненты скорости точки подвеса равны $\dot{x}_0(t) = bh_2(\nu_2 t)$, $\dot{z}_0(t) = ah_1(\nu_1 t)$, где $a, b > 0$ — константы, $h_1(\tau)$, $h_2(\tau)$ — отличные от константы непрерывные периодические функции с нулевым средним значением, $\nu_1, \nu_2 > 0$ — частоты колебаний. Динамика такой системы изучалась, например, в работах [8, 9].

Пусть φ — угол отклонения маятника от нисходящей вертикали. Обобщенный импульс системы (с точностью до калибровочного множителя) равен $p = l\dot{\varphi} + \dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{z}_0 \sin \varphi$. Функция Гамильтона системы представляется в виде суммы функции Гамильтона невозмущенной колебаниями системы и функции, содержащей периодические по времени множители с частотами ν_1, ν_2 :

$$\begin{aligned} H(\varphi, p, t) &= H_0(\varphi, p) + F(\varphi, p, \tau_1, \tau_2), & H_0(\varphi, p) &= \frac{p^2}{2l} - g \cos \varphi, \\ F(\varphi, p, \tau_1, \tau_2) &= -\frac{ap \sin \varphi h_1(\tau_1)}{l} + \frac{a^2 \sin^2 \varphi h_1^2(\tau_1)}{2l} - \frac{bp \cos \varphi h_2(\tau_2)}{l} + \\ &+ \frac{b^2 \cos^2 \varphi h_2^2(\tau_2)}{2l} + \frac{ab \sin 2\varphi h_1(\tau_1) h_2(\tau_2)}{2l}, & \tau_1 &= \nu_1 t, \quad \tau_2 = \nu_2 t. \end{aligned}$$

Будем считать, что $\nu_1 \neq \nu_2$, в противном случае получаем одночастотную систему ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$), правую часть которой можно усреднить по переменной τ и

воспользоваться замечанием. Функция Гамильтона усредненной системы равна

$$\overline{H}(\varphi, p) = H_0(\varphi, p) + \overline{F}(\varphi) = \frac{p^2}{2l} - g \cos \varphi + \frac{a^2 \sin^2 \varphi \overline{h_1^2}}{2l} + \frac{b^2 \cos^2 \varphi \overline{h_2^2}}{2l}.$$

Здесь $\overline{h_i^2} = \frac{1}{s_i} \int_0^{s_i} h_i^2(\tau) d\tau$, s_i — период функции $h_i(\tau)$, $i = 1, 2$. Согласно утверждению 2 для решения $\varphi(t, \nu_1, \nu_2)$, $p(t, \nu_1, \nu_2)$ уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H(\varphi, p, t)$ и решения $\varphi^*(t)$, $p^*(t)$ с теми же начальными условиями усредненных уравнений Гамильтона с гамильтонианом $\overline{H}(\varphi, p)$ на конечном отрезке времени $0 \leq t \leq a$ ($a > 0$) имеем

$$|\varphi(t, \nu_1, \nu_2) - \varphi^*(t)| + |p(t, \nu_1, \nu_2) - p^*(t)| \leq \frac{c_1}{\nu_1} + \frac{c_2 \nu_2}{\nu_1} + \frac{c_3}{\nu_2},$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные константы, не зависящие от ν_1, ν_2 .

В некоторых случаях можно получить более точную оценку. Пусть, например, $h_1(\tau) = h_2(\tau) = \cos \tau$. Тогда последнее слагаемое в функции $F(\varphi, p, \tau_1, \tau_2)$ можно представить в виде

$$\frac{ab \sin 2\varphi \cos \tau_1 \cos \tau_2}{2l} = \frac{ab \sin 2\varphi}{4l} (\cos(\tau_1 + \tau_2) + \cos(\tau_1 - \tau_2)).$$

Значит, в данном случае функция Гамильтона представляется в виде суммы функции Гамильтона невозмущенной колебаниями системы и четырех функций, периодических по времени с частотами $\nu_1, \nu_2, \nu_1 + \nu_2, |\nu_1 - \nu_2|$. Поэтому согласно утверждению 1 при $0 \leq t \leq a$ получаем оценку отклонения решения усредненной системы от решения исходной системы

$$|\varphi(t, \nu_1, \nu_2) - \varphi^*(t)| + |p(t, \nu_1, \nu_2) - p^*(t)| \leq \frac{c_1^*}{\nu_1} + \frac{c_2^*}{\nu_2} + \frac{c_3^*}{\nu_1 + \nu_2} + \frac{c_4^*}{|\nu_1 - \nu_2|},$$

где $c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*$ — некоторые положительные константы, не зависящие от ν_1, ν_2 . Таким образом, решения исходной системы равномерно по t стремятся к решениям усредненной системы, если частоты ν_1, ν_2 колебаний и модуль их разности стремятся к бесконечности. Так, например, при $\nu_1 = 2\nu_2$ имеем

$$|\varphi(t, \nu_1, \nu_2) - \varphi^*(t)| + |p(t, \nu_1, \nu_2) - p^*(t)| \leq \frac{c}{\nu_1} \quad \text{при } 0 \leq t \leq a,$$

где c — некоторая положительная константа, не зависящая от ν_1, ν_2 .

Литература

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейшгадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
- [2] Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А., Рябов Ю. А. Введение в резонансную аналитическую динамику. М.: Янус-К, 1999. 301 с.
- [3] Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
- [4] Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем. М.: Наука, 1986. 192 с.
- [5] Бахтин В. И. Об усреднении в многочастотных системах // Функции, анализ и его прил. 1986. Т. 20. Вып. 2. С. 1–7.
- [6] Красильников П. С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.-Иж.: Инст. комп. исслед., 2015. 528 с.
- [7] Kugushev E. I., Popova T. V. Estimation of the accuracy of the averaging method for systems with multifrequency perturbations // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. Vol. 16. No. 2. P. 379–394.
- [8] Маркеев А. П. К задаче о точности хода маятниковых часов на вибрирующем основании // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2018. № 5. С. 112–123.
- [9] Neishtadt A. I., Sheng K. Bifurcations of phase portraits of pendulum with vibrating suspension point // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 47. P. 71–80.

О существовании лиувиллевых решений в интегрируемом случае Гесса задачи о движении тяжелого гиристора с неподвижной точкой

Кулешов А. С., Скрипкин А. Д.

kuleshov@mech.math.msu.su, alexander.kuleshov@math.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

Аннотация. Рассматривается задача о движении тяжелого гиристора с неподвижной точкой. В 1963 году Л. Н. Сретенский показал, что в этой задаче существует частный случай интегрируемости, соответствующий случаю Гесса в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В данной работе показано, что как и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, решение задачи описания движения тяжелого гиристора в случае Гесса–Сретенского приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает

явное решение, выражающееся в лиувиллевых функциях, и следовательно, уравнения движения гиростата могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Ключевые слова: гиростат с неподвижной точкой, случай Гесса, линейное дифференциальное уравнение второго порядка, алгоритм Ковачича.

Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле силы тяжести. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O . Допустим, что с этим телом связана некоторая ось, вокруг которой может вращаться однородный маховик. Таковую систему (тело с маховиком) принято называть гиростатом. Пусть M — масса гиростата, g — ускорение свободного падения, A_i — моменты инерции тела относительно осей Ox_i , ($i = 1, 2, 3$); ω_i , γ_i и x_i — проекции на оси Ox_i вектора мгновенной угловой скорости тела ω , единичного вектора γ , направленного по вертикали вверх, и радиуса-вектора центра масс гиростата соответственно. Через s_i обозначим постоянные компоненты кинетического момента маховика. Тогда уравнения движения гиростата в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 + s_3\omega_2 - s_2\omega_3 &= Mg(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 + s_1\omega_3 - s_3\omega_1 &= Mg(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1), \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + s_2\omega_1 - s_1\omega_2 &= Mg(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \quad (2)$$

Известно [2], что для решения системы уравнений (1)–(2) достаточно найти четыре независимых первых интеграла данной системы уравнений. При любых значениях параметров A_i , x_i , s_i , $i = 1, 2, 3$ известны три независимых первых интеграла системы уравнений (1)–(2) — интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) = E,$$

интеграл площадей

$$K = (A_1\omega_1 + s_1)\gamma_1 + (A_2\omega_2 + s_2)\gamma_2 + (A_3\omega_3 + s_3)\gamma_3 = k$$

и геометрический интеграл $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

В 1963 году Л. Н. Сретенский показал [1], что при выполнении условий

$$x_3 = 0, \quad A_2(A_3 - A_1)x_2^2 = A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \quad s_3 = 0, \quad A_2 > A_3 > A_1, \quad (3)$$

система уравнений (1)–(2) допускает частный четвертый интеграл

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} = 0. \quad (4)$$

Если ввести обозначения:

$$L_1 = \frac{A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad L_2 = \frac{A_2\omega_2x_1 - A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \nu_2 = \frac{\gamma_2x_1 - \gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \nu_3 = \gamma_3,$$

$$a = \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, \quad b = \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, \quad c = \frac{1}{A_3},$$

$$k_1 = \frac{s_1x_1 + s_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad k_2 = \frac{s_2x_1 - s_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \Gamma = Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

то в переменных $L_1, L_2, L_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ система уравнений (1)–(2) переписется следующим образом:

$$\dot{L}_1 = -bL_3 \left(L_1 - \frac{ck_2}{b} \right), \quad \dot{L}_2 = (a - c)L_1L_3 + bL_2L_3 - ck_1L_3 + \nu_3\Gamma, \quad (5)$$

$$\dot{L}_3 = -(a - c)L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 + (k_1b - k_2a)L_1 + (k_1c - k_2b)L_2 - \nu_2\Gamma,$$

$$\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = (aL_1 + bL_2)\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad (6)$$

$$\dot{\nu}_3 = -(aL_1 + bL_2)\nu_2 + (cL_2 + bL_1)\nu_1.$$

Из первого уравнения системы уравнений (5), (6) следует частный интеграл Гесса (4), который имеет вид

$$L_1 \equiv \frac{ck_2}{b}. \quad (7)$$

Инвариантное многообразие (7) вместе с условиями (3) и определяет интегрируемый случай Гесса в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой. При выполнении условий (3) на уровне частного интеграла

Гесса (6) уравнения (5) заметно упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{L}}_2 &= b\bar{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 + \nu_3\Gamma, & \dot{L}_3 &= -b\bar{L}_2^2 - (F - Gc)\bar{L}_2 - \nu_2\Gamma, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\bar{L}_2\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= -cL_3\nu_1 + b\bar{L}_2\nu_3 + F\nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= c\bar{L}_2\nu_1 - b\bar{L}_2\nu_2 - F\nu_2.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{L}_2 = L_2 + k_2, \quad F = \frac{(ac - b^2)k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1.$$

Система уравнений (8) допускает следующие первые интегралы

$$\frac{c}{2}(\bar{L}_2^2 + L_3^2) + \Gamma\nu_1 = E; \quad G\nu_1 + \bar{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (9)$$

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned}\bar{L}_2 &= \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y, & L_3 &= \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z, & t &= \frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}}, & d_1 &= \frac{b}{c}, \\ A &= \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, & B &= G\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, & h &= \frac{E}{\Gamma}, & p_1 &= k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},\end{aligned}$$

запишем систему уравнений (8) и первые интегралы (9) в безразмерной форме

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= d_1yz + (A - B)z + \nu_3, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1y^2 - (A - B)y - \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1y\nu_3 - z\nu_1 + A\nu_3, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1y\nu_2 + y\nu_1 - A\nu_2, \\ \frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 &= h, & y\nu_2 + z\nu_3 + B\nu_1 &= p_1, & \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1.\end{aligned}\quad (10)$$

Вводя новые переменные по формулам

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi, \quad u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

получим, что функция $u(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{du}{dx} = - \frac{d_1 x^3 - \left(A - \frac{B}{2}\right) x^2 - (p_1 - Bh)}{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \left(\frac{x^2}{2} - h\right)^2\right) - \left(p_1 + B \left(\frac{x^2}{2} - h\right)\right)^2}} u^2 +$$

$$+ \frac{d_1 x^3 + \left(A - \frac{B}{2}\right) x^2 + (p_1 - Bh)}{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \left(\frac{x^2}{2} - h\right)^2\right) - \left(p_1 + B \left(\frac{x^2}{2} - h\right)\right)^2}},$$

из которого можно получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Применение к этому дифференциальному уравнению алгоритма Ковачича [3] приводит к следующему результату.

Теорема 1. Лиувиллевы решения в задаче о движении тяжелого гиристора с неподвижной точкой в интегрируемом случае Гесса существуют только в двух случаях: $d_1 = 0$ (случай Лагранжа) или при выполнении условий

$$p_1 - Bh = 0, \quad A = \frac{B}{2}. \quad \square$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-11-20009.

Литература

- [1] Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиристора // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
- [2] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
- [3] Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2. P. 3–43.

Оптимальное программирование тяги в двумерной задаче Годдарда

*Малых Е.В., Смышляева А.В., Черкасов О.Ю.**

**oyuche@yandex.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

Аннотация. Рассматривается задача оптимального программирования тяги для «промежуточной» модели летательного аппарата. Движение происходит в вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести, под действием силы сопротивления среды и силы тяги. В качестве управляющих переменных приняты угол наклона траектории и сила тяги. Предполагается, что суммарные затраты топлива на управления тягой являются малыми по сравнению с массой аппарата. Найдена область в пространстве исходных переменных, для которой задача разрешима и построен оптимальный синтез. Установлено, что в этой области тяга может быть максимальной, нулевой или особой. Определено количество и порядок следования участков траектории с соответствующей тягой.

Ключевые слова: особое управление, управление тягой, двумерная задача Годдарда, вязкое трение, оптимальный синтез.

Введение. Изучение задачи оптимизации формы траектории движения центра масс летательного аппарата, в которой в качестве управления принят угол наклона траектории, в дальнейшем, следуя работе [1], будем называть промежуточной. В рамках этой модели предполагается, что подъемная сила, необходимая для изменения формы траектории, не влияет на силу сопротивления. Данное допущение справедливо при достаточно малых углах атаки. В такой постановке подъемная сила в задаче оптимизации формы траектории точечной модели летательного аппарата играет роль реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне для точечной массы [2, 3]. Обсуждение границ применимости такой модели приводится, например, в работе [4].

Задача программирования тяги летательного аппарата вдоль траектории, в частности, максимизации высоты полета с заданным количеством топлива, была сформулирована Робертом Годдардом в 1919 году [5]. Эта задача исследовалась методами вариационного исчисления и стала одной из первых, решаемых методами теории оптимального управления. Было установлено, что оптимальная программа изменения тяги состоит, как правило, из дуги максимальной тяги, затем промежуточной тяги и заканчивается нулевой тягой [6]. Такая структура имеет место в случае достаточно большого верхнего предела тяги, когда промежуточная тяга удовлетворяет ограничениям на протяжении всего процесса и остается допустимой. В работе [4] была рассмотрена двумерная задача Годдарда, в которой искался оптимальный закон изменения тяги

при условии, что закон изменения угла наклона траектории задан. Задача одновременного управления углом наклона траектории и расходом массы была рассмотрена в работе [7] для простейшего случая линейного вязкого трения.

В данной работе исследуется задача максимизации дальности полета. По сравнению с [7] в настоящей работе постановка задачи расширяется на случай нелинейного закона сопротивления среды, однако, вводится предположение о малых суммарных затратах топлива на управления тягой по сравнению с массой точки. Данное предположение позволяет расширить область построения оптимального синтеза и найти область, в которой задача разрешима.

Постановка задачи. Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести под действием сил тяги и сопротивления среды. Предполагается, что суммарные затраты топлива на управления тягой являются малыми по сравнению с массой точки. Задача состоит в определении формы траектории, обеспечивающей максимизацию горизонтальной координаты точки при движении её из заданного начального состояния за фиксированный промежуток времени при заданном количестве топлива.

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{v} = -Q(v) + u - \sin \theta, \quad \dot{\mu} = -u, \quad (1)$$

где x, y — горизонтальная и вертикальная координаты точки соответственно, v — модуль скорости, $Q(v)$ — сила сопротивления, зависящая только от скорости, θ — угол наклона траектории к горизонту, μ — количество топлива, u — скорость расхода топлива. θ и u рассматриваются в качестве управлений. Считается, что управление θ является гладкой функцией времени, а управление $u \in [0; \bar{u}]$ является кусочно-непрерывной функцией времени, где \bar{u} — заданная постоянная.

Начальные и конечные условия для системы (1) имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T, \quad v(0) = v_0, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad \mu(T) = 0.$$

Здесь $x(T), v(T)$ — свободны, $x_0, y_0, y_T, v_0, \mu_0, \mu_T$ — заданные краевые параметры, T — заданный момент окончания процесса. Целью управления является минимизация функционала

$$J = -x(T).$$

Исследование задачи. Для исследования поставленной задачи применяется принцип максимума Понтрягина. В результате исходная задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы исходных урав-

нений и уравнения

$$\dot{\theta} = (1 + (vQ'_v + Q - u)(\sin \theta - \alpha \cos \theta)) \frac{\cos \theta}{v} \quad (2)$$

с заданными исходными краевыми условиями и дополнительным условием $\theta(T) = \text{arctg } \alpha$, где α — неизвестная постоянная, подбирающаяся в зависимости от $y(T)$.

Максимизация функции Понтрягина H по управлению тягой u приводит к следующему закону выбора экстремальной тяги:

$$H = \begin{cases} \bar{u}, & H_1 > 0, \\ u_s, & H_1 \equiv 0, \\ 0, & H_1 < 0, \end{cases}$$

где H_1 — так называемая функция переключения. Особое управление u_s находится, в виде функции от скорости и угла наклона траектории:

$$u_s(v, \theta) = Q + \sin \theta.$$

Подставив u_s в уравнения (1), (2), получим, что особому участку соответствует стационарное решение с постоянной скоростью и постоянным углом наклона траектории.

Поверхность особого управления имеет вид:

$$\frac{vQ'_v}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta + \alpha \sin \theta}{\alpha \cos \theta - \sin \theta}.$$

Предполагая, что $u_s \in [0; \bar{u}]$, для построения оптимального синтеза были доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1. Если начальная точка в плоскости (θ, v) лежит правее особой поверхности, то оптимальная тяга имеет следующую структуру:

- а) $u = \bar{u} \rightarrow u = u_s \rightarrow u = 0$ (зелёная область);
- б) $u = \bar{u} \rightarrow u = 0$ (желтая область).

Утверждение 2. Если начальная точка в плоскости (θ, v) лежит левее особой поверхности, то оптимальная тяга имеет структуру:

$$u = 0 \rightarrow u = u_s \rightarrow u = 0 \text{ (голубая область).}$$

На рис. 1 области, указанные в утверждениях, обозначены соответствующим цветом. Оранжевой пунктирной линией обозначена особая поверхность.

Красными линиями продемонстрирован фазовый портрет седла при $u = 0$, а синими при $u = \bar{u} = 2$. Все вместе закрасненные области образуют область в плоскости (θ, v) , в которой задача оптимального управления разрешима.

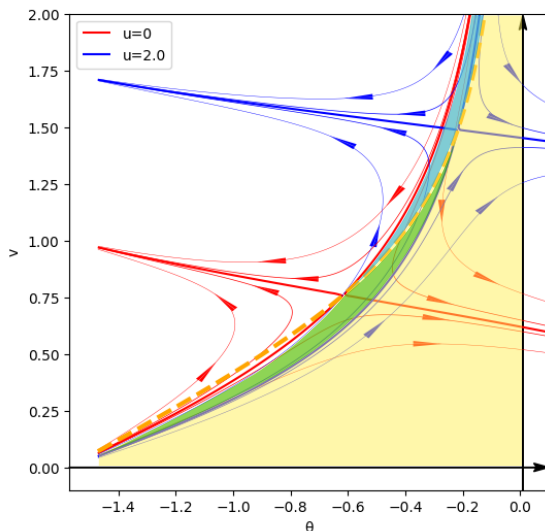


Рис. 1. Фазовый портрет с выделенными областями для построения оптимального синтеза при $\alpha = 0$.

Заключение. В результате исследования исходная задача оптимального управления была сведена к краевой задаче. Определена область в пространстве исходных переменных, для которой задача разрешима и строится оптимальный синтез. Установлено, что оптимальный закон изменения тяги в двумерной задаче Годдарда имеет такую же структуру, как и в одномерной задаче.

Литература

- [1] Menon P.K.A., Kelley H.J., Cliff E.M. Optimal symmetric flight with an intermediate vehicle model // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985. Vol. 8. No. 3. P. 312–319.
- [2] Голубев Ю. Ф. Брахистохрона с трением // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2010. № 5. С. 41–52.
- [3] Vratnagar B., Saje M. On the Analytical Solution of the Brachistochrone Problem in a Non-conservative Field // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1998. Vol. 33. No. 3. P. 489–505.

- [4] Indig N., Ben-Asher J. Z., Sigal E. Singular control for two-dimensional Goddard problems under various trajectory bending laws // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2019. Vol. 42. No. 3. P. 609–623.
- [5] Goddard R. H. A Method of Reaching Extreme Altitudes, volume 71 of Smithsonian Miscellaneous Collections // Smithsonian institution, City of Washington. 1919.
- [6] Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления, 1972. 544 с.
- [7] Cherkasov O. Y., Malykh E. V., Smirnova N. V. Brachistochrone problem and two-dimensional Goddard problem // Nonlinear Dyn. 2023. Vol. 111. P. 243–254.

Нелинейные колебания трёхосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости

Маркеев А.П.

anat-markeev@mail.ru

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101/1

Аннотация. Излагаются результаты изучения динамики однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Плоскость считается абсолютно гладкой, а полуоси эллипсоида различными. Основное внимание уделяется нелинейным колебаниям эллипсоида вблизи его устойчивого положения равновесия, в котором эллипсоид опирается на плоскость наинизшей точкой своей поверхности. Рассмотрен вопрос о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений в резонансном и нерезонансном случаях. Получено приближённое аналитическое представление колмогоровского множества условно-периодических колебаний, указана оценка меры этого множества.

Ключевые слова: твёрдое тело, нелинейные колебания, резонанс, устойчивость.

Задача о движении твёрдого тела, соприкасающегося с твёрдой поверхностью, имеет почти трёхсотлетнюю историю [1]. Эта задача интересна не только с общетеоретической точки зрения, она важна своими приложениями в машиностроении, приборостроении, транспорте. Интерес исследователей к этой задаче не ослабевает. Наоборот, в связи с бурным развитием работ по созданию робототехники этот интерес, по-видимому, возрастает всё более и более.

Много исследований посвящено механико-математическим моделям, в которых предполагается, что твёрдое тело движется по плоскости, являющейся гладкой. В докладе рассматривается динамика однородного трёхосного эллипсоида на абсолютно гладкой плоскости в однородном поле тяжести. Этой задаче посвящено довольно много исследований. Отметим только основные из них. В статье [2] получены условия, необходимые для устойчивости перманентного

вращения эллипсоида вокруг его оси, направленной вдоль вертикали. Строгая нелинейная задача об устойчивости этого вращения исследована недавно в статье [3]; в этой же статье исследована устойчивость такого движения эллипсоида, в котором он касается плоскости одним из своих главных сечений, которое считалось близким к кругу. Общая задача о существовании и устойчивости перманентных вращений и регулярных прецессий тяжелого твёрдого тела на гладкой горизонтальной плоскости подробно изучена в [4]–[6].

В статьях [7, 8] при помощи КАМ-теории дан качественный анализ движения на неподвижной гладкой плоскости трёхосного эллипсоида, мало отличающегося от шара. Вопросы интегрируемости уравнений движения тяжёлого твёрдого тела на гладкой плоскости изучались в [9]–[12]. В частности, показано [10], что в задаче о движении близкого к шару однородного трёхосного эллипсоида не существует необходимый для интегрируемости интеграл, дополнительный к интегралу энергии.

В докладе рассматривается движение однородного эллипсоида по неподвижной горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Плоскость считается абсолютно гладкой, а полуоси a , b , c эллипсоида различными ($a < b < c$). Существует положение устойчивого равновесия, когда эллипсоид опирается на плоскость наимизшей точкой своей поверхности. Частоты малых линейных колебаний в окрестности равновесия (в безразмерных переменных, $0 < \omega_2 < \omega_1 < \sqrt{5}$):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5(1-x)}{1+x}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5(y-x)}{y+x}} \quad (a^2 = xc^2, \quad b^2 = yc^2; \quad 0 < x < y < 1).$$

Если $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$ ($k_2 > k_1 \geq 1$), то имеет место резонанс порядка $k_1 + k_2$. Все возможные резонансы реализуются в области

$$\frac{x(3x+5)}{5x+3} \geq y > x. \quad (1)$$

Левой границей этой области является кривая $\omega_1 = 2\omega_2$. В области же

$$\frac{x(3x+5)}{5x+3} < y < 1 \quad (2)$$

резонансов нет.

Исследуются нелинейные колебания эллипсоида в окрестности равновесия. При исследовании используются классические и современные методы анализа динамических систем, описываемых уравнениями Гамильтона [13]–[15]. Необходимые вычисления существенно опираются на преобразование Биркгофа [16] и его модификации [17], удобные для их компьютерной реализации.

Оказалось, что все резонансы до пятого порядка включительно не препятствуют приведению функции Гамильтона возмущенного движения к нормальной форме вида

$$H = H^{(0)}(r_1, r_2) + O(r^3), \quad H^{(0)} = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \quad (3)$$

$$(c_{ij} = c_{ij}(x, y); \quad q_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad p_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i).$$

При этом величины $D_2 = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2$ и $D_3 = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2$ отличны от нуля, т. е. функция Гамильтона $H^{(0)}$ является невырожденной и изоэнергетически невырожденной.

Согласно КАМ-теории, движения в полной системе, описываемой функцией Гамильтона H из (3), для большинства начальных условий будут условно-периодическими с частотами $\partial H^{(0)}/\partial r_i$ ($i = 1, 2$). Множество начальных условий, не принадлежащих упомянутому большинству (колмогоровскому множеству), имеет малую меру. Для случая (1) его относительная мера в окрестности $r_1 + r_2 < \mu$ имеет порядок $\mu^{1/2}$, а для случая (2) порядок $\exp(-c_1/\mu^{c_2})$, $c_1, c_2 - \text{const} > 0$.

В докладе также кратко излагается решение задачи о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивого равновесия в резонансном и нерезонансном случаях.

Работа выполнена в рамках Государственного задания (номер госрегистрации 124012500443-0) в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Литература

- [1] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твёрдой поверхностью. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 496 с.
- [2] Пуисеу В. Solution de quelques question relatives au mouvement d'un corps solide pesant pos'e sur un plan horizontale // J. des math'ematiques pures et applique'es. 1852. Vol. 17. P. 1–30.
- [3] Маркеев А. П., Мошук Н. К. Об устойчивости движения эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // Механика твёрдого тела. Киев, 1984. Вып. 16. С. 56–64.
- [4] Карапетян А. В. Об устойчивости стационарных движений тяжёлого твёрдого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 504–511.
- [5] Карапетян А. В., Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжёлого трёхосного эллипсоида на гладкой плоскости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 260–267.
- [6] Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983. 132 с.

- [7] Маркеев А. П. О движении тяжёлого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 553–567.
- [8] Маркеев А. П., Мошук Н. К. Качественный анализ движения тяжёлого твёрдого телана гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 37–42.
- [9] Буров А. А. О частных интегралах уравнений движения твёрдого тела по гладкой горизонтальной плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 118–121.
- [10] Буров А. А., Карапетян А. В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжёлого твёрдого эллипсоида по гладкой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 501–503.
- [11] Сальникова Т. В. О существовании дополнительных аналитических интегралов в динамике твёрдого тела. Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1985. 101 с.
- [12] Сумбатов А. С. Некоторые инвариантные соотношения в задаче о движении тела по горизонтальной гладкой плоскости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 34–41.
- [13] Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
- [14] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейшгадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
- [15] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах / пер. с англ. М.: Мир, 1973. 167 с.
- [16] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы / пер. с англ. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
- [17] Джакалья Г. Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем / пер. с англ. М.: Наука, 1979. 320 с.

Итерационный метод построения последовательностей дифференциальных неравенств для оценки устойчивости нелинейных систем

Мельников В. Г.¹, Дударенко Н. А.²

v.g.melnikov@yandex.ru, dudarenko@yandex.ru

¹Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II,
199406, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Малый пр. В.О., 83,

²Университет ИТМО,

197101, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49А

Аннотация. В статье исследуется метод синтеза последовательности линейных неоднородных дифференциальных неравенств для функций Ляпунова для класса автономных механических систем, рассматриваемых в ограниченной области в окрестности начала координат фазового пространства. Математическая модель системы описывается матричным дифференциальным уравнением в форме Коши с нелинейной

правой частью, которая имеет полиномиальную структуру. В результате использования метода получены оценки переходных процессов системы в форме последовательности уточнённых функциональных неравенств. Численное моделирование подтвердило эффективность метода.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, функция Ляпунова, дифференциальные неравенства, практическая устойчивость.

Введение. Класс моделей механических систем, заданных в форме нелинейных дифференциальных уравнений с малыми нелинейными составляющими достаточно широко распространен в литературе. Для анализа такого класса систем обычно применяют методы разложения по малому параметру. Иногда порождающие решения формируются на основе решений нелинейной системы с добавлением некоторых нелинейных элементов [1, 2, 3]. Для оценки практической устойчивости нелинейной системы используют одно дифференциальное неравенство для определённо-положительной функции. Такие качественные и количественные оценки являются достаточными, при этом они относительно простые и потому широко используются на практике [4, 5, 6]. Можно отметить, что основополагающие идеи метода дифференциальных неравенств для функций Ляпунова были сформулированы в 1956 году в статье проф. Мельникова Г.И. [7], опубликованной с рекомендацией акад. В.И. Смирнова, а также в более развернутом виде были представлены в том же году в его диссертационной работе [8], подготовленной под научным руководством проф. Поляхова Н.Н. Полученные качественные оценки могут быть уточнены путём перехода к более сложным и точным дифференциальным неравенствам. В этой работе рассматривается метод последовательного уточнения и исследования дифференциальных неравенств для функций Ляпунова.

Постановка задачи. Рассмотрим случай движения нелинейной механической системы с одной степенью свободы. Её фазовое состояние определяется вектором фазовых координат $q = [q_1, q_2]^T$. Предположим, что математическая модель движения исследуемой нелинейной системы, приведенная к форме Коши, представляет собой систему двух дифференциальных уравнений заданную в окрестности \bar{D}_0 нуля фазового пространства состояний:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= P'q + Q^{(2)}(q) + Q^{(3)}(q) + Q^{(4)}(q), \\ q &\in \bar{D}_0, \quad \bar{D}_0 = \{q = [q_1, q_2]^T : |q_s| \leq l_s, s = 1, 2\}, \\ P' &= \begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь P' — постоянная матрица линейной части системы, $Q^{(2)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}$ — однородные многочлены второго, третьего и четвёртого порядков с малыми коэффициентами, $p_{\nu_1 \dots \nu_n}^{s(k)}$. Собственные числа λ'_s матрицы P' предполагаются раз-

личными, имеющими отрицательные действительные части и упорядоченными по уменьшению их действительных частей $\lambda'_s = \alpha'_s + i\beta'_s$, $\alpha'_n \leq \alpha'_{n-1} \leq \dots \leq \alpha'_1 < 0$, $s = 1, \dots, n$. Оценим переходные процессы устойчивого движения динамической системы при помощи метода дифференциальных неравенств [7, 2] при этом уточним его.

Метод последовательности дифференциальных неравенств. Проведя замену переменных и деление системы в новых переменных на $\exp(\alpha t)$ приводим систему (1) к следующему нестационарному виду со стационарной линейной частью:

$$\dot{x} = Px + e^{-\alpha t}Q^{(2)}(x) + e^{-2\alpha t}Q^{(3)}(x) + e^{-3\alpha t}Q^{(4)}(x), \quad P = P' + \alpha E, \quad (2)$$

где $x = qe^{\alpha t}$, $\alpha = |\alpha_1| - \varepsilon = -\alpha_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Производная от функции Ляпунова $V(x)$, взятая в виде положительно определенной квадратичной формы в силу системы (2) будет включать в себя отрицательно определенную квадратичную форму $W^{(2)}(x)$, а также однородные формы третьей, четвертой и пятой степеней с нестационарными коэффициентами $e^{-\alpha t}$, $e^{-2\alpha t}$, $e^{-3\alpha t}$. Имеем дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \leq W^{(2)} + e^{-\alpha t}|W^{(3)}| + e^{-2\alpha t}|W^{(4)}| + e^{-3\alpha t}|W^{(5)}|. \quad (3)$$

Как известно [2], квадратичная форма $W^{(2)}$ может быть оценена сверху отрицательно определенной формой вида $(-c_0V)$, $c_0 > 0$. Кубическую форму, а также формы четвертой и пятой степеней $|W^{(3)}|$, $|W^{(4)}|$, $|W^{(5)}|$ оцениваем сверху формами с малыми неотрицательными коэффициентами. В результате имеем оценки:

$$W^{(2)} \leq -c_0V(x), \quad |W^{(3)}| \leq c_1V^3(x), \quad |W^{(4)}| \leq c_2V^4(x), \quad |W^{(5)}| \leq c_3V^5(x), \quad (4)$$

а также дифференциальное неравенство, которое описывает ограничения на функцию \dot{V} :

$$\dot{V} \leq -\{c_0 - f(V, t)\}V, \quad f(V, t) = \sum_{k=1}^3 c_k e^{-k\alpha t} V^{1+k}. \quad (5)$$

при $c_0 > 0$, $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

В начальный момент времени правая часть неравенства (5) является отрицательной величиной. Из этого следует, что левая часть этого неравенства также является отрицательной величиной. Это означает, что функция $V(x)$ убывает, стремясь к нулю, и условие $V(x) \leq V_0$ выполняется для всех значений $t > t_0$. Выполним численное решение сложного дифференциального уравнения (5) при помощи метода последовательных приближений. Выполним подста-

новку начального значения $V = V_0$, тогда линеаризованное дифференциальное неравенство с завышенной правой частью имеет вид

$$\dot{V} \leq -(c_0 - e^{-\alpha t} c_1 V_0^2 - e^{-2\alpha t} c_2 V_0^3 - e^{-3\alpha t} c_3 V_0^4) V. \quad (6)$$

Умножая почленно (6) на положительную экспоненциальную функцию и интегрируя получим оценку асимптотического приближения определенно-положительной функции V :

$$V \leq F_1(V_0, t_0, t), \quad t > t_0$$

$$F_1 = V_0 \exp \left(-c(t - t_0) + \int_{t_0}^t (e^{-\alpha t} c_1 V_0^2 + e^{-2\alpha t} c_2 V_0^3 + e^{-3\alpha t} c_3 V_0^4) dt \right). \quad (7)$$

В первой итерации в дифференциальном неравенстве (5) назначим $V = F_1$. Интегрируя полученное линейное дифференциальное неравенство в пределах $[t_0, t]$ имеем уточненную оценку функции Ляпунова:

$$V \leq F_2(V_0, t_0, t), \quad t \geq t_0$$

$$F_2 = V_0 \exp \left\{ -c(t - t_0) + \int_{t_0}^t f(F_1, t) dt \right\} \equiv V_1(V_0, t_0, t). \quad (8)$$

Во второй и последующих итерациях будем использовать полученные на предыдущих итерациях уточненные оценки функции Ляпунова. Полученные в результате координатные оценки являются оценками практической устойчивости движения нелинейной механической системы.

Произведенное численное моделирование показало эффективность примененного метода, при этом проведение больше трех итераций не имеет практического смысла, т. к. не приводит к дальнейшему существенному уточнению получаемой оценки функции Ляпунова.

Литература

- [1] Vasil'ev S. A reduction method and qualitative analysis of dynamic systems // J. Comput. Syst. Int. 2006. V. 45. P. 167–179. <https://doi.org/10.1134/S1064230706020018>
- [2] Мельников Г. И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 200 с.
- [3] Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

- [4] Aleksandrov A. Y., Martynyuk A. A., Platonov A. V. Stability Analysis of Nonlinear Switched Difference Systems via the Comparison Method // Panamerican Mathematical Journal. 2015. V. 25. No. 2. P. 71–88.
- [5] Aleksandrov A. Y., Tikhonov A. A. Stability analysis of mechanical systems with distributed delay via decomposition // Vestn. St. Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Proc. 2021. V. 17. No. 1. P. 13–26. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2021.102
- [6] Aleksandrov A. Y., Tikhonov A. A. Stability Analysis of Mechanical Systems with Highly Nonlinear Positional Forces under Distributed Delay // Automation and Remote Control. 2023. V. 84. No. 1. P. 1–13. DOI: 10.1134/s0005117923010022
- [7] Мельников Г. И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // Доклады академии наук. 1956. Т. 110. № 3. С. 326–329.
- [8] Мельников Г. И. Некоторые вопросы прямого метода А. М. Ляпунова и их приложение к задаче об управляемости судна. Дис. канд. физ.-мат. наук. ЛГУ, СПб, 1956. 160 с.

Колебания двойного маятника со степенным законом трения

Морозов Д. В.¹, Смирнов А. С.^{1,2}

dmorozov885@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

²Институт проблем машиноведения Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Аннотация. В статье рассматриваются колебания двойного математического маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов при наличии сил трения в окружающей среде и в шарнирных сочленениях. Предполагается, что эти силы зависят от соответствующих скоростей по степенному закону с произвольным показателем. При помощи метода усреднения строится приближенное аналитическое решение для тех случаев, когда движения системы затухают по каждой из форм колебаний в отдельности. Устанавливается, что под действием трения в окружающей среде колебания системы затухают однотипно по обеим формам. В то же время выводится, что под действием шарнирного трения колебания по второй форме затухают быстрее, чем по первой форме, и этот эффект усиливается с увеличением показателя степени.

Ключевые слова: двойной маятник, трение в окружающей среде, трение в шарнирных сочленениях, метод усреднения, затухание колебаний.

Введение. Динамике двойного маятника посвящено большое количество публикаций, однако лишь небольшое их число учитывает силы сопротивления, которые действуют в любой реальной системе. Среди таких работ можно отметить, например, статью [1], где исследуется динамика двойного маятника

при наличии вязкого и сухого трения. Кроме того, в статье [2] рассматривается двойной маятник с вязким трением в шарнирах и обсуждаются вопросы оптимизации демпфирования, а в работе [3] строится математическая модель колебаний двойного маятника с учетом внутреннего трения в стержнях. Помимо этого, в книге [4] рассматривается задача о двойном маятнике с движущейся точкой подвеса в среде с квадратичным сопротивлением, а в книге [5] приводится пример двойного физического маятника с сухим трением в шарнирах.

Представляет интерес обобщить задачу о колебаниях двойного математического маятника, полагая, что силы трения зависят от скоростей по степенному закону с произвольным показателем, принимая также во внимание, что трение может иметь место как в окружающей среде, так и в шарнирных сочленениях.

Расчетная схема двойного маятника. Рассмотрим двойной математический маятник с идентичными концевыми грузами массой m и одинаковыми звеньями длиной l (рис. 1). В качестве обобщенных координат примем углы отклонения звеньев маятника от вертикали φ_1 и φ_2 .

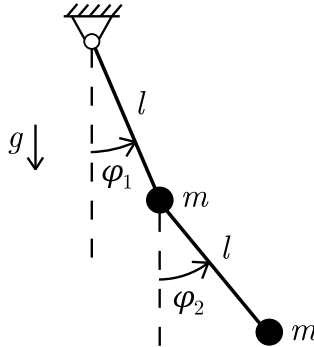


Рис. 1. Двойной математический маятник.

Рассматривая далее малые колебания двойного маятника, запишем квадратичные аппроксимации кинетической и потенциальной энергий, имеющие вид:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = ml^2 \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C} = mgl \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Выражения для частот малых колебаний k_1 , k_2 и форм малых колебаний $\mathbf{U}_{(1)}$, $\mathbf{U}_{(2)}$ консервативной системы имеют хорошо известный вид [3]:

$$k_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}k}, \quad k_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}k}, \quad \mathbf{U}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где $k = \sqrt{g/l}$ — частота малых колебаний обычного маятника. Выпишем также нормировочные коэффициенты форм колебаний, необходимые далее:

$$N_1 = \mathbf{U}_{(1)}^T \mathbf{A} \mathbf{U}_{(1)} = 2(2 + \sqrt{2})ml^2, \quad N_2 = \mathbf{U}_{(2)}^T \mathbf{A} \mathbf{U}_{(2)} = 2(2 - \sqrt{2})ml^2. \quad (3)$$

Трение в окружающей среде. Обратимся сначала к учету сопротивления со стороны окружающей среды, полагая, что на каждый из грузов действует сила сопротивления, пропорциональная n -ной степени его скорости ($n = 0, 1, 2, \dots$). Тогда диссипативная функция внешнего трения примет вид [4]:

$$R = \frac{1}{n+1} b (v_1^{n+1} + v_2^{n+1}) = \frac{1}{n+1} b l^{n+1} (|\dot{\varphi}_1|^{n+1} + |\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2|^{n+1}), \quad (4)$$

где b — диссипативный коэффициент, а v_1 и v_2 — абсолютные значения скоростей, причем $v_1 = l|\dot{\varphi}_1|$, а при малых колебаниях можно приближенно положить, что $v_2 = l|\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2|$. Следовательно, столбец обобщенных сил будет:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -b l^{n+1} \begin{pmatrix} |\dot{\varphi}_1|^n \text{sign } \dot{\varphi}_1 + |\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2|^n \text{sign } (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \\ |\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2|^n \text{sign } (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда уравнение малых колебаний двойного маятника с учетом сил внешнего сопротивления можно записать в следующей матричной форме:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}. \quad (6)$$

Получим приближенные решения уравнения (6) при помощи метода усреднения для тех случаев, когда затухание движений системы отвечает одной из форм колебаний $\mathbf{U}_{(1)}$ и $\mathbf{U}_{(2)}$, что при малом трении (т. е. при малых значениях коэффициента b) будет иметь место при задании начальных условий движения поочередно в соответствии с этими формами. Разыскивая эти решения в виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}_{(s)} a_s \cos \psi, \quad a_s = a_s(t), \quad \psi = k_s t + \theta_s, \quad \theta_s = \theta_s(t), \quad s = 1, 2, \quad (7)$$

получим для определения функций $a_s(t)$ и $\theta_s(t)$ следующие уравнения [3]:

$$\dot{a}_s = -\frac{1}{2\pi N_s k_s} \int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{(s)}^T \mathbf{Q} \sin \psi d\psi, \quad \dot{\theta}_s = -\frac{1}{2\pi a_s N_s k_s} \int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{(s)}^T \mathbf{Q} \cos \psi d\psi. \quad (8)$$

Отсюда вытекает, что $\dot{\theta}_s = 0$ и $\dot{\psi} = k_s$, как и следовало ожидать, т. к. никаких нелинейных консервативных слагаемых удержано не было, а также имеем:

$$\begin{aligned} \dot{a}_s &= -\varkappa_s a_s^n, & \varkappa_1 &= \varkappa_2 = \frac{bl^{n-1}k^{n-1}}{m} \frac{I_n}{2\pi} \left[(2 - \sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}} + (2 + \sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}} \right], \\ I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \psi d\psi = \frac{n!!}{(n+1)!!} \cdot \begin{cases} \pi/2, & n = 2p + 1, \\ 1, & n = 2p, \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, мы получили, что $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Это означает, что колебания по первой и второй формам в случае внешнего трения затухают абсолютно одинаковым образом. Наконец, решения уравнения (9) для a_s с начальным условием $a_s = a_{s0}$ при $t = 0$ для случаев $n = 1$ и $n \neq 1$ имеют вид:

$$n = 1: \quad a_s(t) = a_{s0} e^{-\varkappa_s t}; \quad n \neq 1: \quad a_s(t) = \frac{a_{s0}}{n^{-1} \sqrt{1 + (n-1)\varkappa_s a_{s0}^{n-1} t}}. \quad (10)$$

Трение в шарнирных сочленениях. Переходя теперь к рассмотрению трения в шарнирных сочленениях двойного маятника, запишем по аналогии диссипативную функцию в следующем виде:

$$R = \frac{1}{n+1} \beta (\omega_1^{n+1} + \omega_2^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \beta (|\dot{\varphi}_1|^{n+1} + |\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1|^{n+1}), \quad (11)$$

где полагается, что в каждом из шарниров действует момент сопротивления, пропорциональный n -ной степени скорости изменения угла поворота в этом шарнире, и абсолютные значения этих скоростей есть $\omega_1 = |\dot{\varphi}_1|$, $\omega_2 = |\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1|$, а β — диссипативный коэффициент. Тогда столбец обобщенных сил будет:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\beta \begin{pmatrix} |\dot{\varphi}_1|^n \text{sign } \dot{\varphi}_1 - |\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1|^n \text{sign } (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\ |\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1|^n \text{sign } (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Строя по аналогии приближенные решения уравнения (6) при затухании колебаний по каждой из форм $\mathbf{U}_{(1)}$ и $\mathbf{U}_{(2)}$ (полагая величину β малой), получим для $a_s(t)$ те же формулы (10), однако выражения для \varkappa_1 и \varkappa_2 будут уже иными:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{\beta k^{n-1}}{ml^2} \frac{I_n}{2\pi} \left[(2 - \sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}} + (10 - 7\sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}} \right], \\ \varkappa_2 &= \frac{\beta k^{n-1}}{ml^2} \frac{I_n}{2\pi} \left[(2 + \sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}} + (10 + 7\sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

а для I_n сохраняется прежнее обозначение. Поэтому $\varkappa_1 < \varkappa_2$, и при учете трения в шарнирах колебания по второй форме будут затухать быстрее, чем по первой, причем тем быстрее, чем больше n . Так, при $n = 0$ имеем $\varkappa_2/\varkappa_1 = 5.83$, при $n = 1$ будет $\varkappa_2/\varkappa_1 = 33.97$, а при $n = 2$ получим $\varkappa_2/\varkappa_1 = 197.99$.

Заключение. Таким образом, при наличии сил сопротивления, зависящих от скоростей по степенному закону, затухание движений двойного математического маятника с идентичными параметрами звеньев и грузов по первой и второй формам его колебаний может происходить как однотипно (при учете трения в окружающей среде, причем при любом показателе степени), так и совершенно различным образом (при учете трения в шарнирных сочленениях).

Литература

- [1] Sawant K.R., Shrikanth V. Energy dissipation and behavioral regimes in an autonomous double pendulum subjected to viscous and dry friction damping // European Journal of Physics. 2021. Vol. 42. Iss. 5. P. 055008.
- [2] Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 2(19). С. 52–59.
- [3] Смирнов А. С., Смольников Б. А. Колебания двойного математического маятника с внутренним трением // Современное машиностроение: наука и образование 2022: материалы 11-й Международной научной конференции, 23 июня 2022 г. СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. С. 113–125.
- [4] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
- [5] Вильнит Л. Н. Дифференциальные уравнения движения механических систем с сухим трением. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2004. 30 с.

Особенности синтеза регулятора с использованием языка программирования Python в задаче движения мобильного робота вдоль стенки

Науменко А.,^{1} Лаврененко Э.,¹ Ардашев Н.,¹ Чернов В.,^{1,2}
Нечунаев А.¹*

**st099423@student.spbu.ru*

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²Институт проблем машиноведения РАН,

199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61

Аннотация. В исследовании приведены особенности применения различных конструкций языка программирования Python для синтеза регулятора в задаче движе-

ния вдоль стенки мобильного робота на первоначально установленном расстоянии от стенки, описаны проведенные натурные эксперименты в рамках этой задачи.

Ключевые слова: задача движения робота вдоль стенки, робототехника, пропорциональный регулятор, пропорционально-дифференциальный регулятор, язык программирования Python.

Введение. Известно, что в конце 2015 г. робототехника была внесена в приоритетные направления развития науки, технологий и техники в Российской Федерации [1]. Помимо промышленности, мобильные роботы находят применение во многих других областях: военном деле, космонавтике, в системах охраны и наблюдения, на транспорте, при ликвидации техногенных и природных чрезвычайных ситуаций, в сельском хозяйстве и геологоразведке, в коммунальном хозяйстве, сервисе и в быту, в медицине и технических средствах реабилитации [2]. В мобильной робототехнике ключевое значение имеет проблема автономной навигации и управления движением [2]. Для управления движением мобильного робота применяются различные регуляторы. Среди них: пропорциональный (П-регулятор), пропорционально-дифференциальный (ПД-регулятор), пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-регулятор) и другие.

Построение ПД – регулятора. Такой регулятор можно описать соотношением [3]:

$$u_t = k_0(x^* - x_t) + k_1(x_{t+1} - x_t). \quad (1)$$

В формуле: x_t — расстояние робота от стены; x^* — желаемое расстояние до стены; k_0 — коэффициент усиления регулятора (пропорциональный); k_1 — коэффициент усиления по разности (дифференциальный). Поскольку в момент времени t измерить x_{t+1} невозможно, для реализации данного регулятора можно воспользоваться следующим соотношением [3]:

$$x_{t+1} - x_t = \nu h \Theta_{t-1} + u_{t-1} \frac{\nu h^2 r}{b}, \quad (2)$$

где Θ_t — курсовой угол робота; Θ_{t-1} — курсовой угол робота в момент с порядковым номером $t-1$; u_{t-1} — управляющее воздействие в момент с порядковым номером $t-1$; h — временной шаг; b — расстояние между колесами робота; ν — скорость робота; r — радиус колес.

Но и при такой постановке регулятора некоторые величины в формуле требуют специального измерения (скорость робота, значение курсового угла). В связи с этим авторы настоящего исследования пошли по следующему пути. В задаче подразумевалось, что конфигурация стенки, вдоль которой роботу предстоит двигаться, может быть: прямолинейная стенка, стенка с поворотом,

П-образная незамкнутая стенка, стенка в виде замкнутого многоугольника с углами, более, чем 90 градусов (с тупыми углами). Робот для исследования был принят двухколесным с опорой на третью точку в виде металлической, свободно вращающейся в металлической обойме сферы. Указанный робот хорошо управляется изменением мощности на каждом из двух моторов, приводящих в движение каждое из двух колес. Фотография робота, собранного из стандартного комплекта (российского производителя «ТРИК» [4]), приведена на рисунке 1.

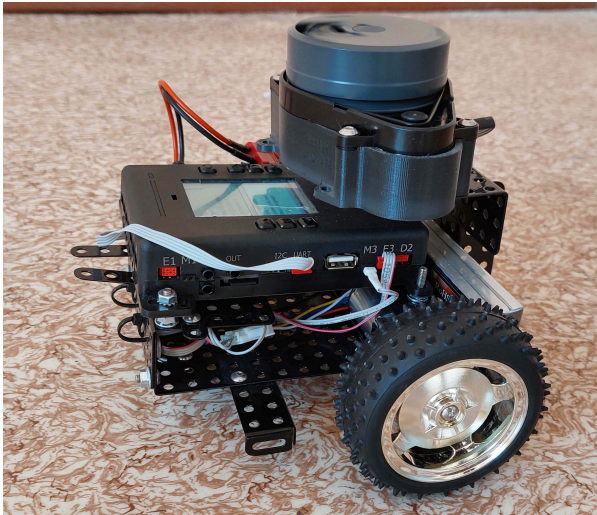


Рис. 1. Робот «ТРИК» [4] с установленным датчиком LIDAR.

Для управления мобильным роботом использовалось увеличение, либо уменьшение программной мощности того или иного из двух моторов (на каждом шаге расчета мощность либо увеличивалась, либо уменьшалась, затем передавалась в порт мотора). Расстояние до стенки считывалось при помощи лазерного непрерывно вращающегося сканера LIDAR. На языке Python строка считывания расстояния имела вид:

```
brick.lidar().read()
```

Добавка (положительная или отрицательная) к мощности того или иного из двух моторов имела пропорциональную и дифференциальную составляющую:

$$u = (sensor(lidar) - L)k_0 + (sensor(lidar) - R)k_1. \quad (3)$$

В формуле: L — заданное исследователем расстояние до стенки; R — расстояние до стенки, взятое на предыдущем шаге расчета.

Слагаемое $(\text{sensor}(\text{lidar}) - L)k_0$ в (3) представляет собой пропорциональную составляющую регулятора; второе слагаемое в (3) — дифференциальную составляющую. Пояснения к определению переменных L и R приведены на рисунке 2. Sensor LIDAR — измеренное расстояние при помощи лазерного сканера непосредственно в момент исполнения программы. После первоначального запуска программы в переменную L заносятся значения, считанные с лазерного сканера LIDAR (исследователь задал расстояние до стенки). Переменной R , которая отвечает за предыдущее расстояние, в момент запуска программы присваивается значение L . Затем, на каждом шаге программы после вычисления пропорциональной и дифференциальной составляющей в переменную R вновь заносятся показания лазерного датчика LIDAR.

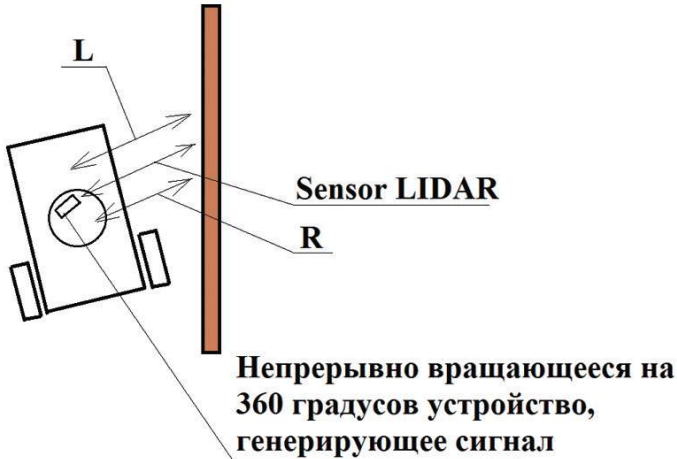


Рис. 2. Схема, показывающая заданное при установке робота в исходную позицию расстояние L , считанное с лазерного сканера в текущий момент в программе Sensor (lidar); R — расстояние от лазерного сканера до стенки на предыдущем шаге расчета.

В таблице 1 приведены результаты серии натурных экспериментов с роботом «ТРИК» [4], в результате которых изменялись коэффициенты k_0 и k_1 , выполнялся анализ траектории робота вдоль стенки.

Таблица 1.

№	k_0	k_1	Задержка, мс	Характеристика траектории
1	0.05	0.05	2	Умеренно извилиста
2	0.05	0.05	3	Сильно извилиста
3	0.05	0.05	2.5	Умеренно извилиста
4	0.05	0.05	1	Сильно извилиста
5	0.05	0.01	2	Сильно извилиста
6	0.05	0.01	2	Сильно извилиста
7	0.05	2	2 (+не превышать воздействие на моторы = 9)	Умеренно извилиста

Заключение. Выполнено упрощенное построение ПД-регулятора, которое не требует измерения скорости робота, курсового угла робота. Регулятор реализован на языке программирования Python, что явилось существенным преимуществом, как по простоте программы, так и по возможности быстро вносить изменения в программу. Выполнена серия натуральных экспериментов с роботом, проведен анализ траектории робота, когда подбирались коэффициенты k_0 и k_1 . Исследована зависимость погрешности движения от величины шага дискретности h .

Литература

- [1] О Национальном центре развития технологий и базовых элементов робототехники: Указ Президента Российской Федерации от 16.12.2015 г. № 623 // Собрание законодательства Российской Федерации. 2015. № 51. ст. 7313.
- [2] Семакова А. А. Алгоритмы управления мобильными роботами по неполным данным в многоагентных сценариях; дисс. на соиск. уч. степени к. ф.-м. н., Санкт-Петербург, 2017.
- [3] Филиппов С. А., Фрадков А. Л., Алгоритмы управления мобильным LEGO-роботом. Простейшие регуляторы. В кн.: Робототехника для детей и родителей. СПб, 2011.
- [4] ТРИК — кибернетический конструктор: офиц. сайт. URL: <http://trikset.com>

Вращательные режимы торможения оперенного тела в сопротивляющейся среде

Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А.

foto403@imec.msu.ru, privalova@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru

Научно-исследовательский институт механики МГУ,

119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

Аннотация. Рассматривается задача о торможении оперенного тела в однородной сопротивляющейся среде под воздействием только сил со стороны среды. Исследуется модельная задача для тела, оперение которого состоит из одной лопасти. Показывается, что при плоско-параллельном движении для любых плоских профилей лопасти возможны круговые режимы торможения типа «кувыркания». Для профилей с высоким аэродинамическим качеством возможны дополнительные круговые режимы торможения типа «парашютного». При движении тела в пространстве при некотором соотношении между линейной и угловой скоростью центра масс также существуют круговые режимы торможения. При нарушении найденного соотношения между скоростями возникают винтовые режимы торможения тела.

Ключевые слова: оперенное тело, круговые режимы торможения, винтовые режимы торможения.

Введение. Рассматривается задача о торможении оперенного тела в однородной сопротивляющейся среде под воздействием только сил со стороны среды. В работе [1] исследовалась возможность существования установившихся вращательных движений в задаче о торможении плохо обтекаемого тела в покоящейся среде, обладающей сопротивлением. На примере модельной задачи для тела конкретной формы показывается, что при торможении тело может двигаться по кругу или совершать винтовое движение. В изучаемой задаче момент относительно оси динамической симметрии тела равен нулю, откуда следует, что проекция угловой скорости на эту ось должна быть равна нулю, что дает надежду на наличие установившихся режимов. Это приводит к некоторым особенностям в сравнении с результатами, полученными в [1].

Постановка задачи. В настоящей работе исследуется как плоско-параллельное движение, так и пространственное движение тела, оперение которого состоит из одной лопасти, которая перпендикулярна оси динамической симметрии тела с центром O на этой оси (рис. 1). Центр масс G смещен относительно точки O на расстояние R вдоль оси динамической симметрии тела. Угол атаки α лопасти вводится как угол между вектором скорости V_O точки O и плоскостью, жестко связанной с лопастью, отсюда $\sin \alpha = -V_z/V_O$, где V_z — проекция вектора скорости V_G центра масс на ось Oz системы координат $Oxyz$, связанной с телом. Считается, что аэродинамические силы (\mathbf{S} — сила лобового сопротивления и \mathbf{P} — боковая (подъемная) сила), приложенные

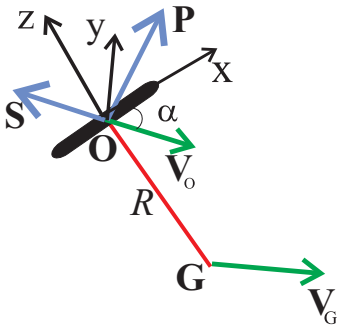


Рис. 1. Модель тела.

масс, момента инерции, формы лопасти) возможны два типа установившихся круговых режимов торможения. Для лопастей, профили которых имеют высокое аэродинамическое качество [3], возможны режимы торможения «парашютного» типа [4] и «кувыркания». Для тела с лопастями [5], у которых аэродинамическое качество для больших углов атаки $k(\alpha) \leq \text{ctg}(\alpha)$, режим торможения по «парашютному» типу невозможен и существуют только круговые режимы торможения типа «кувыркания».

В обоих вариантах торможения, центр масс тела и центр лопасти движутся по концентрическим окружностям, но при торможении «парашютного» типа центр масс тела движется по кругу большего радиуса, чем центр лопасти (рис. 2(a)).

В случае торможения по типу «кувыркания» центр лопасти движется по кругу большего радиуса, чем центр масс тела, а прямая, соединяющая эти центры, пересекает круг, по которому движется центр масс тела (рис. 2(б)). Во всех рассмотренных вариантах торможения разность радиусов концентрических кругов меньше величины смещения центра масс.

Торможение в пространстве. В случае пространственного движения при $\omega_z \equiv 0$ и соблюдении следующего соотношения $v_x \omega_x + v_y \omega_y = 0$ для безразмерных переменных $v_x = V_x/V_O$, $v_y = V_y/V_O$, $\omega_x = \Omega_x R/V_O$, $\omega_y = \Omega_y R/V_O$, где проекции линейной v_x , v_y и угловой ω_x , ω_y скорости центра масс на оси системы координат $Oxyz$, связанной с телом также существует установившийся режим торможения по кругу. Если данное соотношение не выполняется, возникает винтовое торможение (рис. 3).

в точке O , действуют только на лопасть. Для их описания используется квазистатическая модель воздействия среды на тело [2]. Рассматривается вопрос о существовании режима установившегося торможения, на котором угол атаки лопасти $\alpha = \text{const}$ и безразмерная угловая скорость $\omega = \Omega R/V_O = \text{const}$, где Ω — угловая скорость тела.

Торможение в плоскости. Показывается, что в случае плоско-параллельного движения при смещении центра масс тела вдоль оси симметрии тела относительно центра лопасти, возникают круговые режимы торможения тела. Получено, что в зависимости от параметров тела (смещения центра

масс, момента инерции, формы лопасти) возможны два типа установившихся круговых режимов торможения. Для лопастей, профили которых имеют высокое аэродинамическое качество [3], возможны режимы торможения «парашютного» типа [4] и «кувыркания». Для тела с лопастями [5], у которых аэродинамическое качество для больших углов атаки $k(\alpha) \leq \text{ctg}(\alpha)$, режим торможения по «парашютному» типу невозможен и существуют только круговые режимы торможения типа «кувыркания».

В обоих вариантах торможения, центр масс тела и центр лопасти движутся по концентрическим окружностям, но при торможении «парашютного» типа центр масс тела движется по кругу большего радиуса, чем центр лопасти (рис. 2(a)).

В случае торможения по типу «кувыркания» центр лопасти движется по кругу большего радиуса, чем центр масс тела, а прямая, соединяющая эти центры, пересекает круг, по которому движется центр масс тела (рис. 2(б)). Во всех рассмотренных вариантах торможения разность радиусов концентрических кругов меньше величины смещения центра масс.

Торможение в пространстве. В случае пространственного движения при $\omega_z \equiv 0$ и соблюдении следующего соотношения $v_x \omega_x + v_y \omega_y = 0$ для безразмерных переменных $v_x = V_x/V_O$, $v_y = V_y/V_O$, $\omega_x = \Omega_x R/V_O$, $\omega_y = \Omega_y R/V_O$, где проекции линейной v_x , v_y и угловой ω_x , ω_y скорости центра масс на оси системы координат $Oxyz$, связанной с телом также существует установившийся режим торможения по кругу. Если данное соотношение не выполняется, возникает винтовое торможение (рис. 3).

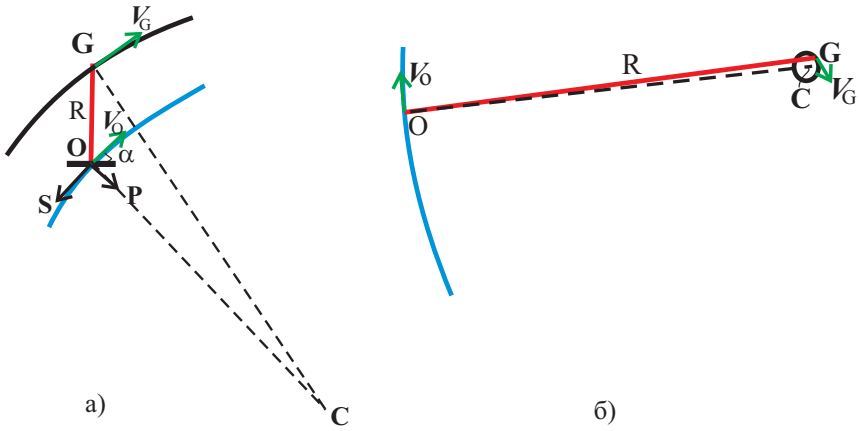


Рис. 2. Режимы торможения: а) «парашютного» типа, б) типа «кувыркания».

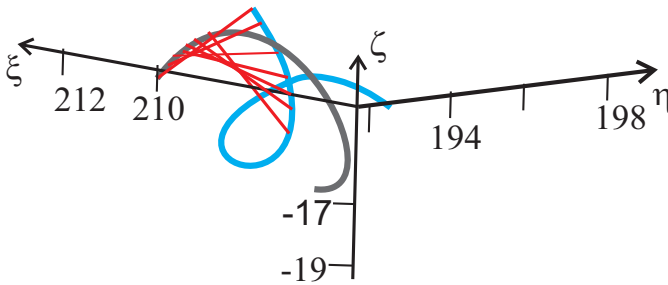


Рис. 3. Винтовое торможение.

Точка O центра лопасти движется по винтовой линии синего цвета, центр масс G — по винтовой линии черного цвета. Прямая, которая соединяет оба центра, — красного цвета ($OG = R$).

Таким образом, для тела конкретной формы показано существование установившихся вращательных движений при торможении в сопротивляющейся среде.

Литература

- [1] Садовничий В. А., Локшин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А. К вопросу о моделировании полета болидов // Шестой международный аэрокосмический конгресс IAC'09. Пленарные и избранные доклады. 2010. С. 135–148.
- [2] Зенкин А. Н., Привалов В. А., Самсонов В. А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // Изд-во РАН. Механ. твердого тела. 1993. № 4. С. 73–78.
- [3] Локшин Б. Я., Привалова О. Г., Самсонов В. А. К динамике ротошюта. М.: МГУ, 2018. 62 с.
- [4] Табачников В. Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.
- [5] Flachsbarth O. Messungen an ebenen und gewölbten Platten // Ergeb der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Gottingen // Hrsg. von L. Prandtl und A. Betz. Bd. 4. Munchen; Berlin: 1932. P. 96–100.

Оптимальное торможение в сопротивляющейся среде

Орёл Н. А.

nikita.orel@math.msu.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. В докладе рассматривается двумерная задача о торможении центра масс спускаемого летательного аппарата в сопротивляющейся среде. Считается, что массовый расход топлива не влияет на динамику центра масс. Управлениями в системе являются тяга и угол наклона траектории. Целью управления является минимизация квадрата конечной скорости в заданный момент окончания процесса. С использованием принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сведена к краевой. Показано, что в системе не возникает особого управления. Аналитически установлено количество переключений тяги вдоль траектории. Аналитические исследования дополнены численным решением краевой задачи.

Ключевые слова: оптимальное торможение, принцип максимума Понтрягина, особое управление.

Постановка задачи. Известны решения задач минимизации количества топлива для задач мягкой посадки при отсутствии атмосферы, например [1, 2]. В отличие от указанных исследований, рассмотрим задачу о торможении центра масс спускаемого аппарата в вертикальной плоскости в среде с сопротивлением. Примем следующие предположения:

- на аппарат действуют сила тяжести, сила тяги и сила сопротивления, причем сила тяги направлена по касательной к траектории;

- поле сил тяжести однородно;
- относительная скорость отделяющейся массы постоянна;
- расход топлива не влияет на динамику центра масс.

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = -\sin \theta - (v + u), \\ \dot{\mu} = -u, \end{cases} \quad (1)$$

где x, y — горизонтальная и вертикальная координаты центра масс, v — скорость центра масс, θ — угол наклона траектории, μ — масса топлива, u — массовый расход топлива. Точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени.

Начальные условия

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad (2)$$

Краевые условия

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \mu(T) = \mu_T. \quad (3)$$

Управлениями в системе являются $\theta(t)$ и $u(t)$, причем $0 \leq u \leq \bar{u}$.

Считаем, что конечное время T фиксировано. Цель управления — минимизировать квадрат скорости в момент окончания процесса:

$$J = v^2(T) \rightarrow \min_{u, \theta}. \quad (4)$$

Применение принципа максимума. Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [3]. Функция Понтрягина:

$$H = H_0 + H_1 u = C,$$

где

$$H_0 = \psi_x v \cos \theta + \psi_y v \sin \theta - \psi_v (\sin \theta + v), \quad H_1 = -\psi_v - \psi_\mu.$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi}_x = 0, \quad \dot{\psi}_y = 0, \quad \dot{\psi}_v = \psi_v - \psi_x \cos \theta - \psi_y \sin \theta, \quad \dot{\psi}_\mu = 0. \quad (5)$$

Условия трансверсальности

$$\psi_x(T) = a, \quad \psi_y(T) = b, \quad \psi_v(T) = -2v(T), \quad \psi_\mu(T) = d. \quad (6)$$

Из (5), (6) следует, что $\psi_x(t) = a$, $\psi_y(t) = b$, $\psi_\mu(t) = d$. Далее, условия оптимальности по управлениям u , θ :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & H_1 < 0, \\ \bar{u}, & H_1 > 0, \\ u_{\text{sing}}, & H_1 \equiv 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} < 0. \quad (7)$$

Первое условие (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \iff \psi_v = \frac{v}{\cos \theta} (b \cos \theta - a \sin \theta). \quad (8)$$

Второе условие (7) с учетом (8) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} < 0 \iff \frac{av}{\cos \theta} > 0. \quad (9)$$

При $t = T$ из (8) получим $\theta(T) = \arctg \frac{b+2}{a}$.

Подставим выражение для ψ_v в третье уравнение (5), откуда получим дифференциальное уравнение для θ :

$$\dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{av} [a + (u + 2v)(a \sin \theta - b \cos \theta)]. \quad (10)$$

Таким образом, задача оптимального управления (1)–(4) свелась к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, & x(0) = x_0, & x(T) = x_T, \\ \dot{y} = v \sin \theta, & y(0) = y_0, & y(T) = y_T, \\ \dot{v} = -\sin \theta - v - u, & v(0) = v_0, \\ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{av} [a + (u + 2v)(a \sin \theta - b \cos \theta)], & \theta(T) = \arctg \frac{b+2}{a}, \\ \dot{\mu} = -u, & \mu(0) = \mu_0, & \mu(T) = \mu_T. \end{cases} \quad (11)$$

Регулярное управление $u(t)$ определяется как

$$u(t) = \begin{cases} 0, & v(b - a \operatorname{tg} \theta) + d > 0, \\ \bar{u}, & v(b - a \operatorname{tg} \theta) + d < 0. \end{cases}$$

Особое управление. Рассмотрим случай наличия особого управления, т. е. $H_1(t) \equiv 0$ при $t \in [t_1, t_2] \subset [0, T]$. Вычислим производные \dot{H}_1 и \ddot{H}_1 в

силу систем (1) и (5), а также с учетом $H_1 \equiv 0$

$$H_1 \equiv 0 \iff -\dot{\psi}_v - \dot{\psi}_\mu \equiv 0 \iff \frac{v}{\cos \theta} (a \sin \theta - b \cos \theta) = d.$$

В силу интеграла $H \equiv C$ и $H_1 \equiv 0$ получим $H_0 \equiv C$, тогда, с учетом (8)

$$H_0 \equiv C \iff v (a \cos \theta + b \sin \theta) - \frac{v}{\cos \theta} (b \cos \theta - a \sin \theta) (\sin \theta + v) = C.$$

$$\dot{H}_1 \equiv 0 \iff -\dot{\psi}_v \equiv 0 \iff a \cos \theta + b \sin \theta - \frac{v}{\cos \theta} (b \cos \theta - a \sin \theta) = 0. \quad (12)$$

Уравнение для θ с учетом (12) можно переписать в виде

$$\dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{av} (\sin \theta + u + v) (a \sin \theta - b \cos \theta).$$

Находим \ddot{H}_1 в силу (1), (5), а также (12):

$$\ddot{H}_1 \equiv 0 \iff -\frac{\cos \theta}{av} (\sin \theta + u + v) (a \sin \theta - b \cos \theta)^2 \equiv 0. \quad (13)$$

Далее, из (13) с учетом (12) находим выражение для особого управления u_{sing} :

$$u_{\text{sing}} = -\sin \theta - v. \quad (14)$$

Условие Келли оптимальности особого управления [4]:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2 H_1}{dt^2} \right) \geq 0 \iff \frac{\cos \theta (a \sin \theta - b \cos \theta)^2}{av} \leq 0. \quad (15)$$

Из (9) следует, что условие Келли (15) не выполняется, значит особое управление не может быть оптимальным.

Количество переключений тяги. Рассмотрим уравнение линии переключения $v (b - a \operatorname{tg} \theta) + d = 0$ и первый интеграл $H = C$:

$$\begin{cases} v (a \cos \theta + b \sin \theta) - v (\sin \theta + v) (b - a \operatorname{tg} \theta) = C, \\ v (b - a \operatorname{tg} \theta) + d = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Выражая из первого уравнения (16) v и подставляя во второе, получим уравнение, которое с помощью замены $\xi = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, $-1 \leq \xi \leq 0$ сводится к квадратному

$$\xi^2 (ad - d^2 - bC) - 2aC\xi + ad + d^2 + bC = 0. \quad (17)$$

Таким образом, в системе может быть не более двух переключений тяги u . Условия оптимальности могут удовлетворять следующие программы тяги:

$$0 - \bar{u} - 0; \quad \bar{u} - 0 - \bar{u}; \quad \bar{u} - 0; \quad 0 - \bar{u}; \quad 0; \quad \bar{u}.$$

Литература

- [1] Meditch J. On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing // IEEE Transactions on Automatic Control. 1964. Vol. 9. No. 4. P. 477–484.
- [2] Topcu U., Casoliva J., Mease K. D. Minimum-fuel powered descent for mars pinpoint landing // Journal of Spacecraft and Rockets. 2007. Vol. 44. No. 2. P. 324–331.
- [3] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
- [4] Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals, Topics in Optimization, G. Leitmann, ed. 1967.

Вычислительное моделирование высокоскоростного удара в преграду из сфер, опирающихся на тонкую алюминиевую пластину

Петров Т. А.

st123067@student.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Построена вычислительная модель высокоскоростного удара в преграду из сфер, опирающихся на тонкую алюминиевую пластину. Выявлено, что такой случай защиты при помощи алюминиевых сфер весьма опасен, т. к. формирует массивную центральную струю облака, которая будет опасна для второго экрана щита Уиппла.

Ключевые слова: щит Уиппла, высокоскоростной удар, метод сглаженных частиц, метод SPH, модель материала Джонсона–Кука.

Введение. Проблема защиты космических аппаратов (КА) от микрометеороидов весьма актуальна. Ключевой способ защиты КА — применение щита Уиппла, который представляет собой пару: первый, принимающий микрометеороид экран, и второй, останавливающий облако осколков, сформировавшееся после удара в первый. В некоторых случаях сложные системы защиты могут сформировать такое облако осколков, что оно не увеличивается в объеме со временем, а наоборот концентрируется на оси удара.

Построение вычислительной модели. Чтобы изучить такие явления, ставилась следующая задача: сферический ударник с начальной скоро-

стью $V = 4190$ м/с, заданный из алюминиевого сплава AL1100 ударял в сложную преграду, заданную из алюминиевого сплава AL6061-T6. Такая преграда представляла собой 4 алюминиевых сферы, заданные из указанного сплава, и алюминиевую подложку толщиной 1 мм (также, из сплава AL6061-T6). Кроме этого, вся преграда опиралась на неподвижно закрепленное кольцо (рисунок 1). Постановка задачи проводилась в препроцессоре Ls-Pre-Post. Решатель выбирался из под ANSYS. Параметры в задаче (параметры модели материала, параметры уравнения состояния) заранее были проверены на известном натурном эксперименте [1] другими авторами, так, что формы облаков осколков при вычислительном моделировании хорошо согласовывались с формами облаков осколков, которые сняли исследователи [1] при помощи лазерных тенеграмм.

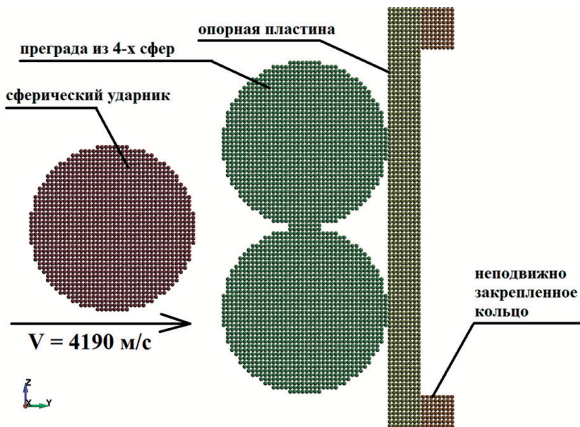


Рис. 1. Постановка задачи удара алюминиевой сферы в преграду из 4-х сфер, опирающихся на тонкую алюминиевую пластину.

Метод сглаженных частиц (Smoothed particle hydrodynamics) опирается на систему уравнений механики сплошной среды [2]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\beta}, \quad (1)$$

$$\frac{dU^\alpha}{dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}, \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{-\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (3)$$

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = U^\alpha. \quad (4)$$

В качестве модели материала алюминия и для ударника и для преграды использовалась модель в форме Джонсона-Кука.

На рисунке 2 показан 3D-вид постановки задачи. Отчетливо видно, что ударник в следующую микросекунду ударит в центр между четырьмя алю-

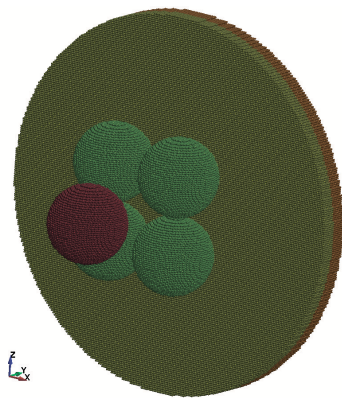


Рис. 2. 3D вид постановки задачи **small**.

миниевыми сферами. В [3] было показано, что разрушение материала, в частности алюминия, имеет локально-кинетические причины. И на более низких скоростях наблюдался веер скоростей по частицам преграды. На более высоких скоростях (как в настоящем исследовании 4 км/с) веера скоростей не наблюдается, наоборот, частицы концентрируются на оси удара, как и в исследовании [4]. В [5] были рассмотрены ударники в виде сферы, куба, цилиндра. В настоящем исследовании этот подход был перенесен на преграду. Так, что в последующих расчетах сферический ударник встречали, прежде всего, 4 куба, а в другом расчете — 4 цилиндра. При этом, массы ударника и отдельно взятого элемента преграды были равны. Во всех случаях формировалась весьма опасная для второго экрана щита Уиппла струя из частиц. Струя концентрировалась на оси удара. На рисунке 4 показан 3D-вид облака осколков. Отчетливо видна сформировавшаяся опасная струя с концентрацией частиц вдоль оси удара. Интересующийся параметрами вычислительного моделирования исследователь сможет познакомиться с ними в [5].

Закключение. Вычислительная модель высокоскоростного удара в преграду из сфер, опирающихся на тонкую алюминиевую пластину показала, что такой случай защиты при помощи алюминиевых сфер весьма опасен, т. к. фор-

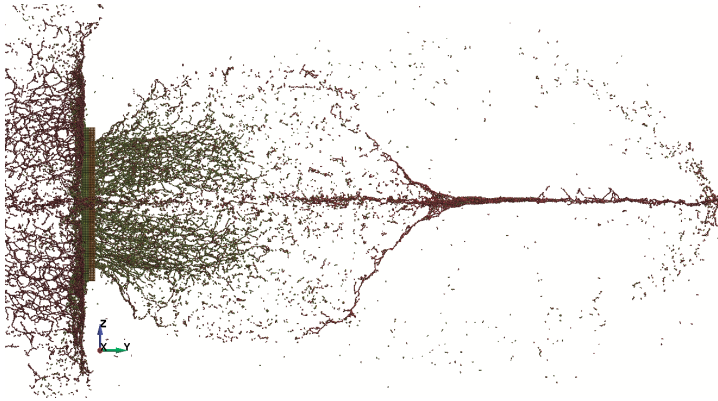


Рис. 3. Результаты вычислительного моделирования в момент $t = 24$ мкс.

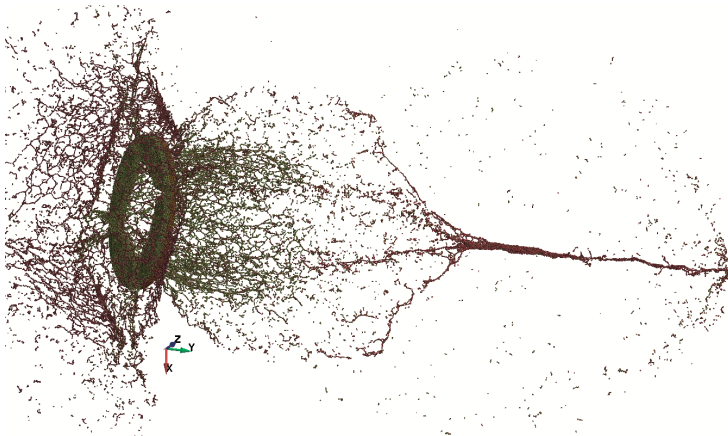


Рис. 4. Результаты вычислительного моделирования в момент $t = 24$ мкс. Показан 3D-вид облака осколков.

мирует массивную центральную струю облака, которая будет опасна для второго экрана щита Уиппла. Аналогично было показано и для других случаев: когда ударник встречали 4 куба, ударник встречали 4 цилиндра.

Литература

- [1] Ke F. et al. Test study on the performance of shielding configuration with stuffed layer under hypervelocity impact // Acta Astronautica. 2016. Vol. 127. P. 553–560. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.06.037

- [2] Liu G. R., Liu M. B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. World scientific, 2003.
- [3] Meshcheryakov Y. I., Kononov G. V., Zhigacheva N. I., Divakov A. K., Nechunaev A. F. Strain Behavior of Aluminum Alloys Under Dynamic Compression and Tensile // *Advanced Structured Materials*. 2022. Vol. 164. P. 413–453.
- [4] Nechunaev A. F., Naumova N. V., Dorofeev N. P. The effect of mass collapse under hypervelocity impact of solid paraboloid into a thin screen // *Materials Physics and Mechanics*. 2023. Vol. 51. No. 4. P. 142–159.
- [5] Silnikov M. V., Guk I. V., Mikhaylin A. I., Nechunaev A. F., Rumyantsev B. V. Numerical simulation of hypervelocity impacts of variously shaped projectiles with thin bumpers // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No. 1. P. 20–29.

Dynamics of one experimental dynamic stand with a Stewart platform

Petrova V.I.

vikka97@mail.ru

St. Petersburg State University,

199034, Russian Federation, St. Petersburg, 7/9 Universitetskaya nab.

Abstract. The standard movements of one experimental dynamic stand with a loaded Stewart platform are studied in the report. The dynamic stand is used to train truck drivers. Differential motion equations are composed in dimensional form. The equations are constructed using two different methods. The first method is based on the use of two basic theorems of dynamics – the theorem on the motion of the center of mass of the studied mechanical system and the theorem on the change in the main moment of the amount of motion of the system in its relative motion relative to the center of mass. Lagrange equations of the second kind with multipliers are used in the second method. The stable motion of the mechanical system with a Stewart platform can be obtained by the introduction of feedbacks.

Keywords: dynamic stand, Stewart platform, Lagrange equations, feedbacks.

Introduction. Dynamic simulation stands have become widespread for training aircraft pilots and drivers of various vehicles. An integral part of such stands is the Stewart platform, driven by six rods of variable length, for example, hydraulic cylinders. The report examines the formation of stable standard movements of a loaded stand platform. The results of some calculations of the movement of the Stewart platform loaded with a truck cabin are presented.

Mathematical model of a Stewart platform. Let $O_1\xi\eta\zeta$ be a fixed coordinate system connected to the base of the stand, $Ox_oy_oz_o$ be a coordinate system rigidly connected to the movable platform of the stand, $Cxyz$ be a system starting at the center of mass of the mobile loaded platform, its axes are directed

along the main central axes of inertia of the mechanical system consisting of the solid under consideration located on the stand platform (Fig. 1).

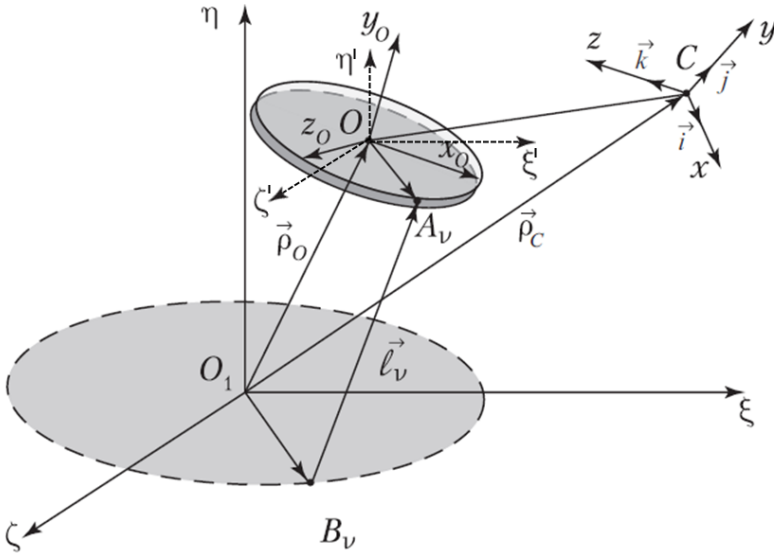


Fig. 1 Mathematical model of a Stewart platform.

The gravity of the entire system $M\mathbf{g}$ and six forces \mathbf{F}_ν , $\nu = \overline{1,6}$, acting on the platform from the side of the hydraulic cylinder rods are applied to this mechanical system. The forces of inertia of the rotational motion of hydraulic cylinders and the moments of friction forces in the ball joints of hydraulic cylinders can be neglected, and therefore it can be assumed that the forces \mathbf{F}_ν , $\nu = \overline{1,6}$, act in the directions of the vectors ℓ_ν , $\nu = \overline{1,6}$ defining the upper ends of the rods A_ν , $\nu = \overline{1,6}$.

Motion equations. The report presents two methods for composing equations of motion for a dynamic simulation stand.

The classical theorems of theoretical mechanics are used in the first method. They are the theorem on the motion of the center of mass and the theorem on the change in the main moment of the amount of motion of the system in its relative motion relative to the center of mass [1].

The second method involves using the vector form of Lagrange equations of the second kind with multipliers, presented in [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\rho}} &= \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}}, & \varkappa &= \overline{1, 6}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{i}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{i}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{i}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + 2\Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_4 \mathbf{j} + \Lambda_6 \mathbf{k}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{j}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{j}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{j}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + 2\Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_5 \mathbf{k} + \Lambda_4 \mathbf{i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{k}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{k}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{k}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + 2\Lambda_3 \mathbf{k} + \Lambda_6 \mathbf{i} + \Lambda_5 \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}} &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, & \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} &= \sum_{\nu} x_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} &= \sum_{\nu} y_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, & \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} &= \sum_{\nu} z_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}. \end{aligned}$$

According to the second method, the movement of the platform is determined by the vector functions $\boldsymbol{\rho}_c(t)$, $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{j}(t)$, $\mathbf{k}(t)$, where $\boldsymbol{\rho}_c = \overrightarrow{O_1 C}$ is the radius vector of the center of mass of the loaded stand platform, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} are the unit vectors of the system $Cxyz$. In this case, the role of abstract constraints is played by the orthonormality conditions of the unit vectors \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} of the associated coordinate system $Cxyz$:

$$\begin{aligned} f^1 &= \mathbf{i}^2 - 1 = 0, & f^4 &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \\ f^2 &= \mathbf{j}^2 - 1 = 0, & f^5 &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ f^3 &= \mathbf{k}^2 - 1 = 0, & f^6 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

After excluding Lagrange multipliers Λ_{\varkappa} , $\varkappa = \overline{1, 6}$, from the vector system of differential equations (1) using expressions (2), the following system of differential motion equations is obtained:

$$\begin{aligned} M\ddot{\boldsymbol{\rho}} &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}, \\ \ddot{\mathbf{i}} &= -\dot{\mathbf{i}}^2 \mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_x + I_y} (\dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}}) \mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_z + I_x} (\dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}}) \mathbf{k} + \frac{L_z}{I_x + I_y} \mathbf{j} - \frac{L_y}{I_z + I_x} \mathbf{k}, \\ \ddot{\mathbf{j}} &= -\dot{\mathbf{j}}^2 \mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_y + I_z} (\dot{\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{k}}) \mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_x + I_y} (\dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}}) \mathbf{i} + \frac{L_x}{I_y + I_z} \mathbf{k} - \frac{L_z}{I_x + I_y} \mathbf{i}, \\ \ddot{\mathbf{k}} &= -\dot{\mathbf{k}}^2 \mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_z + I_x} (\dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}}) \mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_y + I_z} (\dot{\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{k}}) \mathbf{j} + \frac{L_y}{I_z + I_x} \mathbf{i} - \frac{L_x}{I_y + I_z} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (3)$$

where L_x, L_y, L_z are projections of the main moment of active forces

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu} (x_{\nu} \mathbf{i} + y_{\nu} \mathbf{j} + z_{\nu} \mathbf{k}) \times \mathbf{F}_{\nu}.$$

The system (3) is used for numerical calculations by the second method.

Numerical examples. Some of the standard movements of the dynamic stand are considered in the report. The direct and inverse problems of dynamics have been solved, that is, the determination of forces in the rods of hydraulic cylinders (pneumatic cylinders) according to a given law of motion of the stand platform, and, conversely, the determination of the law of motion of the loaded stand platform according to the specified forces created by hydraulic cylinders. The numerical solution of the two derived systems of differential equations was performed using the Wolfram Mathematica package. The solutions obtained for each of these methods coincided with each other. The instability of the motion of the loaded Stewart platform is shown. Feedbacks are introduced to ensure steady movement.

References

- [1] Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. Rational and Applied Mechanics: Volume 1. Complete General Course for Students of Engineering. 2021. doi: 10.1007/978-3-030-64061-3
- [2] Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. Rational and Applied Mechanics: Volume 2. Special Problems and Applications. 2021. doi: 10.1007/978-3-030-64118-4
- [3] Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. A special form of equations of the dynamics of a system of solid bodies // Dokl. Math. 1989. Vol. 34. No. 12. P. 1065–1066.

О динамике системы твердых тел с абсолютно гибкими нитями: приложения к подъемно-транспортным механизмам

*Розенблат Г.М.,¹ Яшина М.В.^{1,2,3}
gr51@mail.ru, yash-marina@yandex.ru*

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),

125319, Российская Федерация, Москва, Ленинградский пр., 64,

²Московский авиационный институт (НИУ МАИ),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

³Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),

111024, Российская Федерация, Москва, ул. Авиамоторная, 4-а

Аннотация. Исследуются системы твердых тел, соединенные нитями. Такие конструкции имеют приложения в подъемно-транспортных механизмах, относящихся к грузоподъемным машинам с лебедками и кранами, а также в транспортирующих машинах, например, канатных дорогах, патерностерах, багажных каруселях и т. п. Базовой моделью в таких приложениях является маятник Максвелла, для которого возникает задача определения причин и источников рывков, которые происходят в системе при изменении направления движения тела маятника вдоль нити в самом нижнем его положении. Следующей задачей, важной для моделирования систем твердых тел с нитями, является задача о движении дифференциального блока под действием силы тяжести груза, укрепленного на нерастяжимых нитях, по горизонтальной плоскости. Также рассматривается задача о динамике блока, подвешенного на нити, по наклонной плоскости. Исследуется решение задачи, представленное Д. Джеллеттом. Формулируются общие принципы исследования динамики систем данного типа, представлены численно-аналитические решения и исследования устойчивости в зависимости от базовых параметров.

Ключевые слова: абсолютно гибкая нить, устойчивость, маятник Максвелла, задача о дифференциальном блоке, задача Джеллетта, неустойчивость, удар, некорректность по Адамару.

Введение. Интерес представляют системы, в которых твердотельные массы соединяются нитями и приводятся в движение силами гравитации. Предполагаем, что нити являются невесомыми и нерастяжимыми, т. е. абсолютно гибкими однопараметрическими кривыми. Такие конструкции имеют приложения в подъемно-транспортных механизмах, относящиеся к грузоподъемным машинам с лебедками и кранами, а также к транспортирующим машинам, например, канатным дорогам, патерностерам, багажным каруселям и т. п. В работе выделены три основные теоретические задачи, порождающие при некоторых условиях неустойчивую динамику.

Маятник Максвелла. Маятник Максвелла представляет собой систему (рис. 1), состоящую из уравновешенного твердого тела вращения (например, цилиндрическая катушка — тело маятника) с намотанными на его оси невесомыми, нерастяжимыми нитями конечной длины [1]. Исследованию ка-

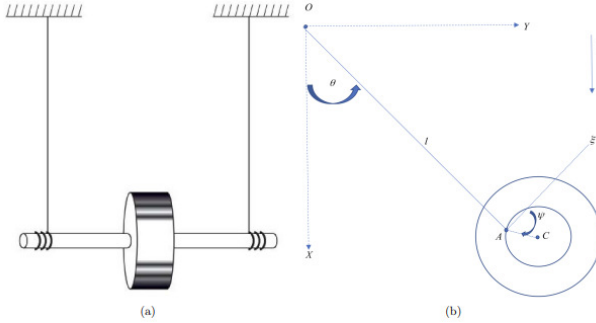


Рис. 1. Маятник Максвелла.

чественных свойств динамики такой системы посвящены работы [2]–[7], при этом описаны рывки, которые передаются телом подвеса и нитям маятника Максвелла при изменении направления движения тела вдоль нити. При этом утверждается ударный характер в движении маятника, когда движение тела вниз сменяется его движением вверх. Однако причины и источники этих рывков и ударов не были установлены. В докладе приведены исследования, которые объясняют причины этих явлений и выявляют неустойчивые режимы движений.

Нити подвешиваются на горизонтальном подвесе так, чтобы ось симметрии (вращения) тела маятника всегда располагалась строго горизонтально. Кроме того, предполагается, что центр масс тела лежит на этой оси симметрии и всегда находится на постоянном расстоянии r от нити (r — радиус оси тела маятника). Конструкция движется в поле силы тяжести. Тело маятника опускается или поднимается вдоль нитей при их раскручивании (закручивании). Движение при этом может быть организовано так, что оно является плоскопараллельным, т. е. происходит параллельно некоторой неподвижной вертикальной плоскости, перпендикулярной оси тела маятника. Кроме того, допускаются колебательные движения нитей, которые происходят параллельно указанной выше вертикальной плоскости. Формализация задачи для понимания возникновения эффектов удара представлена в [8]. Развитие и продолжение этой работы в направлении достаточно полного анализа этих явлений и выявления неустойчивых режимов сделан в [9].

Дифференциальный блок. Дифференциальный блок [10], из состояния покоя начинает движение под действием силы тяжести от укрепленного на невесомых нерастяжимых нитях груза (рис. 2). Блок катится по го-

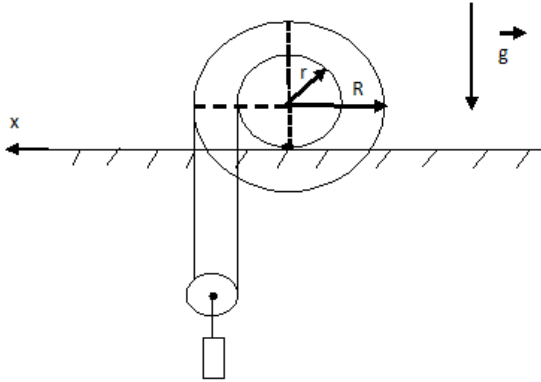


Рис. 2. Дифференциальный блок с подвесом на горизонтальной плоскости.

ризонтовой направляющей x без проскальзывания. Нити в начальный момент вертикальны. Определить движение системы (в частности, установившееся движение). Известны величины R, r — радиусы блока, M — масса блока, m — масса груза, ρ — центральный радиус инерции блока. Тогда система описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{cases} r\ddot{\varphi} \sin \alpha + L\ddot{\alpha} + r(\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\alpha}) &= g \cos \alpha, \\ r\ddot{\varphi} \cos \alpha - r\ddot{\varphi} + L\dot{\alpha}^2 \frac{M(\rho^2 + r^2)}{r_1 - r \cos \alpha} \ddot{\varphi} &= -g \sin \alpha. \end{cases}$$

Задача Джеллетта. Сформулированная в трактате [11] так называемая задача Джеллетта представляет собой движение цилиндра с привязанным к нему грузом на наклонной плоскости. Полагаем, что на шероховатой наклонной плоскости (рис. 3), с коэффициентом трения μ , находится цилиндр с привязанным к нему на вертикальной, нерастяжимой и невесомой нити грузом. Требуется определить при заданных значениях параметров условия равновесия и описать динамику системы.

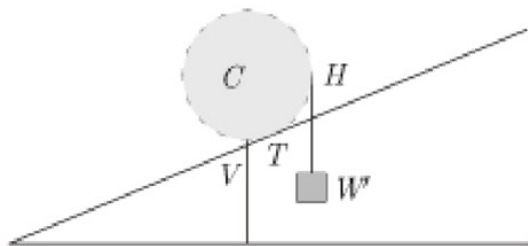


Рис. 3. Задача Джеллетта на наклонной плоскости.

Формулируются общие принципы исследования динамики систем данного типа. Представлены численно–аналитические решения и исследования устойчивости в зависимости от базовых параметров.

Литература

- [1] Боровой А., Климов Ю. Маятник Максвелла // Квант. 1981. № 11. С. 18–20.
- [2] Журавлёв В. Ф. О некорректных задачах механики // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2016. № 5. С. 36–41.
- [3] Журавлёв В. Ф., Розенблат Г. М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике / вступ. сл. академика РАН Д. М. Климова. М.: ЛЕНАНД, 2017. 240 с.
- [4] Маркеев А. П. К динамике маятника Максвелла // Доклады академии наук. 2017. Т. 473. № 6. С. 664–668.
- [5] Маркеев А. П. Об устойчивости движения маятника Максвелла // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 2. С. 207–226.
- [6] Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособие для физ. спец. вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 320 с.
- [7] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. 3-е изд., испр. и доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 576 с.
- [8] Розенблат Г. М. О неустойчивости движения маятника Максвелла // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2018. № 5. С. 61–69.
- [9] Розенблат Г. М., Яшина М. В. Численно-аналитическое исследование движения маятника Максвелла // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16. № 1. С. 123–136. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-1-123-136
- [10] Сборник задач по общему курсу физики. Под редакцией В. А. Овчинкина. В трех частях. Часть 1: МЕХАНИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. Изд. 5. М.: URSS. 2023. 560 с.
- [11] Джеллетт Дж. Х. Трактат по теории трения. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2009. 264 с.

(Jellett J.H. A treatise on the theory of friction. Dublin: Hodges, Foster and Co; London: Macmillan and Co, 1872).

О методах исследования нелинейной динамики электромагнитного бесконтактного подвеса

*Селин Н.А.*¹, *Удалов П.П.*¹, *Лукин А.В.*¹, *Попов И.А.*¹,
*Николаев И.В.*²

*selin-nikita@mail.ru, pp_udalov@mail.ru, lukin_av@spbstu.ru ,
popov_ia@spbstu.ru, PVIINikolaev@rosatom.ru*

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29,

²Centrotech Engineering LLC,
198096, Российская Федерация, Санкт-Петербург, пр. Стачек, 47

Аннотация. В работе рассматривается модель плоских движений прямоугольного кольца в электромагнитном поле двух катушек индуктивности. Проводится верификация аналитических выражений собственных и взаимных индуктивностей системы прямоугольное кольцо – катушки индуктивности с численными результатами, полученными в программных комплексах Comsol Multiphysics, Ansys Electronics. Представлен подход к исследованию нелинейной динамики электромагнитного бесконтактного подвеса вблизи положения равновесия с применением асимптотических методов.

Ключевые слова: электромагнитная индукция, навигационный прибор, электромагнитный бесконтактный подвес, гравиметр, акселерометр, конечно-элементный анализ.

Введение. Актуальность работы обусловлена научно-теоретическим и экспериментальным обоснованием методов исследования нелинейной динамики электромагнитного бесконтактного подвеса. Вопросы исследования нелинейной динамики электромагнитных (индукционных) подвесов представлены в работах [1]–[8]. Несмотря на многообразие обсуждаемых вопросов, в них не освещаются вопросы, посвященные сравнению аналитического и численных решений для проводящих контуров, произвольно расположенных в пространстве.

Чувствительная часть электромагнитного подвеса, выполненная в форме прямоугольного кольца, при воздействии на нее пандеромоторных сил в нормальном режиме эксплуатации должна находиться в состоянии устойчивого равновесия (при это наблюдается т.н. электромагнитная левитация [9]) относительно неподвижной опоры без механического контакта. Устройства, основанные на принципе электромагнитной левитации, обладают такими характеристиками, как большее время безотказной работы, долговечность, помехозащищенность [10].

В [3] рассмотрен подход к конструированию электромагнитного подвеса с чувствительным элементом, выполненным в форме диска. В [4] получены динамические уравнения левитирующего проводящего и прямоугольного в системе нескольких катушек индуктивности. В работе [10] проведен численный анализ режимов работы электромагнитного подвеса.

Основной целью данной работы является верификация аналитического и численного результатов нелинейной динамики электромагнитного подвеса с численными, полученными на основе программных комплексов Comsol Multiphysics, Ansys Electronics.

Описание конструкции электромагнитного подвеса и его основных характеристик. Устройство электромагнитного подвеса состоит из инерционной массы (ИМ), левитационной и стабилизирующей катушек. По прямоугольным катушкам протекают токи высокой частоты с варьируемыми амплитудами и фазами. Схематическое изображение электромагнитного подвеса представлено на рис. 1.

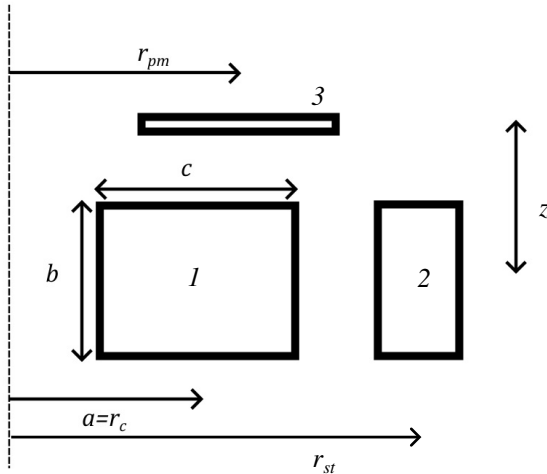


Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса. Обозначения: 1 — левитационная катушка, 2 — стабилизирующая катушка, 3 — ИМ.

Выражение для собственной индукции круглой катушки прямоугольного сечения [11] записывается как:

$$L = \frac{4\pi n^2 a^2}{0.2137a + 0.44b + 0.39c}, \quad (1)$$

где n — общее количество витков катушки, a — средний радиус, b — осевая высота, c — радиальная толщина.

Для вычисления индуктивности катушек формулой аппроксимации Калантарова собственной индуктивности катушки произвольного поперечного сечения [12]:

$$L = \mu_0 \omega^2 a \left(\ln \frac{8a}{k(b+c)} - 2 \right), \quad (2)$$

где ω — число витков катушки.

В формулировке [11] взаимная индуктивность между ними может быть описана точной формулой [10] для двух колец радиусов r_{pm} и r_c для левитационной катушки (r_{st} для стабилизирующей катушки):

$$M_{12}(\varkappa) = \mu_0 \omega_1 \omega_2 \sqrt{r_{pm} r_c} \left[\left(\frac{2}{\varkappa} - \varkappa \right) K(\varkappa) - \frac{2}{\varkappa} E(\varkappa) \right], \quad (3)$$

$$\varkappa^2(z) = \frac{4r_{pm} r_c}{(r_{pm} + r_c)^2 + z^2},$$

где $K(\varkappa)$ и $E(\varkappa)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $\varkappa(z)$ — эллиптический модуль.

Результаты. Далее приведены результат верификации собственных и взаимной индуктивностей аналитического расчета и численных расчетов в программном обеспечении Ansys electronics, COMSOL Multiphysics.

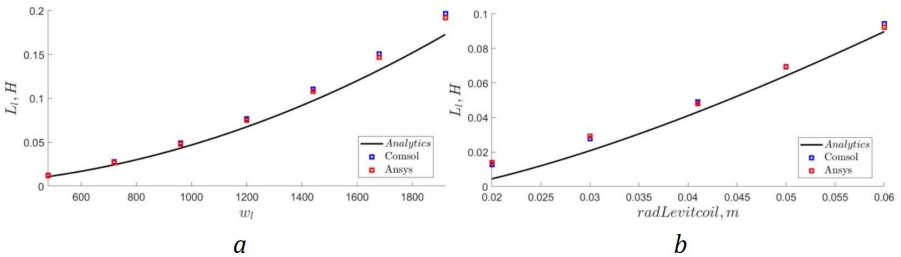


Рис. 2. Зависимость величины собственной индуктивности левитационной катушки от количества витков (a) и от среднего радиуса левитационной катушки (b).

Из рис. 3 видно, что возможно получить оптимальное расположение катушек относительно левитирующего кольца с учетом знания геометрии описанных фигур, что является производственным смыслом данной работы.

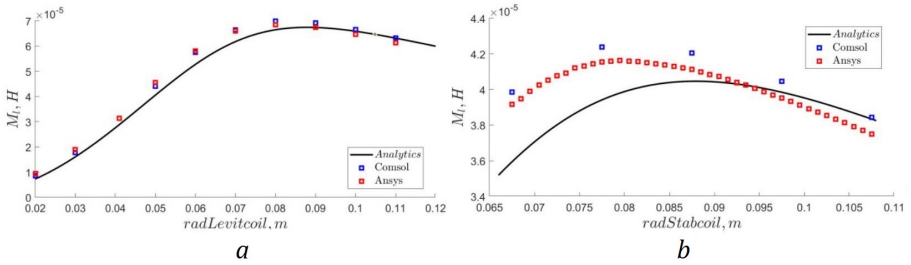


Рис. 3. Зависимость величины взаимной индуктивности левитационной катушки (а) и стабилизирующей катушки (b), инерционной массы от среднего радиуса соответствующей катушки.

Выводы. Построена модель токопроводящего кольца прямоугольного сечения в электромагнитном поле левитационной и стабилизирующей катушек. Проведена верификация результатов аналитических формул собственных и взаимных индуктивностей катушек. Представлено поведение катушки при отклонении от положения равновесия вследствие действия внешних сил.

Методы исследований базируются на методах классической механики и электродинамики, теории колебаний динамических систем, на методе конечных элементов.

Литература

- [1] Воронков В. С., Поздеев О. Д., Сандалов В. М. О динамике магнитного подвеса // Изв. вузов. Электромеханика. 1974. № 10. С. 1082–1089.
- [2] Воробьев А. Н., Воронков В. С., Денисов Г. Г., Комаров В. Н., Линьков Р. В., Привер Л. С. Основные результаты исследований неконтактных подвесов и их применения в гироскопии и прецизионном приборостроении // Гироскопия и навигация. 1996. № 4. С. 19–32.
- [3] Poletkin K. V. et al. Micromachined inductive contactless suspension: Technology and modeling // Magnetic Sensors and Devices. CRC Press, 2017. P. 101–132.
- [4] Удалов П. П., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В., Полеткин К. В. Статическая устойчивость проводящего кольца в электромагнитном поле двух катушек индуктивности // Журнал технической физики. 1993. Выпуск 4. С. 145.
- [5] Воробьев В. М., Воробьев-Обухов А. В., Поздеев О. Д. Магнитный подвес тела с ферромагнитным диском // Приборы и техника эксперимента. 1976. № 5. С. 245–247.
- [6] Beams J. W. High rotational speeds // Journal of Applied Physics. 1937. Vol. 8. No. 12. P. 795–806.

- [7] Beams J. W. et al. Magnetic suspension balance // Review of Scientific Instruments. 1955. Vol. 26. No. 12. P. 1181–1185.
- [8] Braubek W. Freischwebende Körper im elektrischen und magnetischen Feld // Zeitschrift für Physik. 1939. Vol. 112. No. 11. P. 753–763.
- [9] Максвелл Д. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Рипол Классик, 1989.
- [10] Poletkin K. Levitation micro-systems: Applications to sensors and actuators. Springer Nature, 2020.
- [11] Rosa E. B., Grover F. W. Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. US Government Printing Office, 1948. No. 169.
- [12] Калантаров П. Л. Расчёт индуктивностей. 1986.

Оптимизация демпфирования колебаний автомобиля

Смирнов А. С.,^{1,2} Морозов Д. В.¹

smirnov.alexey.1994@gmail.com, dmorozov885@gmail.com

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

²Институт проблем машиноведения Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Аннотация. В статье рассматривается задача оптимизации пассивного гашения свободных вертикальных колебаний автомобиля как системы с двумя степенями свободы при помощи демпферов вязкого трения. Предполагается, что коэффициенты демпфирования пропорциональны жесткостям задней и передней подвесок автомобиля, в результате чего формы колебаний диссипативной системы не зависят от демпфирования и совпадают с формами колебаний консервативной системы. В качестве критерия оптимизации принимается максимизация степени устойчивости. Проводится анализ корней характеристического уравнения системы и на основе указанного критерия находится оптимальное значение ключевого диссипативного параметра задачи.

Ключевые слова: колебания автомобиля, частоты колебаний, оптимизация демпфирования, характеристическое уравнение, степень устойчивости.

Введение. Задача о малых свободных вертикальных колебаниях автомобиля является одной из наиболее интересных и нетривиальных задач теории механических колебаний, и она представлена во многих трудах, в которых отмечаются ее основные особенности [1, 2, 3]. При этом зачастую рассматривается лишь консервативная модель данной системы и определяются собственные частоты и формы ее колебаний. Тем не менее, немалый практический интерес представляет учет диссипативных сил вязкого трения при колебаниях этой системы и их влияние на процесс подавления свободных колебаний. На этом пути

естественным образом возникает задача оптимизации параметров пассивного гашения колебаний автомобиля, имеющая важное прикладное значение.

В силу сказанного, в настоящей работе ставится и решается задача о нахождении оптимальных коэффициентов демпфирования, обеспечивающих наиболее эффективное затухание свободных колебаний автомобиля в соответствии с критерием, основанным на максимизации степени устойчивости системы.

Постановка задачи и результаты. Перейдем теперь к обсуждению расчетной схемы автомобиля [4]. Полагаем, что жесткости задней и передней подвесок равны c_1 и c_2 , а центр масс автомобиля расположен на расстояниях l_1 и l_2 от задней и передней опор. Обозначим за m массу кузова, а его момент инерции относительно поперечной оси, проходящей через центр масс, обозначим за $J = mr^2$, где r — радиус инерции. При этом деформации самого кузова принимаются пренебрежимо малыми по сравнению с осадками опор, поэтому стержень, моделирующий кузов, можно трактовать как абсолютно жесткий. Помимо этого, исключаем из рассмотрения горизонтальные колебания автомобиля. Наконец, считаем, что в подвесках имеется вязкое трение с коэффициентами демпфирования b_1 и b_2 . Упрощенная расчетная схема автомобиля приведена на рис. 1.

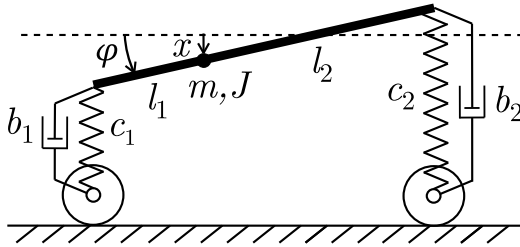


Рис. 1. Расчетная схема автомобиля.

Эта система обладает двумя степенями свободы, и за обобщенные координаты примем вертикальное смещение центра масс x (положительное направление вниз) и угол поворота φ стержня вокруг центра масс (положительное направление против часовой стрелки). Квадратичные аппроксимации кинетической энергии T , потенциальной энергии Π и диссипативной функции R есть [1]:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 l_1 - c_2 l_2 \\ c_1 l_1 - c_2 l_2 & c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & b_1 l_1 - b_2 l_2 \\ b_1 l_1 - b_2 l_2 & b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2 \end{bmatrix}.$$

Как известно, в рамках консервативной модели частотное уравнение есть $\det(\mathbf{C} - k^2\mathbf{A}) = 0$, и из него определяются частоты колебаний автомобиля [3]:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{mr^2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{m} - \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{mr^2} \right)^2 + 4 \frac{(c_1 l_1 - c_2 l_2)^2}{m^2 r^2}} \right], \quad (2)$$

причем в общем случае $k_1 < k_2$. Отметим, что случай кратных частот $k_1 = k_2$ реализуется, если одновременно выполнены условия $c_1 l_1 = c_2 l_2$ и $r^2 = l_1 l_2$ [1]. Формы колебаний в наиболее интересных частных случаях были найдены в [4].

Переходя к диссипативной модели, положим коэффициенты демпфирования b_1 и b_2 пропорциональными соответствующим жесткостям c_1 и c_2 , т. е. примем $b_1 = \gamma c_1$ и $b_2 = \gamma c_2$. Тогда $\mathbf{B} = \gamma \mathbf{C}$, т. е. будет реализоваться случай пропорционального демпфирования, при котором формы колебаний не нарушаются диссипативными силами и остаются такими же, как и в консервативной системе [5]. Это позволяет подавлять колебания автомобиля по его собственным формам, представляющим его естественные движения, не искажая их общего характера, а лишь убавляя амплитуды каждой из форм. Записывая характеристическое уравнение $\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0$ и учитывая, что $\mathbf{B} = \gamma \mathbf{C}$, нетрудно понять, что его корни связаны с частотами консервативной модели k_1 и k_2 , удовлетворяющими уравнению $\det(\mathbf{C} - k^2\mathbf{A}) = 0$, следующим образом:

$$\lambda^2 + \gamma k_1^2 \lambda + k_1^2 = 0, \quad \lambda^2 + \gamma k_2^2 \lambda + k_2^2 = 0, \quad (3)$$

и полагая для удобства $\gamma = 2n$, после решения уравнений (3) находим:

$$\lambda_{1,2} = k_1 \left(-nk_1 \pm \sqrt{n^2 k_1^2 - 1} \right), \quad \lambda_{3,4} = k_2 \left(-nk_2 \pm \sqrt{n^2 k_2^2 - 1} \right). \quad (4)$$

В качестве критерия оптимизации примем максимизацию степени устойчивости системы, под которой понимается модуль вещественной части корня характеристического уравнения, лежащего наиболее близко к мнимой оси [6]. Ясно, что корни $\lambda_{1,2}$ являются комплексно-сопряженными, если $n < n_1 = 1/k_1$, и при этом $|\operatorname{Re}\lambda_{1,2}| = nk_1^2$, а корни $\lambda_{3,4}$ являются комплексно-сопряженными, если $n < n_2 = 1/k_2$, и при этом $|\operatorname{Re}\lambda_{3,4}| = nk_2^2$. Поскольку $k_1 < k_2$, то $n_1 > n_2$, а также $|\operatorname{Re}\lambda_{1,2}| < |\operatorname{Re}\lambda_{3,4}|$ при $n < n_2$. Легко понять, что корни $\lambda_{1,2}$ при $n > n_1$ уже будут вещественными, при этом можно записать следующие выражения:

$$|\operatorname{Re}\lambda_1| = k_1^2 \left(n + \sqrt{n^2 - 1/k_1^2} \right), \quad |\operatorname{Re}\lambda_2| = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1/k_1^2}}, \quad (5)$$

а корни $\lambda_{3,4}$ являются вещественными при $n > n_2$, причем имеем:

$$|\operatorname{Re} \lambda_3| = k_2^2 \left(n + \sqrt{n^2 - 1/k_2^2} \right), \quad |\operatorname{Re} \lambda_4| = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1/k_2^2}}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает, что при $n > n_1$ будет $|\operatorname{Re} \lambda_2| > |\operatorname{Re} \lambda_4|$, а $|\operatorname{Re} \lambda_1| < |\operatorname{Re} \lambda_3|$.

Эти рассуждения позволяют построить качественную картину поведения модулей вещественных частей всех четырех корней характеристического уравнения в зависимости от единственного ключевого диссипативного параметра задачи n (рис. 2). При этом сплошными линиями здесь выделены участки, от-

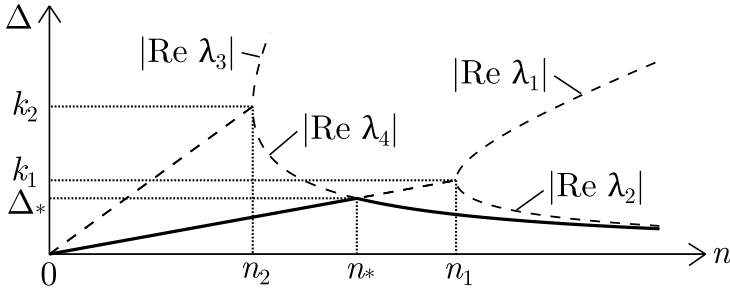


Рис. 2. График зависимости степени устойчивости Δ от параметра n .

вечающие ближайшему к мнимой оси корню, который и определяет степень устойчивости Δ в зависимости от n . Отсюда вытекает, что точка максимума степени устойчивости определяется из уравнения $nk_1^2 = k_2 \left(nk_2 - \sqrt{n^2 k_2^2 - 1} \right)$, а потому оптимальное значение n_* и отвечающее ему значение Δ_* будут:

$$n_* = \frac{k_2}{k_1 \sqrt{2k_2^2 - k_1^2}}, \quad \Delta_* = \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2k_2^2 - k_1^2}}, \quad (7)$$

и, конечно, $n_2 < n_* < n_1$. Тогда оптимальные значения параметров b_1 и b_2 будут равны $b_{1*} = 2n_* c_1$ и $b_{2*} = 2n_* c_2$. Отметим, что при рассуждениях, предшествующих нахождению значения n_* , конкретные значения частот k_1 и k_2 из (2) не использовались, а учитывалось лишь, что $k_1 < k_2$. Поэтому приведенные рассуждения справедливы не только для задачи о колебаниях автомобиля, но и для любой другой задачи с двумя степенями свободы, где матрица \mathbf{B} строится пропорционально матрице \mathbf{C} . Наконец, в случае кратных частот $k_1 = k_2$ уравнения (3) становятся идентичными, а поставленная задача фактически сводится к задаче оптимизации демпфирования колебаний одностепенной системы [6], для которой $n_* = n_1 = n_2$, $\Delta_* = k_1 = k_2$, как это вытекает и из формул (7).

Заключение. В данной работе была рассмотрена задача об оптимальном подавлении свободных колебаний автомобиля путем введения в систему сил вязкого трения с коэффициентами демпфирования, пропорциональными жесткостям подвесок. На основе критерия, связанного с максимизацией степени устойчивости, были найдены оптимальные значения этих коэффициентов. Полученные результаты представляют теоретический и практический интерес, а также допускают обобщение на случай произвольной двухстепенной системы.

Литература

- [1] Исполов Ю. Г. Краткое руководство к решению задач по аналитической механике. Л.: изд-во ЛПИ им. М.И. Калинина, 1972. 118 с.
- [2] Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1979. 544 с.
- [3] Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний. М.: Высшая школа, 1973. 546 с.
- [4] Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.
- [5] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- [6] Смольников Б. А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.

Задача о брахистохроне с ограничениями на угол наклона траектории и силой тяги

Смирнова Н.В.

nina.smirnova247@yandex.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Рассмотрена задача максимизации горизонтальной координаты точечной массы, движущейся в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, вязкого трения, силы реакции кривой и тяги. Предполагается, что на угол наклона траектории наложены ограничения типа неравенства. Система уравнений принадлежит к определенному типу, позволяющему свести задачу оптимального управления с ограничениями на фазовую переменную к задаче оптимального управления с ограничениями на управление. В результате определяется последовательность и количество включений фазовых ограничений в оптимальную траекторию и строится синтез оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальный синтез, брахистохрона, фазовые ограничения, принцип максимума Понтрягина, краевая задача.

В научной литературе известны постановки задачи о брахистохроне без трения при наличии фазовых ограничений. В работе [1] рассматривались ограничения на угол наклона траектории, в [2, 3] — ограничения типа неравенств на координаты. При этом учет фазовых ограничений производился при помощи численных процедур.

В [4] и [5] была рассмотрена задача максимизации дальности и минимизации затрат на управление тягой без учета фазовых ограничений. В [6] изучена задача максимизации дальности при наличии фазовых ограничений на угол наклона траектории, но без учета силы тяги. В данной работе исследуется обобщение задачи [4] на случай фазовых ограничений определенного вида с использованием подхода, предложенного в [6]. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = -v - \sin \theta + p, \\ \dot{\theta} = u - \frac{\cos \theta}{v}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x, y — горизонтальная и вертикальная координаты точки соответственно, v — скорость точки, θ — угол между вектором скорости и горизонтальной осью, называемый углом наклона траектории, на который наложим фазовое ограничение вида $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1, θ_2 — заданные константы, $u = N/mv$, где N — нормальная составляющая силы реакции опоры, m — масса; p — тяга, $p \in [0, \bar{p}]$, $\bar{p} = \text{const}$. Переменные u, p рассматриваются в качестве управлений.

Начальные условия системы (1) имеют вид:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2)$$

Функционал имеет вид:

$$J = -x(T) + \int_0^T p^2 dt \rightarrow \min_{\theta, p}. \quad (3)$$

Переходя к редуцированной системе с управлением θ , получаем регулярную оптимальную задачу с ограничениями на управление. С помощью принципа

максимума задача оптимального управления сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = -v + p_* - \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} (1 + (2v - p_*) \sin \theta), \end{cases} \quad (4)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad \theta(T) = 0, \quad (5)$$

$$p_* = \begin{cases} \bar{p}, & p_0 > \bar{p}, \\ 0, & p_0 < 0, \\ p_0, & p_0 \in [0, \bar{p}], \end{cases} \quad (6)$$

где

$$p_0 = \frac{\psi_v}{2} = \frac{-v \tan \theta}{2}.$$

Далее с помощью анализа краевой задачи (4), (5) строится экстремальное управление углом наклона траектории.

Оптимальное управление $\theta(t)$ в задаче (1)–(3) в случае $\theta_2 \leq 0$ имеет одну из следующих структур:

1. $\theta(t) = \theta_*(t)$,
2. $\theta(t) = \theta_2$,
3. $\theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t)$,
4. $\theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_2$,
5. $\theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_2$,
6. $\theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t)$,
7. $\theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_2$,
8. $\theta(t) = \theta_2, \quad \theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_2$,

а в случае $\theta_2 > 0$ одну из следующих структур:

9. $\theta(t) = \theta_*(t)$,
10. $\theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t)$,
11. $\theta(t) = \theta_*(t), \quad \theta(t) = \theta_1, \quad \theta(t) = \theta_*(t)$,

где θ_* — решение краевой задачи (4), (5).

Далее устанавливается характер движения в плоскости (x, y) , а так же проводится численное моделирование задачи.

Литература

- [1] Cheng R. K., Conrad D. A. Optimum translation and the brachistochrone // AIAA Journal. 1963. Vol. 1. No. 12. P. 2845–2847.

- [2] Dreyfus S. The numerical solution of variational problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1962. Vol. 5. No. 1. P. 30–45.
- [3] Fabien B.C. Numerical solution of constrained optimal control problems with parameters // Applied Mathematics and Computation. 1996. Vol. 80. No. 1. P. 43–62.
- [4] Smirnova N., Cherkasov O. Range maximization problem with a penalty on fuel consumption in the modified Brachistochrone problem // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 91. P. 581–589.
- [5] Cherkasov O., Zarodnyuk A., Smirnova N. Optimal thrust programming along the brachistochronic trajectory with non-linear drag // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2019. Vol. 20. No. 1. P. 63–68.
- [6] Cherkasov O.Y., Smirnova N.V. On the Brachistochrone problem with state constraints on the slope angle // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. Vol. 139. P. 103871.

Механика гибкой нити в жидкости

Суханов А.А.

alexeevich2012@gmail.com

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Аннотация. В работе рассматривается механика нерастяжимой гибкой нити, погруженной в жидкость. При этом учитываются правильные распределенные силы Архимеда, направленные не вертикально вверх, а нормально к оси нити. В результате получены новые уравнения равновесия, дающие ту же геометрию нити, но принципиально другое ее натяжение.

Ключевые слова: гибкая нить, цепная линия, жидкость, натяжение.

Введение. Рассмотрим классическую нерастяжимую гибкую нить, подвешенную за края на одном горизонтальном уровне (рис. 1). Под действием силы тяжести нить принимает форму, называемую цепной линией. Примерами цепных линий являются собственно цепи, тросы, кабели, провода, трубопроводы и т.п. Основными разыскиваемыми параметрами в статике гибких нитей являются стрела провисания и сила натяжения, необходимые для пространственного и прочностного расчетов.

Приведем основные соотношения гибкой нерастяжимой нити [1, 2]:

$$y = a \left(\operatorname{ch} \frac{x}{a} - 1 \right), \quad f = a \left(\operatorname{ch} \frac{L_0}{a} - 1 \right), \quad \frac{L}{a} = \operatorname{sh} \frac{L_0}{a}, \quad (1)$$

$$T = H \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad H = (q_c - q_h) a = \operatorname{Const}. \quad (2)$$

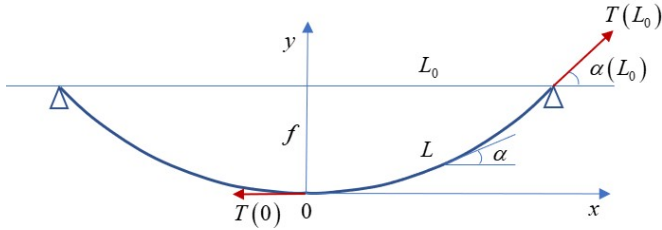


Рис. 1. Цепная линия.

Здесь L_0 — половина расстояния между опорами, L — половина длины цепной линии, f — стрела провисания, α — угол наклона нити, T — натяжение нити, H — горизонтальная составляющая натяжения нити (всегда остается постоянной), q_c — погонный вес нити в воздухе, q_h — погонный вес вытесненной жидкостной трубки, a — параметр, имеющий размерность длины, определяемый геометрией нити из формулы (1) по расстоянию между опорами и стреле провисания или по длине нити.

Приведенные зависимости предполагают, что выталкивающая сила Архимеда на любой участок нити действует так же вертикально, как и сила тяжести. К сожалению, это широко распространенная ошибка, ибо сила Архимеда далеко не всегда вертикальна и, более того, может быть направлена даже не вверх, а вниз! Это явление «залипания» на дне подводных лодок [3] и затонувших кораблей [4] хорошо известно подводникам и спасателям. Архимедова сила направлена вверх только в случае полного омывания тела жидкостью со всех сторон. Тогда поверхностная по сути сила Архимеда в соответствии с формулой Остроградского–Гаусса [5] переходит в объемную, направленную вертикально, и равную весу вытесненной жидкости. Однако, если тело или часть тела не полностью омываются жидкостью, то сила Архимеда будет уже совсем другой, не имеющей ничего общего с весом вытесненного объема жидкости.

В нашем случае подводных тросов, кабелей, трубопроводов реальная сила Архимеда будет уже не вертикальна, а нормальна к оси гибкой нити на каждом элементарном участке нити. Эта особенность подводных нитей была рассмотрена в [6]. Но до аналитических решений уравнений равновесия нити в жидкости дело тогда не дошло.

Вывод уравнений статики цепной линии в жидкости. Рассмотрим элемент гибкой нерастяжимой нити произвольного, но постоянного сечения S , погруженный в воду или любую другую жидкость с плотностью ρ_h (рис. 2). Здесь начало системы координат по-прежнему привязано к нижней точке цепной линии, x, y — координаты начала элемента нити, h — глубина погружения нити от поверхности воды до нижней ее точки, α — угол наклона

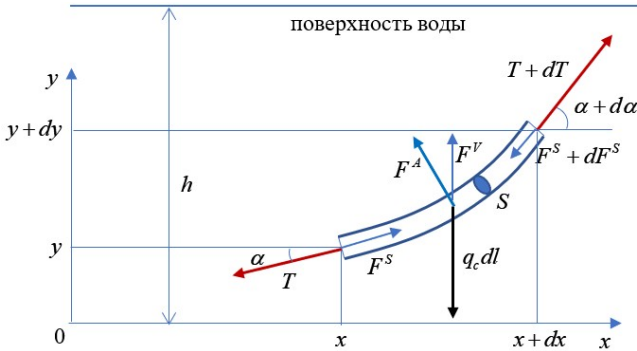


Рис. 2. Достаточно малый элемент нити в жидкости.

нити, T — натяжение нити, $q_c dl$ — вес элемента нити в воздухе, F^A — архимедова сила, действующая только на боковую поверхность нити, F^S и F^V — подразумеваемые архимедовы силы, действующие на торец нити и на весь элемент нити, если бы он полностью омывался водой, символом d обозначается бесконечно малое приращение соответствующего параметра.

Найдем выражение для боковой архимедовой силы F^A через решение обратной задачи как разность выталкивающей (объемной) силы Архимеда и торцевых сил Архимеда. Тогда ее проекции на оси координат равны

$$\begin{aligned} F_x^A &= -q_h (h - y) \cos \alpha + q_h (h - y - dy) \cos (\alpha + d\alpha), \\ F_y^A &= -q_h (h - y) \sin \alpha + q_h (h - y - dy) \sin (\alpha + d\alpha) + q_h dl, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q_h = \rho_h g S$ — погонный вес вытесненной водяной трубки.

Теперь можно написать уравнения статики равновесного положения нити в виде проекций всех сил, действующих на каждый элемент нити

$$\begin{aligned} & -T \cos \alpha + (T + dT) \cos (\alpha + d\alpha) - \\ & -q_h (h - y) \cos \alpha + q_h (h - y - dy) \cos (\alpha + d\alpha) = 0, \\ & -T \sin \alpha + (T + dT) \sin (\alpha + d\alpha) - \\ & -q_h (h - y) \sin \alpha + q_h (h - y - dy) \sin (\alpha + d\alpha) + q_h dl = q_c dl. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение первого уравнения приводит к точно такой же геометрии цепной линии, что и (1). А вот из решения второго уравнения получаем принципиально другое выражение для силы натяжения кабеля

$$T = q_c a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - q_h (h + a). \quad (5)$$

Здесь натяжение нити существенно зависит от глубины погружения h . При этом с увеличением глубины натяжение может даже поменять свой знак, т. е. из растягивающего превратиться в сжимающее!

Найдем физический смысл параметра a , входящего во все формулы. Из (1) следует, что a равно дуговой длине (возможно, мыслимой) цепной линии от нижней точки до точки с углом наклона $\alpha = 45^\circ$. При малой стреле провисания $a > L$, а при большой стреле $a < L$.

Отметим, что общепринятые силовые формулы (2) для гибкой нити, погруженной в жидкость, справедливы лишь для реальной цепочки, состоящей из отдельных звеньев, или гирлянды шарнирно соединенных элементов, для которых поверхностная сила Архимеда превращается в объемную.

Замечание. Тонкостенные трубопроводы на большой глубине в морях и океанах подвергаются большим тангенциальным сжимающим напряжениям, являющимся основным при прочностных расчетах [7]. При этом второе слагаемое в осевом натяжении трубопровода (5), пропорциональное параметру a , можеткратно увеличить возникающие напряжения при соответствующей конфигурации трубопровода, что необходимо учитывать при расчетах и строительстве подводных сооружений и коммуникаций.

Заключение

1. Подробно рассмотрена задача статики однородной тяжелой гибкой нити, погруженной в жидкость. При этом в отличие от общепринятого представления архимедовой силы как объемной и вертикально направленной, что не соответствует действительности в общем случае, используется реальная поверхностная сила Архимеда, нормальная к оси каждого участка нити.
2. Показано, что геометрия такой нити в точности совпадает с цепной линией в воздухе при той же длине и таком же закреплении.
3. Получено правильное распределение натяжения нити по ее длине, принципиально отличающееся от обычно используемого для цепной линии в воздухе с поправкой на плотность жидкости. При этом реальное натяжение может быть много больше традиционного и, более того, может даже сменить знак, превратившись из растягивающего в сжимающее. При определенных конфигурации нити и глубине ее погружения напряжение вдоль нити может даже иметь разные знаки, оставаясь в верхней части у опор растягивающим, а в окрестности нижней точки сжимающим!

Литература

- [1] Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
- [2] Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем: учеб. Пособие. СПб: Политех-Пресс, 2021. 246 с.
- [3] Платонов А. В. Подводные лодки. СПб: Полигон, 2002. 256 с.

- [4] Горз Дж. Н. Подъем затонувших кораблей. Л.: Судостроение, 1978. 352 с.
- [5] Остроградский М. В. Избранные труды. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1958. 583 с.
- [6] Хейсина В. В., Елисеев В. В., Суханов А. А. Силы, действующие на трубку в жидкости // Материалы межвузовской научной конференции. Ч.3. СПб: Изд. СПбГТУ, 1999. С. 58–59.
- [7] Павлов П. А., Паршин Л. К., Мельников Б. Е., Шерстнев В. А. Сопrotивление материалов: Учебное пособие. СПб: Лань, 2003. 528 с.

Алгоритм и программный комплекс для автоматического построения компьютерных моделей систем многих тел

Сухов Е. А., Чекина Е. А., Чекин А. М.

sukhov.george@gmail.com, chekina_ev@mail.ru, tchek@mail.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское ш., 4

Аннотация. Рассматривается задача автоматического построения компьютерных моделей систем многих тел. Для решения указанной задачи в данной работе предложен адаптивный алгоритм вывода уравнений динамики, в основе которого лежит введение в рассматриваемой системе как абсолютных, так и шарнирных координат. Указанный алгоритм реализован в виде программного комплекса, содержащего механический решатель, библиотеку связей, систему компьютерной алгебры и пользовательский интерфейс. Для верификации применяемых алгоритмов был рассмотрен ряд задач динамики твёрдого тела и произведено сравнение результатов численного моделирования с моделями, построенными в системе компьютерной алгебры Maple.

Ключевые слова: численное моделирование, виртуальное прототипирование, вычислительная механика, системы многих тел.

Введение. В настоящее время всё более широкое применение в машиностроении получают технологии виртуального прототипирования, позволяющие значительно снизить затраты на разработку новых образцов техники за счёт автоматизации проектирования и сокращения цикла натуральных испытаний. При создании виртуальных прототипов различных видов техники зачастую возникает необходимость численно моделировать движение систем многих тел, причём одной из наиболее актуальных задач является автоматическое построение их математических моделей. Вместе с тем, подобные системы нередко содержат замкнутые кинематические цепи, а также являются неголономными, что делает их компьютерное моделирование особенно сложной проблемой.

Задача компьютерного моделирования систем многих тел рассматривалась в большом количестве работ [1]-[4]. При её решении можно выделить три ос-

новых этапа: введение координат, вывод уравнений движения и их численное интегрирование. Для большинства встречающихся на практике задач последний этап сводится к решению жёсткой или плохо обусловленной задачи Коши [5], при том точность и скорость её решения зависит как от используемого численного метода, так и от метода записи уравнений движения [6]. В данной работе предлагается адаптивный алгоритм, позволяющий повысить скорость и точность моделирования за счёт комбинированного использования как шарнирных, так и абсолютных координат для записи уравнений динамики.

Вывод уравнений динамики. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твёрдых тел $M_i (i = 1 \dots b)$, движущуюся под действием внешних и внутренних активных сил и моментов. Положение тел M_i относительно абсолютной инерциальной системы отсчёта будем определять радиус-векторами их центров масс $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ и кватернионами поворота \mathbf{p}_i , которые образуют вектор-столбец абсолютных координат системы $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_b)^T$, где $\mathbf{q}_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$. Предполагается, что на тела системы могут быть наложены как голономные, так и неголономные связи вида

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0, \quad \Psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Psi_1 \dot{\mathbf{q}} + \Psi_2(\mathbf{q}). \quad (1)$$

Процедуру автоматического вывода уравнений движения начнём с построения графа механической системы, вершинами которого являются тела, а рёбрами — наложенные на них связи. В случае отсутствия в рассматриваемой системе замкнутых кинематических цепей её граф будет иметь структуру дерева.

Помимо абсолютных координат будем использовать так называемые шарнирные координаты, представляющие из себя набор локальных обобщённых координат, вводимых между телами рассматриваемой системы. В случае отсутствия замкнутых кинематических цепей шарнирные координаты образуют множество обобщённых координат. В противном случае часть шарнирных координат исключаются таким образом, что граф системы приводится к виду дерева. При выводе уравнений движения исключённым координатам будут соответствовать алгебраические уравнения связей. Использование шарнирных координат позволяет существенно сократить количество уравнений движения, однако также усложняет вычисление реакций связей, а при наличии длинных кинематических цепей приводит к громоздким символьным выражениям, затрудняющим вычисления.

После построения дерева системы в нём помечаются кинематические цепи, длина которых превосходит заранее заданный параметр, величина которого подбирается, исходя из характеристик используемой ЭВМ и особенностей задачи. Также помечаются шарниры, для которых требуется определять реакции связей. Затем для тел, входящих в помеченные цепи или связанных помечен-

ными шарнирами вводятся абсолютные координаты, а для прочих тел — шарнирные.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы будем выводить в символьном виде в форме дифференциально-алгебраических уравнений с множителями Лагранжа. В абсолютных координатах уравнения движения будут иметь следующий вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{D}^{*T} \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{g},$$

где \mathbf{M} — матрица массово-инерционных характеристик тел системы, $\mathbf{g} = g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — вектор гироскопических членов, активных сил и моментов. Слагаемые $\mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{D}^{*T} \boldsymbol{\lambda}^*$ определяют силы и моменты реакций голономных и неголономных связей, где $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^*$ — соответствующие векторы множителей Лагранжа, а матрицы \mathbf{D} и \mathbf{D}^* вычисляются в силу уравнений связей (1). Уравнения движения в шарнирных координатах выводятся в аналогичной форме при помощи процедуры, описанной в [7, 8].

На завершающем этапе моделирования уравнения движения численно интегрируются с заданными начальными условиями. В силу того, что движение рассматриваемых систем, как правило, описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями индекса 2 или 3 [5], в представленном программном комплексе используется интегратор семейства Радо (Radau-5).

Верификация. Для апробации и верификации предложенного алгоритма и его программной реализации был рассмотрен ряд механических систем разной степени сложности: твёрдое тело с неподвижной точкой, двойной сферический маятник, механизм пантографа с одной степенью свободы, а также звеньевая модель провода линии электропередачи.

На рис. 1 показаны результаты моделирования движения двойного сферического маятника в однородном поле тяжести в сравнении с моделью, построенной в ПО Maple. Указанный маятник составлен из тел M_1 и M_2 , главные центральные моменты инерции которых не равны между собой: $A_i \neq B_i \neq C_i$ ($i = 1, 2$). Оценка ошибки моделирования производилась по формуле $\max|x(t) - x_M(t)|$, где $x(t)$ и $x_M(t)$ — законы изменения самолётных углов α_i , β_i , γ_i и координат центров масс X_i , Y_i , Z_i тел M_i ($i = 1, 2$). Величина ошибки на интервале интегрирования 30 с не превысила 0.001.

Вывод. В данной работе предложен алгоритм вывода уравнений динамики систем многих тел, позволяющий повысить скорость и точность моделирования за счёт адаптивной комбинированной методики введения абсолютных и шарнирных координат. Указанный алгоритм реализован в виде программного комплекса, а также верифицирован посредством моделирования движения ряда плоских и пространственных механических систем и сравнения результатов моделями, построенными в ПО Maple.

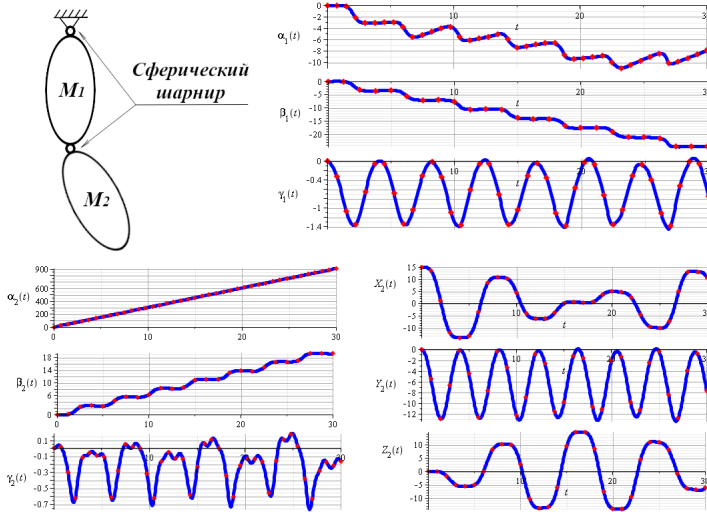


Рис. 1. Графики зависимости самолётных углов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ тел M_i ($i = 1, 2$) и координат центра масс X_2, Y_2, Z_2 тела M_2 двойного сферического маятника от времени на интервале 30 с. Синей кривой показан результат моделирования в ПО Maple, красными точками показан результат моделирования в представленном программном комплексе.

Литература

- [1] Nikravesh P. E. Computer-aided analysis of mechanical systems. New Jersey: Prentice Hall, 1988. 448 p.
- [2] Eberhard P., Schiehlen W. Computational dynamics of multibody systems: History, formalisms and applications // J. Comput. Nonlinear Dyn. 2006. Vol. 1. P. 3–12.
- [3] Погорелов Д. Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: учебное пособие. Брянск: Изд-во БГТУ, 2008. 108 с.
- [4] Flores P. Concepts and formulations for spatial multibody dynamics. Springer, 2015.
- [5] Скворцов Л. М. Численное решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. Издание второе. ДМК-Пресс, 2022. 236 с.
- [6] Bauchau O. A., Laulusa A. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems // J. Comput. Nonlinear Dyn. 2007. Vol. 3. No. 1. P. 011005.
- [7] Gim G. H., Nikravesh P. E. Joint coordinate method for analysis and design of multibody systems. Part 1. System Equations // J. of Mech. Sci. and Tech. 1993. Vol. 7. P. 14–25.

- [8] Сухов Е. А., Чекина Е. А. Программный комплекс для численного моделирования движения систем многих тел // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16. № 1. С. 161–174.

Возникновение неголономной связи высокого порядка при управлении движением механической «руки» манипулятора с использованием принципа максимума Понтрягина

Теплова Т.Ю., Юшков М.П.

st068030@student.spbu.ru, yushkovmp@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Одной из важнейших задач теории управления является нахождение оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему с конечным числом степеней свободы за указанное время из имеющегося фазового состояния в новое заданное фазовое состояние. Одним из классических методов теории управления для решения подобных задач является метод, использующий применение принципа максимума Понтрягина с минимизацией некоторого функционала. В результате находится закон изменения управляющей силы, выполняющий поставленную задачу. Очень интересным является возникновение при подобном движении неголономной связи высокого порядка.

Ключевые слова: теория управления, гашение колебаний, принцип максимума Понтрягина.

Введение. В работе рассматривается задача о переводе гибкой «руки» манипулятора за указанное время из состояния покоя в новое заданное состояние покоя. Управляющая сила была найдена с помощью применения принципа максимума Понтрягина, минимизирующего функционал от ее квадрата. Приводится серия графиков расчетов для различных значений времени движения механической системы, и дается обсуждение полученных результатов. Для дальнейшего применения обобщенного принципа Гаусса для решения поставленной задачи управления была получена неголономная связь высокого порядка.

Постановка задачи. Рассмотрим гашение колебаний гибкой «руки» манипулятора, перемещающей груз в горизонтальной плоскости Oxy (рис. 1).

Отыскивается оптимальная управляющая сила F , приложенная к массивному основанию «руки» вдоль оси Ox , переводящая механическую систему за указанное время T из начального состояния покоя в новое требуемое состояние покоя. Гибкая «рука» манипулятора в приближенной модели рассмат-

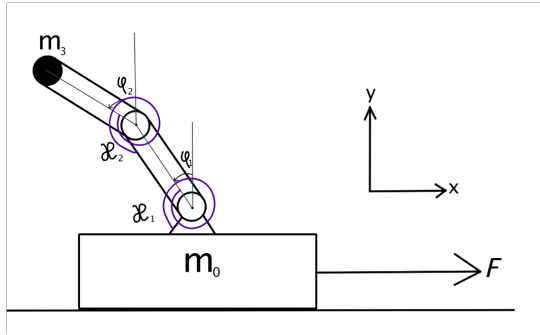


Рис. 1. Примерная модель нагруженной «руки» манипулятора, движущейся в горизонтальной плоскости Oxy .

ривается как набор двух последовательных стержней с массами m_i и длиной l_i , ($i = 1, 2$), соединенных между собой двумя спиральными пружинами с коэффициентами жесткости k_i . Считаем, что масса основания, которое надо переместить на расстояние S , равна m_0 , а переносимый груз является материальной точкой массы m_3 . Ось z направляем вертикально вверх, поэтому положительным направлением углов отклонений маятников φ_i , ($i = 1, 2$) является вращение в плоскости Oxy против часовой стрелки.

Для описания движения рассматриваемой механической системы вводится система криволинейных координат $q = (q_1, q_2, q_3)$:

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2, \quad q_3 = x. \quad (1)$$

Потребуем выполнение граничных условий (\tilde{T} — время движения, S — перемещение ползуна):

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ \varphi_1(\tilde{T}) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(\tilde{T}) = 0, \quad \varphi_2(\tilde{T}) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(\tilde{T}) = 0, \quad x(\tilde{T}) = S, \quad \dot{x}(\tilde{T}) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение поставленной задачи теории управления с помощью применения принципа максимума Понтрягина. Решая данную задачу управления с использованием принципа максимума Понтрягина [1], минимизирующего функционал от квадрата безразмерного управления, согласно предложению академика Ф.Л. Черноусько [2] (u — безразмерное

управление, T — безразмерное время движения):

$$J = \int_0^T u^2 d\tau. \quad (3)$$

В итоге был получен закон изменения безразмерной управляющей силы:

$$u(\tau) = C_1 \cos \omega_1 \tau + C_2 \sin \omega_1 \tau + C_3 \cos \omega_2 \tau + C_4 \sin \omega_2 \tau + C_5 \tau + C_6. \quad (4)$$

При построении численного решения были получены серии графиков (см. рис. 2 и рис. 3) для разного времени движения механической системы (T_2 — период колебаний, соответствующий второй безразмерной ненулевой частоте колебаний системы):

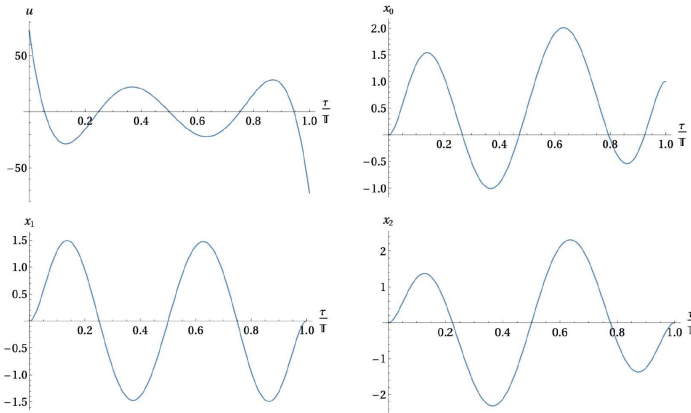


Рис. 2. Движение механической системы при $T = T_2$.

Из графиков видно, что поставленная краевая задача решена полностью, но решения, полученные этим методом, имеют два основных недостатка: во-первых, управляющая сила имеет скачки в начале и в конце движения, во-вторых, при увеличении времени движения в системе развиваются интенсивные движения, что объясняется наличием в полученном выражении для управляющей силы (4) гармоник с собственными частотами механической системы.

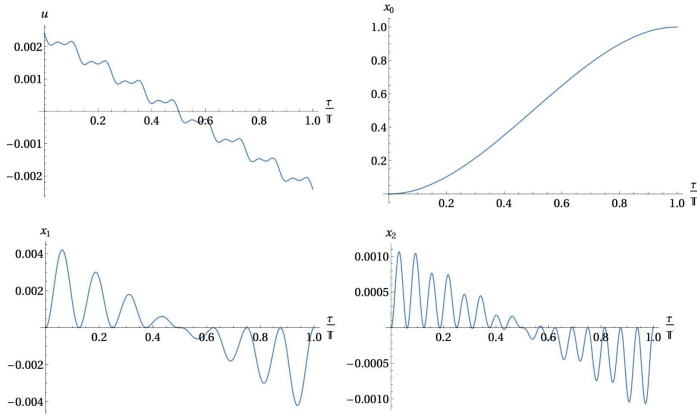


Рис. 3. Движение механической системы при $T = 16T_2$.

Связь высокого порядка. Заметим, что полученное управление (4) является решением следующего размерного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_2^2 \right) F = 0, \quad (5)$$

где Ω_1, Ω_2 — размерные ненулевые частоты системы. Подставим в уравнение (5) управляющую силу F из уравнения Лагранжа нашей механической системы:

$$M\ddot{x} - l_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) \ddot{\varphi}_1 - l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) \ddot{\varphi}_2 = F. \quad (6)$$

Тогда получим неголономную связь высокого (восьмого!) порядка:

$$\begin{aligned} (Mx^{(8)} - k_1\varphi_1^{(8)} - k_2\varphi_2^{(8)}) + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)(Mx^{(6)} - k_1\varphi_1^{(6)} - k_2\varphi_2^{(6)}) + \\ + \Omega_1^2\Omega_2^2(Mx^{(4)} - k_1\varphi_1^{(4)} - k_2\varphi_2^{(4)}) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3, \quad k_1 = l_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right), \quad k_2 = l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right). \quad (8)$$

Таким образом, при движении системы, полученном с помощью применения принципа максимума Понтрягина, минимизирующего функционал (3), непрерывно выполняется неголономная связь восьмого порядка, это позволит

в дальнейшем решать поставленную задачу с помощью использования теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитую в работах [3, 4]. Центральным при этом является использование обобщенного принципа Гаусса, предложенного в статье [5].

Литература

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1983. 392 с.
- [2] Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 384 с.
- [3] Soltahanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A. Mechanics of non-holonomic system. A New Class of control systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. 329 p.
- [4] Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А. Неголономная механика и теория управления. М.: Наука. 2018. 234 с.
- [5] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков. Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.

Глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точке либрации в задаче Хилла

Турешбаев А. Т.
aturesh@mail.ru

Кызылординский университет имени Коркыт Ата,
120000, Казахстан, Кызылорда, ул. Айтеке би, 29

Аннотация. Исследуется задача Хилла. Строятся глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точке либрации в задаче Хилла. Рассматриваются как плоское, так и пространственное семейства.

Ключевые слова: задача Хилла, точка либрации, глобальное семейство орбит, плоские, пространственные.

Введение. Задача Хилла [1] является одним из предельных вариантов ограниченной задачи трех тел. Она кладется Хиллом в основу теории движения Луны (теория Хилла–Брауна). При этом движение Луны описывается бесконечными тригонометрическими рядами. Хилл не касается вопроса сходимости этих рядов. Впервые доказательство сходимости рядов Хилла дал Ляпунов [2], который вместе с тем предложил собственный метод построения этих рядов. Тем самым ряды можно применять для движения Луны и ряда других спутников планет.

В задаче Хилла существуют точки относительного равновесия, унаследованные от коллинеарной точки либрации ограниченной задачи трех тел с основными телами, массы которых равны соответственно m_0 (Солнце) и m_1 (планета).

В докладе излагаются результаты исследования глобальных семейств периодических орбит, примыкающих к точке либрации. Оно основано на последних теоретических достижениях [3]–[6] по глобальным семействам периодических решений.

Точки либрации в задаче Хилла. Задача Хилла описывается уравнениями [7] (стр. 306):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + \frac{\mu x}{r^3} &= 3n^2x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= -n^2z, \end{aligned} \quad (1)$$

где n — угловая скорость движения тела массы m_1 по круговой орбите, $\mu = fm_1$ — параметр. Уравнения (1) движения спутника (Луны) выводятся из задачи трех тел в окрестности планеты.

В точке либрации спутник занимает положение относительного равновесия. В ней скорости принимают нулевые значения, а координаты удовлетворяют условиям

$$\mu = 3n^2x^2, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Глобальные семейства симметричных периодических орбит. Локальный анализ показывает, что к точке либрации примыкают два семейства ляпуновских периодических орбит (теорема Ляпунова о центре [8]). Одно семейство состоит из плоских орбит, другое семейство — пространственное.

Согласно теореме из [5] локальное семейство продолжается по периоду на глобальное семейство периодических орбит. При этом в системе (1) глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Система (1) относится к классу обратимых механических систем с несколькими множествами. Поэтому локальные семейства согласно [9] будут симметричными. Они продолжаются до глобального семейства [6]. В результате глобальное семейство состоит из симметричных периодических орбит.

Все указанные вопросы, включая построение орбит глобального семейства, освещаются в докладе.

Литература

- [1] Hill G. W. Reseaches in the lunar theory // Hill G. W. Collected Mathematical works. Wash.(D.S.): Carnegie Inst. 1905. V. 1. P 284–335.
- [2] Ляпунов А. М. О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1.
- [3] Тхай В.Н. Колебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Вып. 4. С. 709–715.
- [4] Tkhai V.N. Spatial oscillations of a physical pendulum // 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2022. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9807507/>
- [5] Тхай В. Н. Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 22–36.
- [6] Тхай В. Н. Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 165–179.
- [7] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
- [8] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
- [9] Тхай В. Н. Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 56–72.

Глобальное семейство периодических движений механической системы с параметром

Тхай В.Н.

tkhai@ipu.ru

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Исследуются механические системы с параметром: обратимая механическая система, лагранжева система с позиционными силами, уравнения Рауса и Гамильтона, задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, задача трех тел. Описываются сценарии изменения вместе с параметром глобальных семейств периодических движений.

Ключевые слова: обратимая механическая система, симметричное периодическое движение, глобальное семейство, уравнения Рауса, уравнения Гамильтона, тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, задача трех тел.

Введение. Семейство колебаний математического рождается из локальных колебаний близ нижнего равновесия. Оно содержит все возможные колебания маятника, т.е. является глобальным. Период колебаний на семействе монотонно возрастает с амплитудой колебаний. В этом смысле семейство состоит из невырожденных колебаний.

Основное положение о глобальном семействе колебаний гласит, что любое невырожденное периодическое движение продолжается на глобальное семейство. Положение разрабатывалось в последние годы [1]–[6]. Оно справедливо для механических систем, а также — автономной системы, описываемой уравнениями общего вида.

Колебания маятника можно рассматривать, например, при наличии малого трения в оси подвеса или увеличения длины маятника. Постановки этих задач связаны с изменением параметров модели.

В докладе показывается, как вместе с параметром меняется глобальное семейство колебаний механической системы. При кратком изложении материала приводится только результат о сохранении глобального семейства в возмущенной обратной системе и его применение к системе Солнце–планета–спутник.

Понятие глобального семейства возникло при построении всего множества периодических движений, которое получается нелокальным продолжением ляпуновского семейства. Локальное семейство выводится теоремой Ляпунова о центре [7]. А.А. Зевин [8] нашел условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте Ω продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Omega$ и предложил [9] соответствующие гамильтонианы. Сегодня стало понятно, что вопрос границы применимости ляпуновского семейства разрешается [1]–[6] знанием глобального семейства периодических движений.

Глобальное семейство в возмущенной системе. Обратимая механическая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{u} &= U(u, v), & \dot{v} &= V(u, v), & u &\in \mathbb{R}^l, v \in \mathbb{R}^n, l \geq n, \\ U(u, -v) &= U(u, v), & V(u, -v) &= -V(u, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Множество $M = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством обратной механической системы. В конкретной системе за u выбирается вектор координат (квазикоординат), за v — вектор скоростей (квазискоростей).

Фазовый портрет обратной механической системы симметричен относительно множества M . Траектории, пересекающие M , называются симметричными. Двоекратное пересечение траекторией множества M приводит к симметричному периодическому движению (СПД). Поэтому необходимые и достаточные условия существования СПД с периодом T даются равенствами

$$v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $u^0 \in M$ — значение на СПД. Вводится матрица

$$A(u^0, T/2) = \|a_{sj}\| = \left\| \frac{\partial v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, T/2)}{\partial u_j^0} \right\|.$$

Определение 1. Случай $\det A(u^0, T/2) \neq 0$ называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД — невырожденным.

Определение 2. Семейство периодических решений называется невырожденным, если период $T(h)$ на нем монотонно зависит от параметра h .

Определение 3. Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр h принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.

Определения 2 и 3 справедливы для автономной системы уравнений общего вида, в том числе для системы (1).

Для системы (1) доказательство теоремы о глобальном семействе приводит в [4]. Для системы с параметром справедлива теорема 1.

Теорема 1. (о продолжении глобального семейства по параметру) Пусть система (1) содержит параметр ε и при $\varepsilon = 0$ допускает невырожденное СПД. Тогда глобальное семейство семейства системы (1) продолжается по параметру ε .

Доказательство. Следует из равенств (2), условия $\det A(u^0, T/2) \neq 0$ и теоремы о глобальном семействе [4].

Далее дается одно из приложений теоремы 1.

Периодические орбиты спутника в окрестности планеты в системе Солнце–планета–спутник. Рассматривается плоская круговая ограниченная задача трех тел [10]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, & \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \Omega &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{R_0} + \frac{\mu}{R_1}, & \Omega(x, y) &= \Omega(x, -y), \\ R_0^2 &= (x + \mu)^2 + y^2, & R_1^2 &= (x - 1 + \mu)^2 + y^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) содержат единственный безразмерный массовый параметр μ , а дифференцирование проводится по истинной аномалии ν . Система (3) инвариантна относительно преобразования $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}, t\} \rightarrow \{x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t\}$, т.е. принадлежит к классу обратимых механических систем. Неподвижное множество для (3) такое: $M_1 = \{x, y, \dot{x}, \dot{y} : y = 0, \dot{x} = 0\}$.

В задаче о движении пассивно-гравитирующей точки P в окрестности тела J меньшей массы μ начало сидерической системы координат переносится в точку J , а направление ее осей остается без изменения: $x_1 = x + \mu - 1$, $y_1 = y$. Здесь $r_1 \ll 1$, $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, поэтому вводится малый параметр m и осуществляется переход к новым переменным и времени: $x_1 = m^{2/3}x_2$, $y_1 = m^{2/3}y_2$, $\nu = m\tau$. Далее разложением функции r_1^{-3} в ряд по степеням $m^{3/2}$, получается система

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{d\tau^2} - 2m\frac{dy_2}{d\tau} + \frac{\mu x_2}{r^3} &= \lambda[(3 - \mu)x_2 + m^2X_2(\mu, m^{3/2}, x_2, y_2)], \\ \frac{d^2y_2}{d\tau^2} + 2m\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\mu y_2}{r^3} &= \lambda[\mu y_2 + m^{3/2}Y_2(\mu, m^{3/2}, x_2, y_2)], \quad \lambda = m^2, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой функции X_2 и Y_2 обращаются в нуль при $x_2 = y_2 = 0$. В случае $X_2 \equiv 0$, $Y_2 \equiv 0$ из (4) выводится предельный вариант ограниченной задачи трех тел – задача Хилла о движении Луны вокруг Земли.

Система (4) обратима с неподвижным множеством $M_2 = \{x_2, y_2, x'_2, y'_2 : y_2 = 0, x'_2 = 0\}$, $(\cdot)' = d(\cdot)/d\tau$. При $\lambda = 0$ она допускает глобальное семейство круговых орбит

$$z = a \exp(i\omega\tau), \quad \bar{z} = a \exp(-i\omega\tau), \quad l = \frac{\mu}{a^3} = \omega^2 + 2m\omega, \quad z = (x + iy). \quad (5)$$

К системе (4) применяется теорема 1. Тем самым доказывается существование в окрестности тела J глобального семейства периодических орбит, близких к круговым. Эти орбиты симметричны относительно оси абсцисс.

Параметр m в (5) не зависит от ω . Следовательно, в формулах (5) угловая скорость ω движения по орбите в приближенной системе может быть отрицательной ($\omega^2 + 2m\omega > 0$). В таком случае орбитальное вращение спутника вокруг планеты J происходит противоположно орбитальному движению планеты J вокруг Солнца. При этом по орбите радиуса a обратное вращение происходит с большей скоростью, чем прямое вращение.

Прямое вращение характерно для близких к планете спутников. Спутники с обратным вращением есть, например, у Юпитера и Сатурна. Они имеют протяженные орбиты.

Литература

- [1] Тхай В. Н. Коллебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер.1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Вып. 4. С. 709–715.
- [2] Tkhai V. N. Spatial Oscillations of a Physical Pendulum // 16th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference). 2022. IEEE Xplore. INSPEC Accession Number: 21844085. DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807507. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9807507>

- [3] Тхай В. Н. Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 22–36.
- [4] Тхай В. Н. Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 165–179.
- [5] Тхай В. Н. Адаптивная стабилизация колебаний автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2024. (в печати)
- [6] Тхай В. Н. Глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точкам либрации в ограниченной задаче трех тел // Астрономический журнал. 2024. (в печати)
- [7] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
- [8] Zevin A. A. Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1997. V. 28. Iss. 9. P. 1499–1507.
- [9] Zevin A. A. Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1339–1349.
- [10] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.

Инварианты механических систем с диссипацией

Шамолин М.В.

shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119192, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. В данной работе предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для механических систем с конечным числом степеней свободы. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: инвариант механической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость.

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [1, 2, 3], позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных механических систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и

коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т. е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [4, 5, 6]).

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты — это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Некоторые частные случаи систем с конечным числом степеней свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в данном контексте в работах автора [5, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

Для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

- [1] Poincaré H. Calcul des probabilités. Gauthier–Villars, Paris. 1912. 340 p.
- [2] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
- [3] Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
- [4] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
- [5] Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
- [6] Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 98–106.

Problem of target guidance with pursuit method: solution with Udwadia–Kalaba equations (The 300th anniversary of Saint Petersburg State University and D.K. Faddeev Academic Gymnasium)

Shutyomov I.T., Yushkov M.P.

ivanshutyomov@yandex.ru, yushkovmp@mail.ru

St. Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, 7/9 Universitetskaya nab.

Annotation. This paper considers the problem of directing a material point to a moving target according to the pursuit method. Following V.I. Kirgetov’s suggestion, the targeting law is formulated as a linear non-holonomic constraint of the first order. Thus, the problem of target guidance in control theory using the pursuit method can be solved as a non-holonomic mechanics problem. To solve this nonholonomic problem there are Udwadia–Kalaba equations used. These equations, derived using the Moore–Penrose transformation, do not contain Lagrange multipliers and are obtained from first-order Lagrangian equations by excluding Lagrange multipliers through the use of nonholonomic constraint equations. A formula is developed for calculating the desired nonholonomic constraints force which in the given problem maintains the guidance of the moving point to the target. Calculation results for different cases of target motion are represented in the form of trajectories and the hodograph of the constraints force vector, calculations were performed by means of Wolfram Mathematica software.

Keywords: non-holonomic mechanics problem, Udwadia–Kalaba equations.

Introduction and problem statement. In his work [1], V.I. Kirgetov proposed solving control theory problems regarding the pursuit of a target point using the apparatus of analytical mechanics. Let's consider the problem of directing a material point of mass m towards a target moving in the Oxy plane according to the law $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$. Let's examine the pursuit of a target point with mass m using a method of chase. The program of such motion is defined as follows:

$$\frac{\dot{x}}{\xi - x} = \frac{\dot{y}}{\eta - y}. \quad (1)$$

Let's rewrite the pursuit law (1) in the form of a non-holonomic constraint equation

$$\varphi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}(\eta - y) - \dot{y}(\xi - x) = 0. \quad (2)$$

According to V.I. Kirgetov [1], the pursuit law towards the target, expressed in form (1), is considered as a nonholonomic constraint that the pursuing material point must fulfill. Thus, we formulate the problem of control theory in pursuit of the target as a nonholonomic mechanics problem. We will consider the constraint (2) as ideal, with its reaction being the desired control force ensuring the execution of the motion program (1). The equations of motion of the pursuing point in the presence of the nonholonomic constraint (2) can be formulated as Lagrange equations of the second kind with multipliers (in the case of the motion of a material point in the Cartesian plane, they can be referred to as Lagrange equations of the first kind) [2]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P\frac{\dot{x}}{v} - k\dot{x} + \Lambda(\eta - y), \\ m\ddot{y} &= -mg + P\frac{\dot{y}}{v} - k\dot{y} - \Lambda(\xi - x). \end{aligned} \quad (3)$$

The Udwadia–Kalaba equations. The Udwadia–Kalaba equations in the article [3] were formulated in matrix form using a specific generalized Moore–Penrose inversion [4, 5]. They were written in terms of all generalized coordinates $q = (q_1, \dots, q_s)$ and obtained by imposing linear second-order nonholonomic constraints. Importantly, these equations do not contain Lagrange multipliers, which simplifies their application in solving practical problems. In the work [6], when imposing nonlinear first-order nonholonomic constraints

$$f_1^\varkappa(t, q, \dot{q}) = 0, \quad \varkappa = \overline{1, s}.$$

the Udwadia–Kalaba equations were derived from second-order Lagrange equations. Lagrange multipliers were replaced by generalized reactions of ideal constraints [3], which were obtained using the Maggi equations apparatus [2]. In the proposed work, the Udwadia–Kalaba equations are constructed as follows: differentiate the

constraint equation (2). In the resulting expression

$$\dot{x}(\dot{\eta} - \dot{y}) + \ddot{x}(\eta - z) - \dot{y}(\dot{\xi} - \dot{x}) - \ddot{y}(\xi - x) = 0 \tag{4}$$

replace \ddot{x} , \ddot{y} with their representations from the differential equations of motion (3). As a result, we obtain an expression for obtaining the Lagrange multiplier as a function of variables $(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Substituting this function into the second-order Lagrange equations with multipliers (3), we obtain the Udwadia–Kalaba equations for solving our problem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{(\dot{y}\dot{\xi} - \dot{x}\dot{\eta})(\eta - y)}{(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2} - \frac{\dot{x}(kv - P)}{mv}, \\ \ddot{y} &= \frac{(\dot{y}\dot{\xi} - \dot{x}\dot{\eta})(x - \xi)}{(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2} - \frac{\dot{y}(kv - P)}{mv}. \end{aligned} \tag{5}$$

Calculations for flat motion. The motion of a pursuing material point and a pursued point in the general plane Oxy is considered. It is assumed that the point moves under the influence of thrust force $\mathbf{P} = P\mathbf{v}$, directed along the velocity of the material point, and aerodynamic resistance force $\mathbf{F}_a = -k\mathbf{v}$, directed in the opposite direction. If the motion occurs in a vertical plane (the case of pursuing an airborne target), then the force of gravity of the material point $m\mathbf{g}$ should be taken

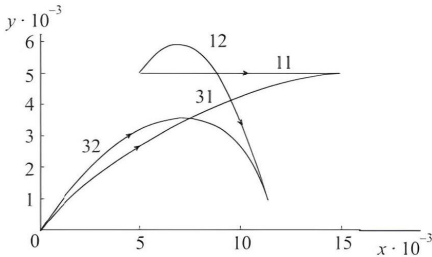


Fig. 1.

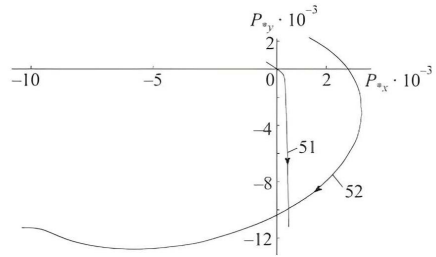


Fig. 2.

in account. In a horizontal plane motion case the force of gravity does not affect the motion of the material point. A series of calculations of the motion of a hypothetical rocket pursuing a target moving according to different laws was conducted. Figures 1 and 2 show control calculations for two different laws of motion of the pursued point:

$$(I) \quad \xi(t) = v_0 t \cos \varphi_0 + \xi_0, \quad \eta(t) = -9,812t^2/2 + v_0 t \sin \varphi_0 + \eta_0,$$

$$(II) \quad \xi(t) = v_0 t + \xi_0, \quad \eta(t) = \eta_0.$$

Attention is drawn to the possibility of technical implementation of the control force. In order for the pursuing point to follow the pursuit law, in addition to the thrust force generated by the engine and characterized by vector \mathbf{P} , an additional control force vector \mathbf{R} equal to the found reaction of the ideal connection (2) needs to be created. One engine can be used to create the required force vector and direction \mathbf{P}^* , equal to the vector sum: $\mathbf{P}^* = \mathbf{P} + \mathbf{R}$. The obtained results are equal to the calculations conducted earlier using different equations of motion [2, 7].

Pursuit in spacial case. In the case of spatial motion of a pursuing point and a target, three second-order Lagrange equations with multipliers of type (3) will be taken, taking into account two nonholonomic constraints of type (2). The two Lagrange multipliers that appear are obtained as functions of time and coordinates with their first derivatives with respect to time similar to previous derivations using Lagrange equations with multipliers and time-differentiated two nonholonomic

constraint equations. As a result, it is possible to write Udwadia–Kalaba equations for solving the control theory problem. The trajectories of motion and hodographs of control forces for different laws of motion of the pursued point in spatial cases were obtained using the Wolfram Mathematica package.

References

- [1] Kirgetov V.I. Kinematically controlled mechanical systems // *Prikladnaya matematika i mehanika — Applied mathematics and mechanics*. 1964. Vol. 28. No. 1. P. 15–24. (in Russian)
- [2] Zegzhda S. A., Soltahanov Sh. Kh., Yushkov M. P. Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. New class of control theory problems. Moscow: Nauka. Fizmatlit — Science. Physical-mathematics literature, 2005. 269 p. (in Russian)
- [3] Kalaba R. E., Udwadia F. E. A new perspective on constrained motion // London: Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering sciences. 1992. Vol. 439. No. 1906. P. 407–410.
- [4] Moore E. H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1920. Vol. 26. No. 9. P. 394–395.
- [5] Penrose R. A. A generalized inverse for matrices // *Cambridge: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1955. Vol. 51. No. 3. P. 406–413.
- [6] Zegzhda S. A., Naumova N. V., Soltahanov S. H., Yushkov M. P. Relation of Udwadia–Kalaba equations to generalized Lagrange and Maggi equations // *Bulletin of the Saint Petersburg State University*. 2020. Vol. 3. No. 1. P. 81–84.
- [7] Leontieva E. U., Yushkov M. P. Analytical mechanics methods application for flight dynamics problems // *Bulletin of the Saint Petersburg State University*. 1996. Vol. 4. No. 22. P. 110–112.

Секция 2

Динамика естественных и
искусственных небесных тел

*Dynamics of Natural and
Artificial Celestial Bodies*

Алгоритм оптимизации вычислений в задачах небесной механики

Бабаджанянц Л.К., *Потоцкая И.Ю.*, *Путьшева Ю.Ю.*

irinapototskaya@yandex.ru, j_poupycheva@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Многоаргументные тригонометрические ряды широко используются для аналитического и численного решения задач небесной механики. При построении аналитических теорий движения планет (например, при вычислении возмущений в их координатах) часто приходится перемножать такие ряды. Перемножение этих рядов при реализации численных методов является сложной задачей, требующей большого количества машинного времени и памяти. Явные формулы для коэффициентов произведения многоаргументных рядов, полученные в данной статье, позволяют существенно сократить объем требуемой памяти и время вычислений. Как следствие, использование этих формул для оптимизации расчетов при разработке программного обеспечения для решения указанных задач позволяет повысить его качество и конкурентоспособность. Все полученные результаты представлены в виде окончательных формул для программной реализации.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, вычисления возмущений в координатах планет, аналитические и численные методы небесной механики.

Введение. При построении аналитических теорий движения планет обычно приходится разлагать функции в многоаргументные тригонометрические ряды и вычислять ряды в некоторых точках [1]–[4]. Во всех этих случаях необходимо складывать и умножать ряды, а также собирать подобные члены. Выполнение этих действий требует значительных машинных ресурсов (процессорного времени и памяти). Поэтому разработка аналитических инструментов по сокращению этих ресурсов очень востребована. Между тем, перемножение многоаргументных рядов (более трёхаргументных) в астрономической литературе практически не рассматривается, несмотря на важность этого вопроса. В данной работе мы предлагаем формулы, позволяющие автоматизировать подобные вычисления и существенно сократить как время их выполнения, так и необходимую оперативную память.

Постановка задачи. Пусть имеются два многоаргументных ряда следующего вида:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_k} \left[a_{i_1, \dots, i_k} \cos \left(\sum_1^k i_m \varphi_m \right) + b_{i_1, \dots, i_k} \sin \left(\sum_1^k i_m \varphi_m \right) \right], \\ g &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_p} \left[A_{j_1, \dots, j_p} \cos \left(\sum_1^p j_m \varphi_m \right) + B_{j_1, \dots, j_p} \sin \left(\sum_1^p j_m \varphi_m \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} i_{m*} &\leq i_m \leq i_m^*, & m &= 1, 2, \dots, k, \\ j_{n*} &\leq j_n \leq j_n^*, & n &= 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать, что ряды приведены. Под приведенным рядом понимают такой ряд, у которого коэффициенты с первым, не равным нулю индексом, есть нули, если этот индекс отрицательный. В частности, отсюда следует, что $i_{1*} \geq 0$, $j_{1*} \geq 0$.

Пусть $k \geq p$. Тогда запишем p -аргументный ряд в следующем виде:

$$g = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_k} \left[A'_{j_1, \dots, j_k} \cos \left(\sum_1^k j_m \varphi_m \right) + B'_{j_1, \dots, j_k} \sin \left(\sum_1^k j_m \varphi_m \right) \right],$$

где $A'_{j_1, \dots, j_k} = B'_{j_1, \dots, j_k} = 0$, когда хотя бы один из индексов j_t ($t > p$) отличен от нуля, а

$$A'_{j_1, \dots, j_p, 0, \dots, 0} = A_{j_1, \dots, j_p}, \quad B'_{j_1, \dots, j_p, 0, \dots, 0} = B_{j_1, \dots, j_p}. \quad (3)$$

Целесообразно перемножать k -аргументные ряды, а получив необходимые формулы, учесть (3).

Иногда будут использоваться векторные индексы $i = (i_1, \dots, i_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k)$ и т. п., а также вектор $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ и скалярные произведения $j \cdot \varphi$, $i \cdot \varphi$.

Для удобства запишем ряды в виде

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{i_k=-\infty}^{+\infty} [a_i \cos(i \cdot \varphi) + b_i \sin(i \cdot \varphi)], \\ g &= \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{j_k=-\infty}^{+\infty} [A'_j \cos(j \cdot \varphi) + B'_j \sin(j \cdot \varphi)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $a_i = b_i = 0$, $A'_j = B'_j = 0$, если компоненты векторов i, j не удовлетворяют неравенствам (2).

Алгоритм оптимизации вычислений. В настоящей работе представлено пошаговое описание вывода явных формул для коэффициентов произведения многоаргументных тригонометрических рядов (1). Полученные формулы представлены в удобном для программной реализации виде.

Итак, произведение рядов (1) может быть представлено как

$$\begin{aligned}
 fg = & \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \sum_{r^1}^{R^1} (a_i^l A_{i-l} + b_i^l B_{i-l}) + \sum_{r^2}^{R^2} (a_i^l A_{-i+l} - b_i^l B_{-i+l}) + \right. \\
 & \left. + \delta(l) \sum_{r^3}^{R^3} (a_i^{-l} A_{i+l} + b_i^{-l} B_{i+l}) \right\} \cos(l \cdot \varphi) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_l \delta(l) \left\{ \sum_{r^1}^{R^1} (-a_i^l B_{i-l} + b_i^l A_{i-l}) + \sum_{r^2}^{R^2} (a_i^l B_{-i+l} + b_i^l A_{-i+l}) + \right. \\
 & \left. + \sum_{r^3}^{R^3} (a_i^{-l} B_{i+l} - b_i^{-l} A_{i+l}) \right\} \sin(l \cdot \varphi).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$A_{j_1, \dots, j_p} = A_j$, $B_{j_1, \dots, j_p} = B_j$, $a_{i_1, i_2, \dots, i_p, l_{p+1}, \dots, l_k} = a_i^l$, $b_{i_1, i_2, \dots, i_p, l_{p+1}, \dots, l_k} = b_i^l$;
 $i = (i_1, \dots, i_k)$, $l = (l_1, \dots, l_k)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k)$; $(l \cdot \varphi)$ — скалярное произведение;

$$\delta(l) = \begin{cases} 0, & l = 0 \\ 1, & l \neq 0 \end{cases}, \quad \sum_{r^q}^{R^q} = \sum_{r_1^q}^{R_1^q} \cdots \sum_{r_p^q}^{R_p^q}, \quad q = 1, 2, 3,$$

$$r_n^1 = \max(i_{n*}, j_{n*} + l_n), \quad r_n^2 = \max(i_{n*}, -j_{n*} + l_n), \quad r_n^3 = \max(i_{n*}, j_n^* - l_n),$$

$$R_n^1 = \min(i_n^*, j_n^* + l_n), \quad R_n^2 = \min(i_n^*, -j_n^* + l_n), \quad R_n^3 = \min(i_n^*, j_n^* - l_n),$$

i_{m*}, i_m^* — наибольший и наименьший из индексов i_m , $m = 1, 2, \dots, k$; j_{n*}, j_n^* — наибольший и наименьший из индексов j_n , $n = 1, 2, \dots, p$.

Компоненты вектора индексов l определяются так:

$$\sum_{r^1}^{R^1} : l_n = i_n - j_n, \quad n = [1 : p]; \quad l_q = i_q, \quad q = [p + 1 : k]; \quad \Rightarrow A_{i-l} = A_j, \quad B_{i-l} = B_j;$$

$$\sum_{r^2}^{R^2} : l_n = i_n + j_n, \quad n = [1 : p]; \quad l_q = i_q, \quad q = [p + 1 : k]; \quad \Rightarrow A_{l-i} = A_j, \quad B_{l-i} = B_j;$$

$$\sum_{r^3}^{R^3} : l_n = j_n - i_n, \quad n = [1 : p]; \quad l_q = -i_q, \quad q = [p+1 : k]; \quad \Rightarrow A_{i+l} = A_j, \quad B_{i+l} = B_j.$$

Заключение. Подчеркнём преимущества представленных результатов.

1. Полученные явные формулы позволяют оптимизировать процесс вычислений: они легко программируются и позволяют очень быстро получать коэффициенты произведения многоаргументных рядов.
2. Наличие явных формул позволяет значительно ускорить работу соответствующих программных продуктов и уменьшить объем оперативной памяти, необходимой для расчетов.
3. Перечисленные преимущества существенно повышают эффективность программного обеспечения и, как следствие, его конкурентоспособность.

Литература

- [1] Бабаджанянц Л. К. Аналитические методы вычисления возмущений в координатах планет // Вестник ЛГУ. 1969. № 7. С. 17–28.
- [2] Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики / пер. с англ. М.: Мир, 1964. 515 с.
- [3] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы М.: Наука, 1978. 456 с.
- [4] Чеботарёв Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики М.: URSS., 2022. 368 с.

Плоская круговая ограниченная задача четырёх тел: исследование внутренних движений

Байков А.Е., Майоров А.Ю.

alexander@baikov.org, ylam123@gmail.com

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Исследуется динамика двух пассивно гравитирующих малых тел равной массы в поле притяжения двух основных тел (звёзд). Две звезды одной массы движутся по круговой орбите, малые тела движутся в плоскости орбиты звёзд, испытывая взаимное притяжение. Введён малый параметр ε как отношение массы малого тела к массе основного. Рассматриваются внутренние движения системы, определяемые тем, что центр масс малых тел всё время совпадает с центром масс звёзд, при этом малые тела находятся так близко к друг другу, что силы притяжения между ними превосходят силы притяжения со стороны основных тел. Записаны уравнения в оскулирующих элементах a , e , ω и M , описывающие возмущённое движение малых тел, они приведены к безразмерному виду, а затем усреднены по средней аномалии M . В усреднённых уравнениях большая полуось a остаётся постоянной, кроме того, они допускают интеграл, происходящий из интеграла Якоби строгих уравнений. Построен фазовый портрет усреднённой системы, исследованы его бифуркации при изменении a .

Ключевые слова: ограниченная задача четырёх тел, центральные конфигурации, внутренние движения, оскулирующие элементы, метод усреднения.

Введение. Поиску и анализу устойчивости центральных конфигураций в задаче N тел посвящено большое число работ, начиная с классических результатов Эйлера и Лагранжа. Центральной конфигурацией называется относительное равновесие системы тел, такое, что равнодействующая сила для каждого тела направлена к центру масс системы. Часто исследователи работают в ограниченной постановке, когда есть два основных тела, движущихся по кеплеровой орбите вокруг общего центра масс, и несколько пассивно гравитирующих тел. Так, в [1]–[5] рассматривалась задача четырёх тел в ограниченной постановке, были найдены центральные конфигурации, исследована их устойчивость.

Рассмотрим два основных тела (две звезды) одной массы m_0 , которые движутся вокруг общего центра масс O по круговой орбите радиуса R . Наряду с ними рассмотрим два малых тела A и B (два астероида) одной массы m , движущиеся произвольно в плоскости орбиты основных тел. Считаем, что $m \ll m_0$, поэтому малые тела на звёзды не влияют, однако малые тела испытывают взаимное притяжение. Эта задача разбиралась в [6], ставшей отправной статьёй для наших исследований, но ещё раньше она была рассмотрена в [7], где были

найлены относительные положения равновесия (центральные конфигурации) и установлен класс движений, называемых в этой работе внутренними.

Введём две декартовы системы координат: 1) $O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система, где $O\xi\eta$ — плоскость движения звёзд; 2) $Oxyz$ — синодическая система координат, в которой ось Ox соединяет звёзды всё время движения (рис. 1).

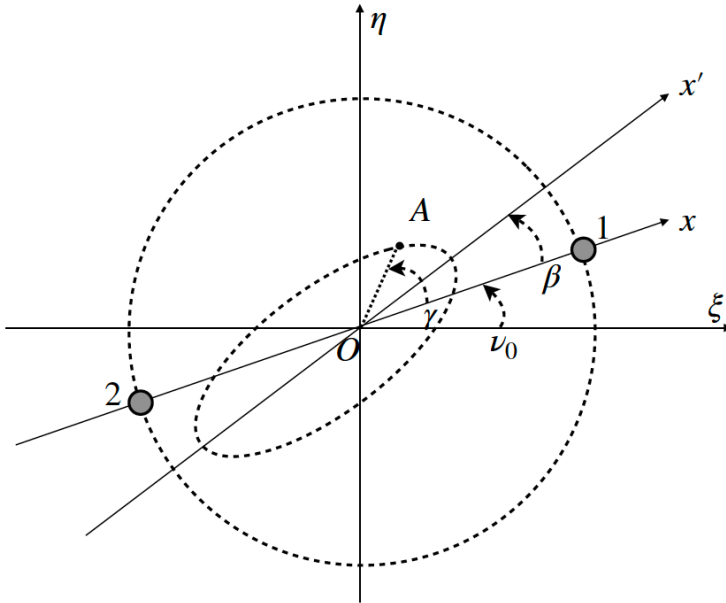


Рис. 1. Оскулирующая орбита астероида A в плоскости орбиты основных тел.

Будем задавать положения малых тел A и B координатами их центра масс ξ_C , η_C в инерциальной системе координат, расстоянием 2ρ между ними и углом φ между вектором \mathbf{BA} и осью $O\xi$. Уравнения движения астероидов допускают частные движения $\xi_C = 0$, $\eta_C = 0$, соответствующие постоянному положению центра масс C в точке O .

Внутренние движения. Пусть астероиды находятся в малой окрестности начала координат, их центр масс совпадает с точкой O , силы притяжения между астероидами превалируют над силами притяжения со стороны звёзд. Введём также систему $Ox'y'z'$, в которой ось Ox' направлена в сторону перигея оскулирующей орбиты малого тела A . Рассмотрим систему кеплеровых оскулирующих элементов a (большая полуось), e (эксцентриситет), ω (аргумент перигея), M (средняя аномалия), запишем уравнения, описывающие

возмущённое движение малых тел [8]:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial M}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial \omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial e}, \quad \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial e}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $n = \sqrt{\frac{fm}{4a^3}}$ — среднее движение малых тел по оскулирующей орбите, возмущающее ускорение V выражено через оскулирующие элементы. Положим $a' = a/R$, определим время $t' = n|_{a=a_0} t = \sqrt{\frac{fm}{4(a'_0)^3 R^3}} t$, где a'_0 — начальное значение безразмерной большой полуоси. После указанных замен медленными переменными в задаче будут a , e и ω , а быстрой переменной окажется M . Введём обозначение для возмущающей функции $W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a')^{2k} (1-e^2)^{2k}}{(1+e \cos \nu)^{2k}} P_{2k}(\cos \gamma)$.

Здесь ν — истинная аномалия, $\gamma = \varphi - n_0 t$, $n_0 = \sqrt{\frac{fm_0}{4R^3}}$ — среднее движение звёзд, P_{2k} — полином Лежандра степени $2k$. Запишем выражение для усреднённой по средней аномалии M возмущающей функции:

$$W^* = \sum_{k=1}^{\infty} (a')^{2k} (1-e^2)^{2k+\frac{3}{2}} \left(C_{k,0} + \sum_{j=1}^{2k} C_{k,j} \cos j \left(\omega - (a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} t' \right) \right). \quad (2)$$

Коэффициенты $C_{k,0}$, $C_{k,j}$ зависят от e . Поскольку W^* от M не зависит, то в усреднённых уравнениях $a' = a'_0 = \text{const}$. Выпишем отдельно уравнения для медленных переменных e и ω из усреднённой системы:

$$\frac{de}{dt'} = -\frac{8\sqrt{1-e^2}}{e} a'_0 \frac{\partial W^*}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt'} = \frac{8\sqrt{1-e^2}}{e} a'_0 \frac{\partial W^*}{\partial e}. \quad (3)$$

Уравнения (3) есть канонические уравнения (в конформном времени) с неавтономной функцией Гамильтона $W^* = W^*(a', e, \omega - (a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} t')$. Замена $\beta = \omega - (a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} t'$ приводит усреднённые уравнения движения к автономному виду. Уравнения для e , β допускают интеграл $\frac{1}{8} \sqrt{\varepsilon} a'_0 \sqrt{1-e^2} + W^*(a'_0, e, \beta) = \text{const}$, происходящий из интеграла Якоби строгих уравнений движения.

Первое (хилловское) приближения возмущающей функций имеет вид

$$W_1^* = (a'_0)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{8} e^2 \cos 2\beta \right).$$

Для него построен фазовый портрет усреднённой системы на цилиндре $[0, 1) \times \mathbb{S}^1$ в переменных e, β . При $(a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{36}$ стационарных точек нет, есть зона траекторий с $e \rightarrow 1$, отмеченных красным на рис. 2(а), и зона траекторий ротационного типа, отмеченных чёрным на рис. 2(а). При $(a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} > \frac{1}{36}$ усреднённая система имеет гиперболические стационарные точки на инвариантной кривой

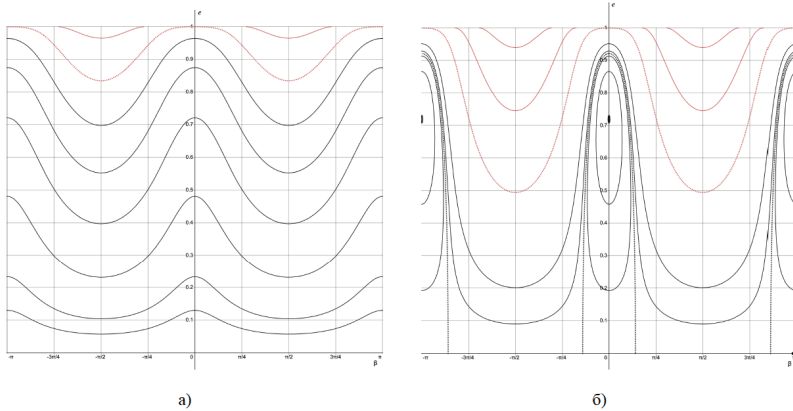


Рис. 2. Фазовый портрет усреднённой системы: а) при $(a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{36}$; б) при $(a'_0)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} > \frac{1}{36}$.

$e = 0$, центры $e = \frac{\sqrt{1296(a'_0)^3 - \varepsilon}}{36(a'_0)^{3/2}}$, $\beta = 0$, $\beta = \pi$ и три зоны с разным характером фазовых кривых: зона с $e \rightarrow 1$, отмеченная красным на рис. 2(б), зоны траекторий ротационного и либрационного типов, разделённые сепаратрисами.

Литература

- [1] Simó C. Relative equilibrium solutions in the four body problem // *Celestial Mechanics*. 1978. Vol. 18. P. 165–184.
- [2] Roy A. E., Steves B. A. Some special restricted four-body problems-ii: From caledonia to copenhagen // *Planet Space Sci*. 1998. Vol. 46. No. 11–12. P. 1475–1486.
- [3] Scheeres D. J., Bellerose J. The restricted hill full 4-body problem: application to spacecraft motion about binary asteroids // *Dyn. Syst*. 2005. Vol. 20. No. 1. P. 23–44.
- [4] Shoib M., Faye I. Collinear equilibrium solutions of four-body problems // *J. Astrophys. Astr.* 2011. Vol. 32. P. 411–423.

- [5] Bardin B. S., Sukhov E. A., Volkov E. V. Nonlinear Orbital Stability of Periodic Motions in the Planar Restricted Four-Body Problem // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023. Vol. 19. No. 4. P. 545–557.
- [6] Bakker L. F., Freeman N. J. Relative equilibria and periodic orbits in a Circular Planar (2+2)-Body Problem // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2023. Vol. 135. P. 58.
- [7] Белецкий В. В. Об одной ограниченной задаче четырех тел // *Сборник трудов ГАИШ.* 1990. С. 83–92.
- [8] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.

О закономерностях распределений по массам фрагментов разрушенных метеороидов и астероидов

Брыжина И. Г., Егорова Л. А.

shantii@mail.ru, egorova@imes.msu.ru

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова,

119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

Аннотация. Распределение фрагментов по массам является важной характеристикой разрушения небесных тел в космическом пространстве и в атмосфере Земли. Аналитически описаны два типа эмпирических распределений: 1) фрагментов тел, разрушенных в ударных экспериментах, моделирующих фрагментацию астероидов при столкновении, 2) фрагментов метеоритных дождей, выпавших на Землю после пролета и разрушения в атмосфере ряда метеороидов и астероидов. Выявлены некоторые закономерности распределений фрагментов тел, разрушенных в экспериментах, и распределений неспарившихся фрагментов тел, разрушенных в атмосфере.

Ключевые слова: метеороид, астероид, фрагментация, распределение по массам.

Введение. Фрагментация астероидов при столкновении в космическом пространстве обычно моделируется в ударных экспериментах. О фрагментации астероидов и метеороидов в атмосфере можно судить по распределению по массам выпавших на землю неспарившихся фрагментов (метеоритов). Распределение фрагментов разрушенного тела по массам характеризуется функцией кумулятивного числа фрагментов $N_m(m)$ — количеством фрагментов с массами большими или равными m . Для этой функции обычно используется простой степенной закон: $N_m \propto m^{-\beta}$. Этот закон использовался во многих астрономических задачах: для описания результатов ударных экспериментов, моделирующих разрушение астероидов при столкновении [1]–[8], для определения индексов распределения метеороидов по массам на основе наблюдений спорадических метеоров и метеорных потоков [9], для нахождения начальных спектров масс разных астрономических объектов в ансамблях, формирующих-

ся путем фрагментации [10]. Общепринятый подход ($N_m \propto m^{-\beta}$) дает линейную зависимость для распределения фрагментов по массам в логарифмических координатах, позволяющую описать только часть нелинейной в большинстве случаев эмпирической кривой. Авторами [11] развит новый подход, в котором степенной закон задается не для кумулятивного числа фрагментов, а для плотности распределения числа фрагментов по массам. В этом подходе зависимость N_m от m нелинейная, что позволяет описать всю эмпирическую кривую.

Метод. Для описания распределения фрагментов разрушенного тела по массам предполагается, что плотность распределения числа фрагментов подчиняется степенному закону, что означает, что функция кумулятивного числа фрагментов $N_m(m)$ определяется из дифференциального уравнения [11]. Это уравнение решалось с учетом интегрального уравнения сохранения массы, т.е. условия, что масса тела сохраняется и равна суммарной массе всех фрагментов. В результате для функции $N_m(m)$, получено соотношение

$$N_m = \frac{1 - \beta}{\beta \bar{m}_i^{1-\beta}} (\bar{m}^{-\beta} - \bar{m}_i^{-\beta}) + n_i. \quad (1)$$

Здесь $\bar{m} = m/M$ — безразмерная масса фрагмента, отнесенная к общей массе M , $\bar{m}_i = m_i/M$ — массовая доля наибольшего фрагмента, $n_i = N_m(m_i)$ — число максимальных фрагментов ($n_i = 1$ в большинстве случаев), β — степенной индекс. Функция N_m зависит только от безразмерных параметров.

Экспериментальные распределения. Соотношение (1) применялось для описания результатов ударных экспериментов [1, 3–8], моделирующих фрагментацию астероидов в космическом пространстве. Показано, что оно адекватно описывает распределения, полученные для мишеней из разных материалов (базальты, гипс, пиррофиллит, алюмооксидная керамика, цементные смеси, агрегаты, метеориты) с разными размерами, формой, плотностью (1.1 — 3.6 г/см³) и прочностью на сжатие (3 — 2000 МПа), в широком диапазоне скоростей ударника V (300 м/с — 5.4 км/с).

В [1, 2, 8] классифицировано несколько типов разрушения, наблюдаемых в экспериментах и определяемых в основном удельной энергией удара Q (кинетической энергией ударника с массой m_p на единицу массы мишени M): $Q = m_p V^2 / (2M)$. Показано, что формула (1) описывает экспериментальные распределения при $Q \geq 1$ кДж/кг. Это режимы полного или катастрофического разрушения (массы фрагментов меняются равномерно) и разрушения с ядром (один или два фрагмента значительно крупнее остальных). Когда масса одного (или двух) фрагментов в несколько раз больше массы следующего, формула (1) применяется, начиная со второго (третьего) фрагмента. На рис. 1 формула (1) применена для описания экспериментов [7] по разрушению угли-

стого хондрита SM2 Мурчисон ($Q = 12$ кДж/кг, полное разрушение) и обыкновенного хондрита L4 Саратов ($Q = 3.2$ кДж/кг, разрушение с ядром).

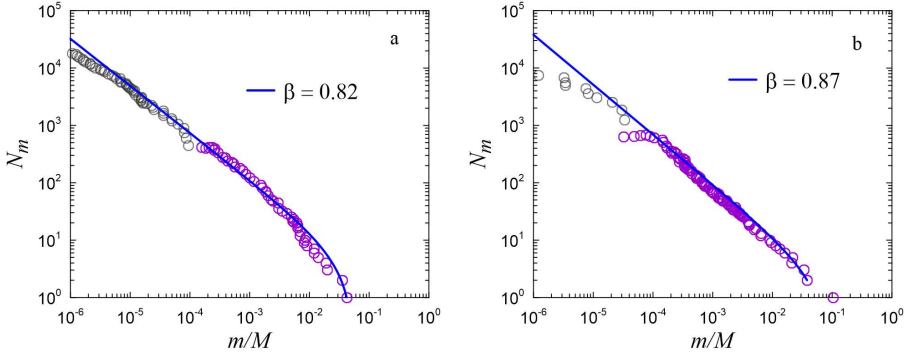


Рис. 1. Распределение фрагментов по массам. Круги — эксперименты [7] по разрушению образцов метеоритов Мурчисон (а) и Саратов (б), линия — формула (1).

Распределения метеоритов. Соотношение (1) применялось для описания распределений по массам неспарившихся фрагментов (метеоритов), найденных после пролета и разрушения в атмосфере небесных тел: Царев, Сихотэ–Алинского, Альенде, Мурчисон, Мбале, Тагиш–Лейк, Бассикуну, Пуэрто–Лаписе, 2008 ТС3, Кошице, Саттерс–Милл, Челябинского и Сарычичек. Распределение метеоритов (обыкновенные хондриты, углистые хондриты, ахондриты, железные) построены с использованием данных из публикаций и музейных и частных коллекций. Сравнение эмпирических и аналитических распределений показало, что формула (1) адекватно описывает распределения найденных метеоритов, что демонстрирует рис. 2, где приведены распределения метеоритов Альенде (углистые хондриты CV3) и Челябинских (обыкновенные хондриты LL5). Выявлены закономерности в распределениях метеоритов.

Диапазоны изменения степенного индекса. На основании описания результатов 26 ударных экспериментов построена зависимость степенного индекса β от удельной энергии Q (рис. 3(a)). Зависимость β от числа фрагментов в коллекции метеоритов N по описанию тринадцати метеоритных дождей показана на рис. 3(b). Видна тенденция увеличения β с ростом Q и N . Значения β от 0.45 до 0.7, полученные для распределений метеоритов, ниже значений β от 0.68 до 0.88, полученных для экспериментальных распределений.

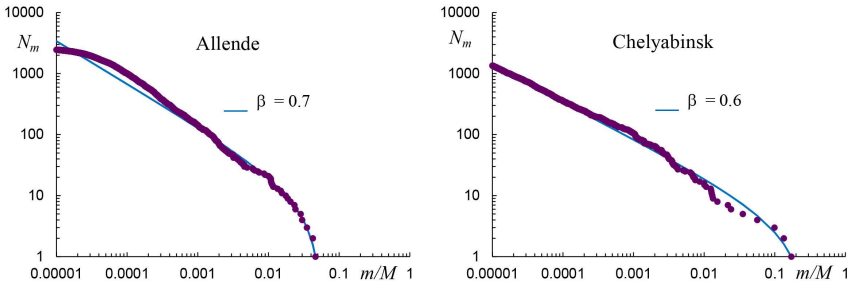


Рис. 2. Метеориты Альенде и Челябинские (точки), линия — формула (1).

Это может быть связано с тем, что в экспериментах обнаруживаются почти все фрагменты, а метеориты — лишь частично; разрушения при столкновении и под действием сил давления отличаются друг от друга, отличаются и размеры тел, разрушающиеся в экспериментах и в атмосфере.

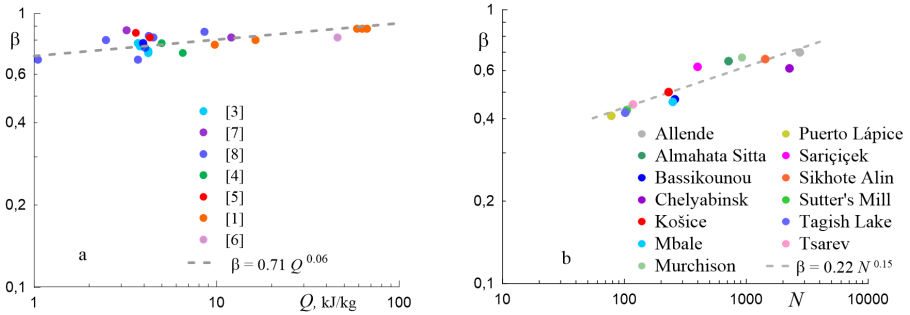


Рис. 3. Зависимость β от удельной энергии Q (а) и от количества метеоритов N (б).

Заключение. Формула (1) для распределения фрагментов разрушенного тела по массам адекватно описывает результаты ударных экспериментов при разных типах разрушения и распределения фрагментов метеоритных дождей, когда число фрагментов более 60. Отмечены некоторые закономерности распределений метеоритов и экспериментальных распределений. Построены зависимости степенного индекса от удельной энергии удара (разрушение в экспериментах) и от количества метеоритов (разрушение в атмосфере).

Литература

- [1] Takagi Y., Mizutani H., Kawakami S. I. Impact fragmentation experiments of basalts and pyrophyllites // *Icarus*. 1984. Vol. 59. P. 462–477.
- [2] Fujiwara A., et al. Experiments and scaling laws for catastrophic collisions // *Asteroids II*. 1989. P. 240–265.
- [3] Davis D. R., Ryan E. V. On collisional disruption: Experimental results and scaling laws // *Icarus*. 1990. Vol. 83. P. 156–182.
- [4] Ryan E. V., Hartmann W. K., Davis D. R. Impact experiments 3: Catastrophic fragmentation of aggregate targets and relation to asteroids // *Icarus*. 1991. Vol. 94. P. 283–298.
- [5] Nakamura A., Fujiwara A. Velocity distribution of fragments formed in a simulated collisional disruption // *Icarus*. 1991. Vol. 92. P. 132–146.
- [6] Okamoto C., Arakawa M. Experimental study on the collisional disruption of porous gypsum spheres // *Meteorit. Planet. Sci.* 2009. Vol. 44. P. 1947–1954.
- [7] Flynn G. J., et al. Dust production from the hypervelocity impact disruption of the Murchison hydrous CM2 meteorite: Implications for the disruption of hydrous asteroids and the production of interplanetary dust // *Planet. Space Sci.* 2009. Vol. 57. P. 119–126.
- [8] Michikami T., et al. Fragment shapes in impact experiments ranging from cratering to catastrophic disruption // *Icarus*. 2016. Vol. 264. P. 316–330.
- [9] Pokorny P., Brown P. G. A reproducible method to determine the meteoroid mass index // *Astron. Astroph.* 2016. Vol. 592. Art. A150.
- [10] Шустов Б. М., Тутуков А. В. О начальном спектре масс астрономических объектов // *Астрон. журн.* 2018. Т. 95. С. 765–774.
- [11] Brykina I. G., Egorova L. A. On the mass distribution of fragments of an asteroid disrupted in the Earth's atmosphere // *Advances in Astronomy*. 2021. Art. 9914717.

О наискорейшем перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом

Васькова В. С.

vsvaskova@yandex.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. В работе рассматривается способ наискорейшего перемещения космического аппарата (КА) с неидеальным солнечным парусом вдоль троса, концы которого закреплены на гелиоцентрических космических станциях. При этом используемая математическая модель солнечного паруса предполагает возможность как отражения, так и поглощения фотонов. С учетом сделанных предположений записываются урав-

нения движения космического аппарата, рассчитывается оптимальный угол наклона солнечного паруса по отношению к направлению солнечных лучей, зависящий от отражательной способности материала паруса и положения КА на траектории движения, и определяется время перелета.

Ключевые слова: солнечный парус, коэффициент отражения, космическая тросовая система, гелиоцентрическая космическая станция, односторонняя связь.

Как уже было показано ранее, космический аппарат (КА) с плоским солнечным парусом [1, 2] может быть использован для перемещения грузов вдоль троса, связывающего между собой две тяжёлые гелиоцентрические космические станции, движущиеся по одной круговой орбите [3]. В этом случае движение КА будет ограничено некоторым эллипсоидом вращения с большой полуосью, равной половине длины троса, и фокусами на станциях. Если ограничиться движением в плоскости орбиты станций, то наискорейшее перемещение КА будет происходить по дуге эллипса, наиболее удалённой от Солнца.

Так как принцип действия солнечного паруса, являющегося в рассматриваемом случае единственным движителем КА, основан на передаче ему импульсов фотонов, использование неидеального паруса, только частично отражающего солнечную радиацию, приводит к увеличению времени перемещения между станциями по сравнению с ситуацией, когда используется идеальный парус тех же габаритов. В настоящей работе движение КА изучается в предположении, что трос является невесомым, идеально гибким и нерастяжимым (то есть реализующим идеальную одностороннюю связь), а солнечный парус не является идеальным, но подчиняется упрощенной модели (рис. 1), когда фотоны либо

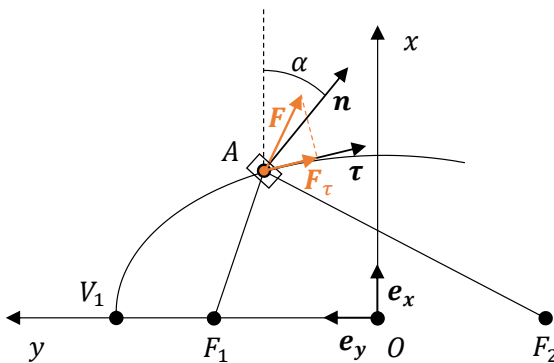


Рис. 1. Модель неидеального солнечного паруса.

отражаются, либо поглощаются его поверхностью, то есть сила, создаваемая солнечной радиацией, определяется соотношением

$$\mathbf{F} = PS(k\mathbf{n} \cos^2 \alpha + \frac{1-k}{2}\mathbf{e} \cos \alpha)$$

где S — площадь паруса, P — характерная величина солнечного давления, k — коэффициент отражения (то есть доля отраженных фотонов), α — угол между нормалью \mathbf{n} к солнечному парусу и направлением солнечных лучей, \mathbf{e} — орт этого направления. Очевидно, что в этой модели $k = 1$ соответствует идеальному парусу, а $k = 0$ — идеально черной поверхности материала паруса.

Если расстояние между станциями не превышает 2–200 км, то максимально возможная величина силы солнечной радиации, действующей на парус, превышает абсолютную величину разности сил притяжения Солнца и переносной силы инерции, действующих на аппарат в орбитальной системе отсчета, в 10^5 – 10^6 раз. Поэтому в уравнениях движения целесообразно учитывать только силу солнечной радиации и кориолисову силу. Так как скорость перемещения КА вдоль троса невелика, его натяжение незначительно, то и влияние КА на движение станций, по крайней мере на небольших временах, можно считать несущественным. Кроме того, при движении в плоскости орбиты станций при натянутом тросе, кориолисова сила всегда ортогональна траектории движения, то есть неинерциальность орбитальной системы отсчета также оказывается несущественной.

Для оптимального по быстродействию перемещения между станциями необходимо выбирать положение паруса таким образом, чтобы проекция силы \mathbf{F} на касательную к траектории была максимальной. При этом если движение начинается и заканчивается с нулевыми относительными скоростями, на первом участке траектории (участке разгона) эта проекция должна быть направлена по движению, а на втором (участке торможения) — против движения. И в том, и в другом случае определение необходимого угла α сводится к поиску одного из корней некоторого кубического уравнения с коэффициентами, зависящими от коэффициента отражения и положения КА на траектории движения. Интересным представляется тот факт, что искомый корень определяет угол, находящийся между соответствующим решением для идеального паруса и углом, рекомендуемым яхтсменами для движения килевого парусного судна галсами против ветра. Используя найденный корень, можно определить минимально возможную продолжительность движения КА между станциями, в частности, если относительные скорости в начальной и конечной точках равны нулю.

Литература

- [1] Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. М.: URSS, 2017. 432 с.
- [2] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: URSS, 2018. 320 с.

- [3] Васькова В. С., Родников А. В. Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // В книге: XLVII Академические чтения по космонавтике 2023. Сборник тезисов, посвященный памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Москва, 2023. С. 286–287.

Астероиды, сближающиеся с Землей и Юпитером

Галушина Т.Ю., Летнер О.Н.

tatyana.galushina@mail.tsu.ru, oksana.letner@gmail.com

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
634050, Российская Федерация, Томск, пр. Ленина, 36

Аннотация. Приводятся результаты выявления астероидов, сближающихся как с Землей, так и с Юпитером. Из 34494 астероидов, сближающихся с Землей, составлен предварительный перечень тех из них, что способны подходить к орбите Юпитера на расстояние 1 а.е. и ближе. Таких астероидов оказалось 4091. Для выявления сближений этих астероидов с планетой гигантом численно прослежена их орбитальная эволюция на интервале времени около 4000 лет. Показано, что 1408 астероидов сближаются с Юпитером на рассматриваемом интервале времени. В ближайшие 100 лет сближения с планетой испытают 854 объекта, самое тесное из них (0.075733 а.е.) принадлежит астероиду 2010 XB73 в 2089 году.

Ключевые слова: астероиды, сближающиеся с Землей, сближения с Юпитером, численное моделирование.

Введение. Задача исследования динамики астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), и выявления особенностей их движения является неотъемлемым этапом прогнозирования и дальнейшего предотвращения астероидной опасности для Земли. Среди АСЗ важное место занимают объекты, близко подходящие к орбите Юпитера и испытывающие сближения с ним [1]–[3]. Такая особенность играет большую роль в прогнозировании движения АСЗ, поскольку тесные и/или многократные сближения с таким гигантом, как Юпитер, способны значительным образом изменить орбиту исследуемого объекта и увеличить риск тесных сближений или столкновений с другими планетами, в том числе с Землей. В данной работе приводятся результаты выявления астероидов, сближающихся как с Землей, так и с Юпитером.

Методики и алгоритмы. Методика выявления АСЗ, сближающихся с Юпитером, включает в себя два основных этапа. На первом этапе производится предварительный поиск астероидов, потенциально сближающихся с Юпитером. Подобно выявлению объектов класса АСЗ, для которых перигелийное расстояние ограничивается сверху значением 1.3 а.е., нами было наложено условие на афелийное расстояние астероида, согласно которому афелий АСЗ

будет находиться на расстоянии не больше 1 а.е. от перигелия Юпитера. То есть афелийное расстояние астероида принимает значения $Q \geq 3.95$ а.е.

На втором этапе среди АСЗ, потенциально сближающихся с Юпитером, необходимо выбрать астероиды, испытывающие сближения с гигантом. Данное исследование выполнялось путем численного интегрирования уравнений движения этих объектов методом Эверхарта [4, 5] с начальными параметрами, взятыми из каталога Е. Боуэлла [6] на эпоху 31.03.2024. Движение астероидов рассматривалось в прямоугольной гелиоцентрической системе координат, отнесенной к стандартной эпохе J2000.0. Модель сил соответствовала используемой в каталоге Боуэлла и включала в себя возмущения от всех больших планет, Плутона, Луны и трех крупных астероидов (Цереры, Паллады и Весты). Поиск сближений осуществлялся на интервале времени (0; 4024) лет. Исследование выполнялось с использованием программного комплекса ИДА [7] и суперкомпьютера ТГУ «СКИФ Cyberia» (<https://cyberia.scc.tsu.ru/>).

Результаты. По состоянию на 12.03.2024 каталог Боуэлла содержал данные 1352782 астероидов, среди которых 34494 относятся к классу АСЗ. Предварительный поиск АСЗ, потенциально сближающихся с Юпитером, показал, что 4091 астероид потенциально способен подойти к гиганту на расстояние 1 а.е. и меньше.

Для выявления особенностей движения этих астероидов, а точнее, для поиска АСЗ, сближающихся с Юпитером, была построена их орбитальная эволюция путем численного интегрирования уравнений их движения на интервале времени (0; 4024) лет.

Исследование показало, что среди 4091 АСЗ, потенциально сближающихся с Юпитером, 1408 астероидов испытывают сближения с гигантом на рассматриваемом промежутке времени. Тесные сближения с Юпитером (порядка 0.1 а.е.) испытывают 62 астероида, минимальное из которых 0.001727 а.е. принадлежит астероиду 2017 VT14. Сближение состоится в 3630 году. Астероид регулярно и многократно сближается с Юпитером, как при интегрировании в прошлое, так и в будущее. Такая особенность чаще всего приводит к снижению точности интегрирования, и как следствие, к уменьшению времени прогнозирования движения астероида. В случае с астероидом 2017 VT14 тесное сближение в 3630 году приводит к потере точности, и как следствие, к невозможности прогнозирования его движения в будущем после этого сближения.

В качестве примера на рис. 1 приводится проекция орбиты астероида 2017 VT14 на плоскость эклиптики в гелиоцентрической системе координат. Орбита строилась в окрестности сближения 3630 года с использованием программного комплекса ИДА. Из рисунка видно, что сближения с Юпитером оказывают влияние на элементы орбиты объекта и приводят к ее пространственному смещению.

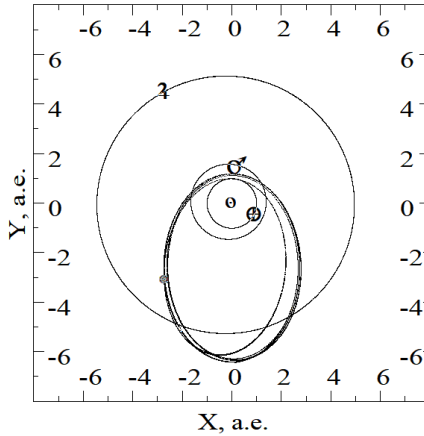


Рис. 1. Проекция орбиты астероида 2017 VT14 на плоскость эклиптики в гелиоцентрической системе координат.

Особый интерес представляют АСЗ, испытывающие сближения с Юпитером в ближайшем будущем. В ближайшие 100 лет из 1408 астероидов с планетой сближаются 854. В таблице 1 приводится информация для 14 астероидов, наиболее тесно сближающихся с Юпитером за этот период, а именно, число наблюдений N , интервал наблюдений ΔT в сутках, минимальное сближение d_{min} в ближайшие 100 лет в а.е. и дата этого сближения.

Таблица 1. Наиболее тесные сближения АСЗ с Юпитером в ближайшие 100 лет.

Астероид	N	ΔT	d_{min}	Дата
2010 XB73	19	1	0.075733	15.10.2089
2011 CY71	10	0	0.086681	28.02.2069
2014 HN197	16	4	0.10587	10.04.2031
614374 2009 CR2	157	10072	0.120914	08.04.2047
2002 GJ8	122	7846	0.161441	09.04.2098
2007 XL18	10	1	0.177276	10.06.2031
2021 JC5	31	8	0.178012	14.10.2035
2010 XP	15	0	0.185255	08.01.2043
2017 VT14	79	83	0.186673	07.12.2089
2021 AX	32	7	0.197766	05.10.2105
2013 HN158	14	17	0.198258	26.09.2105
2023 RL16	30	10	0.203519	29.06.2046
2021 RP	40	13	0.207628	08.08.2101
2012 HM8	95	19	0.209618	21.09.2119

Из таблицы 1 видно, что минимальное сближение с Юпитером испытает астероид 2010 XB73 в 2089 году, в то время как ближайшее сближение порядка 0.1 а.е. произойдет у 2014 HN197 уже в 2031 году. Безусловно такие объекты требуют пристального внимания, как до сближения, так и после с целью уточнения параметров их движения. Так как значительная часть астероидов наблюдалась на короткой орбитальной дуге, то есть их орбиты плохо определены, для получения более достоверной информации стоит дождаться получения нового наблюдательного материала.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2024-0005). Исследование выполнено с использованием суперкомпьютера СКИФ Cyberia Томского государственного университета.

Литература

- [1] Быкова Л.Е., Галушина Т.Ю., Раздымакина О.Н. Астероиды, сближающиеся с Землей и Юпитером // Изв. Вузов. Физика. 2007. Т. 50. № 12/2. С. 66–76.
- [2] Fernández Julio A., Sosa A., Gallardo T., Gutierrez Jorge N. Assessing the physical nature of near-Earth asteroids through their dynamical histories // *Icarus*. 2014. Vol. 238. P. 1–12.
- [3] Быкова Л.Е., Летнер О.Н. Исследование хаотической динамики АСЗ, сближающихся с Юпитером и движущихся в окрестности орбитальных резонансов // Известия вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 10–2. С. 52–56.
- [4] Everhart E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings // *International Astronomical Union Colloquium*. Cambridge University Press, 1985. Vol. 83. P. 185–202.
- [5] Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса-Эверхарта // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15. № 4. С. 31–46.
- [6] Bowell E., Muinonen K., Wasserman L. H. A public-domain asteroid orbit database // *Asteroids, Comets, Meteors 1993: Proceedings of the 160th Symposium of the International Astronomical Union, Held in Belgirate, Italy, June 14–18, 1993*. Springer Netherlands, 1994. P. 477–481.
- [7] Galushina T. Yu., Letner O. N. Modified version of IDA software and its application to the study of the motion of asteroid 2007 PR10 // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 2021. V. 32. Is. 4. P. 355–370.

Об эволюции кеплеровских элементов астероида во внешней круговой задаче трех тел

Доброславский А.В., Красильников П.С.

a.dobroslavskiy@gmail.com, krasil06@rambler.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Рассмотрена классическая задача об анализе вековых возмущений кеплеровских элементов орбиты астероида во внешней ограниченной круговой задаче трех тел, когда орбита малого тела с фокусом в Солнце возмущается гравитационным притяжением со стороны внутреннего тела (Юпитера). Показано, что вековая часть пертурбационной функции допускает представление в виде ряда Фурье и степенного ряда с коэффициентами, выраженными через функции Клаузена. Для редуцированной системы с одной степенью свободы построены фазовые портреты колебаний в плоскости эксцентриситета и аргумента перигея в четвертом приближении. Также исследован радиус сходимости степенного ряда при фиксированных значениях интеграла Лидова–Козаи. Показано, что в областях расходимости степенной ряд является асимптотическим по Пуанкаре. Асимптотичность ряда позволяет использовать методы теории возмущений в областях расходимости ряда, исключая равномерно близкие орбиты.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, вековые возмущения, пертурбационная функция.

Введение. Численный анализ внешней круговой ограниченной задачи трех тел хорошо известен [1]. В нашем докладе дано новое представление возмущающей силовой функции в виде степенного ряда по отношению $\mu = r_J/a$. Коэффициенты ряда имеют компактный вид и выражаются через гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена. Это разложение описывает пертурбационную функцию как однозначную аналитическую функцию параметра μ , которую можно эффективно раскладывать в ряды по кеплеровским элементам орбиты, строить ее усечения любых порядков малости, находить производные и т.д. Одна из целей доклада — доказательство асимптотичности степенного ряда в областях его расходимости. Асимптотичность ряда позволит использовать традиционные методы теории возмущений для анализа эволюции движений астероида при произвольных значениях μ из интервала $(0, 1)$, за исключением случая равномерно близких орбит ($\mu \approx 1$).

Постановка задачи. Рассмотрим пространственную круговую ограниченную задачу трех тел, в которой пассивно гравитирующий астероид P движется по оскулирующей эллиптической орбите вокруг Солнца S и Юпитера J массы m_J , вращающихся друг относительно друга по круговой орбите радиуса r_J . Будем считать невозмущенную орбиту астероида кеплеровским эл-

липом, с фокусом в точке S . Пусть плоскость вращения Солнца и Юпитера Π_0 составляет с плоскостью движения астероида Π угол i (рис. 1).

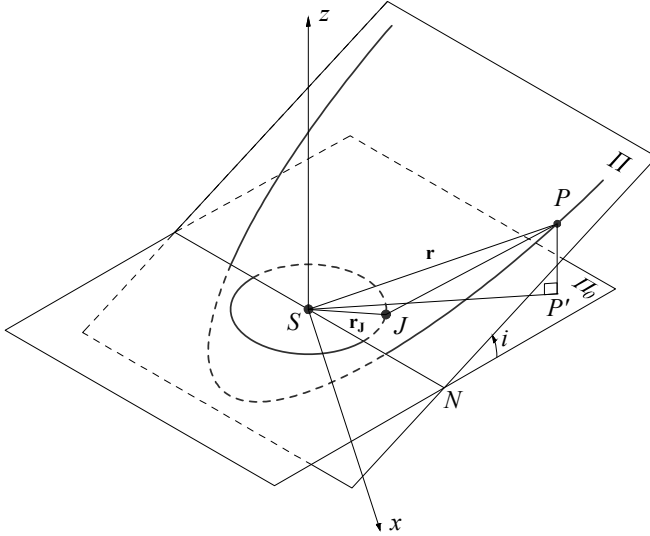


Рис. 1. Постановка задачи.

Введем неинерциальную гелиоцентрическую систему координат с центром в точке S , ось Sx которой направим в точку весеннего равноденствия, ось Sz — ортогонально плоскости вращения массивных тел, а осью Sy (на рис. 1 не указана) дополним систему координат до правой. Введем \mathbf{r} — радиус-вектор астероида и \mathbf{r}_J — радиус-вектор тела J , угол между ними обозначим γ . Угол между осью Sx и линией узлов SN обозначим Ω — это долгота восходящего узла невозмущенной орбиты астероида в плоскости Π_0 . Введем также e , ω и l — соответственно эксцентриситет, аргумент перигея и среднюю долготу астероида в плоскости Π . Обозначим λ_J долготу Юпитера в плоскости Π_0 .

Рассмотрим «внешний» вариант задачи трех тел, когда параметры движения тела P удовлетворяют условию: $a > r_J$, где a — большая полуось невозмущенной орбиты астероида.

Усредненная пертурбационная функция. Возмущающая функция для внешней ограниченной круговой задачи трех тел имеет вид:

$$R = fm_J \left[\frac{1}{r} + \frac{r_J^3 - r^3}{r^2 J r^2} + \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r_J}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma) \right], \quad (1)$$

где f — постоянная тяготения, P_k — полином Лежандра степени k .

После усреднения (1) по λ_J — долготе тела J и l — средней долготе астероида P , аналогично [2], было получено представление пертурбационной функции в виде степенного ряда по отношениям r_J/a :

$$R^{**} = \frac{fm_J}{a} + \frac{fm_J}{a\sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_J}{a}\right)^{2k} D_k, \quad (2)$$

здесь

$$D_k = (1+e)^{1-2k} P_{2k}(0) \left(F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 1-2k, 1; \frac{2e}{e-1} \right) P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^k A_{2n}^{2k} (-1)^n \cos 2n\omega \right),$$

$$A_m^{(k)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 1-k; 1-n, 1+n; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(k-n)!}{(k+n)!} P_k^{(n)}(0) P_k^{(n)}(\cos i),$$

а $F_{2,1}$, $F_{3,2}^{reg}$ — гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена.

Качественный анализ. Уравнения в оскулирующих элементах в случае дважды усредненной пертурбационной функции, как известно, имеют первые интегралы:

$$a = c_0, \quad (1-e^2) \cos^2 i = c_1, \quad R^{**} = h.$$

Второй из этих интегралов называют интегралом Лидова–Козай, с его помощью можно исключить угол i и, таким образом, получить редуцированную систему уравнений с одной степенью свободы:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}. \quad (3)$$

Очевидно, что интеграл энергии уравнений (3) имеет вид $\hat{R} = c_2$.

Для редуцированного ряда (2), в котором удержано 4 члена, были построены фазовые портреты (рис. 2) в плоскости кеплеровских элементов e , ω орбиты астероида. Значение $a = 3r_J$, а интеграл c_1 имеет значения 0.1 и 0.3.

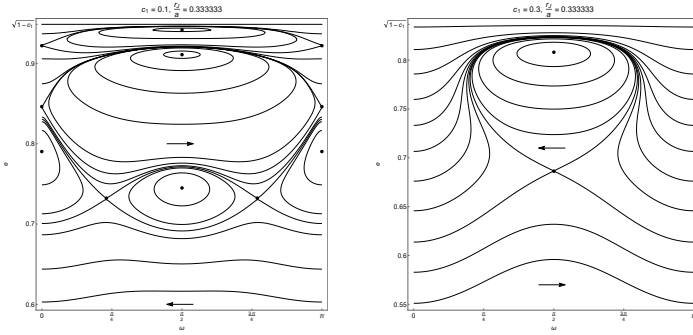


Рис. 2. Фазовые портреты.

Сходимость ряда, его асимптотические свойства. С помощью формулы Коши–Адамара

$$\rho = \left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|D_k|} \right)^{-1}, \tag{4}$$

численно исследован радиус ρ сходимости ряда (2) в плоскости оскулирующих кеплеровских элементов e и ω при фиксированном значении константы интеграла Лидова–Козай c_1 : радиус сходимости представляет непрерывную простую кривую $\rho(e, \omega, c_1) = \mu$, выше которой ряд (2) расходится, ниже — сходится при заданном μ (рис. 3). При вычислении ρ в формуле (4) полагалось $k = 100$. Случай $\mu \approx 1$, представленный на рис. 3, неточен, т. к. требует расчетов при $k > 100$. Рассмотрен вопрос о поведении ряда (2) в областях расходимости.

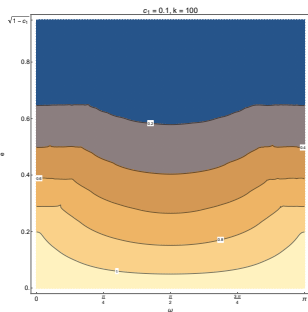


Рис. 3. Кривые $\rho(e, \omega, c_1)$.

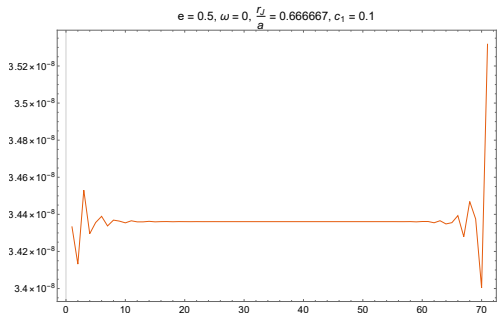


Рис. 4. Асимптотичность ряда.

Численно показано (рис. 4), что этот ряд является асимптотическим по Пуан-

каре, т. е. $\|R^{**} - R_N^{**}\| \sim o(\mu^N)$ на конечном промежутке времени, где R_N^{**} — частичная сумма ряда. Это значит, что точность приближения ряда его частичной суммой — малая величина высокого порядка. Поэтому, для исследования эволюции кеплеровских элементов орбиты астероида в областях расходимости ряда (2), можно использовать классические методы теории возмущений, основанные на идее усечения этого ряда.

Литература

- [1] Вашковьяк М. А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. I. Качественное исследование // Космические исследования. 1981. Т. 19. № 1. С. 5–18.
- [2] Красильников П. С., Доброславский А. В. Усредненная круговая пространственная ограниченная задача трех тел: внутренний вариант, новые результаты // ДАН. Математика, Информатика, Процессы Управления. 2023. Т. 512. С. 33–41.

Архитектура системы билатерального управления космическим роботом

Ефимова П. А., Алферов Г. В., Шиманчук Д. В.

p.a.efimova@spbu.ru, g.alferov@spbu.ru, d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе представлена архитектура системы дистанционного управления космическим роботом с силовой обратной связью. В качестве управляемого объекта рассматривается свободнолетающий космический робот, функционирующий в окрестности орбитальной станции. Управление осуществляется в несколько этапов, происходящих в космосе и в наземном центре управления. Также представлен математический анализ исполнительской системы.

Ключевые слова: робототехника, космический робот-манипулятор, билатеральное управление, силовая обратная связь.

Введение. Использование дистанционно управляемых роботов для выполнения различных задач в космосе имеет большой экономический потенциал и позволяет избавиться от необходимости пребывания космонавтов в опасной для них среде. В связи с этим, создание систем дистанционного управления для космических роботов является важной и актуальной задачей. Одной из основных проблем, затрудняющих разработку систем телеуправления космическими роботами, является задержка в передаче управляющих сигналов с наземной станции и обратной связи от робота. В качестве решения данной задачи, профессор Феликс Михайлович Кулаков предложил новую концепцию управления космическим роботом, проходящую в несколько этапов (рис. 1) [1, 2, 3].

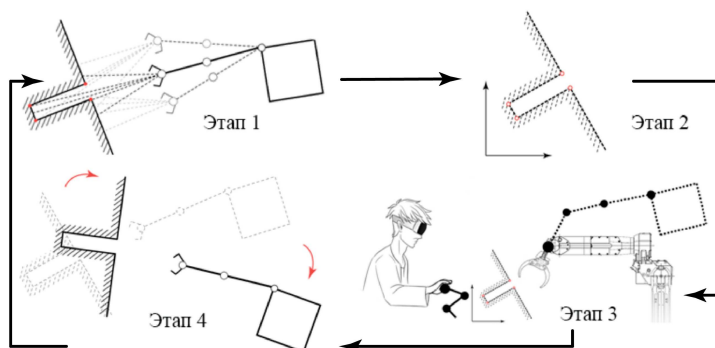


Рис. 1. Этапы управления космическим роботом методом Ф.М. Кулакова.

На первом этапе происходит сбор информации об окружающей космической среде. На последующем этапе, на основе полученных данных, формируется модель рабочей среды. Третий этап — отработка необходимых операций на наземной станции посредством системы билатерального управления. Данная система включает в себя виртуальную или натурную модель окружающей среды, вспомогательного робота-манипулятора с рабочим инструментом идентичным инструменту космического робота, виртуальную модель космического робота, отображающуюся для человека-оператора в очках дополненной реальности и податливого робота-манипулятора, необходимого для управления положением инструмента вспомогательного робота-манипулятора. На четвертом этапе, космический робот, адаптируясь к смещению рабочей среды и осуществляя обход препятствий, выполняет операцию, отработанную на Земле. Этапы повторяются до полного выполнения поставленной миссии.

Система билатерального управления. Рассмотрим схему билатерального управления виртуальным космическим роботом на наземной станции (рис. 2) [4, 5, 6]. Человек-оператор (блок H – human), при помощи податливого робота-манипулятора (блок M – master robot), задает необходимые усилия и перемещения инструмента ведомому роботу (блок S – slave robot), инструмент которого точно совпадает с инструментом космического робота. Таким образом, рабочий инструмент ведомого робота воздействует на окружающую среду (блок E – environment) с той же силой, с какой человек воздействовал на податливый робот-манипулятор, а также считывает ее силу реакции и перемещение. Далее формируется соответствующий закон управления для податливого робота, с целью передать через него человеку-оператору силу реакции среды. В то же время, учитывая текущее положение и ориентацию рабочего инструмента, вычисляется положение характеристических точек виртуального

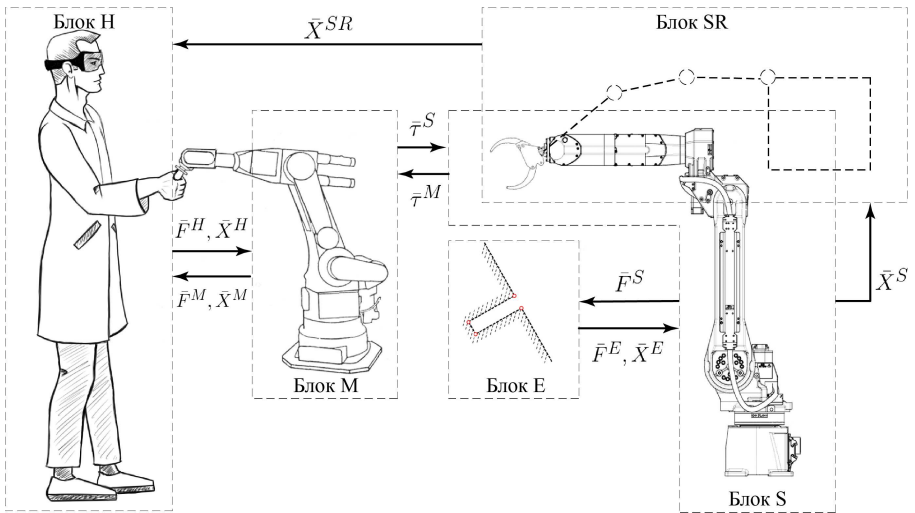


Рис. 2. Этап управления космическим роботом на наземной станции.

космического робота для их дальнейшего отображения в очках дополненной реальности.

Проведем математический анализ данной структуры управления. После того как человек–оператор оказал воздействие на инструмент ведущего робота блок M получил данные о силе воздействия (\bar{F}^H) и о перемещении инструмента (\bar{X}^H). Положение инструмента рассчитывается посредством прямой задачи кинематики манипулятора, т. е. с помощью установленных датчиков в суставах манипулятора, считываются текущие обобщенные координаты \bar{q}^M , исходя из которых формируется текущее положение и ориентация инструмента:

$$\bar{X}^H = {}^0T_6^M \cdot {}^6\bar{r}^M,$$

здесь ${}^0T_6^M = {}^0T_1^M \cdot \dots \cdot {}^5T_6^M$ — матрица однородного преобразования ведущего робота, ${}^6\bar{r}^M$ — однородный вектор характеристической точки в системе координат инструмента.

Далее, учитывая необходимое смещение инструмента (\bar{X}^H), определяется соответствующее изменение обобщенных координат ведомого робота (блок S), посредством решения обратной задачи кинематики манипулятора:

$$\bar{q}^S = f^S(\bar{X}^H).$$

После чего необходимо сформировать соответствующий закон управления $\bar{\tau}^S$, который обеспечит заданное перемещение с заданным усилием. Для этого надо решить прямую задачу динамики, подставив в уравнение закон изменения обобщенных координат и заданное усилие, определить вектор управления:

$$A^S(\bar{q}^S)\ddot{\bar{q}}^S + B^S(\bar{q}^S, \dot{\bar{q}}^S) + g^S(\bar{q}^S) = \bar{\tau}^S + \bar{F}^E + \bar{F}^H.$$

В то же время, учитывая положение инструмента ведомого манипулятора, определяется положение характеристических точек виртуального космического робота, посредством решения обратной и прямой задачи кинематики [7]:

$$\bar{q}^{SR} = f^{SR}(\bar{X}^S) \rightarrow \bar{X}^{SR} = {}^0 T_9^{SR} \cdot \bar{q}^{SR}.$$

Положение характеристических точек виртуального космического робота отображается для человека–оператора в очках дополненной реальности.

После перемещения инструмента ведомого робота, считается сила реакции и перемещение рабочей среды, затем формируется соответствующий закон управления для ведущего робота. Это осуществляется путем решения прямой задачи динамики для ведущего робота:

$$A^M(\bar{q}^M)\ddot{\bar{q}}^M + B^M(\bar{q}^M, \dot{\bar{q}}^M) + g^M(\bar{q}^M) = \bar{\tau}^M + \bar{F}^H + \bar{F}^E.$$

Перемещаясь необходимым образом, ведущий робот оказывает воздействие на руку человека–оператора, для того чтобы он мог почувствовать силу реакции рабочей среды. Далее процесс повторяется, пока не будет отработана заданная операция.

Заключение. В работе представлена архитектура системы дистанционного управления космическим роботом, а также структура билатерального управления его виртуальной моделью на наземной станции. Приведен математический анализ системы билатерального управления виртуальным космическим роботом на наземной станции.

Литература

- [1] Kulakov F., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G. Robot Master Slave and Supervisory Control with Large Time Delays of Control Signals and Feedback // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 55. P. 635–682.
- [2] Alferov G., Efimova P., Shymanchuk D., Kadry S., Meqdad M. N. Bilateral Control System of The Space Robot with Large Delays // Telkommnika. 2021. Vol. 19. No. 6. P. 1962–1974.
- [3] Kulakov F., Kadry S., Alferov G., Efimova P. Remote Control of Space Robots Change-Adaptive in Its External Environment // International Journal of Online and Biomedical Engineering. 2019. Vol. 15. No. 7. P. 84–98.

- [4] Alferov G. V., Efimova P. A., Korolev V. S., Shymanchuk D. V. Kulakov's Method of Bilateral Remote Control of a Space Manipulation Robots // Proceedings of 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2020. Moscow, 2020. P. 9140469.
- [5] Кулаков Ф. М., Ефимова П. А. Билатеральное управление космическим роботом с адаптацией к изменениям внешней среды // XII мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2019). Материалы XII мультиконференции. В 4-х томах. Редколлегия: И. А. Каляев, В. Г. Пешехонов [и др.]. 2019. С. 49–52.
- [6] Кулаков Ф. М., Алферов Г. В., Ефимова П. А. Копирующее управление удаленными роботами с задержкой в передаче сигнала // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 3(46). С. 47–55.
- [7] Ефимова П. А., Шиманчук Д. В. Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.

Транзитные траектории временного захвата в окрестности точек либрации для проектирования низкоэнергетических межпланетных перелётов

Иванюхин А. В.

ivanyukhin.a@yandex.ru

- ¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики МАИ,
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,
²Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы,
117198, Российская Федерация, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Одним из перспективных инструментов проектирования низкоэнергетических перелётов выступают траектории временного захвата, в частности осуществляющие транзит космического аппарата (КА) от одного массивного тела к другому. Траектории такого типа позволяют снизить затраты топлива на перелёт за счёт использования динамики движения КА в системе двух массивных тел. В работе рассматривается подход к проектированию орбит временного захвата основанных на транзитных орбитах в окрестности точек либрации L1 и L2, порождённых их инвариантными многообразиями. Движение по транзитным траекториям и оценка длительности временного захвата производиться в рамках эфемеридных моделей 3-х и 4-х тел. Рассмотрена возможность использования предложенного подхода для проектирования траекторий к Луне, Марсу и Юпитеру, а также для исследования парных объектов Солнечной системы (Плутон — Харон, Патрокл — Менетий и т. д.).

Ключевые слова: низкоэнергетические перелёты, транзитные орбиты, временный захват, задача трёх тел.

Введение. Для повышения эффективности транспортных операций в системе, состоящих из нескольких массивных тел, является целенаправленное использование эффектов динамики задач трёх и четырёх тел. Эта идея привела к новому классу перелётов — низкоэнергетические траектории, подразумевающих минимальное изменение энергии при перелёте между массивными телами. Одним из перспективных для проектирования низкоэнергетических перелётов механизмов являются траектории временного захвата. Такие траектории при проектировании лунных миссий начали исследоваться ещё в середине прошлого века в работах В.А. Егорова [1], В.Г. Фесенкова, Девидсона и других. Значительным шагом в проектировании лунных траекторий временного захвата стало их рассмотрение в рамках четырёх тел, с учётом влияния Солнца — WSB-траектории (Weak Stability Boundary), предложенные Белбруно [2] и аналитически исследованные В.В. Ивашкиным [3]. Такие траектории уже были реализованы КА Hiten (JAXA), SMART-1 (ESA), Genesis и GRAIL (NASA), Danuri (KARI) и т. д. Следуя работам В.А. Егорова, Бельбруно и В.В. Ивашкина будем называть захватом пребывание КА в грависфере, попавшего туда из внешней части пространства, при отрицательных значениях кеплеровской энергии:

$$(t) = v^2(t) - \frac{2\mu}{r(t)} \leq 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (1)$$

где h — кеплеровская энергия, r , v — положение и скорость относительно меньшего тела, μ — гравитационная постоянная меньшего тела, t_1 — момент гравитационного захвата, t_2 — момент гравитационного освобождения. Также для повышения эффективности транспортных операций с большими затратами характеристической скорости целесообразно использование электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) малой тяги, обладающих высоким удельным импульсом, что позволяет существенно сократить затраты топлива на перелет. При этом перелёт с малой тягой характеризуются медленным изменением константы энергии. Поэтому типичная траектория перелета между двумя массивными телами с малой тягой осуществляет транзит через горловину в окрестности точек либрации L1 и L2.

Задача трёх тел. Для изучения качественных особенностей движения в системе двух массивных тел наиболее полезными оказываются модели ограниченной круговой и ограниченной эллиптической задачи трёх тел (ОКЗТТ и ОЭЗТТ). Анализ ОКЗТТ показывает, что транзит от одного массивного тела к другому с минимальным изменением механической энергии должен проходить в окрестности точек либрации L1 и L2 с нулевой скоростью [4]. Такие транзитные траектории формируются устойчивыми и неустойчивыми многообразиями точек либрации.

Переход к ОЭЗТТ приводит к тому, что точки либрации становятся исключительно геометрическим понятием и не являются решением в этой модели. То

есть точки либрации обладают мгновенной скоростью, соответствующей пульсации системы координат в переменных Нехвила. Анализ линеаризованной в окрестности точки либрации системы показывает, что транзит через точку либрации (с нулевой в пульсирующей системе координат скоростью) возможен не в любой момент времени, и зависит от истинной аномалии орбиты малого тела. Диапазоны значений истинной аномалии, допускающих транзит, находятся в окрестности 90° и 270° по истинной аномалии, что соответствует окрестности максимальных значений радиальной компоненты в орбитальной системе координат. При этом в этих областях транзит имеет различное направление. Например, в случае системы Земля — Луна для L1 в диапазоне 47.64° – 132.90° перелёт происходит от Луны к Земле, а при значениях от -47.64° до -132.90° — от Земли к Луне.

Задача четырёх тел. Очевидно, что при переходе от эллиптической задачи трёх тел к возмущённой модели четырёх тел произойдёт значительное возмущение рассматриваемых решений. Подбор даты пролёта точки либрации позволяет определить транзитную траекторию, образованную инвариантными многообразиями, достаточно долго пребывающую у малого тела. На рис. 1 приведены примеры траекторий баллистического захвата в паре Земля — Луна в возмущённой модели движения: на графиках (а) и (б) показана орбита долговременного (более 1400 суток) баллистического захвата, на графиках (в) и (г) — траектория захвата приводящая к выходу КА из системы на гелиоцентрическую траекторию.

Заключение. Предложен метод определения орбиты захвата на основе анализа транзитных орбит в окрестности точек либрации L1 и L2 [5, 6], порожденных их инвариантными многообразиями. Проведён анализ возможности баллистического захвата на основе траекторий, образованных инвариантными многообразиями, в моделях ограниченных круговой, эллиптической и возмущённой задач трёх тел. Показана возможность формирования траекторий временного захвата путём подбора момента пролёта точки либрации и ориентации вектора скорости. Подобный анализ показал возможность использования траекторий захвата, образованных инвариантными многообразиями L1, L2, для перелётов в Луне на орбиту долговременного захвата и выхода на гелиоцентрическую траекторию, для межпланетных перелётов с выходом на орбиты спутников Марса (Фобоса и Деймоса), галлиевых спутников Юпитера и к парным объектам Солнечной системы (Плутон — Харон, Патрокл — Менетий и т. д.). Транзитные траектории такого типа позволяют получить орбиты баллистического захвата подходящие для реализации КА с ЭРДУ. В частности, получены траектории перелёта КА с ЭРДУ в системе Земля — Луна на транзитные траектории в окрестности точек либрации L1, L2 представленные на рис. 1 [5, 6].

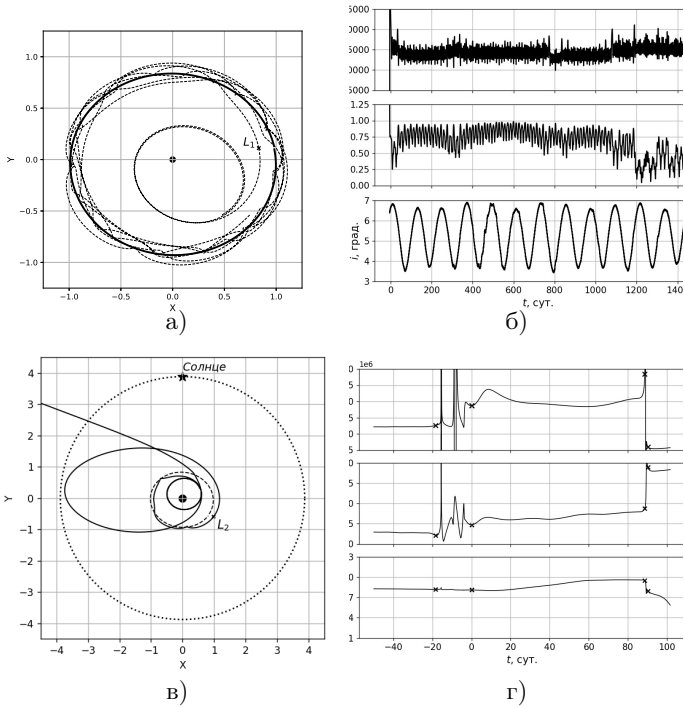


Рис. 1. Траектории баллистического захвата Луной: а) — траектория долговременного захвата, б) — оскулирующие элементы окололунного участка траектории долговременного захвата, в) — отлётная траектория захвата, г) — оскулирующие околоземные элементы отлётной траектории захвата.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>.

Литература

- [1] Егоров В. А. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек // Искусственные спутники Земли. 1959. № 3. С. 3–12.
- [2] Belbruno E. A., Miller J. K. Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with ballistic capture // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1993. V. 16. № 4. P. 770–775.
- [3] Ивашкин В. В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Лунной // Доклады Академии наук. 2002. Т. 387. № 2. С. 196–199.

- [4] Conley C. C. Low energy transit orbits in the restricted three-body problems // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1968. V. 16. No. 4. P. 732–746.
- [5] Иванюхин А. В., Ивашкин В. В., Петухов В. Г., Юн С. У. Проектирование низкоэнергетических перелетов к Луне с малой тягой на траектории временного захвата // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 5. С. 368–381.
- [6] Ivanyukhin A. V., Ivashkin V. V., Petukhov V. G., Yoon S. W., Low-energy lunar transfer design using high- and low-thrust on ballistic capture trajectories // IAC-23-C1.9.7, Proceedings of the International Astronautical Congress, 74th International Astronautical Congress (IAC), Baku, Azerbaijan, 2023, 2–6 October.

Метод Охоцимского–Егорова для решения задачи Эйлера–Ламберта

Ивашкин В. В.^{1,2} *Иванюхин А. В.*^{2,3}

v.v.ivashkin@mail.ru, ivanyukhin.a@yandex.ru

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4,

²Научно-исследовательский институт прикладной механики и
электродинамики МАИ,

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское ш., 4,

³Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы,
117198, Российская Федерация, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассмотрен метод решения задачи Эйлера–Ламберта, предложенный В.А. Егоровым и основанный на работах Д.Е. Охоцимского посвящённых анализу множества траекторий перелёта между двумя заданными точками в центральном ньютоновском поле. Рассматривая задачу Эйлера–Ламберта как обратную задачу баллистики (динамики), удалось построить новый эффективный метод определения орбиты, соответствующей заданному времени перелёта. Такой подход логично называть методом Охоцимского–Егорова. В рассмотренном подходе параметром множества перелётов является траекторный угол в начальной точке. К преимуществам предлагаемого метода относятся ограниченность и понятная структура области определения решений, простота и наглядность алгоритма, явная зависимость получаемого решения от вектора скорости в начальной точке. Это позволяет проводить качественный анализ траекторий перелёта и конструировать эффективные численные методы.

Ключевые слова: задача Эйлера–Ламберта, метод Охоцимского–Егорова, определение орбиты перелета.

Введение. Задача Эйлера–Ламберта является классической проблемой небесной механики для определения орбит небесных тел [1]–[4]. Традиционно эта задача формулируется как двухточечная краевая задача в рамках модели двух тел, в которой известны векторы положения в два разных момента

времени. В практической космонавтике эта задача приобрела новое значение и часто является основой для проектирования перелётов космических аппаратов. В этом случае предполагается, что орбита, соединяющая два заданных положения, является траекторией перелёта. Разработано много методов ее решения [1]–[4]. Большинство методов основано на том, что траектории между двумя точками пространства образуют однопараметрическое семейство орбит, соединяющих заданные точки. В частности, такое однопараметрическое семейство образуется варьированием траекторного угла (угла наклона скорости к трансверсали) в начальной точке [5]. Такой подход обладает рядом преимуществ и показывает хорошую скорость вычисления решений [6, 7].

Решение Охоцимского. Рассматривая задачу Эйлера–Ламберта как обратную задачу баллистики, следуя подходу Охоцимского Д.Е. [5], оказывается возможным получить связь между начальным траекторным углом и скоростью на траектории, проходящей через два заданных положения,

$$v_1(\theta) = \sqrt{\frac{\mu r_2 (1 - \cos(\varphi))}{r_1 (r_1 \cos^2(\theta) - r_2 \cos(\varphi + \theta) \cos(\theta))}}, \quad (1)$$

где r_1, r_2 — радиусы начального и конечного положения, φ — угол между r_1 и r_2 , μ — гравитационный параметр центрального тела, v_1 — начальная скорость, θ — начальный траекторный угол (наклон скорости к трансверсали).

Зная начальную скорость, можно определить все параметры траектории перелета. Наибольший интерес вызывают решения, соответствующие следующим случаям значениям начальной скорости:

- перелёт по прямой (предельной гиперболе) и перелёт по параболе через бесконечность — ограничивающие всю область возможных значений (v_{lim} и v_{par+}),
- параболическая траектория, разделяющая гиперболические и эллиптические траектории (v_{par-}),
- эллиптическая траектория с минимальной величиной большой полуоси (v_{min}).

Анализ зависимости скорости от траекторного угла в начальной точке (1) показывает, что график возможной скорости представляет собой ветвь гиперболы с асимптотами, направленными вдоль хорды, соединяющей начальное и конечное положение, и начального радиус-вектора [5]. Разные ветви гиперболы соответствуют разной угловой дальности перелёта $\varphi < \pi$ и $\varphi > \pi$, как это показано на рис. 1.

Длительность перелёта. Недостатком выражения (1) для решения задачи Эйлера–Ламберта является отсутствие связи со временем перелёта. В

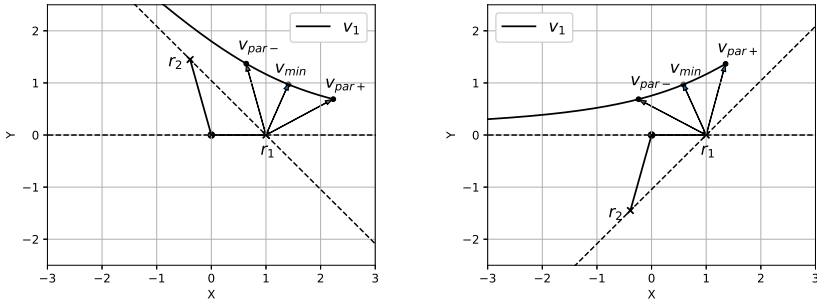


Рис. 1. Множество возможных направлений вектора начальной скорости для $r_1 = 1$ и $r_2 = 1.5$, $\varphi = 105^\circ$ (слева) и $\varphi = 255^\circ$ (справа).

работе Wheelon [8] получено соотношение, связывающее угол θ , начальную скорость и время перелёта, в [9] оно используется для решения задачи Эйлера–Ламберта для эллиптических орбит. Однако, это соотношение довольно сложно и мало подходит для построения эффективного алгоритма. Время перелета можно вычислить с помощью уравнения в форме Лагранжа [3] используя компоненты начального вектора скорости. Для эллиптической орбиты уравнение имеет следующий вид:

$$\Delta t_{ell} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (2\pi N + (\alpha - \sin(\alpha)) - (\beta - \sin(\beta))), \quad (2)$$

где N — число целых витков, параметры Лагранжа α и β имеют область определения $\alpha \in [0; 2\pi]$, $\beta \in [-\pi; \pi]$ и могут быть однозначно определены из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{s}{2a}}, & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{v_d - v_r}{2} \sqrt{\frac{2s}{\mu}}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{s-d}{2a}}, & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{v_d + v_r}{2} \sqrt{\frac{2(s-d)}{\mu}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, $s = \frac{r_1 + r_2 + d}{2}$, v_r и v_d — проекции вектора скорости на радиус вектор r_1 и хорду d , соединяющую r_1 и r_2 .

Типичный вид зависимости времени перелёта от большой полуоси и начального траекторного угла приведены на рис. 2, показана область возможных решений, ограниченная слева прямолинейным перелётом по гиперболе, а справа

ва — перелётом по параболе через бесконечность. Также, парабола разделяет гиперболические и эллиптические решения. На рис. 2 приведены варианты решения с угловой дальностью меньше 1 витка и решения с 1, 2, 3 и 4 витками. Отмечены решения с минимальной начальной скоростью v_{min} (●) и локальные минимумы времени перелета (×). Все характерные случаи, ограничивающие область анализа, имеют аналитическое решение, что позволяет получать надёжные начальные приближения для решения задачи Эйлера–Ламберта.

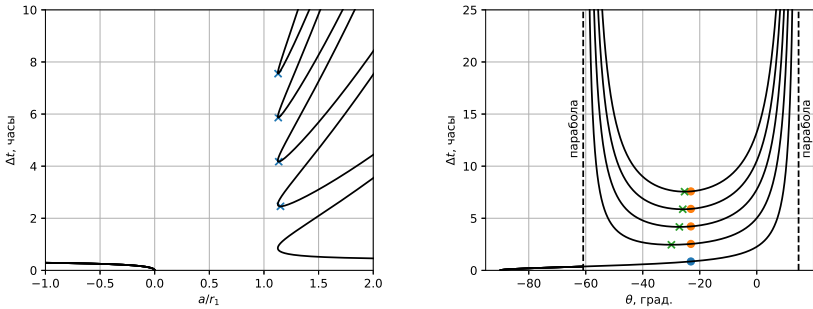


Рис. 2. Длительность перелёта от большой полуоси (слева) и начального траекторного угла (справа).

Заключение. Рассмотрено решение задачи Эйлера–Ламберта на основе баллистического подхода Охочимского–Егорова как обратной задачи динамики. Предложен эффективный алгоритм решения задачи Эйлера–Ламберта. Оценка скорости сходимости показывает, что при использовании для определения решения метода Галлея типичное количество итераций составляет около 5–7 для всех типов решений, что является очень хорошим результатом для алгоритмов решения задачи Эйлера–Ламберта. К достоинствам самого подхода относится ограниченность и понятная структура области определения решений. Общая наглядность метода, обусловленная использованием физически понятных параметров траектории, и явная зависимость решения от вектора начальной скорости, позволяют эффективно включать эту схему решения в процесс оптимизации импульсных траекторий и проектирования межпланетных миссий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>.

Литература

- [1] Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Том 1. Гостехиздат, 1933. 321 с.

- [2] Эскобал П. Методы определения орбит / пер. с англ. М.: Мир, 1970. 471 с.
- [3] Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Москва: Наука, 1965. 540 с.
- [4] Torre Sangra D., Fantino E. Review of Lambert's problem. // ISSFD 2015: 25th International Symposium on Space Flight Dynamics. 2015. P. 1–15.
- [5] Охоцимский Д. Е. Динамика космических полетов. Конспект лекций. М.: Изд-во Московского университета, 1968. 158 с.
- [6] Ивашкин В. В. Задача Эйлера–Ламберта и ее решение с помощью метода Охоцимского–Егорова // XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: СПб, 21–25 августа 2023 г. Сборник тезисов докладов в 4 томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. 668 с.
- [7] Ивашкин В. В. О применении метода Охоцимского–Егорова для решения задачи Эйлера–Ламберта // Доклады РАН. Физика. Технические науки. 2024. Т. 514 (в печати).
- [8] Wheelon A. D. Free flight of a ballistic missile // ARS journal. 1959. Vol. 29. No. 12. P. 915–926.
- [9] Arlulkar P. V., Naik S. D. Solution based on dynamical approach for multiple-revolution lambert problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34. No. 3. P. 920–923.

Об электродинамической стабилизации углового движения искусственного спутника Земли на эллиптической орбите

Клюшин М. А., Максименко М. В., Сахаров В. Ю., Тихонов А. А.
st076414@student.spbu.ru, mig_sab@rambler.ru, v.sakharov@spbu.ru,
a.tikhonov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе поставлена задача изучения углового движения искусственного спутника Земли (ИСЗ), движущегося по эллиптической орбите. Построена математическая модель, описывающая динамику вращательного движения ИСЗ под действием момента сил Лоренца, момента магнитного взаимодействия и гравитационного момента. Предложен алгоритм электродинамического управления, позволяющий погасить возмущающий момент, вызванный эллиптичностью орбиты и действующий на ИСЗ в прямом положении равновесия в орбитальной системе координат. Проведено численное интегрирование уравнений, описывающих вращательное движение ИСЗ, подтверждающее работоспособность алгоритма управления.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, эллиптическая орбита, угловая стабилизация, угловое движение.

Искусственные спутники Земли (ИСЗ) широко используются для научных исследований и прикладных задач: военные спутники, метеорологические спутники, навигационные спутники, спутники связи и др. [1]. Электродинамическое взаимодействие ИСЗ с магнитным полем Земли (МПЗ) оказывает существенное влияние на динамику вращательного движения ИСЗ относительно его центра масс и может быть положено в основу принципа функционирования систем управления угловым движением ИСЗ. Электродинамический метод стабилизации ИСЗ, использующий одновременно возможности момента сил Лоренца и момента магнитного взаимодействия, описан в [2, 3].

В рамках этого исследования рассмотрен вопрос об электродинамической компенсации возмущающего момента, вызванного эллиптичностью орбиты. Рассматривается ИСЗ, центр масс которого движется по эллиптической орбите произвольного наклона. Предполагается, что ИСЗ снабжен управляемым электростатическим зарядом Q , распределенным по некоторому объему V с плотностью σ , и управляемым собственным магнитным моментом \mathbf{I} . Вводятся в рассмотрение следующие системы координат: $O_3 X_* Y_* Z_*$ с началом в центре Земли, принимаемая за инерциальную, $C\xi\eta\zeta$ — орбитальная система координат с началом в центре масс ИСЗ, $Cxyz$ — жестко связанная с ИСЗ и с осями, направленными вдоль его главных центральных осей инерции [3]. Матрица \mathbf{A} направляющих косинусов задает переход от осей $Cxyz$ к осям $C\xi\eta\zeta$.

Инерционные свойства ИСЗ характеризуются тензором инерции \mathbf{J} в главных центральных осях инерции $Cxyz$. Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат задается некоторым значением \mathbf{A}_0 матрицы \mathbf{A} .

В процессе движения ИСЗ относительно МПЗ с магнитной индукцией \mathbf{B} возбуждается лоренцев момент \mathbf{M}_L и магнитный момент \mathbf{M}_M , имеющие вид:

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{P} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_M = \mathbf{I} \times \mathbf{B},$$

где $\mathbf{P} = Q\rho_0$, ρ_0 — радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно центра масс ИСЗ, $\mathbf{T} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{v}_C \times \mathbf{B}_C)$, \mathbf{v}_C — скорость центра масс ИСЗ относительно МПЗ, \mathbf{B}_C — значение индукции МПЗ в центре масс ИСЗ. Вектор \mathbf{v}_C в орбитальной системе координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{v}_C = \left(p(1 + e \cos \nu)^{-1} \left(\sqrt{\mu p^{-3}} (1 + e \cos \nu)^2 - \omega_3 \cos i \right), \right. \\ \left. p(1 + e \cos \nu)^{-1} \omega_3 \sin i \cos u, \quad pe\sqrt{\mu p^{-3}} \sin \nu \right)^\top,$$

где p — фокальный параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты, μ — гравитационная постоянная Земли, ν — истинная аномалия.

Путем программного изменения управляемых электродинамических параметров \mathbf{P} и \mathbf{I} можно обеспечить управление угловым положением ИСЗ [3, 4]. Учет эллиптичности орбиты в условиях малого эксцентриситета приводит к необходимости более тщательного построения математической модели. В частности, для модели МПЗ принимается квадрупольное приближение, в котором $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_C^{(1)} + \mathbf{V}_C^{(2)}$, где $\mathbf{V}_C^{(1)}$ — дипольная составляющая, $\mathbf{V}_C^{(2)}$ — квадрупольная составляющая [5].

Для анализа вопроса о стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат и компенсации возмущающего момента рассматриваются дифференциальные уравнения Эйлера–Пуассона. Абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ определяется соотношением $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}_*$ и в системе $Cxyz$ имеет координаты $\omega_x = p + \omega_*\beta_1$, $\omega_y = q + \omega_*\beta_2$, $\omega_z = r + \omega_*\beta_3$, где $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_*\boldsymbol{\eta}_0$ — угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной системы координат, причем $\omega_* = \dot{\nu} = \sqrt{\mu/p^3} (1 + e \cos \nu)^2$.

Назовем прямым положением равновесия (ППР) ИСЗ в орбитальной системе координат такое его положение, при котором оси x, y, z совпадают с осями ξ, η, ζ . Для ППР имеем:

$$p = q = r = 0, \alpha_1 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_3 = 1, \quad (1)$$

остальные компоненты матрицы направляющих косинусов \mathbf{A} равны 0, что соответствует $\mathbf{A}_0 = \mathbf{E}$. Подставив выражения для моментов в правую часть уравнений Эйлера–Пуассона, а также учитывая равенства (1), получим возмущающий момент, действующий на ИСЗ в ППР вследствие эллиптичности орбиты:

$$\mathbf{g} = (0, B\dot{\omega}_y, 0)^\top = \left(0, -2Be\mu p^{-3} \sin(\nu) (1 + e \cos(\nu))^3, 0\right)^\top. \quad (2)$$

Решение задачи компенсации возмущающего момента \mathbf{g} вида (2) с помощью управляющих моментов \mathbf{M}_L и \mathbf{M}_M возможно путем выбора векторов $\mathbf{P}_{\text{comp}} = (p_x, p_y, p_z)^\top$ и $\mathbf{I}_{\text{comp}} = (i_x, i_y, i_z)^\top$, так, чтобы выполнялось равенство:

$$\mathbf{P}_{\text{comp}} \times \mathbf{T} + \mathbf{I}_{\text{comp}} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} = 0. \quad (3)$$

Подставив \mathbf{g} в равенство (3), получим систему линейных уравнений для нахождения компонент компенсирующих векторов. Кроме того, целесообразно потребовать выполнения равенств $\mathbf{P}_{\text{comp}} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{I}_{\text{comp}} \cdot \mathbf{V} = 0$, что позволит минимизировать модули векторов \mathbf{P}_{comp} и \mathbf{I}_{comp} , и, соответственно, затрачиваемую энергию для их реализации. Кроме того, имеется возможность произвольного выбора одной из компонент компенсирующих векторов (принято $p_y = 0$).

Пример численного моделирования процесса стабилизации углового движения ИСЗ на эллиптической орбите приведен на рисунках 1 и 2. На рис. 1

показано изменение «самолетных» углов и приближение к желаемой ориентации $\varphi = \psi = \theta = 0$ со временем, а проекции угловой скорости — на рис. 2.

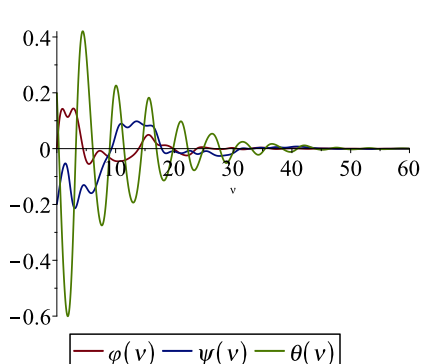


Рис. 1. «Самолетные» углы.

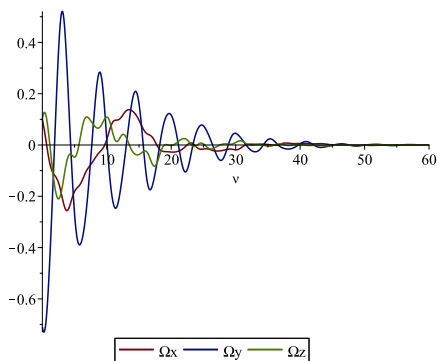


Рис. 2. Изменение безразмерной угловой скорости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031.

Литература

- [1] Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1986. 184 с.
- [2] Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
- [3] Антипов К. А., Тихонов А. А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 44–56.
- [4] Тихонов А. А., Спасич Д. Т, Антипов К. А., Саблина М. В. Оптимизация электродинамического метода стабилизации искусственного спутника Земли // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 112–120.
- [5] Тихонов А. А., Петров К. Г. Мультипольные модели магнитного поля Земли // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 3. С. 219–229.

Перспективы фотогравитационной небесной механики для управления космическими системами

Королев В.С.¹, Поляхова Е.Н.¹, Потоцкая И.Ю.¹, Турешбаев А.Т.²
v.korolev@spbu.ru, pol@astro.spbu.ru, i.pototskaia@spbu.ru

¹Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²Кызылординский университет имени Коркыт Ата,
120000, Казахстан, Кызылорда, ул. Айтеке Би, 29А

Аннотация. Обсуждаются перспективы использования солнечного паруса для решения новых задач управления космическими системами, а также теоретические и прикладные проблемы, возникающие при решении этих задач. Рассматриваются возможности управления КА при межпланетных переходах или при функционировании космической системы в околопланетном пространстве. Особый интерес представляет управляемость и устойчивость в окрестности точек либрации задачи трех тел.

Ключевые слова: космические траектории, солнечный парус, управление.

Введение. В задачах космической динамики рассматривается специфика управления космическим аппаратом (КА) и положением солнечного паруса, которая учитывает поступательное и вращательное движение всей конструкции, а также перемещения отдельных элементов. В реальных условиях влияние сил гравитационного поля дополняется силами реактивных двигателей на активных участках и специальных конструкций или системы парусов для учета сил светового давления, что определяет возможности управления движением в задачах фотогравитационной небесной механики (ФНМ). Учет влияния ориентации системы парусов позволяет адекватно моделировать управляемое движение в задачах небесной механики, выбирая оптимальные решения [1, 2]. В реализации сложных проектов необходимо учитывать действие реактивных сил тяги на участках управления при переходе между орбитами, которое дополняет сила светового давления, образуя фотогравитационное силовое поле. Поэтому учет влияния на объекты светового давления излучающих тел как одного из основных (постоянных) или возмущающих факторов (переменных в зависимости от положения КА или ориентации системы парусов) позволяет исследовать и решать различные задачи ФНМ [3]–[9].

Математические модели. Принцип движения в космосе под солнечным парусом базируется на эффекте светового давления. История развития идей космоплавания под солнечным парусом начинается исследованиями Фридриха Цандера. В 1921 г. доклад об этом проекте был представлен на конференции изобретателей. В 1924 г. Ф.А. Цандер предлагает первый инженерный проект космического парусника с зеркальным парусом-экраном, выполненном

из тончайшей металлической фольги. Он автор первого в мире технического проекта космического аппарата с солнечным парусом. Астродинамика Цандера получила развитие после публикации в России и дальнейшего развития в мире его научного наследия [3]–[5] для решения многих технических задач ФНМ. Перечислим только некоторые из них.

1. Рассматриваются межпланетные перелеты по эллипсам типа Гомана–Цандера в фотогравитационном поле Солнца с солнечным парусом к Солнцу, большим планетам, астероидам, кометам, спутникам планет. Используется гелиоцентрическое движение: КА в фотогравитационном поле Солнца, возможные решения $x(t, u)$ уравнения задачи двух тел и основные теоремы движения системы, обобщенные на случай светового давления Солнца.
2. Рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел и эволюция орбит с учетом светового давления в частных случаях. Исследуются точки либрации ФНМ для задачи трех тел, их положение и устойчивость в плоской ограниченной задаче при наличии резонансов.
3. Нестационарные модификации фотогравитационных задач с переменными физическими параметрами в рамках динамики тел с переменной массой и сближений или гиперболических гравитационных маневров КА. Выход КА с солнечным парусом за пределы Солнечной Системы после начального этапа разгона. Вращательные движения КА, стабилизация, ориентация и управление в пространстве под действием моментов сил светового давления.
4. Особенности движения КА с солнечным парусом в окрестности Земли требуют исследования возмущений орбит при учете давления солнечного излучения. Контролируемые околоземные межорбитальные перелеты с малой тягой при учете сил давления на солнечный парус включают раскрутку орбиты движения в окрестности Луны внутри сферы действия Земли. Парус как элемент тросовой системы для изменения орбиты опасного астероида для его отклонения от возможного столкновения с Землей включен в спектр гелиоцентрических фотогравитационных задач.

Особенности математических моделей задач ФНМ.

1. Гелиоцентрическая фотогравитационная задача двух тел и основные теоремы движения, обобщенные на случай светового давления Солнца.
2. Фотогравитационная ограниченная задача трех тел. Эволюция орбит с учетом светового давления в частных случаях и особые решения.
3. Точки либрации фотогравитационной задачи трех тел: положение, поведение и устойчивость решений в окрестности точек либрации в плоской и пространственной ограниченной задаче при наличии резонансов.
4. Нестационарные модификации фотогравитационных задач с переменными физическими параметрами в рамках динамики тел с переменной массой.

5. Гелиоцентрические орбиты перелетов с солнечным парусом к Солнцу, большим планетам, астероидам, кометам, спутникам планет.
6. Солнечный парус в кулоновом возмущающем поле электрического статического заряда на поверхности паруса, его влияние на прочностные характеристики и на динамику движения аппарата с парусом по цандеровской траектории, зарядка тонкой парусной пленки в космической плазме.
7. Управление орбитальным движением КА и положением солнечного паруса в пространстве с учетом ориентации стабилизации.
8. Парус как элемент тросовой системы для изменения орбиты опасного астероида для его отклонения от Земли или для транспортировки опасного астероида с орбиты.

Уравнения движения. Уравнения с учетом возмущений могут быть представлены в разных формах, основанных на моделях задачи двух или трех тел, используя удобные системы координат и основные параметры. Гелиоцентрический полет к планетам, астероидам или в сторону Солнца можно рассматривать в первом приближении как движение в фотогравитационном поле при действии дополнительной силы светового давления лучей на поверхность паруса для фиксированного угла положения нормали к плоскости паруса с учетом влияния дополнительных возмущений. При создании орбит вблизи Земли или для размещения КА в точках либрации системы Солнце-Земля-КА требуется использовать более общую модель фотогравитационной ограниченной задачи трех тел, которая учитывает движение двух главных тел, а также направление распространения светового излучения [3, 5, 9] относительно планеты. Идея солнечного паруса связана не только с поисками и разработками новых видов использования солнечной энергии, но и с широкими возможностями применений нанотехнологий на Земле и в космосе, т. е. при постройке конструкции и при ее развертывании в рабочее положение на орбите или при управлении парусом в процессе полета. При этом одним из важнейших остается вопрос о физических и оптических свойствах реального паруса и об их изменениях в жестких космических условиях. Новые технологии должны принести свои плоды в создании возможного использования космических двигателей на основе прямого использования неограниченного источника энергии солнечного излучения.

Заключение. Работы Ф.А. Цандера по космоплаванию продолжают коллективы, связанные с различными конкретными проектами. При этом солнечный парус выступает либо как маршевый двигатель малой тяги для околоземной раскрутки, либо как элемент системы управления ориентацией КА, либо как объект оптимизации траектории межпланетного перелета или достижения околосолнечных областей. Перспективы солнечного паруса связаны не только с появлением и исследованием новых вариантов использования солнечной энергии, но и с широкими возможностями применений современных нано-

технологий на Земле и в космосе. При этом одним из важнейших остается вопрос о физических и оптических свойствах реального паруса и об их изменениях в жестких космических условиях. Новые технологии должны принести свои плоды в создании новых материалов с требуемыми параметрами для наиболее эффективного использования неограниченного источника энергии солнечного излучения при решении перечисленных выше задач фотогравитационной механики. При этом солнечный парус выступает либо как маршевый двигатель малой тяги для околоземной раскрутки, либо как элемент системы управления ориентацией КА, либо как объект оптимизации траектории межпланетного перелета или достижения околосолнечных областей.

Литература

- [1] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. Под ред. В. А. Егорова. М.: Наука, 1986. 304 с.; 2-е изд., М. Изд. дом «Либроком» (URSS), 2011. 320 с.; 3-изд., стер.: Книжный дом. «Либроком» (URSS), 2018. 320 с.
- [2] Поляхова Е. Н., Шмыров А. С. Математическое обоснование теории орбитальной коррекции, выполняемой с помощью солнечного паруса // Космические Исследования. 1989. Т. 27. № 1. С. 54–63.
- [3] Polyakhova E. N., Korolev V. S. The Solar Sail: Current State of the Problem // Intern. Conf. on Mechanics “Eights Polyakhov Readings”, St. Petersburg, Russia. AIP Conf. Proceedings. 2018. Vol. 1959. P. 040014. DOI: 10.1063/1.5034617
- [4] Korolev V. S., Polyakhova E. N., Pototskaya I. Y. Problems of Control Motion of Solar Sail Spacecraft in the Photogravitational Fields // Nonlinear Systems-Theoretical Aspects and Recent Applications. IntechOpen, 2020.
- [5] Korolev V., Polyakhova E., Pototskaya I., Stepenko N., Tureshbaev A. Structural features of photogravitational celestial mechanics // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. No. 1. P. 012038.
- [6] Polyakhova E., Pototskaya I., Korolev V. Problems of control motion and stability of solar sail spacecraft // International Multidisciplinary Scientific GeoConference: SGEM. 2017. Vol. 17. P. 939–945.
- [7] Korolev V., Polyakhova E., Pototskaya I. Spacecrafts control capabilities via the solar sail in the photogravitational fields // International Multidisciplinary Scientific GeoConference: SGEM. 2019. Vol. 19. No. 6.2. P. 699–706.
- [8] Polyakhova E., Korolev V. Astrodynamics in Photogravitational Field of the Sun: Space Flights with a Solar Sail // Gravitational Field-Concepts and Applications. IntechOpen, 2022.
- [9] Tureshbaev A., Omarova U., Myrzayev R. On the Stability of Collinear Libration Points in the Three-Body Problem with Two Radiating Masses // Engineering Proceedings. 2023. Vol. 33. No. 1. P. 65.

О движениях гантели на инвариантном многообразии «гравитационный пропеллер» в обобщённой эллиптической задаче Ситникова

Красильников П.С., Исмагилов А.Р.

krasil06@rambler.ru, albertic5@mail.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Исследована задача о поступательно-вращательных движениях симметричной гантели малой массы в обобщенной эллиптической задаче Ситникова. Получены уравнения движения гантели, доказано существование интегрального многообразия «гравитационный пропеллер», на котором центр масс гантели перемещается вдоль нормали к плоскости орбитального движения основных тел, а сама гантель вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный угол $\pi/2$. Получена система неавтономных уравнений движения на этом многообразии. Составлено уравнение плоских колебаний гантели, когда центр масс гантели совпадает с центром масс основных тел. Показано, что если длина гантели бесконечно малая, то это уравнение совпадает с уравнением Белецкого. Исследуются малые колебания при любых длинах s гантели, когда уравнение колебаний содержат два малых параметра: характерное значение амплитуды колебаний и эксцентриситет орбиты основных тел. Получены два типа регулярных уравнений при степенной редукции между малыми параметрами. Описаны изолированные периодические колебания гантели, а также квазипериодические колебания. Исследованы некоторые резонансные эффекты.

Ключевые слова: симметричная гантель, задача Ситникова, гравитационный пропеллер.

Введение. Известно, что в классической задаче Ситникова [1] исследуется движение точки малой массы вдоль нормали к плоскости движения двух симметричных притягивающих тел. В обобщенной задаче Ситникова мы исследуем движения твердого тела малой массы, центр масс которого перемещается вдоль нормали. Так, в статье [2] описываются поступательно-вращательные движения стержня типа «гравитационный пропеллер» в круговой ограниченной задаче Ситникова. В статье [3] исследованы некоторые движения несимметричной гантели вдоль нормали к плоскости вращения основных тел.

Цель исследований — описать некоторые движения симметричной гантели на многообразии «гравитационный пропеллер» в обобщенной эллиптической задаче Ситникова.

Постановка задачи. Предположим, что в поле притяжения двух одинаковых тел, имеющих массу M и движущихся вокруг общего центра масс C по эллиптическим орбитам, находится гантель малой массы $2m$ и длины $2l$. Пусть $C\xi\eta\zeta$ — инерциальная система координат, $Cx'y'z'$ — синодические оси, $Ox'y'z'$

— связанная с гантелью система координат, ось Oz' которой направлена вдоль гантели. Ориентацию гантели в кениговых осях задаем с помощью углов Эйлера ψ , φ , θ . Уравнения движения центра масс гантели запишем в виде

$$2m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad 2m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad 2m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

где $U = U_1 + U_2$ — силовая функция задачи,

$$U_j = f \frac{Mm}{r_{jA}} + f \frac{Mm}{r_{jB}},$$

$$r_{1A} = \sqrt{(\xi + l \sin \psi \sin \theta - r \cos \nu)^2 + (\eta - l \cos \psi \sin \theta - r \sin \nu)^2 + (\zeta + l \cos \theta)^2}.$$

Здесь $2r$ есть расстояние между основными телами. Значение r_{1B} следует из r_{1A} заменой l на $-l$; замена r на $-r$ переводит r_{1B}, r_{1A} в r_{2B}, r_{2A} .

Уравнения вращений гантели имеют вид

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{J \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{J} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad J = 2ml^2. \quad (2)$$

Инвариантное многообразие «гравитационный пропеллер». Рассмотрим многообразие следующего вида:

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi = \eta = 0, \zeta = \zeta(t), \theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \nu(t) + \delta(t) \right\}.$$

Здесь δ — угол плоского поворота гантели вокруг оси $C\zeta$ в синодических осях. Это многообразие интегральное для (1), (2), так как на этом многообразии уравнения для ξ , η , θ удовлетворяются тождественно, а уравнения по ζ , δ образуют замкнутую систему вида

$$\ddot{\zeta} = -\mu\zeta \left(\frac{1}{(l^2 - 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} + \frac{1}{(l^2 + 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right), \quad (3)$$

$$\ddot{\delta} = \mu \frac{r}{l} \cos \delta \left(\frac{1}{(l^2 - 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} - \frac{1}{(l^2 + 2lr \sin \delta + r^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right) - \dot{\nu}. \quad (4)$$

Многообразии \mathcal{P} будем называть «гравитационный пропеллер» (см. рис. 1).

Инвариантное подмногообразие $\zeta = 0$. На данном подмногообразии гантель совершает неравномерные вращения в плоскости движения основных тел при условии, что центр масс гантели совпадает с центром масс основных тел. Введём новое время ν по формуле $d\nu = (C/r^2) dt$, где $C = \sqrt{fMp}$ —

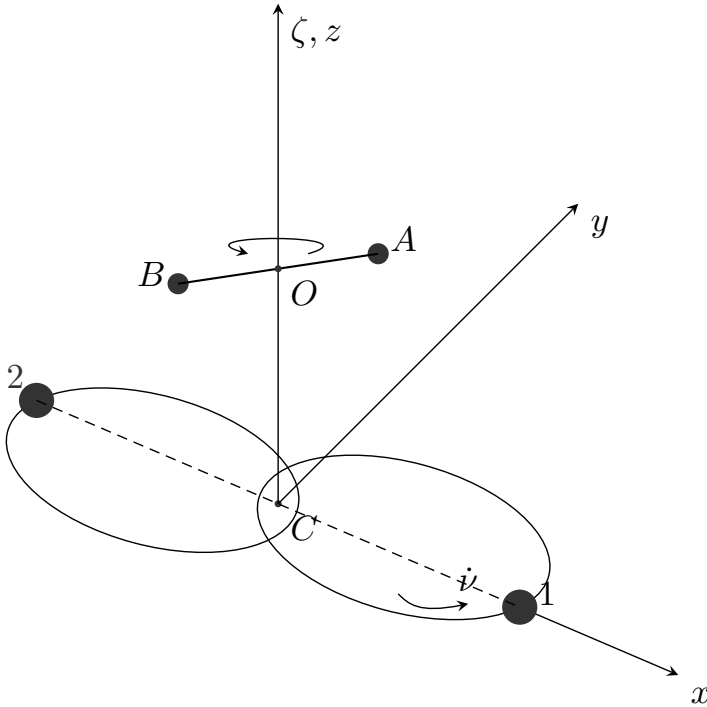


Рис. 1. Инвариантное многообразие «гравитационный пропеллер».

постоянная интеграла площадей, p — фокальный параметр орбиты основных тел. Уравнение колебаний, если положить $l = sa$, имеет вид

$$\delta'' - 2\frac{r'}{r}\delta' = \mu \frac{r^5 \cos \delta}{C^2 sa} \left(\frac{1}{(s^2 a^2 - 2sar \sin \delta + r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(s^2 a^2 + 2sar \sin \delta + r^2)^{3/2}} \right) + 2\frac{r'}{r}.$$

Здесь операция дифференцирования по ν обозначена штрихом. Положим $s = 0$ (гантель бесконечно малой длины), тогда это уравнение приводится к виду

$$\delta'' - 2\frac{r'}{r}\delta' + \frac{3r\mu}{C^2} \sin 2\delta = 2\frac{r'}{r}.$$

В случае $e = 0$ имеем уравнение математического маятника, для которого $\delta = 0$ является устойчивым равновесием. Положим $\gamma = 2\delta$, когда $e \neq 0$. Тогда это

уравнение будет совпадать с уравнением Белецкого относительно γ :

$$(1 + e \cos \nu) \gamma'' - 2e \sin \nu \gamma' + \omega^2 \sin \gamma = 4e \sin \nu \quad (\omega^2 = 3).$$

Рассматривая малые колебания $\gamma = \varepsilon \beta$, $\varepsilon \ll 1$ в окрестности точки $\gamma = 0$ и, постулируя редукцию $\varepsilon = e^\alpha$ между малыми параметрами, получим два типа регулярных уравнений с точностью до членов e^2 :

$$\beta'' + \omega^2 \beta = 4e^{1-\alpha} \sin \nu \quad (0 < \alpha < 1), \quad (5)$$

$$\beta'' - 2e \sin \nu \beta' + \omega^2 \beta (1 - e \cos \nu) = 4(1 - e \cos \nu) \sin \nu \quad (\alpha = 1). \quad (6)$$

Первое уравнение (5) имеет, очевидно, одно изолированное периодическое решение, остальные решения квазипериодические. Аналогично, второе уравнение (6) имеет, как квазилинейное уравнение с неоднородной линейной частью, одно изолированное периодическое решение, остальные решения квазипериодические [4].

Отдельно рассмотрен случай гантели произвольной длины ($s \neq 0$), получены два типа регулярных уравнений при тех же условиях: малость параметров e , ε и наличие редукции $\varepsilon = e^\alpha$. Показано, что при определенных длинах гантели резко нарастает амплитуда изолированных периодических колебаний – явление параметрического резонанса. Указаны резонансные частоты, исследовано нарастание колебаний.

Литература

- [1] Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
- [2] Красильников П. С. О многообразии «гравитационный пропеллер» в обобщенной круговой задаче Ситникова // ПММ. 2021. Т. 85. № 4. С. 555–565.
- [3] Krasilnikov P. S., Ismagilov A. R. On the Dumb-Bell Equilibria in the Generalized Sitnikov Problem // Russian J. of Nonlinear Dyn. 2022. Vol. 18. No. 4. P. 577–588.
- [4] Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 491 с.

Оценка возраста пар в молодом семействе астероидов Emilkowalski

Кузнецов Э.Д., Васильева М.А., Перминов А.С., Сафронова В.С.
eduard.kuznetsov@urfu.ru, vasilyeva.maria@urfu.ru, alexander.perminov@urfu.ru,
v.s.safronova@urfu.ru

Уральский федеральный университет,
620000, Российская Федерация, Екатеринбург, пр. Ленина, 51

Аннотация. Исследована динамическая эволюция астероидов, входящих в молодое семейство Emilkowalski. При учете эффекта Ярковского для каждого астероида рассматривались максимальные по модулю положительные и отрицательные значения скорости дрейфа большой полуоси. Получены оценки возраста всех возможных пар астероидов семейства в зависимости от влияния эффекта Ярковского. Оценки возраста будут использованы при построении сценариев формирования семейства Emilkowalski.

Ключевые слова: семейство астероидов Emilkowalski, эффект Ярковского, оценка возраста, пары астероидов.

Введение. Молодое семейство астероидов Emilkowalski расположено в средней части Главного пояса (большая полуось орбиты 2.60 а.е., эксцентриситет 0.15, наклон 17.75°). Семейство Emilkowalski было открыто в 2006 году Nesvorný и Vokrouhlický [1]. Они обнаружили 3 астероида на очень похожих гелиоцентрических орбитах ((14627) Emilkowalski, (126761) 2002 DW10 and (224559) 2005 WU179) и оценили возраст семейства в 220 ± 30 тыс. лет. В последующих работах [2, 3] были обнаружены новые члены этого семейства. На сегодняшний день известно 20 членов семейства. Моделирование показывает, что за последние 5 млн. лет произошло по меньшей мере два события распада родительского астероида этого семейства [2, 3], что согласуется со сценарием каскадного разрушения родительского тела. Семейство Emilkowalski является вероятным источником пылевой полосы [4, 5, 2], наклоненной к эклиптике на 17° и обнаруженной инфракрасной обсерваторией WISE. Эффективный диаметр главного астероида семейства (14627) Emilkowalski составляет 6.9 км. Астероид (14627) Emilkowalski относят к таксономическим классам D [2] или C¹. Астероид имеет относительно медленное вращение вокруг своей оси, период составляет 11.1313 ± 0.0009 часа. В работе [3] высказывается предположение, что астероид (14627) Emilkowalski может быть ядром кометы. Всё это делает молодое семейство астероидов Emilkowalski интересным и важным для изучения.

В настоящей работе мы планируем построить сценарий формирования семейства Emilkowalski. Для этого необходимо оценить возраст пар астероидов

¹<https://alcddef.org/index.php>

семейства. Оценка возраста пар выполняется в два этапа. На первом этапе рассматривается эволюция номинальных орбит в прошлое с целью оценки интервала, на котором будет выполняться исследование вероятностной эволюции. В настоящей работе будут получены оценки возраста пар и предложены сценарии формирования семейства на основе номинальных орбит.

Методы. Исследование динамической эволюции орбит астероидов выполнялось с использованием программы Orbit9 комплекса OrbFit². Учитывались возмущения от больших планет, сжатие Солнца, релятивистские эффекты и дрейф большой полуоси орбиты, обусловленный влиянием эффекта Ярковского. Элементы орбит астероидов были взяты из каталога Asteroids Dynamic Site — AstDyS³ на эпоху MJD 60200 (13.09.2023). Максимальная по модулю скорость дрейфа больших полуосей орбит астероидов оценивалась на основе физических (диаметры, плотности) и теплофизических (теплопроводность, теплоемкость) параметров астероидов [6]. Диаметры D астероидов оценивались на основе абсолютной звездной величины H [7]:

$$D = 1329 \text{ км} \times 10^{-H/5} p_v^{-1/2}.$$

Следуя [8], значение геометрического альбедо p_v принималось равным 0.05, плотность $\rho = 1300 \text{ кг м}^{-3}$, теплопроводность $k = 0.5 \text{ Вт м}^{-1} \text{ К}^{-1}$, теплоемкость $c = 500 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$. Для астероидов, положение оси вращения которых неизвестно, рассматривались два варианта эволюции, соответствующих наклону оси вращения 0° и 180° . Также для всех астероидов проведено моделирование орбитальной эволюции без учета влияния эффекта Ярковского.

Численное моделирование выполнялось на интервалах 2 и 5 млн. лет. Возраст пар определялся на основе метода схождения линий узлов и апсид в предположении, что в момент образования пары плоскости орбит астероидов и ориентация эллипсов совпадают. Проверялось условие одновременного обнуления разностей долгот восходящих узлов и аргументов перигентров орбит.

Результаты. Для каждого астероида были исследованы три варианта эволюции: без учета эффекта Ярковского, при отрицательной и положительной скоростях дрейфа большой полуоси. Для каждой пары получены интервальные оценки, основанные на анализе девяти вариантов. В таблице 1 в качестве примера представлены оценки возраста пар, включающих четыре наиболее крупных астероида семейства.

На основе оценок возраста пар построены несколько сценариев формирования семейства Emilkowalski, основанные на разных подходах: дробление астероида (14627) Emilkowalski и различные варианты каскадного разрушения ро-

²<http://adams.dm.unipi.it/~orbmain/orbfit/>

³<https://newton.spacedys.com/astdys/index.php?pc=4>

дательского тела. На рис. 1 показан пример сценария формирования семейства Emilkowalski в результате последовательного дробления астероида (14627) Emilkowalski с элементами каскадного разрушения некоторых образующихся при этом фрагментов. Красным цветом указано время образования пары в тыс. лет.

Таблица 1. Оценки возраста пар астероидов семейства Emilkowalski в тыс. лет.

Первый астероид	Второй астероид			
	14627	126761	224559	256124
224559	300–550	34–150	—	
256124	300–330	85–240	170	—
434002	830–1090		730–1050	690–930
476673	1010–1450	1430–1500	960–1420	880–1150
2009 UL13	870–1150	1110–1370	850–1110	740–960
2009 VF107	830–1050	1140–1360	750–930	690–870
2014 UV143	750–960	1140–1380	720–890	670–820
2014 WE584	470–650	370–460	470–730	540–900
2015 WH29			3500 или 4600	
2016 CS377	890–1120		820–930	610–840
2017 UY114	1090–1300		950–1230	730–850
2019 SV55	1200–1740	1520–1860	1140–1730	1090–1520
2020 UZ20	370–430	660–820	370–420	340–390
2021 TU55	800–1160	1130–1530	710–1080	660–880
2022 SA160	720–870	950–1260	680–800	640–730
2006 UQ33	80			

Обсуждение результатов и заключение. Результаты моделирования при различных скоростях дрейфа большой полуоси показывают, что возраст большинства пар астероидов не превышает 2 млн. лет. Для 18 из 20 астероидов семейства надежно фиксируются сближения орбит. Полученные оценки возраста пар позволяют строить сценарии формирования семейства Emilkowalski. Для выбора и обоснования конкретного сценария необходимо получить более надежные оценки возраста пар на основе результатов вероятностной эволюции. Результаты настоящего исследования показывают, что для большинства астероидов интервал времени построения вероятностной эволюции достаточно ограничить 2 млн. лет.

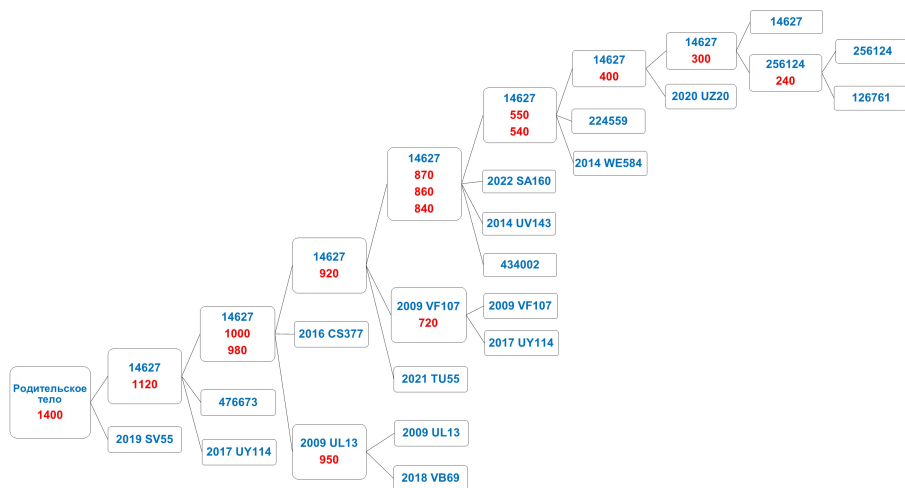


Рис. 1. Пример сценария формирования семейства Emilkovalski в результате последовательного дробления астероида (14627) Emilkowalski с элементами каскадного разрушения некоторых образующихся при этом фрагментов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00143, <https://rscf.ru/project/24-22-00143/>.

Литература

- [1] Nesvorný D., Vokrouhlický D. New candidates for recent asteroid breakups // The Astronomical Journal. 2006. V. 132(5). P. 1950–1958.
- [2] Pravec P., Fatka P., Vokrouhlický D. et al. Asteroid clusters similar to asteroid pairs // Icarus. 2018. V. 304. P. 110–126.
- [3] Fatka P., Pravec P., Vokrouhlický D. Cascade disruptions in asteroid clusters // Icarus. 2020. V. 338. Id. 113554.
- [4] Vokrouhlický D., Nesvorný D., Bottke W.F. Evolution of dust trails into bands // The Astrophysical Journal. 2008. V. 672. Iss. 1. P. 696–712.
- [5] Espy A. J., Dermott S. F., Kehoe T. J. J., Jayaraman S. Evidence from IRAS for a very young, partially formed dust band // Planetary and Space Science. 2009. V. 57. Iss. 2. P. 235–242.
- [6] Fenucci M., Novakovic B. MERCURY and ORBFIT Packages for Numerical Integration of Planetary Systems: Implementation of the Yarkovsky and YORP Effects // Serbian Astronomical Journal. 2022. V. 204. P. 51–63.

- [7] Bowell E., Hapke B., Domingue D. et al. Application of photometric models to asteroids // Asteroids II; Proceedings of the Conference, Tucson, AZ, Mar. 8–11, 1988 (A90-27001 10-91). Tucson, AZ, University of Arizona Press, 1989. P. 524–556.
- [8] Ribeiro T. M., D’Ambrosio A., Calabuig G. J. D. et al. CARINA: A near-Earth D-type asteroid sample return mission // Acta Astronautica. 2023. V. 212. P. 213–225.

О трехосной стабилизации заряженного ИСЗ с центрованным распределением заряда

Морозов В.М.,¹ Сахаров В.Ю.,² Тихонов А.А.²

moroz@imec.msu.ru, v.sakharov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

¹НИИ Механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1,

²Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Рассматривается искусственный спутник Земли (ИСЗ) с системой электростатической защиты (ЭСЗ). Предполагается, что три электростатически заряженных экрана ИСЗ, выполненные в виде тороидальных оболочек, размещены вокруг защищаемого объема ИСЗ так, что центры экранов совпадают с центром масс ИСЗ, а оси вращения тороидальных оболочек взаимно ортогональны. Построены дифференциальные уравнения вращательного движения ИСЗ относительно центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Найден первый интеграл движения, с помощью которого получены достаточные условия устойчивости равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. Доказана возможность использования экранов ЭСЗ не только для защиты ИСЗ от ионизирующего излучения, но одновременно и для трехосной ориентации ИСЗ в околоземном пространстве.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, электростатическая защита, вращательное движение, момент сил Лоренца, трехосная стабилизация, асимптотическая устойчивость.

Введение. Радиация является одной из важнейших проблем, сдерживающих освоение космического пространства. Невозможность использования в космосе экранирующих средств на основе тяжелых металлов стимулирует поиск принципиально иных — активных средств радиационной защиты, основанных на использовании магнитных и электрических полей, создаваемых на борту искусственного спутника Земли (ИСЗ). Одним из наиболее перспективных вариантов активной защиты является электростатическая защита (ЭСЗ), предусматривающая развертывание вокруг ИСЗ специальных легких заряженных экранов для создания электростатических полей, отклоняющих одноименно заряженные частицы околоземного пространства от экранов ЭСЗ. Предложены различные варианты, опирающиеся на использование защитного экрана

ЭСЗ, несущего заряд конкретного знака [1]. Однако проблема защиты от радиации усложняется наличием в составе ионизирующих частиц носителей как положительных, так и отрицательных зарядов. В связи с этим анализируются варианты размещения вокруг защищаемого объема ИСЗ системы экранов ЭСЗ, снабженных зарядами противоположных знаков и имеющих структуру электрических мультиполей, с помощью которых можно создать электростатическое поле произвольной конфигурации, а также рассматривается как перспективный и более предпочтительный по массо-габаритным характеристикам вариант использования экранов тороидальной формы [2].

Постановка задачи. В данной работе рассматривается ИСЗ с системой ЭСЗ, включающей три электростатически заряженных экрана ИСЗ, выполненных в виде тороидальных оболочек и размещенных вокруг защищаемого объема ИСЗ так, что центры экранов совпадают с центром масс ИСЗ, а оси вращения тороидальных оболочек взаимно ортогональны. Предполагается, что центр масс ИСЗ движется по круговой орбите, близкой к экваториальной. В качестве расчетной модели магнитного поля Земли (МПЗ) принимается модель «прямого магнитного диполя». В результате взаимодействия электрического заряда экранов с МПЗ возникает момент сил Лоренца M_L , влияющий на вращательное движение ИСЗ. Изучается вращательное движение экранированного ИСЗ относительно центра масс под действием гравитационного момента M_G и лоренцева момента M_L . Вычисление моментов M_L и M_G выполняется с учетом пространственного распределения масс и зарядов и градиентности гравитационного и магнитного полей в объеме ИСЗ.

Результаты. Построены дифференциальные уравнения вращательного движения ИСЗ относительно центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Найдены положения относительного равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. Поставлена задача исследования возможности использования момента M_L для пассивной стабилизации ИСЗ при центрованном распределении заряда ИСЗ. В отличие от ранее выполненных исследований [3, 4], опиравшихся на рассогласование центра заряда и центра масс ИСЗ, то есть на отличный от нуля статический момент заряда первого порядка, в данном случае центрованного распределения заряда существенную роль играют статические моменты заряда второго порядка. Найден первый интеграл уравнений движения, с помощью которого получены достаточные условия устойчивости положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. В пространстве инерционных и электростатических параметров ИСЗ проанализирована область устойчивости положения равновесия ИСЗ.

Таким образом доказана возможность использования экранов ЭСЗ не только для защиты ИСЗ от ионизирующего излучения, но одновременно и для трехосной ориентации ИСЗ в околоземном пространстве.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-100104, <https://rscf.ru/project/24-21-00104/>.

Литература

- [1] Цетлин В. В., Павлушкина В. И., Редько В. И. Исследование радиационно-защитного эффекта объемной электризации стекол на ИСЗ «Космос-2229» // Космич. исслед. 1995. Т. 33. № 3. С. 286–288.
- [2] Smith J. G., Smith T., Williams M., Youngquist R., Mendell W. Potential Polymeric Sphere Construction Materials for a Spacecraft Electrostatic Shield. 2006. Langley Research Center. Technical Memorandum, Document ID 20060013423.
- [3] Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Косм. исслед. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
- [4] Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техники. Сер. «Совр. матем. и ее приложения. Тематические обзоры». 2023. Т. 221. С. 71–92.

Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Олемской И.В., Еремин А.С.

i.olemskoj@spbu.ru, a.eremin@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. На основе структурного метода численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка построен эффективный метод прямого интегрирования систем дифференциальных уравнений второго порядка специального вида. Алгоритмическое использование структурных особенностей рассматриваемой системы позволило сконструировать экономичные расчетные схемы четвертого порядка с автоматическим выбором шага.

Ключевые слова: порядок метода, число этапов, контрольный член, полная погрешность.

Метод интегрирования. Здесь для структурно разделенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) второго порядка

$$\begin{cases} x'' = F_0(t, x, y, z, x', y', z'), \\ y'' = F_1(t, x, y, z, x', z'), \\ z'' = F_2(t, x, y, z, x', y'), \end{cases} \quad (1)$$

$$t \in [T_0, T_k] \subset \mathbb{R}, \quad x : [T_0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^{r_0}, \quad y : [T_0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^{r_1}, \quad z : [T_0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^{r_2},$$

построен явный одношаговый метод четвертого порядка ее прямого интегрирования. Второе и третье уравнения системы (1) структурно тождественные друг другу являются *структурно выделенными*. Правая часть каждого из *структурно выделенных* уравнений системы не зависит от первой производной искомого функции, поведение которой описывается этим уравнением. Первое уравнение системы (1) называется *общей группой*. Эта группа формируется из уравнений системы, не имеющих структурных особенностей указанного выше типа.

Отметим, что в случае отсутствия общей группы уравнений [1] эффективность структурного подхода максимально возможная как для СОДУ первого порядка, так для второго.

Рассматриваемая система (1), приведенная заменой $\psi_1 = x'$, $\psi_2 = x$, $\psi_3 = z$, $\psi_4 = y'$, $\psi_5 = y$, $\psi_6 = z'$ к нормальной форме систем первого порядка, попадает в класс структурно разделенных рассматриваемых в [2].

Применение для ее интегрирования метода RKS4[4,3,3] [3] и последующее сведение расчетной схемы к виду алгоритмически простому дает экономичную вычислительную схему **SRK4(2)[4,3,3]** четвертого порядка прямого интегрирования системы (1). Для ее описания, не нарушая общности рассуждений, полагаем в дальнейшем $r_0 = r_1 = r_2 = 1$. Предположим также, что правые части системы (1) являются достаточно гладкими. Пусть в точке $t \in [T_0, T_k]$ известно ее точное решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Приближение 4-го порядка X , Y , Z , X' , Y' , Z' к точному решению $x(t+h) = X + O(h^5)$, $y(t+h) = Y + O(h^5)$, $z(t+h) = Z + O(h^5)$, $x'(t+h) = X' + O(h^5)$, $y'(t+h) = Y' + O(h^5)$, $z'(t+h) = Z' + O(h^5)$, в точке $t+h \in [T_0, T_k]$ ищется в виде

$$\begin{aligned} X &= x(t) + h x'(t) + h^2 \sum_{s=1}^4 \mathbf{D}_s^0 K_s^0, & X' &= x'(t) + h \sum_{s=1}^4 \mathbf{Q}_s^0 K_s^0, \\ Y &= y(t) + h y'(t) + h^2 \sum_{s=1}^3 \mathbf{D}_s^1 K_s^1, & Y' &= y'(t) + h \sum_{s=1}^3 \mathbf{Q}_s^1 K_s^1, \\ Z &= z(t) + h z'(t) + h^2 \sum_{s=1}^3 \mathbf{D}_s^2 K_s^2, & Z' &= z'(t) + h \sum_{s=1}^3 \mathbf{Q}_s^2 K_s^2, \end{aligned} \quad (2)$$

а приближение 2-го порядка \hat{X} , \hat{Y} , \hat{Z} , \hat{X}' , \hat{Y}' , \hat{Z}' — в той же точке $t+h$ к точному решению $x(t+h) = \hat{X} + O(h^3)$, $y(t+h) = \hat{Y} + O(h^3)$, $z(t+h) = \hat{Z} + O(h^3)$, $x'(t+h) = \hat{X}' + O(h^3)$, $y'(t+h) = \hat{Y}' + O(h^3)$, $z'(t+h) = \hat{Z}' + O(h^3)$, в виде

$$\begin{aligned} X &= x(t) + h x'(t) + h^2 \sum_{s=1}^4 \hat{\mathbf{D}}_s^0 K_s^0, & X' &= x'(t) + h \sum_{s=1}^4 \hat{\mathbf{Q}}_s^0 K_s^0, \\ Y &= y(t) + h y'(t) + h^2 \sum_{s=1}^3 \hat{\mathbf{D}}_s^1 K_s^1, & Y' &= y'(t) + h \sum_{s=1}^3 \hat{\mathbf{Q}}_s^1 K_s^1, \\ Z &= z(t) + h z'(t) + h^2 \sum_{s=1}^3 \hat{\mathbf{D}}_s^2 K_s^2, & Z' &= z'(t) + h \sum_{s=1}^3 \hat{\mathbf{Q}}_s^2 K_s^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где функции K_s^v , $v = 0, 1, 2$ из соображений явности вычисляются в строгом порядке $K_1^0, K_1^1, K_1^2, K_2^0, K_2^1, K_2^2, K_3^0, K_3^1, K_3^2, K_4^0$ по правилам

$$\begin{aligned}
 K_s^0 &= F_0(t + C_s^0 h, x + C_s^0 h x' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{00} K_\nu^0, y + C_s^0 h y' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{01} K_\nu^1, \\
 & z + C_s^0 h z' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{02} K_\nu^2, x' + h \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{s,\nu}^{00} K_\nu^0, y' + h \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{s,\nu}^{01} K_\nu^1, z' + h \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{s,\nu}^{02} K_\nu^2), \\
 K_s^1 &= F_1(t + C_s^1 h, x + C_s^1 h x' + h^2 \sum_{\nu=1}^s A_{s,\nu}^{10} K_\nu^0, y + C_s^1 h y' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{11} K_\nu^1, \\
 & z + C_s^1 h z' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{12} K_\nu^2, x' + h \sum_{\nu=1}^s B_{s,\nu}^{10} K_\nu^0, z' + h \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{s,\nu}^{12} K_\nu^2), \\
 K_s^2 &= F_2(t + C_s^2 h, x + C_s^2 h x' + h^2 \sum_{\nu=1}^s A_{s,\nu}^{20} K_\nu^0, y + C_s^2 h y' + h^2 \sum_{\nu=1}^s A_{s,\nu}^{21} K_\nu^1, \\
 & z + C_s^2 h z' + h^2 \sum_{\nu=1}^{s-1} A_{s,\nu}^{22} K_\nu^2, x' + h \sum_{\nu=1}^s B_{s,\nu}^{20} K_\nu^0, y' + h \sum_{\nu=1}^s B_{s,\nu}^{21} K_\nu^1).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь h — шаг интегрирования, s — номер этапа. Значения параметров C_s^v , $A_{s,\nu}^{vg}$, $B_{s,\nu}^{vg}$, D_s^v , Q_s^v , \hat{D}_s^v , \hat{Q}_s^v , $v, g \in \{0, 1, 2\}$, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Метод SRK4(2)[4,3,3].

C_s^0	$A_{s,\nu}^{00}$			$A_{s,\nu}^{01}$			$A_{s,\nu}^{02}$			$B_{s,\nu}^{00}$			$B_{s,\nu}^{01}$		$B_{s,\nu}^{02}$		D_s^0	Q_s^0	\hat{D}_s^0	\hat{Q}_s^0
0	0			0			0			0			0			$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1		$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	1	
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	1	-1	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{2}$
C_s^1	$A_{s,\nu}^{10}$			$A_{s,\nu}^{11}$			$A_{s,\nu}^{12}$			$B_{s,\nu}^{10}$			$B_{s,\nu}^{12}$		D_s^1	Q_s^1	\hat{D}_s^1	\hat{Q}_s^1		
0	0			0			0			0			0			$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0				$\frac{1}{3}$	0		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	
$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{5}{96}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{16}$				$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$		$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{5}$	
C_s^2	$A_{s,\nu}^{20}$			$A_{s,\nu}^{21}$			$A_{s,\nu}^{22}$			$B_{s,\nu}^{20}$			$B_{s,\nu}^{21}$		D_s^2	Q_s^2	\hat{D}_s^2	\hat{Q}_s^2		
$\frac{1}{6}$	0			$\frac{1}{36}$			0			$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	
1	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{18}$		1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	

Вычислительные эксперименты. Метод SRK4(2)[4,3,3] (далее сокращённо SRK) является явным одношаговым вложенным четвертого порядка

с автоматическим выбором шага. В качестве его оппонента использовали «правило 1/6» четвертого порядка RK4(2)[4] (далее — RK) с *контрольным членом Егорова*. Сравнительное тестирование методов SRK и RK проводилось на плоской ограниченной задаче трех тел при построении *орбиты Аренторфа* [4]. Плоское движение космического аппарата с координатами (x_1, x_2) в гравитационном поле, создаваемом Землей $(0, 0)$ и Луной $(1, 0)$, описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 = x_1 + 2\dot{x}_2 - \mu' \frac{x_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{x_1 - \mu'}{D_2}, \quad \ddot{x}_2 = x_2 - 2\dot{x}_1 - \mu' \frac{x_2}{D_1} - \mu \frac{x_2}{D_2},$$

где $D_1 = \sqrt{\left((x_1 + \mu)^2 + x_2^2\right)^3}$, $D_2 = \sqrt{\left((x_1 - \mu')^2 + x_2^2\right)^3}$, $\mu = 0.012277471$, $\mu' = 1 - \mu$. При начальных условиях $\dot{x}(0) = (0, -2.00158510637908252240537862224)$, $x(0) = (0.994, 0)$ космический аппарат движется по орбите с периодом $T_{per} = 17.0652165601579625588917206249$.

Исследовались:

- реакция алгоритма выбора шага на изменение максимально допустимого значения оценки контрольного члена ($tol \in [10^{-15}, 10^{-5}]$);
- характер зависимости полной погрешности и вычислительных затрат от изменения ограничений на контрольный член ($tol \in [10^{-15}, 10^{-5}]$).

На рис. 1 представлены графики зависимости величины шага интегрирования $h(t)$ от значения независимой переменной в интервале $[0, T_{per}]$ при двух

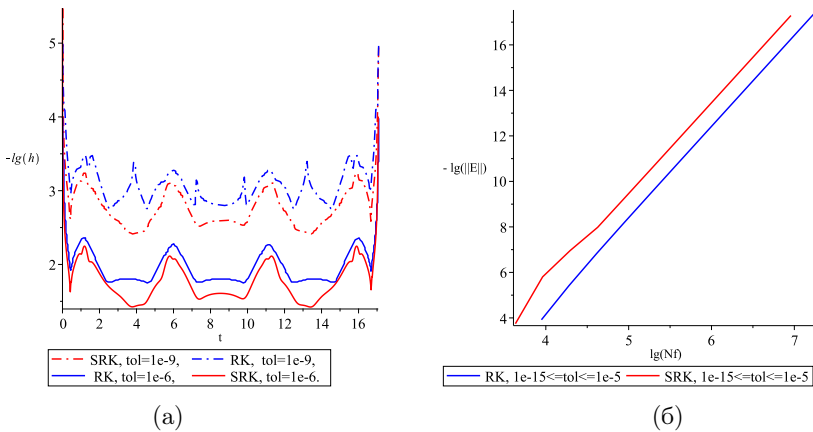


Рис. 1. Динамика шага при $tol = 10^{-6}$ и $tol = 10^{-9}$ на интервале $[0, T_{per}]$ (а) и зависимость нормы полной погрешности ($\|E\|$) от количества вычислений правых частей (Nf) при tol от 10^{-15} до 10^{-5} (б).

максимально допустимых значениях контрольного члена tol и зависимости полной погрешности от количества вычислений правых частей задачи трех тел.

Литература

- [1] Олемской И. В. Вложенный пятиэтапный метод пятого порядка типа Дормана — Принса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 7. С. 1181–1191.
- [2] Олемской И. В. Структурный подход в задаче конструирования явных одношаговых методов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 7. С. 961–974.
- [3] Олемской И. В. Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 180 с.
- [4] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.

О возбуждении колебательного процесса земного полюса с частотой прецессии лунной орбиты

Перепелкин В.В.

vadimkin1@yandex.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Исследуется зависимость колебательного процесса земного полюса от прецессии орбиты Луны. Показано, что амплитуды чандлеровского и годичного слабеющих движения полюса содержат вариации, синфазные изменению угла наклона плоскости лунной орбиты к экватору, а их фазы — колебанию вдоль экватора точки пересечения экватора с орбитой Луны. Предложена модель, описывающая найденный колебательный процесс. С помощью численной обработки данных наблюдений определены параметры модели, необходимые для возбуждения наблюдаемого колебания полюса.

Ключевые слова: земной полюс, чандлеровское колебание, прецессия орбиты Луны.

Вопрос объяснения механизма возбуждения чандлеровского колебания является одним из основополагающих в исследовании движения земного полюса. По крайней мере часть возмущений, приводящих к вариациям параметров чандлеровского колебания оказываются следствием механизма её возбуждения. Поэтому исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса (вообще говоря не только чандлеровской, но и годичной) представляет интерес не только для задачи прогнозирования движения полюса, но и связана с изучением механизма возбуждения и поддержания чандлеровского колебания.

В работах [1]–[3] было предложено преобразование координат земного полюса, позволяющее установить синфазность вариаций параметров основных компонент (чандлеровского и годичного колебаний) его движения и прецессии лунной орбиты. Данное свойство движения полюса в научной литературе описано недостаточно и объяснения пока не находит.

Как показано в работе [1] амплитуды найденного колебательного процесса в чандлеровской и годичной компонентах обладают нестационарным характером, в то время как частоты и фазы достаточно стабильны. Последнее указывает на регулярную природу возмущений этих колебаний, а размытость пиков в спектре, возникающая вследствие нестационарности амплитуд — на вовлеченность геофизических процессов в формирование колебаний амплитуд основных компонент колебаний полюса.

В то же время, найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана [3].

Для исследования найденных колебаний модель Земли представляется в виде вязкоупругого твердого тела, состоящего из центральной части (ядра) и вязкоупругой мантии. При этом считается, что относительные перемещения точек подвижной среды на границе между ядром и мантией отсутствуют, а внешняя граница свободна. Вследствие предположения о малости деформаций мантии Земли процесс деформирования рассматривается в квазистатическом приближении.

На предварительном этапе исследования чандлеровского движения полюса под действием гравитационно-приливных возмущений рассматривается следующая модельная задача. Считается, что деформируемая планета (Земля) и точечный спутник (Луна) совершают взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца.

В работе показано, что в гравитационно-приливном потенциале от Луны обнаруживаются малые слагаемые, зависящие и от движения полюса и от долготы восходящего узла лунной орбиты. Эти слагаемые пропорциональны произведениям направляющих косинусов Луны $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$:

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = S^{-1} \mathbf{R}_{21}^0(\Omega, \nu, i),$$

$$S^{-1} = \Gamma_3^{-1}(\varphi_1)\Gamma_1^{-1}(\delta_2)\Gamma_3^{-1}(\varphi_2)\Gamma_1^{-1}(\delta_1)\Gamma_3^{-1}(\varphi_3),$$

где \mathbf{R}_{21}^0 — единичный вектор, зависящий от долготы восходящего узла лунной орбиты Ω , истинной аномалии Луны ν и наклона i плоскости лунной орбиты к плоскости эклиптики, матрица S задает переход от связанных к кёниговым осям и выражается посредством канонических переменных Андуайе: моментов импульсов L (проекция вектора \mathbf{G} на ось x_3), G (модуль кинетического момента Земли), G_{ξ_3} (проекция вектора \mathbf{G} на ось ξ_3) и угловых переменных φ_1 (поляр-

ная координата движения земного полюса), φ_2 (угол собственного вращения Земли), φ_3 (угол прецессии). Углы δ_1 , δ_2 (угловая характеристика амплитуды движения полюса) определяются соотношениями

$$\cos \delta_1 = G'_{\xi_3} G^{-1}, \quad \cos \delta_1 = LG^{-1}.$$

После усреднения по быстрой переменной φ_2 (углу собственного вращения) и полумедленной переменной ν (истинной аномалии Луны) они будут иметь необходимую периодическую структуру для возбуждения колебательного процесса с частотой прецессии орбиты Луны.

Учитывая приливные деформации мантии Земли, которые получаются как комбинация влияний смещения полюса и долгопериодического возмущения от Луны, уравнения движения полюса будут представлять собой дифференциальные уравнения с медленно меняющимися параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - (N + a_{\Omega}^{cx} \cos \Omega + a_{\Omega}^{sx} \sin \Omega) y_p &= \sigma x_p + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + (N + a_{\Omega}^{cy} \cos \Omega + a_{\Omega}^{sy} \sin \Omega) x_p &= \sigma y_p + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

где N — чандлеровская частота, σ — коэффициент диссипации, Ω — долгота восходящего узла лунной орбиты, μ_x , μ_y — возмущения.

На основе предложенной модели движения полюса и численной обработки данных наблюдений проведена идентификация параметров дифференциальных уравнений, необходимых для формирования наблюдаемого колебательного процесса с частотой прецессии лунной орбиты как в чандлеровской компоненте, так и в годичной.

Литература

- [1] Перепёлкин В. В., Рыхлова Л. В., Сое Вэй Ян. О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // *Астрономический журнал*. 2022. Т. 99. № 1. С. 75–87.
- [2] Perepelkin V., Rumyantsev D. The influence of the average frequency of oscillations of the Earth's pole on the accuracy of predicting its position // *IEEE* 2020. doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140555
- [3] Krylov S. S., Perepelkin V. V., Filippova A. S. Estimation of the contribution of geophysical perturbations to the Earth pole oscillatory process at the precession frequency of the lunar orbit // *Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 927. P. 012036.

Асимптотический анализ относительного движения космических аппаратов на близких гиперболических траекториях

Перепухов Д.Г., Трофимов С.П.

dperepukhov@keldysh.ru, trofimov@keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

Аннотация. Исследуется задача относительного движения двух космических аппаратов на близких гиперболических траекториях. Линеаризация уравнений, введение удобной системы координат и малой переменной позволяют получить приближенное решение линеаризованных уравнений относительного движения в простом виде. На основе этого решения классифицированы возможные типы относительного движения. Асимптотическая точность приближения подтверждается сравнением с результатами численного моделирования. Демонстрируется сценарий применения полученного приближённого решения для проектирования конфигурации группировки малых аппаратов.

Ключевые слова: гиперболическая траектория, динамика, относительное движение, космический аппарат, многочлен Лорана.

Гиперболические траектории представляют собой неограниченные траектории в задаче двух тел, обладающие положительной кеплеровой энергией и эксцентриситетом, превышающим единицу. В настоящее время существуют предпосылки для потенциального увеличения количества миссий, в которых космические аппараты будут двигаться по гиперболическим траекториям. Это обусловлено двумя факторами: активной разработкой проектов миссий *Interstellar Probe* [1] и миссии к гравитационному фокусу Солнца [2], а также развитием концепции нового типа миссий, получившего название *Sun Diver* [3].

Цель миссии *Interstellar Probe* — отправить зонд для исследования гелиосферы, гелиопаузы и ближнего межзвёздного пространства. Для этого предлагается сообщить аппарату большой отлётный импульс у Земли и совершить пассивный гравитационный манёвр у Юпитера, чтобы вывести зонд на траекторию с гиперболическим избытком скорости около 7 а.е. в год, что позволит ему достичь межзвёздного пространства примерно за 17 лет. В свою очередь, миссия к гравитационному фокусу Солнца ставит своей задачей получение изображений экзопланет посредством эффекта солнечного гравитационного линзирования. Для этого необходимо доставить группу космических аппаратов в область пространства, называемую гравитационным фокусом Солнца и расположенную на расстоянии более 550 а.е. от звезды. Чтобы добраться до гравитационного фокуса Солнца в течение приемлемого срока в 20–25 лет, планируется вывести

аппараты на траекторию с гиперболическим избытком скорости около 25 а.е. в год.

Для ускорения аппаратов до очень высоких скоростей, требуемых в миссиях к дальним областям Солнечной системы, предполагается использовать концепцию Sun Diver. Основная идея концепции заключается в разгоне малых аппаратов за счет использования современных солнечных парусов и эффекта Оберта при близком пролёте Солнца. Типичная траектория миссии Sun Diver изображена на рис. 1. Данная идея не нова, однако только сегодня технологии достигли того уровня, когда всерьез можно говорить о создании миссии, использующей подобную траекторию. При этом миссии типа Sun Diver открывают значительные возможности для научных исследований [4]: становятся возможными быстрые миссии к дальним планетам Солнечной системы, к объектам пояса Койпера, к границам гелиосферы, к гравитационному фокусу Солнца, появляется новый сценарий для миссий по перехвату межзвездных объектов, подобных астероиду Оумуамуа, и т. п.

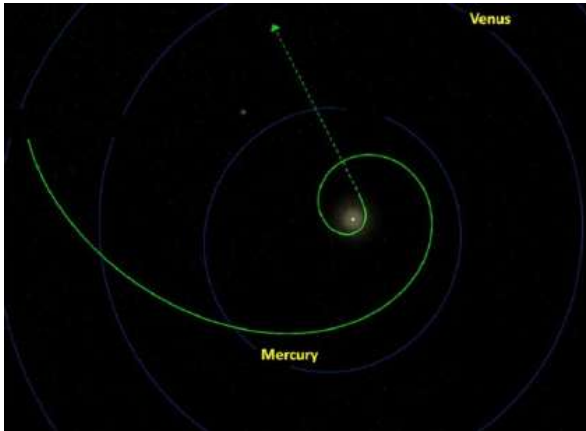


Рис. 1. Типичная траектория миссии типа Sun Diver. Сначала с помощью солнечных парусов аппарат «скручивается» к Солнцу, а затем при пролёте перигелла паруса ориентируются на разгон, за счёт чего аппарат приобретает большую скорость и выходит на гиперболическую траекторию. Заимствовано из [4].

Обе приведённые миссии, а также любая гипотетическая миссия типа Sun Diver, предполагают вывод аппарата или группировки аппаратов на гиперболические гелиоцентрические траектории. В связи с этим актуальным становится исследование относительного движения космических аппаратов на близких гиперболических траекториях: это необходимо для проектирования конфигу-

рации группы, обработки навигационных данных и расчёта корректирующих манёвров. Относительное движение аппаратов на близких траекториях достаточно полно изучено для случая эллиптических траекторий (подробный обзор работ по теме представлен в [5]), однако случаю гиперболических траекторий посвящено лишь несколько исследований [6, 7]. При этом до сих пор остаётся открытым вопрос о выборе способа описания относительного движения на гиперболических траекториях, подходящего для качественного анализа и предварительного проектирования.

Данная работа направлена на то, чтобы предоставить удобный способ описания относительного движения космических аппаратов на близких гиперболических траекториях и проанализировать это движение. Рассматривается следующая постановка задачи: два космических аппарата пренебрежимо малой массы, ведущий и ведомый, движутся по близким гиперболическим траекториям в центральном поле тяготения массивного тела (Солнце). Тогда уравнения движения аппаратов в гелиоцентрической инерциальной системе координат выглядят следующим образом:

$$\mathbf{r} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r}_d = -\mu \frac{\mathbf{r}_d}{r_d^3}, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор ведущего аппарата, а \mathbf{r}_d — ведомого аппарата, а вектор их относительного положения $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_d - \mathbf{r}$ подчиняется уравнению

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\mu \left(\frac{\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы построить аналитическую аппроксимацию эволюции вектора $\boldsymbol{\rho}$ со временем. Для этого осуществляются следующие шаги:

1. Уравнения (2) линеаризуются в окрестности траектории ведущего аппарата (далее мы называем эту траекторию опорной), а именно делается предположение $\rho/r \ll 1$. В силу того, что на гиперболической траектории $r \rightarrow \infty$, это предположение особенно оправдано.
2. С помощью фундаментальной матрицы решений $\mathbf{Y}(t, t_0)$ (мы используем представление из [8]) и вектора начальных условий записывается общее решение линеаризованной системы.
3. Вводится так называемая асимптотическая система координат: гелиоцентрическая инерциальная система координат, с осью x по уходящей асимптоте опорной гиперболы, осью z по вектору орбитального момента опорной траектории и осью y , дополняющей базис до правой тройки.
4. Вводится параметр $\delta = \nu_{\max} - \nu$, который используется вместо времени для явной записи элементов матрицы \mathbf{Y} в асимптотической системе координат.

5. Элементы матрицы Y аппроксимируются многочленами Лорана по переменной δ в окрестности 0.
6. С помощью приближённой матрицы Y записываются приближённые решения линеаризованной системы уравнений, при этом они принимают достаточно простой вид.
7. На основе приближённых решений производится классификация возможных типов относительного движения на гиперболических траекториях (в линейном приближении), выводятся условия ограниченности этого движения.

В конце с помощью численного моделирования производится валидация полученных аналитических формул и сделанных выводов, а также демонстрируется сценарий применения полученных выражений для проектирования конфигурации группировки космических аппаратов, движущихся по близким гиперболическим траекториям. Эксперименты показывают, что приближённые решения оказываются близки к результатам численного интегрирования уравнений (1): ошибка меньше 1% для случая ограниченного движения и 8% для неограниченного, что подтверждает состоятельность сделанных в линейном приближении выводов о возможных типах относительного движения и условиях его ограниченности.

Литература

- [1] Сайт миссии Interstellar Probe. URL: <https://interstellarprobe.jhuapl.edu> (дата обращения: 28.03.2024).
- [2] Сайт миссии Solar Gravitational Lens Focal Mission. URL: <https://sglf.space/index.php> (дата обращения: 28.03.2024).
- [3] Bailer-Jones C. A. L. The sun diver: Combining solar sails with the Oberth effect // *American Journal of Physics*. 2021. Vol. 89. Iss. 3. P. 235–243. doi: 10.1119/10.0002178
- [4] Turyshv S. G., et al. Science opportunities with solar sailing smallsats // *Planetary and Space Science*. 2023. Vol. 235. doi: 10.1016/j.pss.2023.105744
- [5] Sullivan J., Grimberg S., D’Amico S. Comprehensive survey and assessment of spacecraft relative motion dynamics models // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2017. Vol. 40. No. 8. doi: 10.2514/1.G002309
- [6] Albert S. W., Schaub H. Relative Motion in the Velocity Frame for Atmospheric Entry Trajectories // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2023. Vol. 60. No. 5. P. 1614–1624. doi: 10.2514/1.A35753
- [7] Melton R. G. Relative Motion Between Hyperbolic Trajectories — A Technical Footnote // *Proceedings of the 73rd International Astronautical Congress*. International Astronautical Federation. 2022.
- [8] Reynolds R. Direct Solution of the Keplerian State Transition Matrix // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2022. Vol. 45, No. 6, P. 1162–1165. doi: 10.2514/1.G006373

Изучение орбит опасных астероидов

Петров Н.А., Кутеева Г.А.

n.petrov@spbu.ru, g.kuteeva@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе даны результаты применения нового численного эксперимента по поиску возможных тесных сближений и соударений астероидов с планетами. Этот новый метод разработан на кафедре небесной механики СПбГУ в 2021–2023 годах. Здесь приведены результаты для найденных этим экспериментом 24 астероидов с перигелийными расстояниями более 1.3 а.е., для которых возможны тесные сближения и даже соударение с Землей, Луной и другими планетами на интервале времени 2000–2200 лет.

Ключевые слова: астероид, астероидная опасность, тесные сближения, соударения с планетами.

Введение. На кафедре небесной механики СПбГУ разработано два метода для поиска возможных соударений и сближений астероидов с планетами. Первый метод разрабатывался примерно с 2009 года. В нем предполагается перебор начальных данных на одномерном многообразии, минимизация планетоцентрического расстояния астероида и ряд других приемов (как, например, в работах [1, 2]). С помощью этого метода было найдено множество ранее неизвестных соударений опасных астероидов, в том числе, для Апофиса. Использование метода Монте-Карло затруднительно в этом методе в силу высокой вычислительной трудоемкости.

В связи с этим был предложен новый метод в 2021 году [3], который позволил охватить большое число астероидов, выделить из них опасные по некоторым критериям, для которых возможны тесные сближения и соударения с Землей, Луной и другими планетами. Также получены оценки вероятностей этих событий с использованием метода Монте-Карло.

Обычно опасные для Земли астероиды ищут среди тех, перигелийные расстояния которых менее 1.3 а.е. (астероиды, сближающиеся с Землей, АСЗ). Однако орбиты астероидов эволюционируют, особенно сильно при тесных сближениях с планетами. В результате этого возможен переход в класс АСЗ объекта, который в этом классе не был.

Как известно, сближение с Юпитером может значительно изменить орбиту астероида, сближение с Марсом — существенно меньше. Для того, чтобы выделить из большого числа астероидов класс АСЗ было проведено численное исследование возможных движений большого числа известных астероидов. Среди них найдены 24 астероида, у которых перигелийные расстояния превосходят 1.3 а.е.

Далее мы подробно исследовали первым методом эти 24 астероида. У них оказались возможны тесные сближения и даже соударение с Землей, Луной и другими планетами на интервале времени 2020–2200 лет.

Описание численного эксперимента. Опишем численный эксперимент, разработанный на кафедре небесной механики СПбГУ в 2021–2023 годах, с использованием программного комплекса [3]. Из множества астероидов с известными орбитами (данные были взяты 06.03.2021 из указанной выше базы данных НАСА [4, 5]) исключаются астероиды, имеющие перигелийное расстояние q больше чем 1.8 а.е. и одновременно имеющие афелийное расстояние Q меньше чем 4.0 а.е., исключаются также малые астероиды с абсолютной величиной $H > 26$. Из всех известных астероидов (их известно порядка миллиона) остается 127 тысяч объектов. Приведем этапы численного эксперимента для отыскания опасных астероидов. Техника эксперимента состоит в том, что на каждом этапе исключаем астероиды, которые не сближаются с планетами менее заданного расстояния. Для каждого исследуемого реального астероида выбирается N — число виртуальных астероидов. Движение виртуальных астероидов изучается на интервале времени 2021–2132 годы.

Первый этап. Для каждого реального астероида из оставшихся (127 тысяч объектов) при $N = 2000$ виртуальных астероидов ищутся возможные сближения на расстояние менее 1000 радиусов одной из планет или Луны. Если таковых нет, астероид исключается. Остается 11 тысяч астероидов, которые берутся в следующий этап.

Второй этап. Для каждого из оставшихся объектов при $N = 20$ тысяч виртуальных астероидов ищутся возможные сближения на расстояние менее 100 радиусов одной из планет или Луны. Если таковых нет, астероид исключается. Остается чуть больше 3000 астероидов, которые берутся в следующий этап.

Третий этап. Каждый оставшийся астероид моделируется $N = 200000$ отдельных виртуальных экземпляров. Ищутся возможные сближения на 100, 10 и 1 радиус каждой из планет и Луны.

Некоторые результаты численного эксперимента. Результаты численного эксперимента приведены на сайте [6]. В частности, найдены 24 астероида с перигелийным расстоянием более 1.3 а.е., имеющие на интервале времени 2020–2200 годы возможные сближения с Землей на расстояние менее 100 ее радиусов. Для почти всех этих астероидов зафиксированы сближения и возможные соударения с Юпитером, много сближений с Марсом. Найдены также сближения с другими планетами. В качестве примера возьмем астероид 2011 XD3. Приведем его данные: перигелийное расстояние 1.53 а.е., точность — 0.0008 а.е. (1 сигма), афелийное расстояние — 5.16 а.е., точность — 0.07 а.е. (1 сигма). В результате численного эксперимента получаем два сближения с Землей на менее чем 100 ее радиусов, 6 сближений с Марсом на менее чем 100

его радиусов, 3751 сближение с Юпитером на менее чем 100 его радиусов, 512 сближений с Юпитером менее чем на 10 его радиусов, 103 возможных соударения с Юпитером.

Астероиды, имеющие перигелийное расстояние больше 1.3 а.е. и сближающиеся с Землей на расстояние меньше 100 ее радиусов до 2132 года: 2020 KH, 2012 SO23, 2011 XD3, 2006 CQ, 2020 RJ8, 2019 YH3, 2010 UC8, 2019 WY6, 2019 UQ10, 2009 LB. Отметим, что для астероида 2006 CQ нами было найдено возможное соударение с Землей в 2169 году.

Кумулятивные вероятности соударений различных астероидов с планетами и Луной для удобства записи и сравнения умножим на 200000. Тогда запишем полученные кумулятивные вероятности соударений в виде списка ниже:

- Земля: 2000 SG344 – 709, 2008 HJ – 53,
- Луна: 2015 AZ43 – 12, 2008 JL3 – 9,
- Меркурий: 2009 UM1 – 5, 2018 VB1 – 2,
- Венера: 2009 CE – 144, 2020 MA1 – 132,
- Марс: 2007 WD5 – 34, 2006 BX39 – 9,
- Юпитер: 2018 VJ11 – 463, 2019 JD14 – 303.

Объясним смысл приведенных чисел на примере астероида 2000 SG344. На третьем этапе эксперимента в программе R0 было запущено 200000 виртуальных астероидов. Для рассматриваемого астероида получено 709 возможных соударений с Землей на интервале времени 2020–2132 годы. Это значит, что вероятность соударения равна $709/200000 = 3.5e-3$. На сайте НАСА в разделе опасных астероидов приведена вероятность для этого астероида $2.7e-3$ на интервале времени 2069–2122 годы. Аналогично для других астероидов. Рассматривалось также изменение вероятностей в зависимости от числа виртуальных астероидов N . Для астероида 2021 QM1 ниже приведены вероятности P (умноженные на 10^5) соударения с Землей и Луной, см. таблицу 1.

Таблица 1. Вероятности P соударения (умноженные на 10^5) с Землей и Луной для астероида 2021 QM1 в зависимости от числа виртуальных астероидов.

N	Земля ($P \cdot 10^5$)	Луна ($P \cdot 10^5$)
10^4	10.0	10.0
10^5	13.0	6.0
10^6	16.0	5.3
10^7	15.0	4.5

Закключение. В результате численного эксперимента по новому методу найдены астероиды, при движении которых происходят возможные тесные сближения и соударения с Землей, Юпитером, Марсом, другими планетами Солнечной системы, с Луной. В работе описывается метод и дается только

часть полученных структурированных результатов, в том числе кумулятивные вероятности соударений некоторых астероидов с планетами Солнечной системы и Луной, а также вероятности возможного соударения с Землей и Луной в зависимости от числа виртуальных астероидов.

Важно, что опасность для Земли могут представлять и астероиды, не принадлежащие пока к числу «астероидов, сближающихся с Землей», у которых перигелийное расстояние больше 1.3 а.е. Определение таких объектов стало возможно с использованием современных вычислительных средств.

Литература

- [1] Petrov N, Sokolov L., Polyakhova E., Oskina K. Predictions of asteroid hazard to the Earth for the 21st century // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. P. 040012. doi: 10.1063/1.5034615
- [2] Петров Н. А., Васильев А. А., Кутеева Г. А., Соколов Л. Л. О траекториях соударения астероидов 2015 RN35 и Апофис с Землей // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2018. Т. 52. № 4. С. 330–342.
- [3] Balyaev I. A. Acceleration of numerical integration of the equations of motion of asteroids // *Sol. Syst. Res.* 2020. Vol. 54. P. 557–566. <https://doi.org/10.1134/S0038094620330011>
- [4] Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. Small-Body Database Lookup. Электронный ресурс: <https://ssd.jpl.nasa.gov/> (дата доступа 30 марта 2024).
- [5] Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. Электронный ресурс: <https://sneos.jpl.nasa.gov/> (дата доступа 30 марта 2024).
- [6] *Астрономия в Санкт-Петербургском университете*. Электронный ресурс: http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats_200000.xls (дата доступа 30 марта 2024).

О калибровочных характеристиках солнечного паруса

Родников А.В.

rodnikovav@mai.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Для изучения динамики движения космического аппарата с солнечным парусом в окрестности массивной гелиоцентрической станции предлагается использовать две функции, характеризующие силы, которые может создавать солнечный парус как при свободном движении аппарата, так и в случае, когда он так или иначе связан со станцией тросом. Эти функции в реальной ситуации могут быть определены

только экспериментально, поэтому могут быть названы калибровочными характеристиками.

Ключевые слова: солнечный парус, космическая тросовая система, односторонняя связь.

Базовая калибровочная характеристика. В настоящее время для изучения динамики космических аппаратов, оснащенных солнечными парусами, используются различные математические модели (см. [1] и мн. др.), фактически постулирующие зависимость силы, действующей на парус со стороны солнечной радиации, в зависимости от положения паруса по отношению к направлению на Солнце, его формы, материала и пр. Однако, выведенный на орбиту парус может не соответствовать его теоретической модели, в частности, потому что он может не полностью раскрыться, неточно позиционироваться по отношению к несущему его аппарату, отражающие свойства материала паруса в условиях космоса могут существенно отличаться от прогнозируемых и т. п. Тем не менее, подобные ситуации не следует воспринимать как катастрофические, так как парус все равно будет взаимодействовать с фотонами и создавать некоторую активную силу, величина и направление которой зависят от положения паруса по отношению к солнечным лучам. Поэтому, чтобы проверить возможность выполнения парусным аппаратом возложенной на него миссии, нужно, поворачивая парус под разными углами к направлению на Солнце, установить зависимость между величиной этой силы F и углом между ее линией действия и направлением солнечных лучей α . Очевидно, на практике найти такую зависимость с достаточной для расчетов точностью можно только экспериментально, поэтому будем называть ее базовой калибровочной характеристикой солнечного паруса. Пример такой характеристики, как функции $F = F(\alpha)$ изображен синей кривой на рис. 1, где ось x направлена по солнечным лучам.

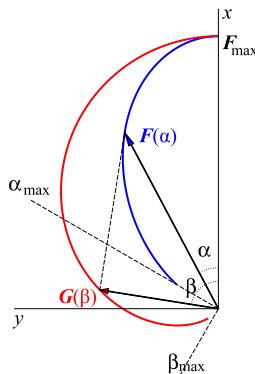


Рис. 1.

Естественно предположить, что $F(\alpha)$ достигает максимума F_{max} при $\alpha = 0$ и определена при $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$, $\alpha_{max} < \pi/2$. Например, в практически не реализуемой ситуации идеально отражающего плоского паруса $F = PS \cos^2 \alpha$, $F_{max} = PS$, $\alpha_{max} = \pi/2$, где P — характерная величина солнечного давления, S — площадь паруса. В тоже время для паруса, который либо отражает, либо поглощает фотоны, когда $\mathbf{F} = PS (\varkappa \mathbf{n} n_x^2 + ((1 - \varkappa)/2) \mathbf{e} n_x)$, где \varkappa — коэффициент отражения ($0 \leq \varkappa \leq 1$), \mathbf{n} — нормаль к парусу, \mathbf{e} — орт направления солнечных лучей, n_x — проекция \mathbf{n} на ось x , оказывается $F_{max} = PS(\varkappa + 1)/2$ и $\alpha_{max} = \arcsin \varkappa$.

Производная калибровочная характеристика. Как было показано в [2], аппараты с солнечным парусом могут оказаться полезными не только при реализации межпланетных и других миссий в дальнем космосе, но и могут быть использованы для перемещения грузов на небольшие расстояния, например, при строительстве или расширении тяжелой гелиоцентрической космической станции. При этом для реализации перемещений, требующих ускорений, направленных под острым углом к направлению на Солнце, было предложено ограничить движение парусного аппарата, связав его со станцией тросом, выполняющим в данной ситуации ту же функцию, что и киль морского парусного судна. Заметим, что если траектория аппарата в орбитальной системе отсчета задана, являясь, например, дугой окружности на сфере с центром в точке закрепления троса на станции, то для организации перемещения существенна не столько сила \mathbf{F} , действующая на парус, сколько проекция этой силы на касательную к траектории. Очевидно, абсолютная величина этой проекции может изменяться от 0 до некоторого значения G , зависящего от угла β направлением солнечных лучей и упомянутой касательной. Отметим, что если аппарат ускоряется, направление касательной необходимо выбирать по движению, а если замедляется — против движения. Величина $G(\beta)$ определяется формулой

$$G(\beta) = \max_{\alpha} (F(\alpha) \cos(\beta - \alpha)), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}.$$

Пример зависимости $G(\beta)$, которую можно назвать производной калибровочной характеристикой, изображен на рис. 1 красной кривой. Отметим, что функция $G(\beta)$ определена при $\beta \in [0, \beta_{max}]$, где $\beta_{max} \leq \alpha_{max} + \pi/2$, то есть в том числе и для движений под острым углом к направлению на Солнце, хотя и не для всех таких углов. Для примеров из предыдущего раздела β_{max} равно π и $\pi - \arccos \varkappa$ соответственно. Если функция $F(\alpha)$ является гладкой, а ее график ограничивает в секторе $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ выпуклую фигуру, производная калибровочная характеристика может быть выражена через базовую характеристику в параметрической форме как

$$G = \frac{F^2}{\sqrt{F'^2 + F^2}}, \quad \beta = \arctg \frac{F \operatorname{tg} \alpha - F'}{F' \operatorname{tg} \alpha + F}.$$

Литература

- [1] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: URSS, 2018. 320 с.
[2] Rodnikov A. V. On relative motions via a solar sail // AIP Conf. Proc. 2021. Vol. 2318. P. 110020.

Солнечные паруса в Самаре — перспективы и проекты

*Старинова О.Л.,¹ Поляхова Е.Н.,² Чернякина И.В.,¹
Хабидуллин Р.М.,¹ Рожков М.А.,¹ Демина А.Ю.¹*
*starinova.ol@ssau.ru, pol@astro.spbu.ru, gorbunovairina88@mail.ru,
khabibullin.roman@gmail.com, rozhkov.ma@ssau.ru, aldem16298@gmail.com*

¹Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королёва,
443086, Российская Федерация, Самара, Московское шоссе, 34,

²Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Общеизвестно, что космические аппараты (КА) с солнечным парусом (СП) используют для изменения траектории движения энергию солнечного светового давления. При этом СП генерирует ускорение без расхода рабочего тела, и КА может осуществлять длительные миссии, в частности совершить перелёты к объектам Солнечной системы. В настоящее время СП является единственным способом перемещения в космосе, при котором масса движителя меньше массы полезной нагрузки. Возможности конкретного КА с СП определяются, в первую очередь, его массой, площадью паруса, оптическими характеристиками поверхности (изменяющимися при деградации поверхности паруса), а также ограничениями на температуру поверхности и конструктивными особенностями КА.

Ключевые слова: солнечный парус, математическая модель, оптимальная траектория, гелиоцентрический перелёт, моделирование движения, система управления.

Введение. В данной работе рассматривается текущее состояние и будущие перспективы использования СП. Основное внимание уделено результатам, полученным в Самарском национальном исследовательском университете коллективом исследователей, работающих над этой тематикой более 30-ти лет. Впервые СП-тематикой коллектив занялся в 1988–89 гг. во время подготовки работы на международный конкурс «Колумб–500», приуроченный к 500-летию открытия Америки. Был разработан проект роторного паруса и рассчитаны программы управления для его перелёта на орбиту Марса [1].

Математические модели. Солнечные паруса имеют существенные особенности по сравнению с другими средствами передвижения в космосе. К наиболее важным относятся быстрое падение эффективности СП при удалении

от Солнца и существенная зависимость создаваемого ускорения от геометрических и оптических характеристик поверхности. Изучению этих особенностей и были посвящены исследования, проведённые группой энтузиастов Самарского университета. Разработаны математические модели для управления движением КА с СП с учётом неидеального отражения его поверхности на геоцентрическом и гелиоцентрическом участках движения, а также с учётом гравитации Солнца, Земли и Луны в рамках ограниченной задачи четырёх тел. Модели учитывают рассеивание, поглощение, пропускание и собственное излучение материала СП, а также деградацию отражающей поверхности под воздействием солнечного излучения. Солнечный парус, естественно, наиболее эффективен в ближайшей околосолнечной окрестности, но в этой же области на его движение оказывают влияние специфические факторы: релятивистские эффекты от вращающегося гравитирующего тела, протяжённость Солнца как источника излучения, отклонение формы поверхности паруса от плоскости, изменение оптических характеристик паруса, обусловленное деградацией и изменением температуры его поверхности. Эти аспекты моделирования движения СП были рассмотрены в работах [2]–[6].

Программы управления и миссии. Сложность разработанной математической модели движения не позволила получить решения проблемы об оптимальном управлении таким парусом для всех миссий, но была исследована возможность использования локально-оптимальных законов управления СП, используя комбинацию которых удалось получить гелиоцентрические траектории перелётов к Меркурию, Венере, Марсу, Юпитеру (см. рис. 1), астероидам [7]–[10]. В работе [11] была проанализирована возможность использовать СП для полёта в ближайшую околосолнечную окрестность с учётом ограничения на температуру и для межзвездного перелёта. Обычно считается, что СП пригоден для использования только в качестве носителя научной аппаратуры, но в работе [12] рассматривается возможность использования КА с СП в качестве многоразового межпланетного транспортного аппарата для циклической доставки грузов между Землёй и Марсом и между Землёй и Меркурием.

Проекты космических аппаратов. С 2018 г. коллектив начал сотрудничество с учёными мирового уровня в этой области Е.Н. Поляховой (Санкт-Петербургский государственный университет) и Р.Я. Кезерашвили (городской университет Нью-Йорка). Это привело изменению направления работы коллектива в сторону разработки конкретных проектов и миссий КА с СП [13, 6, 10, 14]. К сожалению, эти проекты были реализованы только в виде виртуальных 3D моделей, а миссии в виде имитационного моделирования.

Современные солнечные паруса представляют собой тонкоплёночную (от 3 до 7 нм) многослойную оптическую систему, лицевая поверхность которой может быть покрыта хорошо отражающим алюминием, а тыльная — отводящим

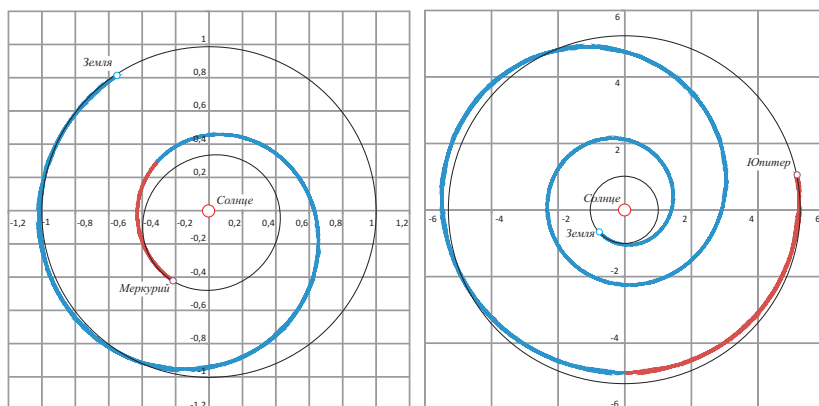


Рис. 1. Траектории перелетов к Меркурию и Юпитеру.

тепло хромом. Оптические параметры такой плёнки должны рассчитываться с использованием метода матриц переноса, основанного на описании электромагнитного поля двумя линейно независимыми компонентами: электрическим и магнитным полями. В работах [4, 15] представлена и изучается математическая модель поверхности паруса, позволяющая оценить влияние его проектных параметров (толщины слоёв и используемых материалов) на его оптические характеристики. Кроме того, малая толщина и большая площадь плёнки накладывает существенное ограничение на угловую скорость разворота поверхности паруса в процессе управления. Этот аспект проблемы рассматривался в работах [5, 13, 14]. Это направление исследований особенно важно для осуществления работы КА с СП на околоземных и окололунных орбитах, где угловая скорость управляющих разворотов существенно выше, чем на гелиоцентрических перелётах.

Перспективные проекты. В настоящее время коллектив работает над проектом использования группировки КА с СП, размещённой на смещённых гало-орбитах системы Земля–Луна, в составе системы глобальной навигации в окрестности Луны. В этом проекте уникальная возможность СП изменять траектории движения без расхода топлива используется для создания периодических орбит заданной конфигурации. Область функционирования такой системы навигации требует учёта гравитации Земли, Луны и Солнца, то есть решения фотогравитационной задачи четырёх тел.

Литература

- [1] Ишков С. А., Старинова О. Л. Оптимизация и моделирование движения космического аппарата с солнечным парусом // Известия Самарского научного центра РАН. 2005. Т. 7. № 1. С. 99–106.

- [2] Starinova O. L., Khabibullin R. M., Gorbunova I. V. (Chernyakina I. V.) The project of the small frame-type solar sail spacecraft // 7-th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. IEEE. 2015. P. 643–648.
- [3] Старинова О. Л. Хабибуллин Р. М. Создание проектной модели малого космического аппарата с солнечным парусом дистанционного зондирования Земли // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2015. Т. 17. № 2. С. 143–150.
- [4] Чернякина И. В., Старинова О. Л. Комплексное моделирование поведения конструкции космического аппарата с солнечным парусом роторного типа // Известия Самарского научного центра РАН. 2019. Т. 21. № 1. С. 45–51.
- [5] Chernyakina I. V., Khabibullin R. M., Chernyakin S. A., Starinova O. L. Comparative analysis by different types of the solar-sailing spacecraft leaving the Earth's action sphere // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2019. Vol. 10. No. 4. P. 671–680.
- [6] Rozhkov M. A., Starinova O. L., Chernyakina I. V. Influence of optical parameters on a solar sail motion // Advances in Space Research. 2021. Vol. 67. No. 9. P. 2757–27661.
- [7] Khabibullin R. M., Starinova O. L. Solar sail space system guidance for monitoring of potentially hazardous asteroids // Materials of 24-th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2017. P. 577–583.
- [8] Starinova O. L., Gorbunova I. V. (Chernyakina I. V.) Feedback control of the spacecraft with a solar sail for interplanetary flights // Advances in the Astronautical Sciences. 2017. V. 161. P. 315–324.
- [9] Хабибуллин Р. М. Программа управления для некомпланарного гелиоцентрического перелёта к Венере космического аппарата с неидеально отражающим солнечным парусом // Вестник Самарского университета. 2019. Т. 19. № 4. С. 10–16.
- [10] Kezerashvili R. Ya., Chernyakina I. V., Starinova O. L., Polyakhova E. N. The temperature restriction effects on solar-sail spacecraft motion controlling in the nearest sun vicinity // Advances in the Astronautical Sciences. 2021. P. 17–26.
- [11] Starinova O. L., Chernyakina I. V. Solar system escape mission with solar sail spacecraft: Within a framework of post-Newtonian gravitational theory // Journal of the British Interplanetary Society. 2018. Vol. 71. No. 12. P. 438–442.
- [12] Рожков М. А., Старинова О. Л. Оптимизация управления солнечным парусом при движении аппарата по циклическим гелиоцентрическим траекториям // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 6. С. 1–10.
- [13] Kezerashvili R. Y., Starinova O. L., Chekashov A. S., Slocki D. J. A torus-shaped solar sail accelerated via thermal desorption of coating // Advances in Space Research. 2021. Vol. 67(9). P. 2577–2588.
- [14] Kezerashvili V. Y., Kezerashvili R. Y., Starinova O. L. Solar sail with inflatable toroidal shell // Acta Astronautica. 2023. Vol. 202. P. 17–25.
- [15] Рожков М. А. Влияние оптических характеристик многослойного солнечного паруса на его гелиоцентрическое движение // Вестник Самарского университета.

Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21. № 4. С. 52–65.

Полиномиальная аппроксимация функции управления для оптимизации перелётов с малой тягой

Суслов К.С., Широбокоев М.Г.

suslov.ks@phystech.edu, shirobokov@keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

Аннотация. В данной работе предлагается методика построения управления орбитальным движением космического аппарата, оснащённого двигательной установкой малой тяги. Методика основана на параметризации вектора реактивной тяги в виде суперпозиции периодических и полиномиальных функций, что позволяет свести задачу построения оптимального управления к задаче нелинейного программирования небольшой размерности. Применение методики продемонстрировано на геоцентрическом перелёте между низкой круговой и высокоапогейной орбитами.

Ключевые слова: малая тяга, оптимальное управление, параметризация, многовитковая траектория.

Введение. В настоящее время отечественная космонавтика уделяет всё больше внимания миссиям на базе малых космических аппаратов. Такие аппараты дешевле в разработке, производстве и запуске, а также позволяют привлечь в отрасль частные компании и университетские группы. Сейчас в различных отраслевых организациях ведётся активная работа по разработке научной аппаратуры, датчиков и других компонентов для малых космических аппаратов, включая двигательные установки малой тяги [1].

Неотъемлемой частью проектирования миссии является баллистический анализ. Использование малых аппаратов накладывает ряд ограничений: размер и масса аппарата ограничивают запас топлива, который можно потратить на управление; двигатели обладают низким значением тяги, что приводит к увеличению времени перелёта и спиральному виду траекторий. Чтобы удовлетворить требованиям миссии и ограничениям, траекторию перелёта необходимо оптимизировать. Для этого используются два основных подхода: прямые и непрямые методы оптимизации [2].

Данная работа посвящена разработке нового подхода, принадлежащего к прямым методам, которые основаны на параметризации искомой функции, что позволяет свести задачу оптимизации к задаче нелинейного программирования. Такие методы широко используются в задачах проектирования траекторий перелётов с малой тягой и коррекции орбит [3, 4]. Суть предлагаемого

метода заключается в параметризации вектора тяги суперпозицией периодических и полиномиальных функций.

Задача поиска оптимального перелёта. Задача поиска оптимальной траектории перелёта ставится следующим образом. Рассматривается перелёт космического аппарата с двигательной установкой малой тяги между двумя эллиптическими орбитами в поле притяжения точечного тела, расположенного в центре системы координат. Начальная и целевая орбиты задаются первыми пятью модифицированными равноденственными элементами орбиты: $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0) = [p_0, e_{x,0}, e_{y,0}, i_{x,0}, i_{y,0}]^T$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1) = [p_1, e_{x,1}, e_{y,1}, i_{x,1}, i_{y,1}]^T$. Целевой функционал, который необходимо минимизировать, равен затратам топлива и имеет следующий вид:

$$J(F, \alpha) = - \int_{t_0}^{t_1} m dt = \frac{1}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_1} F dt, \quad (1)$$

где F — величина тяги двигательной установки, α — вектор направления тяги, m — масса аппарата, I_{sp} — удельный импульс двигательной установки, $g_0 = 9.80665$ м/с² — ускорение свободного падения на уровне моря.

Параметризация тяги космического аппарата. Идея параметризации тяги строится на следующих предположениях о виде оптимального управления:

1. исходя из принципа максимума Понтрягина [5], оптимальное управление является релейным, то есть разбивается на конечные участки, на которых величина тяги F равна либо нулю (такие участки называются пассивными), либо максимальному значению F_{\max} (такие участки называются активными);
2. моменты времени, в которые управление переходит из активного участка в пассивный и наоборот, а также направление тяги близки на соседних витках.

Исходя из этих предположений, предлагается аппроксимировать направление тяги и моменты перехода между активными и пассивными участками следующим образом. Рассмотрим k -й виток траектории ($2\pi k \leq L < 2\pi(k+1)$, где L — истинная долгота). На этом витке параметризуем углы α и β , задающие направление вектора тяги в пространстве, как

$$\begin{aligned} \alpha(L) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos L + \alpha_2 \sin L, \\ \beta(L) &= \beta_0 + \beta_1 \cos L + \beta_2 \sin L, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ — некоторые постоянные величины. Моменты переключения режима двигательной установки обозначим как τ_i , $i = 1, \dots, n$, n — число переключений. Таким образом, на одном витке управление параметризуется $n + 6$ скалярными величинами.

В случае многовитковой траектории необходимо добавить гладкое изменение параметров управления от витка к витку. Для этого параметры $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ заменяются на полиномиальные функции второй степени от времени:

$$\alpha_j(t) = \alpha_{j0} + \alpha_{j1} \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + \alpha_{j2} \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right)^2, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$\beta_j(t) = \beta_{j0} + \beta_{j1} \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + \beta_{j2} \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right)^2, \quad j = 0, 1, 2,$$

а τ_i заменяются на полиномиальные функции второй степени от номера витка:

$$\tau_i(k) = \tau_{i0} + \tau_{i1} \frac{k}{K} + \tau_{i2} \left(\frac{k}{K} \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где K — нормировочный параметр. Таким образом, управление орбитальным движением аппарата параметризуется набором из $18 + 3n$ скалярных величин. Число n выбирается на основе предположений о количестве активных участков.

Результаты. Для демонстрации предлагаемой методики рассматривается задача перелёта малого

космического аппарата массой 20 кг с низкой круговой на высокоапогейную орбиту в рамках перспективной миссии по исследованию магнитосферы Земли [6]. Задача решается для различных значений времени перелёта и тяговых характеристик двигательной установки малой тяги. Пример полученной многовитковой траектории представлен на рисунке 1. Предложенная методика позволяет получать релейное управление, близкое к оптимальному, используя широкий спектр методов решения задач нелинейного программирования. Траектории, по-

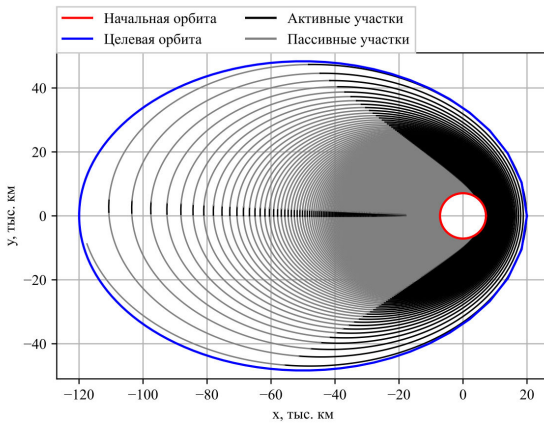


Рис. 1. Пример оптимальной траектории. Время полёта $T = 155$ суток, количество витков $K = 954$, затраты топлива $J = 4.6$ кг.

лученные таким образом, могут быть использованы в качестве начальных приближений в более точных, но чувствительных непрямых методах оптимизации многовитковых траекторий. Параметры стартовой и целевой орбит указаны в таблице 1.

Таблица 1. Параметры стартовой и целевой орбит.

Параметр	Начальная орбита	Целевая орбита
большая полуось, a	7.2 тыс. км	70.0 тыс. км
эксцентриситет, e	0.0	0.7
наклонение, i	99.0°	99.0°
долгота восходящего узла, Ω	0.0°	0.0°
аргумент перицентра, ω	0.0°	0.0°

Литература

- [1] Абраменков Г. В., Вертаков Н. М., Дронов П. А., Каплин М. А., Приданников С. Ю. Ракетные двигатели АО «ОКБ «Факел» для космических аппаратов — опыт лётного применения и новые разработки // Космическая техника и технологии. 2023. № 4(43). С. 13–30.
- [2] Conway B. *Spacecraft Trajectory Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010. doi: 10.1017/CBO9780511778025
- [3] Kluever C. A., Oleson S. R. Direct Approach for Computing Near-Optimal Low-Thrust Earth-Orbit Transfers // *J. Spacecr. Rocket*. 1998. No. 35(4). P. 509–515. doi: 10.2514/2.3360
- [4] Topputo F., Zhang C. Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications // *Abstr. Appl. Anal.* 2014. P. 1–15. doi: 10.1155/2014/851720
- [5] Petukhov V. G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method // *Cosm. Res.* 2008. No. 46(3). P. 219–232. doi: 10.1134/S0010952508030052
- [6] Богачёв С. А., Овчинников М. Ю., Шувалов В. А., Суслов К. С., Шестаков С. А. Измерение магнитных полей и электрических токов в магнитосфере Земли с использованием специальных орбитальных построений малых КА // *Материалы 58-х Научных чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Часть 1. Калуга: изд-во Эйдос, С. 49–64.*

Траектории периодических орбит общей задачи трех тел в пространстве форм

Титов В.Б.

tit@astro.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В рамках общей задачи трех тел рассматриваются периодические траектории с линейной симметрией и симметрией 2-1 на сфере форм. Момент инерции приведенных орбит в течение периода изменяется мало, поэтому достаточно посмотреть эти орбиты на сфере форм или в пространстве угловых координат. Все рассмотренные траектории, кроме восьмерки, на сфере форм представляют собой квази-малые окружности вокруг либо точек двойных соударений, либо эйлеровых точек.

Ключевые слова: небесная механика, общая задача трех тел.

Введение. В работе [1] показано, что группы симметрии общей плоской задачи трех тел исчерпываются 10 группами. Три из этих групп послужили основой для поиска симметричных периодических решений [2]. Найденные траектории можно отобразить в пространство форм, такое преобразование с точностью до поворота исходной барицентрической системы однозначно. Поскольку в пространстве форм для этих траекторий расстояние от начала координат меняется мало (в пределах $\pm 10\%$), то для качественного анализа можно ограничиться их проекцией на сферу форм.

Пространство форм. Пространство форм есть пространство конгруэнтных треугольников — конфигураций точек общей задачи трех тел. Это пространство получается редукцией конфигурационного пространства задачи по переносам, а затем редукцией по вращениям. Первая редукция производится переходом к координатам Якоби

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{r}_3 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

вторая — преобразованием Хопфа: рассматривая координаты \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 как точки комплексного пространства, введем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} \mu_1 |\mathbf{Q}_1|^2 - \frac{1}{2} \mu_2 |\mathbf{Q}_2|^2, \\ \xi_2 + i \xi_3 &= \sqrt{\mu_1 \mu_2} \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{Q}}_2. \end{aligned}$$

Трехмерное пространство $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и есть пространство ориентируемых конгруэнтных треугольников, каждая точка этого пространства представляет собой класс таких ориентируемых конгруэнтных треугольников. Это пространство называется *пространством форм*. В этом пространстве можно построить поверхность нулевой скорости [3]. В этой работе в пространстве форм изучаются свойства периодических решений задачи трех тел.

Момент инерции I в этом пространстве получает простое выражение:

$$I = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

т. е. представляет собой расстояние точки пространства форм (ξ_1, ξ_2, ξ_3) до начала координат и, если ввести в пространстве Ξ сферические координаты ρ, φ, θ , то координату ρ естественно считать размером треугольника, а φ, θ угловыми переменными, определяющими его форму. Естественно, координата ρ совпадает с моментом инерции. В пространстве форм все свойства, касающиеся момента инерции системы естественным образом связаны с размером треугольника. Можно за размер треугольника принять квадратный корень из ρ , тогда единица измерения совпадет с единицей длины. В любом случае точки сферы фиксированного радиуса, например, $\rho = 1$ или $\rho = 1/2$, будут отвечать именно за форму треугольника, такая сфера называется *сферой форм*, а все пространство форм есть конус над этой сферой с вершиной в точке тройного соударения $(0, 0)$. Таким образом, точка на сфере форм представляет собой класс подобных треугольников, все точки на луче в пространстве форм, исходящем из начала координат, отвечают подобным конфигурациям трех тел и отличаются только размером.

Очевидно, что экватор сферы форм, (и плоскость $\xi_3 = 0$), отвечают коллинеарным конфигурациям ($\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 = 0$). Таким образом, все точки двойных соударений при любых значениях масс лежат на экваторе, в пространстве форм двойным соударениям отвечают три луча (в плоскости экватора).

Периодические орбиты. Чтобы найти периодическое решение задачи трех тел, достаточно найти (локальный) минимизатор функционала действия задачи в пространстве 2π -периодических функций, периодические решения с периодом, отличным от 2π , можно найти с помощью симметрии масштаба, причем можно искать решение в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= C_x^0 + \sum_{i=1} C_{x_i}^j \cos it + S_{x_i}^j \sin it \\ y_j(t) &= C_y^0 + \sum_{i=1} C_{y_i}^j \cos it + S_{y_i}^j \sin it, \end{aligned}$$

где j — номер тела.

Момент инерции полученных периодических орбит изменяется мало, как правило меньше нескольких процентов, поэтому интересно посмотреть на полученные траектории на сфере форм.

Траектории на сфере форм. На рис. 1 приведены проекции на плоскость φ, θ полученных траекторий при $\omega = 1/3$.

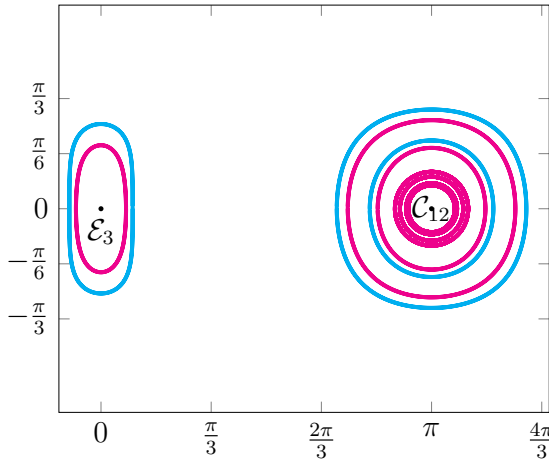


Рис. 1. Траектории 2 – 1-симметрии с $\omega = 1/3$.

Полученные вариационным методом периодические орбиты в пространстве форм, точнее на сфере форм, в случае 2 – 1-симметрии выглядят как малые квази-окружности вокруг точки двойных соударений C_{12} , либо вокруг точки соответствующей эйлеровой конфигурации E_3 ; в случае линейной симметрии, где все три массы произвольны, квази-окружности могут располагаться как вокруг точек C_{12}, C_{13}, C_{23} , так и вокруг точек E_1, E_2 или E_3 . Траектории малинового цвета отвечают телам с массами 0.95, 0.95, 1.1, бирюзовым цветом изображены соответствующие траектории с мвсами 1.05, 1.05, 0.9.

Литература

- [1] Barutello V., Ferrario D., Terracini S. Symmetry groups of the planar 3-body problem and action-minimizing trajectories // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2008. Vol. 190. P. 189–226.
- [2] Titov V. Symmetrical periodic orbits in the three body problem – the variational approach // Few-Body Problem: Theory and Computer Simulations. University of Turku, Finland. Annales Universitatis Turkuensis, Series 1A. Astronomica–Chemica–Physica–Mathematica. 2006. V. 358. P. 9–15.

- [3] Титов В.Б. Области возможного движения в общей задаче трех тел. Записки научных семинаров ПОМИ. 2023. Т. 517. С. 225–249.

Определение динамических параметров околоземных объектов по данным позиционных и фотометрических измерений

Томилова И.В., Салейко К.В., Бордовицына Т.В.

irisha_tom@mail.ru, ksenia.saleiko@ya.ru, bordovitsyna@mail.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
634050, Российская Федерация, Томск, пр. Ленина, 36

Аннотация. Представлена методика совместного использования позиционных и фотометрических измерений для определения динамических параметров объектов космического мусора (КМ). Приведены результаты ее применения к оценке динамических параметров группы геосинхронных объектов по наблюдениям, полученным на телескопе Zeiss–2000 ЦКП «Терскольская обсерватория» Института астрономии РАН. В число определяемых параметров входят: вектор состояния объекта (координаты и скорости) в заданную эпоху, значение средней парусности объекта, изменение мгновенного значения площади миделевого сечения объекта и приближенная оценка его массы.

Ключевые слова: геосинхронные объекты, позиционные и фотометрические наблюдения, определение динамических параметров движения.

Введение. Основной целью процесса обработки наблюдений околоземных объектов является получение параметров движения и модели действующих сил. В данной работе использовались наблюдения геосинхронных объектов (ГСО) космического мусора (КМ), полученные на телескопе Zeiss–2000 ЦКП «Терскольская обсерватория» сотрудниками Института астрономии РАН Бахтигараевым Н.С. и Левкиной П.А. Точность позиционных измерений составляет $0.15''$, а фотометрических — 0.01^m [1].

Традиционно для определения динамических параметров используются только позиционные наблюдения, данные о блеске используются редко [2]. Однако, как мы покажем далее именно совместное использование обоих видов наблюдений позволяет получить более широкие сведения о динамических характеристиках объекта.

Методики и алгоритмы. В файле с наблюдениями содержится информация о дате и моменте времени (UTC), измеренные на момент наблюдения прямое восхождение, склонение и блеск объекта, задаваемый в звездных величинах. Получение параметров движения объекта на основе позиционных данных осуществляется с помощью численной модели движения ИСЗ, подробно описанной в [3]. Она позволяет получить координаты и скорости объекта

на выбранный момент времени, а также значение средней парусности объекта, которая представляет собой отношение площади миделевого сечения A объекта к его массе m , вместе с их среднеквадратичными ошибками.

Алгоритм извлечения данных из измеренной величины блеска основан на том, что известная из фотометрических измерений видимая звездная величина блеска объекта m зависит от обратного квадрата модуля топоцентрического вектора космического аппарата \mathbf{r}' и может быть представлена в виде [4]:

$$m = m_{Sun} - 2.5 \lg \frac{AkF(\psi)}{r'^2}, \quad (1)$$

где m_{Sun} — видимая звездная величина Солнца в видимой области спектра, равная -26.74 , k — спектральный коэффициент отражения, значения которого лежат в интервале от 0.1 до 1, и $F(\psi)$ — фазовая функция, зависящая от так называемого фазового угла ψ — угла в системе «Солнце–космический аппарат–наблюдатель». Преобразовываем (1) и находим выражение для величины площади миделевого сечения A :

$$A = \frac{10^{-0.4(m-m_{Sun})r'^2}}{kF(\psi)}. \quad (2)$$

Для мгновенного определения площади миделевого сечения будем считать, что объект представляют собой сферу с диффузной отражательной поверхностью. В этом случае фазовая функция запишется как [4]:

$$F(\psi) = \frac{2}{3\pi^2} [(\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi]. \quad (3)$$

Величина косинуса фазового угла ψ в каждый момент времени определяется формулой

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{x}_E \mathbf{x}_S}{r'_E r'_S}, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_E = \{x_{obs} - x_{sat}; y_{obs} - y_{sat}; z_{obs} - z_{sat}\}$ и $\mathbf{x}_S = \{x_{Sun} - x_{sat}; y_{Sun} - y_{sat}; z_{Sun} - z_{sat}\}$ есть векторы положения наблюдателя и Солнца в системе координат, связанной с космическим аппаратом, компоненты которых известны из численного моделирования, а r'_E и r'_S модули этих векторов соответственно.

Далее по вычисленным мгновенным значениям A находим среднее значение величины площади миделевого сечения по всему используемому массиву наблюдений и вычисляем оценку массы объекта, используя параметр парусности A/m , найденный по позиционным наблюдениям в ходе процесса улучшения орбиты исследуемого объекта.

Результаты. Рассмотрим объект КМ с номером 10294 по каталогу ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Этот объект является отработавшим итальянским коммуникационным спутником Sirio, запущенным в 1977 году. Известны параметры объекта при запуске: сухая масса $m = 218$ кг, парусность $A/m = 0.009$ м²/кг.

Таблица 1. Определение параметров объекта № 10294.

№	Период наблюдений	A_{min} , м ²	A_{max} , м ²	A_{avg} , м ²	A/m , м ² /кг	σ , ^{''}	m , кг
1	03.03.2019–09.03.2019	0.286	16.509	0.877	0.014	0.39	61.78
2	13.09.2019–24.09.2019	0.641	44.717	2.581	0.009	0.20	278.44
3	06.12.2019–24.12.2019	0.414	278.228	3.778	0.016	0.93	239.17
4	22.06.2020–29.06.2020	0.514	51.861	2.105	0.011	0.22	192.11
5	10.09.2020–29.09.2020	0.506	47.833	2.571	0.010	0.46	248.17
6	12.09.2021–27.09.2021	0.696	16.275	1.821	0.012	0.37	151.95
7	11.10.2021–30.10.2021	0.723	21.585	1.810	0.018	0.47	103.14
8	03.11.2021–06.11.2021	1.061	31.517	1.999	0.026	0.59	76.57
9	17.06.2022–02.07.2022	0.488	10.169	1.647	0.014	0.32	121.77
10	25.10.2022–08.11.2022	0.683	21.181	1.516	0.019	0.35	79.90
11	15.09.2023–22.09.2023	0.362	37.650	2.634	0.017	0.83	156.62

В таблице 1 и далее представлены: минимальное A_{min} , максимальное A_{max} и среднее A_{avg} значения площади миделевого сечения, параметр парусности объекта A/m , среднеквадратическая ошибка σ в конце итерационного процесса улучшения орбиты объекта и оценка массы m спутника. Если убрать из рассмотрения явно ненадежные, полученные по малым измерительным дугам, результаты под номерами 1, 7, 8, 11, мы получим оценки значения массы и парусности объекта, близкие к начальным: $m = 187.357$ кг и $A/m = 0.013$ м²/кг. Масса при этом уменьшается, а парусность, естественно, увеличивается относительно начальных значений, причем парусность и площадь миделевого сечения вычисляются по независимым друг от друга измерениям.

Проанализируем наблюдения еще двух объектов, являющихся фрагментами китайского метеорологического спутника Fengyun 2D, запущенного в декабре 2006 г. Объект под номером 90073, представляет собой небольшой фрагмент спутника. В работе [5] на основании исследования обширного наблюдательного материала получено, что максимальное значение парусности этого объекта равно 0.18 м²/кг.

Как видно из представленных в таблице 2 данных, оценка средней массы спутника по фотометрическим измерениям колеблется около значения $m = 9.156$ кг. Оценка парусности объекта по всем имеющимся в нашем распоряжении массивам наблюдений дает среднее значение $A/m = 0.1169$ м²/кг.

Таблица 2. Определение параметров объекта № 90073.

№	Период наблюдений	A_{min} , м ²	A_{max} , м ²	A_{avg} , м ²	A/m , м ² /кг	σ , ”	m , кг
1	13.09.2019–24.09.2019	0.031	22.614	0.638	0.093	0.56	6.90
2	06.12.2019–24.12.2019	$5.4 \cdot 10^{-5}$	15.405	0.434	0.100	0.24	4.33
3	22.06.2020–29.06.2020	0.200	5.463	1.156	0.130	0.29	8.93
4	11.09.2020–24.09.2020	0.038	7.256	0.863	0.123	0.346	7.02
5	12.09.2021–27.09.2021	0.075	11.380	1.290	0.142	0.56	9.10
6	11.10.2021–30.10.2021	0.069	73.587	1.358	0.115	1.09	11.85
7	03.11.2021–06.11.2021	0.103	16.912	1.158	0.098	0.51	11.78
8	05.01.2022–29.01.2022	0.129	9.340	1.501	0.086	0.29	17.37
9	17.06.2022–03.07.2022	0.040	8.567	1.363	0.081	0.238	16.83
10	28.10.2022–30.10.2022	0.201	9.985	1.184	0.149	0.24	7.96
11	01.11.2022–08.11.2022	0.142	5.340	0.849	0.139	0.25	6.11
12	17.09.2023–22.09.2023	0.060	0.766	0.249	0.148	0.95	1.68

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2024-0005).

Литература

- [1] Levkina P., Bakhtigaraev N., Martynyuk-Lototsky K., Velichko S., Sokolov I., Bondar A., Khorunzhiy P., Chazov V. Characteristics of small-sized space debrisobjects detected at the Terskol observatory in 2016–2017 // Open Astron. 2018. Vol. 27. P. 310–313. DOI: 10.1515/astro-2018-0028
- [2] Коробцев И. В., Цуккер Т. Г., Мишина М. Н., Горяшин В. Е., Еселевич М. В. Наблюдения космического мусора в области орбит глобальных навигационных спутниковых систем // Солнечно-земная физика. 2020. Т. 6. № 3. С. 115–123. DOI: 10.12737/szf-63202014
- [3] Авдюшев В. А., Бордовицына Т. В., Батурин А. П., Бахтигараев Н. С., Левкина П. А., Попандопуло Н. А., Салейко К. В., Томилова И. В. Численное моделирование динамических параметров геосинхронных объектов по данным позиционных наблюдений // Астрон. вестн. 2022. Т. 56. № 5. С. 344–355. DOI: 10.31857/S0320930X22050012
- [4] McCue G. A., Williams J. G., Morford J. M. Optical characteristics of artificial satellites // Planetary and Space Science. 1971. V. 19. Issue 8. P. 851–868. DOI: 10.1016/0032-0633(71)90137-1
- [5] Bakhtigaraev N., Levkina P., Rykhlova L., Sergeev A., Kokhirova G., Chazov V. Features of geosynchronous space objects motion near 75°E // Open Astron. 2018. Vol. 27. P. 139–143. DOI: 10.1515/astro-2018-0024

Быстрый баллистический анализ траекторий перелета к Луне с малой тягой на основе управления с обратной связью

Широбокоев М.Г.
shirobokov@keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

Аннотация. Доклад посвящен методике проведения баллистического анализа траекторий перелета к Луне с малой тягой на основе управления с обратной связью. Предлагаемый подход позволяет избежать вычислительно затратных процессов решения задач оптимального управления и применим для проектирования траекторий перелета к Луне как больших, так и малых аппаратов. Описывается алгоритм построения траектории, приводятся примеры применения методики, а также результаты сравнения полученных траекторий с оптимальными.

Ключевые слова: космический аппарат, малая тяга, метод Ляпунова, обратная связь.

Современный период развития космической отрасли характеризуется высоким интересом исследователей, космических агентств, частных компаний и государств к окололунному пространству и Луне. Это связано с планами строительства орбитальной окололунной станции, развертывания спутниковой навигационной сети, добычи ресурсов на Луне и научными исследованиями. Как следствие возникают вопросы создания лунных буксиров для перемещения грузов и прочей полезной нагрузки между Землей и Луной или перспективными околоземными и окололунными орбитальными станциями. Для максимизации полезной нагрузки на таких аппаратах разумно использовать электрореактивные двигательные установки (ЭРДУ) с высоким удельным импульсом и малой тягой. Кроме того, в последние годы отчетливо наблюдается общемировой тренд на развитие технологий межпланетных малых космических аппаратов. Малые космические аппараты дешевы в производстве, но имеют существенные ограничения на бортовую энергетику и массу компонентов. Одним из рабочих вариантов доставки малых аппаратов к Луне также является использование ЭРДУ с высоким удельным импульсом и малой тягой.

Итак, важным аспектом проектирования миссий к Луне, будь то многотонные буксиры или миниатюрные кубсаты, является проектирование траектории перелета с малой тягой. Для этого зачастую ставится задача оптимального управления, которая решается прямыми или косвенными методами оптимизации. Прямые методы подразумевают параметризацию (чаще всего дискретизацию) функции управления и траектории аппарата, благодаря чему задача оптимального управления сводится к нелинейной задаче программирования [1]. Косвенные методы основываются на необходимых условиях оптимальности и

сводят задачу оптимального управления к краевой задаче [2]. Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки. Прямые методы оптимизации позволяют легко адаптировать траектории перелета к высокоточным моделям движения небесных тел, однако предполагают способность решать задачи с большим числом переменных. Непрямые методы оптимизации имеют меньшее число оптимизируемых переменных, ориентируются на необходимые условия оптимальности, но сталкиваются со сложностью нахождения подходящих начальных приближений для сопряженных переменных. Оба подхода имеют небольшой радиус сходимости и сложны для оптимизации многовитковых траекторий перелета, характерных для полетов к Луне на ЭРДУ.

Другой класс методов построения управления с малой тягой основывается на использовании управления с обратной связью. Существует множество методов построения управления с обратной связью для перелета между орбитами. Они основаны на простых эвристических приемах [3], широко известном и ставшем классическим методе Q-закона управления [4, 5], а также специальных формах уравнений орбитального движения [6, 7]. Базовые версии перечисленных методов не требуют оптимизации и позволяют строить многовитковые траектории перелета между орбитами. Некоторые исследования показывают, что такие траектории слабо отличаются от оптимальных траекторий с точки зрения затрат топлива и поэтому их можно использовать в качестве начального приближения для прямых и непрямых методов оптимизации [8]–[11]. На их основе можно создавать и адаптивные алгоритмы управления с использованием методов машинного обучения с подкреплением [12].

Цель настоящей работы заключается в разработке методики проектирования траекторий перелета между околоземными и окололунными орбитами с использованием управления с обратной связью. Траектория перелета разбивается на три участка: раскрутка с околоземной орбиты с целью выхода за пределы радиационных поясов, перелет в окрестность точки либрации L_1 системы Земля–Луна и дальнейший выход на целевую окололунную орбиту. На первом участке сила тяги двигателя все время, кроме тени, направлена вдоль скорости аппарата, а на втором и третьем участках применяется управление с обратной связью. Предлагаемое управление является модификацией управления из работ [6, 7], и по сравнению с классическим Q-законом управления обладает более простой программной реализацией и математической интерпретацией. При этом в работе решается проблема соотношения времени полета и положения точки либрации, позволяющая строить участки траектории только вперед во времени, в отличие от прямо-обратного подхода в работе. Методика проектирования траектории не содержит вычислительно затратных процедур оптимизации, процедура поиска начального приближения и усреднения.

В докладе описывается методика проектирования траектории, ее сильные и слабые стороны. Методика демонстрируется на примерах проектирования тра-

ектории полета аппаратов с околоземных на окололунные орбиты. Траектории перелета сопоставляются с оптимальными по расходу топлива траекториями в модели идеального регулируемого двигателя, которая обеспечивает теоретическую оценку снизу расхода топлива. Результаты показывают незначительные различия в расходе топлива между ними, составляющие несколько процентов от исходной массы аппарата. Методика может быть полезна для массивного параметрического анализа траекторий перелета аппаратов к Луне с околоземных орбит на окололунные орбиты с малой тягой.

Литература

- [1] Topputo F., Zhang C. Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications // *Abstract and Applied Analysis*. Hindawi. 2014. V. 2014. P. 1–15. <https://doi.org/10.1155/2014/851720>
- [2] Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // *Космические исследования*. 2012. Т. 50. № 3. С. 258–270.
- [3] Kluever C.A. Simple guidance scheme for low-thrust orbit transfers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1998. V. 21. No. 6. P. 1015–1017. <https://doi.org/10.2514/2.4344>
- [4] Petropoulos A.E. Simple control laws for low-thrust orbit transfers // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference*, 2003. <https://doi.org/2014/38468>
- [5] Petropoulos A.E. Refinements to the Q-law for low-thrust orbit transfers // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2005. V. 120. P. 963–982.
- [6] Pontani M., Pustorino M. Nonlinear Earth orbit control using low-thrust propulsion // *Acta Astronautica*. 2021. V. 179. P. 296–310. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.10.037>
- [7] Peterson J. T. A., Singh S. K., Junkins J. L., Taheri E. Lyapunov guidance in orbit element space for low-thrust cislunar trajectories // *AAS Guidance, Navigation and Control Conference*. 2020. P. 20-0115.
- [8] Gao Y., Li X. Optimization of low-thrust many-revolution transfers and Lyapunov-based guidance // *Acta Astronautica*. 2010. V. 66. No. 1-2. P. 117–129. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.05.013>
- [9] Shannon J.L., Ozimek M.T., Atchison J.A., Christine M. Q-law aided Direct Trajectory Optimization for the High-fidelity, Many-revolution Low-thrust Orbit Transfer Problem // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2019. V. 168. P. 781–800.
- [10] Shannon J., Ozimek M., Atchison J., Hartzell C. Rapid Design and Exploration of High-Fidelity Low-Thrust Transfers to the Moon // *IEEE Aerospace Conference Proceedings*. 2020. P. 1–12. <https://doi.org/10.1109/AERO47225.2020.9172483>
- [11] Petropoulos A.E., Tarzi Z.B., Lantoine G., Dargent T., Epenoy R. Techniques for designing many-revolution, electric-propulsion trajectories // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2014. V. 152. No. 3. P. 2367–2386.

-
- [12] Holt H., Baresi N. Towards Optimal Lyapunov Controllers for Low-Thrust Lunar Transfers Via Reinforcement Learning // 2021 AAS Astrodynamics Specialist Conference. 2021.

Секция 3

Гидрогазодинамика

Hydroaeromechanics

Численные исследования особенностей нарастания льда с работающим воздушным винтом на крыле летательного аппарата

*Амелюшкин И.А.,¹ Павленко О.В.,¹ Кинса С.Б.,¹ Реслан М.Г.,¹
Февральских А.В.²*

*amelyushkin_ivan@mail.ru, olga.v.pavlenko@yandex.ru,
kindysandos01@gmail.com, reslan.mostafa97@gmail.com, a.fevralskih@gmail.com*

¹Московский физико-технический институт (МФТИ),
141701, Российская Федерация, Московская область, Долгопрудный,
Институтский переулок, 9,

²Московский авиационный институт (МАИ),
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Проведено численное исследование образования льда на самолете крылом большого удлинения с вращающимися воздушными винтами. Расчет обледенения самолета проведен при взлетном положении механизации крыла при скорости набегающего потока $V_\infty = 50$ м/с. Показано, что в зоне образования наиболее высоких ледяных наростов наблюдается увеличение трения на поверхности крыла, снижается температура и давление.

Ключевые слова: крыло большого удлинения с воздушными винтами, обледенение крыла, CFD методы.

Введение. Эффективная защита самолёта от обледенения является одной из важных задач в авиации. Анализ информации по нарастанию льда и влиянию ледяных наростов в зависимости от формы профиля показал, что одним из способов уменьшения чувствительности аэродинамических характеристик профиля к обледенению может быть увеличение его толщины, что приводит к уменьшению зоны захвата капель и затягивания срыва потока на большие углы атаки. Другим способом снижения влияния обледенения является увеличение радиуса кривизны его носовой части с целью присоединения местного срыва потока при обтекании небольшого по высоте ледяного нароста и предотвращения полного срыва потока [1]. Но подобная модернизация из-за своей специфики практически не производится, и в настоящее время геометрические параметры крыльев перспективных самолетов имеют тенденцию уменьшения радиусов кривизны носков профилей крыла [2]. Поэтому необходимо проведение исследований по поиску новых путей модификации крыла и поиску компромиссов между возможным повышением аэродинамических свойств крыла и уменьшением его восприимчивости к обледенению.

Известно, что полет в условиях обильных осадков [3] влияет на аэродинамическое качество. Чем меньше летательный аппарат, тем больше влияние осадков на его характеристики. С точки зрения совершенствования летательных

аппаратов можно обратить внимание на снижение числа Стокса, характеризующего обтекание передней кромки крыла потоком частиц, что в свою очередь поможет снизить интенсивность обледенения.

Цель настоящего исследования — развитие принципов проектирования формы тел, которая препятствует обледенению, создание алгоритмов, позволяющих рассчитывать и управлять дисперсным потоком с обтекаемым телом в приложении к задачам управления тепломассообменом и снижения сопротивления в условиях обильных осадков. Данная работа продолжает изучение [3] причин нарастания критических ледяных отложений на крыле и подверженности влиянию обледенения летательных аппаратов с крылом сверхбольшого удлинения, работающих на солнечной энергии, на которых проблематично устанавливать противообледенительную систему.

Методика и условия расчета. Расчетное исследование проведено на самолете [4, 5], аэродинамическая компоновка которого выполнена по классической схеме со свободнонесущим высокорасположенным крылом с удлинением $\lambda = 23.4$. Хорда крыла $b = 0.106$ м, радиус скругления носовой части профиля $r = 0.003$ м. Хорда элерона составляет 17% от хорды крыла. В данной работе рассмотрен взлетный вариант отклонения механизации на 15 градусов. Вся механизация крыла одинаково отклонена по всему размаху крыла. На концах прямоугольного крыла размещаются мотогондолы двигателей. Частота вращения воздушных винтов 15000 оборотов в минуту. Направление вращения воздушных винтов соответствует сворачиванию вихревой пелены с конца крыла, см. рис. 1. Расчет обледенения самолета проведен программой

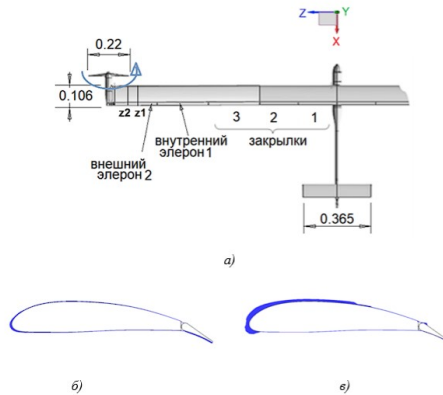


Рис. 1. Расчетная модель самолета: а — общий вид, б — профиль крыла со льдом в сечении z_1 , в — профиль крыла со льдом в сечении z_2 .

FENSAP-ICE на взлетном режиме полета при скорости набегающего потока $V = 50$ м/с. Время обледенения $t = 10$ минут, температура окружающей среды $T = 268$ К = -5 °С, диаметр капель $d = 20$ мкм, содержание в воздухе жидкой фазы воды $LWC = 0.005$ кг/м³. Формы льда, полученные в расчете сформированы на угле атаки $\alpha = 5$ °.

Результаты расчета. Формы льда, полученные в расчете без обдува и с обдувом воздушным винтом показаны на рис. 1(б, в). Лёд, образованный на крыле с обдувом воздушными винтами имеет различную толщину: в сечении $z1$, а также по всему размаху крыла вне зоны действия обдува винтами толщина льда $h/b = 0.01$, а напротив конца лопасти в сечении $z2$ образуется высокий ледяной нарост роговидного льда высотой $h/b = 0.015$, где h — максимальная высота льда в сечении крыла по нормали к поверхности. Таким образом, максимальная высота льда в районе обдува воздушного винта в сечении $z2$ на 30% выше, чем в сечении $z1$. Показано, что в зоне наиболее высоких ледяных наростов наблюдается существенное снижение температуры, см. рис. 2.

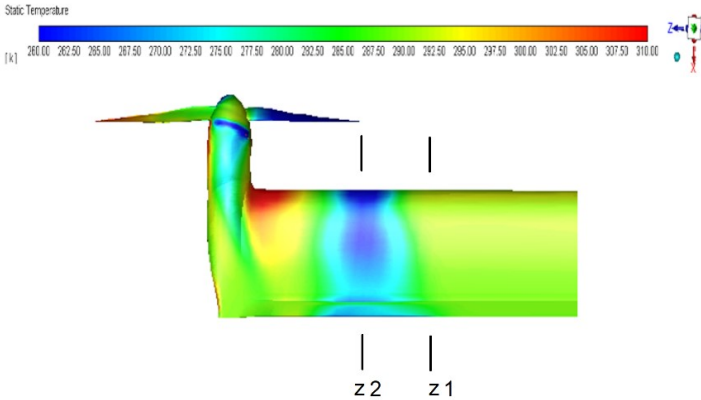


Рис. 2. Температура поверхности крыла (К).

Распределение коэффициента давления в сечениях крыла показывает, что в сечении крыла $z2$ с наиболее высоким льдом, возмущенный вращающийся поток от винта существенно снижает разрежение на верхней поверхности крыла, рис. 3. И при этом в этой области сильно увеличивается сопротивление трения, рис. 4.

Закключение. Анализ нарастания различного по высоте льда на крыле самолета под влиянием обдува от воздушного винта показал, что на высоту

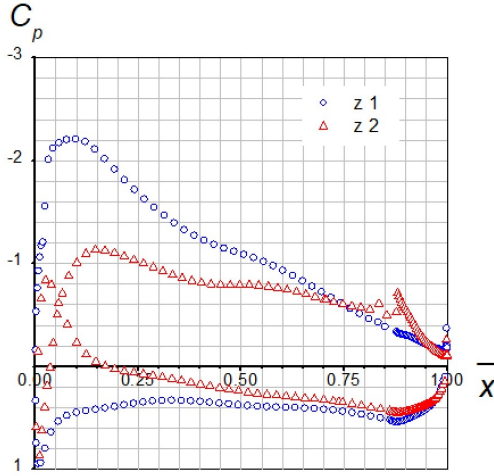


Рис. 3. Распределение коэффициента давления в сечениях крыла.

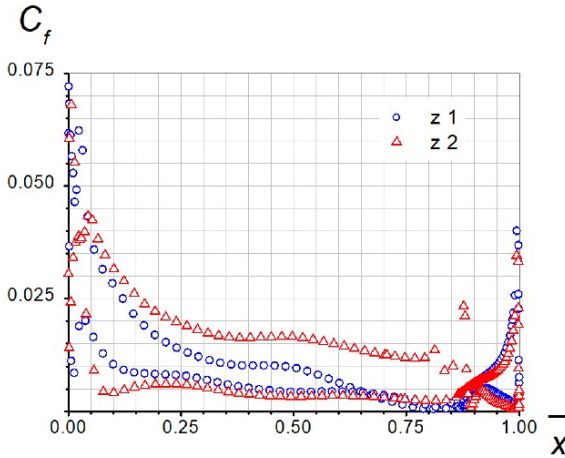


Рис. 4. Распределение коэффициента трения в сечениях крыла.

ледяных наростов влияют несколько физических факторов: снижается температура поверхности и давление, увеличивается трение.

Литература

- [1] Ершов А. А., Павленко О. В. Влияние формы профиля на аэродинамические характеристики при обледенении передней кромки // Техника Воздушного Флота. 2015. Т. LXXXIX. № 2(719). С. 27–32.
- [2] Шевяков В. И. Способы совершенствования воздушных судов в целях сохранения конкурентноспособности на перспективу // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 212. С. 66–73.
- [3] Yihua Cao, Zhenlong Wu, Zhengyu Xu. Effects of rainfall on aircraft aerodynamics // Progress in Aerospace Sciences. 2014. N 71. P. 85–127.
- [4] Амелюшкин И. А., Павленко О. В., Февральских А. В., Реслан М. Г., Мусса Х., Кинса С. Б. Численное исследование влияния обледенения на аэродинамические характеристики летательного аппарата с воздушными винтами на конце крыла большого удлинения // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. 54. № 4. С. 28–35.
- [5] Vinogradov O. N., Kornushenko A. V., Pavlenko O. V., Petrov A. V., Pigusov E. A., Trinh Thang Ngoc. Influence of propeller diameter mounted at wingtip of high aspect ratio wing on aerodynamic performance // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. P. 012051. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012051

Аэродинамические особенности обтекания крыла с солнечными панелями

Белоусов И.Ю.,¹ Виноградов О.Н.,¹ Корнушенко А.В.,¹

Павленко О.В.,¹ Тханг Нгок Чинь²

oleg.vinogradov@tsagi.ru, olga.v.pavlenko@yandex.ru,

trinhngocthang4788131215@gmail.com

¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, 140180, Российская Федерация, Жуковский, ул. Жуковского, 1,

²Московский физико-технический институт (МФТИ),

141701, Российская Федерация, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. Проведены численные исследования по влиянию на обтекание и аэродинамические характеристики крыла самолета, установленных на его верхнюю поверхность солнечных панелей.

Ключевые слова: аэродинамические характеристики крыла, солнечные панели.

Введение. В настоящее время в мире ведутся исследования летательных аппаратов с электрическими двигателями и комбинированными источниками питания, сочетающие аккумуляторные и солнечные батареи [1, 2, 3]. Летательные аппараты на солнечных батареях используют крыло сверхбольшого удлинения, верхняя поверхность которого покрыта солнечными батареями, что обеспечивает длительный и беспосадочный полет. Солнечные панели, имеют

прямоугольную форму и определенные стандартные размеры и при их установке, верхняя выпуклая поверхность крыла обретает грани. Таким образом, крыло с солнечными панелями отличается от гладкого крыла без них.

С целью выявления особенностей обтекания крыла с солнечными панелями и их влияния на аэродинамические характеристики были проведены расчетные исследования в 2D и 3D постановке задачи.

Объект численных исследований и методика расчета.

Для расчета был взят отсек прямого крыла с хордой $b = 0.6$ м и размахом $L = 0.9$ м. Общий вид расчетных моделей показан на рисунке 1. Для сравне-

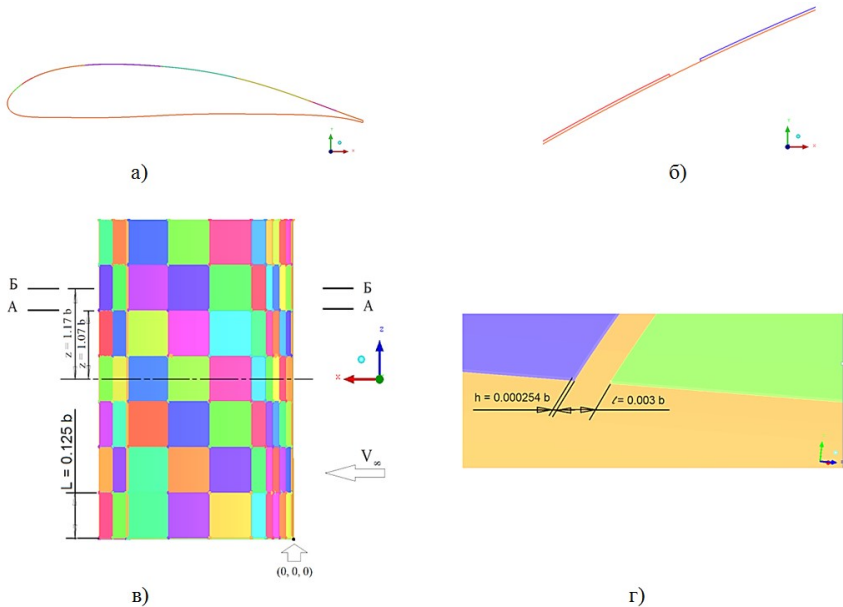


Рис. 1. Общий вид расчетных моделей: а — профиль крыла, б — панели на профиле крыла (вид сбоку), в — вид сверху, г — высота панелей и расстояние между ними.

ния расчеты были проведены как на моделях профиля и крыла без панелей, так и с панелями. На верхней поверхности крыла по хорде располагалось 10 панелей, а по размаху 7. Солнечные панели имеют одинаковую длину по размаху крыла и различную протяженность по хорде крыла. Для 2D задачи была построена расчетная сетка для профиля крыла с 10-ю панелями, а для 3D задачи

с 70-ю панелями. С целью увеличить удлинение крыла, составляющее $\lambda = 1.5$, по краям крыла были заданы плоскости симметрии, и удлинение расчетного крыла, составило $\lambda = 4.5$. Для расчета пограничного слоя была построена специальная сетка типа *o-grid*, с расположенными по нормали к поверхности двадцатью ячейками. При моделировании области пограничного слоя высота первой ячейки, вблизи поверхности крыла, выбиралась такой, чтобы пограничный слой вместил достаточное количество ячеек для расчета пристеночной функции. Значение параметра y^+ в первом пристеночном узле для 2D задачи не превышало $y^+ \leq 0.064$, а в 3D задаче было не более $y^+ \leq 0.72$.

Численные исследования выполнены на структурированной сетке по программе, основанной на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, на структурированной расчетной сетке (около 1 млн. ячеек в 2D и 13 млн. ячеек в 3D задаче) с *k- ε -realizable* моделью турбулентности, с улучшенным моделированием параметров турбулентности вблизи стенки и с учетом влияния градиента давления. В пристеночной области использовалась однопараметрическая модель турбулентности, адаптированная к течениям с малыми числами Рейнольдса.

Расчет проведен на высоте $H = 7500$ м в диапазоне углов атаки от -5 до 20 градусов при скорости набегающего потока $V_\infty = 14$ м/с и числе Рейнольдса $Re = 0.4 \cdot 10^6$, вычисленным относительно средней аэродинамической хорды крыла.

Результаты расчета. Численные исследования влияния наличия солнечных панелей на профиле крыла (2D) показали незначительные изменения в аэродинамических характеристиках, в основном их влияние было видно только на закритических углах атаки. Так, по распределению давления на профиле крыла на угле атаки $\alpha = 2^\circ$ видно, что панели локально увеличивают и уменьшают давление на верхней поверхности профиля, но в целом, давление этих профилей имеет подобные значения (рисунок 2).

Расчетные исследования крыла (3D) напротив, выявили существенные различия в обтекании и влиянии солнечных панелей на аэродинамические характеристики. Наличие панелей на верхней поверхности крыла, по сути, создает своего рода структурированную шероховатость высотой $h = 300$ микрон, которая увеличивает сопротивление крыла и уменьшает подъемную силу. Распределение давления на крыле с солнечными панелями было замерено в двух сечениях: в сечении А–А, расположенном на гладкой поверхности крыла между панелями и в сечении Б–Б, которое расположено посередине панелей. По распределению давления в сечениях крыла видно, что крыло с солнечными панелями имеет меньшее разрежение на верхней поверхности при равных условиях, что приведет к потере несущих свойств, а значит и меньшую подъемную силу (рисунок 3).

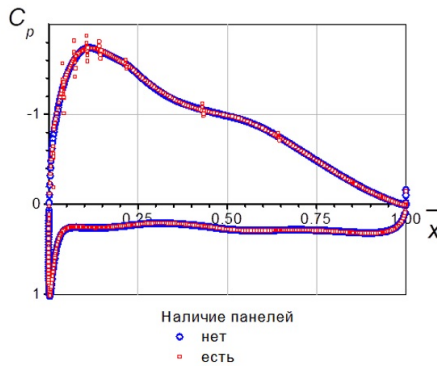


Рис. 2. Распределение коэффициента давления по профилю (2D), $\alpha = 2^\circ$.

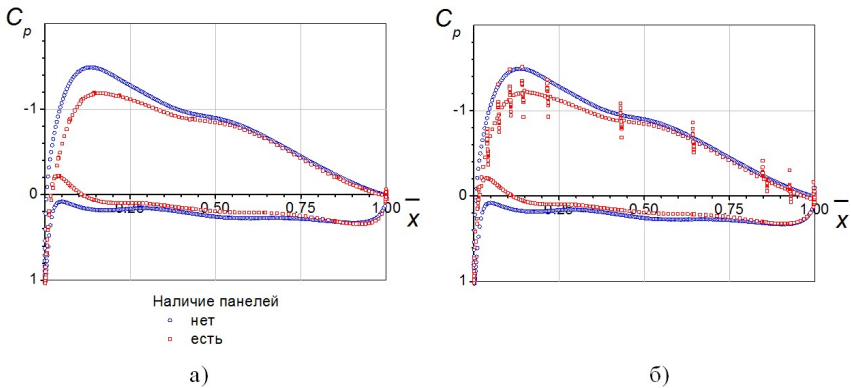


Рис. 3. Распределение коэффициента давления по хорде крыла (3D), $\alpha = 2^\circ$: а — сечение А-А, б — сечение Б-Б.

Заключение. Численные исследования влияния солнечных панелей на обтекание и аэродинамические характеристики профиля и крыла показали, что для определения их воздействия подходит только трехмерная задача. Наличие панелей на верхней поверхности крыла, создает структурированную шероховатость высотой $h = 300$ микрон, которая увеличивает сопротивление крыла и уменьшает подъемную силу.

При проектировании аэродинамических компоновок самолетов, использующих солнечную энергию и имеющих на верхней поверхности крыла солнечные

панели даже незначительно искажающие поверхность, следует учитывать потерю несущих свойств крыла и прирост сопротивления.

Литература

- [1] Лисейцев Н. К., Самойловский А. А. Современное состояние, проблемы и перспективы развития самолетов, использующих солнечную энергию // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. Выпуск № 55.
- [2] Sparkes M. Zephyr solar-powered drone smashes record with 2-month-long flight. 15 August 2022. URL:<https://www.newscientist.com/article/2333373-zephyr-solar-powered-drone-smashes-record-with-2-month-long-flight/>
- [3] Vinogradov O. N., Kornushenko A. V., Pavlenko O. V., Petrov A. V., Pigusov E. A., Trinh Thang Ngoc. Influence of propeller diameter mounted at wingtip of high aspect ratio wing on aerodynamic performance // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. P. 012051. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012051

Numerical simulation of air humidity influence on the take-off aerodynamic characteristics of a wing airfoil with a flap

Brutyan M.A., Ye Htun, Pavlenko O.V.

yetur53@gmail.com, olga.v.pavlenko@yandex.ru

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
141700, Russian Federation, Dolgoprudny, Institutskiy per., 9

Annotation. The influence of thermodynamic properties of the environment on the take-off characteristics of the wing airfoil are considered. Numerical studies were carried out both in dry and wet air, which modeled as two-component environment, consisting of air and water's vapour in various proportions. The influence of air wetness on maximum lift, drag and critical angle of attack are presented. The numerical investigations of the influence air wetness on aerodynamic characteristics of the wing airfoil by means of CFD solvers based on the solution of the RANS equations are presented.

Keywords: aerodynamic characteristics, take-off characteristics, air wetness, CFD methods.

Introduction. The impact of adverse meteorological conditions on the aircraft aerodynamics still remains the important problem in modern times [1]. The analysis of accidents and air crashes in recent years allows us to formulate a list of the main reasons, which happened to them. According to statistics, the environmental influences (fog, heavy rain, cold snap, high humidity, snowstorm, etc.), on these incidents reach up to 20%. Further, we noted that more than half of them occur at airports, and one third – during take-off or landing [2].

It is well known that the values of air parameters are calculated by using formulas obtained for a standard atmosphere under assuming that the air is dry. This paper presents the results of a numerical studying, which have effect of air humidity on the aerodynamic characteristics of wing airfoil with take-off configuration in a standard environment (air) and in special meteorological conditions (fog).

Calculation methods and conditions. For numerical study CLARK Y+ airfoil [3] with relative thickness of $\bar{c} = 12\%$ of chord $b = 0.64$ m and its take-off configuration with flap that incline down an angle $\delta_{flap} = 20^\circ$ was constructed. Chord length of flap is equal to $1/3$ of chord of the wing airfoil. Leading edge of flap airfoil is made in the form of an arc of circle that inscribe the upper surface of flap airfoil. The width of gap between the main and flap airfoil is 1.5% of the chord of wing airfoil, Fig. 1.



Fig. 1. Model of airfoil CLARK Y+ with deflected flap on $\delta_{flap} = 20^\circ$.

The calculations were performed in steady state condition according to a program based on solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS). The structural computational grid contained about 1 million cells and 150 of them located along the wing chord. To resolve the boundary layer, a special o-grid type was created, built along the normal to surface and contained 20 cells in height. When boundary layer area was modeling, the height of first cell near the wing surface was chosen so that the boundary layer contained a sufficient number of cells to calculate the wall function. The value of $y+$ parameter in the first wall node was $y+ \leq 0.365$. In calculation we used $k-\varepsilon$ realizable turbulence model [4] with taking into account the influence of pressure gradient and improved modeling of turbulence parameters near the wall. A one-parameter turbulence model adapted to currents in the boundary layer was used in the wall region [5]. A simplified model “Mixture” was used to calculate the stationary flow of moist air over the wing airfoil with flap [4].

The value of air density depends on its temperature and humidity. Usually, the standard value is 1.225 kg/m^3 , which corresponds to the density of dry air at 15°C at sea level. In air the presence of water vapor decreased air density, which is explained by the low molar mass of water (18 g/mol) compared with the molar mass of dry

air (29 g/mol). The calculations were carried out in dry and wet air, which is a mixture of dry air with water vapor. According to Dalton's law, the pressure of mixed gases that took a certain volume is equal to the sum of partial pressures of all its components. Wet air can be considered as a mixture of ideal gases, in each of these gases a combination of densities allows to obtain the required density value of mixture [6]. This approach is used to simulate fog, in which the relative humidity of the air is usually very high. The conditions for performing parametric calculations in an environment consisting of air and water vapor with their various proportions are given in the following table.

Table. Performing conditions of calculation.

Volume vapor in air η (%)	Density mixture ρ (kg/m ³)	Dynamic viscosity $\mu \cdot 10^{-5}$ (Pa·s)	Reynolds number $Re \cdot 10^6$
0	1.2250	1.79	3.46
8	1.1713	1.75	3.42
16	1.1177	1.72	3.33
25	1.0573	1.68	3.23

From this table we can see that when volume vapor in air increases, the density of mixture (air and water-vapor), its viscosity and Reynolds number $Re = \frac{\rho V b}{\mu}$ decrease. Numerical studying was carried out for a wing (airfoil+flap) with chord length $b = 0.64$ m angle of attack $\alpha = 12^\circ$, incoming flow velocity $V = 80$ m/s, atmospheric pressure $p = 101325$ Pa, ambient temperature $t = 15^\circ\text{C}$, both in dry and wet air with vapor particle size of 10 microns.

Calculation results. For different proportions of air and water vapor, maximum lift coefficient C_{Lmax} of a wing airfoil with flap and critical angle of attack α_{cr} were calculated by using numerical simulation. Calculations have shown that the more increased humidity, then the more increased maximum lift force in Fig. 2.

Velocity profiles in the boundary layer over the inclined flap are shown for two values of water vapor concentration $\eta = 0\%$ and $\eta = 25\%$ in Fig. 3 (a, b). In these figures, the velocity value is related to the velocity at outer boundary of the boundary layer $\bar{u} = u/u_e$ and the distance normal to flap surface is related to thickness of boundary layer, $\bar{n} = n/\delta$. Calculations show that in dry air, the separation point is located at a distance from nose of flap. At this point, $\bar{u} = \bar{u}(\bar{n})$ the dependence of vapor in air $\eta = 0\%$ has a character of velocity profile with zero-friction, $\tau_w \sim (\partial \bar{u} / \partial \bar{n})_w \approx 0$, Fig. 3 (a); in the range $0.92 < \bar{x} < 1$ observed reversed flows, With increasing humidity in air, relative stress on the flap surface increases. The content of vapour in air $\eta = 25\%$, separating point moves to the trailing edge of flap, and at the point $\bar{x} = 0.92$ relative stress becomes positive, $\tau_w > 0$, Fig. 3 (b).

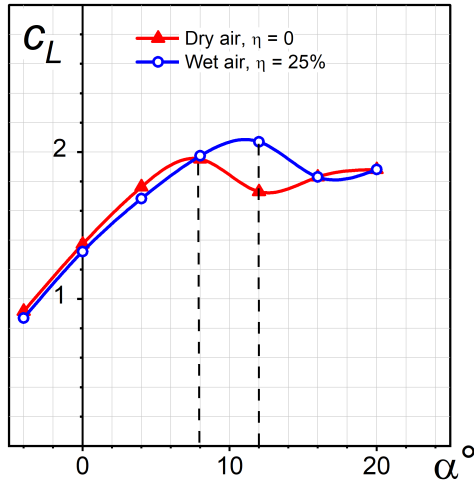


Fig. 2. Dependence of lift coefficients on the angle of attack.

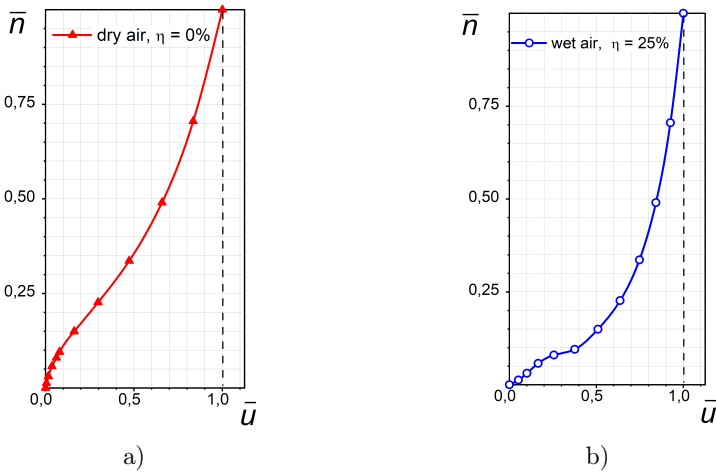


Fig. 3. Velocity distribution in the boundary layer at a point on the upper surface of the flap $x = 0.92b$; (a) $\eta = 0\%$; (b) $\eta = 25\%$.

Conclusion. Due to the fact that fogs are located near the surface of earth, when the aircraft takes off and flies out of the fog, the wet air happened to change to dry one. In this paper found out that this phenomenon can happen to certain danger of aircraft, because humidity in air gradually decreases, the maximum lift force can appreciably decrease. In the calculations carried out, it was founded that flying an aircraft in dry air, the maximum lift coefficient decreases on 6%, and the critical angle of attack decreases on 4° when compared with flying in wet air with volume vapor concentration of 25%.

References

- [1] Rybalkina A.L., Spirin A.S., Trusova E.I. Reducing the impact of adverse meteorological conditions at local airports // Civil Aviation High Technologies. 2018. Vol. 21. No. 3. P. 101–114. (in Russian)
- [2] Diachkov D. V., Zolotarev O. V. Analysis of statistics of air crashes based on the study of many factor // Conference articles 8th International conference COGSCI. 2020. Vol. 1. Part 2. P. 289–320. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fd755c09f2c91.06817396 (in Russian)
- [3] <http://airfoiltools.com/plotter/index?airfoil=clarky-il>
- [4] Shih T. H., Liou W. W., Shabbir A., Zhu J. A. A new k - ε eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows // Computers & fluids. 1995. Vol. 24. No. 3. P. 227–238.
- [5] Wolfshtein M. The Velocity and Temperature Distribution in One-Dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1969. Vol. 12. No. 3. P. 301–318.
- [6] FLUENT Program User's Guide.

Влияние вращения на течение в П-образном канале с внутренним оребрением

Галаев С.А., Левченя А.М., Рус В.В.

galaev_sa@spbstu.ru, levchenya_am@spbstu.ru, vvr@spbstu.ru

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Аннотация. Для моделей каналов с гладкими стенками и с двухсторонним внутренним оребрением, неподвижных и вращающихся, получены численные решения задач о турбулентном течении при значении числа Рейнольдса 60000. Каналы имеют квадратное поперечное сечение. Ребра, перегораживающие поперечное сечение на 6,3%, наклонены относительно продольной оси канала на 45° . Выполнен анализ структуры вторичных течений.

Ключевые слова: турбулентное течение, внутреннее оребрение, гидравлические потери, численное моделирование.

Постановка задачи численного моделирования. Турбулентное течение воздуха с постоянными свойствами моделируется в канале квадратного сечения шириной $D_h = 2,54$ см. Поперек двух противоположных стенок канала, верхней и нижней, под углом 45° к продольной оси канала периодически расположены ребра квадратного сечения $e \times e = 0,063D_h \times 0,063D_h$. Относительный шаг установки ребер P/e равен 10.

В соответствии с условиями эксперимента [1], воздух сначала течет по прямому оребренному каналу длиной $12D_h$, затем поворачивает на 180° . Радиус внутренней стенки в повороте $0,125D_h$, длина участка поворота (расстояние от начала поворота до внешней стенки в повороте) равна D_h . После первого поворота поток движется в обратном направлении по второму, также оребренному, каналу до следующего поворота, проходит второй поворот (форма и размеры совпадают с первым поворотом) и снова движется в прямом направлении по каналу с гладкими стенками (см. схему на рис. 1). Также имеются экспериментальные данные (и проведен такой расчет) по каналу со всеми гладкими стенками.

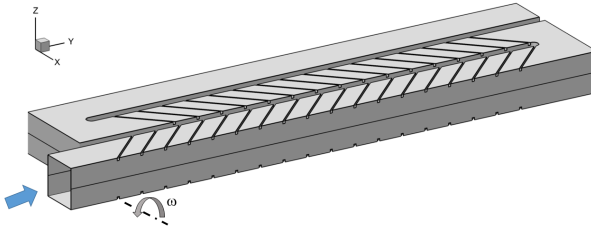


Рис. 1. Внешний вид расчетной области. Указаны место входа потока и ось вращения.

В расчетах моделируется осредненное по времени турбулентное течение. Режим течения определяется значением числа Рейнольдса $Re = U_{in}D_h/\nu$, где U_{in} — скорость во входном сечении. В режиме с вращением параметр вращения равен $K = \omega D_h/U_{in} = 0,25$. В тестовых расчетах перед началом канала добавлен прямой участок длиной D_h , в начале которого и задаются входные условия. Тестовые расчеты проведены при $Re = 60000$. На входе в канал задана интенсивность турбулентности $Tu_{in} = 5\%$, отношение турбулентной вязкости к молекулярной задается равным $VR_{in} = 10$. На выходе фиксируется нулевое избыточное давление, и ставятся мягкие граничные условия.

Методические и вычислительные аспекты. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса для статистически стационарного турбулентного течения несжимаемой среды численно интегрировались с использованием пакета ANSYS Fluent 2021 R1. Расчет турбулентных характеристик выполнен с использованием гипотезы Буссинеска. Турбулентная вязкость определялась по $k-\omega$ SST модели турбулентности [2]. Решения получены со вторым порядком точности по пространственным переменным. Используются расчетные сетки, включающие от 2 до 20 млн. гексаэдральных ячеек.

Результаты расчетов. В результате расчетов получена сложная структура трехмерного течения в рассматриваемом канале (рис. 2).

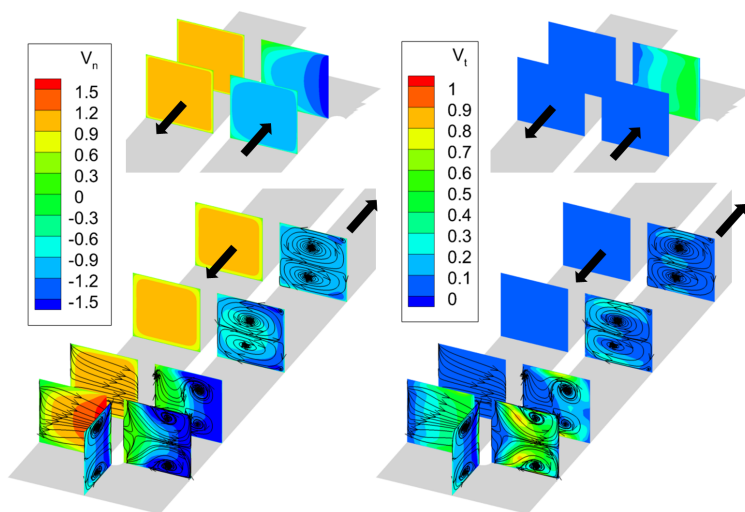


Рис. 2. Поля нормальной и поперечной составляющих скорости и линии тока в поперечных сечениях гладкого неподвижного канала. Показаны направления течения на прямых участках.

До поворота течение симметрично относительно стенок, и лишь при приближении к нему, судя по линиям тока, начинается загибаться в сторону поворота. При прохождении поворота в показанном базовом варианте (канал с гладкими стенками, без вращения) развиваются интенсивные поперечные течения в виде двух симметрично расположенных вихрей. При наличии оребрения и глобальном вращении канала вихревая картина течения демонстрирует

еще более сложный характер. Изоповерхности Q -критерия, иллюстрирующие границы областей интенсивного вихревого движения, показаны на рис. 3.

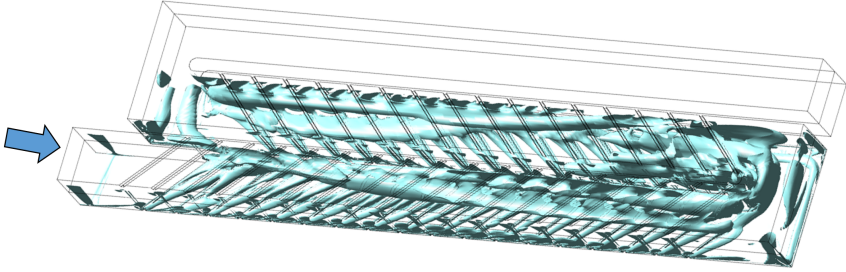


Рис. 3. Вихревые структуры во вращающемся оребренном канале.

Более подробно структуру течения можно проанализировать по рис. 4, где показаны распределения для вращающегося оребренного канала. Сравнивая

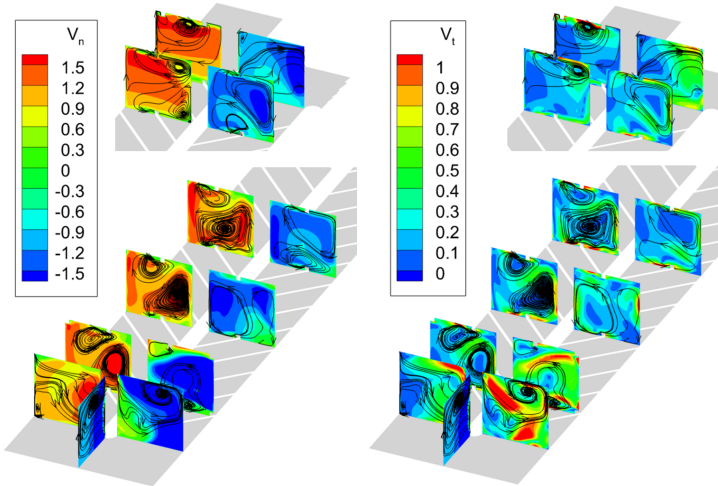


Рис. 4. Поля нормальной и поперечной составляющих скорости и линии тока в поперечных сечениях вращающегося оребренного канала.

части рисунка с соответствующими частями рис. 2, можно отметить следующее: 1) уже в первых по мере движения потока сечениях течение существенно неоднородно и наблюдаются возникающие под влиянием ребер поперечные

течения, 2) так как канал вращается, отсутствует симметрия течения относительно средней его плоскости, поток существенно перемешивается в повороте и после него, 3) по своей величине эти поперечные течения гораздо интенсивнее под влиянием оребрения и вращения. Таким образом, настоящими расчетами трехмерного турбулентного течения во вращающемся оребренном канале показано, что структура течения в конфигурации, типичной для внутренних каналов систем охлаждения турбинных профилей, достаточно сложна и требует обстоятельного анализа.

Результаты работы получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (www.spbstu.ru). Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-29-00094.

Литература

- [1] Han J. C., Chandra P. R. Local heat/mass transfer and pressure drop in a two-pass rib-roughened channel for turbine airfoil cooling. NASA Contractor Report (CR) 19880002657. 1987. 174 p.
- [2] Menter F. R., Langtry R., Kuntz M. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 (CD-ROM Proceedings). Begell House, Inc. 8 p.

Моды и режимы течения в ближнем следе от цилиндров, установленных бок о бок, в рамках простой модели

Гембаржевский Г.В.

gvgemb@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101/1

Аннотация. Рассматриваются свойства предложенного обобщения известной модели Ландау–Стюарта для ближнего следа от уединенного цилиндра на случай следа от пары цилиндров. В рамках теории возмущений, модель крупномасштабной структуры комплексного следа строится в форме двух, по числу порождающих цилиндров, взаимодействующих вихревых дорожек типа дорожек Кармана, моделируемых посредством двух осцилляторов Ландау–Стюарта. Проводится сравнение между выводами из модели и известными экспериментальными данными для режимов следа, спектра базовых частот осцилляций, для вероятности реализации глобальных мод такого течения.

Ключевые слова: модель Ландау–Стюарта, теория возмущений, взаимодействие дорожек Кармана, глобальные моды, перемежаемость, спектр базовых частот, области притяжения мод.

Следы от плохообтекаемых тел представляют интерес как один из основных классов неравновесных турбулентных течений. В то же время такие течения широко распространены в технике, строительстве, природе. В исследовании подобных течений можно выделить широкий класс задач, в которых преимущественный или исключительный интерес представляют интегральные осредненные характеристики следов. Типичные примеры таких задач: расчет ветровой нагрузки на здания/сооружения, расчет реакторов/теплообменников, стабилизация сжигания топлива, стабилизация горения электрических разрядов. В этих задачах первостепенный интерес представляет крупномасштабная структура течения, низкочастотный диапазон энергосодержащих пульсаций в турбулентном следе.

Для цилиндрических тел (обтекаемых потоком перпендикулярным оси цилиндров) устойчивая структура их ближнего следа хорошо известна, это шахматная вихревая дорожка Кармана. При этом силовые нагрузки на цилиндр, приложенные со стороны флюида, жестко коррелированы с мгновенными значениями параметров образующейся дорожки Кармана. Для крупномасштабной, низкочастотной структуры такого следа (то есть дорожки Кармана за уединенным цилиндром) построена простая модель квазиламинарного следа Ландау–Стюарта, например [1]. В рамках этой модели течение считается квазидвумерным (пренебрегается движением в направлении образующих цилиндра), также не учитываются высокочастотные пульсации течения (мелкие вихри). Образовавшиеся за цилиндром крупномасштабные долгоживущие вихри, составляющие дорожку Кармана, сносятся вниз по потоку осредненным течением. В динамической модели Ландау–Стюарта учитывается, что характеристики образующихся за цилиндром вихрей, вообще говоря, эволюционируют во времени (в переходных режимах течения), но эта эволюция медленная в масштабах периода базовых квазигармонических осцилляций в дорожке (допущение, предложенное еще Л.Д. Ландау). Соответственно, низкочастотные осцилляции в пределах ближнего следа приблизительно когерентны (при том, что сдвинуты по фазе колебаний), и динамику всей дорожки можно смоделировать уравнением одного осциллятора Ландау–Стюарта. Принято записывать это уравнение как ОДУ относительно комплексной величины $A(t)$ — управляющего параметра дорожки Кармана. Для сравнения с экспериментом этот управляющий параметр отождествляется, с точностью до $\alpha(x, y)$ коэффициента зависящего от положения точки измерения, с мгновенным значением поперечной составляющей пульсационной скорости в отмеченной точке дорожки Кармана $u_{\perp} = \alpha(x, y)A(t) + \alpha^*(x, y)A^*(t)$. При этом текущая фаза осцилляций учитывается в аргументе комплексного управляющего параметра дорожки.

Помимо обтекания одиночного цилиндра, на практике не меньший интерес представляет случай обтекания группы цилиндров, например, трубчатые теплообменники, реакторы, протяженные стабилизаторы горения, турбулизаторы

потока. Соответствующую простую модель следа от группы не слишком тесно расположенных цилиндров целесообразно строить исходя из модели Ландау–Стюарта, используя теорию возмущений, и начиная со случая двух цилиндров. В 2023 году был предложен вариант [2] такого обобщения на случай следа от двух параллельных цилиндров, расположенных в плоскости перпендикулярной направлению набегающего потока, где в рамках теории возмущений, комплексный след рассматривается как две параллельные дорожки Кармана, существенно взаимодействующие в области формирования крупномасштабных вихрей вблизи порождающих цилиндров.

Математическая формулировка модели — два связанных уравнения Ландау–Стюарта для управляющих параметров двух дорожек: $A(t)$ для дорожки от одного цилиндра и $B(t)$ для дорожки от другого цилиндра. После перехода к медленно изменяющимся действительным амплитудам ρ , r и фазам φ , ψ управляющих параметров, согласно преобразованиям $A = \rho \exp i(t + \varphi)$, $B = r \exp i(t + \psi)$ имеем систему уравнений модели (1)–(4), где введена разность фаз осцилляций в дорожках $P = \varphi - \psi$.

$$\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho}{2} (1 + \Lambda - \rho^2 - \Lambda r^4 - lpr \cos P) = St_x, \quad (1)$$

$$\frac{dr}{d\tau} - \frac{r}{2} (1 + \Lambda - r^2 - \Lambda \rho^4 - lpr \cos P) = St_y, \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - k((1-l)\rho^2 - 1) + \frac{l}{2}pr \sin P = St_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} - k((1-l)r^2 - 1) - \frac{l}{2}pr \sin P = St_\psi. \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) время τ это «медленное» время $\tau = \varepsilon t$, (где $\varepsilon \ll 1$), соответственно тому, что дорожка Кармана эволюционирует медленно, как было отмечено выше. Правые части уравнений — стохастизирующие решение «силы». Уместно отметить, что рассматриваемая модель (1)–(4) отличается простотой, поскольку содержит всего три «свободных» параметра Λ , l , k и фазовое пространство модели по существу трехмерно, так как в модели (1)–(4) можно отделить «ведущую» систему трех уравнений: (1), (2), (5).

$$\frac{dP}{d\tau} - k(1-l)(\rho^2 - r^2) + lpr \sin P = St_\varphi - St_\psi. \quad (5)$$

Линейно-устойчивые точки покоя и квазипериодические решения соответствующей системы однородных уравнений модели представляют собой глобальные квазиламинарные моды следа. Соответственно, посредством стохастизирующих членов в правых частях уравнений осуществляется переключение следа с одной моды на другую в режиме турбулентного перемежающегося течения

(при условии, что области существования этих мод пересекаются в пространстве параметров модели).

Какие моды течения наблюдают экспериментаторы в комплексном следе от пары цилиндров, установленных бок о бок, не слишком тесно $L/D > 1.5$? Это **мода I** в виде двух одинаковых дорожек Кармана с синфазно-синхронизованными осцилляциями, **мода II** в форме одинаковых противофазно-синхронизованных дорожек, и **мода III** следа в виде двух различающихся по всем своим характеристикам дорожек. Модель успешно воспроизводит эти три основные наблюдаемые экспериментаторами моды I—III. Сверх того построенная модель вмещает еще две глобальные моды следа, причем одна из них — **мода IV** не наблюдаемая. Другая — **мода V** представляет собой след в форме двух различающихся по интенсивности, но жестко синхронизованных дорожек Кармана. В литературе имеются указания [3], что в сравнительно узком диапазоне изменения расстояний между осями круговых цилиндров $L/D \approx 2.2 - 2.5$ при высоких числах Рейнольдса наблюдается картина асимметричного течения с противофазной синхронизацией парциальных дорожек Кармана. Эту конфигурацию следа можно было бы соотнести с модой V, однако эта расчетная мода V присутствует в модели только при нереально низких значениях параметра k . Весь спектр расчетных мод I—V и их основные параметры приведены в докладе. Отметим, что в окрестности расстояния между осями цилиндров $L/D \approx 2.2$ в экспериментах визуализируется перестройка турбулентного комплексного следа с практически одномодового режима течения (по моде II) на режим перемежаемости между модами II/III [3]. Эта бифуркация течения успешно воспроизводится в рамках модели при надлежащем выборе свободных параметров ($\Lambda = 0.5$, $l = 0^-$). В докладе приводятся данные по областям притяжения глобальных мод в фазовом пространстве модели. С помощью этих данных возможна некоторая оценка «глобального» коэффициента перемежаемости в следе. Здесь под коэффициентом перемежаемости мод II/III турбулентного следа подразумевается относительная вероятность реализации моды II. Подчеркнем, что в рамках модели воспроизводится зависимость спектра базовых частот осцилляций от интенсивности взаимодействия парциальных дорожек Кармана (в эксперименте — расстояния между осями цилиндров) для случая $L/D > 1.5$. Спектр отличается характерным ветвлением частот в точке $\Lambda = 0.5$ бифуркации следа от течения по моде II к перемежающемуся по модам II/III течению, что соответствует расстоянию $L/D \approx 2.2$.

В целом, при сравнительной простоте, модель успешно воспроизводит многие характерные черты крупномасштабной структуры ближнего следа от пары круговых цилиндров, установленных в плоскости перпендикулярной невозмущенному течению.

Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию № 124012500440-9.

Литература

- [1] Sipp D., Lebedev A. Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder and cavity flows // J. Fluid. Mech. 2007. V. 593. P. 333–358.
- [2] Гембаржевский Г. В., Осипенко К. Ю. Моделирование основных характеристик ближнего следа от пары цилиндров, расположенных бок о бок, не слишком близко // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 6. С. 32–37.
- [3] Alam Md. M., Moriya M., Sakamoto H. Aerodynamic characteristics of two side-by-side circular cylinders and application of wavelet analysis on the switching phenomenon // J. Fluids Struct. 2003. V. 18. P. 325–346.

Особенности воздействия генератора вихрей на отрывную зону крыла

*Головкин М. А.¹, Павленко О. В.^{1,2}, Раздобарин А. М.¹,
Багдади М. К.²*

olga.v.pavlenko@yandex.ru, m.khir.baghdadi@gmail.com

¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, 140180, Российская Федерация, Жуковский, ул. Жуковского, 1,

²Московский физико-технический институт (МФТИ), 141701, Российская Федерация, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. Проведено численное исследование по улучшению обтекания крыла при отрыве его пограничного слоя. Расчеты выполнены в условиях эксперимента в аэродинамической трубе на модели прямого крыла с тянущим воздушным винтом. Показано, что установка генератора вихрей за винтом создает полезную интерференцию, и их взаимодействие уменьшает размеры отрывной зоны, увеличивает подъемную силу и снижает сопротивление крыла.

Ключевые слова: аэродинамические характеристики, прямое крыло, вихрегенератор, тянущий воздушный винт, CFD методы.

Введение. Решение проблемы предотвращения или ослабления нежелательных явлений, связанных с отрывом пограничного слоя на крыле, играет важную роль в процессе аэродинамического проектирования летательных аппаратов [1, 2].

В данной работе проведено численное исследование по влиянию на отрывную зону вихрегенератора, установленного на крыле за вращающимся пропеллером.

Методика и объект численных исследований. Численное исследование проведено в условиях эксперимента в аэродинамической трубе [3] на консоли прямого крыла с симметричным профилем NASA 642A015, с относительным удлинением $\lambda = 2.8$, с хордой крыла $b = 0.24$ м, площадь крыла

$S = 0.1594 \text{ м}^2$. По середине крыла был расположен тянущий воздушный винт диаметром 0.23 м , с относительной поступью $J = 1$, коэффициент тяги на данном угле атаки $\alpha = T/(\rho_\infty n^2 D^4)$, где T — тяга винта (Н), ρ_∞ — плотность воздуха (кг/м^3), n — частота вращения винта (Гц), D — диаметр винта (м), частота вращения винта $N = 10000 \text{ об./мин.}$, вращающийся по часовой стрелке, если смотреть на него спереди. За воздушным винтом на верхней поверхности крыла у начала отрывной зоны был установлен генератор вихрей высотой $h = 0.03b$ и имеющий форму пластины, расположенной под углом 45° к набегающему потоку. Общий вид расчетной модели показан на рисунке 1.

Расчеты выполнены по программе, основанной на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, при числах $M = 0.12$ и $Re = 0.7 \cdot 10^6$, на угле атаки $\alpha = 10^\circ$, когда на крыле без вихрегенератора образуется отрыв потока.

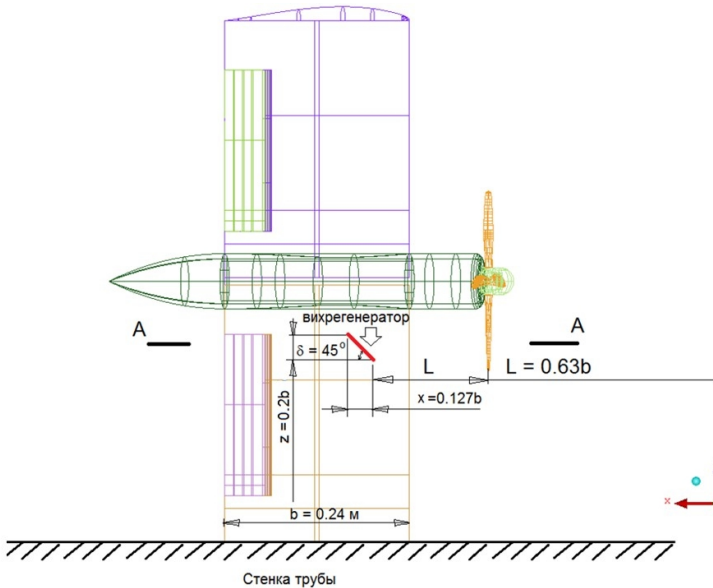


Рис. 1. Расчетная модель.

Результаты расчета. Известно, что тянущий воздушный винт оказывает существенное влияние на обтекание крыла и его аэродинамические характеристики, изменяет давление на поверхности крыла и местные углы атаки, а при обдуве отрывной зоны может вызвать ее увеличение (рис. 2). Это происходит вследствие определенного направления вращения винта на стороне той

части крыла, которая прикреплена к стенке трубы. Вследствие этого в этом месте на крыле увеличивается отрывная зона. Установка генератора вихрей за винтом создает полезную интерференцию, имеющую постоянное действие на любых углах атаки, так как поток от винта попадает на генератор вихрей под неизменным углом, и их взаимодействие уменьшает размеры отрывной зоны, увеличивает подъемную силу и снижает сопротивление крыла.

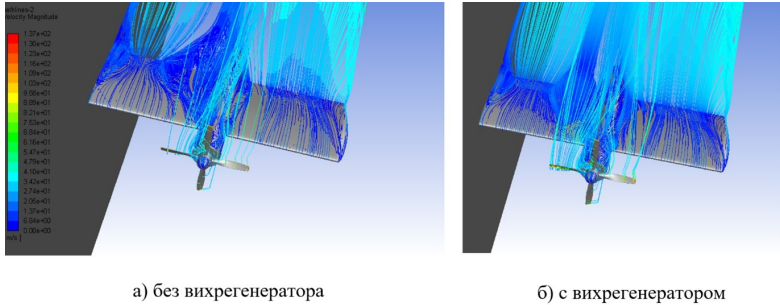


Рис. 2. Линии тока, шкала скорости V (м/с).

По зависимости распределения коэффициента давления (рис. 3) по хорде крыла в сечении А–А посередине генератора вихрей видно, что установка гене-

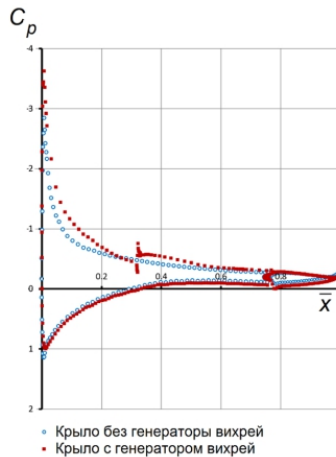


Рис. 3. Распределение коэффициента давления в сечении крыла А–А посередине генератора вихрей.

ратора вихрей увеличивает разрежение на верхней поверхности крыла, вследствие чего возрастает подъемная сила.

Заключение. Численные исследования показали возможность использования полезной интерференции генератора вихрей и воздушного винта с целью уменьшения отрывной зоны и улучшения аэродинамических характеристик крыла. Таким образом, для оптимальной и бесперебойной работы генератора вихрей его целесообразно устанавливать на крыле непосредственно за работающим тянущим воздушным винтом, который будет обеспечивать постоянный оптимальный угол обдува и необходимую скорость набегающего потока для более интенсивного вихреобразования.

Литература

- [1] Занин Б. Ю., Зверков И. Д., Козлов В. В., Павленко А. М. О новых методах управления дозвуковыми отрывными течениями // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. 2007. Т. 2. № 1. С. 10–18.
- [2] Брутян М. А., Волков А. В., Вышинский В. В., Потапчик А. В., Раздобарин А. М. Модификация формы генератора вихрей с целью повышения его эффективности // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. 54. № 1. С. 20–27.
- [3] Sinnige T., van Arnhem N., Stokkermans T. C., Eitelberg G., Veldhuis L. L. Wingtip-mounted propellers: Aerodynamic analysis of interaction effects and comparison with conventional layout // Journal of Aircraft. 2019. Vol. 56. No. 1. P. 295–312. DOI: 10.2514/1.C034978

Численные исследования влияния наличия щелей при отклонении механизации крыла на аэродинамические характеристики модели самолета

*Губский В.В.*¹, *Дружинин О.В.*¹, *Павленко О.В.*^{1,2}, *Мусса Х.*²
vitaly.gubsky@tsagi.ru, oleg.druzhinin_88@mail.ru, olga.v.pavlenko@yandex.ru,
mussa.kh@phystech.edu

¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180, Российская Федерация, Жуковский, ул. Жуковского, 1,

²Московский физико-технический институт (МФТИ),
141701, Российская Федерация, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. В работе на основе численных исследований проведено сравнение аэродинамических характеристик самолета с щелевым механизированным крылом и бесщелевым адаптивным крылом. Расчеты проведены на модели магистрального самолета CRM (Common Research Model) при числах Маха $M = 0.4$ и Рейнольдса $Re = 20 \cdot 10^6$. Показано, что модель самолета с упругим адаптивным крылом обладает лучшими

несущими свойствами и обладает большим запасом продольной статической устойчивости.

Ключевые слова: механизация крыла, адаптивное крыло, подъемная сила, модель CRM.

Механизация крыла изменяет кривизну и форму поперечных сечений крыла при их отклонении и используется на режимах взлета и посадки для увеличения подъемной силы самолета. При этом происходит увеличение энергии пограничного слоя на его верхней поверхности, которое создает струи воздуха, перетекающие через щели из области повышенного давления под крылом. Однако использование щелевой механизации крыла для достижения высоких значений подъемной силы содержит некоторые проблемы, так как выдвигание и отклонения многощелевых закрылков осуществляется при помощи сложных конструктивных механизмов, имеющих большой вес и сопровождается существенным увеличением момента тангажа на пикирование. Кроме того, при больших углах отклонения закрылков на их поверхности происходит срыв потока, сопровождающийся возникновением нестационарных нагрузок на элементы механизации [1]. Авиационная техника постоянно меняется и совершенствуется, предлагаются новые подходы к решению задачи улучшения взлетно-посадочных и крейсерских характеристик летательных аппаратов. Одним из таких новых направлений в конструкции самолетов является создание несущих поверхностей с геометрией, обладающей непрерывной производной на всех режимах полета, в частности, адаптивного крыла [2]–[5]. В данной работе на основе численных исследований проведено сравнение аэродинамических характеристик самолета с щелевым механизированным крылом и бесщелевым адаптивным крылом. Расчеты проведены на модели магистрального самолета CRM (Common Research Model) при числе Маха $M = 0.4$ и Рейнольдса $Re = 20 \cdot 10^6$.

Геометрические данные расчетной модели взяты на сайте [6]. Площадь базовой трапеции $1/2$ крыла $S_{кр.} = 192 \text{ м}^2$, средняя аэродинамическая хорда крыла (САХ) $b_a = 7 \text{ м}$, размах крыла 29.5 м . Для сравнения щелевой механизации с бесщелевым адаптивным крылом, щели на крыле с отклоненной во взлетное положение механизацией были закрыты поверхностью, построенной по касательной от предкрылка к крылу и от крыла к закрылку (рис. 1). Численное исследование проведено на полумодели самолета без вертикального оперения в посадочной конфигурации крыла ($20^\circ/36^\circ$) в диапазоне углов атаки (AoA) от -5° до 25° . Расчет выполнен с учетом плоскости симметрии на структурированной расчетной сетке, содержащей порядка 18 миллионов ячеек, в программе, основанной на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Общий вид расчетной модели показан на рисунке 1.

Расчет показал, что модель самолета с упругим адаптивным крылом обладает лучшими несущими свойствами и большей производной C_y^a , чем с крылом с щелевой механизацией. При этом приращение ее производной на линей-

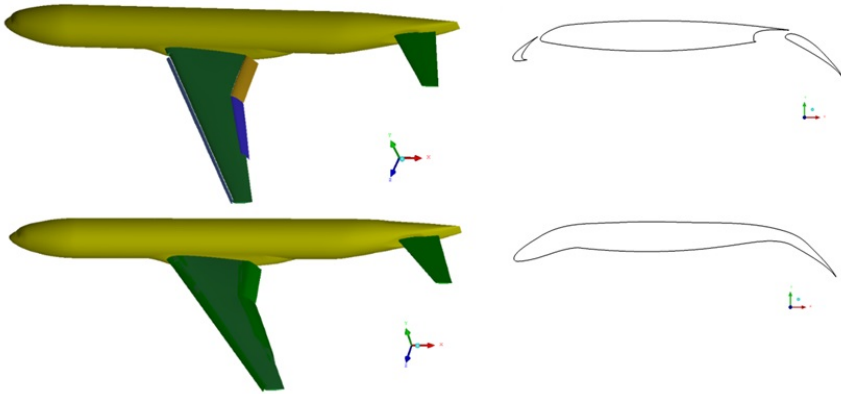


Рис. 1. Расчетная модель с целевой механизацией крыла и с упругим адаптивным крылом.

ном участке функции коэффициента подъемной силы по углу атаки составляет 0.017. Зависимости коэффициентов подъемной силы и момента тангажа, представленные на рисунке 2, показывают, что наблюдается нелинейность типа

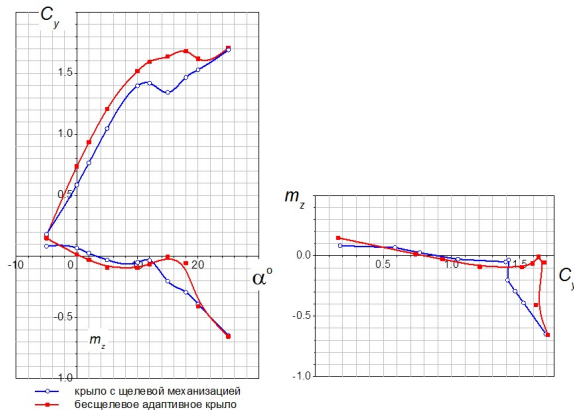


Рис. 2. Зависимости коэффициентов подъемной силы и моментов тангажа от угла атаки.

«ложка», характеризующая существенное ухудшение продольной статической устойчивости в диапазоне углов атаки (AoA) от 10° до 14° для крыла с целевой

механизацией, и на больших углах атаки (AoA) от 12° до 18° для упругого адаптивного крыла. Затем происходит возрастание момента тангажа на пикирование для обоих вариантов. Поляры крыла, показывают, что механизированное крыло в посадочной конфигурации обладает меньшим сопротивлением.

По распределению коэффициента подъемной силы в сечениях консоли крыла видно, что на угле атаки (AoA) = 2° подъемная сила бесщелевого адаптивного крыла больше, чем у щелевого механизированного, при этом приращение подъемной силы равномерно вдоль размаха (рис. 3).



Рис. 3. Распределение коэффициента подъемной силы в сечениях крыла, AoA = 2° .

Улучшение несущих свойств упругого адаптивного крыла по сравнению с крылом щелевой механизации для умеренных отклонений закрылка объясняется несколько большим разрежением на его верхней поверхности и увеличением давления на нижней поверхности крыла. Численные исследования влияния наличия щелей в отклоненной в посадочное положение механизации модели магистрального самолета CRM показали, что модель самолета с упругим адаптивным крылом обладает лучшими несущими свойствами и большей производной коэффициента подъемной силы от угла атаки, а также большим запасом продольной статической устойчивости.

Литература

- [1] Петров А. В. Аэродинамика транспортных самолетов короткого взлета и посадки с энергетическими системами увеличения подъемной силы. М.: Инновационное машиностроение, 2018.
- [2] Granichin O. N., Khantuleva T. A. Adapting wing elements (“Feathers”) of an airplane in a turbulent flow with a multiagent protocol // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1867–1882.
- [3] Krüger W. R., Dillinger J., De Breuker R., Reyes M., Haydn K. Adaptive wing: investigations of passive wing technologies for loads reduction in the cleansky smart fixed wing aircraft (SFWA) project // Greener Aviation 2016: Achievements and perspectives. 2016. P. 122.

- [4] Bolsunovsky A. L., Buzoverya N. P., Skomorohov S. I. Investigation of adaptive wing benefits for transport aircraft // 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014.
- [5] Амелюшкин И. А., Дружинин О. В. Адаптивное крыло с профилем изменяемой кривизны // Патент на изобретение, 2777139 С1. 01.08.2022.
- [6] URL: www.hiliftpw.larc.nasa.gov, IGS file (HL-CRM gapped config).

Влияние аэроупругих деформаций на обледенение крыла

Губский В.В.,¹ Павленко О.В.,^{1,2} Мусса Х.,² Февральских А.В.³
vitaly.gubsky@tsagi.ru, olga.v.pavlenko@yandex.ru, mussa.kh@phystech.edu,
a.fevralskih@gmail.com

¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180, Российская Федерация, Жуковский, ул. Жуковского, 1,

²Московский физико-технический институт (МФТИ),

141701, Российская Федерация, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. Данная работа проведена с целью выявления особенностей налипания льда при аэроупругих деформациях крыла в отличие от недеформированного крыла. Расчеты проведены на модели магистрального самолета CRM (Common Research Model) без аэроупругих деформаций и с аэроупругими деформациями крыла. Показано, что при аэроупругих деформациях крыла, в зависимости от времени обледенения, нарастающий лед имеет большую высоту, но имеет меньший вес и занимает меньшую область на носовой части крыла.

Ключевые слова: обледенение, аэроупругая деформация, Формы льда, модель CRM.

Введение. Обледенение до сих пор является одним из наиболее опасных воздействий окружающей среды на летательные аппараты в полете. Поэтому в целях обеспечения безопасности полетов проводятся исследования по изучению нарастания льда и его влияния на аэродинамические характеристики самолета. Следует отметить, что характер обтекания передней кромки крыла оказывает значительное влияние на картину обтекания всего крыла и аэродинамические характеристики самолета в целом [1]. Обледенение передних кромок крыла вызывает уменьшение критических углов атаки и местные срывы потока, нарушает нормальную работу рулей и элеронов. Методы численного моделирования позволяют прогнозировать обледенение крыла [2, 3, 4]. Но обычно, численное моделирование нарастания льда в полете проводят без учета аэроупругих деформаций крыла.

Методика и объект численных исследований. Экспериментальные данные, полученные в результате тестирования модели CRM в аэродинамических трубах, широко используются для тестирования разрабатываемых

расчетных методов и программ. Численное исследование обтекания модели самолета CRM проведено на левой половине модели самолета в крейсерской конфигурации без механизации и килля, выполненной в масштабе М 1:1. Площадь базовой трапеции 1/2 крыла $S_{1/2 \text{кр.}} = 192 \text{ м}^2$, размах консоли крыла $L = 30 \text{ м}$, средняя аэродинамическая хорда крыла (САХ) $b_a = 7 \text{ м}$. Расчетная модель самолета с аэроупругими деформациями крыла была построена на основании экспериментальных данных по влиянию аэроупругих деформаций на изменение геометрии крыла при числе $Re = 20 \cdot 10^6$ [5, 6], таблица 1.

Таблица 1. Углы изгиба и крутки сечений крыла при $Re = 20 \cdot 10^6$.

Сечение крыла $Z = z/L$	Изгиб (град.)	Крутка (град.)
0.11	-0.0222	-0.013
0.2	0.02007	-0.049
0.3	0.29323	-0.1216
0.4	0.91896	-0.2294
0.5	1.97555	-0.3684
0.6	3.49464	-0.5287
0.7	5.46966	-0.6958
0.8	7.85154	-0.8496
0.9	10.5538	-0.9649
0.95	11.981	-0.9987
0.1	13.4389	-1.011

Сечения крыла в таблице приведены в относительных величинах $Z = z/L$, где z — координата оси аппликат. Общий вид самолета показан на рисунке 1. Видно, что аэроупругие деформации существенно изменяют крыло самолета

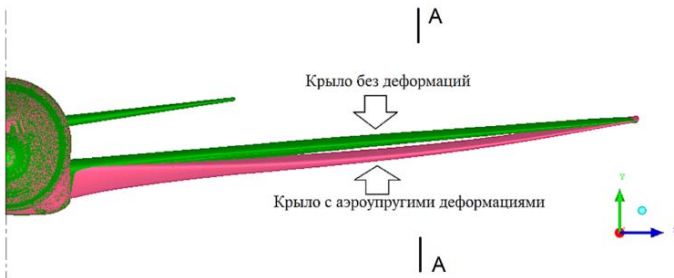


Рис. 1. Сравнение крыла без деформаций с аэроупругими деформациями крыла, вид спереди.

(рис.1) и в различных сечениях крыла меняют положение точки торможения потока на носовой части профиля.

Расчетные исследования влияния аэроупругих деформаций крыла на форму и вес нарастающего льда на модели самолета CRM были проведены при числах Маха $M = 0.4$ и Рейнольдса $Re = 20 \cdot 10^6$ с использованием программы FENSAP-ICE, в которую импортировали решение программы ANSYS FLUENT, полученное на структурированной сетке, содержащей около 18 миллионов ячеек.

Расчет движения и осаждения капель водной среды в воздушном течении выполнен в данном программном пакете с использованием модуля DROP3D в эйлеровой постановке. В основе расчета формы льдообразования в ANSYS FENSAP-ICE использована термодинамическая модель Мессингера. Расчет образования рыхлого льда на крыле проведен при температуре окружающей среды 268 К (-5°C), с содержанием в воздухе жидкой фазы воды $LWC = 0.005 \text{ кг/м}^3$, при постоянном среднеарифметическом значении диаметра капель 20 мкм [7].

Результаты расчета. Формы льда, сформированные на угле атаки $\text{AoA} = 2^\circ$ в сечении крыла А-А при $Z = 0.6$ показаны на рисунке 2. Видно, что на недеформированном крыле нарастает более симметричный лед, захватыва-

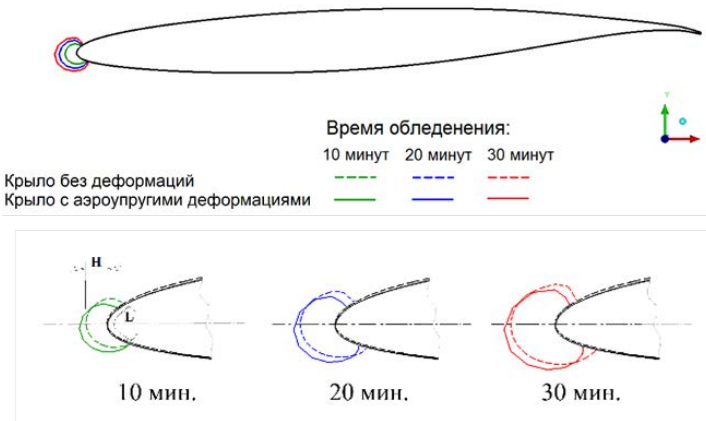


Рис. 2. Формы льда, сформированные на угле атаки $\text{AoA} = 2^\circ$ в сечении крыла А-А. Сравнение налипания льда.

ющий большую область, а на крыле с аэроупругими деформациями ледяные

наросты несколько выше и смещены вниз. Основные параметры наросшего льда показаны в таблицах 2 и 3.

Таблица 2. Геометрические параметры имитаторов льда крыла без деформаций.

Время обледенения t (мин.)	Высота льда $H = h/b$	Длина линии захвата капель по профилю крыла $L = l/b$
10	0.03248	0.01091
20	0.03815	0.01808
30	0.04399	0.02345

Таблица 3. Геометрические параметры имитаторов льда крыла с аэроупругими деформациями.

Время обледенения t (мин.)	Высота льда $H = h/b$	Длина линии захвата капель по профилю крыла $L = l/b$
10	0.02777	0.01453
20	0.03005	0.02179
30	0.03232	0.02727

Приращение параметров льда, изменяющихся в зависимости от продолжительности времени обледенения показано на рисунке 3. Лед на крыле с аэроупругими деформациями большей высоты, чем у недеформированного крыла, но имеет с ним практически одинаковую производную приращения высоты льда по времени обледенения. При этом, следует отметить, что у недеформи-

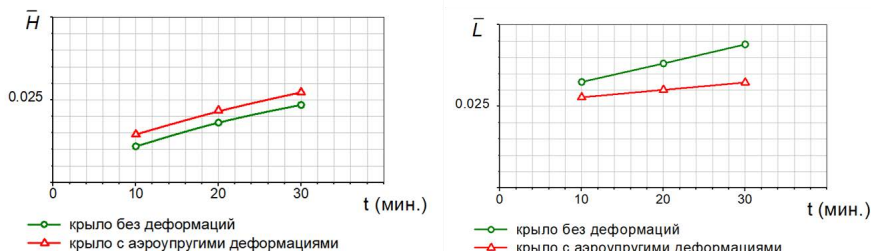


Рис. 3. Приращение параметров льда в зависимости от времени.

рованного крыла лед захватывает большую область носовой части крыла, так

как производная функции захвата капель носовой частью профиля в зависимости от времени значительно больше. Вследствие этого производная приращения нарастания веса льда по времени у недеформированного крыла больше, рисунок 4.

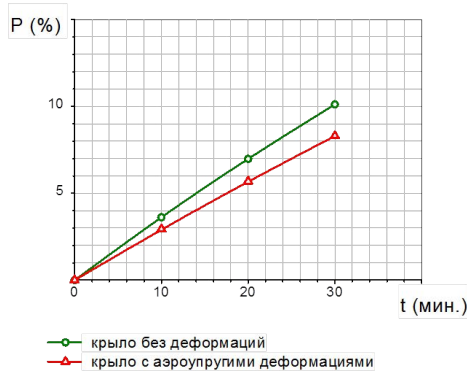


Рис. 4. Приращение веса льда.

Заключение. Численные исследования модели магистрального самолета CRM показали, что при аэроупругих деформациях крыла, в зависимости от времени обледенения, нарастающий лед имеет большую высоту, но имеет меньший вес и занимает меньшую область на носовой части крыла. В дальнейшей работе планируется провести численные исследования по определению влияния на аэродинамические характеристики крыла обледенения на недеформированном крыле и крыле с аэроупругими деформациями.

Литература

- [1] Павленко О. В. Численное исследование влияния ледяных наростов на передних кромках крыла и горизонтального оперения на аэродинамические характеристики модели регионального пассажирского самолета // Журнал «Техника Воздушного Флота». 2008. № 2.
- [2] Февральских А. В. Численное моделирование обледенения крыла экраноплана // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019. № 4(390). С. 117–124.
- [3] Амелюшкин И. А., Павленко О. В., Февральских А. В., Реслан М. Г., Мусса Х., Кинса С. Б. Численное исследование влияния обдува воздушными винтами на концах крыла большого удлинения на образование льда // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. 54. № 3. С. 10–21.

- [4] Амелюшкин И. А., Павленко О. В., Февральских А. В., Багдади М. К. Особенности формирования ледяных наростов на симметричном и несимметричном профиле и их влияние на аэродинамические характеристики крыла // Письма в Журнал технической физики. 2023. Т. 49. № 24. С. 28–30.
- [5] URL: www.commonresearchmodel.larc.nasa.gov/geometry
- [6] URL: www.commonresearchmodel.larc.nasa.gov/experiment-result-search
- [7] Авиационные правила. Приложение П 23. 1419. Условия облечения. URL: <https://sudact.ru/law/aviatsionnye-pravila-chast-23-normy-letnoi-godnosti/aviatsionnye-pravila/razdel-f-oborudovanie/prilozhenie-p23.1419>

Численное моделирование трехмерного обтекания модели ЛА с газодинамическими элементами управления

Дегтярев Н.Д.

shmooly@yandex.ru

Балтийский государственный технический университет

«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. В данном докладе представлены результаты моделирования обтекания модели летательного аппарата с газодинамическими элементами управления в трехмерной постановке. Рассматривались случаи со скоростью набегающего потока от 10 до 50 м/с. Результатами работы являются зависимости коэффициентов сил и моментов, действующих на летательный аппарат от коэффициента импульса струи. Полученные зависимости показали, что газодинамический закрылок может увеличивать коэффициент подъемной силы до 20% при выдуве с обоих крыльев одновременно, что дает возможность использовать газодинамический закрылок как вспомогательный элемент при взлете и посадке. Также показано, что газодинамический закрылок позволяет создавать момент крена, давая возможность управлять курсом летательного аппарата без использования механических элементов управления во время полета.

Ключевые слова: БПЛА, дозвуковое обтекание тел, численное моделирование газодинамических процессов, методы управления обтеканием БПЛА.

В современном мире беспилотные летательные аппараты становятся неотъемлемой частью как гражданской, так и военной авиации. Исследования и разработки в этой области имеют большую важность как для экономики страны, так и для ее обороны. Использование механизированных закрылков в крейсерском режиме вынуждает использовать крыло сложной изменяемой геометрии; механические нагрузки, возникающие вследствие отклонения закрылков, передаются на тонкую заднюю кромку крыла. Устранение или уменьшение разме-

ров подвижных поверхностей управления обтеканием на летательном аппарате дает возможность снизить заметность и требования к техническому обслуживанию. Одной из перспективных разработок является способ управления крыловым летательным аппаратом без механических закрылков при помощи выдува струй воздуха в поток с поверхности крыла, в частности, с задней кромки. Впервые эта технология была реализована компанией BAE systems в рамках программы FLAVIIR (Flapless Air Vehicle Integrated Industrial Research) при участии десяти английских университетов на прототипе беспилотного летательного аппарата, управление которым обеспечивалось без подвижных поверхностей — только струями воздуха [1].

В данной работе было определено влияние ширины сопла газодинамического закрылка и скорости выдува струи воздуха на коэффициенты сил и моментов, действующих на модельную конфигурацию крыла. Расчетные модели были построены на основе аэродинамического профиля GOE 134 (рис. 1).

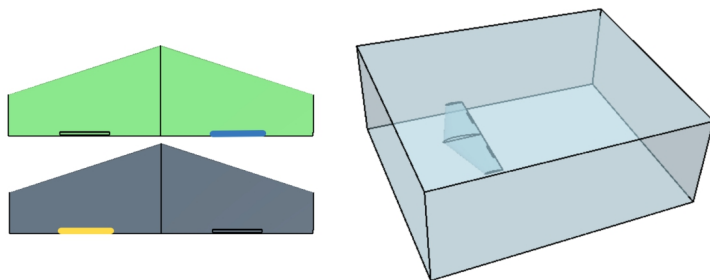


Рис. 1. Расчетная модель ЛА.

Рассматривались расчетные случаи со скоростью набегающего потока от 10 до 50 м/с, что соответствует числам Рейнольдса от $6.6 \cdot 10^4$ до $3.3 \cdot 10^5$. В большинстве случаев число Рейнольдса соответствовало турбулентному характеру течения, поэтому во всех расчетах использовалась $k-\omega$ SST модель турбулентности. Максимальная скорость набегающего потока была равна 50 м/с, что соответствовало числу Маха около 0.15, поэтому сжимаемость воздуха не учитывалась. Граничным условием на входе в расчетную область была скорость набегающего потока, а на выходной границе статическое давление. Скорость потока также задавалась как граничное условие на выходе из сопла газодинамического закрылка. Внешние границы задавались как стенки без условия прилипания. Размер расчетной области подбирался таким образом, чтобы внешние границы не влияли на картину течения в окрестности исследуемого объекта и на исследуемые параметры.

Интенсивность выдува характеризуется коэффициентом импульса струи C_μ [2], для крыла:

$$C_\mu = \frac{J_c}{\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} S_0},$$

где $J_c = \dot{m}_c v_c$ — импульс струи [Н], \dot{m}_c — массовый расход через сопло [кг/с], v_c — скорость истечения через сопло [м/с]; ρ_∞ — плотность набегающего потока [кг/м³]; v_∞ — скорость набегающего потока [м/с]; S_0 — площадь крыла, находящаяся под влиянием струи [м²].

Выбранная ширина сопла, составляющая треть от размаха крыла, является величиной первого приближения и должна быть уточнена после определения массогабаритных характеристик будущего ЛА. Также для уточнения значения этой величины необходимо провести исследование влияния ширины механического закрылка на его эффективность.

По результатам выполненного исследования можно сказать, что газодинамический закрылок способен выполнять отведенную ему функцию по управлению ЛА во время полета в комбинации с механическим закрылком, используемым при взлете и посадке. Полученные зависимости показали, что газодинамический закрылок может увеличивать коэффициент подъемной силы до 20% при выдуве с обоих крыльев сразу, что дает возможность использовать его как вспомогательный элемент управления при взлете и посадке. Об этом также говорит увеличение коэффициента момента тангажа при работающем выдуве.

Помимо использования выдува с обоих сопел сразу была рассмотрена возможность выдува по отдельности с правого и левого крыльев. Такая конфигурация вызывает возникновение момента крена, действующего на летательный аппарат. Величина коэффициента возникающего момента крена порядка 10^{-3} невелика, но может позволить управлять курсом ЛА во время полета без использования механических закрылков. Зависимость коэффициента момента крена от коэффициента импульса струи представлена на рис. 2. Использование такой схемы управления вызывает также момент рысканья, однако его величина на три порядка меньше момента крена.

На рис. 3 показано распределение давления по нижней поверхности ЛА с выдувом с задней кромки правого и левого крыла и без выдува. Видно, что в окрестностях сопла возникает зона повышенного давления, влияя на моменты тангажа и крена, а также на подъемную силу и силу сопротивления, что совпадает с выводами, сделанными по продемонстрированным зависимостям.

Дальнейшие исследования предполагают разработку метода подвода воздуха к соплу газодинамического закрылка, что позволит создать конструктивную компоновку для проведения экспериментов. Необходимо решить целый ряд технических проблем, среди которых наиболее сложными являются со-

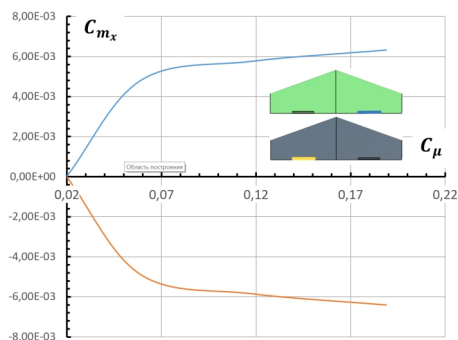


Рис. 2. Зависимость коэффициента момента крена от коэффициента импульса струи.

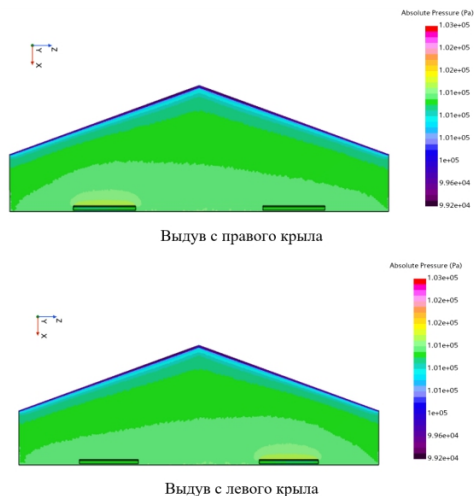


Рис. 3. Распределение давления по нижней поверхности ЛА.

здание гидравлической сети подвода воздуха с минимальными потерями для обеспечения необходимого давления и его равномерного поля на срезе сопла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Создание и научное обоснование методологии аэрогазодинамического проектирования общего облика двигательных и энергетических установок, технологий разработки и массово-

го производства беспилотной аэрокосмической техники для решения задач в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях», № FZWF–2024–0003).

Литература

- [1] Buonanno A. Aerodynamic circulation control for flapless flight control of an unmanned air vehicle / PhD thesis. Cranfield University, 2009.
- [2] Петров А. Энергетические методы увеличения подъемной силы крыла. Litres, 2022.

Численный расчет движения нефтепродуктов в теплообменнике

Джайчибеков Н.Ж., Жуманбаева А.С., Курманова Д.Е.
jaich@mail.ru, aizhanzhumanbayeva347@gmail.com, dikonya89_29@mail.ru

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
 010000, Республика Казахстан, Астана, ул. К.Мунайтпасова, 13

Аннотация. Приводятся результаты расчетов гидродинамики и теплообмена для теплоносителей. Для расчетов используется метод логарифмической средней разности температур, модифицированный для случая переменной вязкости, и методы вычислительной гидродинамики (CFD). Применяются усредненный по Рейнольдсу метод Навье–Стокса (RANS) и модель турбулентности, учитывающая ламинарно–турбулентный переход.

Ключевые слова: теплопередача, теплообменник, нефть, гидродинамика, тепловой поток, ламинарно–турбулентный переход, уравнение Навье–Стокса.

Введение. В работе приводятся результаты численного расчета теплообменника прямоточного типа, в котором во внутреннем трубопроводе рабочей жидкостью является нефть (холодный теплоноситель), а во внешней трубе — вода (горячий теплоноситель). Расчеты проводятся как при помощи теоретического подхода, основанного на методе среднелогарифмической разницы температур при постоянной и переменной вязкости, так и на основе средств вычислительной гидродинамики (CFD) [1].

Метод расчета. Уравнения непрерывности, импульса и переноса энергии для стационарного течения имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0; \\ v_j \frac{\partial v_i}{\partial v_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]; \\ v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность, v_i — составляющая скорости в направлении координат x_i , p — давление, T — температура, ν — кинематическая вязкость жидкости, ν_t — турбулентная вязкость, Pr , Pr_t — число Прандтля для ламинарного и турбулентного потока соответственно. Для моделирования турбулентных течений линейная модель использует соотношение напряжение–деформация Буссинеска. Вихревая вязкость определяется из решения уравнений переноса модели турбулентности. Предполагается, что и вода и нефть являются ньютоновскими несжимаемыми жидкостями.

Модель турбулентности включает в себя два дополнительных уравнения переноса: одно уравнение записано для числа Рейнольдса толщины импульса начала перехода $Re_{\theta t}$, а другое уравнение выведено для перемежаемости γ . Уравнения переноса для толщины импульса и перемежаемости имеют вид [3]:

$$v_j \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{\theta t} (\nu + \nu_t) \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} \right];$$

$$v_j \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right].$$

Здесь $P_{\theta t}$ — является производным от числа Рейнольдса толщины импульса, P_γ и E_γ — условия образования и диссипации перемежаемости, $\sigma_{\theta t}$ и σ_γ — константы модели.

На рисунке 1 показано распределение осевой скорости холодного теплоносителя (нефти) в различных поперечных сечениях трубопровода в радиальном направлении, при $x = 0.5$ м (линия 1), $x = 1.5$ м (линия 2) и в выходном сечении (линия 3).

В поперечном сечении скорость нефти изменяется от максимального значения на оси трубопровода до нуля на его поверхности. Увеличение осевой скорости на выходе объясняется уменьшением вязкости нефти за счет нагрева нефти по мере приближения к выходному сечению. Распределение осевой скорости воды в выходном сечении трубопровода показана на рисунке 2. Скорость воды изменяется от нуля на стенке до максимального значения на оси канала. Профиль скорости имеет характер, типичный для турбулентного течения в круглой трубе, являясь более наполненным вблизи оси и имея большие градиенты скорости вблизи стенки, по сравнению с ламинарным течением.

На рисунке 3 представлен график распределения температуры вдоль внутренней стенки трубки со стороны нефти. Видно, что при входе в трубку нефть холодная и стенка со стороны нефти сильно остывает и далее происходит ее прогрев. Тут преобладает теплообмен теплопроводностью, далее, начиная с сечения $x = 3.2$ м, происходит ламинарно–турбулентный переход, и теплопередача существенно увеличивается, после чего происходит уменьшение температуры стенки.

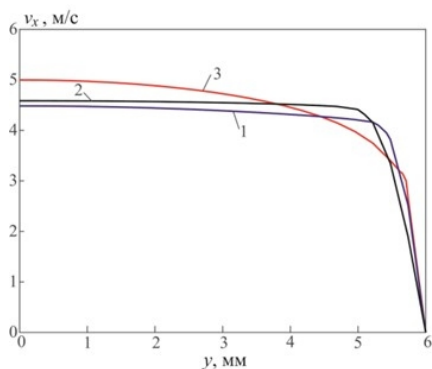


Рис. 1. Радиальные распределения осевой скорости нефти в различных поперечных сечениях трубопровода.

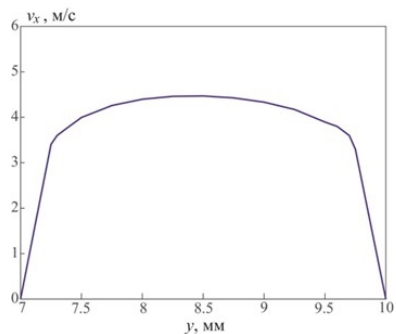


Рис. 2. Радиальное распределение осевой скорости воды в выходном сечении.

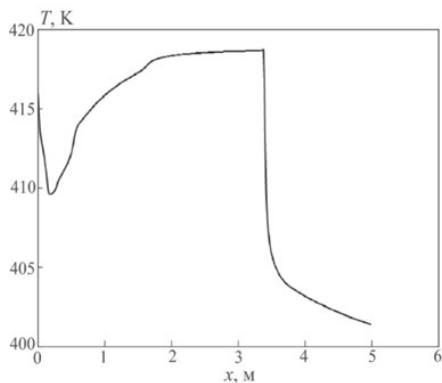


Рис. 3. Изменение температуры стенки вдоль трубки со стороны нефти.

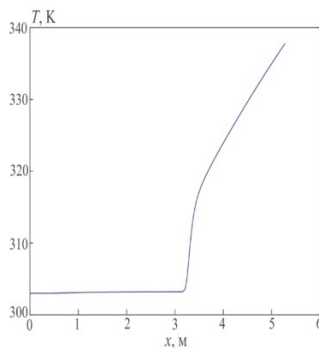


Рис. 4. Распределение температуры нефти вдоль внутренней поверхности трубы.

Обратная картина наблюдается на рисунке 4, где показано распределение температуры нефти вдоль внутренней поверхности трубы. Здесь температура нефти почти не меняется в начальном участке трубы, затем начиная также с

сечения $x = 3.2$ м она резко возрастает по той же причине что и на рисунке 3. Здесь видна закономерная связь изменения температуры стенки со стороны нефти и температуры собственно нефти вблизи той же стенки.

Литература

- [1] Kurmanova D., Jaichibekov N., Karpenko A., Volkov K. Modelling and Simulation of Heat Exchanger with Strong Dependence of Oil Viscosity on Temperature // Fluids. 2023. Vol. 8. No. 3. P. 95. DOI: 10.3390/fluids8030095
- [2] Menter F., Esch T., Kubacki S. Transition Modelling Based on Local Variables // Engineering Turbulence Modelling and Experiments 5. Elsevier Science Ltd, 2002. P. 555–564. DOI: 10.1016/B978-008044114-6/50053-3
- [3] Langtry R. B., Menter F. R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes // AIAA journal. 2009. Vol. 47. No. 12. P. 2894–2906. DOI: 10.2514/1.42362

Моделирование движения твердой частицы в пылеулавливающих аппаратах со встречными закрученными потоками с учетом изменения радиуса частицы

Ефимов Д.А., Дорофеева Ю.А., Старцева Ю.В.

julana2008@yandex.ru, efimov.d.aleksa@mail.ru, korablina-j-v@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный горный университет императрицы
Екатерины II,

199106, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Васильевский остров, 21 линия, 2

Аннотация. Моделирование движения запыленных потоков воздуха в пылеулавливающих аппаратах при обогащении руды в горнодобывающей отрасли является неотъемлемой частью при проектировании аппаратов и оценке их эффективности. В работе рассматривается движение твердой частицы в пылеулавливающем аппарате со встречными закрученными потоками запыленного воздуха, представлены результаты моделирования движения твердой частицы с учетом динамики изменения её радиуса, а также случайный процесс оседания данной частицы в бункер пылеулавливающего аппарата.

Ключевые слова: твердая частица, пылеулавливание, моделирование, циклон, оседание, движение частицы, обогащение руды.

Введение. Одним из эффективных способов очистки выбросов в атмосферу является использование аппаратов циклонного типа, в том числе аппаратов со встречными закрученными потоками (ВЗП). Принцип действия данного типа очистного оборудования основан на взаимодействии нескольких вихревых

потоков запыленного воздуха. В результате создается результирующее поле течений, в котором действуют центробежные силы и силы уноса, обуславливающие выделение твердой фазы из газового потока [1]–[3].

В предложенном подходе будут учитываться следующие процессы:

- изменение радиуса частицы во время движения — частицы могут соединяться или наоборот в силу действующего потока воздуха уменьшаться в массе и радиусе;
- доля частиц оседает на стенах аэродинамической трубы — случайный процесс.

Траектория движения частиц в пылеулавливающем аппарате ВЗП. Траектория движения частиц в пылеулавливающем аппарате со встречными закрученными потоками может быть разделена на несколько основных этапов (рис. 1):

- **Первый этап** — вход частиц в устройство. Газовый поток с частицами входит в пылеулавливающий аппарат через входные патрубки 3 и 4 направляется внутрь цилиндрического корпуса 1.

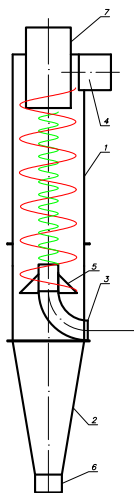


Рис. 1. Пылеулавливающий аппарат со встречными закрученными потоками. 1 — цилиндрический корпус; 2 — послесепарационная камера; 3 — осевой патрубков первичного потока; 4 — тангенциальный раскручиватель вторичного потока; 5 — отбойная шайба; 6 — пылесборник; 7 — осевой коаксиальный вывод для вывода очищенного газа.

- **Второй этап** — образование спиральной траектории. Когда газовый поток попадает в циклон-пылеуловитель, он начинает двигаться вокруг оси устройства, образуя спиральную траекторию. Частицы в газовом потоке двигаются вместе с ним, совершая тоже спиральную траекторию. Чем больше размер частицы, тем более она отклоняется от оси и движется к стенке устройства.
- **Третий этап** — отделение частиц от газового потока. По мере движения газового потока вдоль стены циклона, центробежная сила разделяет твердые частицы и газ. Частицы, имеющие большую массу и инерцию, остаются на спиральной траектории и перемещаются вниз по стенке устройства, попадая в послесепарационную камеру 2, находящуюся в нижней части аппарата. Газ же, имея меньшую массу и инерцию, движется вверх и покидает устройство через осевой коаксильный вывод 7.
- **Четвертый этап** — осаждение частиц. Твердые частицы, отделенные от газового потока, собираются в пылесборнике 6, который находится в нижней части циклона. Аппарат представляет собой цилиндрический корпус, содержащий сепарационную и после сепарационную камеры, пылесборник в нижней части аппарата.

Пылегазоводушная смесь поступает на очистку в аппарат по двум вводам одновременно: первичный поток подается в нижнюю часть по осевому патрубку, вторичный — по тангенциальному раскручивателю в верхнюю часть аппарата. Поступающий в аппарат запыленный газ закручивается завихрителем, далее частички пыли под действием центробежных сил перемещаются к стенкам цилиндрического аппарата, где впадают в зону вращения вторичного закрученного потока. Центробежная сила усиливает взаимодействие потоков газа, действующих на частицы пыли, которые эффективно отбрасываются и, долетая до стенки цилиндрического корпуса, устремляются в нижнюю часть аппарата (пылесборник) под отбойную шайбу. Через осевой коаксиальный вывод сверху аппарата выводится очищенный газ. Внутри аппарата вращение потоков имеет одно направление.

Математическое моделирование изменения радиуса частицы. Согласно работам [4]–[5] уравнение движения для пылевой частицы в аппарате ВЗП при проекции на ось r имеет вид:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r - B \left(\frac{dr}{dt} - (-\nu r) \right).$$

Данное уравнение является модификацией подхода [6]. Решение уравнение второго порядка, в соответствии с [7]–[8] было получено в виде суммы частного и общего решения.

Описание случайного процесса оседания частиц будет осуществлен с помощью подхода Феймана–Каца [9]–[10].

Вывод. В работе применяется принципиально новый подход для моделирования движения частицы в аппаратах со встречными закрученными потоками. Учет изменения радиуса частицы, а также случайный процесс оседания доли частиц на стенах трубы влияют на вероятность попадания частиц в фильтр. Предложенный подход имеет широкое применение в горнодобывающей отрасли, а точнее при обогащении руды.

Литература

- [1] Азаров В. Н., Азаров Д. В. Пылеуловители со встречными закрученными потоками. Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 2020.
- [2] Месхи Б. Ч., Евтушенко А. И., Боровков Д. П. Технические решения по снижению величины проскока пылевых частиц при очистке выбросов производства железобетонных изделий пылеуловителями со встречными закрученными потоками // Безопасность техногенных и природных систем. 2023. № 4. С. 7–19.
- [3] Азаров А. В., Сергина Н. М., Евтушенко А. И., Ковтунов И. А., Стреляева А. Б., Азаров Д. В. Вихревой пылеуловитель. Патент РФ, № 202744U1. 2021. 6 с. <https://patentimages.storage.googleapis.com/ed/25/2d/2856e5fb81fbb8/RU202744U1.pdf> (дата обращения: 25.08.2023).
- [4] Азаров Д. В., Артюхин А. С., Жемчужный А. М. О расчетной модели вихревых пылеуловителей // Объединенный научный журнал. 2003. № 23. С. 85–86.
- [5] Азаров Д. В., Артюхин А. С. Оценочная расчетная модель наклонно расположенного аппарата ВЗП // VIII региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области, 11–14 ноября 2003 г. Направление № 16 «Экология, охрана среды, строительство»: Тезисы докладов, 2004. С. 97–100.
- [6] Медников, Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 176 с.
- [7] Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. Высшая школа, 1976. 304 с.
- [8] Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. 1979. 224 с.
- [9] Синай Я. Г. и др. Системы квазилинейных уравнений со случайными начальными данными и правой частью, приложение к задачам гидродинамики и статистической физики. Российский фонд фундаментальных исследований, 1996. № 96-01-00377.
- [10] Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н. Формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова // Доклады Академии наук. 2008. Т. 420. № 1. С. 27–32.

Исследование свободноконвективного течения и теплообмена воздуха в однорядном пучке горизонтальных оребренных труб: вариация температуры труб и расстояния между трубами

Засимова М.А., Филатова А.В., Абрамов А.Г., Пожилов А.А.
zasimova_ma@mail.ru, filatova3.av@edu.spbstu.ru, abramov_ag@spbstu.ru,
aapozhilov@mail.ru

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Аннотация. Представляются результаты численного моделирования свободноконвективного течения воздуха в однорядном пучке, состоящем из шести оребренных труб. Приводятся систематические данные об интегральном теплосъеме с поверхности трубного пучка при изменении температуры несущих труб, а также расстояния между трубами. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с доступными данными экспериментов по интегральным значениям числа Нуссельта.

Ключевые слова: трубный пучок, оребренная поверхность, свободная конвекция, интенсификация теплообмена, численное моделирование.

Введение. В конструкциях, эксплуатируемых в различных технологических системах теплообменных аппаратов для охлаждения теплоносителей широко применяются пучки труб с внешним оребрением. В инженерной практике использования таких устройств преобладают всесторонне исследованные режимы вынужденной конвекции [1]. Трубные пучки, работающие в пассивных режимах с преобладанием свободной конвекции, изучены не так детально в силу меньшей эффективности. Вместе с тем, они обеспечивают высокую надежность и не требуют постоянного контроля за конструкцией.

В случае свободноконвективных режимов течения существенное влияние на эффективность теплообмена оказывают геометрические характеристики трубного пучка — компоновка (количество труб в ряду, количество рядов в пучке и их взаимное расположение) и геометрическая конфигурация оребренной поверхности трубы (форма ребра, межреберное расстояние и др.). Оценка эффективности теплообмена при изменении геометрических характеристик может быть выполнена с помощью натуральных измерений (см., например, результаты исследований [2]) и численного моделирования ([3] и ссылки в ней).

В работе [2] приведены результаты измерений интенсивности теплосъема с поверхности одиночной трубы, направление оси которой изменяется в пространстве, а также с поверхности пучков труб, состоящих из одного, двух, трех или четырех рядов при варьировании межтрубного расстояния. В докладе представляются результаты численного моделирования свободноконвективного течения воздуха и теплообмена для одной из постановок, приближенных к [2].

Постановка задачи. Расчетная постановка включает состоящий из шести труб однорядный пучок, с боковых границ которого установлены ограничивающие течение теплоизолированные пластины (вид расчетной области показан на рис. 1(а)). На несущих трубах диаметром $d_0 = 26.4$ мм смонтированы сплошные поперечные ребра диаметром $d = 56.8$ мм. Постоянная толщина ребра δ задана равной 0.55 мм, расстояние между ребрами по длине несущих труб $s = 2.43$ мм. Коэффициент оребрения $\varphi = 20.9$ [2]. Поперечный шаг установки труб S_1 варьировался от 58 до 145 мм, а его относительное значение $\sigma = S_1/d$ находилось в диапазоне $1.02 \dots 2.55$. Расчеты проводились в предположении симметрии течения относительно плоскости, проходящей через середину пучка. Течение считалось симметричным по длине несущей трубы: размер расчетной области в этом направлении составил $0.5s$. Расстояние от пучка до внешних границ области превышало $10d_0$.

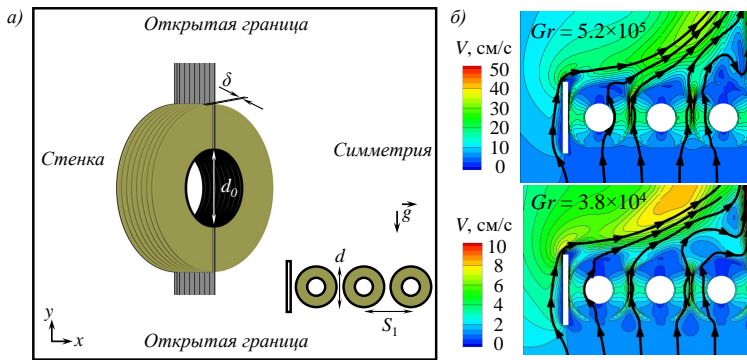


Рис. 1. а) Вид расчетной области, б) поле модуля скорости вблизи пучка.

Температура окружающего воздуха принималась равной $T_0 = 22.1^\circ\text{C}$. Температура на поверхности несущих труб T_w изменялась от 37 до 244°C . Значения числа Грасгофа, построенного по диаметру несущих труб и перепаду температуры $\Delta T = T_w - T_0$, находились при этом в диапазоне $10^4 \dots 10^6$, что соответствует ламинарному режиму течения.

Нестационарные расчеты были выполнены в пакете ANSYS Fluent на основе системы уравнений Навье–Стокса, дополненной уравнением энергии. Задача решалась в несопряженной и сопряженной (с учетом теплопередачи через алюминиевые ребра) постановках. Использовалась модель сжимаемого совершенного газа с термодинамическими и теплофизическими свойствами, зависящими

от температуры. Расчеты проводились со вторым порядком точности по пространству и времени.

Использовались как квазиструктурированные (состоящие из гексаэдральных элементов), так и неструктурированные (включающие гексаэдральные и тетраэдральные элементы) расчетные сетки с размерностями до 300 тысяч ячеек. Можно отметить, что выбор типа сетки не влияет на результаты расчетов, что контролировалось в ходе исследований. Шаг по времени принимался равным 0.02 с. Продолжительность выборок, соответствующих статистически установившемуся режиму течения, составляла около 120 с, что для всех вариантов превышало 500 характерных времен. Выполнены серии многовариантных расчетов с изменением температуры поверхности несущих труб и межтрубного расстояния, которые позволили накопить базу данных из 5 тысяч вариантов, в том числе для планируемого применения методов машинного обучения.

Результаты расчетов. Анализируя особенности структуры рассчитанного течения можно заключить, что воздух под действием сил плавучести и при влиянии эжекции протекает через межтрубное и межреберное пространство пучка (рис. 1(б)). Типичные значения скорости в межреберном зазоре в рассчитанных вариантах не превышают 25 см/с, что соответствует характерному значению числа Рейнольдса, оцененному по диаметру несущих труб, приблизительно равному 450. В пространстве над пучком формируется нестационарный тепловой факел, который оказывает слабое влияние на интегральный теплосъем с поверхности труб. Установлено, что для сопряженной постановки задачи с максимальным $\Delta T = 220^\circ\text{C}$ температура поверхности ребра изменяется менее чем на 5°C , при этом интегральный теплосъем, полученный в сопряженной и несопряженной постановках различается менее чем на 1%.

Рис. 2 демонстрирует изменение значения числа Нуссельта с осреднением по поверхности оребренной трубы, $Nu = (q_w d)/(\lambda \Delta T)$, при варьировании межтрубного расстояния для трех значений числа Грасгофа. На графике приведены отмеченные длинным пунктиром осредненные по трем трубам (#1 – #3) значения $\langle Nu \rangle$ и отмеченные сплошными линиями осредненные значения $\langle Nu \rangle$ по поверхностям крайней #1 (ниже пунктирной линии) и центральной #3 (выше пунктирной линии) трубы.

Показано, что при увеличении межтрубного расстояния интенсивность интегрального теплосъема с поверхности всех труб возрастает, достигая максимального (оптимального для заданного ΔT) значения, отмеченного на рис. 2 символом $max(Nu)$. Оптимальное расстояние для максимального перепада температур соответствовало $\sigma = 1.11$, а для минимального — $\sigma = 1.26$. Дальнейшее увеличение зазора между трубами сопровождается постепенным уменьшением значения Nu , которое при $\sigma = 2$ становится приблизительно равным значению, рассчитанному ранее для одиночной оребренной трубы (данные отмечены на рисунке коротким пунктиром).

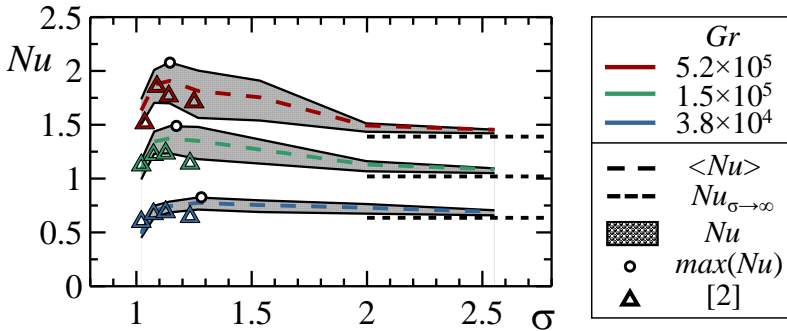


Рис. 2. Распределения значений числа Нуссельта в зависимости от шага труб.

Отметим, что среднее значение числа Нуссельта по поверхности одиночной трубы для заданного перепада температур ΔT практически совпадает со значением Nu , осредненного по поверхностям трубного пучка с минимальным межреберным расстоянием $\sigma = 1.02$. Эти значения отличаются на 20...30% от осредненных по поверхности всех труб значений Nu при оптимальных параметрах пучка.

Результаты расчетов сопоставлялись с экспериментальными данными [2] для постановок задач при $\sigma \leq 1.25$ мм (рис. 2). По данным эксперимента можно также отметить локальное увеличение значений Nu с ростом σ . Показано, что в рассмотренном диапазоне значений числа Грасгофа расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются друг с другом по интегральным значениям числа Нуссельта.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 24-49-10003. Результаты получены с использованием вычислительных ресурсов СКЦ «Политехнический».

Литература

- [1] Бессонный А. Н., Дрейцер Г. А., Кунтыш В. Б. и др. Основы расчета и проектирования теплообменников воздушного охлаждения. СПб: Недра, 1996. 512 с.
- [2] Маршалова Г. С. Тепловой расчет и проектирование аппаратов воздушного охлаждения с вытяжной шахтой / дис. канд. техн. наук: 01.04.14. Минск. 2019. 153 с.
- [3] Ungera S., Krepper E., Hampel U. Numerical analysis of heat exchanger designs for passive spent fuel pool cooling to ambient air // Nuclear Engineering and Design. 2018. Vol. 333. P. 224–234.

Вторичное измельчение капель топлив в камерах энергетических установок

Исламова А.Г., Шлегель Н.Е., Ткаченко П.П., Стрижак П.А.

agi2@tpu.ru, nes6@tpu.ru, ppt1@tpu.ru, pavelspa@tpu.ru

Томский политехнический университет,

634034, Российская Федерация, Томск, пр. Ленина, 30

Аннотация. По результатам экспериментальных исследований столкновения капель угольных суспензий с твердыми частицами при отсутствии нагрева выделено два режима взаимодействия — агломерация и разделение растяжением. Выделены четыре фазы при реализации режимов взаимодействия. Установлено, что капли суспензий с меньшей концентрацией угольных частиц в составе при столкновении с твердой частицей не только образовывали большее количество вторичных фрагментов, но и создавали больший угол их разлета.

Ключевые слова: соударение, капли, твердые частицы, режимы взаимодействия, вторичное измельчение, топливо.

Введение. Одной из главных проблем сжигания угля являются повышенные газовые и твердые антропогенные выбросы [1]. В связи с этим мировым научным сообществом разрабатываются новые альтернативные виды топлив [2]. Одними из таких топлив являются водоугольные суспензии. Как правило, для распыления суспензионных топлив на основе угля применяются пневматические форсуночные или слинкерные устройства, т. к. такие устройства обладают простотой конструкции и надежностью в эксплуатации [3]. Распыление капель водоугольного топлива обычно подразделяется на первичное (с использованием распылителей) и вторичное (в камерах сгорания) [4]. В некоторых случаях предварительное распыление капель на входе в камеру сгорания считается неэффективным, так как движущиеся капли могут коагулировать, вследствие чего возникает возможность замедление потока капель из-за высокотемпературных дымовых газов. При этом на стенках камеры остается довольно большой объем жидкости, тем самым ухудшается теплообмен, что приводит к локальному перегреву стенок теплового оборудования. Поэтому актуальными являются исследования по изучению характеристик вторичного измельчения капель за счет соударения их между собой или с твердыми преградами. Целью настоящего исследования являлось определение характеристик взаимодействия капель водоугольных суспензий с твердыми частицами угля без их нагрева и при их термическом разложении.

Методы и материалы. При проведении экспериментальных исследований, направленных на изучение характеристик взаимодействия капли жидкости с угольными частицами, в качестве жидкостей использовались водоугольные суспензии с различной концентрации (1–50%). Для проведения исследо-

ваний использовался стенд, схема которого приведена на рисунке 1. Подача водоугольной суспензии обеспечивалась при помощи шприцевого насоса. Для генерации капель использовались сменные сопла, которые позволяли варьировать радиус капли от 0,2 до 1 мм. С целью удержания твердых частиц угля применялся вакуумный насос. При помощи высокоскоростной видеокамеры регистрировались процессы столкновения суспензии с частицей угля. Область

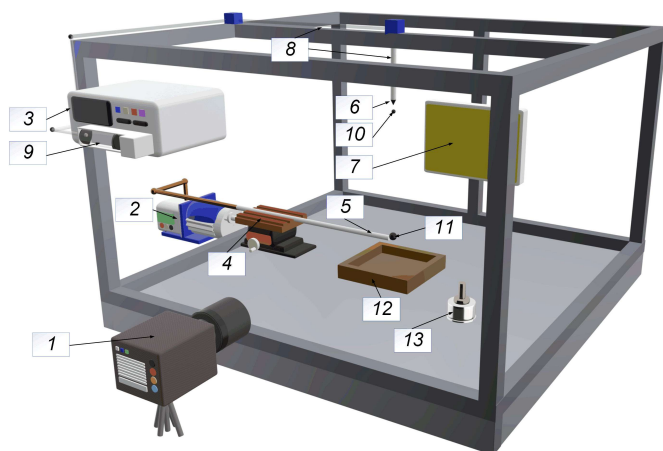


Рис. 1. Схема стенда: 1 — высокоскоростная видеокамера; 2 — вакуумный насос; 3 — шприцевой насос; 4 — прецизионный стол; 5 — держатель частиц; 6 — съемное сопло; 7 — прожектор; 8 — канал подачи суспензии; 9 — шприц для подачи суспензии; 10 — капля суспензии; 11 — частица угля; 12 — емкость для сбора жидкости; 13 — спиртовая горелка.

регистрации выбиралась и настраивалась таким образом, чтобы в достаточной мере отследить начальные параметры движения капель суспензии и последствия их столкновения с частицами угля. С помощью программного обеспечения Phantom Camera Control регистрировались и определялись основные параметры процесса взаимодействия капель суспензий и угольных частиц.

Результаты исследования. По результатам экспериментальных исследований выделены 2 режима взаимодействия — агломерация и разрушение. Режим агломерации характеризовался оседанием капли суспензии на угольной частице при соударении с ней без образования вторичных фрагментов. При реализации этого режима установлено четыре фазы, подобно [5]: кинетическая

фаза (форма капли имела схожую форму с усеченной сферой), фаза растекания (жидкость двигалась к противоположному краю частицы, постепенно поглощая ее), фаза релаксации (капля сжималась под действием накопленной энергии) и фаза смачивания (на поверхности частицы образовалась тонкая пленка жидкости с концентрацией основного массива жидкости в нижней части частицы). При достижении равновесного состояния наступала фаза полного смачивания.

Режим разрушения характеризовался образованием вторичных фрагментов при столкновении капли суспензии с угольной частицей. Определено, что режим разрушения, также, как и при агломерации протекал в четыре фазы. Несмотря на сходства в большинстве из фаз, обнаружены отличия в фазе растекания. С увеличением числа Вебера капля обладает большей начальной кинетической энергией удара и растекается быстрее из-за сил инерции. После растекания капли по частице в нижней точке последней образовывался жидкостный мостик. Силы инерции и тяжести преобладали над поверхностным натяжением. Как следствие, капля разрывалась в самой тонкой ее части и распадалась на фрагменты ($t = 6,6 - 17$ мс). Оставшаяся жидкость на поверхности угольной частицы приходила в равновесие за счет сил вязкости. На рисунке 2 приведены зависимости количества образовавшихся вторичных

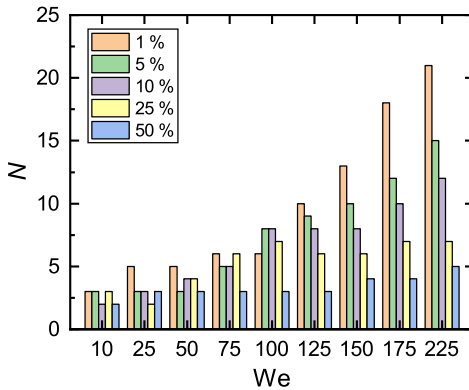


Рис. 2. Карта режимов столкновения капель воды с поверхностью мембран при варьировании числа Вебера.

фрагментов от числа Вебера (We) в процессе столкновения капель суспензий с частицами угля. По результатам экспериментальных исследований определено, что при снижении массовой концентрации угля в составе суспензии увеличилось количество вторичных фрагментов. Такой эффект обусловлен изменением

физических свойств состава, а именно снижением вязкости и поверхностного натяжения жидкости.

В момент столкновения капли суспензии с твердой частицей происходило растекание первой по площади последней и дальнейшее образование жидкостного мостика в нижней части частицы. Вследствие снижения значений физических свойств жидкостей при уменьшении массовой концентрации угольных частиц в составе суспензий с 50% до 1% уменьшаются и силы вязкостного трения. В связи с чем меньший объем падающей капли концентрировался на нижней границе частицы. Капли суспензий с меньшей массовой концентрацией угольных частиц в своем составе при столкновении с твердой частицей не только образовывали большее количество вторичных фрагментов, но и создавали больший угол их разлета.

Также при увеличении концентрации суспензии наблюдалось образование более крупных по размеру вторичных капель (рис. 2). Чем выше вязкость жидкости, тем более крупные фрагменты образовывались при вторичном распаде капель. Фрагменты быстро принимали сферическую форму. Вязкостные силы преобладали над силами инерции в капле, минимизируя изменение формы вторичных фрагментов. Поэтому после соударения не происходила дальнейшая фрагментация. Капли имели сферическую форму. Это не позволяло реализовывать разделение на более мелкие части. За счет этого увеличивалось количество крупных фрагментов, а маленьких, наоборот, снижалось. Такое явление приводило к снижению отношения площади до фрагментации и после.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 23-69-10006).

Литература

- [1] Chen H., Zhang Y., Zhang L., Liu J., Jin L., Ren A., Li Z. Indoor air pollution from coal combustion and tobacco smoke during the periconceptional period and risk for neural tube defects in offspring in five rural counties of Shanxi Province, China, 2010–2016 // *Environ. Int.* 2023. Vol. 171. P. 107728.
- [2] Kumar M., Karmakar S., Nimesh V. Statistical investigation of combustion and emission characteristics of biofuels according to their physical properties: A way to explore suitable alternative fuels // *Fuel*. 2024. Vol. 358. P. 130242.
- [3] Guo G., Lu K., Xu S., Yuan J., Bai T., Yang K., He Z. Effects of in-nozzle liquid fuel vortex cavitation on characteristics of flow and spray: Numerical research // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 2023. Vol. 148. P. 107040.
- [4] Shadrin E. Y., Anufriev I. S., Butakov E. B., Kopyev E. P., Alekseenko S. V., Maltsev L. I., Sharypov O. V. Coal-water slurry atomization in a new pneumatic nozzle and combustion in a low-power industrial burner // *Fuel*. 2021. Vol. 303. P. 121182.
- [5] Rioboo R., Marengo M., Tropea C. Time evolution of liquid drop impact onto solid, dry surfaces // *Exp. Fluids*. 2002. Vol. 33. P. 112–124.

Столкновение капель дистиллированной воды с поверхностями мембран

Исламова А.Г., Шуляев С.А., Стрижак П.А.
agi2@tpu.ru, osoaviahim123@gmail.com, pavelspa@tpu.ru
Томский политехнический университет,
634034, Российская Федерация, Томск, пр. Ленина, 30

Аннотация. Работа направлена на определение условий смачиваемости и налипания капель жидкости на мембраны различного типа. Результаты экспериментальных исследований позволили выделить два режима взаимодействия капель и мембран — растекание и разрушение. Определены фазы протекания основных процессов. Установлено, что при взаимодействии капли жидкости с поверхностью мембран граница между режимами растекания и разрушения смещается в сторону меньших чисел Вебера при увеличении гидрофобности и пористости.

Ключевые слова: мембрана, капля, взаимодействие, смачиваемость, растекание.

Введение. В современных условиях значительно возросли требования к выбрасываемым в атмосферу загрязняющим веществам. Предприятия оснащаются пылеулавливающими аппаратами и устройствами, различными по производительности и эффективности. В большинстве случаев используют многоступенчатые системы очистки, состоящие из последовательно установленных на пути прохождения загрязняющих веществ пылеосадительной камеры, циклона и фильтра. Анализ результатов исследования выбросов в атмосферу при сжигании угля на станциях показывает, что в выбросах содержится большое количество частиц размерами менее 10 мкм [1]. Такие частицы очень сложно удалять при помощи циклонных фильтров. В таких случаях перспективно применять мокрое пылеулавливание с последующей мембранной очисткой. Фильтрация аэрозолей на волокнистых фильтрах является одним из наиболее популярных методов отделения микрометровых и субмикронных частиц от газа [2]. Мембранные методы разделения и концентрирования сегодня широко применяются для защиты окружающей среды для удаления твердых или жидких примесей из отработанного газа, опреснения воды и чистки воды [3], а также при определении компонентов природных вод, атмосферного воздуха, технологических сред, биологических и медицинских препаратов [4]. Серьезной проблемой при использовании мембранных фильтров является конденсация влаги, приводящая к образованию капель воды на поверхности мембраны со стороны потока газовой фазы. При этом образовавшиеся капли воды поглощают определяемые газообразные компоненты и препятствуют процессу их диффузии через мембрану в поглотительный раствор. Целью настоящей работы являлось установление основных закономерностей взаимодействия капель жидкости с различными по свойствам смачиваемости и пористости мембран,

соответствующих типичным фильтрам дымовых газов при генерации тепловой энергии.

Методы и материалы. Использовались 4 вида мембран с различными характеристиками смачиваемости и пористости. Смачиваемость образцов определялась при помощи прибора для измерения краевого угла DSA25S. Согласно рекомендациям [5], объем капель при установлении контактных углов был постоянен и равен 5 мкл. Типичные фотоизображения капель и результаты измерений представлены на рис. 1. Экспериментальные исследования процес-

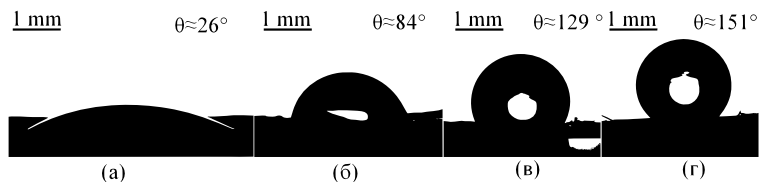


Рис. 1. Статические контактные углы исследуемых поверхностей мембран: а — № 1; б — № 2; в — № 3; г — № 4.

са взаимодействия капель жидкости с мембранной поверхностью проводились с помощью высокоскоростной видеосъемки теневых изображений. Подробная методика процесса регистрации представлена в [6]. Для обобщения результатов исследования использовался безразмерный параметр — число Вебера (We). В качестве исследуемой жидкости использовалась дистиллированная вода в связи с постоянными и известными свойствами. Исследования проводились при нормальных условиях (температура 20 °С, влажность 30–35%).

Результаты исследования. По результатам анализа видеogramм процесса столкновения капель с гидрофильными и гидрофобными мембранами выделены два режима взаимодействия: растекание и разрушение. Построена режимная карта столкновения капель с поверхностью мембран при варьировании чисел Вебера (рис. 2). С увеличением скорости взаимодействия характеристики деформации капли в большей степени зависят от числа Вебера. Качественно процесс разрушения капли во всех режимах имеет схожий вид. По результатам сравнительного анализа установлено, что при взаимодействии капли жидкости с поверхностью мембран № 1–4 граница между режимами растекания и разрушения смещается в сторону меньших чисел Вебера при ухудшении смачиваемости (рис. 2). Соответствующие эффекты обусловлены выделенными выше характеристиками смачиваемости мембран, а также их пористостью.

Одним из важных параметров, описывающих взаимодействие капли с твердой поверхностью, является максимальный диаметр растекания капли. На ри-

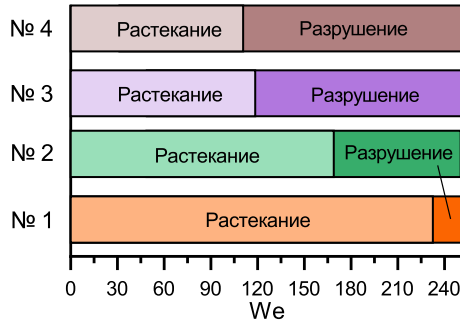


Рис. 2. Карта режимов столкновения капель воды с поверхностью мембран при варьировании числа Вебера.

сунке 3 приведены установленные значения отношения максимального диаметра растекания D_{max} к начальному размеру каплей D_0 .

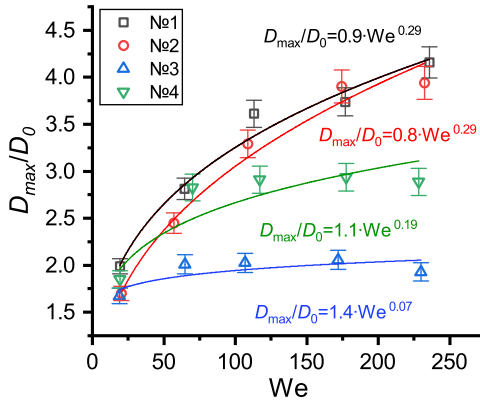


Рис. 3. Отношения максимального диаметра растекания к начальному диаметру при различных числах Вебера.

Независимо от того, есть ли воздушная подушка на пограничном слое капли в фазе растекания (между ламелией и образцом) или нет, вязкая диссипация внутри жидкости составляет около 50% начальной кинетической энергии [7]. В

условиях прилипания вязкая диссипация в сдвиговом пограничном слое связана только с силами инерции и вязкого трения, а не со смачиваемостью поверхности [7]. Поэтому значения максимального диаметра растекания для образцов 1–4 при числе Вебера менее 30 лежит в пределах погрешности. С увеличением We различия в величинах D_{max}/D_0 возрастает. При этом минимальное отношение диаметров зарегистрировано для образца № 3. По результатам анализа видеogramм было зарегистрировано, что с увеличением скорости столкновения капля сразу после взаимодействия с мембраной под действием инерционных сил частично впитывается. Это обусловлено высокой пористостью поверхности. Определено, что кривые D_{max}/D_0 можно описать степенной зависимостью $D_{max}/D_0 = aWe^b$, где a и b — эмпирические коэффициенты. При увеличении числа Вебера величина D_{max}/D_0 сначала возрастает. С дальнейшим увеличением кинетической энергии она уравнивается большей энергией вязкостной диссипации и поверхностной энергией капли. Сделано предположение о том, что отношения максимального диаметра растекания к начальному диаметру при $We > 30$ зависит от пористости поверхности и частично от смачиваемости.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 23-71-10040, <https://rscf.ru/project/23-71-10040/>).

Литература

- [1] Ninomiya Y., Zhang L., Sato A., Dong Z. Influence of coal particle size on particulate matter emission and its chemical species produced during coal combustion // Fuel Process. Technol. 2004. Vol. 85. P. 1065–1088.
- [2] Gac J.M., Jackiewicz A., Werner L., Jakubiak S. Consecutive filtration of solid particles and droplets in fibrous filters // Sep. Purif. Technol. 2016. Vol. 170. P. 234–240.
- [3] Zhang R., Li Y., Su Y., Zhao X., Liu Y., Fan X., Ma T., Jiang Z. Engineering amphiphilic nanofiltration membrane surfaces with a multi-defense mechanism for improved antifouling performances // J. Mater. Chem. A. 2016. Vol. 4. P. 7892–7902.
- [4] Yu L. Y., Xu Z. L., Shen H. M., Yang H. Preparation and characterization of PVDF-SiO₂ composite hollow fiber UF membrane by sol-gel method // J. Memb. Sci. 2009. Vol. 337. P. 257–265.
- [5] Huhtamäki T., Tian X., Korhonen J.T., Ras R.H.A.A. Surface-wetting characterization using contact-angle measurements // Nat. Protoc. 2018. Vol. 13. P. 1521–1538.
- [6] Islamova A.G., Kerimbekova S.A., Shlegel N.E., Strizhak P.A. Droplet-droplet, droplet-particle, and droplet-substrate collision behavior // Powder Technol. 2022. Vol. 403. P. 117371.
- [7] Zhang H., Zhang X., Yi X., He F., Niu F., Hao P. Effect of wettability on droplet impact: Spreading and splashing // Exp. Therm. Fluid Sci. 2021. Vol. 124. P. 110369.

Волновая динамика в геофизических процессах

Казанков В.К.,¹ Перегудин С.И.,² Холодова С.Е.¹

v.kazankov98@gmail.com, s.peregudin@spbu.ru, kholidovase@yandex.ru

¹Университет ИТМО,

197101, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49/А,

²Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Исследуются геофизические процессы во вращающейся электропроводящей несжимаемой жидкости с учетом топографии, ограничивающей слой поверхности и диссипативных эффектов диффузии магнитного поля и силы Кориолиса. Рассматриваемая краевая задача магнитной гидродинамики, описывающая длинные волны малой амплитуды, редуцируется к интегрированию одного скалярного уравнения для модифицированной функции, описывающей возмущение свободной поверхности жидкого слоя, для которого построено точное аналитическое решение, при этом решение дисперсионного уравнения сводится к поиску корней полинома шестой степени с комплексными коэффициентами, с целью решения которого представляется численный метод и алгоритм, созданный на основе машинного обучения и итерационного численного метода для нахождения всех ветвей частоты колебаний. Проводится анализ зависимости решения от параметра Кориолиса, волнового числа и магнитного числа Рейнольдса, позволяющий оценить качественно и численно динамику процесса.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, теория волн, электропроводящая жидкость, несжимаемая жидкость, математическое моделирование, диффузия магнитного поля, эффекты диссипации.

Представленное исследование посвящено теоретическому изучению волновых геофизических процессов в жидких электропроводящих средах с диссипацией, подверженных действию магнитного поля и силы Кориолиса.

Известно, что при движении проводящих сред в магнитном поле проявляются эффекты взаимодействия механических и электромагнитных полей, обусловленные пондеромоторными силами и упругими перемещениями. Все возможные проявления такого взаимодействия являются предметом исследования одного из разделов механики сплошных сред — магнитной гидродинамики, значительный вклад в развитие которой внесли Х. Альфвен, Г. Браувер, Т. Каулинг, А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов, Дж. Шерклиф и другие исследователи, изучавшие распространение малых возмущений в идеальных средах и получившие решения классических для гидродинамики задач течения проводящих жидкостей в каналах и трубах. Потребности практики привели к необходимости разработки упрощенных математических моделей магнито-гидродинамических процессов, более приспособленных к решению конкретных задач. В этом направлении известны модели слабо проводящих сред, развитые в работах С.И. Брагинского, Г. Брановера, А.Г. Куликовского, Г.А. Любимо-

ва, а также асимптотически вырожденные модели магнитной гидродинамики при малых и больших числах Рейнольдса. В рамках отмеченных приближений удалось построить решение многих важных для практики задач течения проводящих сред и исследовать процессы распространения линейных магнитогидродинамических волн, как в однородных, так и в неоднородных средах. Численное решение задач кинематического динамо для модельных течений в разных геометриях представлено, например, в сфере, в плоском и сферическом слое. Вследствие того, что генерация магнитного поля может быть обусловлена динамикой различных гидродинамических полей, для выяснения действительной картины поля магнитогидродинамических характеристик кинематическая теория является недостаточной, поэтому представляет интерес развитие различных вариантов полной гидромагнитной теории. На настоящий момент изучены два основных вида магнитогидродинамического динамо: двухмасштабное и почти симметричное большой проводимости. Развитие второго вида динамо в большей степени определяется работами С.И. Брагинского. Большое распространение получило альфа-динамо, где самовозбуждение магнитного поля происходит с преобладающим правовинтовым или левовинтовым движением. В институте физики Академии Наук Латвии проводилось экспериментальное исследование, доказавшее зависимость альфа-эффекта от магнитного числа Рейнольдса, при устремлении которого к бесконечности ЭДС альфа-эффекта стремится к нулю. Данное положение приводит к важному выводу: сильное влияние на величину альфа-эффекта магнитного числа Рейнольдса не позволяет надеяться на его использование для генерации сильных магнитных полей. Полученные результаты позволяют сделать предположение о значениях магнитного числа Рейнольдса, при которых альфа-эффект имеет место. В неспиральных полях скорости для действия динамо необходимы большие значения магнитного числа Рейнольдса.

В представленном исследовании, в отличие от известных на настоящий момент, при проведении математического моделирования геофизических процессов учитывается полная система магнитогидродинамических уравнений с соответствующими диссипативными факторами. Анализ динамических эффектов в геосредах с учетом неоднородности плотности представлен в работах И.М. Кирко. В данном исследовании проводится решение краевой задачи с учетом топографических особенностей ограничивающей жидкий слой поверхности и диссипативных эффектов, обусловленных процессом диффузии магнитного поля [1]–[3].

Литература

- [1] Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. Mathematical modeling of the dynamics of a rotating layer of an electrically conducting fluid with magnetic field diffusion effects // Springer Geology. 2021. P. 377–387.

- [2] Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1359. No. 1. P. 012118.
- [3] Холодова С.Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Вычислительная математика и математическая физика. 2008. Т. 48. № 5. С. 882–898.

Тепловая защита центрального тела многокамерной двигательной установки на основе явления термоэлектронной эмиссии

Каун Ю.В., Колычев А.В., Архипов П.А.

kaun_iuv@voenmeh.ru, kolychev_av@voenmeh.ru, arhipov.voenmeh@gmail.com

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Объектом исследования являются метод уменьшения температуры элементов высокоскоростных летательных аппаратов. Цель работы заключается в конструктивной реализации метода термоэмиссионной тепловой защиты применительно к элементам высокоскоростных летательных аппаратов. Метод относится к ракетно-космической технике, а именно к устройству двигательных установок. В процессе выполнения данной работы был достигнут определенный технический результат, который заключается в увеличении надежности элементов высокоскоростных летательных аппаратов за счет его термоэмиссионного охлаждения. Рассмотрено применение рассматриваемого метода при охлаждении элементов высокоскоростных летательных аппаратов, в частности центральных тел двигательных установок любой формы, в том числе и осесимметричной с кольцевым соплом. Исследуемое нововведение заключается в использовании метода термоэмиссионной тепловой защиты для снятия термических напряжений, которые препятствуют многократной работе элементов высокоскоростных летательных аппаратов.

Ключевые слова: термоэмиссионное охлаждение, тепловые нагрузки, работа выхода электронов, пористые материалы, термоэмиссия, термоэмиссионное охлаждение, высокоскоростные течения, ракетно-космическая техника, энергетические установки.

Проектирование летательного аппарата, движущегося в плотных слоях атмосферы в высокоэнтальпийных потоках (с высокой сверхзвуковой скоростью), требует учета особенностей движения тела при таких условиях [1]. Движению тела с высокой сверхзвуковой скоростью, характерно взаимодействие сильных ударных волн с пограничным слоем у поверхности тела, вязкое взаимодействие внешнего невязкого потока с пограничным слоем, интенсивный конвективный и радиационный нагрев обтекаемого тела с появлением аэродинамической эрозии (плавление, испарение, шелушение и др.), унос массы с обтекаемой поверх-

ности. Торможение газа в ударном слое, образованном головной ударной волной, сопровождается возникновением области с очень высокой температурой (десятки тысяч градусов) [2], в которых протекают многочисленные физико-химические процессы (возбуждение колебательных степеней свободы молекул, диссоциация, ионизация, излучение и др.). Возникающие физико-химические процессы возможно использовать в качестве преимущества, внося допустимые (с точки зрения обтекания) изменения в конструкцию летательного аппарата [3]. При заданных режимах обтекания возможно использование эмиссионного охлаждения — эффекта охлаждения, сопровождающий термоэлектронную эмиссию (испускание электронов горячим материалом). Чем больше термоэмиссия, тем выше охлаждение. Достоверно были получены результаты в 70-80 гг. в СССР и США. При КПД 10–25% от подводимого нагрева, эмиссионное охлаждение непосредственно оболочки (катода) может достигать 50–75% [4]. Термоэмиссионное охлаждение может быть реализовано двумя способами. Первый — это закрытая схема, при которой термоэмиссионное охлаждение оболочки летательного аппарата осуществляется во внутреннем объеме — в небольшом зазоре между внешней оболочкой передней кромки (катодом) и внутренней оболочкой (анодом). Для этого необходимо на катод нанести слой вольфрама и следующим слоем — цезий, на анод наносится никель/молибден. При температуре свыше 2000 °С, плазма цезия, которая формируется в зазоре обеспечивает высокую термоэмиссию, эффективность которой зависит от рабочей температуры (от режима полета). Второй — это открытая схема, при которой катод и анод расположены снаружи конструкции и термоэмиссионное охлаждение осуществляется с помощью переноса электронов высокоэнтальпийным потоком, обтекающим летательный аппарат [2]. Техническая задача заключается в снижении массы требуемого хладагента в единицу времени за счет термоэмиссионного охлаждения. Центральное тело находится в тепловом контакте с коллектором. Коллектор выполнен по замкнутой схеме. Коллектор гидравлически последовательно через клапан связан с емкостью для хранения под давлением смеси инертного газа и легкоионизируемой добавки. Коллектор состоит из катодной и анодной стенки, разделенных электроизолирующими элементами. Катодная стенка прилегает к поверхности центрального тела и отделена на расстояние от 0,3 мм до 1 мм от анодной стенки электроизолирующими элементами. Анодная стенка находится в тепловом контакте с тепловым аккумулятором с высокой теплоемкостью. В качестве легкоионизируемой добавки может использоваться калий. В качестве инертного газа в коллекторе может применяться гелий. Применение термоэмиссионного охлаждения позволяет обеспечить снижение перепада температурных напряжений и повышение ресурса центрального тела сопла. При реализации изобретения достигается технический результат, который заключается в увеличении надежности многокамерной двигательной установки с центральным телом за счет его

термоэмиссионного охлаждения. Данный метод охлаждения можно применять при охлаждении центральных тел двигательных любой формы, в том числе и осесимметричной с кольцевым соплом.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Создание и научное обоснование методологии аэрогазодинамического проектирования общего облика двигательных энергетических установок, технологий разработки массового производства беспилотной аэрокосмической техники для решения задач в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях»), грант № FZWF-2024-0003.

Литература

- [1] Кольчев А. В., Керножицкий В. А. Тепловая защита гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА) с использованием явления термоэлектронной эмиссии // Решетневские чтения. 2009. Т. 1. № 13. С. 29–30.
- [2] Керножицкий В. А., Кольчев А. В. Концепция развития методов и средств преодоления теплового барьера // Информация и космос. 2011. № 2. С. 50–53.
- [3] Bak J. et al. Experimental study of electron transpiration cooling with a 2-kW laser heating system // AIAA SCITECH 2022 Forum. 2022. P. 0983.
- [4] Campbell N. S. et al. Evaluation of computational models for electron transpiration cooling // Aerospace. 2021. V. 8. No. 9. P. 243.

Математическая модель динамики «классических» и «сложных» деформируемых капель под действием электромагнитного поля

Киреев В. Н.¹, Шалабаева Б. С.², Джайчибеков Н. Ж.²
shalabaeva.b.s@mail.ru

¹Башкирский государственный университет,
450076, Российская Федерация, Уфа, ул. Заки Валиди, 32,

²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
010008, Казахстан, Астана, ул. Каньша Сатпаева, 2

Аннотация. Построена электрогидродинамическая математическая модель «сложной» деформируемой капли во внешнем переменном электрическом поле. В модели предполагается наличие трех несмешивающихся жидких фаз: капля, оболочка капли и несущая фаза. Модель «классической» капли является частным случаем модели «сложной» капли. Гидродинамическая модель процесса состоит из уравнений неразрывности для каждой из фаз и уравнений Навье–Стокса, в которых добавлены члены, описывающие силы поверхностного натяжения и электрические силы. Для отслеживания положения границы раздела введена функция VOF (Volume-of-Fluid). Показано, что созданный на основе метода Volume of Fluid программный код адекватно моделирует положение границы раздела фаз.

Ключевые слова: электрогидродинамическая математическая модель, переменное электрическое поле, деформация капли, вязкая несжимаемая диэлектрическая жидкость.

Использование электрического поля для активного контроля над движением и деформацией капель в микрофлюидных устройствах является перспективной технологией в различных отраслях науки и промышленности (например, в фармакологии, биохимии и медицине). На нефтяных месторождениях при подготовке нефти к транспортировке и на нефтеперерабатывающих заводах осуществляется деэмульсация нефти [1, 2, 3]. Под действием электрического поля диспергированные в нефти капли воды поляризуются, притягиваются друг к другу, коалесцируют и образовавшиеся в результате более крупные капли осаждаются. Кроме того, под действием переменного электрического поля капли воды начинают колебаться, постоянно изменяя свою форму, в результате чего адсорбционные оболочки капель растягиваются, происходит уменьшение их толщины, что в конечном итоге способствует процессу коалесценции капель [4].

Детальное исследование физических механизмов взаимодействия капель воды с электромагнитными полями является актуальной научной задачей, решение которой позволит повысить эффективность работы существующих промышленных электродегидраторов и будет способствовать разработке новых технологий деэмульсации с использованием электромагнитных полей.

В данной работе положение межфазной границы капля-окружающая жидкость отслеживается с использованием метода Volume-of-Fluid [5]. Предполагая, что фазы являются несмешивающимися жидкостями, вся система будет рассматриваться как одна жидкость, свойства которой изменяются скачкообразно при переходе через межфазную границу. Для этого вводится характеристическая функция C , которая в каждом контрольном объеме определяется следующим образом:

$$C = \begin{cases} 1, & \text{внутри капли,} \\ 0 < C < 1, & \text{на межфазной границе,} \\ 0, & \text{в окружающей жидкости.} \end{cases}$$

Используя введенную характеристическую функцию C , можно вычислить гидродинамические и электромагнитные параметры среды в каждом контрольном объеме

$$\begin{aligned} \rho &= (1 - C)\rho_m + C\rho_d, & \eta &= (1 - C)\eta_m + C\eta_d, \\ \varepsilon &= (1 - C)\varepsilon_m + C\varepsilon_d, & \mu &= (1 - C)\mu_m + C\mu_d, \end{aligned}$$

где ρ — плотность, η — кинематическая вязкость, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость. Индексы « d » и « m » относятся к капле и окружающей среде, соответственно. Эволюция границы раздела во времени описывается

уравнением переноса

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(C\mathbf{u}) = 0,$$

где \mathbf{u} — вектор скорости жидкости.

Следует отметить, что при численном решении записанного выше уравнения переноса, как правило, имеет место сильная численная диффузия, которая приводит к размытию границы. Чтобы избежать этого используется следующее модифицированное уравнение переноса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(C\mathbf{u} + \nabla[C(1-C)\mathbf{u}_c]) = 0,$$

где \mathbf{u}_c — искусственная скорость, направленная по нормали к границе, величина которой определяется пользователем. Кроме того, ограниченность C в численной модели будет обеспечиваться применением метода MULES (Multidimensional Universal Limiter for Explicit Solutions), предложенного в [2]. Гидродинамическая модель, описывающая течение двухфазной системы (капля-окружающая жидкость) во внешнем электромагнитном поле состоит из уравнений неразрывности и Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m) = 0,$$

где p — давление, \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, \mathbf{f}_s — вектор плотности сил поверхностного натяжения, \mathbf{f}_e и \mathbf{f}_m — векторы плотности электрических и магнитных сил (сила Лоренца). Для вычисления сил поверхностного натяжения на границе капли применяется модель Continuum Surface Force [6] $\mathbf{f}_s = \gamma \cdot k \cdot \nabla C = -\gamma \cdot \nabla \left(\frac{\nabla C}{|\nabla C|} \right) \cdot \nabla C$, где γ — коэффициент поверхностного натяжения, k — кривизна. Уравнение для вектора магнитной индукции \mathbf{B} выводится из уравнения Максвелла и закона Ома:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B},$$

где σ — электропроводность.

Зная распределение магнитного поля в расчетной области, выражение для вектора плотности магнитных сил запишется в виде

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu}.$$

Для вектора плотности электрических сил будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \rho_f \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \rho_f \mathbf{E} + \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \\ &= \rho_f \mathbf{E} + \frac{1}{2} \nabla [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \nabla \varepsilon, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$ — вектор поляризации, ρ_f — объемная плотность свободных зарядов, ε_0 — электрическая постоянная. Последнее выражения f_e получено с помощью известного векторного тождества

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) = (\mathbf{E} \times \nabla) \times \mathbf{E} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$$

с учетом того, что электрическое поле является безвихревым, т. е. $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Таким образом в данной работе построена электрогидродинамическая математическая модель «сложной» деформируемой капли во внешнем переменном электрическом поле. В модели предполагается наличие трех несмешивающихся жидких фаз: капля, оболочка капли и несущая фаза. Все фазы считаются вязкими несжимаемыми диэлектрическими жидкостями, причем диэлектриками не идеальными, а диэлектриками с потерями. Для каждой из фаз задаются плотность, вязкость, диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь и электрическая проводимость. Модель «классической» капли является частным случаем модели «сложной» капли, когда толщина оболочки принимается равной нулю, и она не оказывает никакого силового воздействия на процесс деформации границы раздела капли и несущей фазы. Проведенные оценки показали, что при выбранных характерных параметрах задачи (диаметр капли меньше 1 см, частота электрического поля 120–180 Гц) скорость деформации границы раздела много меньше скорости света в жидкости. Поскольку все среды считаются немагнитными, индуцированными вихревыми токами можно пренебречь и электрическое поле будет безвихревым. Система уравнений Максвелла в этом случае сводится к двум уравнениям относительно напряженности электрического поля и электрического потенциала в квазистатической форме. Считая, что свободные заряды в расчетной области отсутствуют, градиент электрического потенциала во всех трех фазах удовлетворяет уравнению Лапласа. Для нахождения поверхностных зарядов, возникающих на границах раздела фаз (капля–оболочка и оболочка–окружающая жидкость), используются граничные условия непрерывности для тока смещения. Поскольку фазы имеют различные электрические свойства, на границах фаз действуют электрические силы, которые математически описываются с помощью тензора напряжений Максвелла. Гидродинамическая модель процесса состоит из уравнений неразрывности для каждой из фаз и уравнений Навье–Стокса, в которых добавлены члены, описывающие силы поверхностного натяжения и электриче-

ские силы. Для отслеживания положения границы раздела введена функция VOF (Volume-of-Fluid), характеризующая объем одной из жидкостей в каждой вычислительной ячейке. Функция VOF удовлетворяют уравнению конвективного переноса (адвекции) и используется для вычисления свойств среды в ячейке. Для вычисления кривизны поверхности раздела и учета поверхностного натяжения используется модель CSF (Continuum Surface Force). Результаты численного моделирования показали, что во всех тестах программного кода на основе метода Volume of Fluid первоначальная форма сохраняется с достаточной степенью точностью — в первой и второй сериях экспериментов отклонение порядка 1%, а в третьей серии отклонение не превышает 5%. Таким образом показано, что созданный на основе метода Volume of Fluid программный код адекватно моделирует положение границы раздела фаз. Проведённый анализ колебания капли воды в воздухе под действием электрического поля, частота электрического поля $\omega = 120$ Гц показал что наиболее интенсивные колебания происходят на больших временах.

На рисунках 1 и 2 представлены изменённая (фиолетовая) и изначальная (жёлтая) формы капли. Капля входит в резонанс постепенно; в процессе осцил-

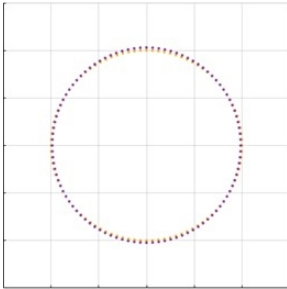


Рис. 1. Форма капли воды в момент времени $t=0.0165$ с.

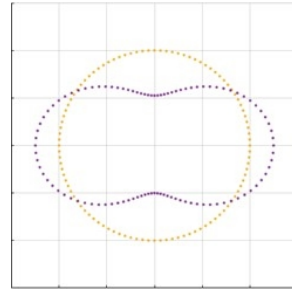


Рис. 2. Форма капли воды в момент времени $t=0.575$ с.

ляций, капля практически принимает первоначальную форму (рис. 1) и период осцилляций примерно равен $\tau \approx 0.0165$ с; период осцилляций капли уменьшается со временем; наблюдается тенденция к сплющиванию капли на больших временах (рис. 2), однако, благодаря поверхностному натяжению, капля продолжает колебаться; определено при каких параметрах системы капли будут разрушаться.

Литература

- [1] Fletcher C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. Springer, New York, 1998.

- [2] Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 39. Iss. 1. P. 201–225.
- [3] Kothe D. B., Brackbill J. U., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. Vol. 100. Iss. 2. P. 335–354.
- [4] Lac E., Homsy G. M. Axisymmetric deformation and stability of a viscous drop in a steady electric field // Journal of Fluid Mechanics. 2007. Vol. 590. P. 239–264.
- [5] Torza S., Cox R. G., Mason S. G. Electrohydrodynamic Deformation and Burst of Liquid Drops // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1971. Vol. 269. Iss. 1198. P. 295–319.
- [6] OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox, User Guide. 2008.

Газодинамические процессы в ракетном двигателе на твердом топливе при отсечке тяги

Кострова М.С., Тетерина И.В.

margarita_kostrova@inbox.ru, tetarina_iv@voenmeh.ru

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-ая Красноармейская, 1

Аннотация. Рассматриваются вопросы регулирования тяги ракетного двигателя на твердом топливе. Проводится численное моделирование газодинамических процессов, сопровождающих процесс регулирования тяги. Анализируется воздействие высокотемпературных продуктов сгорания с конденсированной фазой на ограничивающие поверхности конструкции исследуемого объекта.

Ключевые слова: ракетный двигатель, отсечка тяги, численное моделирование, газодинамические процессы.

Ракетные двигатели на твердом топливе (РДТТ) получили широкое распространение в ракетостроении. Это объясняется их эксплуатационными (постоянная готовность к пуску, простота обслуживания), технологическими (простота конструкции) и энергетическими (повышенное содержание внутренней энергии топлива в единицу объема) преимуществами. Однако существенным недостатком таких энергоустановок в сравнении с жидкостными ракетными двигателями является сложность регулирования тяговых характеристик двигательной установки во время работы. Для решения данной проблемы и усовершенствования двигателя существуют методы, позволяющие изменять или полностью обнулять тягу. Одним из таких методов является отсечка тяги. Поскольку существует ряд задач, когда необходимо перезапустить двигатель или полностью его отключить, использование отсечки (обнуления) тяги и исследование процессов при ее реализации остается актуальным вопросом.

При рассмотрении основных уравнений тяговых характеристик РДТТ можно сделать следующий вывод: практически единственным способом регулирования тяги в таких двигателях является изменение расхода рабочего тела. Это может быть осуществлено несколькими способами и их комбинациями. Основными из них являются: открытие дополнительных сопел или окон; отделение части двигателя; впрыск охладителя в камеру сгорания; использование реверсивных устройств.

В данной работе рассматривается метод регулирования тяги путем открытия дополнительных сопел, расположенных на переднем днище камеры двигателя. Отсечка тяги путем открытия дополнительных сопел относится к методам, позволяющим дискретно изменять энергетические параметры двигателя. Управляемой целевой функцией при этом является суммарный импульс [1]. Преимуществом данного способа, в сравнении с методами непрерывного управления параметрами, является относительно простая конструкция и простые алгоритмы управления.

Противотяга, возникающая при открытии отверстий (сопел), изменяет свою величину, превышая тягу основного сопла. Открытие дополнительных отверстий (двух или более) в камере РДТТ приводит к снижению давления, поскольку часть продуктов сгорания начинает истекать в направлении, противоположном истечению газов из соплового блока двигателя. Всё это формирует особую нестационарную газодинамическую картину течения как внутри двигателя, так и снаружи, которая и является предметом исследования в данной работе.

Как известно, современные средства вычислительного моделирования позволяют эффективно изучать физическую картину процессов, протекающих в различных технических устройствах и на разных режимах работы. Эти технологии дают возможность проанализировать практически все газодинамические параметры в пространственном нестационарном течении. В данной работе для исследования используются средства программного комплекса Ansys.

В качестве объекта исследования выбран РДТТ с утопленной конфигурацией соплового блока и четырьмя отверстиями отсечки тяги, расположенными в области переднего днища [2]. Кроме внутреннего объема двигателя в расчетную область включены внешняя среда в области отверстий отсечки и в области истечения из сопла. В целях экономии вычислительных ресурсов при расчетах используется не вся геометрическая модель, а сектор в 45 градусов.

Для описания газодинамических процессов используется система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Рейнольдсу. Для замыкания уравнений используется $k - \omega$ SST модель турбулентности [3, 4]. Горение твердого топлива не рассматривается и заменяется условием нормального вдува с массоподающей поверхности заряда топлива. В качестве рабочего тела используется совершенный газ со свойствами продуктов сгорания, характерными для исследуемого типа двигателя, в том числе, с учетом наличия конденсированной фазы [5].

Моделирование проводится в два этапа. На первом этапе численно решается задача установления штатного режима работы двигателя при закрытом отверстии отсечки тяги. На втором этапе открывается отверстие отсечки, из которого формируется сверхзвуковое истечение в окружающую среду, происходит перестройка картины течения в самом двигателе и в истекающей из соплового блока струе.

В результате проведенного вычислительного моделирования процессов, сопровождающих работу системы отсечки тяги ракетного двигателя, получены нестационарные поля распределения газодинамических и теплофизических характеристик во внешней среде и внутри двигателя, позволяющие проанализировать воздействие высокотемпературных продуктов сгорания с конденсированной фазой на ограничивающие поверхности конструкции исследуемого объекта.

Литература

- [1] Соколовский М. И., Петренко В. И., Зыков Г. А. и др. Управляемые энергетические установки на твердом топливе. М.: Машиностроение, 2003. 464 с.
- [2] Липанов А. М., Алиев А. В. Проектирование ракетных двигателей твердого топлива: Учебник для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1995. 400 с.
- [3] Юн А. А. Теория и практика моделирования турбулентных течений с теплообменом, смешением, химическими реакциями и двухфазных течений: учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2009. 273 с.
- [4] Гарбарук А. В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 88 с.
- [5] Шишков А. А. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива: Справочник. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.

Моделирование неустойчивости винтового вихря на основе локально-индукционного приближения

Куйбин П. А.

pak0659@mail.ru

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1

Аннотация. Рассматривается задача о неустойчивости винтового вихря, проявляющейся в искажении исходной формы, сближении витков спирали, формировании петлеобразных структур, являющихся предвестником последующего перезамыкания. Для моделирования используется локально-индукционное приближение. Выявлены характеристики параметров неустойчивости в зависимости от параметров вихря.

Ключевые слова: вихревые течения, неустойчивость, локально-индукционное приближение.

Введение. Вихревые течения широко распространены в природе и в технических приложениях. Например, за рабочим колесом гидротурбины, работающей в неоптимальных режимах, поток имеет достаточно сильную закрутку, что приводит к формированию крупномасштабного винтообразного вихря, совершающего прецессионное движение. В коническом участке отсасывающей трубы поток становится неустойчивым, что проявляется чаще всего в виде вихревого распада спирального типа. В исследованиях на упрощенной модели отсасывающей трубы было обнаружено, что сам винтовой вихрь может быть неустойчивым. Соседние витки вихревой спирали сближаются друг с другом и происходит процесс вихревого перезамыкания с образованием вихревых колец [1]. Явление неустойчивости и перезамыкания наблюдалось и в более реалистичной модели гидротурбины [2]. Обычно вихревое перезамыкание упоминается в связи с исследованиями по сверхтекучим жидкостям (см., например, [3, 4]). В этой области были разработаны очень серьезные теории. Одно из интересных открытий было сделано Hasimoto [5], который установил взаимосвязь между локально-индукционным приближением для описания вихревого движения и нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). Существует множество точных решений НУШ. В частности, так называемое бризерное решение (breather solution) было найдено Кузнецовым [6]. Salman [7] продемонстрировал, что бризерное решение может предсказать ситуацию, когда возникает явление перезамыкания. Взяв это решение (спиральный вихрь) в качестве начального состояния для расчетов на основе закона Био–Савара, Salman получил самоперезамыкание винтового вихря и генерацию вихревых колец, аналогично экспериментам в [1]. В то же время Salman показал, что состояние, предшествующее перезамыканию можно рассчитать на основе более простого и экономичного подхода — локально-индукционного приближения.

Постановка задачи. В реальных турбинах, как и в упомянутых выше экспериментальных работах [1, 2] исходный вихрь имеет форму конической винтовой спирали. В данной работе ставится цель изучения неустойчивости именно конического винтового вихря на возмущения, приводящие к самоперезамыканию.

Стандартный подход к изучению динамики вихревых нитей основан на применении закона Био–Савара, согласно которому скорость движения малого участка вихревой нити определяется через интеграл индуцированной скорости от всех элементарных участков нити. В локально-индукционном приложении нелокальным вкладом пренебрегают и записывают скорость движения участка вихревой нити в виде [8, 9]:

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \mathbf{b} \left(\ln \frac{2L}{\varepsilon} - 1 \right), \quad (1)$$

где Γ — интенсивность вихревой нити, \varkappa — кривизна, $2L$ — длина локального участка, ε — радиус вихревой нити, \mathbf{b} — единичный вектор бинормали. Вводя множитель $\frac{\Gamma}{4\pi}(\ln \frac{2L}{\varepsilon} - 1)$ в масштаб времени и учитывая формулы Френе, записывают локально-индукционное уравнение (Local Induction Equation — LIE) для векторной функции \mathbf{X} , описывающей геометрию нити,

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{X}' \times \mathbf{X}'' . \quad (2)$$

Здесь штрих означает производную вдоль дуговой координаты.

Чаще всего уравнение вида (2) с помощью преобразования Hasimoto [5] приводят к нелинейному уравнению Шредингера и исследуют волновые решения, в том числе — солитонные. При этом решение ищется в переменных «кривизна — кручение». Для специального вида вихрей, вытянутых вдоль одной оси z , Van Gorder [10] преобразовал уравнение (2) к одному нелинейному уравнению на комплексную функцию $\Phi = x(z, t) + iy(z, t)$.

В нашем случае целесообразно использовать непосредственно локально-индукционное уравнение и описывать вихревую нить в декартовых координатах, задавая зависимости вида:

$$\begin{aligned} x &= r(z, t) \cos(\lambda z), \\ y &= r(z, t) \sin(\lambda z). \end{aligned} \quad (3)$$

Координата z направлена вдоль потока. Дуговая координата выражается через интеграл

$$s = \int_{z_0}^z \sqrt{(\partial x / \partial z)^2 + (\partial y / \partial z)^2 + 1} dz.$$

Моделирование динамики вихря. В качестве начального условия рассмотрим винтовой вихрь, радиус спирали которого нарастает по закону гиперболического тангенса

$$r_0(z) = 0.5\{1 + \tanh[k(z - h)]\}. \quad (4)$$

С учетом (3) такая зависимость позволяет сплечь полубесконечный прямолинейный вихрь с полубесконечным цилиндрическим винтовым вихрем. Данная геометрическая форма вихря может моделировать структуру, возникающую при спиральном распаде вихря. Величина $2\pi/\lambda$ в (3) — это шаг винтовой спирали, а коэффициент k в (4) характеризует быстроту смены радиуса от нуля до единицы. На расстоянии $4.6/k$ слева от точки перегиба, $z = h$, радиус отличается на 10^{-6} от нуля, и от единицы справа от точки перегиба. Граничные условия для уравнения (2) ставятся при $z \rightarrow \pm\infty$, а при численной реализации,

соответственно при $z = h \pm 5/k$. На левой границе — нулевые условия:

$$\mathbf{X}|_{z \rightarrow -\infty} = \mathbf{X}'|_{z \rightarrow -\infty} = 0.$$

На правой границе — условия перехода в классический винтовой вихрь:

$$\mathbf{X}(s+ds)|_{z \rightarrow \infty} = A(ds)\mathbf{X}(s)|_{z \rightarrow \infty} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'(s+ds)|_{z \rightarrow \infty} = A(ds)\mathbf{X}'(s)|_{z \rightarrow \infty},$$

где A — матрица поворота вдоль винтовой спирали

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\lambda dz) & -\sin(\lambda dz) & 0 \\ \sin(\lambda dz) & \cos(\lambda dz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dz = ds/\sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

Для интегрирования уравнения (2) могут применяться различные методы. Из-за нелинейности конечно-разностная аппроксимация приводит к неустойчивости расчетов. Для вычисления производных необходимо сглаживание массивов данных, в частности путем сплайн-аппроксимации. Но стандартного кубического сплайна здесь недостаточно, так как вторая производная при этом будет представлена кусочно-линейной функцией. Остановимся на аппроксимации сплайном из полиномов четвертого порядка. Интегрирование по времени осуществляется простейшим неявным методом Рунге–Кутты — модифицированным методом Эйлера «с пересчетом» второго порядка.

Проведена серия расчетов с шагом винтовой спирали $2\pi/\lambda = 1, 2, 3$ и параметром $k = 1, 1.5, 2$. При развитии процесса спираль начинает искажаться и с течением времени в окрестности точки перегиба начинается сближение участков витков спирали и формирование петли, являющейся предвестником вихревого перезамыкания. Само перезамыкание методом локально-индукционного приближения смоделировать не удастся. С ростом шага винта процесс образования петли замедляется, т. е. структура становится более устойчивой. С увеличением параметра k , наоборот, вихрь становится более неустойчивым, а локализация образования петли — ближе к точке перегиба.

Заключение. В представленном докладе выполнена методическая работа по постановке задачи о развитии неустойчивости винтообразного вихря на основе применения локально-индуцированного приближения. В результате ряда расчетов установлено, что с течением времени форма винтовой спирали искажается и формируется петля, являющаяся предвестником вихревого перезамыкания. Изучены зависимости быстроты процессов от параметров задачи.

Литература

- [1] Алексеев С. В., Куйбин П. А., Шторк С. И., Скрипкин С. Г., Цой М. А. Явление вихревого перезамыкания в закрученном потоке // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 103. Вып. 7. С. 516–521.
- [2] Платонов Д. В., Минаков А. В., Дектерев Д. А., Масленникова А. В., Куйбин П. А. Экспериментальное наблюдение явления перезамыкания прецессирующего вихревого жгута в турбине радиально-осевого типа // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. Вып. 21. С. 33–39.
- [3] Koplik J., Levine H. Vortex reconnection in superfluid Helium // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71. P. 1375–1378.
- [4] Baggaley A. W., Barenghi C. F. Spectrum of turbulent Kelvin-waves cascade in superfluid helium // Physical Review B. 2011. Vol. 83. P. 134509-1–134509-14.
- [5] Hasimoto H. A soliton on a vortex filament // Journal of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 51. P. 477–485.
- [6] Кузнецов Е. А. О солитонах в параметрически неустойчивой плазме // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. С. 575–577.
- [7] Salman H. Breathers on Quantized Superfluid Vortices // Physical Review Letters. 2013. Vol. 111. P. 165301-1–165301-5.
- [8] Da Rios L. S. On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape (in Italian) // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1906. Vol. 22. P. 117–135.
- [9] Алексеенко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. 504 р.
- [10] Van Gorder R. A. Integrable stationary solution for the fully nonlinear local induction equation describing the motion of a vortex filament // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2012. Vol. 26. P. 591–594.

Численные и аналитические решения одномерных нестационарных задач транспортировки газа по трубам

Курбатова Г.И., Клемешев В.А., Виноградова Е.М.

g.kurbatova@spbu.ru, v.klemeshev@spbu.ru, e.m.vinogradova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В докладе для задач о неустановившихся течениях в газопроводе, вызванных наличием утечки средней или малой интенсивности, дано обоснование допустимости нестационарной изотермической модели течения газа. Предложен эффективный численный метод решения системы уравнений этой модели, основанный на модифицированной схеме Лакса–Вендроффа. Приведен пример расчета распределения расхода в газопроводе при наличии утечки малой интенсивности.

Ключевые слова: газопроводы, математические модели, нестационарность, утечка малой и средней интенсивности, численное решение, примеры.

Введение. Работа, представленная в докладе, является продолжением исследований по созданию математических моделей транспортировки газа по трубам [1]. Характерными особенностями таких течений являются следующие: 1) *Относительно небольшие скорости потока.* Режим течения обычно выбирается таким образом, чтобы средняя скорость потока была меньше определенного критического значения, при котором возможно возникновение вибрации газопровода. Это позволяет для газопроводов среднего давления (порядка 10 МПа) и сверхвысокого давления (порядка 23 МПа) считать силы инерции пренебрежимо малыми по сравнению с давлением. 2) Для газопроводов среднего и сверхвысокого давлений *характерно относительно малое влияние небольших изменений температуры потока на величину давления.* Для установившихся течений это продемонстрировано, в частности, в наших работах, например, [2].

Модель I. Сравнительно общая одномерная неизотермическая модель установившегося течения смеси газов по газопроводу постоянного круглого сечения для средних давлений может быть записана следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \rho u &= Q^0/S, \\ \frac{d}{dz}(p + \rho u^2) &= -\frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \\ \rho u c_p \frac{dT}{dz} &= \rho u T \left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} + \frac{\lambda \rho u^2 |u|}{4R} + 2\beta_T \frac{T^* - T}{R}, \\ p &= \rho R_g T Z(p, T), \\ Z(p, T) &= 1 + 0.07 \frac{p}{p_c} \frac{T_c}{T} \left(1 - \frac{6T_c^2}{T^2} \right), \\ z = 0 : \quad p &= p_{\Phi 0}, \quad T = T_{\Phi 0}. \end{aligned} \tag{I}$$

Численное интегрирование системы уравнений модели I не представляет трудности. В задачах, в которых основной интерес представляют величины давления и расхода ($w = \rho u$), для установившихся течений оказывается допустимой (в виду перечисленных особенностей 1), 2)) упрощенная изотермическая модель, имеющая известное аналитическое решение для распределения давления, которое для горизонтальной трассы записывается в виде:

$$p(z) = \sqrt{p_{\Phi 0}^2 - \left(2 \left(\frac{Q^0}{S} \right)^2 \frac{\lambda}{4R} \frac{R_g \langle T \rangle \langle Z \rangle}{p_c^2} \right) z}. \tag{1}$$

Средние величины температуры $\langle T \rangle$ и коэффициента сжимаемости $\langle Z \rangle$ в формуле (1) рассчитываются по соответствующей неизотермической модели I.

Упрощенная модель **нестационарного** изотермического течения в горизонтальном газопроводе имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\lambda \rho u^2}{4R}, \quad (3)$$

$$\rho = \frac{p}{R_g \langle T \rangle \langle Z \rangle}. \quad (4)$$

Задание граничных условий, обеспечивающих существование и единственность решения системы уравнений (2)–(4), требует, как известно [3], дополнительного исследования. В рассматриваемых задачах скорость потока положительная и дозвуковая, поэтому на входе в газопровод и на выходе из него должна быть задана одна и только одна функция — либо давление, либо расход.

Модель II. В терминах расхода $w = \rho u$ и давления p модель нестационарного изотермического течения (2)–(4) в безразмерной форме записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + n_1 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, & t = 0 : & p^0(z) = p(z, 0)/p_c, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + n_2 \frac{\partial p}{\partial z} = -n_{11} \frac{w^2}{p}, & z = 0 : & p_0 = p_1, \\ \rho = n_5 p, & z = L/l_x : & p(L) = p_2. \end{cases} \quad (\text{II})$$

В качестве начального условия в модели II использовалось распределение безразмерного давления, соответствующее распределению (1) в установившемся изотермическом течении. Рассматривались разные варианты граничных условий. Один из вариантов состоял в задании постоянного давления на входе и постоянного давления на выходе из газопровода. В безразмерные комплексы n_1, n_2, n_{11}, n_5 модели II входят характерные величины задачи, термодинамические параметры смеси газов, адиабатическая скорость звука, геометрические параметры газопровода, средние значения температуры и коэффициента сжимаемости, рассчитанные по неизотермической модели установившегося течения.

В ряде работ, например [4], предлагается линеаризовать уравнение движения модели II. Получающаяся при этом линеаризованная система допускает для некоторых краевых условий аналитическое решение, выражающееся через

функции Бесселя. Расчет тестовых задач для набора параметров, приведенного далее, показал, что значения расхода и давления, рассчитанные по линеаризованной модели, заметно отличаются от их значений, рассчитанных по модели II. Поэтому далее используется модель II, однако, аналитическое решение системы уравнений линеаризованной модели представляет несомненный интерес при тестировании различных численных методов решения уравнений модели II. Наш опыт решения нестационарных неизотермических задач о течениях в газопроводах средних и сверхвысоких давлений [1] свидетельствует о том, что для численного решения может быть использована явная двухшаговая схема Лакса–Вендроффа второго порядка точности по z и по t при соблюдении ограничения на шаг по времени, следующего из условия Куранта. Схемы типа Лакса–Вендроффа просты в реализации, экономичны и допускают эффективное распараллеливание. Недостатком этих схем, как известно, является немонотонность, проявляющаяся в появлении нефизических осцилляций численного решения, которые, однако, не нарастают со временем. Как показали расчеты, для многих нестационарных задач о течениях в газопроводах модуль возмущения при использовании схемы типа Лакса–Вендроффа оказывается незначительным по сравнению с абсолютной величиной рассчитываемых безразмерных величин давления и расхода, т. е. эти возмущения не вносят существенной погрешности в решение задачи. В настоящей работе рассматривались различные подходы к численному решению системы уравнений модели II при наличии утечки газа малой и средней интенсивности. Проведенные расчеты доказали допустимость использование и для таких задач модифицированной схемы типа Лакса–Вендроффа. При моделировании течения в окрестности сечения газопровода, содержащего утечку газа, в правую часть уравнения неразрывности (2) добавлялось слагаемое, имеющее смысл стока заданной интенсивности. Кроме того, предполагалось, что для всех моментов времени величины давления слева и справа от этого сечения равны. В работе приведены результаты расчетов многочисленных вариантов. В качестве примера на рис. 1 представлено распределение расхода в газопроводе спустя 10 минут

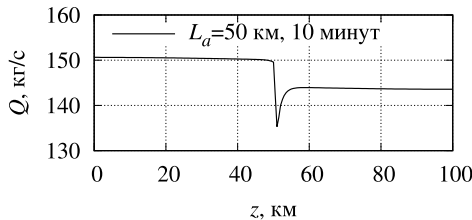


Рис. 1. Массовый расход газа спустя 10 минут после начала утечки.

после возникновения утечки, расположенной в середине газопровода и составляющей 4% от первоначального постоянного массового расхода $Q^0 = 150$ (кг/с) при следующих параметрах задачи:

$$R = 0.4 \text{ м}, \quad L = 100 \text{ км}, \quad \lambda = 0.0089, \quad p_{\Phi 0} = 90 \text{ атм}, \quad T_{\Phi 0} = 278.15 \text{ К}, \\ T_c = 193.7 \text{ К}, \quad p_c = 45.376 \text{ атм}, \quad R_g = 493.501 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Литература

- [1] Курбатова Г. И., Ермолаева Н. Н., Филиппов В. Б., Филиппов К. Б. Проектирование газопроводов в северных морях. СПб.: Лань, 2020. 352 с.
- [2] Курбатова Г. И., Виноградова Е. М., Клемешев В. А. Анализ упрощенных моделей транспортировки газа. Расчет местоположения утечки газа в трубопроводе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 239–252.
- [3] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012. 656 с.
- [4] Лаптева Т. И., Мансуров М. Н. Обнаружение утечек при неустановившемся течении в трубах // Нефтегазовое дело. 2006. № 2. С. 1–15.

Газодинамическое проектирование профиля крыла высокоскоростного летательного аппарата с оптимальными характеристиками

Лаптинская М. М., Чернышов М. В.

amara96@mail.ru, mvcher@mail.ru

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д. Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Рассматривается процесс проведения газодинамического проектирования профиля крыла высокоскоростного безкипажного летательного аппарата, режимы полета которого находятся в области больших чисел Рейнольдса. В основе алгоритма численной оптимизации заложен прямой метод оптимизации с отысканием максимума целевой функции в современном пакете программ. Представлены результаты численной оптимизации по критерию максимального качества для ромбовидного профиля крыла.

Ключевые слова: газодинамическое проектирование, профиль крыла, оптимизация, численное моделирование, скачки уплотнения.

Введение. В связи с необходимостью достижения новых высот и скоростей полета безэкипажных высокоскоростных летательных аппаратов (ЛА), во всем мире ведутся поиски оптимальных аэродинамических форм. За последние 60 лет оптимизация стала незаменимым компонентом любого газодинамического проектирования. В данной работе рассматривается задача увеличения аэродинамического качества профиля крыла высокоскоростного ЛА с помощью прямого метода оптимизации, в ходе которого последовательно изменяются геометрические параметры исследуемого объекта и производится пересчет аэродинамических характеристик [1].

Постановка задачи и ход решения. Рассматриваемый метод оптимизации использует итерационную процедуру: сначала задается профиль высокоскоростного крыла в начальном приближении. В данной работе в качестве первого приближения рассматривается ромбовидный профиль с углами полураствора в лобовой и кормой части $\theta_n = 15^\circ$ и хордой $l = 1$ м. Далее определяются условия эксплуатации объекта оптимизации. После этого определяется целевая функция, зависящая от интенсивностей скачков уплотнения и волн разрежения в сверхзвуковом потоке, и накладываемые на нее ограничения геометрического и физического характера. При решении прямой задачи оптимизации современные методы математического программирования позволяют провести поиск ее максимума заданной целевой функции, выражающей, к примеру, аэродинамическое качество обтекаемого тела. Необходимо найти такие проектные переменные (к примеру, углы полураствора передней части профиля, смещение угловых точек профиля к передней или задней кромке), при которых целевая функция достигает своего локального максимума.

Аналитические решения задачи, полученные в идеализированной модельной постановке, подтверждаются в ходе численного моделирования. Численное моделирование обтекания профиля проводится в стационарной двумерной постановке. Значение скорости на входе в расчетную область соответствует числу Маха $M = 5$, угол атаки зафиксирован и принимает значение $\alpha = 0^\circ$, параметры окружающей среды соответствуют стандартной атмосфере, число Рейнольдса течения достигает значения $Re = 1,14 \cdot 10^8$. В пакете программ ANSYS с подключением модуля Fluent проводится газодинамический расчет обтекания исходного профиля крыла. В ходе расчета течения газа на поверхности исследуемого тела решаются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса с замыкающей моделью турбулентности $k - \varepsilon$ Realizable [2]. После отыскания решения с проверкой сеточной сходимости производится поиск оптимальной формы высокоскоростного профиля по заданным критериям. С помощью параметризации в модуле Workbench и использования подпрограммы DesignXplorer производится автоматизированное проектирование оптимального профиля повышенного аэродинамического качества.

Результаты. При использовании генетического алгоритма численной оптимизации [3] получены следующие результаты. Повышение качества профиля произошло в основном за счет увеличения угла наклона нижней лобовой части ромба и уменьшения угла наклона верхней части (при нулевом угле атаки давление на нижней передней кромке оптимизированного профиля больше, чем на верхней, но меньше, чем на передних кромках исходного профиля). За счет несимметричности оптимизированного профиля удалось увеличить значение подъемной силы при незначительном росте сопротивления. Однако данные результаты были получены в результате оптимизации по одному критерию. Для получения качественной картины оптимизации профиля крыла необходимо провести многокритериальную оптимизацию с однородными критериями (целевыми функциями при этом служат аэродинамические характеристики при различных углах атаки).

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект «Создание и научное обоснование методологии аэрогазодинамического проектирования общего облика двигательных энергетических установок, технологий разработки массового производства беспилотной аэрокосмической техники для решения задач в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях», № FZWF-2024-0003).

Литература

- [1] Таковицкий С. А. Оптимизационные задачи сверхзвуковой аэродинамики. М.: Наука, 2015. 235 с.
- [2] Снегирёв А. Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
- [3] Sivanandam S.N., Deepa S.N. Introduction to Genetic Algorithms. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 442 p.

Численное моделирование влияния оребрения стенок жаровой трубы на эмиссионные характеристики

Мушка И.Н.

mushkailya@mail.ru

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д.Ф. Устинова,

199005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация: В данной работе рассматривается численное моделирование влияния оребрения стенок жаровой трубы на эмиссионные характеристики. Исследование по-

казывает возможности использования разных форм и конфигураций жаровой трубы для достижения низких показателей эмиссии. Результаты численного эксперимента позволяют выявить особенности течения жидкости вблизи стенок трубы и ребер, а также оценить эффективность интенсификации теплообмена.

Ключевые слова: горение, эмиссия, вычислительное моделирование, камера сгорания, смешение.

В настоящее время для авиационных двигателей выдвигают все более жесткие требования, одними из которых являются эмиссионные характеристики. Помимо экспериментального анализа и доводки авиационных двигателей зачастую ставится вопрос о корректном вычислительном моделировании смесеобразования и горения в горелочных устройствах и камерах сгорания с возможностью прогнозирования недостатков и возможности дальнейшего улучшения двигателей.

В данной работе рассматривается влияние наличия и отсутствия оребрения жаровых труб камер сгорания авиадвигателей на эмиссионные характеристики. Сравняется влияние расположения и форм фактора ребер охлаждения на эмиссионные характеристики и температуру.

Выбросы окислов азота и углерода зависят от температуры смеси, стехиометрического состава и времени пребывания смеси в высокотемпературной зоне. Образование оксидов азота и оксидов углерода имеют противоположное направление, что связано с разной природой возникновения оксидов углерода и оксидов азота. Чем выше температура, тем выше уровень оксидов азота, но тем меньше уровень оксидов углерода. Следовательно, задача проектирования камер сгорания с низкой эмиссией (малоэмиссионные камеры сгорания) сводится к нахождению определенного температурного режима, когда одновременно низкий уровень эмиссии оксидов углерода и оксидов азота [1].

Вычислительное моделирование проводилось в пакете программ Ansys Fluent. При решении поставленной задачи в пакете программ Ansys Fluent решаются следующие уравнения: уравнение неразрывности, уравнение импульса, уравнение энергии, уравнение состояния, уравнение сохранения массы химического компонента s . В качестве модели была выбрана камера сгорания, работающая на керосине [2].

Для замыкания системы использовалась модель горения EDDY DISSIPATION (данная модель горения является расширением модели вихревой диссипации и учитывает горение в малых зонах между турбулентными структурами, а также данная модель показывает адекватную реакцию при смене ламинарного потока на турбулентный) и модель турбулентности k - ω SST.

По результатам численного моделирования были получены графики температуры от координат вдоль стенки жаровой трубы в зависимости от форм

фактора, наличия или отсутствия ребер охлаждения, а также график эмиссии CO_x от координаты.

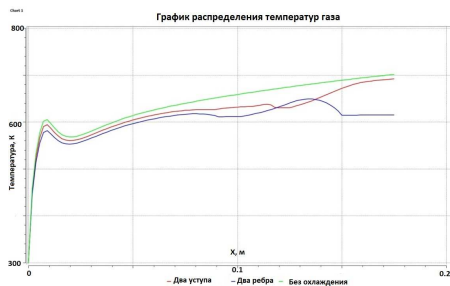


Рис. 1. График распределения температуры вблизи стенки (без оребрения, два уступа вблизи очага горения, два ребра оребрения).

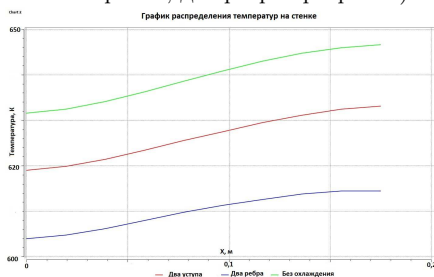


Рис. 2. График распределения температуры на стенке (без оребрения, два уступа вблизи очага горения, два ребра оребрения).

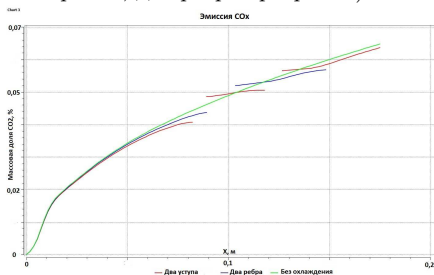


Рис. 3. График распределения эмиссии CO_x (без оребрения, два уступа вблизи очага горения, два ребра оребрения).

Полученные графики показывают, что с увеличением общей площади ребра приблизительно в 2 раза температура вблизи стенки имеет понижение темпера-

туры порядка 10-70 градусов, что также благоприятно сказывается на уровне эмиссии COx. Если поместить ребро ближе к очагу температур, то также наблюдается общий уровень снижения температур и понижения эмиссии COx. При этом, значительного повышения оксидов азота не наблюдается.

Литература

- [1] Мингазов Б. Г. Камеры сгорания газотурбинных двигателей. Конструкция, моделирование процессов и расчет: Учебное пособие. Издание второе, исправленное. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2006. 220 с.
- [2] Теоретическое руководство Ansys Fluent / Электронный ресурс: <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/Fluent/html/th/mainpre.htm> (Дата обращения: 20.03.2024).

Numerical investigation of the influence of deflection of the airfoil flap in ground effect

Pavlenko O. V.,¹ *Fevralskih A. V.*,² *Baghdadi M. K.*,¹ *Natour M. Z.*¹
olga.v.pavlenko@yandex.ru, a.fevralskih@gmail.com, m.khir.baghdadi@gmail.com,
natourzaki@gmail.com

¹Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
141700, Russian Federation, Dolgoprudny, Institutskiy per., 9,
²Moscow Aviation Institute (National Research University),
125993, Russian Federation, Moscow, Volokolamskoe shosse, 4

Annotation. Numerical studies were carried out the influence of deflection of the airfoil flap in ground effect. A comparison the calculated and experimental data of airfoil NACA 5312 is given. For numerical study wing airfoil Clark Y+ with a non-deflected wing flap $\delta_{flap} = 0$ and deflected flap $\delta_{flap} = 20^\circ$ was used. The calculations were carried out for numbers Mach $M = 0.18$ and Reynolds number $Re = 1.8 \cdot 10^6$. The defect flap in ground effect is influence on aerodynamics characteristics and pressure distribution of airfoil is shown. The simulation is performed using the numerical code for the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations.

Keywords: aerodynamic characteristics, ground effect, CFD methods.

Introduction. The creation of ekranoplanes is an urgent task since they are able to move both on water and on various surfaces such as earth, snow or ice, and such have the ability to be based on these surfaces. Moreover, compared with water transport, ekranoplanes have higher speed, and compared to airplanes they have a greater aerodynamic quality. The main problem of designing ekranoplanes is usually the problem of their stability and controllability [1].

When studying ekranoplanes, a number of problems arise in order to correctly simulate the effect of the proximity of the earth, taking into account its movement

relative to the ekranoplane. In this case to conduct a physical experiment and to obtain a valid picture, it is necessary to use either the method of mirror images or the method of movable screen [2].

Currently, the development of computer programs and numerical research methods used at the preliminary design stage provides new opportunities in solving problems of creating ekranoplanes, in improving their stability and controllability [3].

In this paper, a numerical study is performed the ground effect on flowing wing airfoil Clark Y+ with a non-deflected wing flap $\delta_{flap} = 0$ and deflected flap $\delta_{flap} = 20^\circ$ for Mach number $M = 0.18$ and Reynolds number $Re = 1.8 \cdot 10^6$. Validation of calculated and experimental data airfoil NACA 5312 was carried out.

Calculation methods and conditions. The airfoil NACA 5312 was used for validation, Fig. 1 (a). For correct simulation flying in ground effect was used the method of mirror images, Fig. 1 (b).

Numerical investigation of the influence of deflection of the airfoil flap in ground effect were carried out on airfoil Clark Y+ with a non-deflection flap $\delta_{flap} = 0$ and deflected flap $\delta_{flap} = 20^\circ$, Fig. 1 (c, d), accordingly.

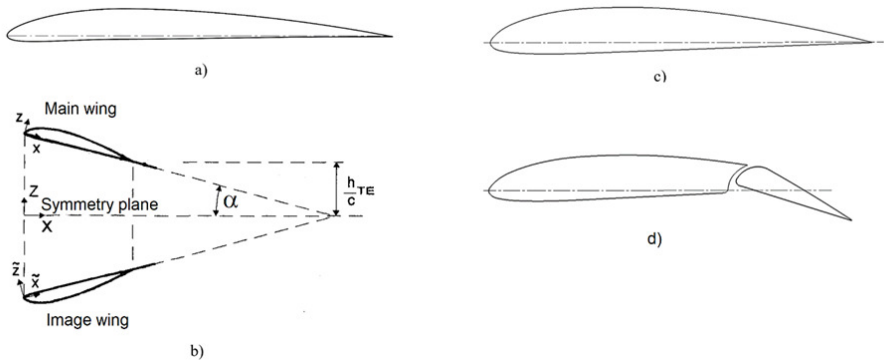


Fig. 1. Calculations airfoils: (a) airfoil NACA 5312, (b) mirroring method, (c) original airfoil CLARK Y+, (d) airfoil CLARK Y+ $\delta_{flap} = 20^\circ$.

The calculations were performed in steady state condition according to a program based on solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS). The structural computational grid contained about 1 million cells was used.

Numerical studying was carried out for all airfoils with chord length $b = 0.4826$ m. The main boundary conditions of calculations: temperature of ambient $T = 279$ K, pressure $P = 85507$ Pa, density $\rho = 1.068$ kg/m³, velocity air $V = 60.96$ m/s.

Calculation results. Validation was carried out with work [4]. Results of numerical calculation show good compare with experiment results and better than data panel code, Fig. 2.

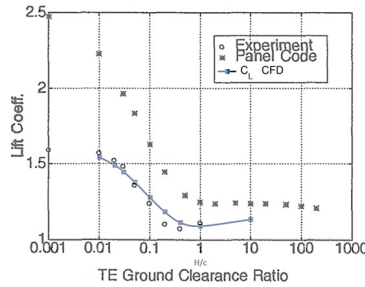


Fig. 2. Comparison of numerical calculations and experiment data.

The results of numerical studies showed that flying near the ground increase the lift of the wing profile, Fig. 3, which depends on the distance to the ground and the deflection of the flap. The defect flap is able to increase the lift by up to 20% with an increase in the angle of attack.

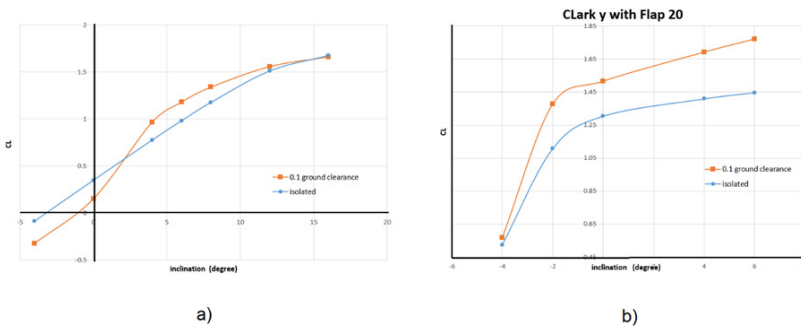


Fig. 3. Dependence of lift coefficients on the angle of attack: (a) isolated vs with clearance 0.1 for airfoil CLARK Y+, (b) airfoil CLARK Y+ $\delta_{flap} = 20^\circ$.

Conclusion. Numerical investigation conducted to study the influence of the proximity of earth have, in good agreement with the experiment, shown that the lifting force of the profile increases from a certain range of heights above the ground and depends on the angle of attack and the angle of deflection of the flap.

References

- [1] Zhukov V. I. Features aerodynamic, stability and controllability of ekranoplane // Publishing department of TsAGI, 1997. p. 80. (In Russian)
- [2] Liverinova M. A., Tryaskin N. V. Numerical determination of aerodynamic characteristics of an airfoil in a ground effect // Marine intellectual technologies. 2021. No. 1. Part 2. DOI: 10.37220/MIT.2021.51.1.024 (In Russian)
- [3] Fevral'skikh A., Makhnev M. Determination and analysis of roll and yaw rotary derivatives of WIG craft vehicle using numerical simulation // Aerospace Systems. 2023. Vol. 6. No. 1. P. 151–156. DOI: 10.1007/s42401-022-00176-4
- [4] Hiemcke C. NACA 5312 in ground effect: wind tunnel and panel code studies // American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. with permission, 1997. P. 829–838.

Влияние бокового ветра на тягу воздушных винтов, установленных на концах крыла сверхбольшого удлинения

*Павленко О.В.^{1,2} Пигусов Е.А.^{1,2} Айшвария Сантош,²
Тханг Нгок Чинь²*

olga.v.pavlenko@yandex.ru, pigusoff@gmail.com

¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, 140180, Российская Федерация, Жуковский, ул. Жуковского, 1,

²Московский физико-технический институт (МФТИ), 141701, Российская Федерация, Долгопрудный, Институтский пер., 9

Аннотация. Проведены численные исследования по влиянию бокового ветра на тягу воздушных винтов, расположенных на конце крыла сверхбольшого удлинения самолета на солнечных батареях. Расчеты проведены с использованием программы, основанной на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, на модели самолета с работающими пропеллерами на концах крыла при скорости набегающего потока $V = 50$ м/с и числе Рейнольдса $Re = 0.35 \cdot 10^6$. Показано, при боковом ветре изменяются моментные характеристики самолета, и уменьшается тяга винтов.

Ключевые слова: тянущий воздушный винт, тяга винтов, интерференция воздушного винта, крыло сверхбольшого удлинения.

Известно, что боковой ветер в значительной степени влияет на условия работы двигателей в зависимости от их количества и компоновки самолета. В

некоторых случаях посадки при боковом ветре может привести к помпажу двигателя [1]. В данной работе представлены результаты численного исследования влияния изменения угла скольжения на тягу двухлопастных воздушных винтов, установленных на конце крыла большого удлинения ($L_a = 23$) модели самолета [2]–[5]. Диаметр тянущих двухлопастных воздушных винтов 0.22 м. Численные исследования влияния угла скольжения (бокового ветра) на тягу воздушных винтов (ВВ), установленных на концах крыла сверхбольшого удлинения проведены на модели самолета с использованием программы, основанной на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Расчеты проведены при скорости набегающего потока $V = 50$ м/с и числе Рейнольдса $Re = 0.35 \cdot 10^6$ при неотклоненной механизацией крыла, рисунок 1. Сравнение расчетных аэродинамических характеристик с экспериментальными данными, полученными в аэродинамической трубе, представлено в работе [3, 4, 5].

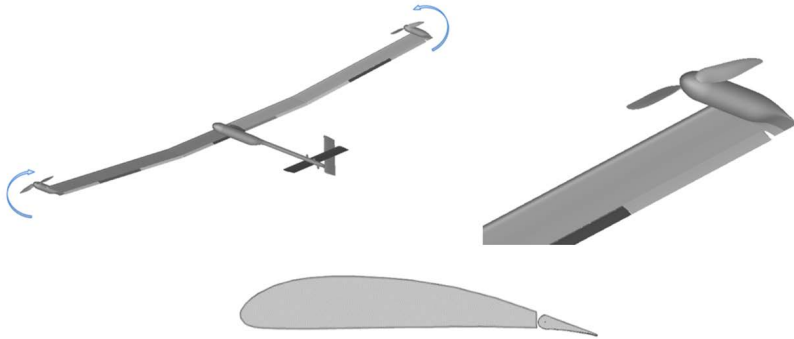


Рис. 1. Расчетная модель.

Численные исследования выполнены по программе, основанной на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, на структурированной расчетной сетке (около 20 млн. ячеек) с $k - \varepsilon$ –Realizable моделью турбулентности, с улучшенным моделированием параметров турбулентности вблизи стенки и с учетом влияния градиента давления. В пристеночной области использовалась однопараметрическая модель турбулентности, адаптированная к течениям с малыми числами Рейнольдса. Для одновременного расчета поступательного движения модели самолета в потоке воздуха и вращательного движения воздушного винта были заданы две расчетные зоны: одна с поступательным движением потока воздуха, который набегаёт на исследуемую модель со скоростью $V = 50$ м/с, а другая, где задано вращательное движение воздуха, моделирующее вращение ВВ в сторону фюзеляжа с частотой $N = 15000$ об/мин [5].

Расчеты выполнены на нулевом угле атаки, в диапазоне углов скольжения от 0 до 20°.

Зависимости коэффициента тяги винтов левой и правой консоли крыла от угла скольжения представлены на рисунке 2. Относительная поступь винта

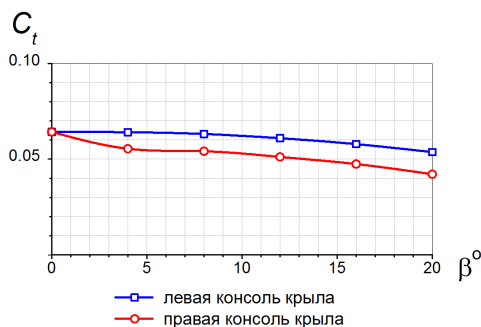


Рис. 2. Зависимости коэффициента тяги воздушного винта от угла скольжения.

0.044. При увеличении угла скольжения тяга винтов заметно уменьшается. Наибольшее снижение тяги наблюдается у воздушного винта, расположенного на наветренной правой консоли крыла. По сравнению с падением тяги воздушного винта на левой консоли крыла, связанной с увеличением угла скольжения, тяга воздушного винта правой консоли крыла становится меньше примерно на 20 процентов. Такое снижение тяги винтов связано с изменением местного угла атаки, с которым поток воздуха набегае на лопасть винта, а также с интерференцией конструкции данного летательного аппарата.

Вследствие увеличения угла скольжения и увеличения различий в тяге воздушных винтов изменяются моментные характеристики летательного аппарата. При этом с ростом угла скольжения примерно в три раза увеличивается коэффициент момента крена m_x , рисунок 3. Вследствие этого самолет начинает крениться в сторону правого крыла. Момент рысканья увеличивается в два раза и относительно вертикальной оси самолет закручивает вправо.

Численные исследования, проведенные на модели самолета, расположенных на конце крыла сверхбольшого удлинения показали, что боковой ветер уменьшает тягу винтов, при этом наибольшее снижение тяги наблюдается у наветренной правой консоли крыла. Изменяются моментные характеристики летательного аппарата, увеличиваются по модулю коэффициенты момента крена и рысканья. Таким образом, показано, при боковом ветре изменяются моментные характеристики самолета, и уменьшается тяга винтов.

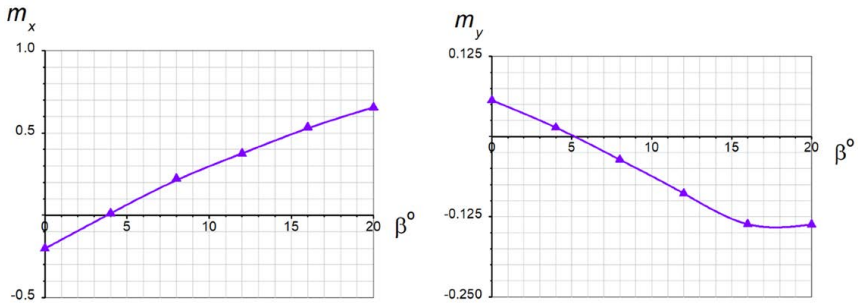


Рис. 3. Зависимость коэффициента момента крена и рысканья от угла скольжения.

Литература

- [1] Фадин С. С., Комов А. А. Влияние ветра на работу двигателей ПС-90А-76 на пробеге самолета Ил-76ЕВ-90 с применением реверса тяги // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. № 208. С. 76–82.
- [2] Корнушенко А. В., Кудрявцев О. В., Теперин Л. Л., Теперина Л. Н., Шустов А. В., Фарид Орфинежад, Мьё Тхейн. Исследование полезной интерференции, тянущей и толкающей схем воздушных винтов, установленных на концах крыла // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 1. С. 3–9.
- [3] Vinogradov O. N., Kornushenko A. V., Pavlenko O. V., Petrov A. V., Pigusov E. A., Trinh Thang Ngoc. Influence of propeller diameter mounted at wingtip of high aspect ratio wing on aerodynamic performance // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. P. 012051. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012051
- [4] Павленко О. В., Пигусов Е. А., Сантош А., Реслан М. Г. Численные исследования влияния угла скольжения на интерференцию воздушного винта и крыла сверхбольшого удлинения // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 1. С. 23–35.
- [5] Виноградов О. Н., Корнушенко А. В., Павленко О. В., Петров А. В., Пигусов Е. А., Т. Н. Чинь. Особенности интерференции воздушного винта и крыла сверхбольшого удлинения в неоднородном потоке // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28. № 2. С. 7–19.

Аэродинамика тонкого профиля планирующего летательного аппарата при трансзвуковом полёте

Рыбаков М.О.

maximrybakovv@yandex.ru

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Рассматривается влияние числа Маха набегающего потока в трансзвуковом диапазоне и угла атаки профиля БПЛА планирующего типа на аэродинамические характеристики. Толщина профиля определяется необходимостью соблюдения габаритных размеров БПЛА. Получена зависимость наимыгоднейшего угла атаки от числа Маха набегающего потока.

Ключевые слова: аэродинамика, планирующий летательный аппарат, трансзвуковое обтекание.

В наши дни большое внимание уделяется беспилотным летательным аппаратам (БПЛА) различного назначения. Для доставки разного рода полезной нагрузки своё применение нашли летательные аппараты, не имеющие двигательной установки, но имеющие развитые несущие поверхности для создания подъёмной силы (крылья), под действием которой аппарат при отсутствии тяги способен преодолевать значительные расстояния в режиме планирования. Такие летательные аппараты можно назвать беспилотными летательными аппаратами планирующего типа. Они малозаметны ввиду отсутствия теплового следа, создаваемого струёй истекающего из сопла двигателя потока продуктов сгорания топлива, что позволяет в совокупности с возможностью управления траекторией полёта осуществлять доставку нагрузки до цели с большого расстояния, оставаясь практически незамеченным. Имея ограничение по габаритным размерам, для создания большей подъёмной силы прибегают к выбору профиля крыла с большим аэродинамическим качеством и некоторым конструктивным решениям. Одним из таких решений является схема механизма раскладывания крыла, где консоли крыла находятся одна над другой на продольной оси летательного аппарата. Такое расположение позволяет увеличить длину хорды крыла и его площадь соответственно. Установка подобного механизма раскладывания ведёт к увеличению высоты выступа механизма над поверхностью ЛА, что может привести к превышению допустимых габаритных размеров. В этой связи появляется необходимость использования более тонких профилей, способных развить требуемую подъёмную силу. При планирующем спуске в атмосфере скорость ЛА может изменяться в достаточно широких пределах и, в частности, преодолевать скорость звука. В этой связи

рассматривается диапазон числа Маха M_∞ , соответствующий трансзвуковому полёту.

В данной работе с целью получения аэродинамических характеристик профиля для оценки возможности его использования для крыла БПЛА рассматривается обтекание при различных углах атаки трансзвуковым потоком выпукловогнутого профиля, имеющего относительную толщину 7.3%, полученного путём модификации профиля планера Fortman FX 60-100 [1]. Рассматривается диапазон углов атаки $\alpha = 4 - 8^\circ$ и числа Маха $M_\infty = 0.7 - 1.2$.

Определение аэродинамических характеристик осуществляется с помощью численного моделирования. Число Рейнольдса, рассчитанное по хорде профиля h , лежит в диапазоне $Re_\infty = 0.99 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^6$. Решаются осреднённые по Фавру уравнения Навье–Стокса, замкнутые $k-\omega$ SST моделью турбулентности, которая при достижении необходимого сеточного разрешения пристеночной области позволяет корректно разрешать пограничный слой, а не использовать пристеночные функции. Используется метод конечного объёма. Стационарное решение находится методом установления.

На входной границе задаются статические давление p_∞ и температура T_∞ , соответствующие параметрам окружающей среды на высоте 10 км над поверхностью Земли, а также интенсивность турбулентности $I = 3\%$, что соответствует значению, при котором не наблюдается заметное влияние турбулентности набегающего потока на сопротивление трения [2], и турбулентная вязкость $\mu_t = 10\mu$. На поверхности профиля задаются условия адиабатичности и равенства нулю нормальной и касательной компонент вектора скорости. На выходной границе в случае дозвукового потока задаются статические давление и температура как и на входе, в случае сверхзвукового потока задание граничного условия не требуется [3]. Теплофизические характеристики λ , μ , C_p определяются в соответствии с температурой на входной границе и считаются постоянными ввиду малого максимального изменения температуры в потоке $T_0 - T_\infty \approx 60$ К.

Для решения была построена сетка, состоящая из двух областей. Профиль находится внутри области, состоящей из элементов меньшего размера, ограниченной окружностью. Сетка сгущалась поперёк пограничного слоя на поверхности профиля и вдоль следа путем создания плавного перехода между элементами у задней кромки. Сетка состоит преимущественно из четырёхугольников и содержит порядка 470 тысяч элементов. Расчёт проводился для расчётных областей различного размера. Окончательным выбран вариант, при котором поток на границах оставался практически невозмущённым. Расчётная область имеет размеры 14 на 18 длин хорд профиля h . Размер первой ячейки соответствует $y_+ = 3$, что позволяет не использовать пристеночные функции [4]. Дополнительно для разрешения скачков уплотнения была проведена процедура сеточной адаптации по градиенту давления.

Получены поля параметров. При превышении некоторого критического числа Маха сначала на верхней, а затем и на нижней поверхностях профиля образуются λ -образные скачки уплотнения. Также при увеличении числа Маха и угла атаки наблюдается изменение положения скачка и его структуры, что соответствует данным, полученным в работе [5], а также картинам течения, приведённым в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Создание и научное обоснование методологии аэрогазодинамического проектирования общего облика двигательных и энергетических установок, технологий разработки и массового производства беспилотной аэрокосмической техники для решения задач в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях», № FZWF-2024-0003).

Литература

- [1] Кашафутдинов С. Т., Моисеева Р. В. Атлас аэродинамических характеристик планерных крыловых профилей М: Машиностроение, 1966. 66 с.
- [2] Репик Е. У., Соседко Ю. П. Управление уровнем турбулентности потока. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 244 с.
- [3] Булович С. В., Виколайнен В. Э. Волновое движение газа в протяжённых каналах: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2006. 64 с.
- [4] Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with SST Turbulence Model // Begell House Inc. 2003. P. 625–632.
- [5] Пилипенко А. А., Полевой О. Б., Приходько А. А. Численное моделирование влияния числа Маха и угла атаки на режимы трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей // Учёные записки ЦАГИ. 2012. Том XLIII. № 1. С. 3–30.
- [6] Альбом течений жидкости и газа: Пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. М.: Мир, 1986. 184 с.

Демпфирование вращения цилиндров в воздушном потоке

Рябинин А. Н.

a.gyabinin@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Анализ развития возмущений угловой скорости круговых цилиндров в воздушном потоке проводится с применением гипотезы искривленных тел. Невозмущенным движением является прямолинейный полет вдоль оси цилиндра. Уравнения Навье–Стокса решаются методом конечных объемов. Изучается поведение трех цилиндров, отличающихся отношением длины к диаметру. Поведение круговых цилин-

дров сравнивается с поведением осесимметричного тела, форма которого близка к удобообтекаемой.

Ключевые слова: угловая скорость, демпфирование возмущений, гипотеза искривленных тел.

Перенос грузов под вертолетом на внешней подвеске может сопровождаться значительным их раскачиванием, способным вызвать катастрофу. Для решения задачи о движении груза, подвешенного под вертолетом, требуется знать аэродинамические силы, поскольку они во многом определяют движение груза. Эти силы зависят от формы груза. В работе [1] рассматривалось движение цилиндра, имеющего отношение длины L к диаметру D (удлинение) $\lambda = L/D = 2$, переносимого с постоянной скоростью под вертолетом. Стабилизатор ориентирует цилиндр в направлении, обеспечивающем минимальное лобовое сопротивление. Равновесное положение цилиндра неустойчиво, он совершает угловые колебания вокруг вертикальной оси. Частота колебаний пропорциональна скорости движения цилиндра относительно среды. Угловые колебания цилиндра не опасны для полета вертолета, пока частота колебаний существенно отличается от частоты колебаний груза как физического маятника. Если частоты близки, то интенсивное раскачивание груза в поперечном направлении может привести к катастрофе вертолета.

В настоящей работе изучается движение цилиндров и удобообтекаемого осесимметричного тела в воздушном потоке при наличии возмущений угловой скорости. В исходном движении угловая скорость равна нулю. Рассматривается вращательное движение тел вокруг оси, перпендикулярной вектору скорости воздушного потока. Возмущение приводит к появлению момента рыскания. Отрицательный момент рыскания означает демпфирование возмущений, положительный — их дальнейшее развитие.

В численном расчете обтекания грузов используется гипотеза искривленных тел. Предполагается, что совместное поступательное и вращательное движение тела можно заменить поступательным движением искривленного тела. Искривление тела выполнено таким образом, чтобы местные углы скольжения в различных точках вращающегося и искривленного тел были равны. Гипотеза искривленных тел впервые была применена Г.А. Гуржиенко [2] для описания обтекания дирижабля, совершающего поступательное и вращательное движение. Получено, что осевая линия искривленного тела имеет форму цепной линии. Если углы наклона тела малы, то цепная линия близка по форме к дуге окружности.

Отношение длины L к диаметру D (удлинение) $\lambda = L/D$ принимало три значения: 9, 4,5 и 2. Для сравнения изучалось обтекание осесимметричного тела, форма которого близка к удобообтекаемой. Головная и кормовая части тела представляли собой половинки эллипсоидов вращения, отношение продольной полуоси эллипсоидов к поперечной составило 2 и 8 для головной и кормовой

частей, соответственно. Средняя часть тела была круговым цилиндром. Удлинение тела равно девяти. Эскизы изучаемых тел показаны на рис. 1.

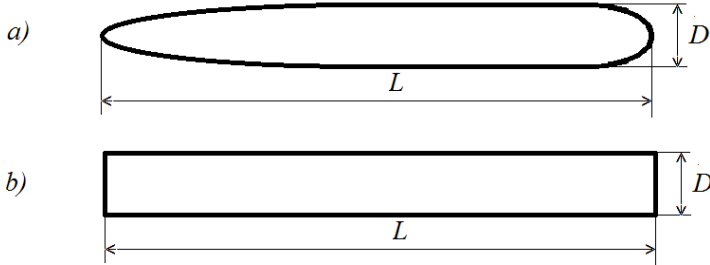


Рис. 1. Эскизы изучаемых тел: а — удобообтекаемое тело, б — цилиндр.

Задача имеет плоскость симметрии, поэтому рассчитывалось обтекание половины тела. Расчетный объем представлял собой разрезанный пополам плоскостью симметрии задачи круговой цилиндр, к передней части которого присоединена четвертая часть шара. Расчетные сетки сгенерированы с помощью свободно распространяемой программы Gmsh [3]. Расчеты выполнялись с помощью свободно распространяемого пакета программ SU2 [4], версия 7.2.1 “Blackbird”. В расчетах применялся решатель для несжимаемой среды. Уравнения Навье–Стокса решались методом конечных объемов.

Зависимость коэффициента момента m_y , действующего на тело, от его безразмерной вращательной скорости $\omega v/L$, представлена на рис. 2.

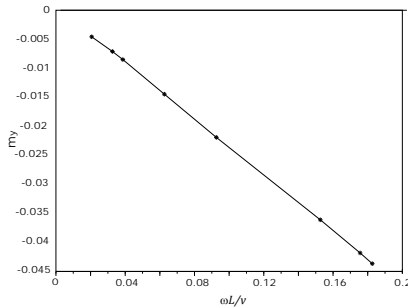


Рис. 2. Зависимость коэффициента момента рыскания от безразмерной угловой скорости удобообтекаемого тела.

Расчеты проведены для числа Рейнольдса, определенного по диаметру тела $Re = vD/\nu = 750$. Зависимость коэффициента момента от безразмерной скорости вращения представляет собой функцию, близкую к линейной. Линейную зависимость можно описать единственным параметром (вращательной производной) m_y^ω . Возникающий при появлении угловой скорости момент является демпфирующим, то есть стремится уменьшить угловую скорость.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента момента m_y от безразмерной скорости вращения для трех удлинений цилиндра $\lambda = L/D$.

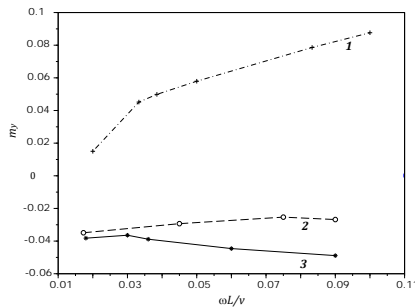


Рис. 3. Зависимость коэффициента момента рыскания от безразмерной угловой скорости цилиндров: 1 — $\lambda = 2$; 2 — $\lambda = 4.5$; 3 — $\lambda = 9$.

Зависимости являются существенно нелинейными. Для цилиндров большого удлинения $\lambda = 9$ и $\lambda = 4.5$ появление вращательной скорости ведет к возникновению демпфирующего момента. Уменьшение удлинения до $\lambda = 2$ ведет к изменению знака момента. Момент в этом случае стремится увеличить вращательную скорость. Таким образом, возмущение, заключающееся в появлении вращательной скорости, не затухает, а продолжает возрастать.

Исследования проведены с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Вычислительный центр».

Литература

- [1] Рябинин А. Н. Колебания маятника со стабилизатором в воздушном потоке // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 2. С. 71–77.
- [2] Гуржиенко Г. А. Метод искривленных моделей и применение его к изучению криволинейного полета воздушных кораблей. // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 182. 64 с.
- [3] Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Intern. J. Numerical Methods in Eng. 2009. V. 79. Issue 11. P. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579

- [4] Palacios F., et al. Stanford University Unstructured (SU2): An open-source integrated computational environment for multi-physics simulation and design // AIAA paper 2013-0287. 2013. 60 p. DOI: 10.2514/6.2013-287

Физическое моделирование колебаний груза со стабилизатором в воздушном потоке

Рябинин А.Н., Данилов А.В.

a.ryabinin@spbu.ru, danilovaleksandr@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В аэродинамической трубе малых скоростей изучаются колебания тела, имеющего форму параллелепипеда и снабженного стабилизатором. Ускорение тела и его вращательная скорость определяются с помощью акселерометра, соединенного с контроллером, являющимся аналогом широко распространенного контроллера Arduino. Получена зависимость амплитуды и характера колебаний от скорости набегающего потока. Сформулированы критерии подобия явления.

Ключевые слова: ускорение, вращательная скорость, аэродинамическая труба, колебания.

Ранее рассматриваемые математические модели колебаний груза, подвешенного под вертолетом или под подъемным краном получали свое подтверждение в физическом эксперименте только качественно. Например, в работе [1] изучались колебания цилиндра, отношение длины которого к диаметру было равно двум. Цилиндр был снабжен стабилизатором, ориентирующим груз в направлении, в котором лобовое сопротивление минимально. Математическая модель предсказала, что равновесное положение цилиндра неустойчиво, он совершает угловые колебания вокруг вертикальной оси. С развитием техники эксперимента появилась возможность физически моделировать подобные явления с регистрацией приборами колебаний груза.

В нашей работе изучались колебания груза, имеющего форму параллелепипеда с размерами $296 \times 114 \times 114$ мм. Параллелепипед изготовлен из дерева и имеет внутри полость. Груз имеет стабилизатор в кормовой части. Он подвешен на паукообразной подвеске в рабочей части аэродинамической трубы малых скоростей. Длина подвески 1040 мм. В полость груза помещен акселерометр GY-521 на основе микросхемы MPU 6050, соединенный с контроллером Piranha UNO. Отечественный контроллер Piranha UNO является усовершенствованным аналогом широко распространенного контроллера Arduino UNO.

Акселерометр может измерять три проекции силы, действующей на тело, на оси неинерциальной системы координат, жестко связанной с микросхемой. Если устройство неподвижно, проекция на вертикальную ось пропорциональна

ускорению силы тяжести. Кроме того, три гироскопа позволяют измерять три компоненты скорости вращения на оси связанной системы координат.

Программирование контроллера производится с помощью программы Arduino IDE на упрощенном варианте языка C. Arduino IDE создает виртуальный последовательный порт, через который происходит загрузка кода в контроллер и считывание показаний с контроллера. Контроллер соединен с компьютером экранированным кабелем, имеющим длину 6 м. Для удобства обработки данных измерений была написана небольшая программа на языке Free Pascal, считывающая из последовательного порта данные и записывающая результаты в текстовый файл. Таким образом, данные в файлах пригодны для последующей обработки. Каждый файл содержал 3000 считываний, производимых приблизительно за 100 с.

Характерным движением груза со стабилизатором на подвеске являются вращательные колебания вокруг оси подвески. Ось под действием воздушного потока отклоняется от вертикали на небольшой угол, который возрастает с увеличением скорости потока. Зависимости проекции скорости вращения груза на ось от скорости воздушного потока в рабочей части аэродинамической трубы представлены на рис. 1.

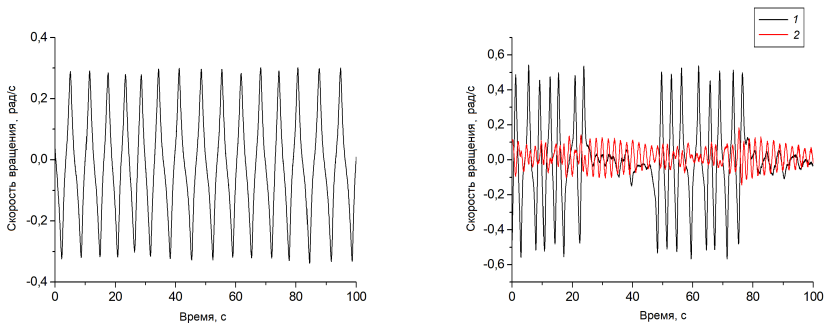


Рис. 1. Зависимость проекций скорости вращения груза от скорости воздушного потока: слева скорость потока равна 5.7 м/с; справа скорость потока равна 8.4 м/с, 1 — проекция на ось подвески, 2 — проекция на поперечную ось.

При малых скоростях воздушного потока вращательные колебания носят периодический характер, но их форма заметно отличается от гармонической. Математическая модель предсказывает гармонические колебания при условии, что возвращающий момент рыскания линейно зависит от угла отклонения. Можно ожидать, что при увеличении площади стабилизатора зависимость мо-

мента от угла скольжения приблизится к линейной и колебания больше будут похожи на гармонические.

Как демонстрирует правый график на рис. 1 при увеличении скорости потока периодические вращательные колебания по углу рыскания происходят с перерывами. Возрастают поперечные колебания по углу крена. Последние происходят с частотой колебаний груза как физического маятника.

Зависимости амплитуды колебаний угловой скорости по углу рыскания и частоты колебаний от скорости набегающего потока приведены на рис. 2.

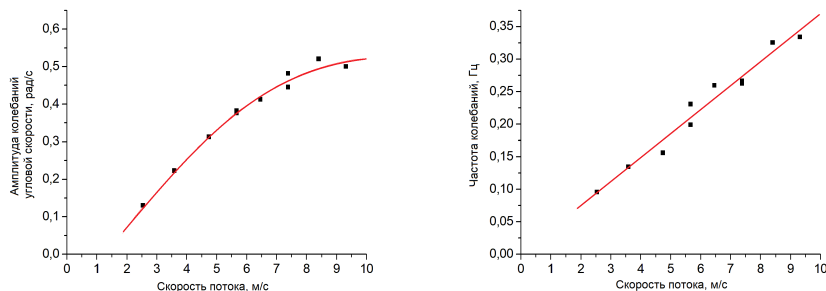


Рис. 2. Зависимости колебаний угловой скорости (слева) и частоты колебаний (справа) от скорости воздушного потока.

Амплитуда колебаний угловой скорости возрастает с увеличением скорости потока. Рост амплитуды замедляется при увеличении скорости потока. Частота колебаний практически линейно зависит от скорости потока, что находится в соответствии с предсказаниями математической модели [1] и с результатами, полученными в эксперименте с колебаниями цилиндра со стабилизатором, способным двигаться с одной степенью свободы [2].

Числами подобия в эксперименте с колебаниями груза в воздушном потоке, кроме чисел Рейнольдса и Струхала, являются отношение средних плотностей модели и среды $\rho L^3/m$ и число Фруда $Fr = v/\sqrt{gL}$. Здесь L — характерный размер, m — масса груза, v — скорость воздушного потока, g — ускорение свободного падения.

Литература

- [1] Рябинин А. Н. Колебания маятника со стабилизатором в воздушном потоке // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 2. С. 71–77.
- [2] Киселев Н. А., Рябинин А. Н. Вращательные колебания цилиндра со стабилизатором в потоке газа // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). Вып. 4. С. 672–679.

Анализ возможности использования метана и водорода в энергетических установках

Смирнов А.А., Циркунов Ю.М.

smirnov_aa@voenmeh.ru, yury-tsirkunov@rambler.ru

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Проводится анализ возможностей и проблем использования водорода и метана в качестве альтернативного керосину топлива в энергоустановках на примере жидкостного ракетного двигателя типа РД-107. Подробно рассматривается кинетика горения керосина, метана и водорода с учетом особенностей химических реакций. Моделируется процесс горения и движение продуктов сгорания по соплу и в истекающей струе. По результатам исследования сформулирован вывод о том, что использование водорода или метана, позволяет повысить характеристики двигателя, как с точки зрения расходных и тяговых характеристик, так и с точки зрения снижения негативного влияния продуктов сгорания на окружающую среду.

Ключевые слова: альтернативные топлива, водород, метан, криогенные топлива, жидкостные двигатели, энергетические установки.

В авиации и жидкостных ракетных двигателях основным топливом на протяжении уже более 70 лет, является керосин. В газовых турбинах на тепловых станциях, в судостроении и во многих других областях также используются углеводородные виды топлива, как правило, природный газ или метан. Сжигание углеводородных топлив приводит к эмиссии диоксида углерода (CO_2), который является парниковым газом и, как известно, негативно влияет не только на региональную, но и на глобальную экологию. Требования, предъявляемые к количеству и составу вредных выбросов при работе двигателей и энергетических установок, постоянно ужесточаются. После принятия в 2015 году Парижского соглашения о сокращении выбросов парниковых газов в мире существенно интенсифицировались исследования и разработки по изучению возможностей и созданию технологий использования более «чистых» топлив, в частности, водорода в авиадвигателях и энергетических установках. Использование водородно-воздушной смеси позволяет обеспечить устойчивое воспламенение в широком диапазоне концентрации водорода (по массовой доли от 4% до 75%) и стабильное горение как при обедненных так и богатых смесях. Керосин в смеси с воздухом не обеспечивает подобную возможность. В авиа- и жидкостных ракетных двигателях наряду с водородом рассматривается также возможность использования метана.

Целью данной работы является сравнительный анализ использования керосина, метана и водорода на примере ракетного двигателя типа РД-107. Подробно рассмотрена кинетика горения в кислороде каждого из топлив, численно

моделируется течение в камере сгорания и в сопловом канале. Расчеты выполнены в пакете ANSYS Fluent.

Важнейшим компонентом моделирования процессов в жидкостном ракетном двигателе является выбор модели горения и наиболее значимых химических реакций. Известно несколько моделей горения [1]. В данной работе приводится сравнение основных моделей горения с использованием пакета ANSYS Fluent и обосновывается выбор модели с конечными скоростями реакций (Finite-rate model). Эта модель учитывает скорость прямой и обратной химических реакций с использованием закона Аррениуса и позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом (сравнивались температура продуктов сгорания и концентрации компонент) для рассматриваемого класса задач. Подробная кинетика окисления водорода, метана или керосина в кислороде включает десятки и сотни элементарных реакций. Предварительные расчеты с использованием программы TERRA [2] позволили выделить те реакции, которые приводят к наибольшему тепловому эффекту и дают наибольшую концентрацию компонент в продуктах сгорания. Именно эти реакции учитывались в последующих газодинамических расчетах. Так при моделировании горения водорода в кислороде учитывались только 10 реакций.

Характерное число Рейнольдса в рассматриваемых течениях имеет порядок 10^7 и, следовательно, течение во всех случаях является турбулентным. Принятая модель течения основана на осредненных уравнениях Навье–Стокса. Для замыкания использовалась двухпараметрическая стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности, которая, как показывает анализ литературы (например, [3]), дает хорошее согласие результатов расчетов с экспериментальными данными по параметрам в выходном сечении сопла и по распределению параметров вдоль оси струи. Поскольку при некоторых условиях возможно догорание в струе, в данной работе моделировалось течение не только в камере сгорания и сопле, но и в струе. Течение считалось осесимметричным, использовался Density Based алгоритм [1].

Вычислительная область включала в себя камеру сгорания, сопло и внешнюю часть длиной 10 диаметров выходного сечения сопла и шириной 5 диаметров. В качестве граничных условий в выходных отверстиях на дне камеры сгорания, имитирующих форсунки, задавался массовый расход газообразных кислорода и горючего (Mass Flow Inlet), соотношение компонент на входе в камеру сгорания варьировалось, начальная температура исходных компонент была принята равной $T_{\text{inlet}} = 500$ К, на поверхности камеры сгорания и сопла задавалась температура $T_w = 500$ К (данное значение примерно соответствует реальной температуре в условиях охлаждения сопла и камеры сгорания), на удаленных границах задавались параметры окружающего пространства: давление (Pressure-Outlet) $p_\infty = 10^5$ Па и температура $T_\infty = 300$ К. На оси симметрии в меридиональной плоскости задавались условия симметрии. Ис-

пользовалась структурированная сетка. Было выполнено исследование сеточной сходимости численной модели по величине массового расхода в выходном сечении сопла, в результате была принята сетка 500 x 60 (500 ячеек в продольном направлении), коэффициент увеличения размеров соседних ячеек в периферийной области был принят равным 1,32; показатель ортогональности ячеек составлял 0,99.

В результате систематических численных расчетов было определено соотношение кислорода и каждого из горючих, обеспечивающее полное сгорание. Так, полное сгорание водорода в кислороде в двигателе обеспечивалось при массовом расходе водорода 7,1 кг/с и массовом расходе кислорода 65,9 кг/с. При этом давление в камере сгорания получилось равным 5,85 МПа, а степень нерасчетности струи $n = 1, 2$. Получены поля всех газодинамических параметров, включая число Маха, температуру, концентрации горючего, окислителя (кислорода), компонент продуктов сгорания и др.

Наряду с рассмотрением традиционной конфигурации сопла ЖРД типа РД-107 было выполнено также газодинамическое проектирование контура сверхзвуковой части сопел для каждого из топлив методом характеристик [4]. Такое профилирование контура направлено на предотвращение возможного появления ударных волн, связанного с обтеканием сверхзвуковым потоком вогнутых стенок сопла. Число Маха в выходном сечении сопла было задано равным $M_a = 3$. Спрофилированные сопла во всех случаях обеспечивали равномерный сверхзвуковой поток в выходном сечении. Контур сопел для рассмотренных топлив получились близкими друг другу. Это объясняется тем, что показатели адиабаты для продуктов сгорания керосина, метана и водорода в кислороде практически совпадают (для перечисленных топлив $\gamma = 1, 21; 1, 17$ и $1, 18$ соответственно). Полученные сопла имеют очень длинную сверхзвуковую часть, поэтому был исследован вопрос о влиянии уменьшения длины сверхзвуковой части сопел на потерю силы тяги при истечении в атмосферу с давлением 10^5 Па. Найдено, что заметное уменьшение тяги начинается при уменьшении длины сверхзвуковой части сопла в два раза и более.

Для полученных сопел так же, как и для исходной конфигурации РД-107, были выполнены численные расчеты горения и течения продуктов сгорания для каждого из топлив на основе осредненных уравнений Навье–Стокса в пакете ANSYS Fluent.

Как показало выполненное исследование газодинамики ЖРД с учетом процессов горения, использование водорода является более экономичным при фиксированном расходе кислорода (водорода требуется меньше, чем метана или керосина). При этом двигатель на водороде превосходит два других по величине силы тяги. Использование метана вместо керосина также имеет преимущества, которые заключаются в более низком расходе горючего, позволяя повысить экономичность двигателя, а также сократить вредные выбросы в окружающую

среду. Полученные результаты дают основания предположить, что использование метана и особенно водорода в качестве топлива не только в ЖРД, но также в газовых турбинах и других энергетических установках может повысить их эффективность с точки зрения расхода топлива, а также улучшить их технические характеристики. Кроме того, применение водорода в качестве топлива полностью решает проблему выброса оксидов углерода в атмосферу и тем самым существенно уменьшает негативное влияние на экологию. В то же время необходимо отметить, что при использовании в качестве окислителя воздуха вместо кислорода, например, в газовых турбинах или авиационных двигателях, сохраняется проблема эмиссии оксидов азота NO_x , которые образуются при высокой температуре и которые также наносят вред экологии. Эта проблема требует дальнейшего изучения.

Литература

- [1] ANSYS Fluent Theory Guide // ANSYS, Inc., USA. November 2013.
- [2] Трусов Б. Г. Программная система ТЕРРА для моделирования фазовых и химических равновесий при высоких температурах // III Международный симпозиум «Горение и плазмохимия», Алматы: Казак университета. 2005. С. 52–57.
- [3] Фишер Ю. В., Щеляев А. Е. Верификация расчетных характеристик сверхзвуковых турбулентных струй // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 1. С. 21–35.
- [4] Моисеев М. Г., Циркунов Ю. М. Основы аэрогазодинамики: учебное пособие. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2006. 144 с.

О развитии локальной турбулентности при отрывном обтекании местного асимметричного сужения круглой трубки

Смирнов Е. М., Гатаулин Я. А.

smirnov_em@spbstu.ru, yakov_gataulin@mail.ru

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Аннотация. Численно исследуются вопросы конвективной неустойчивости и возникновения локальной турбулентности при течении вязкой жидкости за местным сужением круглой трубки, имитирующем односторонний стеноз артерии. Развитие конвективной неустойчивости анализируется путем решения трехмерных уравнений Навье–Стокса при задании низкоамплитудных гармонических возмущений входного расхода. Возникновение локальной турбулентности при отсутствии входных возмущений исследуется на основе метода моделирования крупных вихрей.

Ключевые слова: отрывное течение, стеноз артерии, конвективная неустойчивость, локальная турбулентность, численное моделирование.

Введение. Течения вязкой жидкости с образованием областей отрыва и локальной турбулентности часто наблюдаются при патологических изменениях отдельных участков сосудистого русла. Здесь, прежде всего, следует отметить течения за стенозами той или иной формы, образовавшимися вследствие чрезмерного размера холестериновой бляшки, наросшей на стенке крупной артерии. Исследованиям переходных режимов течения в идеализированных (осесимметричных) моделях гемодинамически значимых стенозов посвящено множество работ (см., например, [1] и приведенную там литературу). Переходные и локально турбулентные течения за асимметричными стенозами изучены в меньшей степени. Недавние эксперименты в этом направлении представлены работами [2]–[5].

В настоящей работе представляются результаты численного моделирования течения вязкой жидкости в жесткой модели участка артерии с сильно выраженным асимметричным стенозом. Геометрия сужения (рис. 1) соответствует принятой в экспериментальных работах [2, 3, 5]. Параметр сужения $S = (1 - d_{\min}/D) \cdot 100\%$, где D — диаметр трубы до и за участком сужения, d — локальный диаметр проходного сечения на участке стеноза, общей длиной $2D$. Площадь минимального проходного сечения (при $x = 0$) составляет 30% от сечения трубы.

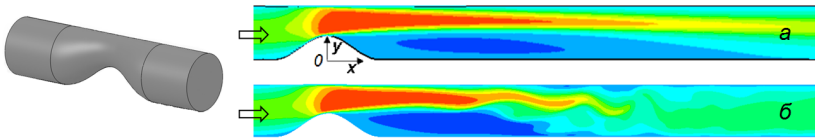


Рис. 1. Геометрия местного сужения трубки и поле актуальной продольной скорости, рассчитанное без наложенных возмущений (а) и при амплитуде колебаний расхода $A = 2\%$ (б); цветовая шкала охватывает значения скорости от $-0.8U$ до $4.2U$.

Конвективная неустойчивость. Возмущение потока на входе в участок сужения задавалось путем изменения актуальной среднерасходной скорости U_a во времени по гармоническому закону $U_a = U[1 + A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)]$. В каждый момент времени распределение скорости на входной границе (расположенной на расстоянии $5D$ от начала сужения) описывалось параболой Пуазейля. Выходная граница располагалась на расстоянии $20D$ от стеноза. Расчеты на сетке, включающей 4.5 млн. гексаэдральных элементов, выполнялись с применением программы ANSYS CFX. Варьировались частота f и амплитуда A колебаний. В качестве примера, на рис. 1 и рис. 2 приводятся результаты, полученные при задании безразмерной частоты $Sh = fD/U = 0.95$ для числа

Рейнольдса $Re = UD/\nu = 300$; при превышении этого значения Re в экспериментах [2] наблюдалось резкое сокращении длины отрывной зоны L за стенозом. Из рис. 2 видно, в частности, что при внесении возмущений с $A = 1\%$ расчетное значение L/D хорошо согласуется с данными экспериментов (уровень возмущений в которых не был определен).

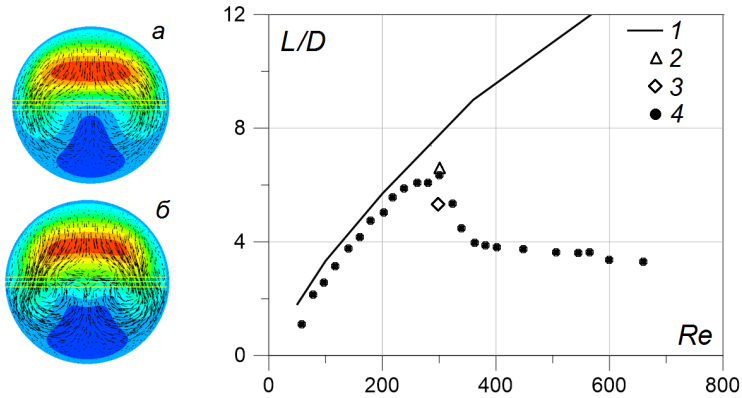


Рис. 2. Поля продольной и поперечной скоростей в сечении $x = 4.2D$, рассчитанные при $Re = 300$ без наложенных возмущений (а) и при амплитуде колебаний расхода $A = 1\%$ (б); длина отрывной зоны за стенозом: 1 — расчет без наложенных возмущений, 2 — при $A = 1\%$, 3 — при $A = 2\%$, 4 — экспериментальные данные [2].

Расчеты по методу моделирования крупных вихрей (LES).

Численное исследование явлений, обусловленных развитием локальной самоподдерживающейся турбулентностью в течении за стенозом, проводилось без внесения входных возмущений. Использовалась расчетная методика, ранее применявшаяся в [6] для анализа локальной турбулентности, развивающейся за рассматриваемым стенозом при числе Рейнольдса, равном 1800. Статистически стационарное течение при нескольких значениях Re , равном и меньших 1800, рассчитывалось по методу LES с применением динамической модели Джермано–Лилли для вычисления подсеточной вязкости. Расчеты также проводились на сетке, содержащей 4,5 млн. гексаэдральных элементов, с заданием на входе в расчетную область профиля Пуазейля. Выбранный шаг по времени обеспечивал во всей расчетной области локальные значения числа Куранта, меньшие единицы. Расчеты при $Re = 900$ и 1800, показывают в целом схожую картину течения за стенозом, характеризующейся существованием области самоподдерживающейся турбулентности, с относительно высоким уровнем рей-

нольдсовых напряжений и широким спектром вихревых образований (рис. 3). При $Re = 600$ самоподдерживающиеся интенсивные колебания потока наблюдаются лишь в конце отрывной зоны, при этом их пространственный спектр относительно беден. В случае $Re = 450$ самоподдерживающиеся колебания потока в расчетах не возникали.

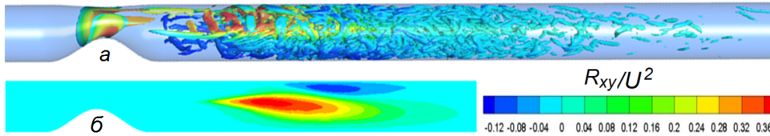


Рис. 3. Результаты LES расчетов для $Re = 1800$: визуализация вихревых структур раскрашенной по модулю скорости изоповерхностью Q -критерия (а) и поле реинольдсовых напряжений в плоскости симметрии (б).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 20-65-47018).

Литература

- [1] Griffith M. D., Leweke T., Thompson M. C., Hourigan K. Steady inlet flow in stenotic geometries: convective and absolute instabilities // *J. Fluid. Mech.* 2008. Vol. 616. P. 111–133.
- [2] Гатаулин Я. А., Зайцев Д. К., Смирнов Е. М., Федорова Е. А., Юхнев А. Д. Расчетно-экспериментальное исследование слабо закрученного течения в модели сосуда со стенозом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* 2015. Т. 230. № 4. С. 36–47.
- [3] Choi W., Park J. H., Byeon H. Flow characteristics around a deformable stenosis under pulsatile flow condition // *Physics of Fluids.* 2018. Vol. 30. Iss. 1. Art. 011902.
- [4] Freidoonimehr N., Chin R., Zander A., Arjomandiet V. Effect of shape of the stenosis on the hemodynamics of a stenosed coronary artery // *Physics of Fluids.* 2021. Vol. 33. Iss. 8. Art. 081914
- [5] Молочников В. М., Душин Н. С., Пашкова Н. Д., Гатаулин Я. А., Смирнов Е. М., Юхнев А. Д. Структура течения и переход к локальной турбулентности за асимметричным сужением, имитирующим стеноз артерии // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 2. С. 72–84.
- [6] Гатаулин Я. А., Смирнов Е. М. Численное исследование структуры и локальной турбуликации течения в кровеносном сосуде с односторонним стенозом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* 2021. Т. 14. № 1. С. 72–84.

Проведение полного цикла экспериментальных исследований для обеспечения аэроупругой устойчивости мостового сооружения

Соловьев С.Ю., Храпунов Е.Ф.

aerodynamics.spb@gmail.com, hrapunov.evgenii@yandex.ru

Крыловский государственный научный центр,

196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Аннотация. В работе представлено описание экспериментальных исследований, проводимых для обеспечения аэроупругой устойчивости мостовых сооружений. Описаны методы исследований отдельных гибких элементов вантового моста, а также всего моста как единой конструкции. Представлено описание моделей и экспериментальных стендов, используемых при проведении исследований на каждом этапе.

Ключевые слова: физический эксперимент, воздушный поток, гибкая конструкция, аэроупругая неустойчивость, мостовое сооружение.

Исследования, проводимые при проектировании сложного объекта, длительное время находящейся под действием ветра и обладающей достаточной гибкостью, обычно проходит в несколько этапов. Первый этап, как правило, заключается в определении аэродинамических характеристик отдельных элементов конструкции. В случае проектирования, например, вантового мостового сооружения, отдельно проводятся исследования для пролетного строения, отдельно — для гибкого пилона и отдельно для системы вантовой подвески. Аэродинамическими характеристиками, представляющими наибольший интерес, являются силы и моменты, действующие на элементы объекта со стороны воздушного потока, а также амплитуды колебаний и значения скоростей, при которых эти амплитуды регистрируются.

На втором этапе исследований основное внимание уделяется взаимовлиянию связанных элементов конструкции. Например, для вантовых мостов исследуется взаимовлияние пилона и мостового полотна, связанных системой гибких вант.

Несмотря на то, что отдельные результаты для реальных объектов могут быть получены с использованием аналитических соотношений (подходы нормативных документов) или с использованием численного моделирования, подобные методы не обеспечивают достаточную точность получаемых результатов для сложных конструкций реальных объектов. В настоящее время, единственным достоверным источником информации о характеристиках воздействия воздушного потока на систему гибких объектов является физический эксперимент, проводимый в аэродинамических трубах [1].

Цель настоящей работы — описать экспериментальные исследования, проведение которых на различных этапах проектирования позволяет получить

информацию о характере ветрового воздействия как на отдельные элементы объекта, так и его конструкцию в целом.

В качестве объекта исследования используется вантовый мост с длиной пролета более 250 м. Все описываемые в рамках настоящей работы экспериментальные исследования выполнены с использованием аэродинамических труб Крыловского государственного научного центра.

Проведение экспериментальных исследований требует решения нескольких задач. Во-первых, необходимо воспроизвести воздушный поток, обладающий определенными свойствами. Для первого этапа — определение характеристик отдельных элементов конструкции — допускается проведение экспериментальных исследований в однородном низкотурбулентном потоке. Для второго этапа — определение характеристик конструкции как единого целого — необходимо использование специализированной аэродинамической трубы, позволяющей моделировать особенности потока природного ветра. Подобные трубы обладают длинной рабочей частью с возможностью размещения в ней дополнительных элементов, обеспечивающих воспроизведение требуемой структуры потока. В рамках настоящей работы использовалась Ландшафтная аэродинамическая труба Крыловского научного центра [2].

Суть изучения аэродинамических характеристик отдельных элементов для рассматриваемого объекта заключались в следующем. Во-первых, проведены исследования аэроупругой устойчивости пролетного строения. С этой целью использовалась секционная динамически подобная модель. Такая модель обладает геометрическим подобием, а ее массово-жесткостные характеристики задаются системой гибких подвесов, находящихся вне потока.

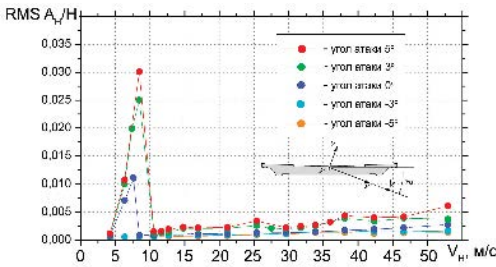


Рис. 1. Амплитуды колебаний пролетного строения.

результатов могут быть подобраны и апробированы методы гашения недопустимых колебаний.

На рис. 1 представлены значения амплитуд колебаний, полученных в результате экспериментальных исследований в низкотурбулентном потоке. Видно, что для полотна рассматриваемого мостового объекта наблюдается явление вихревое возбуждение — частота срыва вихревых структур с поверхности объекта совпадает с собственной частотой элемента, что приводит к росту амплитуд в узком диапазоне скоростей. На основании полученных

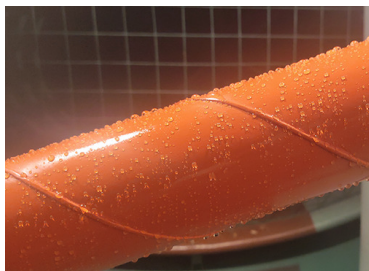


Рис. 2. Фотография модели ванты при совместном исследовании влияния дождя и ветра.

воспроизведение всех массово–жесткостных характеристик объекта в модельном масштабе. Для этого объект представляется как совокупность элемента, отвечающего за жесткостные свойства, и набора элементов, воспроизводящего массовые и геометрические свойства [3]. Подобные модели получили название динамически подобных. На рис. 3 представлена фотография модели вантового моста в рабочей части Ландшафтной аэродинамической трубы.



Рис. 3. Фотография полной динамически подобной модели вантового моста в рабочей части Ландшафтной аэродинамической трубы.

Важным этапом исследований является подтверждение аэроупругой устойчивости вант при одновременном действии дождя и ветра. Практически все ванты, используемые на натуральных объектах, изготавливаются с дополнительной навивкой, предотвращающей хаотичное стекание воды. Эффективность такого мероприятия должна быть подтверждена в ходе экспериментальных исследований. На рис. 2 представлена фотография модели ванты, позволяющего проводить исследования по совместному влиянию дождя и ветра.

При проведении исследований по определению характеристик воздействия на объект в целом требуется как воспроизведение структуры природного ветра, так и

Используемая динамически подобная модель спроектирована следующим образом. Центральным элементом мостового полотна является П-образный металлический стержень. Корытная форма поперечного сечения стержня позволяет точно смоделировать жесткость полотна не только на изгиб, но и на кручение. На гибком стержне закреплены жесткие обводы, не соединенные между собой. Геометрическая форма обводов подобна форме натуральных участков, которые они моделируют. Масса каждого участка полотна рассчитывается исходя из критериальных соотношений и необходимое значение достигается с помощью использования латунных и свинцовых грузов внутри пространства обводов. Важно подчеркнуть, что распределение массы внутри обвода не является произвольным, а рассчитано таким образом, чтобы обеспечить нужное значение массового момента инерции. При проектировании пилонов использована аналогичная схема.

Отдельно отметим, что для корректного воспроизведения работы вантовой подвески в воздушном потоке использована следующая схема. Равномерно по всей длине троса, моделирующего ванту, коаксиально размещены цилиндрические элементы, диаметр, длина и количество которых подбираются исходя из требований подобия по суммарному аэродинамическому сопротивлению. На одном из концов троса располагается пружина растяжения, подобранная таким образом, чтобы суммарная жесткость при растяжении троса и пружины была пропорциональна жесткости ванты натурального моста для выбранного масштаба [4].

Проектирование и создание динамически подобных моделей является трудоемким и достаточно длительным процессом, но дальнейшее их использование модели в воздушном потоке с заданными свойствами позволяет получить характеристики динамического отклика — перемещений и ускорений без привлечения полумпирических или аналитических методик.

Литература

- [1] Simiu E., Yeo D. *Wind Effects on Structures. Modern Structural Design for Wind*, 4th ed. John Wiley and Sons Limited, 2019. 495 p.
- [2] Solovev S. Yu., Khrapunov E. F. Modeling of the mean loads on structures // *Magazine of Civil Engineering*. 2019. Vol. 88(4). P. 42–51. doi: 10.18720/MCE.88.4
- [3] Larsen A. *Aerodynamics of Large Bridges*, 1st ed. Routledge, 1992. 320 p.
- [4] Устройство для моделирования характеристик натуральных вант в упругоподобных моделях мостов. Патент RU 180 016 U1. 2018. Бюл. № 16.

Методы экспериментального определения динамического отклика гибкой конструкции на воздействие развитого турбулентного потока

Храпунов Е.Ф., Соловьев С.Ю., Новиков А.Н., Можайский С.А.

hrapunov.evgenii@yandex.ru, aerodynamics.spb@gmail.com,

artemnovikov89@gmail.com, mozhay@mail.ru

Крыловский государственный научный центр,

196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Аннотация. В работе представлено описание методов исследования динамического отклика гибких сооружений на развитый турбулентный поток. Представлены два подхода, один из которых позволяет проводить оперативную оценку искомых характеристик, а второй обеспечивает получение точных значений усилий и перемещений элементов объекта. Сопоставление результатов, полученных с использованием обоих методов, позволяет выделить ограничения, возникающие при проведении оперативной оценке характеристик динамического отклика.

Ключевые слова: физический эксперимент, воздушный поток, гибкая конструкция, аэроупругая неустойчивость, пограничный слой атмосферы.

Введение. Целью большинства исследований в задачах внешнего обтекания объекта потоком сплошной среды является определение аэродинамических характеристик объекта, например аэродинамических сил и моментов, действующих на него со стороны потока, или распределения давления сплошной среды на его поверхностях. В случае, если исследуемый объект обладает достаточной жесткостью, или воздействующий на него поток не обладает достаточной интенсивностью, то перечисленные характеристики позволяют в полной мере описать взаимодействие в системе «поток сплошной среды — твердое тело».

В конфигурациях, когда исследуемый объект является гибкой конструкцией, воздействие воздушного потока на него может приводить к возникновению и развитию большого количества разнообразных явлений. Наиболее опасными из них являются явления потери аэроупругой устойчивости, при развитии которых воздействие потока, не характеризующегося высокими значениями скоростей, способно вызывать значительные по амплитуде колебания [1]. Описываемая постановка задачи в конфигурации «поток сплошной среды — гибкое твердое тело» наиболее активно исследовалась применительно к задачам уникального и высотного строительства [2], например, башни комплекса Москва–Сити, башня Лахта, башня Бурдж–Халифа, флагштоки и пр.

Актуальность проводимых исследований обеспечивается в том числе разнообразием форм проектируемых сооружений, а также уникальностью конструктивных схем, что приводит к невозможности стандартизации распределения

параметров объекта по его высоте (массы, жесткости, массового момента инерции и пр.).

Цель настоящей работы — описать наиболее востребованные методы экспериментального определения динамического отклика гибкой конструкции на воздействие развитого турбулентного потока, которые варьируются по сложности использования, консервативности получаемых результатов и срокам выполнения соответствующих исследований.

Постановка проводимых исследований. Стоит подчеркнуть, что за всю историю проектирования зданий и сооружений в различных странах сформированы нормативные документы, позволяющие проводить оценку динамического отклика конструкции на воздействие ветра с той или иной степенью точности [3, 4]. Общим недостатком нормативных подходов является возможность их использования только для типовых сооружений. Единственным же достоверным источником информации о характеристиках взаимодействия в системе «поток сплошной среды — гибкое тело» является физический эксперимент, проводимый в специализированных аэродинамических трубах. Подтверждение этого факта, в частности, приводится в перечисленных нормативных документах.

Проведение экспериментальных исследований требует выполнения следующих основных этапов. Во-первых, необходимо воспроизвести воздушный поток, обладающий необходимыми свойствами. Для задач строительной аэродинамики характеристики потока должны соответствовать характеристикам пограничного слоя атмосферы [1]. Для воспроизведения характеристик потока используются специализированные аэродинамические трубы, обладающие длинной рабочей частью с возможностью размещения в ней дополнительных элементов, обеспечивающих воспроизведение требуемой структуры потока. Одновременно с этим рабочая часть должна быть широкой, что с одной стороны позволяет проводить исследования на моделях крупного масштаба с сохранением важных деталей фасада, с другой — моделировать окружающую застройку и элементы ландшафта. Исследования, результаты которых представлены в настоящей работе выполнены в Ландшафтной аэродинамической трубе Крыловского научного центра [5].

Вторым немаловажным этапом проведения исследований является проектирование и создание модели реального объекта. Наиболее корректным подходом при этом является воспроизведение всех массово-жесткостных характеристик объекта в лабораторном масштабе. Для этого объект представляется как совокупность элемента, отвечающего за жесткостные свойства, и набора элементов, воспроизводящего массовые и геометрические свойства. Подобные модели получили название динамически подобных. Проектирование и создание динамически подобной модели является трудоемким и достаточно длительным процессом, но дальнейшее использование модели в воздушном потоке с задан-

ными свойствами позволяет сразу же получить характеристики динамического отклика — перемещений и ускорений.

Однако учитывая количество изменений, которое претерпевает конструктивная схема сооружения на протяжении всего этапа проектирования, на практике возникает необходимость использования упрощенных методов, позволяющих оперативно получать оценочные но достоверные значения характеристик динамического отклика. Подобный метод получил название HFFB и суть его заключается в следующем. При проведении исследований используется жесткая модель, воспроизводящая только геометрические характеристики объекта. Измеряемыми величинами в таком случае являются силы и моменты, действующие со стороны развитого турбулентного потока на жесткую модель, а также их спектральные и пульсационные характеристики.

Таким образом, воздействие ветра может быть представлено в виде трех составляющих: статического воздействия; фоновой нагрузки, возникающий в результате того, что энергетический спектр потока является заполненным; динамического отклика, возникающего в окрестности собственной частоты здания. Важно подчеркнуть, что динамический отклик не описывает характеристики аэроупругой неустойчивости и в общем случае только показывает гипотетическую возможность ее развития.

В рамках настоящих исследований рассматриваются два круговых цилиндра конечного удлинения, установленные на поворотном круге Ландшафтной аэродинамической трубы. Расстояние между центрами цилиндров равно четырем диаметрам. Распределение массы по высоте цилиндра принято равномерным, жесткости на изгиб вдоль двух координатных осей приняты равными между собой и монотонно убывающими в соответствии с экспоненциальным законом. Значения жесткостей приняты такими, чтобы не допустить развития аэроупругих неустойчивостей при воздействии ветра со свободных направлений. Схема расположения тел и система отсчета углов набегающего потока приведена на рис. 1.

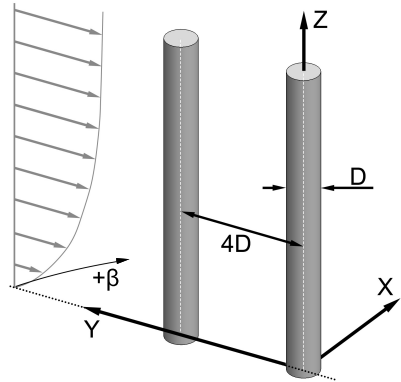


Рис. 1. Схема объектов исследования.

Результаты исследований. На рис. 2 представлено сравнение результатов, полученных с использованием динамически подобной и жесткой моделей. Сравнение произведено по силам, действующим в уровне основания

цилиндров. Видно, что для углов натекания потока, при которых не наблюдаются развития аэроупругой неустойчивости, использование метода HFFB и динамически-подобной модели показывают близкие результаты. В случае развития аэроупругой неустойчивости значения, полученные с использованием метода HFFB, оказываются существенно выше, чем значения, полученные с использованием динамически-подобной модели.

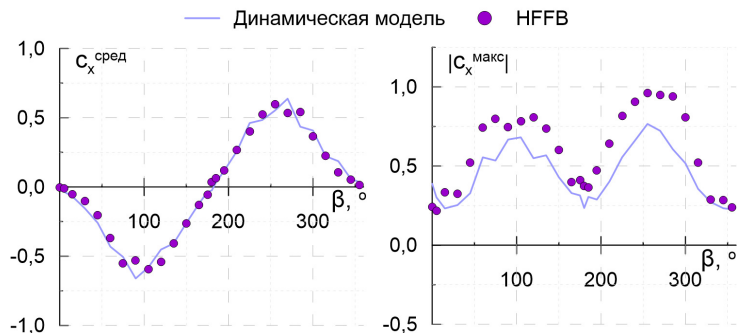


Рис. 2. Сравнение средних и полных (с учетом отклика) значений X-компоненты аэродинамической силы, действующей в уровне основания исследуемого объекта.

Полученный результат может быть объяснен тем, что при использовании метода HFFB отсутствует возможность корректного учета таких факторов как: аэродинамическое демпфирование и перераспределение нагрузки по высоте объекта.

Литература

- [1] Simiu E., Yeo D. Wind Effects on Structures. Modern Structural Design for Wind, 4th ed. John Wiley and Sons Limited, 2019. 495 p.
- [2] Boggs D. W., Peterka J. A. Aerodynamic Model Tests of Tall Buildings // Journal of Engineering Mechanics. 1989. Vol. 115. No. 3. P. 618–635. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:3(618)
- [3] Попов Н. А. Рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки, 2000. 43 с.
- [4] ASCE/SEI 7-22. Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures, American Society of Civil Engineers, 2020. 1046 p.
- [5] Solovev S. Yu., Khrapunov E. F. Modeling of the mean loads on structures // Magazine of Civil Engineering. 2019. Vol. 88(4). P. 42–51. doi: 10.18720/MCE.88.4

Секция 4

Физико-химическая
аэромеханика

*Physico-chemical
aeromechanics*

Исследование влияния диффузии и объемной вязкости на структуру ударной волны в смеси $\text{CO}_2\text{-Ar}$

Баталов С.А., Кустова Е.В.

st076569@student.spbu.ru, e.kustova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Исследуется структура ударной волны в смеси углекислого газа и аргона в рамках континуального подхода в одномерной постановке. Строится многотемпературная модель, основанная на расширенных уравнениях Навье–Стокса и учитывающая различные каналы колебательной релаксации, сдвиговую и объемную вязкость, диффузию, теплопроводность различных колебательных мод. Численное моделирование осуществляется методом конечных объемов с применением приближенного решения задачи о распаде разрыва. Оценивается влияние диффузии и объемной вязкости на тепловые потоки и макропараметры за фронтом ударной волны.

Ключевые слова: ударная волна, многотемпературная модель, время релаксации, скорость диффузии, объемная вязкость.

Введение. Задача моделирования ударной волны имеет серьезное прикладное значение в различных отраслях науки и техники, она часто используется в качестве эталонной задачи для оценки применимости и надежности математических моделей и численных методов. В настоящей работе обобщается теоретическая модель, предложенная в [1] для однокомпонентного углекислого газа, путем добавления еще одного компонента — аргона, с целью последующего исследования влияния диффузии и вязкости на параметры течения. Расчет констант колебательного энергообмена основывается на экспериментальных данных [2]. Для численного моделирования ударной волны используется метод конечных объемов [1, 3], задача о распаде разрыва решается приближенно методом HLL (Ami Harten, Peter Lax, Bram van Leer) [4].

Многотемпературная модель. Система уравнений динамики в одномерной постановке, дополненная уравнениями релаксации для колебательных энергий соответствующих мод молекулы CO_2 , примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho_{\text{Ar}} \\ \rho_{\text{CO}_2} \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho_{\text{CO}_2} E_{12} \\ \rho_{\text{CO}_2} E_3 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho_{\text{Ar}}(v + V_{\text{Ar}}) \\ \rho_{\text{CO}_2}(v + V_{\text{CO}_2}) \\ \rho v^2 + P_{xx} \\ \rho v(E + \frac{v^2}{2}) + q + P_{xx}v \\ \rho_{\text{CO}_2} v E_{12} + q_{12} \\ \rho_{\text{CO}_2} v E_3 + q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{12} \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

здесь V_c — скорость диффузии сорта c , R_{12} и R_3 — скорости колебательной релаксации, P_{xx} — тензор напряжений (скаляр), ρ_c — массовая плотность сорта c , v — скорость течения, q_{12} , q_3 — потоки колебательной энергии в различных модах, q — суммарный тепловой поток, E — полная внутренняя энергия.

В текущей постановке имеем две температуры T_{12} и T_3 для комбинированной (симметричной и деформационной) и асимметричной мод, температуру T для поступательно-вращательных степеней свободы и соответствующие этим температурам энергии E_{12} , E_3 , $E_{tr,rot}$, отнесенные к единице массы газа:

$$E_{tr,rot} = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_{CO_2}}, \quad E_3 = \frac{1}{m_{CO_2} Z_3(T_3)} \sum_{i_3} s_{i_3} \varepsilon_{i_3} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{i_3}}{kT_3}\right),$$

$$E_{12} = \frac{1}{m_{CO_2} Z_{12}(T_{12})} \sum_{i_1, i_2} s_{i_1, i_2} \varepsilon_{i_1, i_2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{i_1, i_2}}{kT_{12}}\right),$$

где $s_{i_1, i_2} = i_2 + 1$, $s_{i_3} = 1$ — статистические веса объединенной и антисимметричной мод, $Z_{12}(T_{12})$ и $Z_3(T_3)$ — соответствующие колебательные статистические суммы, m_{CO_2} — масса молекулы CO_2 , ε_{i_1, i_2} и ε_{i_3} — энергии соответствующих колебательных уровней.

Релаксация в комбинированной и антисимметричной модах включает вклад внутримодового обмена поступательной и колебательной энергиями VT_2 , а также межмодовых обменов энергией VV_{2-3} , VV_{1-2-3} между антисимметричной и другими колебательными модами:

$$R_{12} = R_{12}^{VT_2} + R_{12}^{VV_{2-3}} + R_{12}^{VV_{1-2-3}}, \quad R_3 = R_3^{VV_{2-3}} + R_3^{VV_{1-2-3}}.$$

Скорость колебательной релаксации в каждой моде R_{12} , R_3 вычисляется с помощью формул Ландау–Теллера:

$$R_{vibr}^\alpha = \rho_{CO_2} \frac{E_{vibr}(T_{eq}^\alpha) - E_{vibr}(T_{vibr})}{\tau_\alpha},$$

здесь $\alpha = VT_2, VV_{2-3}, VV_{1-2-3}$, E_{vibr} , T_{eq}^α , T_{vibr} — энергия, равновесная и текущая температуры соответствующей колебательной моды, τ_α — время релаксации соответствующего процесса энергообмена [2].

Важно отметить, что в данной работе учитывается не только сдвиговая вязкость η , но и объемная вязкость ζ углекислого газа, так как известно, что ее воздействие на форму фронта ударной волны может быть существенным [1]. Единственную компоненту тензора напряжений можно записать в виде:

$$P_{xx} = p - \left(\frac{4}{3} \eta(T, n_{CO_2}, n_{Ar}) + \zeta(T, n_{CO_2}, n_{Ar}) \right) \frac{\partial v}{\partial x},$$

здесь p — давление газа. Также запишем выражение для скорости диффузии и диффузионной термодинамической силы:

$$V_c = - \sum_d D_{cd} d_d - D_{T_c} \frac{\partial}{\partial x} \ln T, \quad d_c = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_c}{n} \right) + \left(\frac{n_c}{n} - \frac{\rho_c}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln p, \quad (2)$$

где D_{cd} , D_{T_c} — коэффициенты многокомпонентной диффузии и термодиффузии, n — общая концентрация, n_c — концентрация сорта c . При вычислении потоков полной и колебательной энергии вводятся коэффициенты теплопроводности поступательно-вращательных и различных колебательных мод.

Метод конечных объемов. Для численного моделирования течения используется метод конечных объемов [1]. Запишем систему уравнений движения в дискретной форме:

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^n - \Delta t \left(\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \mathbf{R}_i^n \right), \quad (3)$$

где \mathbf{V}_i^n — вектор консервативных переменных в ячейке (малом объеме) i в дискретный момент времени n , $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n$ — вектор потоковых членов на границах ячейки i в момент времени n , \mathbf{R}_i^n — вектор релаксационных членов.

Вычисление значений векторов потоков на стыках ячеек выполняется в соответствии с методом HLL [4]:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{S^+ \mathbf{F}_i - S^- \mathbf{F}_{i+1}}{S^+ - S^-} + \frac{S^+ S^-}{S^+ - S^-} (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i), \quad (4)$$

где $S^+ = \max(0, S_R)$, $S^- = \min(0, S_L)$, S_L , S_R — скорости распространения соответствующих возмущений. Шаг по времени ограничивается в соответствии с критерием Куранта–Фридрихса–Леви: $\Delta t = C_{\text{eff}} \Delta x / S_{\text{max}}$.

Результаты. Задача о структуре ударной волны в смеси углекислого газа и аргона в данной постановке решалась для различных начальных концентраций компонентов смеси. Было изучено влияние диффузии и объемной вязкости на напряжение и тепловые потоки, форму фронта и распределение макропараметров за ударной волной.

На рис. 1 изображены профили давления и изменения молярной доли углекислого газа с учетом и без учета влияния объемной вязкости и скорости диффузии. Ширина фронта ударной волны уменьшается, если модель не учитывает коэффициент объемной вязкости, при этом скорость диффузии оказывает меньшее воздействие на давление, чем объемная вязкость. Изменение молярной доли CO_2 достигает меньших значений в пике, если влияние объемной вязкости учтено.

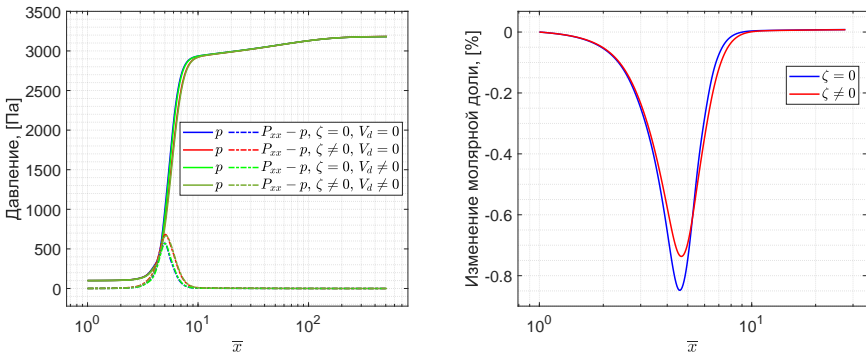


Рис. 1. Профили давления (слева) и изменения молярной доли углекислого газа (справа) с учетом и без учета влияния объемной вязкости и скорости диффузии, $\bar{x} = x/\lambda_L$, где λ_L — средняя длина свободного пробега частиц перед ударной волной. Начальные условия: $p = 100$ Па, $T = T_{12} = T_3 = 300$ К, $M = 5$, $x_{\text{CO}_2} = 0.5$.

Закключение. В рамках континуального подхода в первом приближении метода Чепмена–Энскога была построена трехтемпературная модель неравновесного течения смеси углекислого газа и аргона с учетом различных каналов колебательной релаксации, сдвиговой и объемной вязкости, диффузии, теплопроводности различных колебательных мод CO_2 . Была создана моделирующая программа, основанная на методе конечных объемов и использующая алгоритм HLL для решения задачи о распаде разрыва. Для нескольких тестовых случаев проведены оценки роли объемной вязкости и диффузии в неравновесном течении смеси.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-19-00241.

Литература

- [1] Alekseev I., Kustova E. Extended continuum models for shock waves in CO_2 // *Physics of Fluids*, 2021. Vol. 33(9). P. 096101. doi: 10.1063/5.0062504
- [2] Ачасов О.В., Рагозин Д. С. Константы колебательного энергообмена в лазерно-активных средах CO_2 -ГДП с добавками O_2 , H_2 , H_2O и CO // Минск, ИТМО, 1986.
- [3] Алексеев И. В., Кустова Е. В. Численное моделирование ударной волны в вязком углекислом газе методом конечных объемов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2020. Т. 7(65). Вып. 3. С. 500–510. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.312>

- [4] Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics // Berlin: Springer-Verlag, 1997.

О неопределенности моделирования траектории, скорости, массы и энерговыделения метеороида в атмосфере, связанной с моделью абляции

Брыжина И.Г., Егорова Л.А.

shantii@mail.ru, egorova@imec.msu.ru

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,

119991, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

Аннотация. Взаимодействие с атмосферой метеорного тела или его фрагментов моделируется путем численного решения уравнений метеорной физики, в которых определяющими параметрами являются коэффициент теплопередачи и теплота абляции. Исследуется, как влияет неточность задания этих параметров на моделируемые характеристики — траекторию, скорость, массу и энерговыделение метеороида, при разных начальных скоростях, размерах и углах входа в атмосферу.

Ключевые слова: метеороид, астероид, коэффициент теплопередачи, теплота абляции.

Введение. Одним из основных процессов, которые необходимо учитывать при моделировании взаимодействия метеороидов с атмосферой, является их абляция (унос массы). Сложность моделирования абляции и движения небесных тел связана с недостаточностью данных по радиационному тепловому потоку и теплоте абляции в метеорном диапазоне параметров, т.к. результаты численных и экспериментальных исследований этих параметров, полученные для космических аппаратов, большей частью не применимы для небесных тел, входящих в атмосферу с более высокими скоростями. Для решения уравнений метеорной физики надо не только знать эти параметры, но и представить их в виде аналитической зависимости от скорости, размера тела и плотности атмосферы. Обзор таких зависимостей для радиационного теплового потока к космическим аппаратам приведен в [1]. В более широком диапазоне параметров подобная зависимость была получена в [2]. Однако в этой зависимости остается некоторая неопределенность, связанная, в частности, с тем, что при численных расчетах не учитывался ряд физических явлений. Механизм уноса массы меняется по мере торможения метеороида, который подвергается как испарению, плавлению, так и механическому уносу (эрозия). В [3] проведена интерполяция эффективной теплоты абляции между теплотой испарения и теплотой плавления (эрозией) в зависимости от скорости полета. В литературе коэффициент теплопередачи и теплота абляции полагаются постоянными. В этой работе для теплоты абляции используется как зависимость от скорости [3], так и постоянные значения, для коэффициента теплопередачи используется корреляционное

соотношение [2] с введенным в него фактором неопределенности. Оценивается погрешность моделирования взаимодействия метеороида с атмосферой, связанная с заданием модели абляции, при разных начальных параметрах.

Постановка задачи. Взаимодействие с атмосферой метеороида или его фрагментов (после разрушения) моделируется в рамках обобщенных уравнений метеороидной физики [4], описывающих его торможение, траекторию, унос массы и энерговыделение

$$\begin{aligned} M \frac{dV}{dt} &= -\frac{\pi}{2} R_s^2 C_D \rho V^2 + Mg \sin \theta, \quad \frac{dM}{dt} = -\frac{\pi}{2} \frac{C_H}{Q} R_s^2 \rho V^3, \\ \frac{dh}{dt} &= -V \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{g \cos \theta}{V} - \frac{V \cos \theta}{R_\oplus + h}, \\ \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{V \sin \theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{MV^2}{2} \right), \quad \rho = \rho_0 \exp \left(\frac{h}{h^*} \right), \quad M = \frac{4\pi\delta}{3} R_s^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, V , M , δ и R_S — скорость, масса, плотность и радиус миделева сечения метеороида, θ — угол наклона траектории по отношению к касательной к поверхности Земли, h — высота полета, C_D — коэффициент лобового сопротивления, g — ускорение силы тяжести, R_\oplus — радиус Земли, ρ — плотность атмосферы, $\rho_0 = 1.29 \text{ кг/м}^3$, $h^* = 7 \text{ км}$, C_H — коэффициент теплопередачи, Q — эффективная теплота абляции, dE/dh — кинетическая энергия E на единицу высоты. Атмосфера считается изотермической, а метеороид — сферическим.

Определяющие параметры уравнений (1) — коэффициент теплопередачи C_H и эффективная теплота абляции Q . Для C_H использовалось аппроксимационное соотношение, учитывающее его зависимость от скорости метеороида V , радиуса затупления R и плотности атмосферы ρ : $C_H(V, R, \rho) = \psi(C_{Hr} + C_{Hc})$, где C_{Hr} и C_{Hc} — коэффициенты радиационной и конвективной теплопередачи. В соотношение для C_H введен параметр неопределенности ψ для оценки влияния существующей неопределенности теплового потока на результаты моделирования. Для теплоты абляции использовалась предложенная корреляционная зависимость от скорости полета $Q(V)$, а также принятые в литературе постоянные значения: $Q = 8$ и $2 \text{ км}^2/\text{с}^2$ (теплоты испарения и плавления обыкновенных хондритов и железных метеоритов).

Результаты и обсуждение. Для моделирования взаимодействия метеороида с атмосферой уравнения (1) решались численно методом Рунге–Кутты. Было проведено много расчетов с варьированием начальных данных, параметр неопределенности ψ в выражении для коэффициента теплопередачи варьировался от 0 (отсутствие абляции) до 1.2, теплота абляции задавалась как постоянной, так и переменной $Q(V)$. Начальная скорость V_e менялась от 12 до 21 км/с, что соответствует скоростям входа крупных метеороидов. На-

чальный радиус R_e менялся от 10 см до 1 м, угол входа в атмосферу θ_e — от 15° до 90° .

Влияние способов задания коэффициента теплопередачи C_H (параметра ψ) и теплоты абляции Q при разных начальных скоростях V_e на изменение массы метеороида показано на рис. 1.

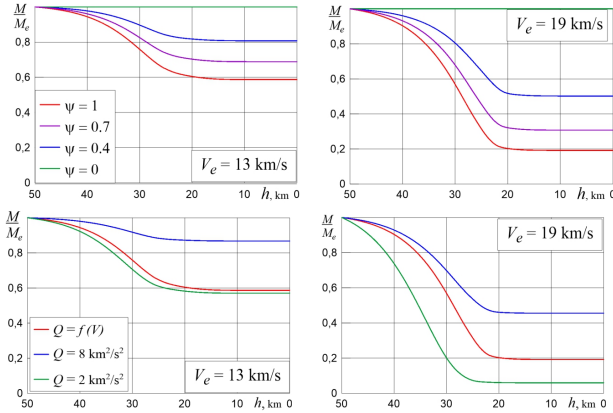


Рис. 1. Относительная масса M/M_e при разных C_H (ψ), Q и V_e ($R_e = 30$ см).

Рисунок 2 демонстрирует влияние способов задания C_H и Q на энерговыделение при разных V_e .

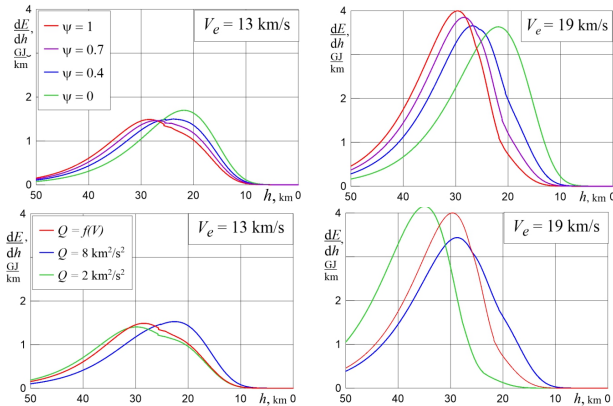


Рис. 2. Энерговыделение dE/dh при разных C_H (ψ), Q и V_e ($R_e = 30$ см).

Наибольшее влияние неопределенность коэффициента теплопередачи оказывает на унос массы метеороида, разброс расчетов при разных ψ возрастает с увеличением размера R_e . С увеличением скорости V_e возрастает влияние параметра ψ на погрешность моделирования массы метеороида и скорости, а разница между предсказываемыми высотами, где достигается пик энерговыделения, слабо зависит от V_e . Способ задания теплоты абляции оказывает наибольшее влияние на унос массы, но заметно влияет и на скорость, и на энерговыделение метеороида. Скорость V_e заметно сказывается на характере влияния Q на все рассчитываемые характеристики. Результаты расчетов при Q , равной теплоте плавления, и при переменной $Q(V)$ близки друг к другу при небольших V_e . Результаты расчетов при Q , равной теплоте испарения, и при $Q(V)$ далеки друг от друга любых V_e .

Траектории метеороида $h(l)$, где l — расстояние вдоль горизонтальной поверхности Земли, при разных C_H , Q и θ_e показаны на рис.3.

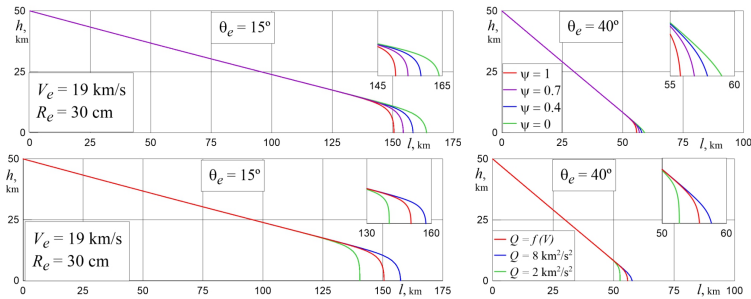


Рис. 3. Траектория метеороида при разных C_H (ψ), Q и θ_e .

Точка пересечения траектории с горизонтальной осью показывает место падения на землю неиспарившейся массы (метеорита). Значение начального угла θ_e слабо сказывается на характере влияния способов задания C_H и Q на результаты расчета массы, скорости и энерговыделения, и в то же время θ_e существенно сказывается на характере влияния C_H и Q на результаты расчета траектории и мест падения метеороидов. Чем меньше начальный угол, тем сильнее это влияние и значительнее разброс результатов моделирования заключительного участка траектории и, соответственно, мест падения метеороидов.

Заключение. Оценено влияние способов задания коэффициента теплопередачи C_H и теплоты абляции Q на моделируемые характеристики метеороида: траекторию, скорость, потерю массы, энерговыделение и места выпадения неиспарившейся массы (метеорита). Исследовано влияние начальных парамет-

ров: скорости, размера (массы) и угла наклона траектории на разброс результатов расчетов при разных способах задания C_H и Q .

Литература

- [1] Суржииков С. Т., Шувалов М. П. Тестирование расчетных данных по радиационному и конвективному нагреву спускаемых космических аппаратов нового поколения // ТВТ. 2013. Т. 51. № 3. С. 456–470.
- [2] Брыкина И. Г., Егорова Л. А. Аппроксимационные формулы для радиационного теплового потока при больших скоростях // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 4. С. 123–134.
- [3] Брыкина И. Г., Егорова Л. А. О влиянии эффективной теплоты абляции на моделирование взаимодействия метеороидов с атмосферой // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23. № 2. С. 74–89.
- [4] Брыкина И. Г., Егорова Л. А. Моделирование движения, абляции и энерговыделения метеороида в атмосфере с учетом криволинейности траектории // Физ.-хим. кинетика в газ. динамике. 2020. Т. 21. № 2. С. 3.

Динамика кластеров в сверхзвуковой недорасширенной струе

Быков Н.Ю.,¹ Горбачев Ю.Е.,^{2,3} Деринг Е.Д.,² Фёдоров С.А.^{1,2}
nbykov2006@yandex.ru, yuriy.gorbachev@gmail.com, e.dering@g.nsu.ru,
stanislav.fedorov@ya.ru

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29Б,

²Новосибирский государственный университет,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Пирогова, 2,

³ООО «Софт-Импакт»,

194044, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Выборгская наб., 49

Аннотация. Методом прямого статистического моделирования проведено численное исследование динамики кластеров в сверхзвуковой затопленной струе. Для рассмотренного диапазона параметров в поле течения формируется характерная ударно-волновая структура, содержащая висячие скачки и центральный скачок. Основное внимание уделено исследованию трансформации размерного распределения кластеров при прохождении скачков.

Ключевые слова: сверхзвуковая струя, ударно-волновая структура, кластеры, прямое статистическое моделирование.

Исследованию влияния частиц на параметры течения в соплах и сверхзвуковых струях посвящено достаточно много работ [1]. Показано, что добавление алюминиевых частиц микронного размера в струю азота, истекающую в затопленное пространство, приводит к уменьшению расстояния до центрального

скачка [2]. Частицы твердой/жидкой фазы в струе могут иметь не только искусственное происхождение, но и быть продуктами процесса конденсации газа, протекающего непосредственно в области течения. Средний размер кластеров, наблюдаемый в дальнем поле сверхзвуковой струи зависит от давления, температуры торможения газа в камере и геометрических параметров сопла [3]. В работе [4] продемонстрирован эффект влияния конденсации на характерные размеры ударно-волновой структуры (УВС), в том числе увеличение поперечных размеров струи. Изучение влияния процесса конденсации на структуру и характерные размеры сверхзвуковой струи продолжено в [5]. Помимо прямого влияния процесса кластерообразования на структуру и параметры течения в затопленной сверхзвуковой струе представляет интерес и обратное влияние — наличия УВС на параметры кластеров, пересекающих скачки. Данная проблематика является менее изученной.

При расширении сверхзвуковой струи в сильно разреженное пространство с удалением от среза сопла падает число взаимных столкновений частиц и проявляются эффекты нарушения равновесия как между поступательными степенями свободы, так и между поступательными и внутренними степенями свободы. Для частиц существенно разной массы может наблюдаться эффект проскальзывания скоростей [6]. Неравновесный характер течения проявляется также непосредственно в области скачков уплотнения [7]. В общем случае, использование односкоростного и однотемпературного приближения для описания движения частиц в струе представляется некорректным и необходимо использование кинетического подхода.

В настоящей работе методом ПСМ [8] выполнен расчет истечения струи аргона в затопленное пространство (аргон) для условий, типичных для сверхзвуковых струй низкой плотности. Параметры течения выбраны в диапазоне: числа Кнудсена, рассчитанные по диаметру выходного сечения сопла и параметрам в камере, $Kn < 10^{-3}$, отношение давления торможения p_0 в камере к давлению окружающего газа p_{inf} , $N = \sqrt{p_0/p_{inf}} \gg 1$. Для указанных параметров в струе формируется УВС, включающая всяческие скачки и центральный скачок.

В рамках работы отдельно исследовано влияние ударно-волновой структуры на процессы деструкции и роста кластеров. С этой целью рассмотрены две постановки задачи. В рамках первой постановки в струе могли формироваться/распадаться только димеры (размер $g = 2$). Вторая постановка предполагала вброс кластеров в струю в заданном размерном диапазоне $10 < g < 20$. В пределах данного диапазона кластеры могли расти или испаряться.

Распад димера аргона соответствовал столкновительному механизму. Димер разрушался при столкновении с мономером, с определенной вероятностью $p_{c,2}$. Частота парных столкновений димер-мономер для VHS-модели столкновений (Variable Hard Sphere model) $\nu \sim n_1 T^{1-\omega}$ ($\omega = 0.81$ — показате-

тель степени в зависимости вязкости от температуры аргона, n_1 — концентрация мономеров). Вероятность $p_{c,2}$ определялась с использованием ТСЕ-модели столкновений (Total Collision Energy model) [8] с учетом данных о константе равновесия процесса димеризации и константе прямой реакции образования димера при трехчастичном столкновении атомов. Вероятность является функцией полной энергии столкновения, равной сумме кинетической энергии относительного движения частиц и внутренней энергии димера, и полного числа степеней свободы сталкивающейся пары. С ростом полной энергии столкновения вероятность распада увеличивается. Поскольку после прохождения скачка поступательная температура и концентрация мономеров возрастают, возрастает и число столкновений димер-мономер, и вероятность распада димера. В результате можно ожидать уменьшение концентрации димеров после прохождения скачка. Однако рост концентрации мономеров за скачком способствует образованию димеров в ходе трехчастичных столкновений атомов аргона. Частота тройных столкновений пропорциональна n_1^3 . Вероятность образования димера также определялась в рамках ТСЕ-модели.

В рамках второй постановки задачи кластеры большого размера распались согласно мономолекулярному механизму. Частота испарения мономера из кластера, в соответствии с [9], зависела от внутренней энергии кластера, числа внутренних степеней свободы и энергии, необходимой для отрыва мономера с поверхности кластера. Рост поступательной температуры газа при прохождении скачка приводит к увеличению внутренней энергии кластера. Однако время колебательной релаксации существенно превосходит время поступательной релаксации и, в отличие от столкновительного распада димера, мономолекулярный распад более крупного кластера происходит в более протяженной релаксационной области течения за скачком. В работе рассматриваются и реакции приводящие к росту кластеров. Увеличение концентрации мономеров за скачком способствует росту крупных кластеров в ходе бимолекулярной реакции мономер $+g$ -мер $= g + 1$ -мер.

В работе представлен подробный анализ прямых и обратных процессов роста/деструкции кластеров при их движении как на начальном участке истекающей струи, так и при пересечении скачков уплотнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00080.

Литература

- [1] Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
- [2] Lewis C. H., Carlson D. J. Normal shock location in underexpanded gas and gas-particle jets // AIAA. 1964. Vol. 353. Iss. 2. P. 776–777.

- [3] Hagena O. F. Condensation in Free Jets: Comparison of Rare Gases and Metals // Z. Phys. D — Atoms, Molecules and Clusters. 1987. Vol. 4. P. 291–299.
- [4] Кисляков Н. И., Ребров А. К., Шарафутдинов Р. Г. О структуре высоконапорных струй низкой плотности за сверхзвуковым соплом // ПМТФ. 1975. № 2. С. 42–52.
- [5] Dubrovin K. A., Zarvin A. E., Kalyada V. V., Yaskin A. S. Influence of the outflow initial parameters on the transverse dimensions of underexpanded argon jets in presence of condensation // Vacuum. 2023. Vol. 207. Art. 111651.
- [6] Bykov N. Y., Zakharov V. V. Rarefied gas mixtures with large species mass ratio: Outflow into vacuum // Physics of Fluids. 2022. Vol 34. Art. 057106. doi: 10.1063/5.0089628
- [7] Bykov N. Y., Gorbachev Yu. E., Fyodorov S. A. Highly underexpanded rarefied jet flows // Front. Mech. Eng. Sec. Fluid Mechanics. 2023. Vol. 9. doi: 10.3389/fmech.2023.1216927
- [8] Bird G. A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford: Clarenton Press, 1994. 458 p.
- [9] Bykov N. Y., Gorbachev Yu. E. Cluster formation in copper vapor jet expanding into vacuum: the direct simulation Monte Carlo // Vacuum. 2019. Vol. 163. P. 119–127.

Эжекция пыли с поверхности пористого кометного ядра с кавернами

Быков Н.Ю.¹, Захаров В.В.^{1,2}, Тонков Д.Н.¹
nbykov2006@yandex.ru

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29Б,

²Observatoire de Paris,
75014, France, Paris, avenue de l'Observatoire, 61

Аннотация. Изучение динамики газопылевой атмосферы кометы требует понимания возможных механизмов эжекции пылевых частиц с поверхности кометного ядра и численную проверку адекватности таких механизмов, с точки зрения соответствия результатов расчетов и наблюдений. В настоящей работе предполагается, что частица пыли закрывает объем небольшой каверны, в которой находится газ (продукты испарения околоповерхностного слоя) под некоторым давлением. Поток газа отрывает и ускоряет частицу. В дальнейшем разгон частицы осуществляется за счет внешнего потока молекул, уносимых с поверхностного слоя ядра. Методом прямого статистического моделирования проведен расчет разлета газа из объема каверны с учетом движения частицы. Проанализировано влияние геометрических размеров каверны, давления газа в ней и условий на внешней испаряемой поверхности ядра на скорость пылевых частиц различной массы.

Ключевые слова: комета, пылевая атмосфера, эжекция пыли, метод прямого статистического моделирования.

Считается, что кометы — это ледяные осколки, оставшиеся после образования планет (остатки протопланетного диска), либо непосредственно планетезимали (или их прямые потомки). Хотя кометы являются весьма динамичными объектами, находящимися в состоянии постоянного изменения поверхностного слоя, эти малые тела претерпели очень мало глобальных изменений с момента своего формирования в протопланетном диске. По этой причине считается, что они сохранили информацию о ранней Солнечной системе и могут помочь нам понять процесс формирования планет [1, 2]. Кометы содержат информацию о первородных материалах Солнечной системы и могут помочь в разрешении таких важных вопросов, как происхождение воды и жизни на Земле. Большинство комет находятся во внешней части Солнечной системы, в поясе Койпера и облаке Оорта. Только малое количество из комет регулярно попадают во внутреннюю Солнечную систему под действием гравитационных возмущений.

Когда кометы входят во внутреннюю часть Солнечной системы и достаточно нагреваются, их лед начинает сублимировать, выделяющиеся газы покидают ядро и распространяются в космическое пространство. Кроме того, продукты сублимации увлекают за собой в окружающее пространство частицы пыли, которые образуют так называемые газопылевые комы. В зависимости от пространственных и временных масштабов динамика пылевых частиц определяется в первую очередь взаимодействием с газом, гравитацией ядра и Солнца, а также давлением солнечного излучения. Эти силы определяют распределение пыли как в окрестностях ядра кометы, так и далеко в хвосте кометы на расстоянии миллионов километров от ее поверхности.

Наблюдения газовой и пылевой комы позволяют определить параметры ядра — его состав, структуру, механизмы сублимации на его поверхности и т. д. и, таким образом, получить информацию о ранней Солнечной системе и формировании планет.

Наблюдения с больших расстояний (например, наземные или с орбиты Земли) не позволяют изучить внутреннюю кому и ее тонкую структуру из-за относительно небольшого размера ядра (1–100 км) и, соответственно, внутренней комы по отношению к разрешению инструментов наблюдения. Для получения лучшего разрешения дистанционных наблюдений и непосредственных измерений газо-пылевой среде необходимо направлять космические зонды в окрестности ядра (например программы *Vera*, *Giotto*, *Rosetta*, *Comet Interceptor*).

Для анализа данных, полученных в ходе осуществленных миссий (например, *Rosetta*, *Giotto*) и для подготовки будущих миссий (например, *Comet Interceptor*) требуется разработка комплексной самосогласованной численной модели пылевой газовой среды кометы. Численная модель в конечном итоге должна решать две основные задачи: (1) прогнозирование газо-пылевой среды для данного ядра (геометрии и активности); (2) определение активности ядра по результатам наблюдений газо-пылевой среды. Подгонка реалистичной

численной модели газо-пылевой среды к данным наблюдений позволяет ограничить параметры моделей пыли и газа и таким образом получить данные об активности ядра.

Наш интерес сосредоточен на околоядерной области, в которой силы, обусловленные ядром (например, гравитация ядра и аэродинамическая сила), существенно влияют на движение пыли. Следует отметить, что в рассматриваемом контексте пыль — достаточно общее понятие. Под этот термин подпадает любой объект, содержащий некоторое включение твердой фазы.

Одним из основных вопросов формирования пылевой комы является определение механизмов эжекции пылевых частиц с поверхности ядра и формирование пылевого течения в приповерхностном слое [3, 4]. Размеры пыли варьируются в широких пределах от долей микрометра до нескольких сантиметров.

Реалистичные модели сложны, содержат много параметров и поэтому трудны для анализа. Для анализа удобно использовать упрощенные модели с минимальным количеством параметров и, по возможности, имеющие аналитические и/или асимптотические решения. Поэтому в данном исследовании мы рассматриваем упрощенную модельную задачу.

В настоящей работе предполагается, что приповерхностный слой ядра имеет пористую структуру с кавернами. Частицы пыли располагаются непосредственно на поверхности изолируя поры. Нагрев приповерхностного слоя приводит к повышению давления внутри каверны и при достижении определенного порога — отрыву пылинки с поверхности и уносом в окружающее пространство продуктами истечения из каверны и/или газовым потоком с окружающей поверхности. Целью работы является изучение динамики эжекции пыли, определение предельных значений скорости частиц и влияния на нее объема и температуры каверны, определение характерного времени истечения из каверны.

В работе выполнен расчет движения частиц пыли различного размера и массы под воздействием аэродинамической силы потока газа (водяного пара) и гравитационного притяжения ядра (опционально). Предполагается, что каверна имеет форму цилиндра (рассмотрены разные варианты отношения глубины к радиусу $S = H/R$). Частица пыли имеет форму диска или сферы, радиус которых совпадает с радиусом каверны. Рассмотрены варианты изолированной каверны (т.е. заполненной конечным количеством газа) и с подводом газа. В начальный момент времени давление газа p_0 и его температура T_0 известны. Рассмотрены варианты с неактивной и активной (сублимация ледяной поверхности при температуре T_0) прилегающей поверхностью ядра.

Результаты моделирования показывают, что для рассмотренных параметров скорость частицы меняется в широком диапазоне. Расчеты показывают что, при отсутствии внешнего газового потока, пылевые частицы быстро достигают конечную скорость (т.е. движения без ускорения), которая может использоваться как начальная скорость в модели с эжекцией с поверхности без

рассмотрения каверн. Для частицы пыли с характерным размером 100 мкм при (а) неактивной и (б) активной окружающей поверхности и $1 \leq S \leq 27$ скорость эжекции не превышает 1 м/с. При наличии внешнего потока газа (со скоростями более 100 м/с) полученная скорость эжекции не влияет на дальнейшую динамику пыли. Поэтому простейшая модель, предполагающая унос частицы с поверхности без начальной скорости является достаточно точной.

Результаты моделирования позволили получить характерные времена истечения из каверны, количество движения и энергии газа передаваемых частицам при эжекции для построения упрощенных инженерных оценок.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-12-00299, <https://rscf.ru/project/24-12-00299/>.

Литература

- [1] Thomas P. J., et al. Comets and the Origin and Evolution of Life. Springer, Berlin Heidelberg, 2006. 346 p.
- [2] Lloyd S. Collisional heating and compaction of small bodies: Constraints for their origin and evolution // Icarus. 2020. Vol. 350. Art. 113867.
- [3] Fulle M., Blum J., Rotundi A. How Comets Work // The Astrophysical Journal Letters. 2019. Vol. 879. Iss. 1. Art. L8.
- [4] Fulle M., Blum J., Rotundi A, Gundlach B., Guttler C., Zakharov V. How comets work: nucleus erosion versus dehydration // MNRAS. 2020. Vol. 493. P. 4039–4044.

Small cluster formation modelling

Gorbachev Yu.E.,^{1,2} *Bykov N.Yu.*³

yuriy.gorbachev@gmail.com, nbykov2006@yandex.ru

¹Novosibirsk State University,

630090 Russia, Novosibirsk, ul. Pirogova, 1,

²Soft-Impact, Ltd.,

194044 Russia, St. Petersburg, Viborgskaia nab., 49,

³Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,

195251, Russia, St. Petersburg, Polytekhnicheskaya ul., 29

Annotation. A new approximation for the g -mer concentration equilibrium constant is proposed. It is based on the clusters' binding energy spectrum account. A number of cluster formation models employing this and some similar approximations applicable both for continuum and DSMC simulations is considered. The various size clusters' evolution along the nozzle flow axis is considered.

Keywords: cluster formation/decay rate constants, cluster free energy, equilibrium constant, quasichemical nucleation model, DSMC.

Small cluster formation control is a relevant technological problem. Classical nucleation theory (CNT) fails to describe the cluster size distribution when critical size number approaches the first coordination number N . Several models describing that distribution have been proposed [1]–[4]. Size corrected approach [2] was implemented in the DSMC code [5], however, its shortcoming is that for clusters of size less than N the corresponding change in Gibbs' free energy does not depend on the cluster size g . This corresponds to the non-dependence of the monomer-cluster binding energy on g . Here, based on the quasi-chemical nucleation model (QCNM) approach and unimolecular reaction theory application [1], we propose a model that overcomes the aforementioned issue.

The quasicheical nucleation model equations read as $dn_1/dt = -I_2 - \sum_{g=2}^{\infty} I_g$,

$I_g = K_g^+ n_{g-1} n_1 - K_g^- n_g$, and $g \geq 2$: $dn_g/dt = I_g - I_{g+1}$, where $K_g^{+/-}$ are the rate constants of the g -mer formation/decay. Thus, the quasiequilibrium cluster size distribution can be found from the relationship $I_g = 0$, which yields

$$n_g^{qe} = n_1 n_{g-1}^{qe} K_g^+ / K_g^- = n_1^g / \prod_{i=2}^g K_{ci} = n_1 \left(\frac{n_1}{n_1^s} \right)^{g-1} / \prod_{i=2}^g \frac{K_{ci}}{n_1^s}, \quad (1)$$

where

$$K_{ci} = \frac{K_i^-}{K_i^+} = \frac{n_{i-1}^{qe} n_1}{n_i^{qe}} = n_1 \exp((\Delta G_i - \Delta G_{i-1})/k_B T) \quad (2)$$

is the i -mer concentration equilibrium constant, n_1^s is the monomer number density at chemical equilibrium and ΔG_g is the free energy of g -mer formation, k_B is the Boltzmann constant. This equation can be written as

$$n_g^{qe} = n_1 \exp \left((g-1) \ln S - \ln \left(\prod_{i=2}^g \frac{K_{ci}}{n_1^s} \right) \right), \quad (3)$$

where $S = n_1/n_1^s$ is the supersaturation. Approximation $K_{ci} = K_{c2} \exp \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_i}{k_B T} \right)$, where ε_i is the monomer evaporation energy from the i -mer, yields

$$n_g^{qe} = n_1 \exp \left((g-1) \ln S + \sum_{i=2}^g \varepsilon_i / k_B T - (g-1) (\ln K_{c2} + \varepsilon_2 / k_B T) \right). \quad (4)$$

The evaporation (sublimation) energy can be obtained from the equation $\varepsilon_i = dE_i/di$ [6], where E_i is the binding i -cluster energy (energy to separate all i monomers in an i -cluster). The following equation for the binding energy per atom was proposed in [7]: $E_i/(k_B i) = a + bi^{-1/3} + ci^{-2/3}$, $a = \varepsilon_{\infty}$, where ε_{∞} is

the monomer evaporation energy from the flat surface, and for argon $a = 947.4$ K, $b = -1518$ K, $c = 482.4$ K. This approximation correlates well with the data from [8]. For evaporation energy it yields [6]:

$$\varepsilon_i = k_B(a + 2bi^{-1/3}/3 + ci^{-2/3}/3), \text{ and } \varepsilon_2 = k_B(\varepsilon_\infty + 2^{2/3}b/3 + 2^{-2/3}c/3). \quad (5)$$

Thus, the Gibbs' free energy change reads as

$$\Delta G_g = -2k_Bb_1 \sum_{i=2}^g i^{-1/3}/3 - k_Bc_1 \sum_{i=2}^g i^{-2/3}/3 - (g-1)k_B T \ln \frac{Sn_1^s}{K_{c2}e^{\varepsilon_2/k_B T}}. \quad (6)$$

Then from (2) and (5)

$$K_{cg} = K_{c2} \exp \left(\frac{2}{3} \frac{b}{T} \left(2^{-1/3} - g^{-1/3} \right) + \frac{1}{3} \frac{c}{T} \left(2^{-2/3} - g^{-2/3} \right) \right), \quad (7)$$

while for the size corrected approach it reads as $K_{cg} = K_{c2}$ up to $g = N$. For large clusters the Gibbs' free energy change can be calculated using the traditional liquid drop approximation, and for intermediate sizes the interpolation similar to that used in [4] can be built.

Quasiequilibrium cluster size distribution for argon clusters, calculated using the present approach (equations (1), (2) and (7)) and followed from the Zhukhovitskii one [2] ($K_{cg} = K_{c2}$ for $g \leq N$) for two temperatures, $T = 200$ K and 50 K, is shown in Figure 1. The difference between those distributions increase rapidly with temperature decrease.

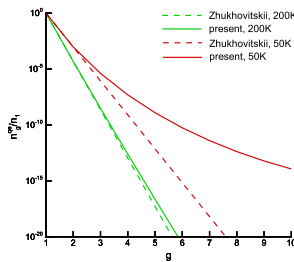


Fig. 1. Quasiequilibrium cluster size distribution calculated using the present (solid lines) and Zhukhovitskii [2] (dashed lines) approaches for $T = 50$ K and 200 K.

The study of small argon clusters formation in the nozzle flow was performed by solving the Navier–Stokes equations, supplemented by the corresponding set of the QCNM equations [1], and within the DSMC method (see [9] for the simulation methods' description details). The flow through the diverging conic nozzle with the

parameters: 0.5 mm critical radius, 6 mm length, half-angle 12.316° , $p_0 = 6.7 \cdot 10^3$ Pa, $T_0 = 309.5$ K stagnation parameters, was considered. g -mers' distributions up to $g = 10$ along the flow axis are presented in Figure 2. The DSMC results are related to the Zhukhovitskii equilibrium constant model.

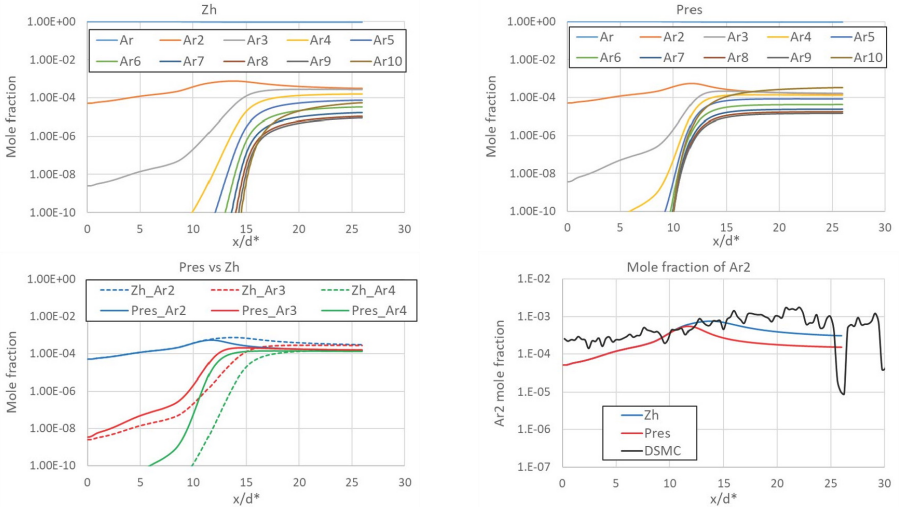


Fig. 2. g -mers' distributions calculated along the flow axis within the Zhukhovitskii [2] (dashed lines and (Zh)) and the present approximation (Pres) for the equilibrium constants, x is the distance from the nozzle inlet.

To summarize the above, new approximation for the small clusters' equilibrium constants is proposed. It generalises the model proposed in [2] by taking into account the clusters' binding energies. Clusterization process in nozzle simulation has shown a significant impact of the binding energies' effect on small cluster formation.

Acknowledgements. The work was performed with financial support from the Russian Science Foundation, project 22-11-00080.

References

- [1] Gordietz B. F., Shelepin L. A., Shmotkin Yu. S. Kinetics of isothermal homogeneous-condensation processes // J. Sov. Laser Res. 1986. Vol. 7. P. 588–616.
- [2] Zhukhovitskii D.I. Size-corrected theory of homogeneous nucleation // J. Chem. Phys. 1994. Vol. 101, Iss. 6, P. 5076–5080.

- [3] Egorov B. V., Markachev Y. E. Correction of the quasi-chemical cluster model of nucleation when compared with experiment // *Khim. Fizika*. 2006. Vol. 25. P. 77–83. (in Russian)
- [4] Savel'ev A. M., Starik A. M. An improved model of homogeneous nucleation for high supersaturation conditions: aluminum vapor // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2017. Vol. 19. P. 523–538.
- [5] Bykov N. Yu., Gorbachev Yu. E. Mathematical models of water nucleation process for the Direct Simulation Monte Carlo method // *Appl. Math. Comp.* 2017. Vol. 296. P. 215–232.
- [6] Malakhovskii A. V., Ben-Zion M. Temporal evolution of an argon cluster during the process of its evaporation // *Chem. Phys.* 2001. Vol. 264. P. 135–143.
- [7] Pandharipande V. R., Zabolitzky J. G., Pieper S. C., Wiringa R. B., Helmbrecht U. Calculations of Ground-State Properties of Liquid ^4He Droplets // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. Iss. 21. P. 1676–1679.
- [8] Lohr L. L. Rotational energy dispersions for argon clusters // *Molecular Physics*. 1995. Vol. 85. No. 3. P. 607–617.
- [9] Bykov N. Yu., Gorbachev Yu. E., Fyodorov S. A. Highly underexpanded rarefied jet flows // *Front. Mech. Eng.* 2023. Vol. 9. Art. 1216927.

Relaxation within the approximation of one- and two-temperature non-equilibrium dissociation rates

Gorbachev Yu. E.,^{1,2} *Kunova O. V.*³

yuriy.gorbachev@gmail.com, o.kunova@spbu.ru

¹Novosibirsk State University,

630090, Russia, Novosibirsk, 1 ul. Pirogova,

²Soft-Impact, Ltd.,

194044, Russia, St. Petersburg, 49 Viborgskaia nab.,

³St. Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, 7/9 Universitetskaya nab.

Annotation. The study focuses on the relaxation of hydrogen behind shock waves, considering one-temperature and two-temperature non-equilibrium dissociation rates. We compare the results of one-dimension simulations using non-equilibrium and equilibrium dissociation rate models. The equilibrium approaches lead to a significant translational temperature underestimation, while the dissociation rate is considerably overestimated.

Keywords: Boltzmann equation, equilibrium and non-equilibrium dissociation rates.

Hydrogen dissociation is of great interest since it is widely used in the diamond Chemical Vapor Deposition (CVD) technologies [1, 2, 3]. Non-equilibrium effects in chemical reactions are well known, and a new asymptotic method for solving the generalized Boltzmann equation is proposed in [4] and developed in [5, 6, 7]. This

method provides the determination of non-equilibrium reaction rates in zeroth-order (Euler) gasdynamic equations. Non-equilibrium effects include perturbations in the vibrational distribution, competition between reaction rates and vibrational rates, and the impact of velocity divergence.

We investigate the nonequilibrium flow of an H_2/H mixture behind a shock wave using two models: the one-temperature (1T) model and the two-temperature (2T) model. We consider a one-dimensional inviscid formulation, where the basic conservation laws are supplemented by equations describing the mixture composition changes and the relaxation equation for the number of vibrational quanta [7] (the latter in the case of the 2T model). Additional equations depend on relaxation terms describing dissociation and vibrational relaxation processes.

The expression for the 1T dissociation rate of the reaction $\text{H}_2 + M \leftrightarrow 2\text{H} + M$ ($M = \text{H}_2, \text{H}$) for the diatomic molecule within the cut-off harmonic oscillator model (COHOM) was derived in [6]:

$$R_m^{qs} = \frac{P_{dq_m} X_m^{qe} (1 + \alpha_d \nabla \cdot \mathbf{u}) - P_{rq_m} n_a^2}{1 - A_m}, \quad (1)$$

where

$$\alpha_d = \frac{q_m k_B \theta_e}{c_v P_{10} (\beta_v + 1 - e^{-\theta_e}) (1 - e^{-\theta_e})}, \quad A_m = \frac{P_{dq_m} (1 - e^{\theta_e}) e^{-\theta_e q_m} \Sigma_{q_m}(\theta_e)}{P_{10} (\beta_v + 1 - e^{-\theta_e})}, \quad (2)$$

$$X_q^{qe} = X_0^{qe} e^{-\theta_e q}, \quad \theta_e = \frac{hc\omega_e}{k_B T}, \quad \beta_v = \frac{P_{10} e^{-\theta_e}}{n_m Q_{10}^{01}}, \quad \Sigma_q(\theta_e) = \sum_{q=1}^{q_m} \frac{e^{\theta_e q}}{q}, \quad (3)$$

X_q^{qe} is the quasi-equilibrium vibrational population, $q_m \approx D/(hc\omega_e)$ is the highest vibrational level, D is the dissociation energy, n_m and n_a are the molecule and atom number densities, \mathbf{u} is the velocity vector, T is the gas temperature, h is the Plank constant, k_B is the Boltzmann constant, c is the light velocity, ω_e is the spectroscopic constant of the A_2 molecule, c_v is the specific heat capacity of molecules at a constant volume, P_{dq_m} is the dissociation rate constant of the considered molecule from the upper vibrational state q_m , P_{rq_m} is the corresponding recombination rate constant with the formation of the molecule at the upper vibrational state q_m , $P_{10} = p_{10}^a n_a + p_{10}^m n_m$ is the rate constant for the VT-transition from the 1st to the 0th vibrational state, $p_{10}^{a,m}$ is the rate coefficient of corresponding transition in a collision with an atom or molecule, Q_{10}^{01} is the rate constant for VV-transitions.

Relaxation terms describing the process of molecular dissociation, R_m^{qs} , and vibrational energy exchange, R_v^{qs} , within the framework of a two-temperature

description, were obtained in [7] and have a form:

$$R_m^{qs} = \frac{(1 - A_{vv})R_m^0 + A_{mv}R_v^0}{1 - A_{mm} - A_{vv}}, \quad R_v^{qs} = \frac{(1 - A_{mm})R_v^0 + A_{vm}R_m^0}{1 - A_{mm} - A_{vv}}, \quad (4)$$

where

$$R_m^0 = R_m^{qe} + R_m^{0h}, \quad R_v^0 = R_v^{qe} + R_v^{0h}, \quad (5)$$

$$R_m^{0h} = -\frac{P_{dqm}X_0^{qe}(e^{\gamma_v} - 1)}{(1 + \beta_v^{-1})e^{\theta_v q_m}}[a_1], \quad R_v^{0h} = q_m R_m^{0h} \left(1 + \frac{P_{01}}{P_{dqm}}\right), \quad (6)$$

$$R_m^{qe} = -(P_{dqm}X_{q_m}^{qe} - P_{r_{q+m}n_a^2}), \quad R_v^{qe} = -P_{10}\Gamma_v(1 - e^{\gamma_v}) + q_m R_m^{qe}, \quad (7)$$

$$A_{mm} = -\frac{P_{dqm}a_1^{q_m}X_{q_m}^{qe}\Sigma_{q_m}(\theta_v, a_1)}{P_{10}n_m(1 + \beta_v^{-1})(1 - e^{-\theta_v})}, \quad A_{vv} = q_m \frac{(P_{dqm}/P_{01} + 1)e^{-\theta_e}}{c_{v0}e^{\theta_v q_m}(1 + \beta_v^{-1})}[a_1], \quad (8)$$

$$A_{mv} = \frac{A_{vv}}{q_m(1 + P_{01}/P_{dqm})}, \quad A_{vm} = q_m \left(1 + \frac{P_{01}}{P_{dqm}}\right) A_{mm}, \quad (9)$$

$$\theta_v = \frac{hc\omega_e}{k_B T_v}, \quad \gamma_v = \theta_v - \theta_e, \quad c_{v0} = \frac{e^{-\theta_v}}{(1 - e^{-\theta_v})^2}, \quad \Gamma_v = \frac{n_m - (q_m + 1)X_{q_m}^{qe}}{e^{\theta_v} - 1}, \quad (10)$$

$$[a_1] = \frac{a_1^{q_m} - 1}{a_1 - 1} - \frac{a_1^{q_m} e^{-\theta_v}}{1 - e^{-\theta_v}}, \quad \Sigma_{q_m}(\theta_v, a_1) = \sum_{q'=1}^{q_m} a_1^{-q'} \frac{e^{\theta_v q'} - 1}{q'}, \quad (11)$$

T_v is the vibrational temperature of molecules.

In the calculations, we utilized the Arrhenius law with parameters from Ref. [8] to determine the dissociation rate. The probabilities of energy exchanges were calculated using the force harmonic oscillator model (FHO) [9]. Extra calculations were also performed within the framework of the 2T model, including relaxation terms $R_m^{qs} = R_m^{qe}$, $R_v^{qs} = R_v^{qe}$. Additionally, we conducted calculations using the classical one-temperature formulation [10]. The initial conditions in the free-stream were as follows: $T_\infty = 296$ K, $p_\infty = 0.13$ Torr, $X_\infty[\text{H}_2] = n_m/n = 1$, $M_\infty = 10$.

Figure 1 presents a comparison of the mixture temperature, vibrational temperature, and the fraction of molecules in the mixture with distance from the shock front for various models. Based on the simulations, it is evident that the nonequilibrium 1T approximation yields mixture parameters much closer to those predicted by the 2T model, as compared to the predictions from the traditional 1T approximation. However, within the equilibrium approaches, the translational temperature is significantly underestimated, while the dissociation rate is significantly overestimated.

An important indicator for analyzing the role of non-equilibrium processes is the renormalizing A -parameter, whose value separates the dissociation regimes: vibrational relaxation dissociation ($|A| > 1$) and vibrational equilibrium dissociation

($|A| < 1$) regimes. In all considered simulations, both $|A_{mm}|$ and $|A_m| \gg 1$ (see Figure 2). This indicates that dissociation occurs in the vibrational relaxation mode, where the dissociation rate is limited by the vibrational energy delivery to the highest vibrational level behaving like a bottleneck.

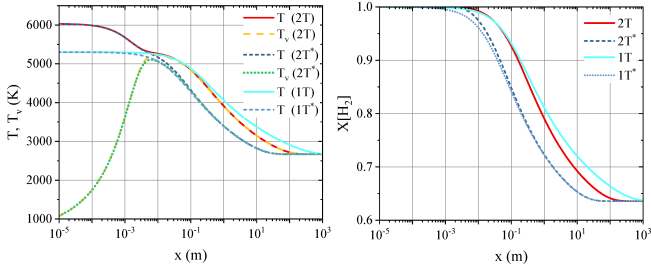


Fig. 1. Temperature, vibrational temperature (left) and molecules molar fraction (right) vs distance from shock wave front. 2T: two-temperature approach, 2T*: two-temperature approach with $R_{m/v} = R_{m/v}^{qe}$, 1T: one-temperature approach, 1T*: traditional one-temperature approach.

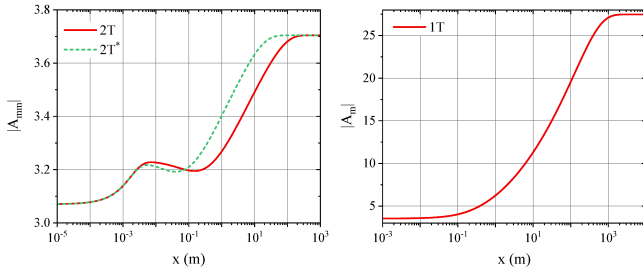


Fig. 2. The dependence of the values $|A_{mm}|$ (left) and $|A_m|$ (right) vs distance from shock wave front.

Acknowledgements. The work was performed with financial support from the Russian Science Foundation, project 22-11-00080.

References

- [1] Schwander M., Partes K. A review of diamond synthesis by CVD processes // Diamond and Related Materials. 2011. Vol. 20. P. 1287–1301.
- [2] Haubner R. Low-pressure diamond: from the unbelievable to technical products // ChemTexts. 2021. Vol. 7. Iss. 10.

- [3] Plotnikov M. Yu., et al. Gas-jet HFCVD synthesis of diamonds from mixtures of hydrogen with ethylene and methane // *Diamond and Related Materials*. 2022. Vol. 130. P. 109505.
- [4] Kolesnichenko E. G., Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. I. General theory // *Appl. Math. Mod.* 2010. Vol. 34. Iss. 12. P. 3778–3790.
- [5] Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. III. Renormalized reaction rates // *Appl. Math. Mod.* 2016. Vol. 40. Iss. 23–24. P. 10131–10152.
- [6] Gorbachev Yu. E. On approximations for the one-temperature reaction rates // *AIP Conf. Proc.* 2020. Vol. 2293. P. 050002.
- [7] Gorbachev Yu., Kunova O., Shoev G. A non-equilibrium dissociation and vibrational relaxation model for computational fluid dynamics simulations of flows with shock waves. // *Phys. Fluids*. 2021. Vol. 33. P. 126105.
- [8] Baulch D. L. et al. Evaluated kinetic data for combustion modeling: supplement II. // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 2005. Vol. 34. N 3. P. 757–1397.
- [9] Adamovich I. V., et al. Vibrational energy transfer rates using a forced harmonic oscillator model // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 1998. Vol. 12. P. 57–65.
- [10] Stupochenko Ye. V., Losev S. A., Osipov A. I. *Relaxation processes in shock waves*. Springer Berlin Heidelberg, 1967.

On two-temperature gas-dynamic equations for a binary gas mixture

Gorbachev Yu.E.,^{1,2} *Rukolaine S.A.*³
yuriy.gorbachev@gmail.com, rukol@ammp.ioffe.ru

¹Novosibirsk State University,
630090, Russia, Novosibirsk, ul. Pirogova, 1,

²Soft-Impact, Ltd.,
194044, Russia, St. Petersburg, Viborgskaia nab., 49,

³Ioffe Institute,
194021, Russia, St. Petersburg, Polytekhnicheskaya ul., 26

Annotation. The zeroth and first order gas-dynamic equations are derived assuming two-temperature gas mixture description within a new generalized Boltzmann equation asymptotic solution method. Energy exchange rates are shown to be nonequilibrium ones even at the zeroth-order approximation. The the first order two-temperature gas-dynamic equations' structure is studied.

Keywords: Boltzmann equation, summational invariants, gas-dynamic equations.

Although kinetic methods are intensively exploring new areas of application in complex systems modeling, mainly due to computing power rapid growth, they

remain computationally expensive. In this regard, continuum methods remain attractive. When deriving gas-dynamic equations from the kinetic ones, an important point is the incorrectness of the traditional procedure of such transition in case when the number of the introduced gas-dynamic variables exceeds the number of the summational invariants [1]. Extending the gas-dynamic variables set allows more detailed system description, but needs the Boltzmann equation asymptotic solution method modification. Such method was proposed in [2] and developed in [3]. As discussed in [1] this method has a wide range of applications. Here we explore it for deriving the two-temperature (2T) gas-dynamic equations in the zeroth- and first-order approximations over the Knudsen number.

We consider the Boltzmann equation for the binary gas mixture

$$\partial_t f_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha = I_\alpha / \varepsilon, \quad \alpha = 1, 2,$$

where I_α is the collisional operator, and ε is the small parameter (Knudsen number). Introduction of the gas-dynamic variables beyond the traditional set (density-velocity-temperature associated with the exact summational invariants (ESI)) is associated with the so-called approximate summational invariants (ASI) [2], $\chi_i, i = 1, \dots, N$: $\langle \chi_i, I_\alpha \rangle \ll \varepsilon$, where $\langle f, g \rangle \equiv \sum_\alpha \int f_\alpha g_\alpha d\mathbf{v}$. Corresponding gas-dynamic variables are introduced as $\Gamma_i = \langle \chi_i, f_\alpha \rangle$.

Considering five ESI $\chi_{n_\alpha} = \delta_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $\chi_{\mathbf{p}} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$, and two ASI $\chi_{E_\alpha} = \delta_{\alpha,\beta} e_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $e_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2 / 2$, the following slow (gasdynamic) variables arise $\Gamma_{n_\alpha} n_\alpha$, $\Gamma_{\mathbf{p}} = \rho \mathbf{u} = \mathbf{p}$, $\Gamma_{E_\alpha} = E_\alpha = \frac{3}{2} k_B T_\alpha + \rho u^2 / 2$. The distribution functions are represented in the form $f_\alpha = f_\alpha^{\text{qe}}(\{\Gamma\}) + \varphi_\alpha$, where f_α^{qe} is the quasi-equilibrium distribution, that maximizes the entropy of the mixture for the fixed set of $\{\Gamma\}$: $f_\alpha^{\text{qe}} = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2k_B T_\alpha} \right)$, $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}$, and φ_α is the fast variable the equation for which is transformed into the singularly perturbed set of equations for slow (Γ) and fast (φ) variables [2]. φ_α should satisfy the orthogonality conditions: $\langle \chi_i, \varphi_\alpha \rangle = 0$, and is assumed to be small (of the ε order) and is sought in the form of expansion into series over ε : $\varphi_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{s=0} \varepsilon^s \varphi_\alpha^{(s)}$.

As shown in [2], within the zeroth-order approximation the deviation of the distribution function from the quasi-equilibrium one impacts only the gasdynamic equations' source terms:

$$\begin{aligned} \partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}) &= 0, \quad \alpha = 1, 2, & \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{P}^{(0)}) &= 0, \\ \mathbf{P}^{(0)} &= \langle m_\alpha \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha / 3, f_\alpha^{\text{qe}} \rangle = \sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(0)} = \mathbf{I} \sum_\alpha p_\alpha = \mathbf{I} \sum_\alpha n_\alpha k_B T_\alpha = p \mathbf{I}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\partial_t E_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{u} (E_\alpha + p_\alpha) = R_{E_\alpha}^{(0)}, \quad (2)$$

$$R_{E_\alpha}^{(0)} = \langle \chi_{E_\alpha}, I^{\text{qe}} / \varepsilon + I'(f^{\text{qe}}) \varphi^{(0)} \rangle = R_{E_\alpha}^{\text{qe}} + R_{E_\alpha}^{(0)ne},$$

where $R_{E_\alpha}^{(0)}$ is the the energy relaxation rate. To calculate it, the kinetic equation for $\varphi^{(0)}$ should be solved [2]: $J'_{f^{\text{qe}}}(f^{\text{qe}})\varphi^{(0)} = -J_{f^{\text{qe}}}(f^{\text{qe}})/\varepsilon + G^{(0)}$, where $J_{f^{\text{qe}}}(f) = I(f) - \sum_\beta \frac{\partial f^{\text{qe}}}{\partial \Gamma_{E_\beta}} \langle I(f), \chi_{E_\beta} \rangle$ is Kolesnichenko's collisional operator [2] and

$$G_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{\text{qe}} \left[\frac{p}{p_\alpha} \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha + \left(\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2k_B T_\alpha} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla \ln T_\alpha \right. \\ \left. + \frac{m_\alpha}{k_B T_\alpha} \left(\mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha - \frac{c_\alpha^2}{3} \mathbf{I} \right) : \nabla \mathbf{u} + \frac{2}{3} \left(\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2k_B T_\alpha} - \frac{3}{2} \right) \frac{R_{p_\alpha}}{p_\alpha} \right], \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_\alpha = \frac{\nabla p_\alpha}{p} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \nabla \ln p, \quad R_{p_\alpha} = (\rho_\alpha \nabla p - \rho \nabla p_\alpha) \cdot \mathbf{u} / \rho = -p \mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_\alpha,$$

where \mathbf{d}_α is the diffusive driving force [4] and R_{p_α} is the work performed by diffusive driving force. Using the J operator definition, the equation for $\varphi^{(0)}$ can be written as $I'_\alpha(f^{\text{qe}})\varphi^{(0)} = -I_\alpha^{\text{qe}} - \sum_\beta (\partial f_\alpha^{\text{qe}} / \partial \Gamma_{E_\beta}) R_{E_\beta}^{(0)} + G_\alpha^{(0)}$. Employing the renormalization technique proposed in [3, 5] and linearity of this equation, $R_{E_\alpha}^{(0)}$ can be written as

$$R_{E_\alpha}^{(0)} = (1 - A_\alpha)^{-1} (R_{E_\alpha}^{\text{qe}} + R_{E_\alpha}^{0h} + R_{E_\alpha}^{0i}), \quad \alpha = 1, 2, \quad (4)$$

where $A_\alpha = \left\langle \delta_{\alpha\gamma} \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2}{2}, I_\alpha^l(f^{\text{qe}}) \varphi^{(0)a} \right\rangle$, $R_{E_\alpha}^{0j} = \left\langle \delta_{\alpha\gamma} \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2}{2}, I_\alpha^l(f^{\text{qe}}) \varphi^{(0)0j} \right\rangle$ and indices h and i denote the spatially homogeneous and spatially inhomogeneous parts [2] of the distribution function, $\varphi^{(0)}$, and of the energy relaxation rates. For each part of $\varphi^{(0)}$ the corresponding integral equation is derived. Only the terms proportional to R_{p_α} contribute the 'inhomogeneous' terms in $R_{E_\alpha}^{(0)}$.

The first-order gasdynamic equations read as (the first-order correction impacts only the gasdynamic equations' source terms):

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha (\mathbf{u} + \mathbf{U}_\alpha^{(1)})) = 0, \quad n_\alpha \mathbf{U}_\alpha^{(1)} = \varepsilon \left\langle \delta_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\alpha, \varphi_\alpha^{(0)} \right\rangle = \varepsilon \left\langle \delta_{\alpha\beta} \mathbf{c}_\alpha, \varphi_\alpha^{(0)} \right\rangle, \quad (5)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{P}^{(1)}) + \nabla p = 0,$$

$$\mathbf{P}^{(1)} = \varepsilon \left\langle m_\alpha \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha, \varphi_\alpha^{(0)} \right\rangle = \sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(1)} = \sum_\alpha (p_{rel \alpha} \mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha^{(1)'}), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \partial_t E_\alpha + \nabla \cdot \left((E_\alpha + p + p_{rel \alpha}) \mathbf{u} + \mathbf{P}_\alpha^{(1)'} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}_\alpha^{(1)} \right) &= R_{E_\alpha}^{(0)} + R_{E_\alpha}^{(1)}, \\ R_{E_\alpha}^{(1)} &= \langle \chi_{E_\alpha}, I'(f^{qe})\varphi^{(1)} + K''(\varphi^{(0)}) \rangle, \quad \mathbf{q}_\alpha^{(1)} = \left\langle \mathbf{c}_\alpha \frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2}, \varphi^{(0)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\mathbf{U}_\alpha^{(1)}$ is the diffusion velocity, $\mathbf{P}^{(1)}$ is the stress tensor, $\mathbf{q}_\alpha^{(1)}$ is the heat flux and $p_{rel \alpha}$ is the relaxation pressure:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\alpha^{(1)} &= -\varepsilon \left(\sum_\beta D_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\beta + D_{T\alpha} \nabla \ln T_\alpha \right) = -\varepsilon \sum_\beta D_{\alpha\beta} (\mathbf{d}_\beta + k_{T\beta} \nabla \ln T_\alpha), \\ D_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3n_\alpha} \int f_\alpha^{qe} c_\alpha^2 D_\alpha^\beta(c_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha, \quad D_{T\alpha} = \frac{1}{3n_\alpha} \int f_\alpha^{qe} c_\alpha^2 A_\alpha(c_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha = \sum_\beta D_{\alpha\beta} k_{T\beta}, \\ \mathbf{P}^{(1)'} &= \sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(1)'} = -\varepsilon 2\eta \mathbf{S}, \quad \mathbf{P}_\alpha^{(1)'} = -\varepsilon 2\eta_\alpha \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}, \\ \eta_\alpha &= \frac{m_\alpha}{10} \int f_\alpha^{qe} B_\alpha(c_\alpha) \left(\mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha - \frac{c_\alpha^2}{3} \mathbf{I} \right) : \left(\mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha - \frac{c_\alpha^2}{3} \mathbf{I} \right) d\mathbf{v}_\alpha, \\ p_{rel \alpha} &= \varepsilon (m_\alpha R_{p\alpha} / p_\alpha) \int f_\alpha^{qe} c_\alpha^2 C_\alpha(c_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha, \\ \mathbf{q}_\alpha^{(1)} &= -\lambda'_\alpha \nabla \ln T_\alpha - \sum_\beta D_{d\alpha}^\beta \mathbf{d}_\beta + \frac{5k_B T_\alpha}{2} n_\alpha \mathbf{V}_\alpha^{(1)}, \\ \lambda'_\alpha &= \varepsilon \frac{k_B T_\alpha}{3} \int f_\alpha^{qe} m_\alpha \left(\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2k_B T_\alpha} - \frac{5}{2} \right) c_\alpha^2 A_\alpha(c_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha, \\ D_{d\alpha}^\beta &= \varepsilon \frac{k_B T_\alpha}{3} \int f_\alpha^{qe} \left(\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2k_B T_\alpha} - \frac{5}{2} \right) c_\alpha^2 D_\alpha^\beta(c_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha, \end{aligned}$$

where for coefficients A , B , C and D the corresponding integral equations determined by function $G_\alpha^{(0)}$ from (3) are derived.

$$J'_{f^{qe}}(f^{qe})\varphi^{(1)} = -K''(\varphi^{(0)}) + \sum_\beta \frac{\partial f^{qe}}{\partial T_{E\beta}} \langle K''(\varphi^{(0)}), \chi_{E_\beta} \rangle + G^{(1)}, \quad (8)$$

$$K''_{\alpha\beta}(\varphi^{(0)})(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) = \mu_{\alpha\beta} \int \left[\varphi_\alpha^{(0)'} \varphi_\beta^{(0)'} - \varphi_\alpha^{(0)} \varphi_\beta^{(0)} \right] \delta_{\mathbf{p}} \delta_E \sigma_{\alpha\beta} d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\beta d\mathbf{v}_\beta,$$

$\delta_{\mathbf{p}}$ and δ_E are the momentum and energy conservation δ -functions, respectively. An expression for the first order correction to inhomogeneous term $G_\alpha^{(1)}$ is also obtained.

Derived for the first time within the proposed method [2] first-order gasdynamic equations has the traditional structure, while the transport coefficients are functions of both components' temperatures.

The work of Gorbachev Yu. E. was supported by the Russian Science Foundation, project 22-11-00080.

References

- [1] Gorbachev Yu., Shoev G. Gasdynamic equations with the number of gasdynamic variables exceeding the number of summational invariants // E3S Web Conf. XXXIX Siberian Thermophysical Seminar (STS-39). 2023. Vol. 459. P. 01009. doi: 10.1051/e3sconf/202345901009
- [2] Kolesnichenko E. G., Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. I. General theory // Appl. Math. Mod. 2010. Vol. 34. Iss. 12. P. 3778–3790. doi: 10.1016/j.apm.2010.04.001
- [3] Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. III. Renormalized reaction rates // Appl. Math. Mod. 2016. Vol. 40. Iss. 23–24. P. 10131–10152. doi: 10.1016/j.apm.2016.06.050
- [4] Galkin V. S., Makashev N. K. Kinetic derivation of the gas-dynamic equation for multicomponent mixture of light and heavy particles // Fluid Dynamics. 1994. Vol. 29. No. 1. P. 140–155.
- [5] Gorbachev Yu. E. Renormalized expressions for momentum and energy exchange rates for a disparate mass gas mixture // AIP Conf. Proc. 2024. Vol. 2996. P. 050002. doi: 10.1063/5.0187550

Моделирование течения газовой смеси в разреженном режиме через систему вращающихся турбин

Косьянчук В. В.

vasiliy.kosyanchuk@gmail.com

Научно-исследовательский институт механики МГУ,
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1,
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук,
101000, Российская Федерация, Москва, Малый Харитоньевский переулок, 4

Аннотация. В работе численно исследуется возможность использования устройства, схожего по принципу действия с турбомолекулярным насосом для разделения газовых смесей. Гипотеза расчета подтверждена. Исследовано влияние основных параметров устройства (скорость вращения, размеры, количество турбин, угол наклона лопаток) на эффективность разделения.

Ключевые слова: разреженный газ, газоразделение, турбомолекулярный насос, метод прямого статистического моделирования Монте-Карло.

Введение. Турбомолекулярный насос, представляющий собой множество последовательно соединенных вращающихся турбин, получил практическое применение относительно давно [1] и активно используется для создания высокого и сверхвысокого вакуума (от 10^{-2} Па до 10^{-8} Па). При этом известно [2], что эффективность насоса сильно зависит от молекулярной массы рабочего газа. Предыдущие работы автора показывают, что при течении разреженной смеси газов в похожих устройствах может наблюдаться эффект разделения смеси [3]–[5]. В данной работе с использованием метода прямо статистического моделирования Монте–Карло (ПСМ) исследовано течение разреженного газа через систему быстро вращающихся лопаток (турбин) в широком диапазоне чисел Кнудсена в плоской постановке, представляющей собой упрощенную версию турбомолекулярного насоса (ТБН).

Постановка и метод расчета В работе изучается течение неон-аргоновой смеси газов через систему турбин, подвижных (роторов) и неподвижных (статоров), в плоской постановке (см. рис. 1). Турбина представляет собой ряд наклонных бесконечно тонких пластин. На вход подается эквимольная смесь (50%/50%). Исследуется коэффициент разделения s в устройстве, определяемый как отношение числовых потоков компонент (неона и аргона) на выходе из системы в установившемся режиме течения. По аналогии с турбомолекулярным насосом задача определяется числом Кнудсена Kn , характеризующим степень разреженности газа, скоростью вращения лопаток U , наклоном роторов и статоров α , количеством секций N , а также относительной длиной лопаток L/H .

В работе использовался хорошо известный подход прямого статистического моделирования Монте–Карло [6]. Для расчета столкновения частиц использовалась модель твердых сфер (Hard Spheres/HS). Пары молекул для столкновения выбирались на основе классического подхода без счетчика времени (No-Time-Counter/NTC). Рассеяние молекул газа на твердых поверхностях моделировалось с использованием ядра рассеяния Максвелла с полной аккомодацией энергии и импульса (диффузное рассеяние). Использовалась равномерная квадратная сетка с размером ячейки $d = H/30$. Временной шаг Δt выбирался равным $\Delta x/4c_0$, где $c_0 = \sqrt{2kT_0/m}$ – характерная скорость молекул смеси (k – постоянная Больцмана, $m = (m_{Ar} + m_{Ne})/2$ – молекулярная масса смеси на входе). Число частиц на ячейку, соответствующее давлению p_0 , составляло около 200.

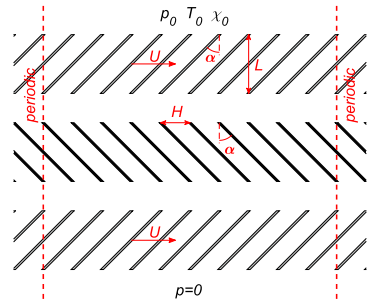


Рис. 1. Постановка задачи.

Результаты. Список определяющих параметров задачи:

$$U, N, \alpha, \frac{L}{H}, Kn = \frac{\mu_0 c_0}{p_0 H}, \quad (1)$$

где Kn — число Кнудсена, $\mu_0 = 26.3 \cdot 10^{-6}$ Па·с — табличное значение динамической вязкости входной смеси при температуре T_0 .

На рисунке 2 представлены результаты, указывающие на наличие эффекта разделения в системе. В левой части представлена зависимость коэффициен-

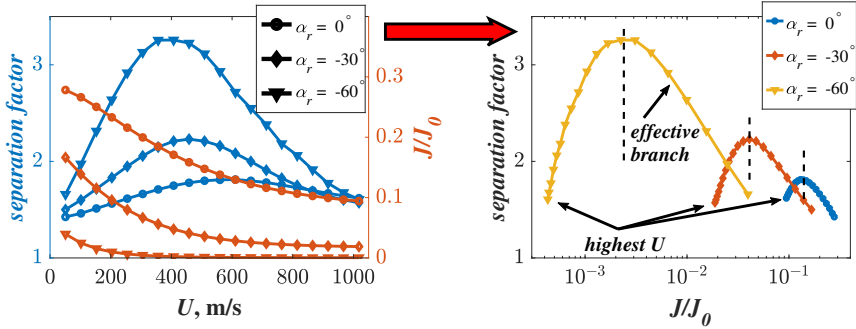


Рис. 2. (Слева) Зависимость коэффициента разделения s и потока J от скорости вращения роторов U при $Kn = 10$, $N = 3$, $L/H = 1$ и разных углах наклона лопаток α . (Справа) Те же данные в осях $J - s$, каждая точка соответствует отдельному значению скорости U .

та разделения s и нормированного расхода J/J_0 (где J_0 — эталонный расход в системе без лопаток в свободно-молекулярном режиме течения) от скорости роторов U в системе с $N = 3$ секциями, вертикальными статорами ($\alpha_s = 0^\circ$) и разными углами наклона роторов — α_r . Как видно, увеличение скорости роторов предсказуемо снижает расход, поскольку устройство работает в режиме «против потока» ($\alpha_r \geq 0$) — турбины качают газ в направлении, противоположном перепаду давлений. Однако основной результат заключается в том, что вращение турбин приводит к эффекту разделения — увеличению коэффициента разделения s . Более того, зависимость эффекта от скорости роторов U немонотонна. В дальнейшем обсуждении мы будем приводить результаты только до критического значения U_{cr} после которого коэффициент разделения начинает снижаться.

На рисунке 3 представлена зависимость эффективности устройства (значений J, s) от основных параметров устройства — Kn , N , α , L/H (помимо скорости U). Видно, что на качественном уровне, влияние всех основных пара-

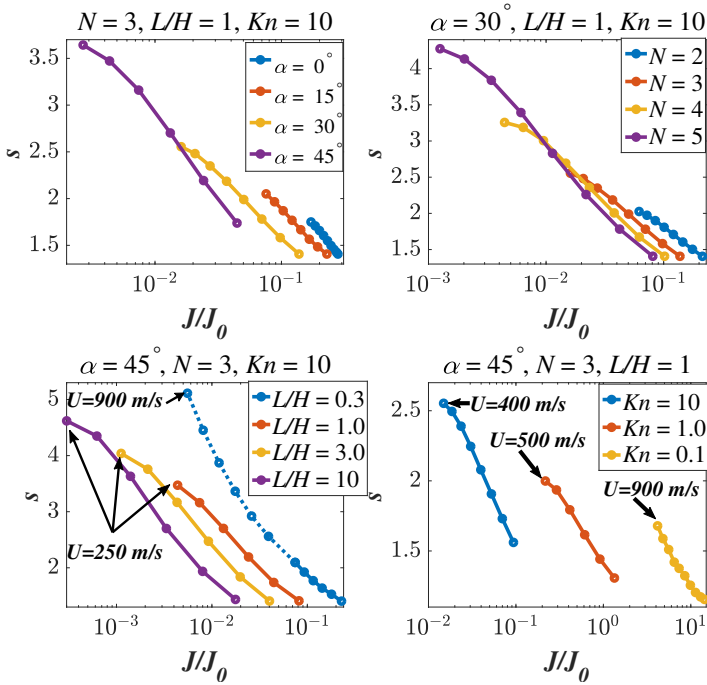


Рис. 3. (Слева) Зависимость коэффициента разделения s и потока J при различных скоростях вращения роторов U (разные точки) от угла наклона лопаток α (сверху-слева), количества секций N (сверху-справа), длины лопаток L/H (снизу-слева) и числа Кнудсена Kn (снизу-справа).

метров схоже с влиянием скорости вращения U — их увеличение приводит к увеличению коэффициента разделения и уменьшению потока J , и наоборот — уменьшение основных параметров снижает коэффициент s и повышает поток газа. Однако, стоит отметить некоторую немотонность по параметру L/H . При $L/H < 1$ максимальное значение s (перегиб графика $s(J)$) находится существенно выше, однако для достижения такого значения требуются намного большие скорости вращения U .

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 23-71-10057).

Литература

- [1] Becker W. The turbomolecular pump, its design, operation and theory; calculation of the pumping speed for various gases and their dependence on the forepump // Vacuum. 1966. Vol. 16. Iss. 11. P. 625–632.
- [2] Sharipov F. Numerical simulation of turbomolecular pump over a wide range of gas rarefaction // Journal of Vacuum Science & Technology A. 2010. Vol. 28. Iss. 6. P. 1312–1315.
- [3] Kosyanchuk V. Numerical study of microdevice with surface acoustic waves for separation of gas mixtures // Physics of Fluids. 2023. Vol. 35. Iss. 8. Art. 082001. doi: 10.1063/5.0157497
- [4] Kosyanchuk V., Konakov S. Numerical simulation of novel gas separation microdevice with oscillating elements // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2023. Vol. 144. Art. 106744. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2023.106744
- [5] Kosyanchuk V. Separation of binary gas mixture in a microchannel with oscillating barriers // Physics of Fluids. 2022. Vol. 34. Iss. 10. Art. 102006. doi: 10.1063/5.0117665
- [6] Bird G. A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford university press, 1994. 458 p.

Роль кинетики окиси азота в высокотемпературных течениях газов

Кравченко Д.С., Кунова О.В., Кустова Е.В., Мельник М.Ю.
kravchenk06.denis@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 40

Аннотация. Исследуется влияние обменных реакций Зельдовича и колебательного возбуждения молекул NO на макроскопические параметры потока за отраженными ударными волнами. Для численного моделирования используется поуровневый подход, который наиболее подробно описывает неравновесную колебательно-химическую кинетику в гидродинамическом масштабе времени. Результаты моделирования сравниваются с экспериментом и данными, полученными прямым статистическим моделированием. Для смесей, содержавших молекулы NO в начальный момент времени, обнаружено слабое влияние обменных реакций, но значительный эффект колебательного возбуждения NO. Для воздуха учет колебательного возбуждения NO практически не влияет на точность моделирования, при этом обменные реакции существенно влияют на числовые плотности компонентов смеси.

Ключевые слова: высокотемпературные течения, поуровневая колебательно-химическая кинетика, обменные реакции, колебательное возбуждение, отраженные ударные волны.

Введение. Моделирование высокотемпературных неравновесных течений чрезвычайно важно для современной аэрокосмической отрасли. Для моделирования далеких от равновесия течений газа применяются различные подходы: прямое статистическое моделирование (DSMC), континуальные подходы [1], моментные методы и др. Континуальные подходы наименее требовательны к вычислительным ресурсам и, в зависимости от степени отклонения от равновесия, можно использовать модели разной степени сложности: поуровневые, многотемпературные, одготемпературные. Поуровневая модель рассматривает все колебательные состояния как независимые сорта частиц и является наиболее точной моделью для описания неравновесных течений. Она обеспечивает естественную связь между колебательной и химической релаксацией в гидродинамическом масштабе времени.

Сильнонеравновесные условия возникают, например, за фронтом ударной волны (УВ). Задача о моделировании релаксации газа за УВ может быть сведена к одномерной (1D) стационарной постановке. Поэтому экспериментальные данные, полученные в ударных трубах, часто используют для валидации теоретических моделей. В недавних экспериментах была исследована релаксация в смесях $\text{NO}/\text{N}_2/\text{Ar}$ [2] и N_2/O_2 [3]. Данные этих экспериментов успешно использовались для валидации теоретических моделей [4, 5].

Целью настоящей работы является расширение предыдущих исследований и рассмотрение эффектов учета обменных реакций Зельдовича и колебательного возбуждения молекул NO на макроскопические параметры потока.

Теоретическая модель. Задача связанной колебательно-химической релаксации и газовой динамики решалась на основе нулевого приближения метода Чепмена–Энскога в точной поуровневой постановке [1]. При этом в кинетическую схему включены следующие процессы:

- обмены колебательной энергией между молекулами (VVT);
- переход колебательной энергии в поступательную (VT);
- поуровневые реакции диссоциации–рекомбинации (DR);
- поуровневые обменные реакции Зельдовича (ER).

Колебательные энергообмены описывались с использованием модели нагруженного гармонического осциллятора (ГНО [6]) с учётом только одноквантовых переходов. Процессы диссоциации описывались с использованием модели Маррона–Тринора [7] со значениями параметра $U = 3T$. Выбор данных моделей обусловлен валидацией, проведенной в нашей предыдущей работе [5]. Для оценки влияния обменных реакций и колебательного возбуждения NO использовались следующие модели:

- без учета обменных реакций (**no-ER** модель);
- обменные реакции с учетом возможности образования молекул NO на всех колебательных уровнях (**ER(*i*)** модель) [8];
- пренебрежение возможностью колебательного возбуждения молекул NO и, соответственно, обменные реакции с образованием молекул NO только в основном колебательном состоянии (**ER(0)** модель).

Моделирование проводилось для смесей NO/N₂/Ar и N₂/O₂ в условиях экспериментов [2, 3]. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая уравнения детальной поуровневой кинетики для каждого колебательного состояния, уравнения сохранения импульса и энергии, решалась численно методом переменного порядка точности «ode15s», реализованного в пакете прикладных программ MATLAB. Для смеси NO/N₂/Ar дополнительно учитывалась релаксация смеси между падающей и отраженной УВ.

Результаты. На рисунке 1 представлено сравнение результатов моделирования для смеси NO/N₂/Ar. В данном случае начальное содержание молекул NO в смеси составляет 2%, температура газа T^0 сразу за отраженной

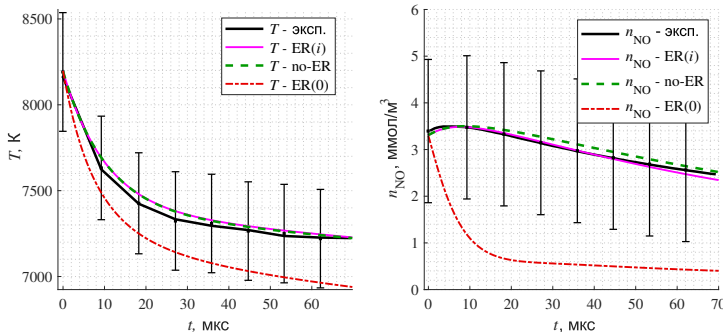


Рис. 1. Поступательная температура смеси и числовая плотность NO за отраженной УВ для смеси NO/N₂/Ar; начальный состав смеси: NO — 2%, N₂ — 49%, Ar — 49%.

УВ достигает 8210 К. Для моделей **no-ER** и **ER(*i*)** видно хорошее согласие результатов с экспериментом [2]. При использовании модели **ER(0)** все колебательные энергообмены для молекул NO отключены, поэтому изменяется полная энергия системы, и происходит выход на другое состояние равновесия. Заметно существенное влияние колебательного спектра на числовую плотность NO, поскольку для модели **ER(0)** молекулы NO диссоциируют более активно из единственного колебательного состояния. Для данной смеси учет обменных реакций почти не влияет на макропараметры потока. Обменные реакции ока-

зывают значительное влияние только на числовую плотность молекулярного кислорода, при этом его молярная доля в смеси не превышает 0.1%.

На рисунке 2 представлено сравнение результатов для смеси N_2/O_2 , также приведены данные эксперимента [3] и результаты прямого статистического моделирования [4]. В данном экспериментальном случае температура газа T^0 сразу за отраженной УВ достигает 7200 К. Пренебрежение колебательным возбуждением NO почти не влияет на макропараметры потока, поскольку изначально в смеси не содержится молекул NO. Однако учет обменных реакций значительно влияет на состав смеси и числовые плотности компонентов, в отличие от случаев с начальным содержанием NO в смеси.

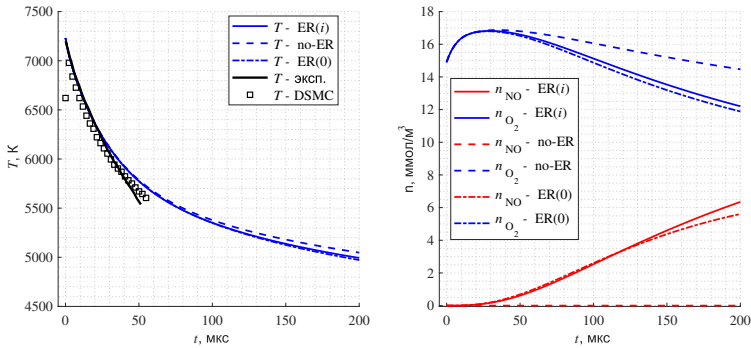


Рис. 2. Поступательная температура смеси и числовая плотность NO и O_2 за отраженной УВ для смеси N_2/O_2 ; начальный состав смеси: $N_2 - 79\%$, $O_2 - 21\%$.

Выводы. Таким образом, для смесей, изначально содержащих NO, эффект обменных реакций оказывается слабым. Заметно лишь некоторое влияние на числовую плотность O_2 и на заселенности верхних колебательных уровней остальных молекул. Однако корректный учет колебательного возбуждения молекул NO для таких смесей очень важен и значительно влияет на макропараметры потока. Для воздуха, в котором содержание молекул NO в первые моменты времени минимально, наблюдается обратный эффект. Важно учитывать обменные реакции, поскольку они в значительной степени влияют на числовые плотности компонентов смеси и ее состав. При этом можно использовать упрощенную модель кинетики, не учитывающую колебательное возбуждения молекул NO.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 22-11-00078.

Литература

- [1] Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. 272 с.
- [2] Streicher J. W., Krish A., Hanson R. K. High-temperature vibrational relaxation and decomposition of shock-heated nitric oxide: II. Nitrogen dilution from 1900 to 8200 K // *Phys. Fluids*. 2022. Vol. 34. Art. 116123.
- [3] Streicher J. W., Krish A., Hanson R. K. Vibrational relaxation time measurements in shock-heated oxygen and air from 2000 K to 9000 K using ultraviolet laser absorption // *Phys. Fluids*. 2020. Vol. 32. Art. 086101.
- [4] Gimelshein S. F., Streicher J. W., Krish A., Hanson R. K., Wysong I. J. Application of Reflected Shock Wave Configuration to Validate Nonequilibrium Models of Reacting Air // *J. Thermophys. Heat Transf.* 2023. Vol. 37. P. 161–181.
- [5] Kravchenko D., Kunova O., Kustova E., Melnik M. Reflected shock waves in air components and their mixtures: Validation of theoretical models // *Acta Astronautica*. 2024. Vol. 218. P. 47–58.
- [6] Adamovich I. V. et al. Vibrational energy transfer rates using a forced harmonic oscillator model // *J. Thermophys. Heat Transf.* 1998. Vol. 12. Iss. 1. P. 57–65.
- [7] Marrone P. V., Treanor C. E. Chemical relaxation with preferential dissociation from excited vibrational levels // *Phys. Fluids*. 1963. Vol. 6. Iss 9. P. 1215–1221.
- [8] Kustova E. V., Savelev A. S., Kunova O. V. Rate coefficients of exchange reactions accounting for vibrational excitation of reagents and products // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. Art. 060010.

Функция распределения пар молекул модифицированной бимодальной модели ударной волны

*Кузнецов М.М.,¹ Кулешова Ю.Д.,¹ Парёнкина В.И.,²
Сатюков Д.Г.¹*

*kuznets-omn@yandex.ru, juliaybogdanova@mail.ru, parjonkinavi@mai.ru,
dsatyukov@gmail.com*

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Государственный университет просвещения»,
141014, Российская Федерация, Московская обл., Мытищи, ул. Веры Волошиной, 24,

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Как показали численные расчеты фронтов ударных волн, эффекты поступательной неравновесности в несильно диспергированных смесях наиболее ин-

интересны в задачах спуска космических аппаратов в атмосферах планет Солнечной системы. Было также показано, что учет поступательной неравновесности особенно важен при расчете скоростей обменных химических реакций. Однако, в несильно диспергированных смесях газов при нахождении аналитических решений системы кинетических уравнений Больцмана для каждого из компонентов смеси возникают существенные трудности. Прежде всего, это касается применения классической бимодальной модели ударной волны Тамма–Мотт–Смита.

Ключевые слова: ударная волна, модифицированная бимодальная модель, бинарные смеси газов, функция распределения.

Несмотря на то, что применение модели Тамма–Мотт–Смита оказалось очень успешным при расчете структуры ударных волн в однокомпонентных газах, применение ее в ударно-сжатых бинарных и многокомпонентных смесях газов оказалось невозможным, как было показано в работе [1]. Дело в том, что при применении классического метода Тамма–Мотт–Смита к бинарным и многокомпонентным смесям газов невозможно обеспечить выполнение законов сохранения внутри фронта ударной волны.

Модифицированный метод Тамма–Мотт–Смита, предложенный в работе [2], позволил преодолеть эту трудность, добавив дополнительные слагаемые в аппроксимацию одночастичных функций распределения. В настоящей работе модифицированные одночастичные функции из работы [2] используются для построения функции распределения пар молекул. Важность нахождения функций распределения пар молекул для исследования поступательной неравновесности была впервые обоснована в работе [3].

Аналитическое представление функции распределения пар молекул в диспергированных смесях газов с учетом физико-химических процессов с энергетическим барьером было получено в работе [4]. В настоящей работе модифицированные одночастичные функции из работы [2] используются для аналитического построения функций распределения пар молекул для несильно диспергированных бинарных смесей газов.

Функция распределения пар молекул для бинарной смеси газов G_{12} имеет вид:

$$G_{12}(c, x) = \langle f_1(c, x) f_2(c, x) \rangle. \quad (1)$$

Преобразуя равенство (1) к безразмерному виду H_{12} , получим

$$H_{12}(c, x) = \frac{G_{12}(c, x)}{n_1(x)n_2(x)} = \langle F_1(c, x) F_2(c, x) \rangle. \quad (2)$$

Здесь $n_1(x)$, $n_2(x)$ — числовые плотности частиц каждого из компонентов бинарной смеси, $F_1(c, x)$, $F_2(c, x)$ — числовые плотности частиц каждого из ком-

понентов бинарной смеси:

$$F_1(c, x) = \frac{1}{N_1(x)} \{ [\Phi_1^+(c) - \alpha(x) \cdot \Delta_1 + \tilde{a}(x) \cdot \rho_{12} \cdot \Delta_2] \}, \quad (3)$$

$$F_2(c, x) = \frac{1}{N_2(x)} \{ [\Phi_2^+(c) - \alpha(x) \cdot \Delta_2 + \tilde{a}(x) \cdot \rho_{21} \cdot \Delta_1] \}, \quad (4)$$

$$N_1(x) = 1 - (1 - \varepsilon) a(x) + (1 - \varepsilon) \cdot \tilde{a}(x) \rho_{12}, \quad (5)$$

$$N_2(x) = 1 - (1 - \varepsilon) a(x) + (1 - \varepsilon) \cdot \tilde{a}(x) \rho_{21}, \quad (6)$$

причем $N_1(x) = \frac{n_1(x)}{n_1^+}$, $N_2(x) = \frac{n_2(x)}{n_2^+}$, $\varepsilon = \frac{n_1^-}{n_1^+} = \frac{n_2^-}{n_2^+}$, ε^{-1} — т. н. степень сжатия в ударной волне, $\rho_{12} = \frac{m_2 n_2^+}{m_1 n_1^+}$, $\rho_{21} = \frac{1}{\rho_{12}}$. Коэффициенты $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ входят в модифицированное бимодальное распределение [1], $\Delta_1(c) = \Phi_1^+(c) - \varepsilon \Phi_1^-(c)$, $\Delta_2(c) = \Phi_2^+(c) - \varepsilon \Phi_2^-(c)$, пары функций Φ_1^- , Φ_1^+ и Φ_2^- , Φ_2^+ соответствуют поступательно равновесным максвелловским распределениям в каждом компоненте 1 и 2 на входе (знак минус) и выходе (плюс) в ударной волне. Угловые скобки означают интегрирование по всем угловым переменным и скоростям центра масс молекул сортов 1 и 2.

Подставляя равенства (3)–(6) в формулу (2), получим:

$$H_{12}(c, x) = [N_1 N_2]^{-1} \langle [\Phi_1^+(c) - a(x) \Delta_1(c) + \rho_{12} \tilde{a}(x) \Delta_2(c)], \dots \\ [\Phi_2^+(c) - a(x) \Delta_2(c) + \rho_{21} \tilde{a}(x) \Delta_1(c)] \rangle. \quad (7)$$

Формула (7) имеет вероятностный смысл, заключающийся в том, что она дает плотность вероятности нахождения пары молекул внутри ударной волны в сечении с координатой x и с модулем относительной скорости $|c_1 - c_2|$.

Формулы для пар молекул одного и того же компонента получаются аналогично выражению (7) и имеют вид:

$$H_{11}(c, x) = [N_1 N_1]^{-1} \langle [\Phi_1^+(c) - a(x) \Delta_1(c) + \rho_{12} \tilde{a}(x) \Delta_1(c)], \dots \\ [\Phi_1^+(c) - a(x) \Delta_1(c) + \rho_{12} \tilde{a}(x) \Delta_1(c)] \rangle, \quad (8)$$

$$H_{22}(c, x) = [N_2 N_2]^{-1} \langle [\Phi_2^+(c) - a(x) \Delta_2(c) + \rho_{21} \tilde{a}(x) \Delta_2(c)], \dots \\ [\Phi_2^+(c) - a(x) \Delta_2(c) + \rho_{21} \tilde{a}(x) \Delta_2(c)] \rangle. \quad (9)$$

Полученные выражения (7)–(9) позволяют аналитически исследовать эффекты перехлеста в бинарных смесях газов со сравнимыми величинами как концентраций, так и масс компонентов.

Литература

- [1] Tanenbaum B. S., Scott R. M. D. Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture // *The Physics of Fluids*. 1966. Vol. 9. P. 1048–1049.
- [2] Bratos M., Herczynski R. Shock waves in noble gases and their mixtures // *Arch. Mech.* 1983. Vol. 35. No. 2. P. 215–239.
- [3] Генич А. П., Куликов С. В., Минелис Г. Б., Черешнев С. Л. Поступательная релаксация в ударных волнах в газах // *Препринт/ ОИХФ АН СССР*. Черноголовка, 1991. 68 с.
- [4] Кузнецов М. М., Кулешова Ю. Д. Аналитическая оценка наибольшего значения эффекта высокоскоростного перехлеста в ударной волне // *Вестник Московского государственного областного университета*. Серия: Физика-Математика. 2021. № 2. С. 41–51.

Прогноз параметров плазмы в спиральном магнитном поле на основе моделирования и анализ точности численного решения

Лазарева Г. Г.

lazareva-gg@rudn.ru

Российский университет дружбы народов,
117198, Российская Федерация, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для функции распределения и потенциала электрического поля. Разработаны и апробированы тесты с аналитическим решением. В процессе расчётов анализируются численный шум, сохранение заряда и колебания энергии, погрешности вычисления функции распределения, скорости, плотности и выполнение уравнения Власова. В исследовании представлена новая математическая модель переноса плазмы в спиральном магнитном поле. Удержание плазмы происходит благодаря импульсу от магнитного поля с винтовой симметрией. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы в аксиально-симметричной постановке. Модель использует экспериментальные данные установки ВЕТА, созданной в ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН. Результаты моделирования подтвердили эффект удержания. Были получены зависимости характеристик вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Математическая модель разработана для прогнозирования параметров удержания плазмы в установках со спиральным магнитным полем. Верификация кодов для математического моделирования включает тест на точность. Представлены разработанные тесты для кодов на основе PIC-метода с использованием качественных решений.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение переноса, винтовое магнитное поле.

Введение. Представлена математическая модель переноса плазмы в спиральном магнитном поле, основанная на стационарном уравнении переноса в аксиально-симметричной постановке. В системе отсчёта вращающейся плазмы движение магнитных возмущений имеет компоненту скорости, сонаправленную с магнитным полем, что позволяет передавать импульс запертым частицам. Столкновения между пролётными и запертыми частицами обеспечивают эффективную силу, действующую на плазму в целом и способствующую возврату ионов в область удержания. В области поперечного сечения центральной части установки численно решается стационарное уравнение переноса плазмы с условием равенства нулю концентрации вещества на бесконечности. Коэффициенты уравнения уточнены в ходе анализа радиального распределения плотности плазмы с использованием экспериментальных данных. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки наблюдается эффект пинчевания плазменной струи, проявляющийся и в эксперименте. Полученные результаты соответствуют экспериментальным данным. В дальнейшем описанный метод может быть использован для прогнозирования работы действующих и проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле.

Постановка задачи. В моделируемом эксперименте происходит установление параметров плазмы и электромагнитного поля в течении 40 мс и затем наступает фаза, когда процесс стационарен в течении 120 мс, после чего разряд отключается. Основная задача экспериментов и математического моделирования состоит в исследовании удержания плазмы, при которых все параметры постоянны. Рассмотрим движение плазмы в центральной части ловушки, имеющей форму цилиндра. Вещество входит в область удержания из источника плазмы через левый торец цилиндра и выходит в расширитель через правую границу. Течение плазмы осесимметрично, что позволяет ограничиться двумерной постановкой задачи. Таким образом, удержание плазмы в спиральном магнитном поле должно описываться стационарными уравнениями в поперечном сечении центральной части установки в плоскости (r, z) .

В статье [1] получены выражения для компонентов радиального и продольного переноса частиц в винтовом магнитном поле. Система уравнений описывает динамику плазмы в МГД-приближении в аксиально-симметричной постановке. Различия в движении запертых и пролётных ионов учитываются в виде эффективной силы трения, зависящей от взаимной скорости компонент и доли запертых частиц. Продольная сила, действующая на плазму, возникает в результате взаимодействия радиального электрического тока захваченных ионов с азимутальной компонентой винтового магнитного поля. Учитывается диф-

фузия плазмы поперёк магнитного поля. Исключение зависимых переменных сводит систему уравнений к уравнению неразрывности потока.

Рассмотрим область $[0, r_{max}] \times [0, z_{max}]$ в поперечном сечении центральной части установки. В безразмерных величинах область является единичным квадратом. Считаем, что вещество не достигает стенок ловушки, на оси z ставим условие симметрии, на входе и выходе вещества задаем граничное распределение концентрации вещества $u(r, 0) = u_L(r)$ и $u(r, z_{max}) = u_R(r)$. Для расчетов использованы экспериментальные данные [2] для распределения концентрации на границах. Таким образом, стационарная задача имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} lT(r) \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} + l(1 + \varkappa(r))\varkappa(r)\zeta(r) \frac{\partial(\Phi(r, z)u(r, z))}{\partial z} + \\ \quad + \varkappa(r) \frac{\partial}{\partial r} l\zeta T(r) Z^{-1} \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} + lD\varkappa(r) \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, z) = 0, \quad u(r, 0) = u_L(r), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, z) = 0, \quad u(r, 1) = u_R(r), \end{array} \right. \quad (1)$$

где $u(r, z)$ — концентрация вещества, $T(r) = T_i + T_e$, $T_i = 4$ Эв и $T_e = 30(1 - (r/r_0)^2)$ — ионная и электронная температуры, Λ — отношение длины системы к длине свободного пробега λ иона, $\varkappa(r, R_m)$ — доля запертых частиц, $l = 216$ см — длина системы вдоль силовой линии, Z — среднее зарядовое число одного иона, D — коэффициент диффузии в поперечном поле. Доля запертых частиц $\varkappa(r, R_m) = 1 - 1/R(r, R_m)$, $R(r, R_m) = 2(R_m - 1)(r/a)^2 + 1$, где $R_m = 1.52$ — глубина гофрировки. Параметр $\zeta = c/V_z$ является отношением скорости звука $c_S = (T_e/M)^{1/2}$ и продольной скорости V_z движения магнитных возмущений при вращении плазмы в собственном амбиполярном электрическом поле. В уравнении (1) физические величины обезразмерены на: $r_0 = a$, $z_0 = l$, $\varphi_0 = T_e/e$, $u_0 = u_{max}$, $T_0 = T_e$, где $a = 8$ см — граница камеры, в которой может существовать плазма. Известно, что величина потенциала снижается с увеличением z за счёт наличия поперечной проводимости плазмы. Его распределение в пространстве задается, как убывающая вдоль оси производная абсолютной величины электрического поля: $\Phi(r, z) = (1 - \frac{0.002z}{h}) \frac{\partial|\varphi(r)|}{\partial r}$. Измеряемый с помощью зондов потенциал плазмы в экспериментах на установке СМОЛА зависит от параметров эксперимента. Максимум φ варьируется в пределах от $2T_e/e$ до $3T_e/e$. Максимальное значение безразмерного потенциала φ для установок следующего поколения, в которых возможно использование принципа винтового удержания, также лежит в этих же пределах. Экспериментально наблюдаемое распределение потенциала в центральной области плазмы (при значениях радиуса меньших 0.6 в безразмерных величинах) близко к квад-

ратичному, далее в периферийной области плазмы производная потенциала по радиусу снижается. Погрешность измерения потенциала в эксперименте составляет около 5%. Степень и коэффициенты аппроксимирующего полинома подобраны таким образом, чтобы его отклонение от экспериментально измеренных в референсном эксперименте значений было сопоставимым с экспериментальной погрешностью.

Результаты моделирования. В ходе моделирования переноса вещества в винтовом магнитном поле получены распределения концентрации при различных значениях глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Проведены вычислительные эксперименты для различных допустимых значений коэффициента диффузии, производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки. Расчеты показали, что при уменьшении коэффициента диффузии в поперечном поле вещество начинает прижиматься к оси. Совпадение расчётных распределений с экспериментальными с учётом конечной точности экспериментальных изменений достигается при коэффициенте диффузии в диапазоне $D = 0.01 - 0.1$. Дальнейшие расчеты проводились при $D = 0.1$. С увеличением производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки наблюдается сжатие плазменного шнура к оси. Полученные результаты соответствуют экспериментальным данным. В дальнейшем описанный метод может быть использован для прогнозирования работы действующих и проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле. Одной из основных задач для подобного прогнозирования является корректное определение граничных условий и численных коэффициентов в уравнении переноса без использования априорно известных экспериментальных распределений параметров плазмы. Для этого проведены расчёты с использованием известного точного граничного условия на бесконечности. В качестве распределения плотности плазмы на выходе из секции улучшенного удержания принимается значение решения при $z = 1$. Упрощение модели до решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка позволило уточнить коэффициенты модели и получить качественное соответствие экспериментальным данным. Дальнейшая работа будет направлена на расширение области параметров, при которых модель обладает достаточной предсказательной силой.

Разработка тестов. Первоначально разработанный для моделирования потоков жидкости, PIC-метод (particle-in-cell) в настоящее время является популярным инструментом для решения системы уравнений Власова–Максвелла и Власова–Пуассона. PIC-метод аппроксимирует функцию распределения набором вычислительных частиц, которые двигаются в самосогласованных электрическом и магнитном полях. Алгоритмы реализации PIC-метода позволяют гарантировать сохранение энергии, импульса и заряда. Сходимость

PIC-метода доказана. Но существование неустранимого численного шума метода частиц осложняет тестирование алгоритмов. Возникает проблема воссоздания непрерывных аналитических функций распределения конечными выборками вычислительных частиц. Разреженная плазма описывается кинетическим уравнением Власова для функций распределения ионов и электронов по скоростям. При использовании PIC-метода на лагранжевом этапе вычисляются скорости и координаты частиц, компоненты плотности тока и плотности заряда, на эйлеровом этапе находится потенциал в узлах сетки. В ходе расчетов на сгущающихся сетках анализировались численный шум, сохранение энергии, погрешности вычисления функции распределения, скорости, плотности и выполнения уравнения Власова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Литература

- [1] Beklemishev A. D. Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1771. P. 040006.
- [2] Bagryansky P. A., Beklemishev A. D., Postupaev V. V. Encouraging Results and New Ideas for Fusion in Linear Traps // J. Fusion Energy. 2019. V. 38. P. 162–181.

О деталях моделирования воздействия «всплеска» магнитного поля на движение проводящей жидкости

Маламанов С.Ю.
stevmal@mail.ru

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Численное моделирование воздействия магнитного поля на гидродинамическое осуществлялось в пространстве кольцевого зазора двух соосных горизонтальных цилиндров на основе решения нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. Разность потенциалов между поверхностями цилиндров поддерживалась постоянной, а в зазоре прикладывалось круговое магнитное поле, которое претерпело «всплеск».

Ключевые слова: численное моделирование, проводящая жидкость, скорость потока, разность потенциалов, магнитное поле.

В [1] рассмотрена задача о возникновении затопленной струи благодаря силе Ампера, которая обусловлена взаимодействием гидродинамического и электро-

магнитного поля в кольцевом зазоре двух соосных цилиндров, погруженных в морскую воду (слабопроводящая жидкость). Электрическое поле радиальное, магнитное — круговое. В этой связи, основой для анализа был тот факт, что энергия электромагнитного поля, локализованная в пространстве зазора, переходит в энергию струи. Это течение показано на рис. 1.

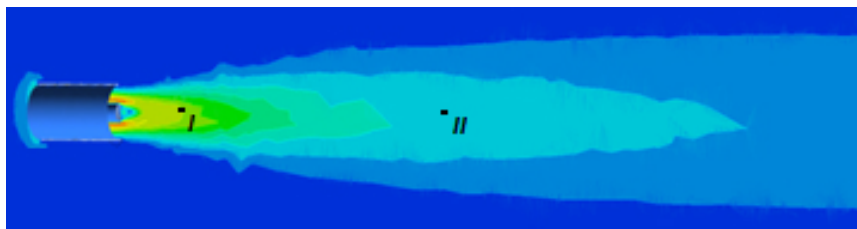


Рис. 1. Струя.

В настоящей работе осуществлено численное моделирование в условиях постоянного магнитного поля с кратковременным «всплеском». Это вполне типичная физическая ситуация. При этом, возникает законный вопрос: как моделировать изменение магнитного поля? Вполне допустимо в этой модельной ситуации представить изменение индукции магнитного поля экспоненциальной зависимостью, как показано на рис. 2 красным цветом.

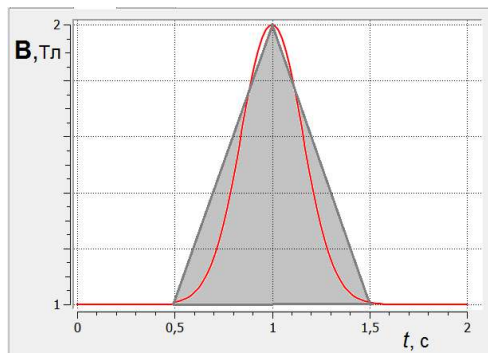


Рис. 2. Зависимость индукции магнитного поля от времени.

С другой стороны, часто используют более простые зависимости, в частности, — линейные, что и показано на этом же рисунке треугольником серого цвета. Видно, что и время действия, и «глубина» импульса одинаковы для двух случаев. На рис. 3 представлены распределения скорости в точке «I» (см.

рис. 1), расположенной на расстоянии 0.5 метра от выходного сечения цилиндров на оси симметрии, для трех случаев: «1» — постоянное круговое магнитное поле, «2» — импульс задан экспоненциальной зависимостью, «3» — треугольная форма импульса.

Хорошо просматривается существенное влияние наличия «всплеска» магнитного поля на прирост скорости. Кроме того, сказывается и его форма. Этот факт заслуживает особого внимания. Одинаковые время действия и максимальные значения индукции, при прочих равных условиях, приводят к разной «заполняемости» профиля скорости. Существенное уточнение может быть достигнуто, если по «анalogии» со вторым законом Ньютона, в котором фигурирует импульс силы, рассматривать «импульс магнитного поля». Тогда, вместо одинакового времени действия и максимального значения индукции, следует брать за основу равное значение площади под кривой, описывающей импульс поля. Имея ввиду возможное более простое задание формы профиля «всплеска», за основу была взята площадь треугольника. При этом, была уточнена экспоненциальная зависимость. На рис. 3 в правом нижнем углу, этому варианту соответствует «2*». Налицо, определенная «дозаполняемость» профиля скорости. Следующий рис. 4 иллюстрирует распределения скорости в точке «II» (см. рис. 1), расположенной на расстоянии 3.5 метра от выходного сечения цилиндров на оси симметрии.

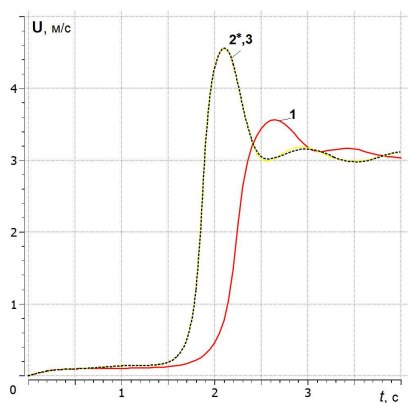
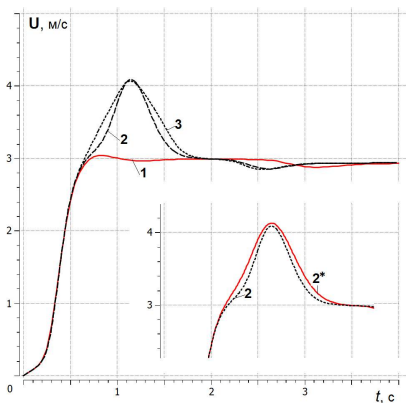


Рис. 3. Изменение скорости в точке «I». **Рис. 4.** Изменение скорости в точке «II».

Из приведенных графиков хорошо видно, что с увеличением расстояния от выходного сечения, разница в скорости, при экспоненциальном и треугольном представлении (площади под ними равны) импульса магнитного поля практически исчезла. Это дает возможность, при определенных условиях, обосно-

ванно представлять импульсное воздействие магнитного поля более простой — линейной зависимостью.

Литература

- [1] Маламанов С. Ю. Поток электромагнитной энергии при движении проводящей жидкости в кольцевом зазоре двух соосных цилиндров // В сборнике: IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, 2021. С. 268–269.

Динамика изменения формы облака при наносекундном лазерном испарении в вакууме

Морозов А. А.^{1,2} Титарев В. А.²

morozov@itp.nsc.ru, vladimir.titarev@frcsc.ru

¹Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1,

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 40

Аннотация. Проведено численное исследование динамики разлета газа при импульсном испарении в вакууме. Задача рассматривается в осесимметричной постановке для широкого диапазона параметров. Для получения достоверного численного решения используются два различных кинетических подхода: прямое статистическое моделирование методом Монте-Карло и решение модельного кинетического уравнения БГК. Анализируется изменение степени вытянутости облака испаренного вещества в процессе разлета. Показано сильное влияние количества испаренного вещества на форму формирующегося облака. При испарении большого числа монослоев наблюдается хорошее согласие с континуальным решением.

Ключевые слова: кинетическая модель БГК, прямое статистическое моделирование, разреженный газ, импульсное лазерное испарение, LasInEx, Несветай.

Лазерная абляция твердых тел наносекундными импульсами в фоновом газе широко используется для осаждения тонких многокомпонентных пленок, синтеза наночастиц, элементного анализа, обработки, чистки и структурирования поверхности [1]. Исследования динамики разлета лазерного факела в фоновом газе важны для оптимизации процессов, связанных с этими различными применениями. Важным частным случаем этой задачи является лазерная абляция в вакууме, т. к. в этом случае анализ разлета продуктов абляции позволяет получить информацию о механизме и динамике процесса абляции. Динамика разлета лазерного факела в вакууме или фоновом газе является предметом многочисленных численных исследований, как на основе решения уравнений

сплошной среды [2, 3], так и на основе кинетического моделирования на молекулярном уровне [4]–[6]. Однако, несмотря на большое число работ в этой области, систематического исследования этого процесса не было. Численные исследования были проведены для различных конкретных режимов без взаимной верификации, причем используемые численные подходы большей частью являются приближенными.

Для точного решения этой задачи в данной работе использовались различные кинетические подходы: метод прямого статистического моделирования (ПСМ) Монте-Карло [7] и решение уравнения Больцмана с оператором столкновений Бхатнагара, Гросса и Крука (модель БГК) [8]. Расчеты методом ПСМ проведены с использованием программного кода *LasInEx* (Laser Induced Expansion) [9, 10]. Решение кинетического уравнения строилось кодом «Несветай» [11, 12] с использованием подвижной сетки в физическом пространстве [13] и специальной неструктурированной сетки в скоростном пространстве [14]. Предварительные результаты сравнения этих двух подходов применительно к данной задаче представлены в работах [14]–[16].

Задача решается в осесимметричной постановке. В течение длительности импульса задается постоянный поток частиц с поверхности испарения с круглого пятна. Отдельно рассматриваются случаи испарения в вакуум и в фоновый газ низкого давления. Для скоростей испаряющихся частиц задается полумаксвелловская функция распределения. Используется модель твердых сфер. Предполагается, что все возвращающиеся молекулы поглощаются на поверхности испарения. Поглощение лазерного излучения в факеле и ионизации газа не учитываются.

Для анализа динамики изменения формы облака при испарении в вакуум рассмотрено движение фронта облака в осевом и радиальном направлениях. Положение границы фронта облака определялось как поверхность, за пределами которой вниз по потоку содержатся 10% всех частиц облака. Обнаружено, что осевое положение границы фронта слабо зависит от параметров задачи, тогда как радиальный размер облака существенно уменьшается при увеличении размера пятна или числа монослоев. Следует отметить, что при уменьшении числа испаренных монослоев скорость движения фронта в радиальном направлении увеличивается и в бесстолкновительном пределе совпадает со скоростью движения фронта в осевом направлении.

Для оценки степени вытянутости факела в осевом направлении введем отношение $k_f = x_f/r_f$ [17], которое непосредственно определяет угловое распределение частиц в облаке. Временная эволюция степени вытянутости представлена на рис. 1. Степень вытянутости сильно увеличивается как с увеличением числа монослоев, так и с увеличением размера пятна испарения. Так, для размера пятна $b = 10$ для 100 монослоев получается максимальная вытянутость $k_f = 5$, тогда как для размера пятна $b = 100$ имеем максимальное значение

$k_f = 11$. Со временем степень вытянутости k_f стремится к некоторому предельному значению.

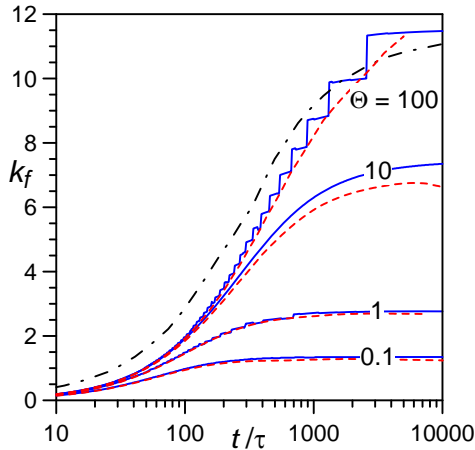


Рис. 1. Временная эволюция степени вытянутости облака k_f для разных значений числа монослоев для размера пятна $b = R/(u_T t) = 100$: ПСМ (сплошные линии), кинетическое уравнение (пунктир) и континуальное решение [17] (штрих-пунктир).

Решение кинетического уравнения и метод ПСМ дают близкие значения степени вытянутости. Начиная с некоторого момента времени для числа монослоев 10 и 100 полученные в решении кинетического уравнения кривые начинают «заваливаться» вниз, что объясняется недостаточным разрешением пространственной сетки и сложностью проведения расчетов в вакуум с использованием конечного значения плотности газа, которое ограничено разрядностью ЭВМ. Также на рис. 1 представлено континуальное решение из работы [17]. Видно, что оно достаточно хорошо согласуется с кинетическими решениями для числа монослоев 100.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-11-00078. Вычисления проводились на суперкомпьютерах РСК Торнадо, установленных в МСЦ РАН, а также на собственном кластере ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН.

Литература

- [1] Pulsed laser deposition of thin films: Applications-led growth of functional materials. Eason R. (Ed.), Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2007.
- [2] Bulgakov A. V., Bulgakova N. M. Gas-dynamic effects of the interaction between a pulsed laser-ablation plume and the ambient gas: analogy with an underexpanded jet // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1998. V. 31. No. 6. P. 693–703.
- [3] Gusarov A. V., Gnedovets A. G., Smurov I. Gas dynamics of laser ablation: Influence of ambient atmosphere // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 88. No. 7. P. 4352–4364.
- [4] Sibold D., Urbassek H. M. Effect of gas-phase collisions in pulsed-laser desorption: A three-dimensional Monte Carlo simulation study // *J. Appl. Phys.* 1993. V. 73. No. 12. P. 8544–8551.
- [5] Itina T. E., Tokarev V. N., Marine W., Autric M. Monte Carlo simulation study of the effects of nonequilibrium chemical reactions during pulsed laser desorption // *J. Chem. Phys.* 1997. V. 106. No. 21. P. 8905–8912.
- [6] Petrov V. A., Ranjbar O. A., Zhilyaev P. A., Volkov A. N. Kinetic simulations of laser-induced plume expansion from a copper target into a vacuum or argon background gas based on ab initio calculation of Cu–Cu, Ar–Ar, and Ar–Cu interactions // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. P. 102010.
- [7] Bird G. A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation Monte Carlo method.* Oxford: Clarendon Press, 1994.
- [8] Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* 1944. V. 94. P. 1144–1161.
- [9] Morozov A. A. Interpretation of time-of-flight distributions for neutral particles under pulsed laser evaporation using direct Monte Carlo simulation // *J. Chem. Phys.* 2013. V. 139. No. 23. P. 234706.
- [10] Morozov A. A., Starinskiy S. V., Bulgakov A. V. Pulsed laser ablation of binary compounds: effect of time delay in component evaporation on ablation plume expansion // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2021. V. 54. No. 17. P. 175203.
- [11] Titarev V. A. Application of model kinetic equations to hypersonic rarefied gas flows // *Computers and Fluids.* 2018. V. 169. P. 62–70.
- [12] Титарев В. А. Применение кода Несветай к решению трехмерных задач высотной аэродинамики // *Журнал выч. математики и матем. физики.* 2020. Т. 60. № 4. С. 752–764.
- [13] Titarev V. A., Morozov A. A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian discrete velocity method with application to laser-induced plume expansion // *Applied Mathematics and Computation.* 2022. V. 429. P. 127241.
- [14] Morozov A. A., Frolova A. A., Titarev V. A. On different kinetic approaches for computing planar gas expansion under pulsed evaporation into vacuum // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. No. 11. P. 112005.

- [15] Morozov A., Titarev V. Planar Gas Expansion under Intensive Nanosecond Laser Evaporation into Vacuum as Applied to Time-of-Flight Analysis // Entropy. 2022. V. 24. No. 12. P. 1738.
- [16] Morozov A. A., Titarev V. A. Dynamics of planar gas expansion during nanosecond laser evaporation into a low-pressure background gas // Phys. Fluids. 2022. V. 34. No. 9. P. 096101.
- [17] Anisimov S. I., Bauerle D., Luk'yanchuk B. S. Gas dynamics and film profiles in pulsed-laser deposition of materials // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 12076–12081.

Континуальные подходы к моделированию течения разреженного газа в задаче Куэтта

Норкин М.М.,¹ Шакурова Л.А.,^{1,2} Кустова Е.В.^{1,2}
mariknorkin@mail.ru, liya.shakurova@spbu.ru, e.kustova@spbu.ru

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 40/2

Аннотация. Работа посвящена моделированию плоского течения Куэтта разреженных газовых смесей, а также оценке применимости континуальных подходов для данных течений. Рассматриваются два типа газов — одноатомный газ и бинарная смесь. Последняя описывается в рамках однотемпературного и многотемпературного приближений. Численное моделирование задачи включает в себя тестовые случаи со сверхзвуковой скоростью движения пластин. Оценивается вклад граничных условий скольжения при рассмотрении различных моделей рассеяния частиц поверхностью. Результаты сравниваются с данными, полученными в рамках прямого статистического моделирования и молекулярно-динамического моделирования.

Ключевые слова: течение Куэтта, граничные условия скольжения, разреженный газ, взаимодействие газа с твердыми стенками, многотемпературные модели.

Введение. При описании течений неравновесных газовых смесей необходимо учитывать процессы релаксации внутренней энергии, химические реакции, эффекты разреженности. Модели физико-химических процессов должны проходить валидацию, что наиболее просто реализовать в рамках одномерных задач. В качестве таких задач могут рассматриваться задачи о структуре ударной волны, о течении газа в сопле, течение газа в пограничном слое на линии торможения, одномерное течение Куэтта. Рассмотрение течения Куэтта позволяет изучать влияние процессов переноса и эффектов разреженности на профили параметров газа. Для многокомпонентных смесей задача Куэтта представляет интерес с точки зрения оценки вклада процессов диффузии, учета поверхностной структуры твердых стенок и гетерогенных химических реакций.

Большой интерес представляет изучение этих эффектов в контексте движения пластин со сверхзвуковой скоростью. В таких условиях даже простейший случай одноатомного несжимаемого газа не позволяет получить аналитическое решение для задачи Куэтта, поэтому требуется применение детальных моделей расчета процессов переноса и взаимодействия с поверхностями твердых тел.

В работе данные эффекты изучаются в рамках континуальных однотемпературных и многотемпературных приближений. Основной задачей является оценка применимости континуальных подходов, тестирование различных моделей граничных условий скольжения, возможностей их включения в численное моделирование и исследование различных моделей ядер рассеяния. Также исследовано влияние моделей процессов переноса на решение задачи Куэтта.

Постановка задачи. Моделируется стационарное течение Куэтта, или течение газовой смеси между двумя пластинами, одна из которых движется относительно другой с некоторой постоянной скоростью. Течения газа описывается в рамках однотемпературного (1Т) и многотемпературного приближений (МТ). Система уравнений, описывающая течение Куэтта, имеет следующий вид (вектор потоков разделен на конвективную и вязкую составляющие):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho y_2 \\ \dots \\ \rho y_s \\ \rho v_\tau \\ \rho v_n \\ \rho E \\ \rho E_{\text{vibr}} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v_n \\ \rho y_2 v_n \\ \dots \\ \rho y_s v_n \\ \rho v_\tau v_n \\ \rho v_n^2 + p \\ \rho v_n E + p v_n \\ \rho v_n E_{\text{vibr}} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho y_2 V_{2,y} \\ \dots \\ \rho y_s V_{s,y} \\ -\eta \frac{\partial v_\tau}{\partial y} \\ -\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{\partial v_n}{\partial y} \\ q_y + S \\ -\lambda_v \frac{\partial T^{\text{vibr}}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 R_2^{\text{react}} \\ \dots \\ m_s R_s^{\text{react}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \dot{E}_{\text{vibr}} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $q_y = -\lambda' \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda_v \frac{\partial T^{\text{vibr}}}{\partial y} + p \sum_c y_c V_{c,y} h_c$, $S = -\eta v_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial y} - \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{\partial v_n}{\partial y} v_n$, $y_c = \rho_c / \rho$ — массовая доля компонента смеси c (ρ_c — плотность компонента c , ρ — полная массовая плотность смеси), v_n и v_τ — нормальная и касательная компоненты скорости (y — координата вдоль нормали к стенкам), p — давление, T — температура, T^{vibr} — колебательная температура, $\mathbf{V}_c = -\sum_d D_{cd} \mathbf{d}_d - D_{Tc} \nabla \ln T$ — скорость диффузии компонента c (D_{cd} — коэффициенты диффузии, D_{Tc} — коэффициент термодиффузии, \mathbf{d}_c — диффузионная термодинамическая сила), s — число компонентов в смеси, E , E^{vibr} — полная удельная энергия и колебательная энергия смеси, η и ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, λ' , λ_v — парциальный коэффициент теплопроводности смеси и коэффициент теплопроводности колебательных степеней свободы, h_c — удельная энтропия компонента c , R_s^{react} — источник в уравнении химической кинетики, \dot{E}_{vibr} характеризует изменение колебательной энергии

за счет колебательной релаксации и химических реакций [1]. Уравнения выписаны в рамках двухтемпературной модели (далее в работе будет рассмотрена бинарная смесь из атомов и молекул) для модели гармонического осциллятора.

В оригинальной постановке задачи Куэтта отсутствует вектор консервативных переменных, меняющихся во времени. Здесь этот вектор включен для применения численного метода установления. Кроме того, в моделирование включается дополнительная нормальная компонента скорости для замыкания системы и применения конечно-объемной схемы. При сходимости процесса к стационарному решению введенная компонента скорости стремится к нулю.

Рассмотрение разреженных газов вблизи твердых стенок в рамках континуального приближения возможно при дополнении системы уравнений переноса граничными условиями скольжения. В данной работе рассматриваются скорость скольжения и скачки температуры, учитывающие физические эффекты взаимодействия газа с поверхностью твердого тела, полученные на основе метода, предложенного в [2, 3]. Такие условия корректно учитывают процессы переноса вблизи стенки, а также, при необходимости, поверхностную химию.

Численная схема. В рамках рассматриваемой задачи было решено писать собственный решатель, поскольку при модификации готовых решателей с открытым исходным кодом не удается реализовать различные численные схемы и новые модели граничных условий. В работе выбран метод конечных объемов, поскольку он является наиболее оптимальным при рассмотрении консервативных задач. Если записать систему (1) в обобщенной векторной форме,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}^v = \mathbf{H}, \quad (2)$$

где \mathbf{U} — вектор консервативных переменных, \mathbf{F} — вектор потоков конвективных членов, \mathbf{F}^v — вектор потоков вязких членов, \mathbf{H} — вектор источников, то дискретизация системы уравнений (1), основанная на применении метода конечных объемов, схемы Годунова и явной схемы по времени, будет следующей:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = & \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta y_i} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}_{i-1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i-1}^n) + \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{v,n} - \mathbf{F}_{i-1}^{v,n}}{2} \right) \\ & + \Delta t \mathbf{H}_i(\mathbf{U}_i^n), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3)$$

Верхний индекс соответствует временной итерации, нижний — номеру ячейки; \mathbf{U}_i^n — значения вектора консервативных переменных внутри объема, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ — потоки на гранях ячеек, Δt — временной шаг, Δy_i — шаг сетки.

На основе введенной выше схемы был разработан конечно-объемный программный комплекс для численного моделирования одномерных задач, включающий в себя течения Куэтта с произвольной смесью. В комплексе реализо-

ваны различные методы решения задачи Римана, включая HLLC [4], HLL [5], HLLC [6], а также точный решатель [4]. Код написан с использованием абстрактных интерфейсов, что обеспечивает в будущем возможность реализации других одномерных задач и моделей, а также численных схем.

Результаты моделирования. В первую очередь на примере задачи Куэтта исследуется применимость континуальных моделей для течений разреженного одноатомного аргона. Рассмотрены различные условия течения: от дозвукового до сверхзвукового. Результаты сравниваются с результатами, полученными с применением прямого статистического моделирования [7, 8]. На примере этого же течения оценивается вклад граничных условий скорости скольжения и скачка температуры в значения макропараметров вблизи твердых стенок. Значения самих скачков в случае модели диффузного рассеяния частиц поверхностью сравниваются с полученными в работе [8].

Наиболее интересным представляется случай сверхзвукового движения пластин и газа в режиме скольжения, поскольку в данной ситуации нет аналитического решения задачи Куэтта даже для однокомпонентного газа. В результате моделирования мы получаем профиль скорости, аналогичный [8]. Дополнительное сравнение в данных тестах проводится с результатами молекулярно-динамического моделирования, учитывающего материал твердых стенок [9].

Для течения бинарной смеси O_2/O выявляются границы применения 1Т подхода и обсуждается необходимость применения МТ подхода при различных скоростных режимах течения Куэтта. Помимо этого, оценивается ошибка от применения приближенных и феноменологических моделей процессов переноса. Оценивается эффект от включения в моделирование объемной вязкости, а также влияние процессов диффузии на распределения макропараметров, тензор напряжений и тепловые потоки.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 22-11-00078.

Литература

- [1] Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003.
- [2] Shakurova L., Kustova E. State-specific boundary conditions for nonequilibrium gas flows in slip regime // *Phys. Rev.* 2022. Vol. 105. P. 034126.
- [3] Shakurova L., Kustova E., Armenise I. State-specific slip boundary conditions in nonequilibrium gas flows: Theoretical models and their assessment // *Phys. Fluids.* 2023. Vol. 35. P. 086109.
- [4] Toro E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Heidelberg, Germany: Springer Berlin, 2009. 624 p.
- [5] Harten A., Lax P. D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM review.* 1983. Vol. 25. P. 35–61.

- [6] Wendroff B. A two-dimensional HLLE riemann solver and associated godunov-type difference scheme for gas dynamics // *Comput. Math. Appl.* 1999. Vol. 38. P. 175–185.
- [7] Weaver A. B., Venkatraman A., Alexeenko A. A. Effect of intermolecular potential on compressible Couette flow in slip and transitional regimes // *Phys. Fluids.* 2014. Vol. 26. P. 107102.
- [8] Dylewicz K., Cerulus N., Klothakis A., Theofilis V., Levin D. Linear stability of Couette flow with DSMC-informed boundary conditions // *AIP Conf. Proc.* 2024. Vol. 2996. P. 150001.
- [9] Kammara K. K., Sharma K., Myong R. S. Study on Non-Classical Effects of Knudsen Layer in Planar Couette Flow Using Molecular Dynamics Simulations // *AIP Conf. Proc.* 2024. Vol. 2996. P. 090001.

Роль момента при распределенных шагрузках в механике

Прозорова Э.В.

e.prozorova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе показана необходимость учета для открытых неравновесных нестационарных систем момента сил, возникающих от распределенных нагрузок, совместно с условиями равновесия сил. В настоящее время условие равновесия сил и момента сил рассматриваются отдельно. Доказано, что существует два решения в механике сплошной среды. Рассматриваются: влияние изменения плотности на процесс адсорбции и изменение напряжения в присутствии вакансии.

Ключевые слова: момент количества движения, законы сохранения, уравнение Больцмана, тензор напряжений.

Введение. Большое практическое значение поверхностных и адсорбционных процессов привело к большому количеству исследований этих явлений, однако полной теории решения задач, связанных с взаимодействием газа и жидкости с твердым телом, не привело к детальному пониманию происходящих процессов. В классических постановках задач рассматривались отдельно поверхностные процессы и процессы внутри твердого тела. Для моделей сплошной среды решались и сопряженные задачи для больших скоростей полета. Для разреженного газа исследовались граничные условия диффузионного и зеркального типов [1]–[7].

Для жидкости до сих пор идут споры о наличии скольжения жидкости около металлических поверхностей. Споры особенно обострились при переходе к процессам взаимодействия газа и жидкости с наноструктурами и переходе к более идеальным кристаллам и более тонким экспериментальным методикам.

В теории во всех случаях предполагалось, что тензор напряжений является симметричным. В основу были положены условия равновесия сил. Однако закон сохранения момента выполняется в этом случае при отсутствии силового воздействия, т.е. в равновесном случае. Всегда считалось, что при выводе законов сохранения после перехода от интеграла по поверхности к интегралу по объему и взятию интеграла по частям вне интегральное слагаемое равно нулю, хотя это возможно только для потенциального течения. Отброшенное слагаемое представляет циркуляцию скорости, что говорит о существовании момента. Изменение момента влечет появление дополнительной силы, которая может играть роль малого возмущения, влияющего на устойчивость структуры. Полученные эффекты могут сказаться при критических и около критических режимах работы самолетов, при сближении самолетов, ракет, в различных устройствах, в строительных конструкциях, а также при некоторых естественных процессах. Величина дополнительной силы определяется значением градиента физических величин (плотности, скорости, количества движения) и структурой изучаемого объекта. В случае динамического формирования структуры изменяется положение центра инерции, что влечет за собой изменение момента количества движения. Момент — величина векторная, поэтому моменты элементарных объемов складываются, формируя общий момент рассматриваемой системы и положение центра инерции. Далее на основании применения основной теоремы, переходят к дифференциальным уравнениям, в которых часть слагаемых отбрасывается. Сумма отброшенных слагаемых создает потерянный момент. Считается, что, применяя метод потоков, используют первоначальную формулировку задачи, но это не так. В исходных уравнениях уже заложен принцип симметрии тензора напряжений. Математический анализ уравнений механики сплошной среды с исходным несимметричным тензором напряжений, показал, что в общем плоском случае для четырех неизвестных в классической формулировке мы имеем три уравнения: два уравнения из условия равновесия напряжений и одно уравнение — условие равновесия момента. В классическом варианте вопрос решается предположением симметрии тензора напряжений, что следует из условия равновесия сил при отсутствии момента. В результате при задании одних только распределенных моментов задачу в рамках теории упругости решить не удастся. Задачу можно решить с использованием итерационной процедуры. Отметим, что момент отвечает за коллективные взаимодействия, которые существенны особенно для заряженных частиц. Важной характеристикой момента является локальность его действия как дополнительной силы. Например, авторы работы [8] отмечают, что «все деформационные процессы идут не под действием номинального напряжения, приложенного к материалу, а под действием локального напряжения, действующего в окрестности концентратора». Для пластической деформации наблюдается локализация пластичности. Момент также действует локально и по-видимому, отвечает за

винтовые дислокации. Для обоснования нами предложена модель, учитывающая совместное выполнение законов и соответствующее уравнение состояния, включающая вклад вращательной компоненты скорости.

Уравнение Больцмана. При решении уравнения Больцмана методом Чепмена–Энскового при взятии производной от локально-равновесной функции распределения в классическом случае используют уравнения Эйлера. Возникает вопрос о правомерности использования параметров, определенных из уравнения Эйлера, для локально равновесной функции распределения. Эти параметры определяются из нулевого приближения, при этом решаются задачи с учетом первого порядка, чему соответствует решение уравнений Навье–Стокса. При взятии производной от функции распределения полагают количество частиц постоянным, что исключает адсорбцию и переменную плотность. Дополнительно это означает замкнутость рассматриваемого объема. В результате классическое решение не определяет самодиффузию. С учетом изменения плотности решение Чепмена–Энскового имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_0 \left\{ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x_i} c_i + \frac{m}{kT} \left(c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial x_i} c_i \left[\left(\frac{m}{kT} \right) c^2 - 5 \right] \right\},$$

$$f(t, x, \zeta) = f_0(t, x, \zeta) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (\zeta - u)^2 \right\}.$$

О потенциальных течениях Рассмотрим плоское потенциальное течение и сравним уравнения Эйлера и уравнения потенциального течения. Для потенциального течения имеются следующие уравнения (φ — потенциал, ψ — функция тока)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Уравнения Эйлера в новых переменных:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Запишем через функцию тока:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Мы имеем другие уравнения и другие граничные условия. Отсюда можно сделать вывод, что потенциальное течение использует различные значения давления по разным направлениям.

Вблизи поверхности могут существовать различные переходные режимы. Важна роль поверхностных эффектов [8]–[10]. Для жидкостей вблизи гладкой поверхности можно предложить модель с тонким слоем неподвижной жидкости. Ширина слоя определяется величиной динамического трения (аналог турбулентного течения). Межъядерные расстояния О–Н близки к 0.1 нм, расстояние между ядрами атомов водорода — 0.15 нм, угол между связями Н–О–Н — 104.5°. Минимальное расстояние между молекулами алюминия — 3.1038 Å, размер молекул воды — 31.8 Å, длина свободного пробега $l = 21.6 \div 36.6$, размер кластера $9.06 \div 1.22$ нм. Некоторые молекулы находятся в свободном состоянии. Именно эти молекулы осуществляют транспортные процессы в жидкостях. Соотношение размеров указывает на возможное перекрытие промежутков между поверхностными молекулами молекулой воды. Для капилляров с радиусом порядка радиуса кластера возможно скольжение за счет контакта со стенкой небольшой части кластера.

Таким образом, влияние момента прослеживается во многих разделах механики.

Литература

- [1] Prozorova E. The influence of the no symmetric stress tensor on the flow separation // WSEAS Transaction on Applied and Theoretical Mechanics. 2020. doi: 10.37394/232011.2020.15.9
- [2] Prozorova E. Influence of angular momentum and dimension on dynamics in mechanics // Wseas Transaction on Applied and Theoretical Mechanics. 2021. doi: 10.37394/232011.2021.16.1
- [3] Prozorova E. Mechanism of Formation for Fluctuation Phenomena // 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2020. Springer Proceedings in Complexity. 2021. doi: 10.1007/978-3-030-70795-8_47
- [4] Прозорова Э.В. Роль определения давления на вычислительный процесс // Материалы докладов. Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 2023. С. 361–366.
- [5] Prozorova E. On the question of the no symmetry of the stress tensor for open systems // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2022. Vol. 362. P. 01023.

- [6] Prozorova E. Some consequences of mathematical inaccuracies in mechanics // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2022. Vol. 17. P. 124–131.
- [7] Прозорова Э. В. Влияние момента и граничных условий в механике сплошной среды и в кинетике // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24. № 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1054/2>
- [8] Зуев Л. В., Данилов В. И. Физические основы прочности материалов. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2016. 376 с.
- [9] Дмитриев А. С. Введение в нанотеплофизику. М.: Бином, 2021. 790 с.
- [10] Владимиров Г. Г. Физика поверхности твердых тел. СПб.: Лань, 2016. 352 с.

Численное исследование срыва потока при сверхзвуковом истечении газа из двух соосных кольцевых сопел в камеру низкого давления

Скорюпин А.И.,¹ Юдин И.Б.,² Морозов А.А.^{2,3}

a.skoryupin@g.nsu.ru, yudinib@gmail.com, morozov@itp.nsc.ru

¹Новосибирский государственный университет,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Пирогова, 2,

²Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1,

³ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 40

Аннотация. Проведено численное исследование сверхзвукового истечения газа из двух соосных кольцевых сопел в камеру низкого давления применительно к различным приложениям газоструйного плазмохимического метода с использованием электронного пучка. Показано, что с увеличением расхода газа через внешнее сопло происходит приближение ударной волны на оси течения к соплу, и при превышении некоторого критического значения расхода газа сверхзвуковое течение в области до диска Маха становится дозвуковым. Это сопровождается фактически объединением вихря за диском Маха и вихря вблизи среза сопла и приводит к срыву потока — резкому увеличению обратного потока газа в канал электронного пучка. Полученные результаты важны для выявления условий возникновения срыва потока и определения оптимальной конфигурации блока кольцевых сопел.

Ключевые слова: сверхзвуковое истечение, кольцевое сопло, газоструйный плазмохимический метод, Ansys Fluent.

Сверхзвуковое истечение в область низкого давления широко используется как в аэрокосмических приложениях, так и в различных вакуумных технологиях. В последнее время активно развивается газоструйный плазмохимический метод с использованием электронного пучка, проходящего через осевой канал с

откачкой газа. Данный метод имеет потенциально широкие возможности применения в области нанесения тонких покрытий различной функциональности, например кремния [1], конверсии природного и попутного нефтяного газа в жидкие продукты [2], рафинирования металлов [3].

В данном методе активация газа осуществляется электронным пучком, который заводится в рабочую камеру через узкий осевой канал. Давление газа в этом канале должно быть не выше 1 Па, тогда как давление газа в рабочей камере может превышать 1000 Па. Для сохранения такого низкого давления в канале электронного пучка в камеру подается сверхзвуковой поток защитного газа через кольцевое сопло вокруг канала. При этом рабочий газ подается через аналогичное кольцевое сопло большего диаметра снаружи защитного сопла. При невысоком расходе рабочего газа через внешнее сопло обратный поток газа в осевой канал электронного пучка является постоянным, крайне малым и не приводит к увеличению давления в канале. Однако при повышении расхода рабочего газа выше некоторого критического значения происходит резкое увеличение обратного потока («срыв потока») с соответствующим увеличением давления в канале и сильным уменьшением мощности пучка электронов. Определение условий возникновения такого «срыва потока» и соответствующая оптимизация параметров работы кольцевых сопел является сложной многопараметрической задачей, актуальной для многих практических приложений. Целью данной работы является определить условия и механизм возникновения резкого увеличения обратного потока для типичной конфигурации соплового блока.

Для расчета сверхзвукового истечения в камеру с низким давлением использовалось решение уравнений сплошной среды в рамках пакета ANSYS Fluent. Ранее было показано, что такой континуальный подход может быть использован для описания рассматриваемого течения, даже с учетом возникновения областей разреженности [4]. Рабочий объем задается в виде цилиндра длиной 170 мм и диаметром 40 мм. На одном из торцов расположены два кольцевых сопла с высотой критического сечения 0,1 мм. Соосно соплам расположен обратно направленный осевой канал электронной пушки диаметром 9 мм. Через оба сопла подается один и тот же газ — аргон. Через внутреннее сопло задавался фиксированный расход газа ($1 \text{ м}^3/\text{ч}$), тогда как через внешнее сопло расход варьировался в диапазоне от 0 до $50 \text{ м}^3/\text{ч}$. Рассматривалось два случая: с открытым и закрытым слева осевым каналом.

На рис. 1 представлены типичные поля плотности и линии тока для характерных режимов до срыва потока (для расхода газа через внешнее сопло $5 \text{ м}^3/\text{ч}$) и после срыва потока (для расхода $50 \text{ м}^3/\text{ч}$). Видно, что вокруг истекающих из сопел струй формируются системы боковых ударных волн. При этом в режиме течения до срыва потока на оси течения формируется ударная волна (аналогичная диску Маха), за которой реализуется вихревое течение га-

за. При увеличении расхода газа через внешнее кольцевое сопло ударная волна на оси течения приближается к соплам, и при превышении некоторого критического значения сверхзвуковое течение в области до диска Маха становится дозвуковым. При этом происходит фактически объединение вихря за диском Маха и вихря вблизи среза сопла (см. рис. 1, внизу), что приводит к резкому увеличению обратного потока газа в канал электронного пучка.

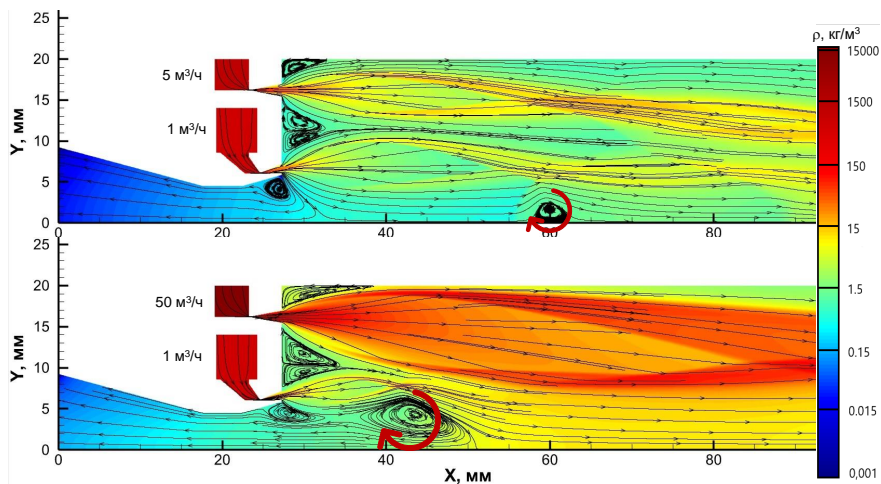


Рис. 1. Поле плотности и линии тока при истечении в камеру для расхода газа через внешнее сопло $5 \text{ м}^3/\text{ч}$ (вверху) и $50 \text{ м}^3/\text{ч}$ (внизу).

Проведен анализ влияния расхода газа на обратный поток в осевой канал электронного пучка. При заданном фиксированном расходе через внутреннее сопло при изменении расхода через внешнее сопло от 0 до $15 \text{ м}^3/\text{ч}$ обратный поток является постоянным. При дальнейшем увеличении расхода через внешнее сопло ($>15 \text{ м}^3/\text{ч}$) наблюдается резкое увеличение обратного потока. Аналогичный эффект наблюдается при течении с закрытым осевым каналом: при повышении расхода наблюдается резкое увеличение давления в осевом канале электронного пучка. При этом критическое значение расхода, при котором начинается увеличиваться давление при закрытом канале совпадает с критическим значением расхода, при котором начинается увеличиваться обратный поток при открытом канале.

Величина обратного потока напрямую влияет на параметры работы электронной пушки. Полученные результаты позволяют проводить исследования

эффекта срыва потока с закрытым осевым каналом, что значительно упрощает задачу сравнения с экспериментальными данными.

Вычисления проводились на кластере ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН.

Литература

- [1] Шарафутдинов Р. Г., Сквородко П. А., Шукин В. Г., Константинов В. О. Осаждение пленок кремния с использованием газоструйного плазмохимического метода: эксперимент и газодинамическое моделирование // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 5. С. 22–30.
- [2] Шарафутдинов Р. Г., Константинов В. О., Федосеев В. И., Шукин В. Г. Конверсия природного и попутного нефтяного газов в холодной электронно-пучковой плазме // Прикладная физика. 2017. № 2. С. 13–18.
- [3] Шукин В. Г., Константинов В. О., Шарафутдинов Р. Г. Электронно-пучковое рафинирование металлургического кремния // Прикладная физика. 2019. № 5. С. 65–70.
- [4] Морозов А. А., Юдин И. Б., Абрамов А. Г., Сквородко П. А., Шарафутдинов Р. Г. Сверхзвуковое истечение из кольцевого сопла в камеру низкого давления с осевым каналом: сравнение кинетического и континуального решений // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 5. С. 84–93.

Исследование структуры ударной волны в CO_2 с учетом колебательной релаксации в рамках континуального и кинетического подходов

Тань Л., Баталов С. А., Кустова Е. В.

st088860@student.spbu.ru, st076569@student.spbu.ru, e.kustova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Исследуется структура ударной волны в углекислом газе методом прямого статистического моделирования (ПСМ) и в рамках континуальной многотемпературной модели. В расчетах методом ПСМ для описания переходов колебательной энергии в поступательную (VT) впервые для молекул CO_2 использована модель нагруженного гармонического осциллятора с учетом вращений (FHO-FR), а вероятность процессов межмодового обмена колебательной энергией (VV) моделируется с помощью нового теоретического подхода. Многотемпературная континуальная модель построена на основе расширенных уравнений Навье–Стокса и учитывает различные каналы колебательной релаксации, сдвиговую и объемную вязкость, диффузию, теплопроводность разных колебательных мод. Сравняются решения, полученные данными методами. Оценено влияние внутренних степеней свободы частиц и моделей VT и VV обменов на структуру ударной волны и на макропараметры за фронтом.

Ключевые слова: ударная волна, прямое статистическое моделирование, многотемпературная модель, VT обмен, VV обмен, время релаксации.

Задача о структуре ударной волны имеет важное место в многих областях технических наук и часто используется в качестве стандартного примера для проверки надежности алгоритма программы или оценки применимости новых моделей. Цель работы — исследование структуры ударной волны в углекислом газе с учетом внутренних степеней свободы и различных каналов колебательной релаксации. Используется два подхода: 1) метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (DSMC или ПСМ) с применением современных моделей для описания внутримодовых и межмодовых обменов колебательной энергией [1, 2]; 2) континуальная модель, учитывающая различные температуры колебательных мод CO_2 и особенности процессов переноса в многоатомных молекулах [3].

Молекула CO_2 имеет 3 колебательные моды (1 — симметричная, 2 — деформационная, 3 — антисимметричная). Вероятность каждого VT перехода $i \rightarrow f$ (i — начальный уровень, f — конечный) вычисляется в соответствии с моделью FHO-FR по формуле [4]:

$$P(i \rightarrow f | E, \varepsilon_1, \varepsilon_2, y, m, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{(n_s)^s}{(s!)^2} Q^s \exp \left\{ -\frac{2n_s Q}{s+1} - \frac{n_s^2 Q^2}{(s+1)^2 (s+2)} \right\},$$

где

$$s = |i - f|, \quad n_s = \frac{\max(i, f)!}{\min(i, f)!}, \quad Q(u, \varepsilon, y, \vartheta, \varphi) = \frac{\theta' \xi \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \varphi_1}{4\theta \sinh^2(\pi\omega_1/\alpha u \gamma)}, \quad 2\xi = \frac{m}{m_o}.$$

Здесь $E = E_{trans} + E_{rot}$ — сумма поступательной и вращательной энергий, θ — характеристическая колебательная температура, α — параметр потенциала Морзе, m — приведенная масса сталкивающихся молекул, m_o — приведенная масса осциллятора, ϑ и φ — углы ориентации молекулы, $u\gamma$ — эффективная скорость столкновения. Во всех формулах нижний индекс 1 обозначает частицу, в которой произошло изменение колебательного состояния, 2 — партнера по столкновению. Также введены обозначения:

$$\omega_1 = \frac{|E_{vib,i} - E_{vib,f}|}{s\hbar}, \quad \theta' = \frac{4\pi\omega_1^2 m}{\alpha^2 k}, \quad u = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad y = \left(\frac{b}{R_0} \right)^2,$$

$$\gamma = \max \left(0, -\frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_1 \cos \varphi_1 \sqrt{\varepsilon_1} + \sin 2\vartheta_2 \cos \varphi_2 \sqrt{\varepsilon_2}) + \sqrt{(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - y)} \right),$$

где \hbar — постоянная Дирака, k — постоянная Больцмана, ε — доля вращательной энергии частицы, b — прицельный параметр бинарного столкновения, R_0 — диаметр столкновения.

Константы углекислого газа приведены в следующих таблицах:

Таблица 1. Константы модели FHO-FR для CO₂.

Сорт газа	$\alpha, \times 10^{10} \text{ M}^{-1}$	$m, \times 10^{-26} \text{ кг}$
CO ₂	4.3	7.31

Таблица 2. Константы колебательных мод для CO₂.

Колебательная мода	$m_r, \times 10^{-26} \text{ кг}$	$\omega_e^c, \text{ см}^{-1}$	$\theta, \text{ К}$
Симметричная	2.65678	1480	1918.6
Деформационная	0.362533	526	959
Антисимметричная	0.725066	2565	3382.6

Процессы VV обмена моделируются в соответствии с алгоритмом:

1. Вычисляются вероятности P_1 и P_2 для процессов
 VV_{1-2} : $P_1(i_1, i_2, i_3 \rightarrow i_1 + 1, i_2 - 2, i_3)$ и $P_2(i_1, i_2, i_3 \rightarrow i_1 - 1, i_2 + 2, i_3)$,
 VV_{2-3} : $P_1(i_1, i_2, i_3 \rightarrow i_1, i_2 - 3, i_3 + 1)$ и $P_2(i_1, i_2, i_3 \rightarrow i_1, i_2 + 3, i_3 - 1)$,
 VV_{1-2-3} : $P_1(i_1, i_2, i_3 \rightarrow i_1 + 1, i_2 + 1, i_3 - 1)$ и $P_2(i_1, i_2, i_3 \rightarrow i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 + 1)$,
2. Рассматриваются процессы VV_{1-2} , VV_{2-3} и VV_{1-2-3} по очереди.
3. Применяется VV обмен для соответствующего процесса, когда случайная величина $Rnd < P_1 + P_2$. Если $Rnd < P_1$, то применяется соответствующий P_1 процесс, затем осуществляется выход из процедуры и рассматривается следующий процесс, иначе, в случае $Rnd > P_1$, применяется соответствующий P_2 процесс, когда $Rnd < P_2$.

В многотемпературном приближении полагается, что каждой моде соответствует собственная колебательная температура. Однако высокая скорость установления термического равновесия между симметричной и деформационной модами позволяет объединить их в комбинированную моду. Таким образом имеем две температуры T_{12} и T_3 для комбинированной и асимметричной мод, температуру T для поступательно-вращательных степеней свободы и соответствующие этим температурам энергии E_{12} , E_3 , $E_{tr, rot}$, отнесенные к единице массы газа:

$$E_{tr, rot} = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_{\text{CO}_2}}, \quad E_3 = \frac{1}{m_{\text{CO}_2} Z_3(T_3)} \sum_{i_3} s_{i_3} \varepsilon_{i_3} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{i_3}}{kT_3}\right),$$

$$E_{12} = \frac{1}{m_{\text{CO}_2} Z_{12}(T_{12})} \sum_{i_1, i_2} s_{i_1, i_2} \varepsilon_{i_1, i_2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{i_1, i_2}}{kT_{12}}\right),$$

где $s_{i_1, i_2} = i_2 + 1$, $s_{i_3} = 1$ — статистические веса объединенной и антисимметричной мод, $Z_{12}(T_{12})$ и $Z_3(T_3)$ — соответствующие колебательные статистические суммы, m_{CO_2} — масса молекулы CO₂, ε_{i_1, i_2} и ε_{i_3} — энергии соответствующих колебательных уровней.

В построенной модели уравнения сохранения массы, импульса и энергии, записанные в одномерной постановке, дополняются уравнениями релаксации для колебательных энергий соответствующих мод молекулы CO_2 :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{CO}_2} \left(\frac{\partial E_{12}}{\partial t} + v \frac{\partial E_{12}}{\partial x} \right) + \frac{\partial q_{12}}{\partial x} &= R_{12}, \\ \rho_{\text{CO}_2} \left(\frac{\partial E_3}{\partial t} + v \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial q_3}{\partial x} &= R_3, \end{aligned}$$

ρ_{CO_2} — массовая плотность CO_2 , v — скорость, q_{12} , q_3 — потоки колебательной энергии в различных модах, R_{12} и R_3 — скорости колебательной релаксации.

Релаксация комбинированной и антисимметричной мод включает обмен поступательной и колебательной энергиями VT_2 внутри мод, а также межмодовые обмены энергией между антисимметричной и другими колебательными модами VV_{2-3} , VV_{1-2-3} :

$$R_{12} = R_{12}^{\text{VT}_2} + R_{12}^{\text{VV}_{2-3}} + R_{12}^{\text{VV}_{1-2-3}}, \quad R_3 = R_3^{\text{VV}_{2-3}} + R_3^{\text{VV}_{1-2-3}}.$$

Скорость колебательной релаксации в каждой моде R_{12} , R_3 вычисляется с помощью формул Ландау–Теллера:

$$R_{\text{vibr}}^\alpha = \rho_{\text{CO}_2} \frac{E_{\text{vibr}}(T_{\text{eq}}^\alpha) - E_{\text{vibr}}(T_{\text{vibr}})}{\tau_\alpha},$$

здесь $\alpha = \text{VT}_2, \text{VV}_{2-3}, \text{VV}_{1-2-3}$, τ_α — время релаксации соответствующего процесса энергообмена, определяется приближенно на основании экспериментальных данных, аппроксимируемых полиномом 3-ей степени от $T^{-1/3}$ [5], $E_{\text{vibr}}(T_{\text{eq}}^\alpha)$ — колебательная энергия при температуре в равновесии, $E_{\text{vibr}}(T_{\text{vibr}})$ — колебательная энергия при температуре рассмотренной колебательной моды на данный момент.

Важно отметить, что в данной работе учитывается не только сдвиговая η , но и объемная вязкость ζ углекислого газа, так как известно, что ее воздействие на форму фронта ударной волны может быть существенным [3]. Единственную компоненту тензора напряжений можно записать в виде:

$$P_{xx} = p - \left(\frac{4}{3} \eta(T, n_{\text{CO}_2}) + \zeta(T, n_{\text{CO}_2}) \right) \frac{\partial v}{\partial x},$$

здесь p — давление газа. Кроме того, при вычислении потоков полной и колебательной энергии вводятся коэффициенты теплопроводности поступательно-вращательных и различных колебательных мод, зависящие от соответствующих температур.

Задача о структуре ударной волны решалась в рамках описанных подходов. Было изучено влияние внутренних степеней свободы на толщину фронта, напряжение и тепловой поток, проведено сравнение результатов, полученных с помощью континуального и кинетического подходов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-19-00241.

Литература

- [1] Adamovich I. V., William R. J. Three-dimensional nonperturbative analytic model of vibrational energy transfer in atom–molecule collisions // The Journal of chemical physics. 1998. Vol. 109. P. 7711–7724.
- [2] Kustova E., Mekhonoshina M. Novel approach for evaluation of CO₂ vibrational relaxation times // Chemical Physics Letters. 2021. Vol. 764. P. 138288. doi: 10.1016/j.cplett.2020.138288
- [3] Alekseev I., Kustova E. Extended continuum models for shock waves in CO₂ // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33(9). P. 096101. doi: 10.1063/5.0062504
- [4] Gimelshein S. F., Wysong I. J., and Adamovich I. V. Application of the 3d forced harmonic oscillator model in the dsmc method // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2018. Vol. 32. P. 882–891.
- [5] Ачасов О. В., Рагозин Д. С. Константы колебательного энергообмена в лазерно-активных средах СО₂–ГДЛ с добавками О₂, Н₂, Н₂О и СО. Минск, ИТМО. 1986.

Анализ времяпролетных распределений частиц при наносекундном испарении в вакуум на основе различных кинетических подходов

Титарев В. А.¹, Морозов А. А.^{1,2}

vladimir.titarev@frccsc.ru, morozov@itp.nsc.ru

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, 119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 40,

²Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 1

Аннотация. Импульсная лазерная абляция (испарение) в вакуум широко используется в современных технологиях осаждения тонких пленок, синтеза наночастиц и обработки поверхности. В результате испарения образуется быстро расширяющееся облако пара. Картина течения может содержать быстро движущиеся волны разрежения и сжатия, а также области сильного разрежения и перемешивания. В приложениях требуется построить картину течения на временах, равных сотням или тысячам времен испарения. В настоящей работе проводится сравнительный численный анализ испарения в вакуум с пятна круглой формы с использованием двух вычислительных подходов: метода прямого статистического моделирования и численного решения кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука. Будут представлены поля течения

для различных времен времени, сравнение средних энергий испаренных молекул и времяпролетные (time-of-flight) характеристики.

Ключевые слова: кинетическая модель БГК, прямое статистическое моделирование, разреженный газ, импульсное лазерное испарение, LasInEx, Несветаи.

Импульсная лазерная абляция широко используется в различных технологиях, связанных с осаждением тонких пленок, синтезом наночастиц, обработкой и структурированием поверхности [1]. Исследования лазерной абляции в вакууме являются важными для изучения механизмов и динамики процесса абляции на основе анализа времяпролетных и угловых распределений разлетающихся частиц. Для корректной интерпретации экспериментальных данных необходимо представлять в целом динамику разлета облака продуктов абляции в вакууме.

В экспериментах небольшой детектор обычно располагается на большом расстоянии от мишени в направлении, нормальном к поверхности испарения. Одним из основных инструментов экспериментального контроля процессов лазерной абляции и десорбции являются измерения так называемых времяпролетных распределений частиц, проходящих через этот детектор [2]–[6]. Анализируя ВП распределения, можно улучшить понимание механизма абляции, а также оценить температуру испаряющейся поверхности [6] и состав поверхностного материала [7]. Правильная интерпретация ВП распределений может существенно продвинуть понимание процессов, сопровождающих импульсную лазерную абляцию, и, следовательно, облегчить разработку различных методов, основанных на лазерной абляции.

Теоретический анализ рассматриваемой задачи базируется в основном на различных вычислительных подходах. При малой плотности потока лазерного излучения газ можно считать нейтральным, так как эффекты поглощения лазерного излучения в факеле и ионизации газа пренебрежимо малы. В данной работе впервые получено достоверное численное решение данной задачи на основе двух кинетических подходов: решение модельного уравнения Бхатнагара, Гросса и Крука (модель БГК) [8] и прямое статистическое моделирование (ПСМ) методом Монте–Карло [9]. Решение кинетического уравнения строилось кодом «Несветаи» [9, 10] с использованием подвижной сетки в физическом пространстве [11] и специальной неструктурированной сетки в скоростном пространстве [12]. Расчеты методом ПСМ проведены с использованием программного кода LasInEx (Laser Induced Expansion) [13]–[15].

Задача решается в осесимметричной постановке. В течение импульса задается постоянный поток частиц с поверхности испарения с круглого пятна. Для скоростей испаряющихся частиц задается полумаквелловская функция распределения. Используется модель твердых сфер. Предполагается, что все возвращающиеся молекулы поглощаются на поверхности испарения. Поглощение лазерного излучения в факеле и ионизации газа не учитываются. Получены

данные об энергии частиц во времяпролетном распределении для диапазона режимов испарения от свободномолекулярного течения до континуального. Для верификации начальной стадии осесимметричных расчетов используются одномерные плоские расчеты. Для случая предельной интенсивности испарения также применяется аналитическое континуальное решение, которое хорошо согласуется с соответствующими кинетическими решениями.

В расчетах определена максимально достижимая средняя энергия частиц во времяпролетном распределении. Обнаружена немонотонность роста энергии, которая объясняется на основе анализа распределения частиц по скоростям. Проведен анализ времяпролетных распределений частиц при наносекундном лазерном испарении в вакуум на основе решения модельного уравнения и ПСМ расчетов. Получены зависимости энергии частиц во времяпролетных распределениях для числа испаренных монослоев от 0.01 до 100 для разного размера пятна испарения. Показано хорошее согласие между полученными численными решениями представленных кинетических подходов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-11-00078. Вычисления проводились на суперкомпьютерах РСК Торнадо, установленных в МСЦ РАН, а также на собственном кластере ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН.

Литература

- [1] Buerle D. *Laser Processing and Chemistry*, 4th ed. Springer, Berlin, Germany, 2011. 851 p.
- [2] Kell R., Dreyfus R. W. On the effect of Knudsen-layer formation on studies of vaporization, sputtering, and desorption // *Surf. Sci.* 1988. Vol. 198. P. 263–276.
- [3] Braun R., Hess P. Time-of-flight investigation of infrared laser-induced multilayer desorption of benzene // *J. Chem. Phys.* 1993. Vol. 99. P. 8330–8340.
- [4] Krajnovich D. J. Laser sputtering of highly oriented pyrolytic graphite at 248 nm // *J. Chem. Phys.* 1995. Vol. 102. P. 726–743.
- [5] Claeysens F., Henley S. J., Ashfold M. N. R. Comparison of the ablation plumes arising from ArF laser ablation of graphite, silicon, copper, and aluminum in vacuum // *J. Appl. Phys.* 2003. Vol. 94. P. 2203–2211.
- [6] Morozov A. A. Analytical formula for interpretation of time-of-flight distributions for neutral particles under pulsed laser evaporation in vacuum // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2015. Vol. 48. Art. 195501.
- [7] Morozov A. A., Mironova M. L. Numerical analysis of time-of-flight distributions of neutral particles for pulsed laser ablation of binary substances into vacuum // *Appl. Phys. A*. 2017. Vol. 123. Art. 783.
- [8] Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* 1944. Vol. 94. P. 1144–1161.

- [9] Bird G. A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
- [10] Titarev V. A. Application of model kinetic equations to hypersonic rarefied gas flows // Computers and Fluids. 2018. Vol. 169. P. 62–70.
- [11] Титарев В. А. Применение кода Несветай к решению трехмерных задач высотной аэродинамики // Журнал выч. математики и матем. физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 752–764.
- [12] Titarev V. A., Morozov A. A. Arbitrary Lagrangian–Eulerian discrete velocity method with application to laser-induced plume expansion // Applied Mathematics and Computation. 2022. Vol. 429. Art. 127241.
- [13] Morozov A. A., Frolova A. A., Titarev V. A. On different kinetic approaches for computing planar gas expansion under pulsed evaporation into vacuum // Phys. Fluids. 2020. Vol. 32. Iss. 11. Art. 112005.
- [14] Morozov A., Titarev V. Planar Gas Expansion under Intensive Nanosecond Laser Evaporation into Vacuum as Applied to Time-of-Flight Analysis // Entropy. 2022. Vol. 24. Iss. 12. Art. 1738.
- [15] Morozov A. A., Titarev V. A. Dynamics of planar gas expansion during nanosecond laser evaporation into a low-pressure background gas // Phys. Fluids. 2022. Vol. 34. Iss. 9. Art. 096101.

Алгоритмы параллелизации для метода прямого статистического моделирования на основе технологий OpenMP и MPI

Фёдоров С.А., Быков Н.Ю.

stanislav.fyodorov@ya.ru, nbykov2006@yandex.ru

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, 44/2,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Аннотация. В данной работе для метода прямого статистического моделирования течений разреженного газа рассмотрены алгоритмы параллелизации по данным и алгоритмы декомпозиции расчетной области. Реализация кода на C выполнена с использованием технологии параллельного программирования OpenMP и технологии обмена сообщениями MPI. Проведено сравнение масштабирования производительности реализованных алгоритмов. Предложены рекомендации с точки зрения ускорения кода на вычислительных системах с общей и с распределённой памятью.

Ключевые слова: метод прямого статистического моделирования Монте–Карло, параллельные алгоритмы, параллелизация по данным, декомпозиция по пространству, OpenMP, MPI, разреженный газ.

Введение. В настоящее время для расчёта течений разреженного газа наиболее востребован метод прямого статистического моделирования Монте–Карло (ПСМ) [1]. Метод ПСМ является достаточно ресурсозатратным: решение прикладных задач с его помощью требует использования высокоэффективных алгоритмов расчета.

При переносе существующих кодов на современные микроархитектуры процессоров, а также при разработке новых кодов, реализующих прямое статистическое моделирование, обычно применяют алгоритмы декомпозиции расчетной области [2, 3] или алгоритмы параллелизации по данным [4, 5]. При этом возможно использование различных технологий программирования и средств параллелизации (MPI, OpenMP и пр.). В настоящей работе представлены результаты реализации и масштабирования подобных алгоритмов, а также предложены двухуровневые алгоритмы, представляющие собой сочетания различных подходов. Анализируется эффективность работы рассмотренных алгоритмов.

Вычислительные эксперименты были проведены на узлах кластера «Политехник – РСК Торнадо» с узлами с общей и с распределённой памятью (Суперкомпьютерный центр «Политехнический»). Узлы кластера состоят из двух процессоров Intel Xeon E5 2697 v3, имеющих архитектуру Haswell и включающих 2 контроллера памяти и 2 процессорных модуля с 7 ядрами в каждом. Ядра каждого процессорного модуля поддерживают гиперпоточность и расширенный набор инструкций AVX-2. 14 ядер каждого модуля имеют общую кэш-память третьего уровня объёмом 35 МБ (L3) — каждый узел содержит 28 ядер и 56 аппаратных потоков. Каждый узел оснащён 64 ГБ оперативной памяти.

Алгоритм метода ПСМ с параллелизацией по данным.

Основными процедурами метода ПСМ являются процедуры перемещения частиц в пространстве, их переиндексации и розыгрыша столкновений. Процедура перемещения частиц предполагает реализацию цикла по всем вычислительным частицам в области и определение новых координат частиц с учетом их скорости и величины временного шага. Процедура столкновений подразумевает реализацию цикла по всем ячейкам в области и розыгрыш столкновений частиц внутри каждой ячейки. Распараллеливание по данным основано на возможности эффективно распределить реализацию соответствующих циклов между потоками. Алгоритм с распараллеливанием по данным предполагает параллельную работу N_t потоков (threads) — каждого на отдельном ядре. Для распараллеливания используется технология OpenMP с моделью параллельного программирования соединение-разветвление (fork-join). Проблемным, с точки зрения распараллеливания, является блок переиндексации, использующий процедуры «одновременной» работы как с частицами, так и ячейками. Разработка алгоритма параллелизации данного блока требует применения специальных подходов для исключения точек синхронизации [5].

Параллелизацию по данным в случае использования суперкомпьютера «Политехник – РСК Торнадо» естественно реализовывать в рамках одного узла с общей памятью, содержащего 28 ядер. Пример времени расчета осесимметричного однородного потока аргона приведен на рис. 1. Видно, что масштабирование алгоритма является удовлетворительным. В зависимости от техники

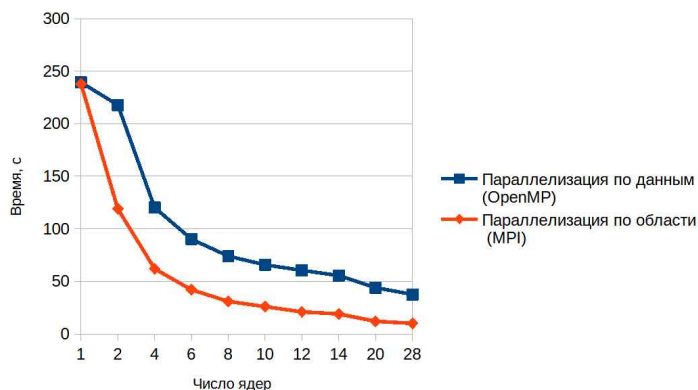


Рис. 1. Время работы алгоритма для метода ПСМ с параллелизацией по данным (OpenMP) и алгоритма с параллелизацией по области (MPI) в зависимости от числа используемых ядер.

распараллеливания блока индексации частиц и типа задачи (задача внешней или внутренней аэродинамики) максимально наблюдаемое ускорение составляет 10 на 28 ядрах.

Алгоритм метода ПСМ с параллелизацией по пространству. Одноуровневый алгоритм с параллелизацией по пространству предполагает декомпозицию расчетной области. Для расчета каждого участка расчетной области заводится свой массив частиц, своя сетка ячеек и пр. В результате расчет всех процедур (перемещения, переиндексации и столкновений) потоком/ядром, ответственным за данный участок, проходит автономно от других потоков. На каждом временном шаге потоки, отвечающие за участки с общей границей, должны обмениваться данными о покидающих/прибывающих участках частиц. Организация вычислений в базовом коде [6] проводилась с использованием технологии передачи сообщений MPI. В этом случае каждый поток обрабатывает свою подобласть — зону. Недостаток такого подхода заключается в необходимости формирования на каждом временном шаге дополнительных массивов частиц, покидающих подобласть, и в организации обменов такими

массивами между ядрами. Следует отметить существенное изменение самого кода по сравнению со случаем реализации декомпозиции по данным.

Анализ масштабирования производительности выполнен для расчета однородного потока и приведён на рис. 1. Ускорение алгоритма составило 24 на 28 вычислительных ядрах одного узла суперкомпьютера «Политехник – РСК Торнадо».

Из приведенного сравнения следует, что несмотря на упомянутые недостатки эффективность алгоритма декомпозиции по расчетной области существенно превосходит эффективность алгоритма параллелизации по данным.

В настоящей работе также анализируется возможность дополнительного ускорения алгоритма декомпозиции с учетом используемой архитектуры суперкомпьютера «Политехник – РСК Торнадо».

Двухуровневые алгоритмы метода ПСМ с параллелизацией по данным и по пространству. В настоящей работе предлагаются двухуровневые алгоритмы параллелизации, позволяющие наиболее эффективно использовать ресурсы суперкомпьютера «Политехник – РСК Торнадо».

Во-первых, разработан оригинальный двухуровневый алгоритм параллелизации. Алгоритм основан на принципах декомпозиции по данным — нижний уровень — и декомпозиции по расчетной области — верхний уровень — и перенесён на ту же целевую архитектуру — суперкомпьютер «Политехник – РСК Торнадо» в СКЦ «Политехнический», содержащий узлы с распределённой памятью, каждый из которых выполнен по архитектуре с неравномерной памятью (NUMA).

Проведена реализация алгоритма в виде программного многопоточного кода метода ПСМ и отладка собранного распределённого приложения. Получены результаты тестирования двухуровневого алгоритма для расчетов течений разреженных газовых смесей. Показана хорошая масштабируемость алгоритма, в том числе для расчетов околосубзвуковых течений.

Во-вторых, рассмотрена возможность реализации алгоритма декомпозиции одновременно с использованием возможностей средств MPI для распределения работы между узлами и OpenMP внутри каждого узла. Проанализирована эффективность данного подхода по разработке двухуровневых алгоритмов.

Перспектива работы. Перспективой работы является разработка более эффективного двухуровневого алгоритма ПСМ для имеющегося суперкомпьютера «Политехник – РСК Торнадо» с двухпроцессорными узлами, выполненными по архитектуре с неравномерной памятью (NUMA), включая возможность использования в каждом вычислительном ядре векторных АЛУ и векторных модулей с плавающей запятой, а также технологии гиперпоточности.

Настоящая работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00078.

Литература

- [1] Bird G. A. The DSMC Method. South Carolina: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013. 300 p.
- [2] Wilmoth R. G. Application of a parallel direct simulation Monte Carlo method to hypersonic rarefied flows // AIAA Journal. 1992. Vol. 30. Iss. 10. P. 2447–2452.
- [3] Ivanov M., Markelov G., Taylor S., Watts J. Parallel DSMC strategies for 3D computations // Proc. parallel CFD'96, North Holland, Amsterdam. 1997. P. 485–492.
- [4] Gao D., Schwartzentruber T. E. Optimizations and OpenMP implementation for the direct simulation Monte Carlo method // Comput. Fluids. 2011. Vol. 42. P. 73–81.
- [5] Быков Н. Ю., Фёдоров С. А. Алгоритм параллелизации по данным для метода прямого статистического моделирования течений разреженного газа на основе технологии OpenMP // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 12. С. 1993–2015.
- [6] Vykov N. Yu., Gorbachev Yu. E. Cluster formation in copper vapor jet expanding into vacuum: the direct simulation Monte Carlo // Vacuum. 2019. Vol. 163. P. 119–127.

О влиянии учёта свободных электронов и коэффициентов скорости неравновесных химических реакций в послеразрядной зоне

Шайхутдинова А.А., Мельник М.Ю., Кустова Е.В.
shaykhutdinovaasya@gmail.com, melnik.mxmn@gmail.com, e.kustova@spbu.ru
Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Исследуется влияние учёта свободных электронов и моделей коэффициентов скорости неравновесных химических реакций на температуру газа в послеразрядной зоне. Сравнение проведено при моделировании послеразрядной зоны точечного импульсного разряда постоянного тока в воздухе. Для моделирования использовался поуровневый подход, результаты сравнивались с экспериментальными данными. Наилучшее согласование было получено при учёте кинетики свободных электронов, но без учёта колебательных VT и VV энергообменов. Также в условиях эксперимента апробирована новая модель коэффициентов скорости обменных реакций, учитывающая возбужденные состояния как реагентов, так и продуктов реакции. Рассмотрены различные комбинации моделей неравновесных процессов и их влияние на кинетику в послеразрядной зоне.

Ключевые слова: импульсный разряд постоянного тока, поуровневая колебательно-химическая кинетика, обменные реакции, колебательное возбуждение, электронное возбуждение.

Введение. В условиях сильной неравновесности в газе или низкотемпературной плазме физико-химические процессы могут оказывать заметное влияние на динамику течения. Подобные условия наблюдаются, например, при вхождении космических аппаратов в атмосферы планет или в разрядах различных типов. Учёт большого количества процессов при моделировании кинетики неравновесных газов увеличивает сложность вычислений. Важно подобрать достаточно простую кинетическую схему, которая даст хорошее согласование с экспериментальными данными. Таким образом, кинетическая схема должна учитывать только существенные процессы. В данной работе рассматривается моделирование неравновесной релаксации в условиях послеразрядной зоны точечного импульсного разряда постоянного тока, что продолжает предыдущие исследования [1]. Цель работы заключается в поиске простой, но достаточной для описания задачи кинетической схемы в рамках поуровневого приближения [2].

Модель и результаты. Моделирование производится в условиях эксперимента [3] для воздушной смеси, включающей N_2 , 20% O_2 и 0,8% NO при давлении 1,33 мбар и температуре 300 К. Разряд создавался импульсом длительностью 5 мс при силе тока от 25 до 150 мА. Решение задачи получено с помощью нульмерной системы уравнений в поуровневом приближении и адаптированной кинетической схемы из работы [4].

В настоящей работе рассматривается влияние наличия свободных электронов, взаимодействия компонентов воздуха с электронами и связанных потоков энергии на макропараметры газа. Электроны были учтены в работе [4], но не проводилось исследования их влияния на послеразрядную зону. Следует отметить, что отказ от учёта свободных электронов значительно упрощает кинетическую схему и облегчает моделирование процессов в послеразрядной зоне, это делает модель без учета электронов привлекательной для инженерных приложений. В настоящей работе оценивается влияние учёта свободных электронов на температуру газа.

Результаты моделирования представлены на рис. 1. Изображена температура T , рассчитанная с учётом электронов и без, а также температура, полученная с учётом электронов, но без учёта VT и VV обменов. Проведено сравнение с экспериментальными измерениями [3] для релаксации после завершения импульса, начиная с 5 мс. Учёт свободных электронов и связанных с ними реакций приближает значения T к экспериментальным данным в начале релаксации, но после 6 мс наклон профиля T становится слишком большим. Лучшее согласование с экспериментальными значениями наблюдается при учёте свободных

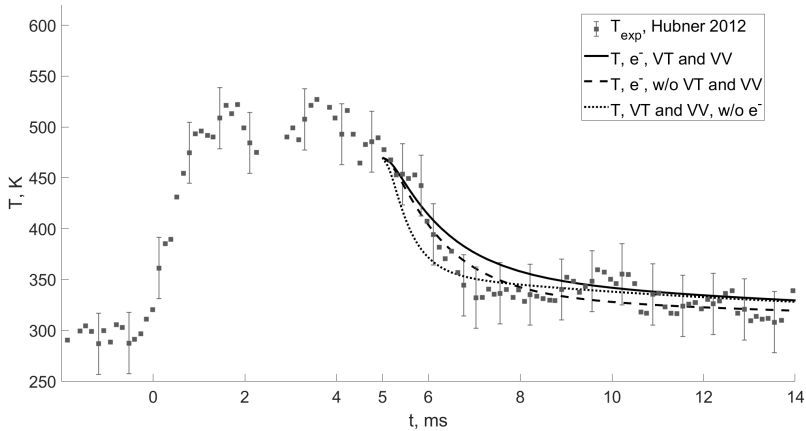


Рис. 1. Температура газа T в разряде (до 5 мс) и в послеразрядной зоне (после 5 мс). Сравнение с экспериментом [3] расчётов с учётом свободных электронов, VT, VV обменов и без них.

электронов, но без учёта колебательных VT и VV обменов. В этом случае профиль температуры газа на всём промежутке моделирования находится в пределах погрешности экспериментальных данных. Таким образом, учёт влияния свободных электронов может сильнее влиять на значения температуры газа, чем детальное описание процессов колебательных энергообменов.

В ходе работы также проводилось варьирование моделей колебательных энергообменов [4, 5], однако это несущественно повлияло на профиль температуры. Кроме того, в работе кинетическая схема была дополнена неравновесной моделью Старика [6] для расчёта коэффициентов скорости химических реакций. Данная модель учитывает колебательно-электронные состояния не только реагентов, но и продуктов реакции. Поэтому её внедрение позволяет учесть изменение коэффициентов скорости реакций в зависимости от внутренней энергии молекул в условиях неравновесности, а также оценить влияние детальной кинетики неравновесных процессов. Использование неравновесной модели приблизило профиль температуры к экспериментальным значениям и оказало влияние на профили концентраций частиц.

Выводы. В работе исследовано влияние учёта свободных электронов и связанных с ними реакций, а также выбора моделей для описания рассмот-

ренных процессов в послеразрядной зоне. Наилучшее согласование с экспериментальными данными было получено при учете электронной кинетики, но без учёта колебательных энергообменов. Дальнейшие исследования будут направлены на моделирование зоны разряда, усовершенствование кинетической схемы и рассмотрение других смесей газов.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» № 22-1-1-17-3.

Литература

- [1] Мельник М. Ю., Кустова Е. В. Детальная кинетика плазмы одиночного импульсного разряда и послеразрядной зоны // *Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПЭС'2023): Материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. С. 388–389.*
- [2] Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. 272 с.
- [3] Hubner M., Marinov D., Guaitella O., Rousseau A., Ropcke J. On time resolved gas temperature measurements in a pulsed dc plasma using quantum cascade laser absorption spectroscopy // *Meas. Sci. Technol.* 2012. Vol. 23. P. 115602.
- [4] Pintassilgo C. D., Guerra V., Guaitella O., Rousseau A. Study of gas heating mechanisms in millisecond pulsed discharges and afterglows in air at low pressures // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2014. Vol. 23. P. 025006.
- [5] Adamovich I., Macheret S., Rich J., Treanor C. // *Vibrational energy transfer rates using a forced harmonic oscillator model // J. Thermophys. Heat Trans.* 1998. Vol. 12. N 1. P. 57–65.
- [6] Loukhovitski B. I., Starik A. M. Modeling of vibration–electronic–chemistry coupling in the atomic–molecular oxygen system // *Chemical Physics.* 2009. Vol. 360. P. 18–26.

Особенности многотемпературного моделирования течений разреженных газов вблизи твердых тел

Шажурова Л.А., Кустова Е.В., Норкин М.М.

liya.shakurova@spbu.ru, e.kustova@spbu.ru, mariknorkin@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Работа посвящена моделированию взаимодействия неравновесных газовых потоков с поверхностями твердых тел с учетом гетерогенных колебательной ре-

лаксации и химических реакций. Построение моделей осуществляется в рамках многотемпературного подхода на основе кинетического граничного условия. Получены граничные условия скорости скольжения, скачков температур, а также массовых потоков компонент. Тестирование разработанных моделей осуществляется на примере сверхзвукового плоского течения Куэтта. Рассматриваются различные случаи разреженности газа, а также анализируется влияние поверхностной химии и моделей рассеяния частиц на характеристики течения.

Ключевые слова: разреженный газ, многотемпературные модели, граничные условия скольжения, гетерогенные реакции, колебательная релаксация.

Взаимодействие неравновесных газовых потоков с твердыми поверхностями играет важную роль во многих практических приложениях, таких как аэрокосмические полеты, технологии с применением низкотемпературной плазмы, потоки газа в микросистемах. Для точного описания процессов в газе в таких системах требуются надежные математические модели, учитывающие ряд сложных физических эффектов, включая эффекты разреженности, учет различных механизмов релаксации и химических реакций, а также эффекты от взаимодействия с твердым телом. Последние включают в себя физические эффекты, проявляющиеся в типах рассеяния частиц поверхностью, а также гетерогенные реакции, способствующие рекомбинации/диссоциации частиц на поверхности, изменению внутренних состояний частиц, абляции и ионизации.

В континуальном приближении возможно построение моделей, учитывающих обозначенные эффекты. Таковыми являются, например, детальные поуровневые (см. [1, 2]) и многотемпературные (МТ) (см. [3, 4, 5]). Однако моделирование в данных подходах взаимодействия с поверхностями твердых тел зачастую основано на упрощенных феноменологических моделях [6, 7, 8, 9]. Условия, полученные теоретическим образом с применением детальных методов кинетической теории, можно найти для многотемпературного приближения в работе [10], для поуровневого — в работах [11, 12]. В последних был разработан подход, основанный на кинетическом граничном условии и позволяющий корректно учитывать поверхностную химию, что снимает ограничения многих теоретических моделей, включая [10]. В связи с этим актуальной задачей остается получение граничных условий скольжения в рамках многотемпературного описания неравновесных газовых течений. Решению последней и посвящена данная работа.

Рассматривается газовая смесь, включающая произвольное число молекулярных компонент; дополнительно учитывается возможность рассмотрения многоатомных молекул. При таком предположении использование поуровневых подходов становится крайне вычислительно затратным, поскольку количество компонент смеси может достигать десятков тысяч, что значительно усложняет даже решение простых одномерных невязких задач. Многотемпературные модели представляют собой хорошую альтернативу, которая при небольшом

числе уравнений позволяет с достаточной точностью описывать неравновесные течения газовых смесей. В данном исследовании мы сосредотачиваемся исключительно на детальном учете переходов колебательной энергии и химических реакциях, в том числе и на поверхностях твердых тел. Для вращательной энергии молекулы используется предположение о жестком ротаторе, а колебательная энергия описывается на основе модели гармонического осциллятора. При построении моделей предполагается, что $VV_{c,m}$ -переходы колебательной энергии между частицами одного сорта c в колебательной моде m (и/или $VV_{c,m-k}$ -межмодовые переходы с участием мод m, k), происходят быстрее, чем VT_m -обмены и VV_2 -обмены между частицами разных сортов. Из-за высокой скорости $VV_{c,m/m-k}$ -переходов, на начальном этапе релаксации в различных колебательных модах молекул сорта c устанавливаются квазистационарные распределения с разными характерными колебательными температурами мод, T_m^c (или температуры мод $m-k$, объединенных вследствие резонансных обменов, T_{m-k}^c). Эти неравновесные распределения по колебательным модам затем медленно релаксируют к равновесному состоянию через медленные процессы обмена энергией. Описывать установление течения в МТ приближения позволяют дополнительные релаксационные уравнения для колебательной энергии различных межмодовых взаимодействий [1].

Для получения граничных условий к такой системе уравнений переноса в многотемпературном приближении применяется разработанный ранее подход, основанный на кинетическом граничном условии [11, 12]. Итоговые выражения для скорости скольжения, скачков температур (включая колебательные), а также массовых потоков компонент смеси зависят от вероятностей поверхностных процессов и коэффициентов переноса. Исследование полученных условий, а также оценка вклада поверхностной химии проведены на основе анализа полученных результатов сверхзвукового течения Куэтта. Это течение, помимо проверки включения моделей в различные численные схемы, также обеспечивает качественную оценку влияния гетерогенных реакций и эффектов разреженности. На основе данной задачи также исследуется проблематика включения в моделирование колебательной дезактивации/возбуждения на твердой стенке, анализируются различия в эффектах, обусловленных различными моделями рассеяния частиц поверхностью.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 23-19-00241.

Литература

- [1] Nagnibeda E., Kustova E. Nonequilibrium Reacting Gas Flows. Kinetic Theory of Transport and Relaxation Processes. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2009. 256 p.
- [2] Panesi M., Lani A. Collisional radiative coarse-grain model for ionization in air // Phys. Fluids. 2013. Vol. 25. N 5. P. 057101.

- [3] Park C. Thermochemical relaxation in shock tunnels // J. Thermophys. Heat Transf. 2006. Vol. 20. N 4. P. 689–698.
- [4] Alekseev I., Kustova E. Extended continuum models for shock waves in CO₂ // Phys. Fluids. 2021. Vol. 33. N 9. P. 096101.
- [5] Kosareva A., Kunova O., Kustova E., Nagnibeda E. Hybrid approach to accurate modeling of coupled vibrational-chemical kinetics in carbon dioxide // Phys. Fluids. 2022. Vol. 34. P. 026105.
- [6] Colonna G., Armenise I., Bruno D., Capitelli M. Reduction of state-to-state kinetics to macroscopic models in hypersonic flows // J. Thermophys. Heat Transf. 2006. Vol. 20. N 3. P. 477–486.
- [7] Candler G. V. Rate effects in hypersonic flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2019. Vol. 51. P. 379–402.
- [8] Hao J., Wang J., Lee C. Numerical study of hypersonic flows over reentry configurations with different chemical nonequilibrium models // Acta Astronaut. 2016. Vol. 126. P. 1–10.
- [9] Yu M., Qiu Z., Takahashi Y. Numerical investigation of surface catalytic effect on the plasma sheath of a hypersonic re-entry capsule // Phys. Fluids. 2023. Vol. 35. P. 056106.
- [10] Kiryutin B. A., Tirskaa G. A. Slip boundary conditions on a catalytic surface in a multicomponent gas flow // Fluid Dyn. 1996. Vol. 31. P. 134–143.
- [11] Shakurova L., Kustova E. State-specific boundary conditions for nonequilibrium gas flows in slip regime // Phys. Rev. E. 2022. Vol. 105. P. 034126.
- [12] Shakurova L., Armenise I., Kustova E. State-specific slip boundary conditions in non-equilibrium gas flows: Theoretical models and their assessment // Phys. Fluids. 2023. Vol. 35. P. 086109.

Моделирование неравновесных и околоконтинуальных течений в решателе HyCFS-R

*Шоев Г.В., Шершнев А.А., Шкредов Т.Ю., Борисов С.П.,
Кудрявцев А.Н.*

*shoev@itam.nsc.ru, antony@itam.nsc.ru, shkredov@itam.nsc.ru,
borisov@itam.nsc.ru, alex@itam.nsc.ru*

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
630090, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1

Аннотация. Обсуждаются вопросы численного моделирования неравновесных и околоконтинуальных течений в решателе HyCFS-R, разрабатываемом в Институт теоретической и прикладной механики. Представлено моделирование течения химически реагирующей бинарной смеси O₂/O около конуса с юбкой в экспериментальных усло-

виях. Получено удовлетворительное согласие численных и экспериментальных данных по величине распределенного теплового потока по поверхности конуса с юбкой.

Ключевые слова: валидация, двухтемпературная химия, отрывное течение.

Введение. Применение компьютерного моделирования для предсказания параметров потока и параметров на поверхности тел в неисследованных течениях требует проверки достоверности, получаемых численных результатов. Настоящий доклад посвящен проверке достоверности численных результатов, получаемых в программе HyCFS-R (Hybrid Compressible Flow Solver «with Real gas effects») при численном решении уравнений Навье–Стокса с использованием двухтемпературной модели неравновесных течений с поступательно-колебательным энергообменом. В качестве тестового случая проведено моделирование бинарной смеси O_2/O около конуса с юбкой в экспериментальных условиях, для которых доступны экспериментальные данные.

Основные уравнения. Течение смеси O_2/O моделируется на основе уравнений Навье–Стокса, записанных в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r} + \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial r} + \mathbf{H}_v + \mathbf{S}_{\text{chem-vt}}. \quad (1)$$

Квази-вектор консервативных переменных \mathbf{Q} в уравнении (1) записывается:

$$\mathbf{Q} = (\rho, y_O \rho, \rho v, \rho w, \rho E_{t-r}, y_{O_2} \rho e_{v,O_2})^T,$$

где ρ — плотность смеси, v, w — компоненты вектора скорости, e_{v,O_2} — колебательная энергия молекулярного кислорода (рассчитывалась по модели гармонического осциллятора), E_{t-r} — поступательно-вращательная энергия:

$$E_{t-r} = \frac{v^2 + w^2}{2} + \sum_{i,i=O,O_2} y_i c_{vi}^{t-r} T_{t-r},$$

где y_i — массовая доля сорта i , c_{vi}^{t-r} — удельная теплоемкость поступательно-вращательной моды i -го сорта при постоянном объеме, T_{t-r} — температура поступательно-вращательной моды.

Квази-вектора невязких и вязких потоков в уравнении (1) записываются:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ y_{\text{O}} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ \rho v \left[E_{t-r} + \frac{p}{\rho} \right] \\ y_{\text{O}_2} \rho v e_{v, \text{O}_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ y_{\text{O}} \rho w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ \rho w \left[E_{t-r} + \frac{p}{\rho} \right] \\ y_{\text{O}_2} \rho w e_{v, \text{O}_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{z, \text{O}} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zr} \\ \beta_z \\ \beta_{v, z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{r, \text{O}} \\ \tau_{zr} \\ \tau_{rr} \\ \beta_r \\ \beta_{v, r} \end{pmatrix},$$

где p — давление, $\mathbf{J}_i = (J_{z,i}, J_{r,i})$ — диффузионный поток сорта i , τ — тензор вязких напряжений с компонентами

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad \tau_{rr} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w}{r} \right), \quad \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

а компоненты векторов β и β_v представляются в виде

$$\beta_z = v \tau_{zz} + w \tau_{zr} + q_{t-r, z} + \sum_{i=\text{O}_2, \text{O}} h_i^{t-r} J_{i, z}, \quad \beta_{v, z} = q_{v, z} + J_{z, \text{O}_2} e_{v, \text{O}_2},$$

$$\beta_r = v \tau_{zr} + w \tau_{rr} + q_{t-r, r} + \sum_{i=\text{O}_2, \text{O}} h_i^{t-r} J_{i, r}, \quad \beta_{v, r} = q_{v, r} + J_{r, \text{O}_2} e_{v, \text{O}_2}.$$

В последних выражениях используются следующие обозначения μ — коэффициент (сдвиговой) динамической вязкости, \mathbf{q}_{t-r} — тепловой поток поступательно-вращательной моды, связанный с теплопроводностью, h_i^{t-r} — энтальпия поступательно-вращательной моды сорта i , \mathbf{q}_v — тепловой поток колебательной моды, связанный с колебательной теплопроводностью.

Невязкие и вязкие источниковые члены (появляющиеся из-за осе-симметричности) в уравнении (1) записываются в виде:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r} \left(\rho w, y_{\text{O}} \rho w, \rho v w, \rho w^2, \rho w \left[E_{t-r} + \frac{p}{\rho} \right], y_{\text{O}_2} \rho w e_{v, \text{O}_2} \right)^{\text{T}},$$

$$\mathbf{H}_v = \frac{1}{r} (0, J_{\text{O}, r}, \tau_{zr}, \sigma, \beta_r, q_{v, r, \text{O}_2})^{\text{T}}, \quad \sigma = 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right).$$

Квазивектор источниковых членов записывается в виде:

$$\mathbf{S}_{\text{chem-vt}} = \left(0, W_{\text{O}} \dot{\omega}_{\text{O}}, 0, 0, -(\dot{e}_{VT}^{\text{O}_2} - \dot{e}_{CV}^{\text{O}_2} + \sum_{i=\text{O}_2, \text{O}} h_i^0 \dot{\omega}_i), \dot{e}_{VT}^{\text{O}_2} - \dot{e}_{CV}^{\text{O}_2} \right),$$

где W — молекулярный вес, $\dot{\omega}_i$ — изменение сорта i за счет химических реакций, h_i^0 — энтальпия образования сорта i , $\dot{e}_{VT}^{O_2}$ — поступательно-колебательный энергообмен, $\dot{e}_{CV}^{O_2}$ — изменение энергии за счет диссоциации.

Представленные уравнения интегрировались по времени с локальным шагом полу-явной схемой ASIRK2C [1], в которой квази-вектор $\mathbf{S}_{\text{chem-vt}}$ считался жестким. Невязкие потоки рассчитывались приближенным римановским солвером HLLC [2]. Значения слева и справа на грани интерполировались с использованием MUSCL реконструкции второго или четвертого порядка. Вязкие потоки вычислялись центральными разностями второго порядка.

Результаты расчетов. Численно моделируется течение около конуса с юбкой (рис. 1) в экспериментальных условиях пусков 87 и 90 [3] с параметрами набегающего потока $u_\infty = 4019$ м/с, $p_\infty = 165$ Па, $T_{t-r} = 625$ К, $T_{v,\infty}^{O_2} = 712$ К, $y_{O_2} = 0,9245$ и $u_\infty = 2731$ м/с, $p_\infty = 90$ Па, $T_{t-r} = 190$ К, $T_{v,\infty}^{O_2} = 1001$ К, $y_{O_2} = 0,9986$. Полная энтальпия для этих пусков составляет $h_0 = 9.85$ МДж/кг и $h_0 = 3.99$ МДж/кг, а числа Маха $M_\infty = 10.37$ и $M_\infty = 8.06$, соответственно. Поверхность конуса с юбкой считалась некаталитической стенкой с прилипанием при постоянной температуре $T_w = 300$ К.

В потоке моделируется две диссоциации и рекомбинации со скоростями по модели Парка или Кузнецова.

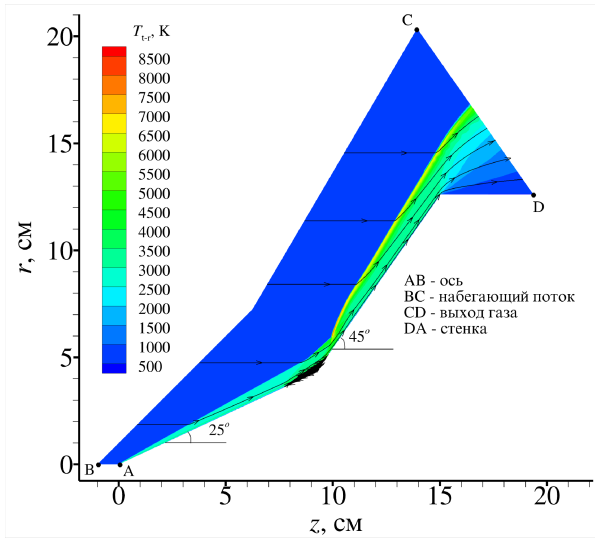


Рис. 1. Поступательно-вращательная температура и линии тока. Пуск 87.

Скорость VT-обмена во всех случаях рассчитывается по формуле Ландау–Теллера с временем релаксации по формуле Милликена–Уйата с высокотемпературной поправкой Парка. В поле течения видно образование зоны отрыва потока около точки соединения конуса и юбки.

На рисунке 2 показано сравнение теплового потока на поверхности конуса с юбкой с экспериментальными данными и расчетами других авторов. Видны различия в положении точки отрыва потока и положении максимального значения теплового. В целом, получено удовлетворительное согласие численных и экспериментальных данных.

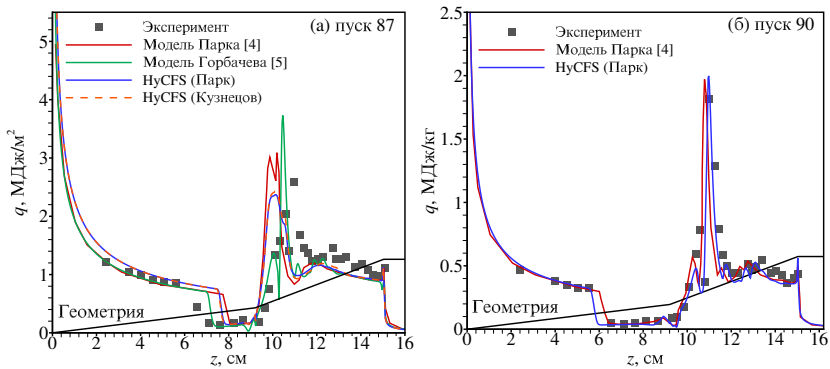


Рис. 2. Тепловой поток по поверхности конуса с юбкой в сравнении с результатами [4] и [5].

В докладе будут более детально представлены численные методы используемые для расчета, а также приведены дополнительные валидационные случаи.

Литература

- [1] Zhong X. Additive semi-implicit Runge–Kutta methods for computing high-speed nonequilibrium reactive flows // *Journal of computational physics*. 1996. Vol. 128. Iss. 1. P. 19–31.
- [2] Batten P., Leschziner M. A., Goldberg U. C. Average-State Jacobians and Implicit Methods for Compressible Viscous and Turbulent Flows // *Journal of computational physics*. 1997. Vol. 137. P. 38–78.
- [3] Nompelis I., Candler G. V., MacLean M., Wadhams T. P., Holden M. S. Numerical investigation of double-cone flow experiments with high-enthalpy effects // 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2010. Art. 1283.

-
- [4] Ninni D., Bonelli F., Colonna G., Pascazio G. On the influence of non equilibrium in the free stream conditions of high enthalpy oxygen flows around a double-cone // *Acta Astronautica*. 2022. Vol. 201, P. 247–258.
- [5] Gorbachev Yu., Shoev G. Gasdynamic equations with the number of gasdynamic variables exceeding the number of summational invariants // *E3S Web of Conferences*. 2023. Vol. 459. Art. 01009.

Секция 5

Механика деформируемого
твёрдого тела

Mechanics of Solids

О деформации сферического катода пондеромоторными силами

Антонов А.Ю., Варяюнь М.И., Егоров Н.В.

a.antonov@spbu.ru, m.varayuan@spbu.ru, n.v.egorov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе рассмотрена задача о деформации катода сферической формы, работающего в режиме полевой электронной эмиссии (ПЭЭ). Рассматривая модуль объёмной упругости как параметр, в рамках математического моделирования можно добиться существенного влияния эффекта на вольтамперную характеристику (ВАХ). Тем не менее, стандартные преобразования, проводимые над ВАХ в данной области знаний, не приводят к качественно новому её поведению.

Ключевые слова: полевая электронная эмиссия, пондеромоторные силы, упругие деформации, вольтамперная характеристика.

Введение. В настоящее время успешно внедряются различные устройства, основным компонентом которых является полевой катод [1]. Явление ПЭЭ заключается в том, что заряды покидают источник за счёт туннельного эффекта. Достаточно узкий потенциальный барьер получается путём создания сильного электрического поля. Необходимых значений напряжённости ($E \sim 10^9$ В/м) можно достичь не только обеспечив большую разность потенциалов U между катодом и анодом, но и придав эмиттеру форму с большой кривизной поверхности. Автоматически нужным условиям могут удовлетворять нерегулярные структуры с напылением или пористые материалы.

Плотность тока j оказывается чувствительной к состоянию поверхности как в смысле геометрии, так и в плане адсорбции частиц из межэлектродного пространства. Последнее обстоятельство приводит экспериментатора к условиям работы в сверхвысоком вакууме. По этой причине идёт поиск новых материалов, способных стабильно работать хотя бы в техническом вакууме. Теория ПЭЭ из металлов была разработана в [2], что позволило связать дифференциальные значения j и E относительно простой зависимостью, представляющей собой после преобразования линейную регрессионную модель [3]. Качественно закон Фаулера–Нордгейма (ФН) соответствует данным опыта даже после перехода к интегральной ВАХ, связывающей силу тока I с величиной U . Однако количественно теорию не просто согласовать с экспериментом, что приводит к необходимости введения дополнительных поправочных параметров, например, коэффициента усиления поля E для шероховатых поверхностей.

Периодически исследователи возвращаются к вопросу о влиянии электрического поля на геометрию катода (см. напр. [4]). Известно, что наличие E может привести к деформации и проводника, и диэлектрика. Рассмотрим первый

случай, в котором образец экранирует проникновение поля внутрь. В результате на поверхности появляется избыточный заряд. На этот заряд и оказывает действие поле E . При любом знаке сила со стороны поля имеет характер растяжения. Поверхностная плотность сил σ связана с E соотношением

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (1)$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Напряжённость E является градиентом потенциала φ , взятым со знаком минус. Распределение φ является решением уравнения Лапласа или Пуассона для конкретной конфигурации эмиссионной системы. Необходимо отметить, что для нанобразцов рассуждения, касающиеся их электрических и квантовых свойств, нельзя прямо наследовать из макроскопической теории. По этой причине можно допустить определённую вариативность, оперируя параметрами задачи.

Сферическая модель. Рассмотрим случай, когда поверхности катода и анода представляют собой концентрические сферы. Это позволит упростить выкладки, дав возможность оценить вклад явления в ВАХ. Будем считать известными радиус катода r_1 , расстояние между сферами d и разность потенциалов U между электродами. При этом радиус анода $r_2 = d + r_1$.

Пренебрежём пространственным зарядом в межэлектродном пространстве и запишем решение уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в сферических координатах:

$$\begin{cases} \varphi(r_1) = 0, \\ \varphi(r_2) = U, \end{cases} \quad \varphi(r) = \frac{Ur_2}{r_2 - r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right).$$

Напряжённость электрического поля на поверхности катода будет иметь вид

$$E(r_1) = \frac{Ur_2}{r_1(r_2 - r_1)}. \quad (2)$$

Если $r_1 \ll d$, напряжённость E вблизи анода незначительна, его деформацией можно пренебречь и рассматривать механические напряжения только на катоде, подставляя (2) в (1):

$$\sigma(r_1) = \frac{\varepsilon_0 U r_2^2}{2r_1^2 (r_2 - r_1)^2}. \quad (3)$$

Предложенное соотношение между r_1 и d выполнено не всегда. Скажем, в сканирующем туннельном микроскопе это сопоставимые величины, но кривизна сканируемой поверхности мала. Тут можно говорить о неприменимости сферической модели к некоторым прикладным задачам.

Пусть материал катода изотропен. Тогда можно воспользоваться формулой для относительного объёмного растяжения катода с учётом сохранения сферичности формы:

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1 + \frac{\Delta r}{r_1}\right)^3 - 1 = \frac{\sigma}{K} = \frac{\varepsilon_0 U^2 r_2^2}{2K(r_1 + \Delta r)^2(r_2 - r_1 - \Delta r)^2}, \quad (4)$$

где K — объёмный модуль упругости, Δr — приращение радиуса r_1 . Решая (4) относительно Δr , получаем новый радиус деформированного катода $r_1 + \Delta r$.

Метод последовательных приближений. Уравнение (4) для сложной конфигурации нельзя будет записать аналитически, и задачу придётся решать методом приближений. Сначала проводится расчёт напряжённости поля на поверхности катода (здесь это (2)), затем в связи с деформацией меняется конфигурация системы (здесь — r_1), затем снова вычисляются механические напряжения (здесь — (3)), и так далее. Последовательные приближения на основе (4) имеют вид:

$$\Delta r_{n+1} = f(\Delta r_n) = r_1 \left(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon_0 U^2 r_2^2}{2K(r_1 + \Delta r_n)^2(r_2 - r_1 - \Delta r_n)^2} + 1} - 1 \right), \Delta r_0 = f(0).$$

Результаты. Приведём результаты вычислений, полученных для следующих параметров системы в отсутствие механических напряжений: $U \approx 100$ В, $r_1 = 1.0 \cdot 10^{-8}$ м, $d = 1.0 \cdot 10^{-5}$ м. Выбранное пиковое значение U отвечает напряжённости $E = 10^{10}$ В/м. Модуль упругости был выбран примерно соответствующим графиту [5]: $K = 1.0$ ГПа. Уже третья итерация метода последовательных приближений даёт для Δr результат с погрешностью менее 1%.

При деформации источника происходит увеличение радиуса r_1 и уменьшение расстояния $r_2 - r_1$ между электродами. Но вариацией d в нашем случае можно пренебречь. В итоге характеристики изменились следующим образом. Радиус катода увеличился примерно на 11%, напряжённость составила 90% от начальной, поверхностная плотность сил уменьшилась на 19%. При меньших значениях U изменения будут заметны не так существенно. Перейдём к ВАХ.

Согласно закону ФН [2] плотность эмиссионного тока имеет вид

$$j(E) = aE^2 \exp\left[-\frac{b}{E}\right] = \frac{e^3}{8\pi h} \frac{E^2}{\Phi} \exp\left(-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3eh} \frac{\Phi^{3/2}}{E}\right), \quad (5)$$

где e — заряд электрона, m — его масса, h — постоянная Планка, Φ — работа выхода катода. Данная формула много раз уточнялась, но нововведения не меняли качественно обозначенной зависимости.

При подстановке $\Phi = 4.5$ эВ конечная плотность тока оказалась равной 40% от запланированной. Так как полный эмиссионный ток в данном случае представляет собой произведение плотности тока на площадь поверхности катода, а последняя в результате деформации увеличилась, полезно было выяснить, что интегральный ток дал 50% от начального значения. Можно также отметить, что объём катода увеличился на 36%. Здесь авторы постарались следить за тем, чтобы при всех оговорках о вариативности параметров в ходе вычислений не получались совсем нереалистичные значения.

Из (2) видно, что при $r_2 \gg r_1$ выполнено $E \approx U/r_1$. Тогда

$$j \approx a \frac{U^2}{r_1^2} \exp \left[-\frac{br_1}{U} \right], \quad I \approx 4\pi a U^2 \exp \left[-\frac{br_1}{U} \right].$$

Переход к координатам ФН даёт:

$$\ln \left[\frac{I}{4\pi a U^2} \right] \approx -\frac{br_1}{U}.$$

Зависимость $r_1 = r_1(U)$, конечно, имеет место. Однако даже для существенных деформаций в рамках данной задачи её вклад не позволяет увидеть отклонения преобразованной ВАХ от прямой линии, если по оси абсцисс откладывать U^{-1} .

Заключение. Рассмотрена задача о деформации катода сферической формы пондеромоторными силами. Выяснено, что для решения такой задачи можно пользоваться методом последовательных приближений. Полученные результаты говорят, что для микроскопических размеров учет деформации может оказаться важным при пиковых значениях напряжённости и силы тока. Несмотря на имеющиеся предпосылки к аномальному поведению интегральная ВАХ диода остается линейной в координатах Фаулера–Нордгейма.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 23-29-00937.

Литература

- [1] Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2011. 704 с.
- [2] Fowler R. H., Nordheim L. W. Electron emission in intense electric fields // Proceedings of the Royal Society A. 1928. Vol. 119. No. 781. P. 173–181.
- [3] Егоров Н. В., Вараюнь М. И., Буре В. М., Антонов А. Ю. Регрессионные модели для сигнала полевой электронной эмиссии // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2020. № 12. С. 95–104.
- [4] Birdseye P. J., Smith D. A. The electric field and the stress on a field-ion specimen // Surface Science. 1970. Vol. 23. Issue 1. P. 198–210.
- [5] Jiang M. et al. Multiple length-scale microstructural characterisation of four grades of fine-grained graphite // Journal of Nuclear Materials. 2021. Vol. 550. P. 152876.

Моделирование явления зуба текучести и влияние размера зерна на величину инкубационного времени

*Антонова М.Н.*¹, *Чжао Ш.*¹, *Петров Ю.В.*^{1,2}, *Женг М.*³, *Ли Б.*³
maliya.antonova@gmail.com, zhaoshixiang@yandex.ru, y.v.petrov@spbu.ru,
zhenghe@hit.edu.cn, st008007@spbu.ru

¹Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²Институт проблем машиноведения РАН,

199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. 61,

³School of Materials Science and Engineering, Harbin Institute of Technology,
150001, China, Harbin, 92 West Da-Zhi Street

Аннотация. Работа посвящена моделированию явления зуба текучести на основе экспериментальных данных нитевидных кристаллов серебра и меди, а также магниевых сплавов Mg–0,3Ca (мас.%) и Mg–1,0Al–1,0Ca–0,4Mn (мас.%) с различными размерами зерен. На примере магниевых сплавов отмечается, что размер зерна может привести к нестабильности диаграмм деформирования наряду со скоростью деформации и температурой, что может повлиять на изменения величины инкубационного времени. Выявлена заметная тенденция к увеличению инкубационного времени по мере уменьшения размера зерна.

Ключевые слова: явление зуба текучести, инкубационное время, релаксационная модель пластичности, влияние размера зерна на вид диаграмм деформирования.

Введение. Явление зуба текучести состоит в увеличении напряжения выше предела текучести, который в таких случаях называется нижним пределом текучести, и в последующем его отчетливом снижении на начальном этапе пластической деформации. Явление наблюдается в различных металлах и сплавах и в основном возникает в двух случаях. В первом случае явление наблюдается в нитевидных кристаллах чистых металлов с предельно малыми начальными плотностями дислокаций и возникает из-за резкого увеличения числа подвижных дислокаций в начале пластического течения [1]. Во втором случае явление наблюдается в различных сплавах, отожженных или мягких сталях и некоторых металлах с объемно-центрированной кубической решеткой и объясняется скоплением атмосфер примесных атомов вокруг дислокационных линий, что требует высокого уровня напряжений для начала пластического течения. Частичный сброс напряжений происходит за счет начала движения дислокаций [2]. Явление зуба текучести успешно моделируется с использованием релаксационной модели пластичности (**RP model**) структурно-временного подхода [2]–[4]. Параметры структурно-временного подхода не зависят от скорости деформации и связаны только со структурой материала, соответственно,

и с количеством дефектов, и с размером зерна. Подход, основанный на понятии инкубационного времени позволяет прогнозировать поведение материала за счет явного учета релаксационных процессов и при динамических воздействиях, и в случае немонотонности его кривой деформирования. В данной работе представлена модифицированная релаксационная модель пластичности (**MRP model**), которая лучше позволяет описывать процесс деформации, сопровождающийся деформационным упрочнением. Поскольку прогнозирование поведения различных материалов при нагрузках является актуальной на сегодняшний день задачей, данная работа посвящена изучению влияния размера зерна на один из параметров структурно-временного подхода, на инкубационное время.

Параметры структурно-временного подхода. Структурно-временной подход оперирует тремя параметрами: коэффициентом α , который отвечает за чувствительность материала к амплитуде нагрузки; параметром, отвечающим за степень упрочнения материала в процессе деформации — это либо скалярный параметр упрочнения β релаксационной модели пластичности, либо модуль упрочнения K модифицированной релаксационной модели пластичности; и инкубационным временем τ , характерным временем релаксации, которое с физической точки зрения характеризует длительность процесса перестройки структуры материала. При пластическом движении это может быть и движение дислокаций, и зернограничное проскальзывание. Все три параметра структурно-временного подхода зависят исключительно от дефектной структуры материала и никак не связаны ни с историей нагружения, ни со скоростью деформации. Это обстоятельство позволяет, определив набор из трех параметров, получать различные типы деформационных кривых, реализующихся для одного материала в широком диапазоне скоростей деформации [2]–[3].

Обсуждение полученных результатов. С помощью модифицированной и исходной релаксационных моделей пластичности было смоделировано поведение нитевидных кристаллов серебра и меди, экспериментальные данные были взяты из [1]. Инкубационные времена принимались равными 1,05 с и 3,90 с, соответственно. Результаты моделирования демонстрируют, что модифицированная модель работает в более широком диапазоне деформаций, чем исходная.

Рассматриваемые модели позволяют описывать деформацию не только нитевидных кристаллов с минимальным количеством дефектов, но и поликристаллических веществ [3]–[4]. В работе [3] рассматривалась деформация микрокристаллического и нанокристаллического никеля, инкубационные времена принимались равными 0,575 мкс и 3,3 мкс, соответственно.

Как видно из указанных выше данных, наблюдается большая разница в значении инкубационных времен для поликристаллических материалов и нитевид-

ных кристаллов. Данная разница в значениях инкубационных времен обусловлена различной структурой. В нитевидных кристаллах за счет малого количества дефектов инкубационное время принимает довольно большое значение; в поликристаллах на примере никеля [3], по сравнению с нитевидными кристаллами, величина инкубационного времени уменьшается на шесть порядков. Можно сделать предположение, что значение инкубационного времени уменьшается с ростом размера зерна, поскольку в этом случае увеличивается количество границ зерен в образце, соответственно, должно увеличиваться и время, необходимое для начала пластического течения при одной и той же скорости нагружения.

Данное предположение проверялось по данным экспериментов работ [5]–[6], в которых рассматривалась деформация магниевых сплавов с различными размерами зерен. В работе [5] размер зерна сплава Mg–0,3Ca (мас.%) регулировался за счет изменения длительности обработки отжигом, в работе [6] размер зерна сплава Mg–1,0Al–1,0Ca–0,4Mn (мас.%) регулировался за счет изменения скорости экструзии. Результаты моделирования с помощью модифицированной релаксационной модели пластичности представлены на рис. 1.

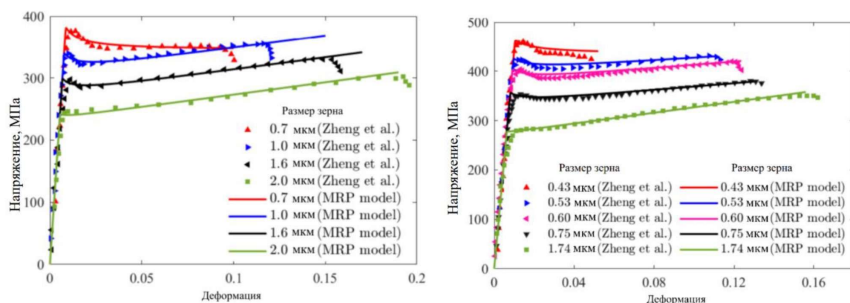


Рис. 1. Кривые деформирования для магниевых сплавов Mg–0,3Ca (мас.%) (слева) и Mg–1,0Al–1,0Ca–0,4Mn (мас.%) (справа) с различными размерами зерен.

С помощью полученных данных были построены зависимости величины инкубационного времени от размера зерна. Результаты представлены на рис. 2. С увеличением размера зерна наблюдается уменьшение инкубационного времени, что подтверждается экспериментами для двух различных магниевых сплавов, размер зерна которых регулировался различными способами. Обратную зави-

симось между инкубационным временем и размером зерна можно объяснить увеличением количества границ зерен по мере уменьшения размера зерна, что препятствует иницированию пластического течения и движению дислокаций и требует дополнительного времени для протекания этих процессов при той же скорости нагружения.

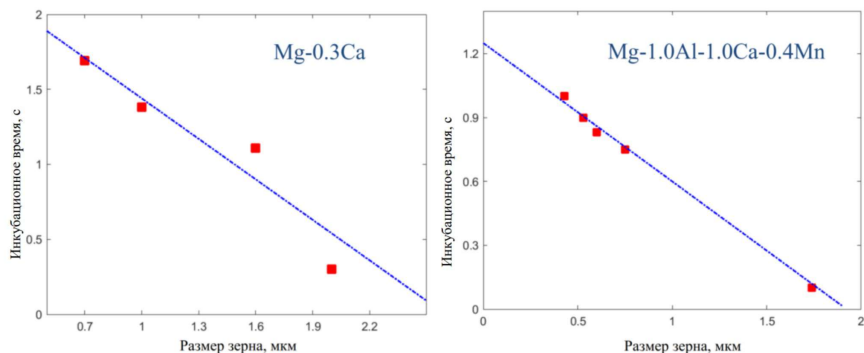


Рис. 2. Зависимость инкубационного времени от размера зерна для магниевых сплавов.

Исследование взаимосвязи между инкубационным временем и размером зерна дает ценную информацию о динамических механических свойствах наноструктурированных материалов при различных скоростях деформации, что позволяет понять, на создании материалов с какой структурой стоит сфокусироваться для тех или иных целей эксплуатации.

Исследование выполнено при финансовой поддержке мегагранта № 075-15-2022-1114.

Литература

- [1] Brenner S.S. Plastic Deformation of Copper and Silver Whiskers // Journal of Applied Physics. 1957. Vol. 28(9).
- [2] Petrov Y.V., Borodin E.N. Relaxation mechanism of plastic deformation and its justification using the example of the sharp yield point phenomenon in whiskers // Physics of the Solid State. 2015. Vol. 57(2). P. 353–359.
- [3] Selyutina N., Borodin E., Petrov Y.V., Mayer A. The definition of characteristic times of plastic relaxation by dislocation slip and grain boundary sliding in copper and nickel // International Journal of Plasticity. 2016. Vol. 82. P. 97–111.

- [4] Selyutina N., Borodin E., Petrov Y. Dynamical models of plasticity with nonmonotonic deformation curves for nanomaterials // *Metals*. 2022. Vol. 12(11).
- [5] Liu X., Qiao X., Xie W., Pei R., Yuan L., Zheng M. Influence of grain size on microstructure, mechanical properties and strain hardening behavior of Mg–0.3Ca (wt.%) alloy // *Materials Science and Engineering: A*. 2022. Vol. 839. P. 142847.
- [6] Liu X., Qiao X., Pei R., Chi Y., Yuan L., Zheng M. Role of extrusion rate on the microstructure and tensile properties evolution of ultrahigh-strength low-alloy Mg–1.0Al–1.0Ca–0.4Mn (wt.%) alloy // *Journal of Magnesium and Alloys*. 2023. Vol. 11(2). P. 553–561.

Изменение механических характеристик образцов капролона после естественного, деформационного и гидротермического старения

Арутюнян А.Р.

a.arutyunyan@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе исследовано влияние естественного, деформационного и гидротермического старения по различным программам на изменение механических свойств при растяжении и в условиях усталости для образцов капролона. Деформация в момент разрушения для образцов без старения и для образцов после естественного и деформационного старения практически не меняется. Для случая естественного и последующего гидротермического старения наблюдается значительное увеличение деформации в момент разрушения, а также уменьшение величины временного сопротивления. В ходе деформационного старения образцов капролона наблюдается упрочнение в ходе циклических испытаний, тогда как для случаев естественного и последующего гидротермического старения, а также для деформационного и последующего естественного старения наблюдается существенное разупрочнение.

Ключевые слова: полимерные материалы, естественное старение, деформационное старение, упрочнение, охрупчивание, усталостная прочность.

Введение. В последние годы все большее распространение и развитие получают различные полимерные и композиционные материалы. Они внедряются практически во все сферы жизни, промышленности и строительства, в частности, в авиастроении, ракетостроении, автомобилестроении, судостроении, на железнодорожном транспорте, при производстве сельскохозяйственных машин, а также при изготовлении спортивного инвентаря. Преимущества таких материалов по сравнению с металлами заключаются в легкости, теплостойкости, коррозионной стойкости и стойкости в агрессивных средах, например, таких как, щелочи или концентрированные кислоты. Но при этом полимер-

ные материалы менее стабильны, чем металлы, поэтому процессы старения и разрушения в них протекают более интенсивно.

В связи с тем, что данные материалы используются в ответственных областях инженерной практики, это делает их длительные характеристики старения и усталости первостепенно важными. В то же время физико-химические характеристики полимерных материалов после длительной эксплуатации изменяются, что в значительной степени обусловлено процессом старения [1]–[5]. Механические характеристики полимеров напрямую зависят от их структуры. Также большое влияние на механические свойства полимерных и композитных материалов оказывают различные внешние воздействия: температура, давление, окружающая среда, длительность и частота нагружения и вид напряженного состояния. Таким образом, необходимы исследования процессов старения этих материалов.

Материалы и методы исследования. В ходе испытаний на растяжение, ползучесть и усталость использовались образцы в виде двусторонних лопаток из блочного капролона (полиамид 6). Эксперименты на растяжение и ползучесть проводились на разрывной испытательной машине TINIUS OLSEN H10K-T. Усталостные испытания были выполнены на настольной усталостной сервогидравлической испытательной машине Si-Plan SH-B.

Исследование влияния старения на механические свойства образцов капролона проводилось по следующим программам.

- Программа 1. Естественное старение образцов в лабораторных условиях в течение 6 месяцев.
- Программа 2. Деформационное старение образцов в экспериментах на ползучесть при комнатной температуре при напряжении 65 МПа (порядка 0,87 от предела прочности на растяжение для образцов без старения) в течение 2 часов.
- Программа 3. Деформационное старение образцов в экспериментах на ползучесть при комнатной температуре при напряжении 65 МПа (порядка 0,87 от предела прочности на растяжение для образцов без старения) в течение 2 часов; естественное старение образцов в лабораторных условиях в течение 5 месяцев.
- Программа 4. Естественное старение образцов в лабораторных условиях в течение 5 месяцев; гидротермическое старение образцов в дистиллированной воде до насыщения 1,5 % по массе.

Экспериментальные исследования старения образцов из капролона в опытах на растяжение. Для исследования влияния указанных программ старения на изменение механических свойств были проведены эксперименты на растяжение образцов капролона со скоростью 5 мм/мин. Полученные диаграммы деформирования для образцов без старения (кри-

вая 1), после естественного старения по программе 1 (кривая 2), после деформационного и естественного старения по программе 3 (кривая 3) и после естественного и гидротермического старения (кривая 4) показаны на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что после старения по программе 1 (кривая 2) наблюдается уменьшение величины временного сопротивления в 1,11 раза, тогда как по программе 3 (кривая 3) временное сопротивление практически не изменяется по сравнению со случаем без старения. Следует отметить, что деформация в момент разрушения для образцов без старения составляет 22,3%, а для образцов после старения по программам 2 и 3 — 21,2% и 21,3% соответственно. Для программы 4 (кривая 4) наблюдается уменьшение величины временного сопротивления в 1,2 раза и значительное увеличение деформации в момент разрушения (до 31,7%).

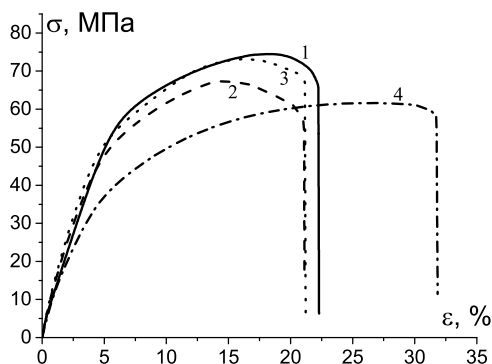


Рис. 1. Диаграммы деформирования при растяжении образцов капролона без старения (кривая 1), после естественного старения (кривая 2), после деформационного и естественного старения (кривая 3) и после естественного и гидротермического старения (кривая 4).

Экспериментальные исследования старения образцов из капролона в опытах на усталость. Усталостные испытания выполнялись с постоянной амплитудой с синусоидальным изменением напряжения, коэффициентом асимметрии цикла $R = 0$ и частотой нагружения 10 Гц. Полученные кривые усталости для образцов без старения (кривая 1) и образцов после старения по программам 2, 3 и 4 (кривые 2–4) показаны на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что в ходе старения образцов капролона по программе 2 наблюдается упрочнение в ходе циклических испытаний и увеличение предела усталости до 25 МПа, тогда как для образцов без старения предел усталости составляет только 20 МПа. В тоже время для программ 3 и 4 наблюдается

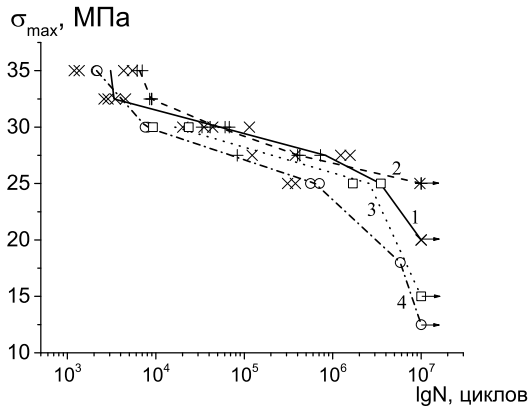


Рис. 2. Кривые усталости образцов капролона без старения (кривая 1), после деформационного старения (кривая 2), после естественного и гидротермического старения (кривая 3) и после деформационного и естественного старения (кривая 4).

разупрочнение с снижением предела усталости до 15 МПа и 12,5 МПа соответственно.

Выводы. В данной работе было исследовано влияние естественного, деформационного и гидротермического старения на изменение механических свойств образцов из капролона (полиамид 6) в опытах на растяжение и усталость по различным программам. После старения по программе 1 наблюдается уменьшение величины временного сопротивления в 1,11 раза, тогда как по программе 3 временное сопротивление практически не изменяется по сравнению со случаем без старения. Деформация в момент разрушения для образцов без старения составляет 22,3%, а для образцов после старения по программе 2 и программе 3 — 21,2% и 21,3% соответственно. Для программы 4 наблюдается уменьшение величины временного сопротивления в 1,2 раза и значительное увеличение деформации до 31,7% в момент разрушения. В ходе старения образцов капролона по программе 2 наблюдается упрочнение в ходе циклических испытаний, а также увеличение предела усталости до 25 МПа, тогда как для образцов без старения предел усталости составляет только 20 МПа. В тоже время для программ 3 и 4 наблюдается разупрочнение с снижением предела усталости до 15 МПа и 12,5 МПа соответственно.

Литература

- [1] Struik L.C.E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Sci. Publ.Comp., 1978. 229 p.

- [2] Филатов И. С. Климатическая устойчивость полимерных материалов. М.: Наука, 1983. 215 с.
- [3] Bruijn de J. C. M. The failure behavior of high density polyethylene with an embrittled surface layer due to weathering. Delft: Delft University press, 1992. 167 p.
- [4] Бочкарев Р. Н., Филатов И. С. Старение материалов на основе поливинилхлорида в условиях холодного климата. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990. 115 с.
- [5] Арутюнян Р. А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. М: Изд-во СПбГУ, 2004. 252 с.

Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести

Банько В.А., Георгиевский Д.В.

vladislav.banko@math.msu.ru, georgiev@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Ленинские горы, 1

Аннотация. Аналитически исследуется задача о разгоне из состояния покоя сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости при задании на границе касательного напряжения. Предполагается, что динамическая вязкость и плотность среды постоянны, а предел текучести может меняться непрерывным либо разрывным образом в зависимости от глубины. Вся полуплоскость в любой момент времени состоит из заранее неизвестных слоёв, где реализуется сдвиговое течение, и жёстких зон. Последние могут перемещаться как жёсткое целое, а могут быть неподвижны, как, например, полуплоскость, до которой возмущения, вызванные действием касательных усилий, ещё не дошли. Для нахождения полей напряжения и скорости развивается метод, основанный на квазиавтомодельных диффузионно-вихревых решениях параболических задач в областях с движущимися границами.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, разгон, касательное напряжение, интенсивность напряжений, одномерное сдвиговое течение, жёсткая зона, диффузия вихревого слоя.

Диффузия вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости. В работе [1] ставится и исследуется начально-краевая задача о нестационарном сдвиговом течении несжимаемой вязкопластической среды с плотностью ρ , динамической вязкостью μ и пределом текучести σ_s в полуплоскости

$$\Omega_\infty = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}, \quad \partial\Omega_\infty = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}.$$

Тензорно-линейные определяющие соотношения двухконстантного тела Бингама, связывающие декартовы компоненты девиатора напряжений s_{ij} и тензора скоростей деформаций v_{ij} , в силу несжимаемости совпадающего со своим девиатором, принимаются в виде

$$s_{ij} = \left(\frac{\sigma_s}{v_u} + 2\mu \right), \quad v_{ij}, v_u = \sqrt{v_{kl}v_{kl}}.$$

Кинематика и напряжённое состояние при нестационарном одномерном сдвиге в условиях плоской деформации характеризуются единственной отличной от нуля компонентой скорости $v_1(x_2, t) \equiv v(x, t)$ и единственной ненулевой компонентой девиатора напряжений $s_{12}(x_2, t) \equiv \sigma(x, t)$. Интенсивность скоростей деформаций имеет вид $v_u = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \sqrt{2}$.

Изначально вся полуплоскость Ω_∞ покоилась, а начиная с момента времени $t = 0$ на границе $\partial\Omega_\infty$ действует заданное касательное напряжение

$$\sigma(0, t) = S(t)h(t),$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда, $S(t)$ — неотрицательная, кусочно-непрерывная, монотонно неубывающая функция, ограниченная при конечных t . Обозначим через $t_0 \geq 0$ момент времени такой, что $S(t) > \sigma_s \sqrt{2} = \tau_s$ при $t > t_0$. Величину τ_s называют пределом текучести при сдвиге.

Вся полуплоскость Ω_∞ в любой момент $t > t_0$ состоит из двух частей [2]: Ω_f и Ω_r . Зона сдвигового течения Ω_f представляет собой расширяющийся со временем слой

$$\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x < x^*(t)\},$$

где $x^*(t)$ — определяемая в процессе решения монотонно возрастающая функция; $x^*(t_0) = 0$. При $t \leq t_0$ подобласть Ω_f отсутствует.

Остальная часть полуплоскости Ω_∞ — неподвижная полуплоскость

$$\Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty, x \geq x^*(t)\},$$

занятая жёсткой зоной. В ней $|\sigma(x, t)| \equiv \tau_s$ вплоть до бесконечности по x .

Разыскиваются функции $\sigma(x, t)$ и $v(x, t)$ соответственно классов C_0 и C_1 во всей полуплоскости Ω_∞ , занятой вязкопластическим материалом.

Выпишем [1] точное решение поставленной начально-краевой задачи в области сдвигового течения в случае задания граничного условия в виде $S(t) \equiv S_0$, где S_0 — приложенное касательное напряжение, большее чем τ_s . Имеем

$$\sigma(x, t) = S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta \right) \equiv S_0 \operatorname{erfc} \xi, \quad 0 < x < x^*(t) = 2\xi^* \sqrt{\nu t},$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематическая вязкость; $\xi = \frac{x}{2\sqrt{\nu t}}$ — классическая в параболических задачах автомодельная переменная; $\operatorname{erfc}\xi$ — дополнительная функция ошибок; ξ^* — постоянная величина ($0 < \xi^* \leq \infty$), которая находится из алгебраического уравнения

$$\operatorname{erfc}\xi^* = \gamma, \quad \gamma = \frac{\tau_s}{S_0} < 1.$$

А также выпишем скорость границы $x = 0$ слоя Ω_f , которая неограниченно растёт пропорционально \sqrt{t} :

$$v(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} (1 - e^{-\xi^{*2}}).$$

Зависимость предела текучести от глубины. Рассмотрим случай неоднородной вязкопластической среды, занимающей область Ω_∞ когда предел текучести при сдвиге τ_s — заданная неотрицательная кусочнонепрерывная функция координаты x , в то время как динамическая вязкость μ , плотность ρ , и кинематическая вязкость ν — как и ранее, постоянные величины. На границе полуплоскости Ω_∞ , по-прежнему, задано касательное напряжение в виде ступеньки Хевисайда.

Распределение жёстких зон по глубине в каждый момент времени $t > 0$, естественно, зависит от вида функции $\tau_s(x)$, в частности, от её монотонности. Вязкопластический сдвиг может реализовываться не только в расширяющемся со временем слое Ω_f , но и в более сложных образованиях, состоящих из нескольких слоёв, способных смыкаться и расходиться друг от друга. То же можно сказать и о наборе жёстких зон по толщине.

В любой момент $t > 0$ сдвиговое течение имеет место при значениях x , удовлетворяющих алгебраическому неравенству

$$\operatorname{erfc}\xi^* > \frac{\tau_s(x)}{S_0}, \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Точки, находящиеся внутри жёстких зон, неподвижных либо движущихся поступательно как твёрдое целое, имеют координаты x , удовлетворяющие неравенству

$$\operatorname{erfc}\xi^* < \frac{\tau_s(x)}{S_0}.$$

На рис. 1 представлен характерный вид профиля касательного напряжения $\sigma(x, t_1)$ и $\sigma(x, t_2)$ для двух моментов времени $t_1 < t_2$ и фиксированного непрерывного по глубине распределения предела текучести $\tau_s(x)$. Прямолинейные отрезки и предельные горизонтальные лучи на графиках соответствуют областям жёстких зон, а криволинейные участки — областям вязкопластического сдвига, в которых решение $\sigma(x, t) = S_0 \operatorname{erfc}\xi$. Поскольку рассматриваем

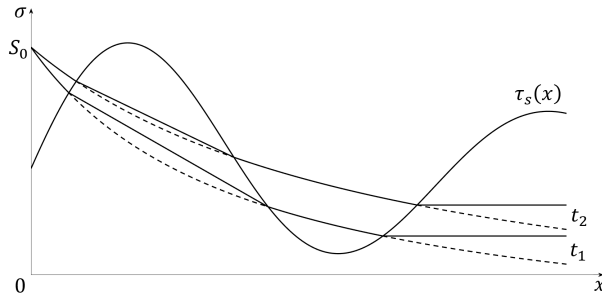


Рис. 1. Распределение касательного напряжения по глубине.

мая задача статически определима, по известной функции $\sigma(x, t)$ и требования того, что в жёсткой зоне скорость постоянна по x , восстанавливается профиль скорости $v(x, t)$. Для любого конечного момента времени t_1 непрерывно дифференцируемая по x функция $v(x, t_1)$ находится последовательно по слоям по направлению из глубины к границе $x = 0$. Характерный профиль скорости $v(x, t_1)$ приведён на рис. 2.

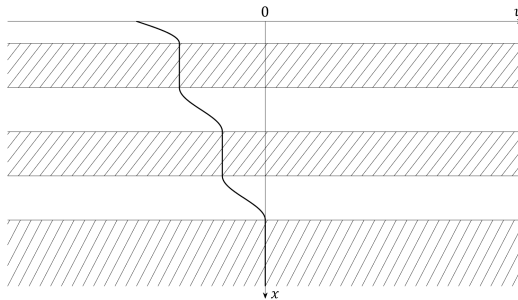


Рис. 2. Зависимость профиля скорости от глубины для конечного момента времени.

Литература

- [1] Банько В. А., Георгиевский Д. В. Квазиавтомодельные решения некоторых параболических задач в теории вязкопластического течения // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2023. № 4. С. 39–45.
- [2] Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 372 с.

О появлении несимметричных форм равновесия у круглых пластин и пологих оболочек, нагруженных нормальным давлением

Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.

s.bauer@spbu.ru, e.voronkova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе обсуждается устойчивость осесимметричных форм равновесия круглых пластин и пологих оболочек под действием нормального давления. Докритическая форма равновесия описывается в рамках теории пологих оболочек или общей теории нелинейных оболочек. Показано, что увеличение параметра пологости приводит к повышению значений критической нагрузки и росту числа волн в форме потери устойчивости по сравнению с круглой пластиной.

Ключевые слова: потеря устойчивости, круглые пластины, нормальное давление.

Введение. В 1948 г. Панов Д. Ю. и Феодосьев В. И. опубликовали работу, в которой впервые обсуждались вопросы появления несимметричных форм равновесия у симметрично нагруженных круглых пластин и пологих оболочек [1]. Однако, позже было показано, что недостаточно точное описание докритического состояния может приводить к ошибочным значениям критической нагрузки и форме потери устойчивости [2].

Cheo L. S. использовал аналитический подход к решению задачи, полагая, что при деформации пластинку (или оболочку) можно рассматривать как пологую [2]. При таком подходе можно получить несимметричное решение только при условии скользящей заделки края или малой жесткости пружины, ограничивающей радиальные смещения края пластины (или оболочки).

В настоящей работе, задача рассматривает в двух постановках, в которых для описания докритического (осесимметричного) состояния пластинки (или оболочки) используются уравнения пологих оболочек или уравнения нелинейной теории оболочек.

Постановка задачи. Рассматривается сферическая панель, срединная поверхность которой задаётся как $z = H(1 - r^2/a^2)$, где r — радиальная координата в плоскости основания панели, z — высота точки панели над плоскостью основания, a — радиус основания панели и H — высота панели в центре. Полагается, что $H \ll R$, где $R = a^2/(2H)$ — радиус кривизны срединной поверхности панели. Полагается, что панель нагружена равномерно распределённым внешним нормальным давлением.

В рамках теории пологих оболочек деформация панели описывается системой [3]

$$D\Delta\Delta w = p + L(w, F) - \frac{\Delta F}{R}, \quad \Delta\Delta F = -\frac{hE}{2}L(w, w) + \frac{\Delta w}{R},$$

где $w(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ — искомые функции перемещения и усилий, r, θ — полярные координаты основания пластины, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$, E, h — цилиндрическая жесткость, модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно.

Для описания осесимметричного состояния в рамках общей нелинейной теории тонких упругих оболочек на величины деформации и поворотов не накладываются никакие ограничения [4]. В этом случае разрешающая система уравнений для симметрично деформированных оболочек вращения может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} (r_0 T_s)' - \cos \varphi T_\theta + r_0 \varphi' T_{sn} &= 0, & (r_0 T_{sn})' - \sin \varphi T_\theta - r_0 \varphi' T_s + r \lambda_s p &= 0, \\ (r_0 M_s)' - \cos \varphi M_\theta - r_0 \lambda_s T_{sn} &= 0, & r' = \lambda_s \cos \varphi, \quad z' - \lambda_s \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_s &= B((\lambda_s - 1) + \nu(\lambda_\theta - 1)), \quad T_\theta = B((\lambda_\theta - 1) + \nu(\lambda_s - 1)), \quad B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \\ M_s &= D(\varkappa_s + \nu\varkappa_\theta), \quad M_\theta = D(\varkappa_\theta + \nu\varkappa_s), \quad \varkappa_s = \frac{\varphi'}{\lambda_s}, \quad \varkappa_\theta = \frac{\sin \varphi}{r_0 \lambda_\theta}. \end{aligned}$$

Здесь в качестве координат принята длина дуги меридиана и угол недеформированной оболочки s_0, θ_0 . Главные кратности удлинений вдоль меридионального и окружного направлений обозначены $\lambda_s = ds/ds_0$, $\lambda_\theta = r/r_0$, где r_0, r — расстояние от точки на срединной поверхности до оси вращения до и после деформации, соответственно. φ — угол между нормалью к срединной поверхности оболочки и осью симметрии после деформации. T_s, T_{sn} — меридиональные и перерезывающие усилия, M_s, M_θ — меридиональные и окружные моменты, отнесенные к единице длины срединной линии недеформированного нормального сечения.

Граничные условия для случая скользящей заделки края $r_0 = a$ можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0, \quad T_s \cos \varphi + T_{sn} \sin \varphi = 0, \quad z(a) = 0.$$

В центре панели должны выполняться условия

$$\lambda_s(0) = \lambda_\theta(0), \quad \varphi(0) = 0.$$

Результаты и выводы. На рисунке 1 приведены зависимости нагрузки p_{cr}/p_b^{pl} от безразмерного параметра пологости оболочки $A = \beta a^2/(Rh)$, $\beta = \sqrt{12(1-\nu^2)}$ в предположении, что перемещения края панели в радиальном направлении ограничены, т. е. $k_u u + T_r = 0$ для $k_u = 0.1$. Случай $A = 0$ соответствует круглой пластине.

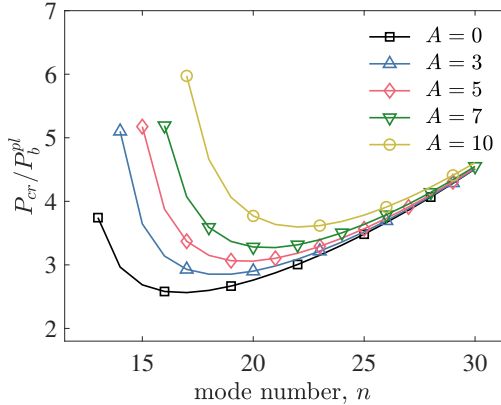


Рис. 1. Зависимость критической нагрузки от пологости оболочки.

Увеличение параметра пологости приводит к повышению значений нагрузки, при которой происходит переход в несимметричное состояние, и росту числа волн в форме потери устойчивости, по сравнению с круглой пластиной.

Литература

- [1] Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. 1948. № 12. С. 389–406.
- [2] Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Q. J. Mech. Appl. Math. 1973. Vol. 31. Iss. 1. P. 75–91.
- [3] Bauer S. M., Voronkova E. V., Semenov B. N. On the nonsymmetric equilibrium forms of circular plates under normal pressure // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2022. Vol. 55. Iss. 3. P. 275–280.
- [4] Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-га, 2002. 388 с.

Верификация числовых значений потенциальной энергии изгиба нанокантилевера

Бочкарёв А.О., Орехов А.В., Павилайнен Г.В.

a.bochkarev@spbu.ru, a.orekhov@spbu.ru, g.pavilaynen@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Проверка точности вычислительных алгоритмов при помощи верификации полученных результатов имеет важное значение и является необходимым этапом для обеспечения точности и надежности математических исследований. Рассматривается задача аппроксимации изгиба нанокантилевера в трёх классах трансцендентных функций и кубическим многочленом. Оценивается погрешность аппроксимации и вычисляется потенциальная энергия деформации при изгибе нанокантилевера как интеграл от квадрата второй производной аппроксимирующей функции.

Ключевые слова: нанокантилевер, стохастическая аппроксимация, относительная погрешность, энергия изгиба.

Нанотехнологии играют значительную роль в разработке новых устройств для различных отраслей науки и техники. В связи с этим изучение механических свойств наноструктур является актуальной задачей, для решения которой широко используются континуальные модели. Одна из их особенностей, в отличие от моделей макромеханики, состоит в том, что упругие характеристики в обычном понимании (как усреднённые по объёму коэффициенты определяющих соотношений объёмной фазы) перестают быть константами материала, так как зависят от размеров нанообъекта. Поэтому такие упругие модули называют эффективными. К подобному поведению упругих модулей приводит, в частности, применение моделей поверхностной упругости. Другой немаловажный аспект наномеханики состоит в том, что эти эффективные модули проблематично измерить классическим способом, скажем, на наностенде. Вместо этого прибегают к атомистическому моделированию. Чаще всего это моделирование проводят на растяжение и изгиб, в частности, нанокантилевера [1]. В результате средствами физики твёрдого тела определяются значения потенциальной энергии, а также соответствующие им значения меры деформации. Одна из задач наномеханики как раз и состоит в том, чтобы подобрать параметры континуальной модели так, чтобы полученные значения энергии адекватно описывались формулами энергии деформации континуальной модели.

В данной работе рассматриваются способы аппроксимации дискретных значений прогиба нанокантилевера с целью восстановления его энергии изгиба. В зависимости от принятой континуальной модели, энергия изгиба может быть

выражена интегралами

$$U = A \int_0^L (w'')^2 dx + B \int_0^L (w')^2 dx = A\tilde{U} + B\tilde{V}, \quad (1)$$

где L — длина нанобалки, A, B — неизвестные величины, пропорциональные эффективным модулям, w — прогиб нанобалки. В результате, мы приходим к задаче аппроксимации энергии изгиба по точкам прогиба [2].

Сравним результаты аппроксимации прогиба консольных балок (нанокантилеверов) тремя трансцендентными функциями и кубическим многочленом:

$$W_1(x) = b(e^{-ax^2} - 1), \quad W_2(x) = b(\operatorname{sech}^2 ax - 1),$$

$$W_3(x) = b(-\operatorname{th}^2 ax), \quad W_4(x) = ax^3 + bx^2.$$

К аппроксимирующим функциям $W_i(x, a, b)$, которые зависят от вещественной переменной x и двух параметров a, b , предъявляются дополнительные условия:

$$W_i(0, a, b) = 0, \quad W_i'(0, a, b) = 0, \quad W_i''(x, a, b) \leq 0, \quad W_i^{IV}(x, a, b) \geq 0.$$

Модельный набор числовых значений прогиба нанокантилевера [3, 4] представлен в виде кортежа:

$$\begin{aligned} Y = \{ & 0, 000, -0, 004, -0, 012, -0, 028, -0, 046, -0, 066, -0, 088, -0, 112, -0, 138, \\ & -0, 166, -0, 200, -0, 240, -0, 290, -0, 340, -0, 390, -0, 440, -0, 500, -0, 560, \\ & -0, 630, -0, 700, -0, 770, -0, 840, -0, 920, -1, 000, -1, 080, -1, 170, -1, 260, \\ & -1, 360, -1, 460, -1, 560, -1, 660, -1, 760, -1, 870, -1, 980, -2, 100, -2, 220, \\ & -2, 340, -2, 460, -2, 580, -2, 700, -2, 830, -2, 960, -3, 090, -3, 220, -3, 350, \\ & -3, 480, -3, 610, -3, 740, -3, 870, -4, 000, -4, 140, -4, 280, -4, 420, -4, 560, \\ & -4, 700, -4, 840, -4, 980, -5, 120, -5, 270, -5, 420, -5, 570, -5, 720, -5, 870, \\ & \left. -6, 020\right\} \times 10^{-10} \text{ м}, \end{aligned}$$

компоненты которого соответствуют значениям длины нанокантилевера от 0 до 180×10^{-10} м.

Коэффициенты a и b для аппроксимирующих функций W_1, W_2, W_3 вычисляются при помощи метода стохастической аппроксимации [5]. На рис. 1–3 слева непрерывными красными линиями изображены графики функций W_1, W_2, W_3 , аппроксимирующих значения прогиба (серые точки) модельного набора данных, и справа — графики их вторых производных, которые в первом приближении совпадают с кривизной изогнутой оси нанокантилевера. Адекватная

аппроксимация прогиба нанокантилевера возможна при малых значениях x до тех пор, пока вторая производная функций W_1 , W_2 , W_3 остается отрицательной. Параметр a связан с длиной отрезка изменения x , на котором W_1 , W_2 , W_3 имеют отрицательную кривизну, а параметр b — масштабирующий множитель.

Относительная погрешность аппроксимации числовых значений прогиба нанокантилевера функцией $W_1 = 0,637\%$, функцией $W_2 = 0,608\%$, функцией $W_3 = 0,639\%$.

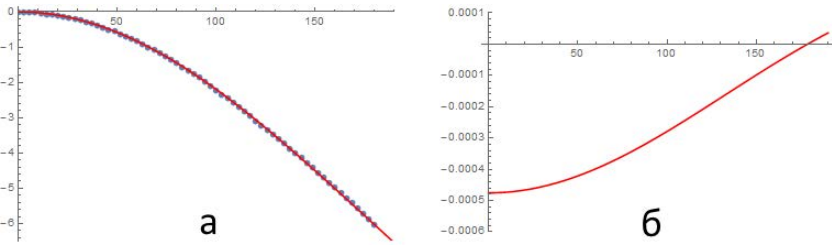


Рис. 1. График W_1 при $a = 1,57 \times 10^{-5}$, $b = 15,14$ (а). График W_1'' (б).

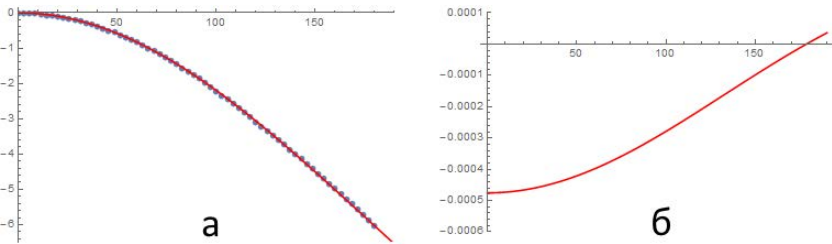


Рис. 2. График W_2 при $a = 3,6 \times 10^{-3}$, $b = 18,53$ (а). График W_2'' (б).

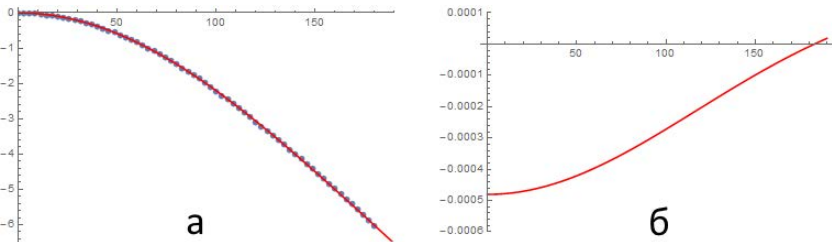


Рис. 3. График W_3 при $a = 3,495 \times 10^{-3}$, $b = 19,45$ (а). График W_3'' (б).

В отличие от трансцендентных функций W_1, W_2, W_3 , коэффициенты кубического многочлена W_4 можно вычислить точно, при помощи метода наименьших квадратов; для модельного набора данных Y получим: $a = 4,471 \times 10^{-7}$, $b = -2,664 \times 10^{-4}$.

Относительная погрешность аппроксимации прогиба нанокантилевера функцией $W_4(x) = 0,421\%$. На рис. 4 представлены график функции W_4 и её второй производной.

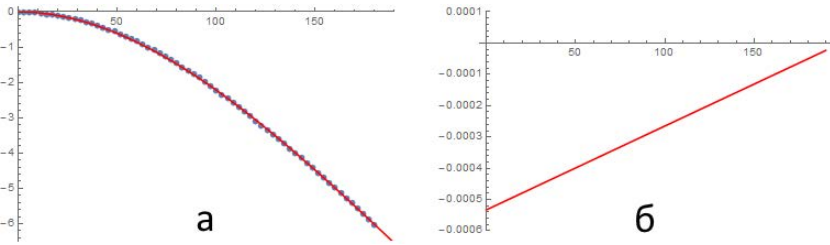


Рис. 4. График W_4 при $a = 4,471 \times 10^{-7}$, $b = -2,664 \times 10^{-4}$ (а). График W_4'' (б).

Верификации подлежат, прежде всего, значения второго сомножителя первого слагаемого энергии изгиба $-\tilde{U}$ в формуле (1), поскольку графики кривизны на рис. 1(б)–4(б), в отличие от самого прогиба, имеют свои особенности поведения. Значения интеграла \tilde{U} для аппроксимирующих функций W_1, W_2, W_3, W_4 принимают следующие значения:

$$\tilde{U}_1 = 1,888 \times 10^{-5}, \quad \tilde{U}_2 = 1,878 \times 10^{-5}, \quad \tilde{U}_3 = 1,894 \times 10^{-5}, \quad \tilde{U}_4 = 1,879 \times 10^{-5}.$$

Проведённые расчёты показывают, что разница полученных величин не превышает 10^{-7} . Эти результаты позволяют утверждать, что вычисленные значения потенциальной энергии изгиба модельного нанокантилевера соответствуют физическим реалиям, поскольку были получены при аппроксимации изгиба в разных классах функций. Такая верификация вычислительных алгоритмов необходима в тех случаях, когда физический эксперимент над реальными объектами невозможен.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 22-11-00087, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00087>.

Литература

- [1] Nanocantilever Beams: Modeling, Fabrication, and Applications. 1st Ed. Edited By Ioana Voiculescu, Mona Zaghoul. Jenny Stanford Publishing, 2016. 544 p.
- [2] Bochkarev A. Buckling of a nano-rod with taken into account of surface effect // Z. Angew. Math. Mech. 2024. Vol. 104. No. 3. P. e202300738.

- [3] Chhapadia P., Mohammadi P., Sharma P. Curvature-dependent surface energy and implications for nanostructures // J. Mech. Phys. Solids. 2011. Vol. 59. P. 2103–2115.
- [4] Chhapadia P., Mohammadi P., Sharma P. Erratum to: “Curvature-dependent surface energy and implications for nanostructures” [J. Mech. Phys. Solids. 2011. Vol. 59. P. 2103–2115] // J. Mech. Phys. Solids. 2012. Vol. 60. P. 1241–1242.
- [5] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.

Обратимая память формы в равномассовых кольцевых пучковых элементах из никелида титана

Волков Г. А.,¹ Вьюненко Ю. Н.,² Киселев А. Ю.³
vga@ipme.ru, 6840817@mail.ru, aleyukiselev@gmail.com

¹Институт проблем машиноведения РАН,
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61,
²ООО «ОПТИМИКСТ ЛТД»,
195426, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Передовиков, 9,
³АО «Атомэнергопроект»,
197183, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Савушкина, 55

Аннотация. Проведено сравнительное исследование равномассовых силовых пучковых элементов, принцип действия которых основан на явлении обратимой памяти формы. Изучалась работа двух пар элементов, изготовленных из проволоки двух диаметров, 2 мм и 2,5 мм соответственно, сплава TiNi эквиатомного состава. Обнаружено, что при одинаковых массо-габаритных параметрах наблюдаются близкие характеристики восстановления формы в режиме эффекта памяти формы. В условиях реализации обратимой памяти формы параметры геометрических размеров у второй пары на 20% выше первой, при этом также зафиксировано заметное преимущество в генерации усилий.

Ключевые слова: кольцевые пучковые силовые элементы, эффект памяти формы, обратимая память формы, генерация усилий.

Введение. Работа механизмов, обусловленная развитием в материале конструкции эффекта памяти формы (ЭПФ), зависит от многих физических факторов. Это ограничивает применение никелида титана в технике. Поэтому до недавнего времени мало внимания обращали на анализ проблем конструктивно-технологических разработок в этой сфере. К ним относится выбор полуфабрикатов материала для изготовления спроектированного изделия. В работе [1] на примере кольцевых силовых пучковых элементов (КСПЭ) показано, что при одинаковых геометрических параметрах и равных затратах материала на единицу изделия, их деформационно-силовые свойства могут су-

существенно отличаться из-за диаметра проволоки, использованной для изготовления.

Обратимая память формы (ОПФ), наблюдаемая в никелиде титана, может быть основанием новых технических решений, которые позволят существенно расширить применение сплава TiNi в промышленности. Возможность реализации ОПФ в технологическом процессе повысилась, после разработки способа термомеханической обработки силовых элементов, позволившего довести их механические характеристики до показателей, сравнимых с величинами получаемыми в условиях реализации ЭПФ [2]. При этом параметры деформации и генерации усилий сохраняются при многократном термоциклировании.

Методы и материалы. Проведены сравнительные исследования силовых элементов, изготовленных из проволоки никелида титана эквиатомного состава диаметром 2 мм и 2,5 мм. В первом случае КСПЭ представляет собой шестивитковую бухту с цепным замыканием массой 26 г. Изделия из проволоки 2,5 мм состоят из четырех витков, масса которых равна 28 г. Диаметр силовых элементов, имеющих в исходном состоянии форму окружности, равен 60 мм.

Режим термомеханической обработки состоит из нагрева КСПЭ от температуры мартенситной фазы до аустенитного состояния, нагружения изделий в высокотемпературной фазе и охлаждения их под нагрузкой через температурный интервал прямого мартенситного превращения. Для нагружения использовался динамометр ЛИНД, схема которого показана на рис. 1. Начальный уровень силового воздействия F во всех случаях был равен 400 Н. В области

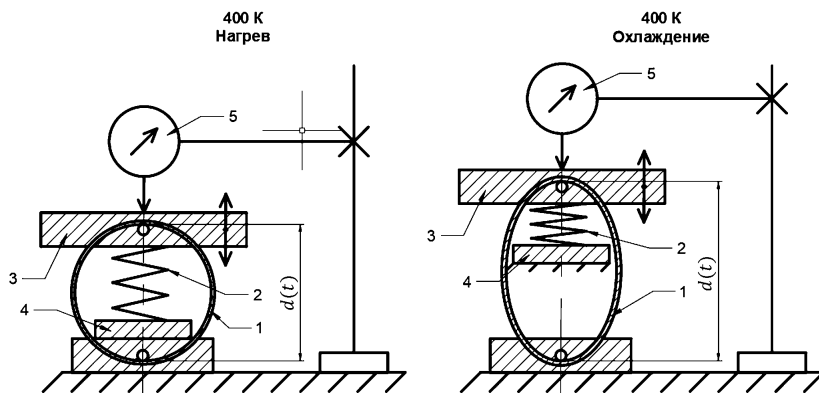


Рис. 1. Схема нагружения КСПЭ в динамометре ЛИНД 1 — КСПЭ, 2 — спиральная пружина, 3 — подвижная пластина, 4 — регулирующая подвижная пластина, 5 — измерительная система.

температур прямого превращения силовые элементы приобретали форму вытя-

нутого овала. При нагреве в свободном состоянии изделия возвращались к начальной форме окружности. Такое технологическое термоциклирование проводилось многократно. Определение механических характеристик КСПЭ делали в течение измерительных термоциклов, когда во время нагрева и охлаждения изделия были в свободном состоянии. Эволюция формоизменения элементов отслеживалась путем измерения величины Δd_{sme} , как разницы между максимальным и минимальным значениями $d(t)$ (см. рис. 1) в условиях развития ЭПФ, и аналогичной величины Δd_{twsm} , обусловленной ОПФ.

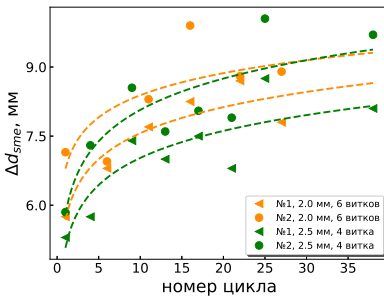


Рис. 2. Изменение Δd_{sme} во время термомеханической обработки. Первый и второй элементы шестивитковой пары обозначены оранжевым цветом, четырехвитковой пары — зелёным.

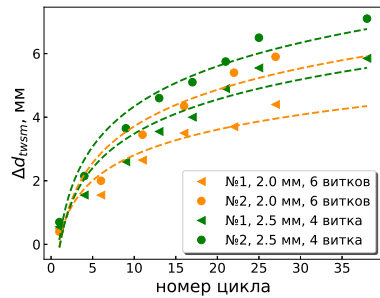


Рис. 3. Эволюция Δd_{twsm} с ростом числа циклов термомеханической обработки силовых элементов. Первый и второй элементы шестивитковой пары обозначены оранжевым цветом, четырехвитковой пары — зелёным.

На рис. 2 показана эволюция параметра формоизменения, получаемого при реализации ЭПФ с ростом числа термомеханических циклов. Начальные значения Δd_{sme} первой пары немного выше, чем для второй. С увеличением числа термоциклов наблюдается сближение значений этих показателей, при котором для первой пары получено возрастание Δd_{sme} в ~ 1.3 раза, для 2-ой в ~ 1.6 раза.

Значительно большее изменение наблюдалось для параметра Δd_{twsm} . Его начальные величины составляют 4% – 12% от аналогичных характеристик ЭПФ. Параметры формоизменения, обусловленного ОПФ, также монотонно растут с увеличением количества предложенных операций термомеханической обработки. Значения Δd_{twsm} достигают уровня в 60% для шестивитковой

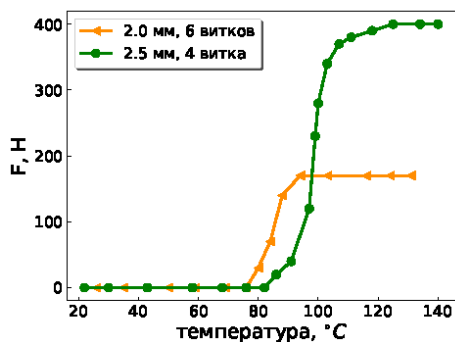


Рис. 4. Температурная зависимость генерируемых усилий шестивитковой и четырехвитковой парами КСПЭ.

пары на 20% выше первой и большое преимущество в генерации усилий.

Литература

- [1] Вьюненко Ю. Н., Хлопков Е. А., Турзаков А. С. Деформационно-силовые свойства равномассовых кольцевых силовых пучковых элементов // Физика и техника высоких давлений. 2020. Т. 30. № 4. С. 65–69.
- [2] Белоусов Н. Н., Хлопков Е. А., Янченко М. В. Деформационные характеристики кольцевых силовых пучковых элементов из сплава TiNi обусловленные обратной памятью формы // Физика и техника высоких давлений. 2022. Т. 32. № 3. С. 1–13.

Метод начальных функций в расчетах моментной теории упругости

Голоскоков Д. П.,¹ Матросов А. В.²
dpg1954@mail.ru, a.matrosov@spbu.ru

¹ Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения им. императора Александра I,
 193232, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московский пр., 4,

² Санкт-Петербургский государственный университет,
 199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Методом начальных функций построено решение уравнений моментной теории упругости для прямоугольника, находящегося в условиях плоской деформации

пары (оранжевые кривые, рис. 3) и 70% для четырехвитковой пары (зеленые кривые, рис. 3) от величин Δd_{sme} тех же КСПЭ, обусловленных ЭПФ.

На рис. 4 приведена температурная зависимость генерируемых усилий. Оказалось, что силовые возможности четырехвитковой пары более чем в 2 раза выше, чем у шестивитковой. Таким образом, можно сделать вывод о том, что при одинаковых массо-габаритных параметрах получаем близкие характеристики восстановления формы в режиме ЭПФ. В условиях реализации ОПФ параметры формоизменения у второй

ции. Выбор начальных функций в форме тригонометрических рядов позволил решить граничную задачу деформирования микрополярного прямоугольника ($h \times l$) с произвольными граничными условиями на сторонах $x = 0, h$ и свободным опиранием на сторонах $y = 0, l$. Приведены результаты расчетов для пенополиуритана как по моментной, так и по классической теории упругости. Определены предельные линейные размеры, с уменьшением которых начинает проявлять себя «размерный эффект».

Ключевые слова: моментная теория упругости, плоско-деформированное состояние, метод начальных функций, точное решение.

Метод начальных функций (МНФ). Дифференциальные уравнения равновесия микрополярного упругого континуума в прямоугольной декартовой системе координат Oxy в компонентной форме записываются в виде [1]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(u_{xx} + v_{xy}) + (\mu + \alpha)(u_{yy} - v_{xy}) + 2\alpha\omega_y &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)(u_{xy} + v_{yy}) + (\mu + \alpha)(v_{xx} - u_{xy}) - 2\alpha\omega_x &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)(\omega_{xx} + \omega_{yy}) - 4\alpha\omega + 2\alpha(v_x - u_y) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — перемещения вдоль осей Ox , Oy соответственно, $\omega = \omega(x, y)$ — угол поворота элементарной частицы в плоскости Oxy . Индексы x и y означают частные производные по соответствующим переменным. Уравнения (1) моделируют плоско-деформированное состояние изотропного тела в классической теории упругости, если $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Решение системы (1) в соответствии с алгоритмом МНФ ищется в виде линейной комбинации компонентов напряженно-деформированного состояния $u^0(y)$, $v^0(y)$, $\omega^0(y)$, $\sigma_x^0(y)$, $\tau_{xy}^0(y)$ и $\mu_x^0(y)$, определенных на линии $x = 0$ [2, 3]:

$$\begin{aligned} u &= L_{11}u_0(y) + L_{12}v_0(y) + L_{13}\omega_0(y) + \\ &\quad + L_{14}\sigma_x^0(y) + L_{15}\tau_{xy}^0(y) + L_{16}\mu_x^0(y), \\ v &= L_{21}u_0(y) + L_{22}v_0(y) + L_{23}\omega_0(y) + \\ &\quad + L_{24}\sigma_x^0(y) + L_{25}\tau_{xy}^0(y) + L_{26}\mu_x^0(y), \\ \omega &= L_{31}u_0(y) + L_{32}v_0(y) + L_{33}\omega_0(y) + \\ &\quad + L_{34}\sigma_x^0(y) + L_{35}\tau_{xy}^0(y) + L_{36}\mu_x^0(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $L_{ij} = L_{ij}(x, \beta)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 6$ — операторы-функции (операторы МНФ), зависящие от переменной x и символа β , представляющего оператор дифференцирования по переменной y . Функции $v_0(y)$, $v_0(y)$, $\omega_0(y)$, $\sigma_x^0(y)$, $\tau_{xy}^0(y)$ and $\mu_x^0(y)$ называются *начальными функциями*. Операторы-функции L_{ij} входят в соответствии с известным алгоритмом метода начальных функций [4].

Значения кинематических характеристик можно получить из решения (2), вычислив результаты воздействия операторов МНФ на соответствующие начальные функции. Если в качестве начальных функций выбрать тригоно-

метрические функции следующего вида $u^0 = u_n^0 \sin(\beta_n y)$, $v^0 = v_n^0 \cos(\beta_n y)$, $\omega^0 = \omega_n^0 \cos(\beta_n y)$, $\sigma_x^0 = \sigma_{x,n}^0 \sin(\beta_n y)$, $\tau_{xy}^0 = \tau_{xy,n}^0 \cos(\beta_n y)$, $\mu_x^0 = \mu_{x,n}^0 \cos(\beta_n y)$ ($\beta_n = \frac{n\pi}{l}$, n натуральное число и u_n^0 , v_n^0 , ω_n^0 , $\sigma_{x,n}^0$, $\tau_{xy,n}^0$, $\mu_{x,n}^0$ — вещественные константы), то такой тип начальных функций соответствует периодической нагрузке упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации. Если упругое полупространство ограничить плоскостью $x = h$, то получим периодически нагруженный слой. Если из него вырезать призму плоскостями $y = 0, l$, то получим свободно опертый по этим сторонам ($\sigma_y = 0$, $\mu_y = 0$, $u = 0$) прямоугольник ($h \times l$).

Таким образом получено точное решение для микрополярного упругого прямоугольника с граничными условиями на сторонах $y = 0, a$ и $u(x, 0) = u(x, l) = 0$, $\sigma_y(x, 0) = \sigma_y(x, l) = 0$, $\mu_y(x, 0) = \mu_y(x, l) = 0$ и произвольными граничными условиями на сторонах $x = 0, h$ в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{L}_{11} u_n^0 + \tilde{L}_{12} v_n^0 + \tilde{L}_{13} \omega_n^0 + \tilde{L}_{14} \sigma_{x,n}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{L}_{15} \tau_{xy,n}^0 + \tilde{L}_{16} \mu_{x,n}^0 \right) \sin(\beta_n y), \\ v(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{L}_{21} u_n^0 + \tilde{L}_{22} v_n^0 + \tilde{L}_{23} \omega_n^0 + \tilde{L}_{24} \sigma_{x,n}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{L}_{25} \tau_{xy,n}^0 + \tilde{L}_{26} \mu_{x,n}^0 \right) \cos(\beta_n y), \\ \omega(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{L}_{31} u_n^0 + \tilde{L}_{32} v_n^0 + \tilde{L}_{33} \omega_n^0 + \tilde{L}_{34} \sigma_{x,n}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{L}_{35} \tau_{xy,n}^0 + \tilde{L}_{36} \mu_{x,n}^0 \right) \cos(\beta_n y). \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) \tilde{L}_{ij} — результат воздействия оператора L_{ij} на соответствующую тригонометрическую функцию. Напряжения вычисляются по известным формулам моментной теории упругости через перемещения и угол поворота.

Решение (3) позволяет удовлетворить произвольным граничным условиям на сторонах $x = 0, h$ (кинематические, силовые или смешанные) при условии представления функций граничных условий тригонометрическими рядами. Три начальных функции известны из граничных условий задачи. Три неизвестные начальные функции находятся из граничных условий на стороне $x = h$.

Вычислительные эксперименты. Представлены результаты вычислительных экспериментов деформирования прямоугольников из пенопласта и пенополиуритана. Физико-механические характеристики материалов взяты из работы [5].

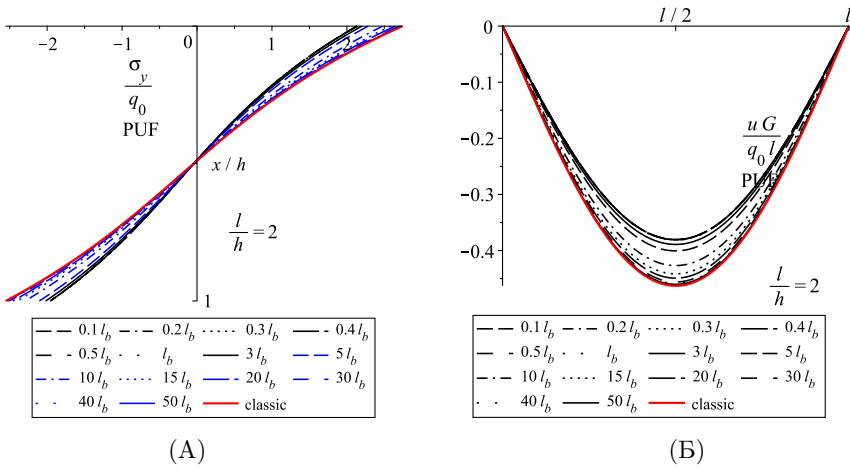


Рис. 1. Безразмерные напряжения σ_y/q в сечении $y = l/2$ (А) и перемещения uG/q_0l стороны $x = 0$ (Б) при разных значениях высоты прямоугольника.

Исследовался эффект размера: изменение значений компонентов напряженно-деформированного состояния в зависимости от высоты прямоугольника из пенополиуритана при отношении длины к высоте $l/h = 2$. На стороне $x = 0$ прямоугольника действует синусоидальная нормальная нагрузка $\sigma_x = q_0 \sin(\beta_n y)$, сторона $x = h$ свободна от нагрузки.

На рис. 1 представлены графики изгибающих напряжений σ_y в сечении $y = l/2$ и прогиба u стороны $x = 0$ при разных значениях высоты $h = kl_b$. Здесь l_b — характерная длина материала при изгибе (одна из технических характеристик).

Литература

- [1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [2] Агарев В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд. АН УССР, 1963. 203 с.
- [3] Матросов А. В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. № 2. С. 55–65.
- [4] Matrosov A. V. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2022. V. 73. No. 2. P. 74.
- [5] Lakes R. S. Experimental Microelasticity of Two Porous Solids // Int. J. Solids Struct. 1986. V. 22. No. 1. P. 55–63.

Stress state of a nanoplate with a circular nanohole under uniaxial remote loading

Grekov M. A.

m.grekov@spbu.ru, magrekov@mail.ru

St. Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, 7/9 Universitetskaya nab.

Abstract. A circular hole of a nanometer radius in an infinite elastic plate with a nanometer sized thickness under the uniaxial remote tension is considered. The surface stresses and residual surface tension are assumed to exist at the hole surface and the faces of the plate according to the Gurtin–Merdoch surface elasticity model within the framework of continuum mechanics. Besides of the external loading, the stresses induced by the uniaxial remote tension, due to surface stresses in the faces of the plate, act at infinity. The corresponding boundary value problem under the assumption of the plane stress state of the plate is solved using Goursat–Kolosov’s complex potentials and Muskhelishvili’s representations. The solution leads to the system of two singular integral equations evaluated in terms of power functions. Explicit formulas for the stress tensor components are derived. Based on these formulas, numerical investigations of the stress field dependence on the hole radius and plate thickness under different ratios of the radius to the thickness are performed.

Keywords: nanoplate, nanohole, plane stress state, surface elasticity, residual surface stress, size effect.

Introduction. The classical solution of the problem on an elastic isotropic plate containing a circular hole under the remote uniaxial loading, known as the Kirsch solution and Kirsch problem, was presented by Kirsch in 1898 [1]. This solution is valid both for the plane strain and the plane stress problems. At the same time when the radius of a circular hole equals several nanometers, the elastic field in the vicinity of the hole depends on the surface energy introduced by Gibbs [2] in 1874 on the basis of the thermodynamics of solid surfaces. There are two plane problems related to the Kirsch one, in which surface properties should be taken into account. If the plane strain conditions are satisfied, the only one circular cylindrical surface exists. For the plane stress state, two faces of the plate with nanosized thickness are added to the cylindrical surface.

Due to rapid advances in nanotechnology and nanoengineering, various problems have been considered at the nanoscale. The role of a surface and interface in behavior of different nanosized materials and structures, such as nanowires and nanobeams, nanoplates and nanoshells, ultrathin films, composites containing nanopores and nanoinclusions, surface/interface nanorelief, etc., has been studied by means of the computer simulation, numerical and analytical methods (see, e.g., reviews [3]–[5]). Most analytical solutions incorporating the surface effect within continuum mechanics have been obtained using the Gurtin–Murdoch (GM) surface

elasticity model [6, 7]. Based on the GM theory, the influence of surface properties on elastic fields around a circular hole being in a homogeneous stress field under plane strain has been thoroughly investigated [8]–[10]. At the same time, the solution of the similar problem for a hole in an elastic plate under plane stress state [8] needs to be revised. The new solution of this problem and the analysis of the numerical results are given in the present paper.

Basic concepts. A circular hole of the radius R in an infinite elastic plate with the thickness h under the remote uniaxial tension of the intensity p is considered. Following the GM surface elasticity model and Hooke law, the average stresses satisfy the constitutive relation with the linear strains in the middle plane of the plate

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}_{\rho\rho} &= \tau_0^* + (\lambda^* + 2\mu^*) \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\rho} + \lambda^* \overset{\circ}{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{\vartheta\vartheta} &= \tau_0^* + (\lambda^* + 2\mu^*) \overset{\circ}{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta} + \lambda^* \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\rho}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{\rho\vartheta} &= 2\mu^* \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\vartheta},\end{aligned}\quad (1)$$

where ρ, ϑ are the polar coordinates related to the Cartesian coordinates x_1, x_2 with the origin in the center of the hole, τ_0 is the residual surface stress (surface tension) acting in the faces, effective Lamé parameters λ^*, μ^* are expressed in terms of Lamé parameters of the surface (λ_s, μ_s) and volume (λ, μ) materials

$$\tau_0^* = \frac{2\tau_0}{h}, \quad \mu^* = \mu + \frac{2\mu_s}{h}, \quad \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{2\lambda_s}{h}. \quad (2)$$

According to the GM model, the constitutive relation of the hole surface is written as

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^s = \sigma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s) \overset{\circ}{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{\rho\vartheta}^s = \frac{\sigma_0}{R} (\overset{\circ}{u}_{\rho,\vartheta} - \overset{\circ}{u}_{\vartheta,\rho}), \quad \sigma_{33}^s = \sigma_0 + (\lambda_s + \tau_0) \overset{\circ}{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}, \quad (3)$$

where $\overset{\circ}{u}_\rho, \overset{\circ}{u}_\vartheta$ are the polar components of the displacement vector, σ_0 is the surface tension acting in the hole surface.

Allowing for Eq. (3), the generalized Young–Laplace law for the average stresses at the circular boundary of the middle plane can be written as

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}_{\rho\rho} + i \overset{\circ}{\sigma}_{\rho\vartheta} &= \left[\frac{\sigma_0}{R} + \frac{K_1}{R} \operatorname{Re} \frac{\partial \overset{\circ}{u}}{\partial \zeta} - \frac{K_2}{R} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\rho} + \frac{\sigma_0}{R} \operatorname{Re} \left(\zeta \frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}}{\partial \zeta^2} \right) \right] + \\ &+ i \left[\frac{K_1}{R} \operatorname{Im} \left(\zeta \frac{\partial^2 \overset{\circ}{u}}{\partial \zeta^2} \right) + i \frac{K_2}{R} \zeta \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\rho}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_0}{R} \operatorname{Im} \frac{\partial \overset{\circ}{u}}{\partial \zeta} \right] \triangleq q(\zeta),\end{aligned}\quad (4)$$

where $\zeta = Re^{i\vartheta}$, $\overset{\circ}{u} = \overset{\circ}{u}_1 + i \overset{\circ}{u}_2$, $\overset{\circ}{u}_1$, $\overset{\circ}{u}_2$ are the components of the displacement vector in the Cartesian coordinates x_1 , x_2 , respectively, i is the imaginary unit, $K_1 = \lambda_s + 2\mu_s - \lambda(\lambda_s + \tau_0)/(\lambda + 2\mu)$, $K_2 = \lambda(\lambda_s + \tau_0)/(\lambda + 2\mu)$.

The action of the uniaxial tension p along the x_2 axis in the volume phase at infinity and the biaxial surface tension τ_0 in the faces of the plate leads to the following conditions for the average stress components in coordinates x_1 , x_2 at infinity:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}_{11}^{\infty} &= \frac{2\tau_0}{h} + \frac{(\lambda + \mu)(\lambda_s + \tau_0) - \lambda(\lambda_s + 2\mu_s)}{\mu(3\lambda + 2\mu)h} p, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{22}^{\infty} &= \frac{2\tau_0}{h} + \frac{(\lambda + \mu)(\lambda_s + 2\mu_s) - \lambda(\lambda_s + \tau_0)}{\mu(3\lambda + 2\mu)h} p + p, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{12}^{\infty} &= \overset{\circ}{\sigma}_{21}^{\infty} = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Equalities in Eq. (5) are derived using inseparability of the plate faces and the volume phase and assuming that the rotation equals zero at infinity.

It should be noted that conditions (5) defer essentially from similar ones in the work [8] since surface properties of the plate faces are not taken into account in [8].

Boundary equation (4) contains two unknown functions $\overset{\circ}{u}$ and $\overset{\circ}{\varepsilon}_{rr}$ and so two more equations are required to solve the problem. Using Goursat–Kolosov’s complex potentials and Muskhelishvili [11] technique leads to the following system of two singular integral equations in these functions:

$$2\mu^* \overset{\circ}{u}'(\zeta) + \varkappa^* I^-(\zeta) + I^+(\zeta) = (\varkappa^* + 1) \overset{\circ}{T}(\zeta) - \tilde{\tau},\tag{6}$$

$$2\mu^* \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\rho}(\zeta) + \operatorname{Re} [(\varkappa^* - 2)I^-(\zeta) - I^+(\zeta)] = (\varkappa^* - 3) \operatorname{Re} \overset{\circ}{T}(\zeta) - \tilde{\tau},\tag{7}$$

where

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=R} \frac{q(\eta)}{\eta - z} d\eta, \quad I^{\pm}(\zeta) = \pm \frac{1}{2} q(\zeta) + I(\zeta), \quad |\zeta| = R,$$

$$\overset{\circ}{T}(z) = C_1 + C_2 z^{-2}, \quad 4C_1 = \overset{\circ}{\sigma}_{11}^{\infty} + \overset{\circ}{\sigma}_{22}^{\infty}, \quad 2C_2 = \overset{\circ}{\sigma}_{22}^{\infty} - \overset{\circ}{\sigma}_{11}^{\infty},$$

$$\varkappa^* = (\lambda^* + 3\mu^*)/(\lambda^* + \mu^*), \quad \tilde{\tau} = \mu^* \tau_0^*/(\lambda^* + \mu^*).$$

The solution of the system (6), (7) takes the form:

$$\overset{\circ}{u}'(\zeta) = a_0 + a_2 \zeta^2 + a_{-2} \zeta^{-2}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\rho\rho}(\zeta) = b_0 + b_2 \zeta^2 + b_{-2} \zeta^{-2},\tag{8}$$

where coefficients a_k , b_k are expressed in terms of geometrical and physical parameters of the problem.

After inserting Eq. (8) into the boundary equation (4), the stress field is evaluated by means of Muskhelishvili technique. As a result, explicit formulas for the stresses are written. Based on these formulas, numerical investigations of the stress field dependence on the hole radius and plate thickness under different ratios of the radius to the thickness are presented.

Acknowledgments. The author acknowledges the support of the Russian Science Foundation under grant number 22-11-00087, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00087/>.

References

- [1] Kirsch E. G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1898. V. 42. P. 797–807.
- [2] Gibbs J. W. The Scientific Papers of J. Willard Gibbs. V. 1. Longmans-Green, London, 1906.
- [3] Moriarty P. Nanostructured materials // Reports on Progress in Physics. 2001. Vol. 64. P. 297–381.
- [4] Rosei F. Nanostructured surfaces: Challenges and frontiers in nanotechnology // Journal of Physics: Condensed Matter. 2004. Vol. 16. P. S1373–S1436.
- [5] Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // Acta Mechanica Solida Sinica. 2011. Vol. 24. P. 52–82.
- [6] Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive of Rational Mechanics Analysis. 1975. Vol. 57. P. 291–323.
- [7] Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids // International Journal of Solids Structures. 1978. Vol. 14. P. 431–440.
- [8] Grekov M. A. General approach to the modified Kirsch problem incorporating surface energy effects // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2021. Vol. 33. No. 4. P. 1675–1689.
- [9] Grekov M. A., Vakaeva A. B., Müller W. H. Stress field around cylindrical nanopore by various models of surface elasticity // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2023. Vol. 35. Art. 020062.
- [10] Mogilevskaya S. G., Crouch S. I., Stolarski H. K. Multiple interacting circular nano-inhomogeneities with surface/interface effects // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. Vol. 56. P. 2298–2327.
- [11] Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Leiden: Noordhoff, 1977.

Колебания призматических оболочек

Дзедзисавили Г.Т., Смирнов А.Л., Филиппов С.Б.

d-g-t@bk.ru, a.l.smirnov@spbu.ru, s_b_filippov@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Проведен анализ спектра частот и форм собственных колебаний тонких призматических оболочек с поперечным сечением в виде правильного многоугольника. Результаты асимптотического анализа сравниваются с численными решениями, полученными с помощью метода конечных элементов (COMSOL). Для разного числа сторон оболочки изучено влияние на спектр собственных частот толщины и длины оболочки. Выделены три вида собственных частот — «оболочечные», «пластиночные» и «балочные». Исследуется, к какому виду принадлежит фундаментальная частота оболочки в зависимости от набора параметров.

Ключевые слова: свободные колебания тонких оболочек, призматические оболочки, метод конечных элементов, балка.

В работе исследуются низшие частоты собственных колебаний свободно опертых тонких призматических оболочек с поперечным сечением в виде правильного многоугольника.

В простом случае, когда сечение является квадратным, поиск частот и форм колебаний может быть выполнен аналитически [1].

В предельном случае, когда число граней оболочки велико, формы и частоты свободных колебаний призматической оболочки близки к формам и частотам круговой цилиндрической оболочки, для которых известны асимптотические формулы [2].

Рассмотрен случай, когда сечение оболочки представляет собой правильный многоугольник. В работе [3] для изучения колебаний оболочек многоугольного сечения использовались решения на основе обобщенной теории балок, преимущественное внимание было уделено изучению форм колебаний, а также влиянию относительной длины оболочки на частоты и формы колебаний. Для длинной оболочки с сечением в виде шестиугольника в [4] было получено приближенное решение, основанное на уравнениях полубезмоментной теории.

В данном исследовании аналитическими, асимптотическими и численными методами анализируется зависимость фундаментальных частот колебаний от числа сторон многоугольного сечения для разных значений геометрических параметров оболочки.

Рассмотрим собственные поперечные колебания шарнирно опертой призматической тонкой оболочки длиной l и толщиной h с поперечным сечением в виде правильного n -угольника с длиной стороны a . Материал оболочки изотропный и имеет модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и плотность ρ . Предпола-

гаются, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, перемещения и изгибающие моменты в местах сопряжения пластин равны, а углы между смежными пластинами остаются постоянными при деформации.

Угол β между смежными сторонами равен $\beta = \pi(1 - 2/n)$. При малых $n \sin \beta \approx 1$ и тогда для оценки частотного параметра в граничных условиях можно отбросить слагаемые, содержащие перемещения в плоскости пластины. При четных n задача может быть сведена к определению собственных частот пластины. Переходя к характерному размеру R и переменным $H = h/a$, $L = l/a$, $a = \frac{2\pi R}{n}$, для параметра фундаментальной частоты имеем:

$$\lambda_0^p = \pi^4 \left(\frac{n^2}{4\pi^2} + \frac{1}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)}. \quad (1)$$

При большом числе граней n первая форма колебаний схожа с формой колебаний круговой оболочки и применима асимптотическая формула [2]:

$$\lambda(m) = \frac{\pi^4}{m^4 L^4} + \frac{m^4 H^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

где m — число волн в окружном направлении.

Численный анализ показывает, что зависимость фундаментальной частоты от числа граней оболочки имеет S -образный вид. При малых n первая форма колебаний близка к форме колебаний шарнирно опертой пластины, при больших значениях n — к форме колебаний круговой оболочки. Для промежуточных значений n обе формулы дают завышенные оценки [5].

Фундаментальные пластиночные и оболочечные частоты преобладают при средней длине оболочки. При $L \gg 1$ фундаментальной становится частота, соответствующая балочной форме колебаний. Для оболочек разной толщины проведена оценка длины оболочки L , при которой фундаментальной частоте соответствует балочная форма колебаний.

Сравнение аналитических и асимптотических результатов с результатами численного расчета в пакете COMSOL показало хорошее совпадение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

Литература

- [1] Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end // Mechanics Research Communications. 2000. Vol. 27. Issue 4. P. 457–464. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00118-X](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00118-X)
- [2] Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.

- [3] Gonçalves R., Camotim D. The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes // *Thin-Walled Structures*. 2014. Vol. 84. P. 177–188. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
- [4] Krajcinovic D. Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section // *Nuclear Engineering and Design*. Vol. 22. Issue 1. 1972. P. 51–62.
- [5] Дзедзисашвили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек. // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24. № 1. С. 49–56.

Поведение системы «ударник – преграда» в случае высокоскоростного удара керамического тела в тонкую алюминиевую преграду

Дорофеев Н.П., Наумова Н.В., Нечунаев А.Ф., Филиппов С.Б.
st067927@student.spbu.ru, n.v.naumova@spbu.ru, vvkgu@yandex.ru,
s_b_filippov@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе была получена вычислительная модель высокоскоростного удара керамических тел в алюминиевую пластину. Рассмотрены три случая высокоскоростного удара как алюминиевых, так и керамических тел. Была проведена оценка потенциальной опасности для щита Уиппла каждого случая, используя поле скоростей облаков осколков и изменение кинетической энергии ударников.

Ключевые слова: гиперскоростной удар, щит Уиппла, космический мусор, керамический ударник.

Введение. В околоземном космическом пространстве за последние десятилетия накопился значительный объем космического мусора. Известно о более чем 130 млн. объектах [1]. Микрометеороиды техногенного и естественного происхождения представляют немалую угрозу как для первого, так и для второго экрана щита Уиппла. Для прогноза развития процесса разрушения после попадания микрочастицы в первый экран щита Уиппла, используются вычислительные методы [2], которые являются гораздо менее затратными по сравнению с натурными испытаниями на космических скоростях. Для вычислительного эксперимента был применен метод smoothed-particle hydrodynamics (далее — SPH) [3]. Метод SPH опирается на систему уравнений механики сплошной среды:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (U_i^\beta - U_j^\beta) W_{ij\beta},$$

$$\frac{dU_i^\alpha}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) W_{ij\beta},$$

$$\frac{dE_i}{dt} = - \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} \sum_j m_j (U_i^\alpha - U_j^\alpha) W_{ij\beta}.$$

Анализ повреждений после возвращения «Шаттла» из космоса показал, что процент повреждений от удара керамическими (Al_2O_3) телами значительный [4]. В связи с этим, вопрос рассмотрения удара керамического тела небольшого размера в первый экран щита Уиппла с космической скоростью становится актуальным.

Задачи и результаты. Рассматривались задачи высокоскоростного удара керамических тел в форме сферы и куба в алюминиевый (Al-6061-T6) экран толщиной 1 мм. Ранее соавторами была получена вычислительная модель такого ударного нагружения для алюминиевых тел [5]. Эта модель была проверена на известном натурном эксперименте [6] и применена в настоящей работе. Модели разрушения для экрана и алюминиевых ударников были выбраны в форме Джонсона–Кука. Уравнение состояния для алюминиевой пластины принималось в форме линейного полинома, для алюминиевых ударников — в форме Ми–Грюнайзена. Модель материала керамического ударника была выбрана в форме Джонсона–Холмквиста из [7]. Используемые параметры при моделировании керамических тел были следующими: $\rho = 3890 \text{ кг/м}^3$, $G = 152 \text{ ГПа}$, $A = 0.88$, $B = 0.45$, $C = 0.007$, $M = 0.6$, $N = 0.64$, $T = 0.462 \text{ ГПа}$, $HEL = 7.0 \text{ ГПа}$, $BETA = 1$, $SFMAX = 1$, $EPSI = 0.001 \text{ 1/мс}$, $K1 = 231 \text{ ГПа}$, $K2 = -160 \text{ ГПа}$, $K3 = 2774 \text{ ГПа}$, $D1 = 0.0125$, $D2 = 0.7$, $FS = 0.0$.

Первой рассмотренной формой ударника была выбрана сфера. Диаметр керамической сферы принимался равным 4.48 мм, масса принималась равной массе алюминиевой сферы из эксперимента и составляла 182 мг. На рисунке 1 приведено сравнение полей скоростей в облаках осколков при высокоскоростном ударе алюминиевой (верхний рисунок) и керамической сфер при условии, что массы сфер одинаковы. Показан момент времени $t = 24 \text{ мкс}$.

Рисунок 1 отражает фактически дисперсию по скоростям отдельных частиц в облаке осколков, если первоначальная скорость ударника составляет 2 км/с и более. На более низких скоростях ударного нагружения материала, когда облако осколков не образуется, дисперсия по скоростям мезомасштабных образований материала существует и измерена [8]. Из рисунка 1 можно сделать предварительный вывод, что общий объем тех осколков, скорости которых превышают 3 км/с по палитре скоростей, приведенной справа, существенно больше для случая удара керамической сферы, по сравнению с ударом алюминиевой.

Известно, что плавление на границах зерен материала может наступить при скоростях ударного нагружения материала, которые существенно ниже тех,

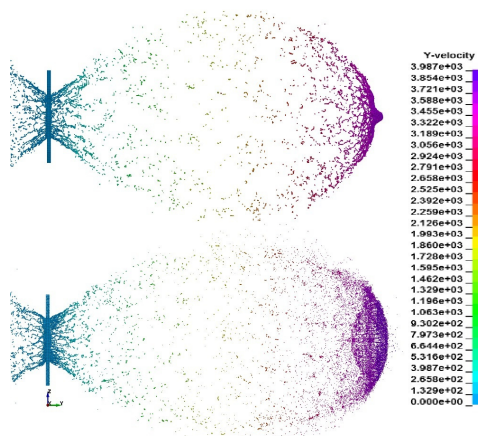


Рис. 1. Поля скоростей в случае удара сферы, время $t=24$ мкс.

что соответствуют температуре плавления [9]. Модель пластичности в форме Джонсона–Кука учитывает температурный эффект для динамического предела текучести алюминия. Во время эволюции облака осколков от удара алюминиевой сферы, материал ударника активно взаимодействует с материалом преграды, в соответствии с этим, масса осколков ударника в авангардной области существенно уменьшается. Модель материала для корунда это не учитывает, и керамический материал в виде осколков все еще сконцентрирован в авангарде облака. Отсюда, удар керамической сферы такой же массы, как и алюминиевая, более опасен для первого, а затем и второго экрана щита Уиппла. Аналогичное поведение облака осколков наблюдается и при сравнении ударов алюминиевого куба (прямого и повернутого на 45 градусов) с соответствующими ударами керамического.

На рисунке 2 приведен характер изменения кинетической энергии алюминиевых и керамических ударников. Оказалось, что в обоих случаях графики по кинетической энергии выполаживаются и далее идут параллельно оси абсцисс. При этом кривая, отвечающая за удар керамических тел, лежит выше аналогичной кривой для алюминиевых тел. Во всех случаях начальная кинетическая энергия равна 1612 Дж. Уровень кинетической энергии $k1$ отвечает за оставшуюся кинетическую энергию у керамических тел. Для сферы $k1 = 1195$ Дж, для куба $k1 = 1099$ Дж и для повернутого куба $k1 = 1189$ Дж. Для алюминиевых тел уровень кинетической энергии $k2$ соответственно принимает значения: 1089 Дж, 997 Дж, 1080 Дж.

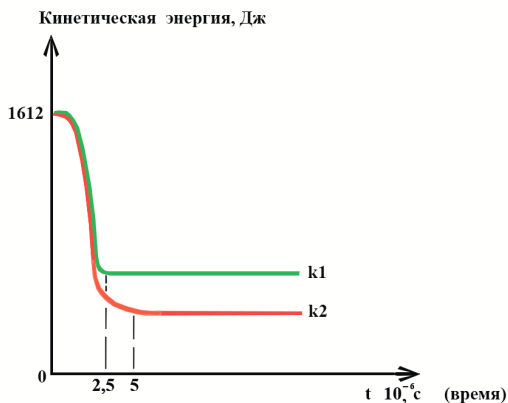


Рис. 2. Общий вид изменения кинетической энергии ударников.

Заключение. В ходе рассмотрения высокоскоростного удара алюминиевых и керамических тел в форме сферы и куба, сравнивалась потенциальная опасность таких воздействий. Удар керамических тел оказался более опасным, исходя из графиков кинетической энергии и эволюции облаков осколков. Причины этого могут лежать в более высокой плотности корунда и различиях в моделях материала.

Литература

- [1] Дики Ч., Уваров В. Новый «Союз–Аполлон» из космического мусора // Эксперт: журнал. 2021. № 40 (1223) (27 сентября). <https://kiozk.ru/article/ekspert/novuj-souz-apollo-iz-kosmiceskogo-musora>
- [2] Silnikov M. V., Guk I. V., Mikhaylin A. I., Nechunaev A. F., Rumyantsev B. V. Numerical simulation of hypervelocity impacts of variously shaped projectiles with thin bumpers // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42. No. 1. P. 20–29.
- [3] Liu G. R., Liu M. B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. World scientific, 2003.
- [4] Hyde J., Christiansen E., Lear D. Shuttle MMOD impact database // Procedia Engineering. 2015. Vol. 103. P. 246–253.
- [5] Nechunaev A. F., Naumova N. V., Dorofeev N. P. The effect of mass collapse under hypervelocity impact of solid paraboloid into a thin screen // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51. No. 4. P. 142–159.
- [6] Ke F. et al. Test study on the performance of shielding configuration with stuffed layer under hypervelocity impact // Acta Astronautica. 2016. Vol. 127. P. 553–560. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.06.037

- [7] Kłasztorny M. et al. Numerical modelling and design of ALFC shield loaded by 20 mm FSP fragment // Journal of KONES. 2012. Vol. 19. P. 301–313.
- [8] Meshcheryakov Y.I. et al. Strain Behavior of Aluminum Alloys Under Dynamic Compression and Tensile // Mechanics and Control of Solids and Structures. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 413–453.
- [9] Мещеряков Ю.И. Многомасштабные ударно-волновые процессы в твёрдых телах. СПб.: Нестор-История, 2018.

Применение метода морфологической сшивки для обнаружения критических координатных зон

Дорофеева Ю.А., Зыков И.Д., Никитин С.В., Самборский Г.Д.
julana2008@yandex.ru, sam.grisha78@gmail.com, ZID2005@yandex.ru,
stas.nikitin7320@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный горный университет императрицы
Екатерины II,
199106, Санкт-Петербург, 21 линия В.О., 2

Аннотация. В работе представлены результаты реализации метода морфологической сшивки, используемого, как правило, для улучшения изображений, полученных при помощи искусственных спутников Земли с фрагментами белых полос. Данный алгоритм был использован для сшивки координат точек с последующей идентификацией «опасных» зон, в которых точки отходят от центра более, чем на заданную величину. Подход, предложенный в работе, можно использовать в промышленной геодезии при обследовании аварийных сооружений при деформации объектов.

Ключевые слова: морфологическая сшивка, координаты точек, промышленная геодезия, погрешность, фотограмметрия, деформация твердого тела.

Введение. В прикладной геодезии и фотограмметрии задача оценки объектов была решена многими авторами. Важным аспектом является минимизация некорректно полученных данных. В работе [1] представлен метод геометрически оптимального размещения приборов измерения для минимизации погрешностей замеров. Исследование [2] посвящено применению различных методов оптимизации для решения задач геодезии. В работе [3] описан подход, который лег в основу данной работы — алгоритм, используемый для заполнения пробелов в изображениях с целью определения свойств объектов. В данном случае — подвижность отдельных фрагментов в результате деформации под влиянием факторов внешнего воздействия. Методы геостатистической интерполяции, представленные в исследованиях [4], не всегда качественно оценивают значения на точечном уровне и, следовательно, не могут быть оптимальными для изучения объектов относительно небольшого размера, но эффективны для крупных конструкций. В методах рисования, описанных в [5, 6, 7], с использо-

ванием нескольких источников процесс заполнения пробелов не может хорошо справляться с резкими изменениями между двумя изображениями, например, между солнечными бликами, снегом и облаками. Различные подходы для анализа состояния конструкций, в том числе и методы нелинейной оптимизации, предложены в исследованиях [8, 9, 10].

В данной работе представлены результаты использования метода сшивки изображений относительно обнаружения «плохих» точек на объекте, а также оценка погрешностей для него. Дальнейшая модификация этого подхода позволит минимизировать количество точек, измеренных с погрешностью, и относительно точно обнаружить наиболее опасные зоны объектов. Это имеет важное и широкое применение при изучении аварийных конструкций.

Описание метода. Алгоритм, описанный в [3], представлен здесь в несколько модифицированной форме. По сути, это попытка применения метода аэрофотосъемки в промышленной геодезии с последующим его улучшением.

Для простоты демонстрации работы алгоритма рассматривается сфера с набором точек в заданной относительно небольшой окрестности рис. 1. Черным цветом обозначена точка, отличающаяся от других более, чем на заданную величину. Она характеризует «опасную» зону, потенциально подвижную часть конструкции.

Далее с помощью программы, написанной в среде MathLab, совокупность значений с помощью алгоритма была пересчитана, и получился новый набор значений, из того же набора точек. Это сделано с целью исключить неполноту информации о конструкции, так как есть вероятность потери координат или результатов замеров рис. 2. Как видно из полученных результатов, потери данных не произошло. Важно отметить, что в прикладной геодезии аналогом данного процесса являются замеры части конструкций через какой-либо интервал времени для обнаружения подвижных зон и применение алгоритма для сохранения совокупности данных.

Затем представлен рисунок рис. 3 совмещения двух изображений. Произошло небольшое смещение «критической» точки, однако, совокупность полностью сохранилась.

В таблице 1 представлены результаты работы алгоритма для метода морфологической сшивки. С целью оценки точности расчет производился и по

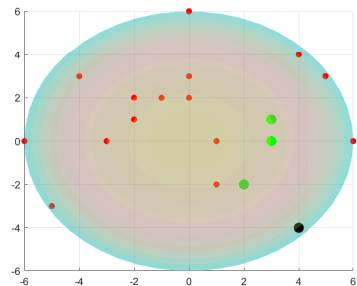


Рис. 1. Сфера с первоначальным набором точек и одной «опасной».

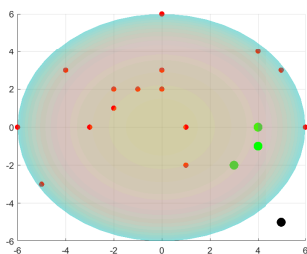


Рис. 2. Сфера с набором точек после применения алгоритма.

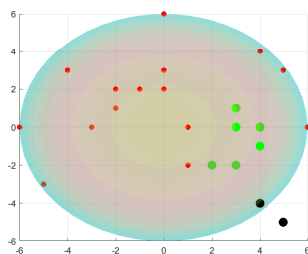


Рис. 3. Сфера с полным набором точек.

методу наименьших квадратов. Для метода морфологической сшивки ошибка составила 1,14%, для метода наименьших квадратов — 1,9%.

Таблица 1. Результат работы алгоритма метода морфологической сшивки и метода наименьших квадратов (МНК) для «опасной» точки.

	координата X	координата Y	точность
метод сшивки	5	-5	99%
МНК	4	-7	97.8%

Вторая часть эксперимента производилась для совокупности точек, находящихся относительно далеко от центра и друг от друга, в этом случае погрешность в разы увеличилась. Для «опасной» точки точность уменьшилась на 27%. В связи с этим был предложен следующий подход: разбить объект на области с меньшими радиусами, произвести перерасчет для каждой из них и соединить данные об объекте. Этот подход показал ожидаемый результат, и точность составила 98,8%.

Выводы. В работе описан подход, а именно метод морфологической сшивки для идентификации подвижных частей конструкции в случае относительно небольшого радиуса окрестности в процессе деформации. Для относительно больших радиусов окрестности метод дает погрешность, недопустимую с постановкой проблемы, так как речь идет о деформации строительных конструкций и здесь важна точность. Важно заметить, что в этом случае можно использовать разбиение исходной конструкции на области с заданной точностью, а затем собрать все данные и найти «критические» зоны.

На данном этапе работы происходит модификация этого подхода и решаются следующие задачи:

- сохранение всей совокупности точек для деформируемого тела (результатов замеров);

- уменьшение погрешности работы алгоритма;
- разбиение сложных по структуре областей на окрестности с заданным радиусом для улучшения работы алгоритма.

Литература

- [1] Мустафин М. Г., Хатум Х. М. Оптимизация места расположения роботизированных станций наблюдений за деформациями зданий и сооружений // Геодезия и картография. 2020. Т. 81. № 9. С. 2–13.
- [2] Зубов А. В., Гусев В. Н., Елисеева Н. Н. Применение методов поисковой оптимизации при решении геодезических задач // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2020. Т. 64. № 5. С. 491–498.
- [3] Aghamohamadnia M., Abedini A. A morphology-stitching method to improve Landsat SLC-off images with stripes // Geodesy and Geodyoamics. 2014. Vol. 5(1). P. 27–33.
- [4] Zhang C., Li W., Travis D. Gaps-fill of SLC-off Landsat ETM plus satellite image using a geostatistical approach // International Journal of Remote Sensing. 2007. Vol. 28. P. 5103–5122.
- [5] Pringle M. J., Schmidt M., Muir J. S. Geostatistical interpolation of SLC-off Landsat ETM plus images // ISPRS Journal of Photo grauunetry and Remote Sensing. 2009. Vol. 64. P. 654–664.
- [6] Chen J., Zhu X. L., Vogelmann J. E. et al. A simple and effective method for filling gaps in Landsat ETM+ SLC-olf images // Remote Sensing of Environment. 2011. Vol. 115(4). P. 1053–1064.
- [7] Desai M., Ganatra A. Survey on gap filling in satellite images and inpainting algorithm // International Journal of Computer Theory and Engineering. 2012. Vol. 4. P. 341–345.
- [8] Hatoum H. M., Choker H. M., Mustafin M. G. Geodesic methods for modeling and protection of megalopolis objects // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 698. P. 044009.
- [9] Mustafin M., Bykasov D. Adjustment of Planned Surveying and Geodetic Networks Using Second-Order Nonlinear Programming Methods // Computation. 2021. Vol. 9. No. 12. P. 131.
- [10] Bykasov D. A., Zubov A. V., Mustafin M. G. Application of Newton’s method to solve optimization geodetic tasks // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 266.

Об аналитическом решении задачи о долговечности тороидальной оболочки под действием двусторонней механохимической коррозии

Ильин А.А.

st111425@student.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе рассмотрен вопрос получения аналитического решения задачи о двусторонней механохимической коррозии тороидальной оболочки. Оценены факторы, влияющие на места локализации максимальных напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки. Получены аналитические соотношения для долговечности тора, основанные на известных решениях для напряженного состояния тора. Определены пределы применимости предложенных зависимостей.

Ключевые слова: механохимическая коррозия, коррозионный износ, тороидальная оболочка, аналитическое решение.

Введение. Вопрос коррозионного изнашивания тороидальных оболочек при одновременном действии механических нагрузок и контактирующих с их поверхностью жидких сред является актуальным вследствие широкого применения изделий, имеющих форму тора, при проектировании технологических трубопроводов, турбин и двигателей летательных аппаратов.

Аналитические решения задач о долговечности цилиндрических и сферических сосудов давления (предельных случаев тора) в условиях механохимической коррозии были получены в [1]–[4]; решений для общего случая торообразных оболочек в литературе не найдено. Вопрос коррозии торообразных оболочек рассматривался в работе [5], где долговечность тора при односторонней коррозии оценивалась численно, с использованием конечно-элементных (КЭ) расчетов. Получение аналитического решения для долговечности тороидальной оболочки сопряжено с трудностями, вызванными отсутствием точного аналитического решения для напряженного состояния толстостенного тора. Однако существует ряд приближенных решений [6]–[9], позволяющих оценить напряжения на внутренней и внешней сторонах тороидальной оболочки. Данная работа посвящена аналитической оценке долговечности тороидальной оболочки, находящейся под действием механохимической коррозии, а также оценке пределов применимости полученного решения.

Постановка задачи. Рассматривается тороидальная оболочка с внутренним радиусом r_i , наружным радиусом r_o и радиусом окружности тора R (рисунок 1). Оболочка подвержена действию внутреннего p_i и наружного p_o давлений, а также двустороннему действию механохимической коррозии.

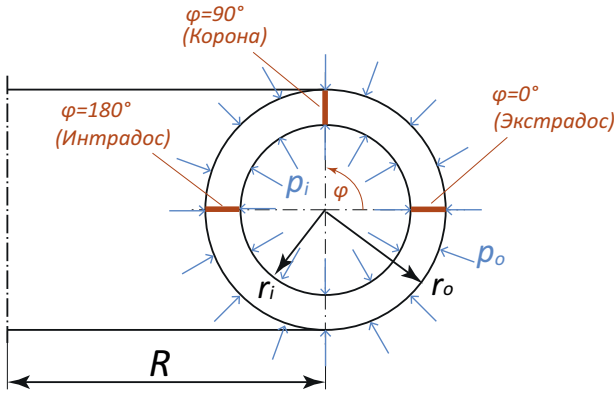


Рис. 1. Геометрия тороидальной оболочки.

Уравнения коррозионной кинетики на внутренней и внешней поверхностях оболочки можно записать в виде [3]:

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = a_i + m_i \sigma_i; \quad v_o = -\frac{dr_o}{dt} = a_o + m_o \sigma_o \quad (1)$$

где σ_i и σ_o — максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения на внутренней и внешней поверхностях оболочки соответственно; a_i , m_i , a_o , m_o — эмпирически определяемые константы коррозионной кинетики.

Решение. Из формул (1) видно, что долговечность корродирующей оболочки будет определяться в точке, в которой наблюдаются максимальные напряжения. В работе [5] показано, что для тороидальной оболочки максимальными напряжениями являются окружные напряжения σ_φ . Поэтому сначала необходимо исследовать вопрос о локализации максимальных напряжений.

На рисунке 2 представлены зависимости окружных напряжений, возникающих в поперечном сечении тороидальной оболочки, от координаты φ . Зависимости построены при помощи численного КЭ моделирования и при помощи аналитического решения по мембранной теории [7].

Из графиков видно, что характер распределения напряжений по сечению тора различен на внутренней и внешней поверхностях. Кроме этого, в зависимости от типоразмеров тороидальной оболочки максимальные напряжения на внешней поверхности могут наблюдаться не только в интрадосе, но и вблизи короны тора. При одновременном действии внешнего и внутреннего давления, напряжения уменьшаются, и могут принимать отрицательные значения. Следовательно, координата точки, в которой возникают максимальные по модулю окружные напряжения, зависит как от типоразмеров тора, так и от условий

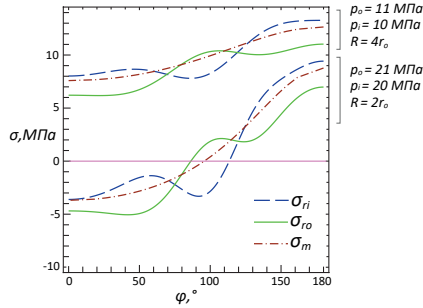


Рис. 2. Распределение напряжений по сечению тороидальной оболочки. Штрих-пунктирная линия — «мембранное» решение [7], штриховая и сплошная линии — КЭ решения на внутренней (синяя) и внешней (зеленая) поверхности тора соответственно.

его нагружения. При $p_o = 0$, максимальные напряжения в оболочке будут наблюдаться в интрадосе на внутренней поверхности тора. При двустороннем нагружении давлением максимальными по модулю напряжениями в ряде случаев могут оказаться минимальные напряжения на внешней поверхности. Учет вышеописанных фактов играет решающее значение при анализе долговечности тороидальной оболочки.

Даже только для случаев, когда напряжения достигают максимума в интрадосе, необходимо найти явные выражения для этих напряжений. Решения [8, 9] для этих целей не подходят. На рисунке 3 напряжения в интрадосе (на внешней и внутренней поверхностях), построенные на основе решений [7] и [6], сопоставляются с КЭ решением.

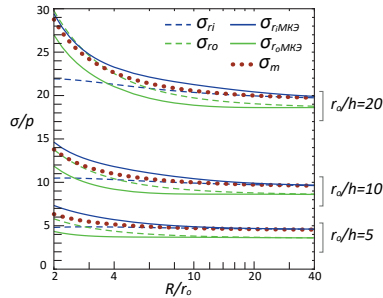


Рис. 3. Зависимость напряжений в интрадосе тора (на внутренней и внешней поверхностях) от величины R . Сплошные линии — КЭ решение, штриховые линии — решение [6], точечная линия — решение [7].

Из сопоставления зависимостей видно, что существующие решения имеют ограниченные пределы применимости.

В работе получено приближенное аналитическое решение для долговечности тороидальной оболочки и определены диапазоны его применимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 21-19-00100, <https://rscf.ru/project/21-19-00100/>.

Литература

- [1] Пронина Ю. Г. Механохимическая коррозия полого цилиндра из идеального упруго-пластического материала под действием постоянного давления // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2006. № 3. С. 121–130.
- [2] Пронина Ю. Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестник С.-Петербург. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. С. 55–63.
- [3] Пронина Ю. Г. Равномерная механохимическая коррозия полой сферы из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 1. С. 113–122.
- [4] Пронина Ю. Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 129–135.
- [5] Ilyin A., Pronina Y. Internal stress-assisted corrosion of a toroidal shell under pressure // Procedia Structural Integrity. 2023. Vol. 47. P. 290–295. doi: 10.1016/j.prostr.2023.07.096
- [6] Kornecki A. Stress distribution in a pressurised thick walled toroidal shell // College of Aeronautics Cranfield. 1963. P. 1–14.
- [7] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / пер. с англ. М.: Наука, 1966. 635 с.
- [8] Lang H. A. Toroidal elastic stress fields for pressurized elbows and pipe bends // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 1984. Vol. 15. Iss. 4. P. 291–305. doi: 10.1016/0308-0161(84)90013-9
- [9] Redekop D. A displacement solution in toroidal elasticity // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 1992. Vol. 51. Iss. 2. P. 189–209. doi: 10.1016/0308-0161(92)90080-Y

Математическая корректировка решения задачи А.И. Лурье о цилиндрической оболочке с отверстием, поставленной в 1946 году

Кацтанова С.В.,^{1,2} Ржонсницкий А.В.¹

kastasya@yandex.ru, rzhonsnitskiy@yandex.ru

¹Санкт-Петербургский технологический государственный институт (технический университет),

199013, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московский пр., 24–26,

²Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

Аннотация. В настоящей работе авторы представляют результаты вычислений поля напряжений цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием и находящейся под воздействием одноосного растяжения вдоль оси цилиндра. Данная задача была поставлена в 1946 году, к ее решению был оживленный интерес в течение 20 лет как советских, так и западных ученых, однако корректно решить в данной постановке ее так и не удалось. Авторы поняли причину, ввиду которой не удается реализовать решение и предложили альтернативный подход.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка с отверстием, линейная теория упругости, функции Бесселя.

Введение. В 1946 году в журнале Прикладная математика и механика АН СССР вышла статья А.И. Лурье [1], в которой автор, основываясь на приближенных уравнениях теории цилиндрической оболочки, ставит задачу для нахождения концентрации напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. Приближения основаны на пренебрежении перемещениями u и v в срединной поверхности при вычислении изменений кривизны и кручения оболочки, которые выражаются только через радиальную составляющую w перемещения. Таким образом задача сводится к поиску потенциала Φ в уравнении

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где $\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU$.

Все введенные обозначения вынесены в отдельный раздел в конце работы, однако стоит обратить внимание на главного героя данной задачи, из-за которого метод решения, предложенный классиком и его последователями не дал достигнуть конечной цели, а именно на параметр

$$\beta^2 = \frac{r_0^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh},$$

являющегося отношением геометрических характеристик таких как радиус отверстия, радиус и толщина цилиндрической оболочки.

Постановка задачи. Рассматривается цилиндрическая оболочка радиусом R и толщиной h с круговым отверстием r_0 под действием p , растягиваемой вдоль оси цилиндра. Цель — найти поле напряжений, возникаемое ввиду ослабления отверстием и действием внешней силы. Математическая постановка имеет следующие уравнение и граничные условия:

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0,$$

- на бесконечности $T_x = p$, $T_{xy} = 0$, $T_y = 0$, $w = 0$;
- на границе отверстия в полярных координатах (r, θ) — свободный край

$$T_{rr}\Big|_{r=r_0} = 0, \quad T_{r\theta}\Big|_{r=r_0} = 0, \quad M_r\Big|_{r=r_0} = 0, \quad Q_r\Big|_{r=r_0} = 0.$$

Здесь где $\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU$, а связь функции U с тензором напряжений T задается соотношением:

$$\begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$\sigma = T/h$ — срединное поверхностное напряжение.

Методы решения. Для решения данной задачи необходимо найти коэффициенты в разложении решения в сумму базисных функций, при которых это решение удовлетворяет граничным условиям. Также это уравнение зависит от параметра β . С механической точки зрения для малых и средних отверстий этот параметр имеет ограничения $\beta \leq 4$, т.к. при больших значениях отверстие считается слишком большим, и для описания напряженно-деформированного состояния применяются общие уравнения теории цилиндрических оболочек. Метод, которые предложил А.И. Лурье, а за ним эту идею активно развивали ученые в 1950-е и 1960-е, — это метод разложения по малому параметру β . Но данный подход сразу резко ограничивает область применения, т.е. решение может работать только при очень малых значениях параметра β , где по сути можно пользоваться известным решением Кирша.

Авторы настоящей работы предложили разложить базисные функции решения в ряды Фурье и разделить переменные [2, 3, 4]. Это позволило впервые

получить бесконечную линейную систему для поиска неизвестных коэффициентов. Затем найти и исключить линейно зависимое уравнение и после некоторой замены переменных доказать редуцируемость системы [5]. Этот метод позволяет получить результаты для любых механически допустимых β .

На конференции в устном докладе автор изложит подробности альтернативного решения и анализ данного подхода.

Обозначения. В работе приняты следующие обозначения:

E	—	модуль Юнга;
ν	—	коэффициент Пуассона;
R, h	—	радиус и толщина цилиндрической оболочки;
x	—	ось, параллельная главной оси цилиндра;
p	—	растягивающая нагрузка вдоль оси x ;
U	—	функция напряжений;
r_0	—	радиус отверстия;
w	—	прогиб;
T_x, T_{xy}, T_y	—	силы, действующие в оболочке.

Литература

- [1] Лурье А. И. Концентрации напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // ПММ АН СССР. 1946. Т. 10. № 3. С. 397–406.
- [2] Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V., Gruzdkov A. A. On the Issue of Analytical Derivation of Stress State in a Cylindrical Shell with a Circular Hole under Axial Tension // Materials Physics and Mechanics. 2021. Vol. 47. P. 186–195.
- [3] Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В. Аналитический подход к выводу поля напряжений цилиндрической оболочки с круговым отверстием при растяжении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 2. С. 64–75. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.07>
- [4] Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В. Сравнение аналитического и численного решений задачи о цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием различных нагрузок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. С. 1–11. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-inactive-1-11>
- [5] Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. Investigation of Systems of the Stress Field Problem of a Cylindrical Shell with a Circular Cutout under Various Boundary Conditions // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (BMSE). 2022. Vol. 44. No. 6. P. 259.

Асимптотический метод в задаче об эллиптическом погранслое в тонких оболочках при ударных поверхностных воздействиях нормального типа

Кириллова И.В.

iv@info.sgu.ru

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,
410012, Российская Федерация, Саратов, Астраханская, 83

Аннотация. На примере оболочек вращения строится аналитический метод решения краевых задач для эллиптического погранслоя при ударных поверхностных воздействиях нормального типа. Применение метода экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа по времени позволяет выразить искомое решение через соответствующее решение для оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны, построенное при использовании двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной переменной.

Ключевые слова: эллиптический погранслоем, оболочка вращения, интегральное преобразование Лапласа, интегральное преобразование Фурье.

Введение. Эллиптический погранслоем возникает в оболочках, в соответствии с классификацией У.К. Нигула [1, 2] при ударных воздействиях нормального типа NW в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. В работах [3, 4] построены асимптотически оптимальные уравнения рассматриваемого погранслоя. Свойства данного погранслоя основываются на анализе дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости в классической задаче Лэмба [5]. В случае цилиндрической оболочки в [3] решение получено на базе использования интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. В настоящей работе предлагается новый асимптотический метод решения искомых уравнений, основанный на использовании экспоненциального представления изображений в пространстве интегрального преобразования Лапласа по временной переменной.

Постановка задачи. Обозначим через α — длину дуги вдоль образующей, θ — угол в окружном направлении, z — длину вдоль нормали к срединной поверхности оболочки вращения. Обозначим также через σ_{ij} и v_{ij} напряжения и перемещения оболочки. Рассматриваем осесимметричное напряженно-деформированное состояние (НДС).

Пусть на лицевые поверхности оболочки действует давление

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, t), \quad \sigma_{13} = 0, \quad z = \pm h, \quad (1)$$

где h — полутолщина оболочки, t — время. Начальные условия однородны:

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \quad (2)$$

При таких граничных условиях (1) каждая лицевая поверхность инициирует волны, переотражаемые затем обеими поверхностями. Для наглядности описания разработанного асимптотического метода решения краевой задачи для рассматриваемого погранслоя ограничимся рассмотрением волны, инициированной поверхностью $z = -h$. Используя потенциальные функции φ , ψ , выпишем [4] разрешающие уравнения в безразмерных переменных $\zeta = z/h$, $\xi = \alpha/h$, $\tau = c_2 t/h$ (c_2 — скорость волны сдвига). Тогда разрешающие уравнения для потенциальных функций записываются в виде

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} &= 0, \\ b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и являются уравнениями эллиптического типа, где $a = \sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}$, $b = \sqrt{1 - \varkappa_R^2}$, $\varkappa^2 = c_1/c_2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$, $\varkappa_R = c_R/c_2$, c_1 и c_R — скорости волн расширения и волн Рэлея, ν — коэффициент Пуассона. Уравнения (3) решаются при следующих граничных условиях на лицевой поверхности $\zeta = -1$, представляемых граничными условиями (1) в потенциальных функциях:

$$\begin{aligned} \varkappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \frac{(1 + \nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} P, \\ \left(a^2 + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \\ + \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В системе (4) первое уравнение является базовым, гиперболического типа относительно потенциальной функции ψ . Приняты обозначения: E — модуль Юнга, $\varepsilon = h/R$ — малый параметр тонкостенности оболочки, R — характерное значение радиусов кривизны, B — расстояние до оси вращения. Постоянные g , k_c , B_ω определяются выражениями

$$g = 1 - \varkappa_R^2/2, \quad B_\omega = 2 \left[\frac{\varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2} + \frac{\varkappa \varkappa_R}{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2} - \frac{4\varkappa_R}{2 - \varkappa_R^2} \right]^{-1}, \quad k_c = 2 + \varkappa_R B_\omega. \quad (5)$$

Исследование показывает, что наиболее характерным для рассматриваемого типа погранслоя является поведение нормального напряжения σ_{33} , которое выражается через потенциальные функции следующим образом:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[\left(g + \frac{\alpha_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \left(b + \frac{\alpha_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right]. \quad (6)$$

Конкретизируем вид ударного воздействия $P(\alpha, t)$:

$$P = pH(L \mp \alpha)H(t), \quad \alpha \geq 0, \quad (7)$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, $2L$ — ширина кольца нагрузки на поверхности.

Асимптотическое решение. В рассматриваемом общем случае оболочек вращения разрешающие уравнения имеют переменные коэффициенты. Однако в асимптотически главной части этих уравнений коэффициенты постоянны и она совпадает с соответствующими уравнениями для цилиндрической оболочки, а переменные коэффициенты являются при этом медленно изменяющимися по продольной координате. Следовательно, асимптотика решения для общего случая оболочек вращения должна быть связана с решением для цилиндрической оболочки.

В общем случае оболочек вращения решения можно получить методом экспоненциальных представлений. Тогда решение для изображения по Лапласу потенциальной функции на границе $\psi_0 = \psi$, $\zeta = -1$ имеет вид

$$\xi_0 \leq L : \psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\alpha_R B_\omega}{b} p \frac{1}{s^3} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B(L)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{\frac{\xi_0-L}{\alpha_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0+L}{\alpha_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L : \psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\alpha_R B_\omega}{2b} p \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{-\frac{\xi_0-L}{\alpha_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0+L}{\alpha_R \varepsilon} s} \right), \quad (8)$$

где $k_r = k_c/2\alpha_R^2$, s — параметр преобразования Лапласа.

Поскольку нашей задачей является определение асимптотики решения только в малых окрестностях условных фронтов Рэлея, то из (8) следует асимптотическое представление искомого граничного значения изображения функции ψ_0 :

$$\psi_0^L = \left(\frac{B(L)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \psi_{0,c}^L. \quad (9)$$

Представление (9) позволяет определить изображения потенциалов φ , ψ в основной области. Анализ разрешающей системы (3)–(4), вместе с выражением (6) показывает, что только первое уравнение из граничных условий (4) определяет в асимптотически главной части волновой оператор, определяющий распространение поверхностных волн Рэлея. В этом случае учитывать величины нулевого и первого порядка малости нужно только в этом уравнении, а в остальных уравнениях достаточно учитывать только асимптотически главные составляющие. Следовательно, аналогично выражению (9), изображения всех компонент НДС могут выражены через соответствующие компоненты для цилиндрической оболочки. Используя решение задачи об эллиптическом погранслое в цилиндрической оболочке [4], получаем для нашего общего случая следующее решение для нормального напряжения:

$$\sigma_{33} = \frac{B_{\omega p}}{2\pi \varkappa_R} \left[\frac{B(L)}{B(\xi_0)} \right]^{k_r} \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{2La(\zeta + 1)}{a^2(\zeta + 1)^2 - L^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2Lb(\zeta + 1)}{b^2(\zeta + 1)^2 - L^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) \right]. \quad (10)$$

Литература

- [1] Nigul U.K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *Int. J. Solids Structures*. 1969. Vol. 5. Issue 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
- [2] Нигул У.К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 308–332.
- [3] Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2017. Т. 4. № 1. С. 113–120.
- [4] Коссович Л.Ю., Кириллова И.В. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких оболочках // *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia. 2010. P. 321–325.
- [5] Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 395. № 4. С. 482–484.

Низкочастотные колебания круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой кольцевыми пластинами

Козлова А.С., Филиппов С.Б.

st076954@student.spbu.ru, s_b_filippov@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. С помощью асимптотических и численных методов найдены низшие частоты и формы колебаний тонкой упругой замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами. В качестве механической модели шпангоута используется кольцевая пластина. Для анализа основных типов колебаний, соответствующих узким и широким пластинам, разработаны два разных асимптотических подхода. Для узких пластин в первом приближении получена задача о колебаниях балки, подкреплённой пружинами. В случае достаточно широких пластин краевая задача сводится к задаче о колебаниях кольцевой пластины с условиями жесткой заделки прикрепленного к оболочке края. Результаты, полученные с помощью приближенных асимптотических формул, согласуются с результатами, найденными методом конечных элементов.

Ключевые слова: подкреплённая цилиндрическая оболочка, кольцевая пластина, колебания, асимптотический метод.

Подкреплённые шпангоутами цилиндрические оболочки широко используются в различных отраслях современной техники. В большинстве работ, посвященных теории колебаний подкреплённых оболочек, шпангоуты рассматриваются как круговые стержни [1]. Такой подход оправдан, если размеры поперечного сечения шпангоута не сильно отличаются друг от друга. При выборе в качестве модели шпангоута кольцевой пластины, такому шпангоуту соответствует узкая пластина. Форма низкочастотных колебаний цилиндрической оболочки, подкреплённой узкими пластинами, аналогична форме колебаний гладкой оболочки, при которой на поверхности оболочки образуется множество вмятин, вытянутых вдоль образующей цилиндра.

При увеличении высоты шпангоутов эта форма колебаний сменяется формой колебаний локализованной на шпангоутах. В этом случае чтобы найти частоты и формы колебаний необходимо рассматривать шпангоут как широкую кольцевую пластину.

Предполагается, что круговая цилиндрическая оболочка подкреплена по параллелям одинаковыми кольцевыми пластинами. Рассматривается расположение пластин как снаружи [2], так и внутри [3] оболочки. Для определения частот и форм колебаний такой конструкции необходимо решить краевую задачу на собственные значения для систем уравнений, описывающих колебания ци-

лиندрической оболочки и кольцевых пластин с учетом условий сопряжения на подкрепленных параллелях и граничных условий на краях оболочки и пластин.

В уравнениях оболочки содержится ее безразмерная толщина, которая является малым параметром. Это позволяет найти решение краевой задачи с помощью асимптотических методов [4]. И для узких и для широких пластин решение представляется в виде суммы основного состояния и функций краевого эффекта. Для узких пластин основное состояние является полубезмоментным, а для широких пластин — безмоментным. Первое приближение к решению дает краевая задача для основного состояния. При асимптотическом анализе колебаний подкрепленной оболочки одной из главных проблем является определение граничных условий для этой краевой задачи.

В случае узких пластин задача первого приближения оказывается аналогичной задаче о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Для широких пластин после подстановки приближенных решений в условия сопряжения и граничные условия краевая задача в первом приближении распадается на несколько независимых задач. Основной является задача о колебаниях кольцевой пластины со свободным краем и жестко заделанным краем, прикрепленным к оболочке. Решения остальных задач вносят незначительный вклад в форму колебаний.

Определение частот колебаний кольцевой пластины сводится к решению уравнения, коэффициенты которого зависят от функции Бесселя. В том случае, когда ширина пластины мала по сравнению с радиусом оболочки, с помощью метода возмущений получены простые приближенные формулы для определения корней этого уравнения. В качестве примера рассмотрены колебания оболочки, подкрепленной одной пластиной.

Использование асимптотических методов для решения задачи о свободных низкочастотных колебаниях цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами, позволило получить простые приближенные формулы для вычисления частот и форм колебаний. В случае узких пластин число волн по параллели оболочки m велико, а частоты возрастают с увеличением ширины пластины b . Для широких пластин низшей частоте соответствует $m = 0$ и она быстро убывает при увеличении b . При подкреплении оболочки пластинами одинаковой ширины частоты ее колебаний в случае внутреннего подкрепления будут выше частот при ее внешнем подкреплении.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

Литература

- [1] Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1999. 196 с.

- [2] Filippov S. B. Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates // Analysis of Shells, Plates, and Beams — A State of the Art Report, Springer's Series Advanced Structured Materials. 2020. Vol. 123. P. 123–140. doi: 10.1007/978-3-030-47491-1_7
- [3] Филиппов С. Б., Козлова А. С. Асимптотический анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24. Вып. 1. С. 138–149.
- [4] Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва: Наука, 1979. 384 с.

Инденитрование круговой высокоэластичной мембраны шаровым инденитором

Колесников А. М.,^{1,2} *Анесян В. М.*¹

Alexey.M.Kolesnikov@gmail.com, vanesyan@sfedu.ru

¹Южный федеральный университет,

344090, Российская Федерация, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а,

²Донской государственный технический университет,

344000, Российская Федерация, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

Аннотация. В данной работе моделируется квазистатический процесс инденитрования круговой сплошной мембраны и мембраны с отверстием по центру с учётом трения и анализируется влияние трения и параметров материала на процесс инденитрования.

Ключевые слова: инденитрование, трение, нелинейно-упругая мембрана, высокоэластичный материал, эластомер.

Введение. Метод вдавливания (инденитрования) является одним из методов определения механических свойств. Различными авторами предлагается использовать данный метод для определения свойств высокоэластичных тонких плёнок [1]–[5]. Большинство методик применяются к круговым тонким сплошным образцам [1, 2, 4]. Некоторые авторы предлагают использовать круговые образцы с отверстием по центру [5]. При исследованиях обычно используется осесимметричная форма инденитора, в основном применяется шаровой инденитор. Так же исследуются задачи с цилиндрическим штампом с плоским или закруглённым концом. При математическом моделировании высокоэластичных тонких плёнок обычно используется теория нелинейно-упругих мембран.

Задачи инденитрования являются контактными задачами. При контакте резиноподобных материалов с другими материалами трение оказывает существенное влияние, как показано в работах [6]–[9] для задач инденитрования тонких высокоэластичных мембран. Однако большинство современных ме-

тодик определения механических свойств тонких плёнок при индентировании [1, 2, 4, 5] не учитывают трение при анализе.

Математическая модель. В работе будем исследовать тонкие мембраны, которые подвергаются большим растягивающим деформациям. Поэтому будем пренебрегать изгибной жёсткостью и напряжениями от изгиба и использовать теорию нелинейно-упругих мембран (безмоментных оболочек).

В отсчётной конфигурации мембрана является плоской тонкой пластинкой (круговой или кольцевой), которая закреплена по краю. Край пластинки может быть предварительно растянут. Мембрана прогибается под действием осесимметричного абсолютно твёрдого сферического штампа, перемещающегося перпендикулярно её плоскости по центру (рис. 1). Процесс индентирования будем рассматривать как квазистатический, рассматривая в каждый момент времени равновесное состояние системы. Мембрану можно разделить на две части. Одна часть контактирует со штампом, другая часть свободна от внешних воздействий. Контактное трение описываем с помощью закона Кулона в предельном случае.

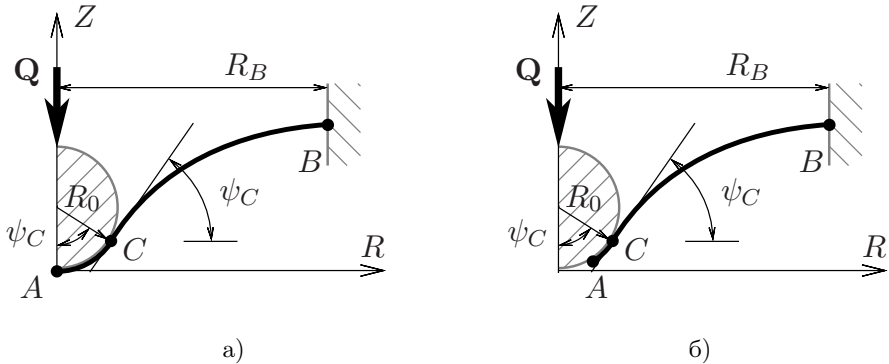


Рис. 1. Сечение мембраны при индентировании шаровым штампом а) сплошной, б) с отверстием в центре.

Задача статики упругой мембраны под действием штампа сводится к краевой задаче с параметром для двух систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование краевой задачи проведено методом пристрелки, на каждом шаге которой задачи Коши решаются методом Рунге–Кутты. Алгоритм пристрелки для краевой задачи с параметром реализован на языке *Python* с использованием функции *solve_ivp* для решения задачи Коши из библиотеки *SciPy*.

Результаты. При численном анализе использовалась модель материала Джента. Потенциальная энергия деформации имеет вид

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right).$$

Здесь I_1 — первый инвариант меры деформации Коши, μ и J_m — материальные параметры.

Для анализа удобно ввести безразмерную вдавливающую силу \tilde{Q} и относительное перемещение индентора $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{2\pi\mu hr_B}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{Z_B}{R_0} - (1 - \cos \psi_{A0}), \quad \psi_{A0} = \arcsin \frac{R_{A0}}{R_0}.$$

Здесь r_B — начальный внешний радиус мембраны, h — начальная толщина, Z_B — максимальный прогиб, R_{A0} — радиус отверстия по центру мембраны до индентирования. Если мембрана сплошная, то $R_{A0} = 0$. Если мембрана с отверстием и предварительно не растянута, то R_{A0} равно радиусу отверстия. Если предварительное растяжение существует, то R_{A0} определяется из решения задачи о радиальном растяжении кольцевой мембраны.

На рис. 2 представлены зависимости вдавливающей силы \tilde{Q} от перемещения индентора $\tilde{\Delta}$. Чёрные сплошные линии соответствуют параметру $J_m = 50$, серые точечные линии соответствуют $J_m = 1000$. На рис. 2(а) и (в) показаны результаты для сплошной мембраны при радиусе индентора $R_0 = 0.2$ и $R_0 = 0.4$, соответственно. На рис. 2(б) и (г) показаны результаты для мембраны с отверстием радиуса $r_A = 0.1$ при радиусе индентора $R_0 = 0.2$ и $R_0 = 0.4$, соответственно.

Как видно из результатов моделирования трение оказывает существенное влияние на процесс индентирования и его необходимо учитывать при обработке экспериментальных данных и математическом моделировании. Особенностью индентирования мембраны с отверстием является малое влияние параметра материала J_m . Это обусловлено тем, что влияние параметра J_m проявляется при деформациях, для которых первый инвариант меры деформации Коши I_1 приближается к значению $J_m + 3$. В мембране с отверстием раскрытие отверстия ограничивает деформации мембраны от прогиба. Тогда как в сплошной мембране рост деформаций вследствие прогиба более значителен. Этот эффект может быть использован для определения механических свойств тонких плёнок из экспериментов по индентированию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-21-00125.

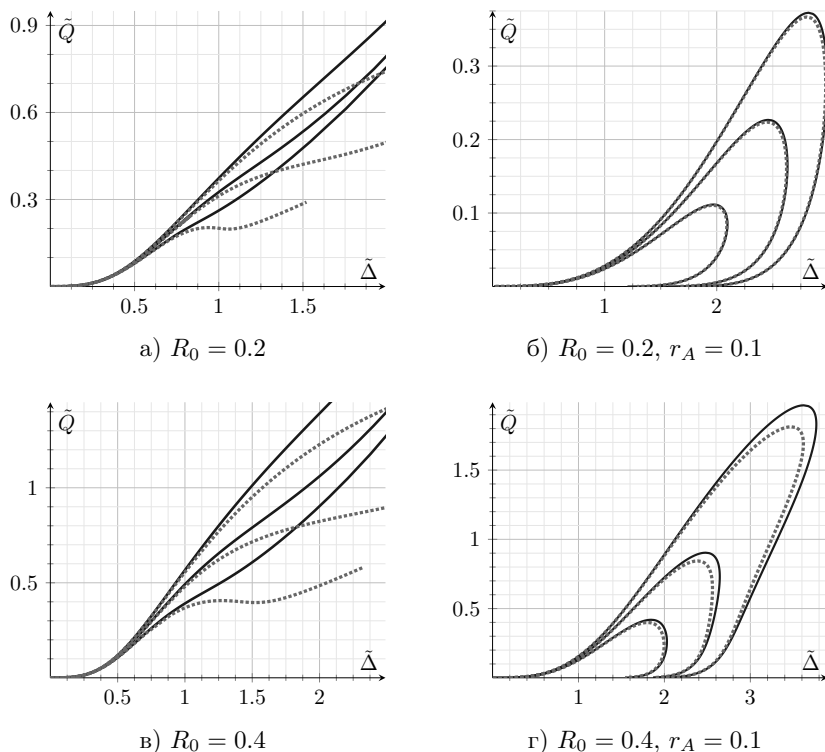


Рис. 2. Зависимость вдавливающей силы от перемещения штампа для а), в) сплошной мембраны, б), г) мембраны с отверстием в центре. Чёрная сплошная линия — $J_m = 50$, серая точечная линия — $J_m = 1000$.

Литература

- [1] Liu K.K., Ju B.F. A novel technique for mechanical characterization of thin elastomeric membrane // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2001. Vol. 34. No. 15. P. 91–94.
- [2] Cloonan A.J. et al. Spherical indentation of free-standing acellular extracellular matrix membranes // *Acta biomaterialia*. 2012. Vol. 8. No. 1. P. 262–273.
- [3] Vella D., Davidovitch B. Indentation metrology of clamped, ultra-thin elastic sheets // *Soft Matter*. 2017. Vol. 13. No. 11. P. 2264–2278.
- [4] Garnica-Palafox I.M., Álvarez-Camacho M., Sánchez-Arévalo F.M. Macro-and micromechanical responses of an elastomeric membrane undergoing biaxial tension by indentation // *Journal of Materials Science*. 2019. Vol. 54. No. 22. P. 14255–14274.

- [5] Zhu W. et al. A method to determine the constitutive parameters of hyperelastic films based on spherical indentation // *Journal of Applied Mechanics*. 2022. Vol. 89. No. 10. P. 101005.
- [6] Selvadurai A. P. S. Deflections of a rubber membrane // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 6. P. 1093–1119.
- [7] Liu J. et al. Puncture mechanics of soft elastomeric membrane with large deformation by rigid cylindrical indenter // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. Vol. 112. P. 458–471.
- [8] Kolesnikov A. M., Shatvorov N. M. Indentation of a circular hyperelastic membrane by a rigid cylinder // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 138. P. 103836.
- [9] Kolesnikov A. M. Ball indentation of perforated circular hyperelastic membranes // *Advanced Structured Materials*. In *Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev*. 2023. P. 389–400.

The influence of interfacial properties on stress concentration of nanopatterned interphase regions

Kostyrko S.,¹ *Grekov M.*,¹ *Altenbach H.*²

s.kostyrko@spbu.ru, m.grekov@spbu.ru, holm.altenbach@ovgu.edu

¹St. Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9,

²Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg,

39106, Germany, Magdeburg, Universitätsplatz, 2

Annotation. This study aims to explore the stress distribution near the nanopatterned interphase region of an isotropic heteroepitaxial material with a specific focus on the effect of the interface tension and misfit stresses in the context of different morphological and elastic properties. Employing the well-established Gurtin–Murdoch model of surface/interface elasticity, we construct a 2-D boundary value problem for a two-phase infinite plane with a curvilinear interface under plane strain conditions. On the basis of complex variable and boundary perturbation methods, we reduce the formulated problem to a recurrent sequence of integral equations, enabling us to derive asymptotic expressions for stress and strain tensor components represented in terms of trigonometric polynomials. Through the subsequent numerical analysis with a primary emphasis on the first-order approximation, we investigate the intertwined influence of interface morphology, elasticity, and tension on the stress distribution along the undulated interface, providing additional insights into the elastic behavior of the heteroepitaxial systems at the nanoscale.

Keywords: heteroepitaxial system, interface elasticity, interface tension, interface morphology, stress concentration, complex variable method, boundary perturbation method.

Given the widespread application of composite nanomaterials and multicomponent nanodevices, studies on the properties of interphase regions are increasingly

important. As the system becomes smaller, resulting in a larger proportion of a surface/interface area compared to its volume, the effect of the surface/interface energy becomes essential in governing its overall behavior. In the endeavor to bolster the reliability of nanodevices, there is a mounting necessity to acquire a detailed understanding of how the topological and physico-mechanical properties of interphase domains impact the mechanical behavior of heterogeneous materials.

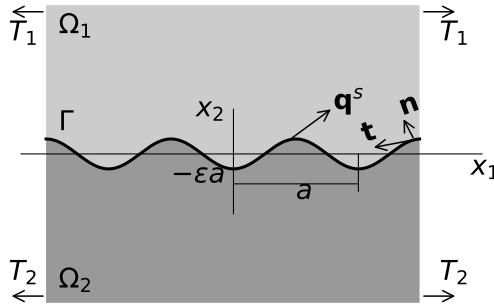


Fig. 1. A bimaterial elastic plane under the uniaxial tension.

Since interphase layers are usually extremely thin, typically only a few atomic layers thick, a zero-thickness interface model is commonly employed for practical considerations. Recently, there has been comprehensive adoption of continuum mechanics models incorporating interface elasticity to investigate the mechanical characteristics of composite nanomaterials. However, most of these studies have focused exclusively on planar interfaces, ignoring the potential impact of interface irregularities. Furthermore, residual stresses at interfaces are frequently disregarded in an existing literature. Nevertheless, there is an increasing realization of the role of an interface tension in determining the elastic behavior of heteroepitaxial materials at the nanoscale.

Consequently, this study broadens the scope of our previous models [1, 2, 3] to thoroughly examine how interface morphology, elasticity, and tension collectively impact the stress distribution in heteroepitaxial systems. By considering uniaxial loading of an isotropic bimaterial solid under plane strain conditions, we establish the 2-D boundary value problem for the two-phase infinite plane $\Omega_1 \cup \Omega_2$ defined by the complex variable $z = x_1 + ix_2$, where (x_1, x_2) represent the global Cartesian coordinates and i denotes the imaginary unit. The interphase region possesses elastic properties distinct from those of the bulk materials, and we model it as a zero-

thickness layer Γ ideally adhering to the bulk phases Ω_1 and Ω_2 :

$$\Gamma = \{z : z \equiv \zeta = x_1 + i\varepsilon f(x_1)\}, \quad (1)$$

$$\Omega_1 = \{z : x_2 > \varepsilon f(x_1)\}, \quad \Omega_2 = \{z : x_2 < \varepsilon f(x_1)\},$$

where the a -periodic function $f(x_1)$ defines the undulation of an interface profile, and $A = \varepsilon a$ is the maximum deviation of the interface from flat configuration, i. e. the plane $x_2 = 0$.

In the context of infinitesimal deformations, the problem formulation relies on the linearized constitutive equations for the interface, proposed by Gurtin and Murdoch, and the conventional equations of the linear elasticity theory for the bulk materials:

$$\sigma_{tt}^s(\zeta) = \sigma_0^s + (2\mu_s + \lambda_s)\varepsilon_{tt}^s(\zeta), \quad \sigma_{nt}^s(\zeta) = \sigma_0^s v^s(\zeta), \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^s(\zeta) = \sigma_0^s + (\lambda_s + \sigma_0^s)\varepsilon_{tt}^s(\zeta),$$

$$\varepsilon_{tt}^s(\zeta) = \operatorname{Re} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \zeta}, \quad v^s(\zeta) = -\operatorname{Im} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \zeta}, \quad \zeta \in \Gamma,$$

$$\sigma_{nn}(z) = (\lambda_j + 2\mu_j)\varepsilon_{nn}(z) + \lambda_j \varepsilon_{tt}(z), \quad (3)$$

$$\sigma_{tt}(z) = (\lambda_j + 2\mu_j)\varepsilon_{tt}(z) + \lambda_j \varepsilon_{nn}(z), \quad \sigma_{nt}(z) = 2\mu_j \varepsilon_{nt}(z),$$

$$\sigma_{33}(z) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} [\sigma_{tt}(z) + \sigma_{nn}(z)], \quad z \in \Omega_j, \quad j \in \{1, 2\},$$

where σ_{tt}^s , σ_{nt}^s , σ_{33}^s and ε_{tt}^s are the components of interface stress and strain tensors; σ_{tt} , σ_{nn} , σ_{nt} , σ_{33} and ε_{tt} , ε_{nn} , ε_{nt} are the components of bulk stress and strain tensors defined in the local Cartesian coordinates (n, t, x_3) ; \mathbf{n} and \mathbf{t} are the normal and tangential to the interface; $u = u_1 + iu_2$, u_1 and u_2 are the displacements along the corresponding axes x_1 and x_2 of the global Cartesian coordinate system; λ_s , μ_s and λ_j , μ_j are the interface and bulk Lamé constants, respectively, σ_0^s is the interface tension.

The static boundary conditions are represented in the form of generalized Young–Laplace equations related to the Gurtin–Murdoch model as

$$\Delta\sigma(\zeta) = \sigma^+(\zeta) - \sigma^-(\zeta) = q^s(\zeta), \quad \sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}, \quad \sigma^\pm(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta \pm i0} \sigma(z), \quad (4)$$

$$q^s(\zeta) = -\varkappa\sigma_0^s - \frac{\varkappa}{2} \left[p_s \frac{\partial u}{\partial \zeta} + m_s \overline{\frac{\partial u}{\partial \zeta}} \right] + \frac{1}{2h} \left[p_s(i - \varepsilon f') \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + m_s(i + \varepsilon f') \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}} \right],$$

where $p_s = M_s + \sigma_0^s$, $m_s = M_s - \sigma_0^s$, $M_s = \lambda_s + \mu_s$, \varkappa and h are the local principal curvature and metric coefficient on the curved interface Γ , respectively.

The kinematic boundary conditions determine the continuity of displacements across the interface region:

$$\Delta u(\zeta) = u^+(\zeta) - u^-(\zeta) = 0, \quad u^\pm(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta \pm i0} u(z). \quad (5)$$

We assume that the system is subjected to misfit stresses T_j resulting from a lattice mismatch between bulk materials, so the conditions at infinity are presented in the following form:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} (\sigma_{22} - i\sigma_{12}) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \omega = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{11} = T_j, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (6)$$

where $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) are the stresses in coordinates (x_1, x_2) and ω is the rotation angle.

To obtain the semi-analytical expressions for stress and strain tensor components while solving the boundary value problem (1)–(6), we employ the complex variable method. In this method, the traction σ at a given area with the normal \mathbf{n} and complex displacement u are related to the Goursat–Kolosov complex potentials. These complex potentials are evaluated based on the unknown function u , as the jump $\Delta\sigma$ at the interface depends on u (see Eq. (4)). Considering the undulation of the interface, we then derive asymptotic expressions for the complex potentials using the boundary perturbation method. By expressing the unknown functions as power series in a small parameter representing the amplitude-to-wavelength ratio of the interface undulation ε , the original boundary value problem is transformed into the series of integral equations for any-order approximation. Subsequently, we solve these integral equations in terms of trigonometric polynomials by leveraging the properties of Cauchy type integrals. Through numerical analysis, particularly focusing on the first-order approximation, we investigate how elastic stresses are distributed along the curved interface under the influence of both interface tension and mismatch stresses. This analysis allows us to explore the intertwined impact of interface morphology, elasticity, and tension on the behavior of considered heteroepitaxial system.

Acknowledgements. Kostyrko S. and Grekov M. acknowledge the support of the Russian Science Foundation under grant number 22-11-00087, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00087>.

References

- [1] Kostyrko S. A., Grekov M. A. Elastic field at a rugous interface of a bimaterial with surface effects // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 216. P. 106507.
- [2] Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Stress concentration analysis of nanosized thin film coating with rough interface // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019. Vol. 31. P. 1863–1871.
- [3] Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Coupled effect of curved surface and interface on stress state of wrinkled thin film coating at the nanoscale // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021. Vol. 101. P. e202000202.

Оптико-акустические исследования композитных магнитооптических плёнок (CoFeB+SiO₂)

Котов Л.Н.,¹ Судьенков Ю.В.,² Чертищева С.А.,² Ласёк М.П.¹

kotovln@mail.ru, y.sudenkov@yandex.ru, sveta041098@yandex.ru,

mplasek@yandex.ru

¹Сыктывкарский государственный университет,

167001, Российская Федерация, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55,

²Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе представлена разработанная экспериментальная методика оптико-акустических исследований магнитных и оптических свойств композитных материалов. Проведены эксперименты по возбуждению упругих и магнитных колебаний и волн в композитных плёнках (CoFeB+SiO₂), характеризующихся магнитной доменной структурой. Исследованы параметры и спектры акустических импульсов, возбуждаемых наносекундными лазерными импульсами в композитных плёнках. Приведены их зависимости от индукции постоянного магнитного поля в интервале 0 – 0.25 Тл.

Ключевые слова: акустические импульсы, лазерные импульсы, спектры акустических импульсов, магнитоупругое взаимодействие, композитные плёнки, метал-диэлектрик, магнитное поле.

Управление магнитным состоянием наносистем имеет большую важность, как в плане фундаментальной физики, так и в приложениях. Особенно это актуально для реализации сверхбыстродействующих, компактных и энергоэффективных устройств электроники и спинтроники [1, 2]. Среди явлений и устройств магнитоэлектроники можно выделить магнитоупругие явления

и устройства стрейнтроники, в которых магнитным состоянием наносистем управляют с помощью воздействия упругими импульсами [1]. Такие устройства отличаются высокими энергоэффективностью и скоростью.

Исследование механизмов магнитоупругих взаимодействий в магнитных материалах представляет собой большой интерес как в прикладных целях, так и в плане развития теоретических представлений в физике твёрдого тела.

Магнитоупругое взаимодействие обусловлено связью между магнитной (спиновой) и упругой (решёточной) подсистемами кристалла. Так как кристаллическая решётка связана со спинами магнетика в результате спин-орбитального взаимодействия, то изменение ориентации вектора намагниченности приводит к деформации кристаллической решётки, а значит и к изменению магнитной анизотропии. Этот эффект можно использовать для СВЧ магнитной записи информации в магнитных композитных плёнках при помощи акустических импульсов, возбуждённых лазерным импульсом. Исследованию процессов взаимодействия упругих импульсов с магнитной структурой композитных плёнок $[(\text{CoFeB})_{0.6} + (\text{SiO}_2)_{0.4}]$ с концентрацией металлического сплава $x = 0.6$ и посвящена данная статья.

Упругие импульсы возбуждались за счёт действия лазерного импульса с длительностью 1.5 нс и длиной волны $\lambda = 1064$ нм. На рис. 1 (а) представлена блок схема установки. Оптико-акустический эффект в магнестрикционных

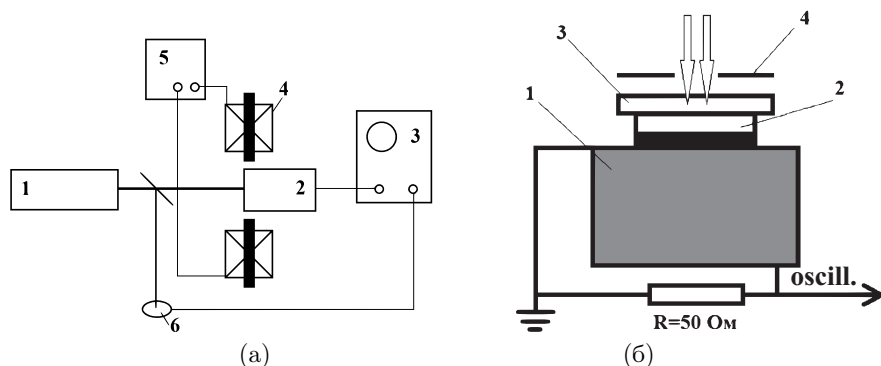


Рис. 1. Блок схема установки (а): лазер — 1, акустический приёмник — 2, осциллограф — 3, магнит — 4, блок питания электромагнита — 5, фотоприёмник — 6. Схема устройства акустического контроля (б): пьезокерамический элемент $\varnothing 20 \times 5$ мм — 1, образец с магнитной плёнкой — 2, оптическое стекло — 3, диафрагма $\varnothing 4$ мм — 4.

материалах исследовался с применением импульсного лазера с длительностью 1.5 нс, частотой повторения $f = 1$ Гц и длиной волны 1064 нм, либо с исполь-

зованием второй гармоники с длиной волны 532 нм [3, 4]. Плотность энергии облучения образцов в импульсе не превышала $E \leq 10^{-2}$ Дж/см².

Исследуемые образцы размещались в зазоре (30 мм) электромагнита с максимальной напряженностью магнитного поля 2.1 кЭ.

Импульс лазера направлялся на образец, находящийся в устройстве акустического контроля 2, схема которого приведена на рис. 1 (б). Образец 2 размещался на пьезокерамическом элементе 1 с обеспечением акустического контакта и прижимался оптическим стеклом 3. Область облучения ограничивалась диафрагмой 4 диаметром 4 мм. Акустические сигналы детектировались с помощью пьезокерамического преобразователя. Изменение магнитного поля электромагнита 4 могло осуществляться в интервале 0–0.2 Тл. Сигнал с устройства 2 регистрировался осциллографом 3 LECROY с шириной полосы пропускания $\Delta f = 600$ МГц. Синхронизация осциллографа осуществлялась сигналом фотоприемника 6.

На рис. 2 (а) приведены осциллограммы электрических импульсов, снимаемых с пьезопреобразователя (1) в отсутствие магнитного поля и в магнитном поле $B = 0.17$ Тл. В начале (выделено рамкой) наблюдается короткий акустический импульс, возбуждаемый лазерным импульсом в результате термоупругого эффекта в композитной плёнке $[(\text{CoFeB})_{0.6} + (\text{SiO}_2)_{0.4}]$. Далее наблюдается серия импульсов переотражённых на границе композитной и лавсановой плёнки.

Рост амплитуды и длительности акустического сигнала после момента времени $t \approx 5 \cdot 10^{-8}$ с также определяется термоупругой реакцией в лавсановой плёнке, за счет поглощённой в ней доли энергии излучения. На рис. 2 (б) показан выделенный на рис. 2(а) фрагмент с серией переотражённых импульсов в отсутствие магнитного поля и при магнитном поле $B = 0.17$ Тл. На рис. 2 (в) приведена зависимость амплитуды первого акустического импульса от величины магнитного поля. Амплитуда акустического импульса имеет максимум при величине магнитного поля $B \cong 0.013$ Тл. При этой величине поля в данной

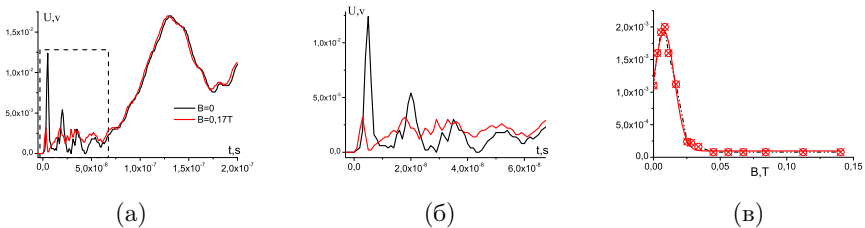


Рис. 2. Осциллограмма акустических сигналов, возбуждаемых в композитной плёнке лазерным импульсом в магнитном поле с индукцией $B = 0$ (чёрная кривая) и $B = 0.17$ Тл (красная кривая) — (а), выделенный фрагмент — (б), зависимость амплитуды первого импульса от магнитного поля — (в).

композитной плёнке возникает монодоменизация, приводящая к уменьшению потерь на возбуждении высокочастотных (ВЧ) колебаний магнитных доменов в плёнке $[(\text{CoFeB})_{0.6}+(\text{SiO}_2)_{0.4}]$.

На рис. 3 показаны зависимости спектральной мощности первого акустического импульса на частотах 55.5, 60 и 70.7 МГц, а также суммарная зависимость спектральной мощности акустических колебаний от магнитного поля. Наличие трёх достаточно близких спектральных максимумов обусловлено некоторым разбросом параметров полосовой магнитной структурой в результате ионно-лучевого напыления на лавсановый лист. Изменение суммарной мощности спектра акустических импульсов имеет спадающую зависимость подобную амплитудной зависимости, приведённой на рис. 2 (в).

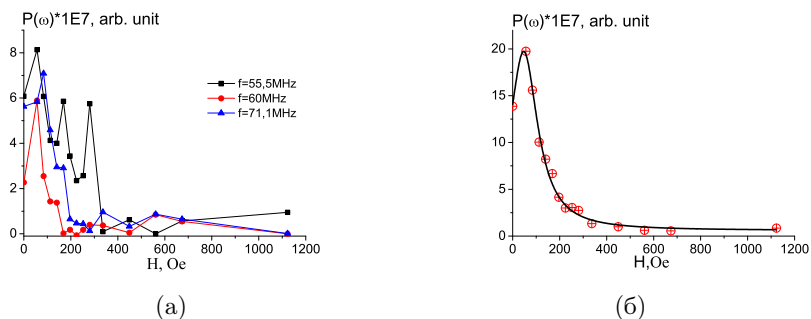


Рис. 3. Зависимость спектральной мощности первого акустического импульса от магнитного поля H на частотах (в МГц): 55.5, 60.0, 70.7 — (а); и суммарная зависимость спектральной мощности акустических колебаний от магнитного поля — (б).

В работе представлена экспериментальная методика оптико-акустических исследований магнитных, акустических и оптических свойств композитной плёнки $[(\text{CoFeB})_{0.6}+(\text{SiO}_2)_{0.4}]$. Разработаны экспериментальные методы возбуждения, детектирования и определения характеристик акустических импульсов, возбуждаемых импульсами наносекундного лазера. Проведены эксперименты по возбуждению упругих и магнитных колебаний и волн в композитных плёнках $(\text{CoFeB}+\text{SiO}_2)$, которые характеризуются магнитной доменной структурой. Исследованы параметры и спектры акустических импульсов, возбуждаемых в композитных плёнках, наносекундными лазерными импульсами в зависимости от напряженности постоянного магнитного поля в интервале 0 – 0.25 Тл. Анализ экспериментальных результатов зависимости спектральной мощности от магнитного поля и литературных данных [1]–[4] показывает перспективность применения спектрального анализа при исследованиях оптико-

акустического эффекта в тонких композитных магнитных плёнках на лавсановой подложке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-72-20048.

Литература

- [1] Власов В. С., Голов А. В., Котов Л. Н., Щеглов В. И., Ломоносов А. М., Темнов В. В. Современные проблемы сверхбыстрой магнитоакустики (обзор) // Физическая акустика. 2022. Т. 68. № 1. С. 22–56.
- [2] Котов Л. Н., Дианов М. Ю., Власов В. С. СВЧ переключение в магнитной и упругой подсистемах трехслойной магнитной структуры // Известия РАН. Серия физическая. 2023. Т. 87. № 4. С. 468–475.
- [3] Сарнацкий В. М., Судьенков Ю. В. Электромагнитное возбуждение звука и оптоакустический эффект в магнитоотрицательных материалах // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84. № 6. С. 819–823.
- [4] Зимин В. А., Свентицкая В. Е., Судьенков Ю. В. Анализ влияния процесса теплопереноса на термоупругий отклик металлов при импульсном лазерном воздействии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 63. № 1. С. 131–138.

Устойчивость армирующих слоев многослойных эластомерных шарниров

Малькова Ю. В.

y.malkova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Многослойные эластомерные элементы, состоящие из тонких чередующихся слоев резины и армирующего материала, обычно металла, широко применяются в различных отраслях современной техники и строительства. Проблема создания теории эластомерных шарниров и разработка методов их расчета имеет большое прикладное значение для ракетной техники. Управление движением ракеты осуществляется поворотом сопла, подвижно соединенного с камерой сгорания через сферические резинометаллические шарниры. Относительный поворот оснований шарнира может вызвать потерю устойчивости армирующих слоев. Целью работы является построение математической модели для определения критического значения момента на основаниях шарнира, при котором происходит потеря устойчивости.

Ключевые слова: многослойные эластомерные шарниры, устойчивость армирующих слоев.

Постановка задачи. В работе рассматривается шарнир ракетного двигателя, состоящий из нескольких слоев резины и металла. Шарнир подвергается большим внешним нагрузкам, которые складываются из внутреннего давления в камере сгорания, осевых сил и моментов. Предполагается, что давление и сила фиксированы, величина момента меняется. На поверхностях контакта заданы условия сопряжения.

Нелинейные уравнения деформации эластомерного слоя.

Занимаемую слоем область обозначим D , ее границу $\partial D = S^+ + S^- + \Gamma$, где S^+ и S^- — верхняя и нижняя лицевые поверхности, Γ — боковая поверхность.

Краевая задача имеет вид [1]:

$$\operatorname{div} \mathbf{S}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in D; \quad S^+ : \mathbf{u} = \mathbf{U}^+; \quad S^- : \mathbf{u} = \mathbf{U}^-; \quad (1)$$

$$\Gamma : \mathbf{s}_\nu = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{q}(x), \quad \mathbf{q}(x) = p\mathbf{v} \cdot J\mathbf{G}^{-1}, \quad \mathbf{v} \perp \Gamma,$$

где \mathbf{S} — тензор напряжений Пиолы, \mathbf{U}^+ и \mathbf{U}^- — перемещения лицевых поверхностей слоя S^+ и S^- , \mathbf{v} — вектор нормали к боковой поверхности Γ , p — величина нормального давления, \mathbf{u} — вектор перемещений точки тела, $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ — градиент деформации, J — кратность изменения объема. Векторы перемещений \mathbf{U}^+ и \mathbf{U}^- неизвестны, они определяются позже из условий сопряжения слоев шарнира.

Для описания упругих свойств эластомера используем модель Сен-Венана–Кирхгофа [2]:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}, \quad (2)$$

где λ , μ — постоянные Ляме, $\mathbf{E} = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ — тензор деформации Грина–Лагранжа. Уравнение равновесия (1) запишем через векторы номинальных (условных) напряжений и напряжения Пиолы–Кирхгофа

$$(H_2 \mathbf{s}_1)'_1 + (H_1 \mathbf{s}_2)'_2 + (H_1 H_2 \mathbf{s}_3)'_3 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$(H_2 \sigma_{1\beta} g_{\gamma\beta} \mathbf{e}_\gamma)'_1 + (H_1 \sigma_{2\beta} g_{\gamma\beta} \mathbf{e}_\gamma)'_2 + (H_1 H_2 \sigma_{3\beta} g_{\gamma\beta} \mathbf{e}_\gamma)'_3 = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$H_i = A_i(1 + zk_i)$ — коэффициенты Ляме.

Для вывода уравнений теории эластомерного слоя применим асимптотический метод. Слой считается тонким, а деформации его лицевых поверхностей малыми. Компоненты тензора деформации Грина–Лагранжа ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} малы, то есть порядка ε по сравнению с единицей, где ε — отношение характерных размеров слоя. Второе ограничение связано со свойствами материала эластомерных слоев. Для их изготовления используют малосжимаемый резиноподобный материал, коэффициент Пуассона которого ν близок к 0.5.

Решение уравнений (1) будем строить в виде рядов по малому параметру ε . Ограничимся построением нулевого приближения решения основного состо-

яния. В результате принятых гипотез трехмерная нелинейная краевая задача для эластомерного слоя сведена к решению уравнения для одной функции двух переменных с граничным условием $\lambda e = p$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} h^2 \operatorname{div}(k \nabla e) - e + \frac{1}{24} h^2 (k \nabla e)^2 = \\ & = -\frac{1}{h} (U_3^+ - U_3^-) - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{U}^+ + \mathbf{U}^-) - \frac{1}{2} \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)^2, \quad k = \frac{\lambda}{\lambda e + \mu}, \end{aligned}$$

h — толщина слоя, $e = \operatorname{tr} \mathbf{E}$.

Уравнения для определения устойчивости армирующих слоев. Примем, что нагрузка на шарнир зависит только от одного параметра, а именно моментов, действующих на основаниях шарнира. Наибольший интерес представляет критическая величина момента, приводящая к потере устойчивости армирующих слоев.

Учитывая формулы для параметров Ляме, проинтегрируем уравнение (3) по толщине слоя с весом 1 и z в пределах $-0.5h \leq z \leq 0.5h$,

$$(A_2 \mathbf{T}_1)'_1 + (A_1 \mathbf{T}_2)'_2 + A_1 A_2 \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$(A_2 \mathbf{M}_1)'_1 + (A_1 \mathbf{M}_2)'_2 + A_1 A_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{T}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{T}_2 + \mathbf{m}) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$A_2 \mathbf{T}_1 = \int H_2 \mathbf{s}_1 dz, \quad A_1 \mathbf{T}_2 = \int H_1 \mathbf{s}_2 dz,$$

$$A_2 \mathbf{M}_1 = \int H_2 \mathbf{s}_1 z dz, \quad A_1 \mathbf{M}_2 = \int H_1 \mathbf{s}_2 z dz;$$

$$A_1 A_2 \mathbf{q} = (H_1 H_2 \mathbf{s}_3)|_+^+, \quad A_1 A_2 \mathbf{m} = (H_1 H_2 z \mathbf{n} \times \mathbf{s}_3)|_+^+,$$

где $(\mathbf{s}_3)|_+^+$ — значения напряжений на лицевых поверхностях $z = \pm 0.5h$.

Шесть уравнений (5), (6) используются для нахождения шести неизвестных функций \mathbf{U}^+ и \mathbf{U}^- .

Нагрузка на тело зависит только от моментов, действующих на основания шарнира. В некоторых пределах увеличения параметра решение будет продолжать оставаться единственным и только по достижении параметром нагрузки некоторого критического значения появится возможность еще одной формы упругого равновесия. Представим перемещения в виде [3]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u}^1.$$

Здесь функции \mathbf{u}^0 описывают исходное состояние тела, которое удовлетворяет нелинейным уравнениям, а функции $\delta \mathbf{u}^1 = \delta u_\alpha^1 \mathbf{e}_\alpha$ есть дополнительные перемещения, которые нужно сообщить точкам тела, находящимся в первом (исход-

ном) положении равновесия, чтобы перевести их во второе (новое) положение равновесия. При этом функции \mathbf{u}^1 будем считать конечными, а коэффициент δ бесконечно малой, независимой от координат, величиной.

Выразим компоненты деформации, соответствующие второму положению равновесия, через компоненты деформации, отвечающие исходному положению равновесия и дополнительные перемещения. Упругие свойства материала армирующего слоя будем моделировать законом Гука (2). Имеем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \delta \mathbf{E}' + \delta^2 \mathbf{E}'', \quad \Sigma = \lambda \operatorname{tr} (\mathbf{E}^0 + \delta \mathbf{E}' + \delta^2 \mathbf{E}'') \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{E}^0 + \delta \mathbf{E}' + \delta^2 \mathbf{E}'').$$

В силу бесконечной малости параметра δ члены формул, содержащие его в квадрате, будут величинами второго порядка малости, поэтому они могут быть опущены.

Применим теперь ко второму из двух рассматриваемых положений тела уравнения равновесия объемного элемента (4). Для исходного равновесного положения тела эти уравнения тоже должны выполняться. Вычитая из одного уравнения другое приходим к системе однородных дифференциальных уравнений в векторной форме

$$[H_2(\bar{\sigma}_1^1 - \bar{\sigma}_1^o \times \bar{\omega}^1)]_1' + [H_1(\bar{\sigma}_2^1 - \bar{\sigma}_2^o \times \bar{\omega}^1)]_2' + [H_1 H_2(\bar{\sigma}_3^1 - \bar{\sigma}_3^o \times \bar{\omega}^1)]_3' = \mathbf{0}.$$

Вопрос нахождения критических нагрузок при заданных краевых условиях сводится к определению характеристических чисел системы, если исходное напряженное состояние относится к числу задач классической теории упругости.

Условия сопряжения резиновых и армирующих слоев.

Слои жестко соединены между собой, имеют постоянную свою толщину для каждого материала. Условия упругого сопряжения слоев формулируются в перемещениях (или деформациях) и напряжениях

$$\mathbf{U}_j^+ = \mathbf{U}_{j+1}^-, \quad \mathbf{U}_j^- = \mathbf{U}_{j-1}^+, \quad \bar{\sigma}_{3j}^+ + \bar{\sigma}_{3,j+1}^- = \mathbf{0}, \quad \bar{\sigma}_{3j}^- + \bar{\sigma}_{3,j-1}^+ = \mathbf{0},$$

($j = 1, 2, \dots, N$ — номера слоев). Перемещения лицевых поверхностей шарнира считаются заданными: $\mathbf{U}_N^+ = \mathbf{U}^+$, $\mathbf{U}_1^- = \mathbf{U}^-$.

Обычно внешняя нагрузка на шарнир передается через достаточно жесткие фланцы на основаниях пакета, тогда лицевые поверхности можно считать не деформируемыми. Перемещения этих поверхностей представимы в виде $\mathbf{U}^+ = \mathbf{a}^+ + \omega^+ \times \mathbf{r}^+$, $\mathbf{U}^- = \mathbf{a}^- + \omega^- \times \mathbf{r}^-$, где \mathbf{a} и ω — постоянные векторы поступательных перемещений и поворотов лицевых поверхностей, \mathbf{r}^+ и \mathbf{r}^- — радиус-векторы точек этих поверхностей с началом в центрах поворота.

Вместо параметров жесткого смещения \mathbf{a} и ω могут быть заданы действующие на основания многослойного пакета внешние силы и моменты.

Заключение. Построена математическая модель многослойного резинометаллического пакета. Предлагаемая модель является дискретной. Полная система нелинейных дифференциальных уравнений пакета содержит уравнения деформации отдельных резиновых и армирующих слоев, объединенных условиями сопряжения на поверхностях контакта. Для перехода к двумерным уравнениям используется асимптотический метод.

Литература

- [1] Мальков В. М. Механика многослойных эластомерных конструкций. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. 320 с.
- [2] Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 276 с.
- [3] Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ГИТТЛ, 1948. 211 с.

Асимптотическая модель свободных длинноволновых колебаний трехслойной пластины с высококонтрастными упругими свойствами

Михасев Г.И.,¹ Ле Н.Д.²

mikhasev@hit.edu.cn, dinhnguyen081017@gmail.com

¹Харбинский политехнический университет,
150001, Китайская Народная Республика, Харбин, ул. Вест Дажи, 92,

²Белорусский государственный университет,
220030, Республика Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4

Аннотация. Предлагается асимптотическая модель свободных низкочастотных колебаний упругой трехслойной пластины, у которой модуль Юнга внутреннего изотропного слоя много больше модулей упругости внешних изотропных слоев. С использованием асимптотического интегрирования трехмерных уравнений упругости по толщине пластины, предусматривающего удовлетворение граничных условий на свободных и интерфейсных поверхностях, выводятся соотношения для перемещений и напряжений как функций пространственных координат. Основным результатом является вывод асимптотически корректного уравнения движения типа Тимошенко–Рейсснера для эквивалентной однослойной пластины, которое учитывает наличие поперечных сдвигов в слоях с учетом контрастности их упругих свойств.

Ключевые слова: трехслойная пластина, контрастность упругих свойств, низкочастотные колебания, асимптотический метод, уравнения движения, сдвиги.

Введение. Двух- и трехслойные пластины, состоящие из слоев с высококонтрастными механическими свойствами, находят разнообразное применение в качестве тонкостенных элементов всевозможных инженерных и строительных конструкций, а также легких транспортных средств. К примеру, фотоэлектрические панели, оконные и лобовые стекла современных автомобилей, обычно изготавливаются как двух- либо трехслойные тонкие панели [1, 2], состоящие из стекла и более мягкого покрытия. Современные методы расчета слоистых пластин и оболочек, как правило, используют всевозможные модифицированные теории высших порядков, которые основаны на принятии каких-либо гипотез относительно распределения перемещений и/или напряжений по толщине слоев, либо всего пакета [3]. Погрешность подобных теорий априори заложена в принятии данных гипотез. В частности, использование моделей эквивалентных однослойных пластин (МЭОП) для исследования динамики слоистых пластин может приводить к весьма существенным погрешностям в случае высокой контрастности упругих констант составляющих слоев [4]. В работе [5] предложен метод асимптотического интегрирования трехмерных уравнений упругости для слоистых пластин с осреднением упругих констант слоев по толщине пакета, который приводит к более точным оценкам эффективной жесткости на изгиб [4], нежели подходы, основанные на использовании известных МЭОП. В статьях [6, 7] метод интегрирования уравнений упругости [5], но без процедуры осреднения упругих констант, использован для исследования динамики трехслойных балок, а также двухслойных пластин с высококонтрастными свойствами. Целью данной работы является развитие модели, предложенной в [7], для исследования свободных низкочастотных колебаний трехслойной пластины, у которой модуль Юнга внутреннего упругого слоя много больше модулей упругости внешних слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, у которой упругие слои с толщинами h_k характеризуется упругими константами Ламе λ_k, μ_k и плотностью материала ρ_k , где $k = 1, 2, 3$. Здесь и ниже индексами $k = 1, 3$ отмечены внешние «мягкие» слои, а индексом $k = 2$ — внутренний «жесткий» слой, для которых $\lambda_2, \mu_2 \gg \lambda_j, \mu_j (j = 1, 3)$. Введем три локальные системы координат $O_k x_k y_k z_k$, ассоциированные с каждым слоем, при этом, $0 \leq x_1 = x_2 = x_3 \leq L_1$, $0 \leq y_1 = y_2 = y_3 \leq L_2$ и $0 \leq z_k \leq h_k$.

Пусть $\varepsilon = h/L$ — безразмерный малый параметр, где $h = h_1 + h_2 + h_3$ — общая толщина пластины, а L — ее характерный размер в плоскости, либо длина волны. Следуя [6, 7], сделаем оценку упругих констант «мягких» внешних слоев относительно модуля Юнга E_2 внутреннего «жесткого» ядра: $E_j/E_2 = \varepsilon^2 \zeta_j$, где $\zeta_j \sim 1$, $j = 1, 3$ и E_1, E_3 — модули Юнга внешних слоев. Обозначим через $v_n^{(k)}$ компоненты вектора перемещений точек k -го слоя в плоскости, $v_3^{(k)}$ — нормальные перемещения, а $s_{lm}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений в k -м слое,

где $n = 1, 2$; $l, m, k = 1, 2, 3$. С целью исследовать свободные колебания с частотой ω выполним масштабирование безразмерных перемещений и напряжений, соответствующее длинноволновой деформации пластины [7]:

$$\left\{ v_n^{(k)}, v_3^{(k)}, s_{n3}^{(k)}, s_{33}^{(k)} \right\} = \left\{ \varepsilon^{-3} h u_n^{(k)}, \varepsilon^{-4} h w^{(k)}, \varepsilon^{-1} E_k \tau_n^{(k)}, E_k \sigma^{(k)} \right\} \sin \omega t, \quad (1)$$

а также введем безразмерные координаты

$$x_k = L \xi_1, \quad y_k = L \xi_2, \quad z_k = h_k \zeta_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Далее безразмерные перемещения $u_n^{(k)}$, $w^{(k)}$ и напряжения $\tau_n^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ будем рассматривать как главные функции координат, подлежащие определению. С учетом закона Гука для каждого изотропного слоя, уравнения для данных функций запишутся в безразмерном виде [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta_k} &= -\varepsilon^2 \varkappa_k c_v^{(k)} \sum_n u_{n,n}^{(k)} + \varepsilon^4 \varkappa_k c_3^{(k)} \sigma^{(k)}, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial \zeta_k} = -\varkappa_k w_{,n}^{(k)} + \varepsilon^2 \varkappa_k \hat{\mu}_k^{-1} \tau_n^{(k)}, \\ \frac{\partial \tau_n^{(k)}}{\partial \zeta_k} &= -\varkappa_k \left[c_0^{(k)} u_{n,nn}^{(k)} + \hat{\mu}_k u_{n,mm}^{(k)} + \hat{\mu}_k c_6^{(k)} u_{m,nm}^{(k)} \right] \\ &\quad - \varepsilon^2 \varkappa_k c_v^{(k)} \sigma_{,n}^{(k)} - \varepsilon^2 \omega^2 \eta_k u_n^{(k)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial \zeta_k} = -\varkappa_k \sum_n \tau_{,n}^{(k)} - \omega^2 \eta_k w^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3; \quad n, m = 1, 2; \quad n \neq m,$$

где $\varkappa_k = h_k/h$, $\eta_k = \varepsilon^{-4} E_k^{-1} \rho_k h_k h$, безразмерные постоянные $c_0^{(k)}$, $c_v^{(k)}$, $c_3^{(k)}$, $c_6^{(k)}$, $\hat{\mu}_k$ — суть функции упругих констант Ламе на каждом слое [6], а нижние индексы n и m , стоящие после запятой означают дифференцирование по ξ_n и ξ_m .

Граничные условия для напряжений $\tau_n^{(j)}$, $\sigma^{(j)}$ ($j = 1, 3$) на свободных поверхностях являются однородными. На интерфейсных поверхностях рассматриваем условия полного контакта, которые для напряжений принимают вид:

$$\begin{aligned} \tau_n^{(2)}|_{\zeta_2=0} &= \varepsilon^2 \zeta_1 \tau_n^{(1)}|_{\zeta_1=1}, \quad \tau_n^{(2)}|_{\zeta_2=1} = \varepsilon^2 \zeta_3 \tau_n^{(3)}|_{\zeta_3=0}, \quad n = 1, 2, \\ \sigma^{(2)}|_{\zeta_2=0} &= \varepsilon^2 \zeta_1 \sigma^{(1)}|_{\zeta_1=1}, \quad \sigma^{(2)}|_{\zeta_2=1} = \varepsilon^2 \zeta_3 \sigma^{(3)}|_{\zeta_3=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Асимптотическое интегрирование. Поставленная краевая задача решается методом асимптотического интегрирования уравнений (3) по координате ζ_k для каждого слоя с последующим удовлетворением гранич-

ных условий на поверхностях. Каждая из фигурирующих в (3) неизвестных функций находится в виде асимптотического ряда по степеням ε^2 . Например, $u_n^{(k)} = u_{n0}^{(k)} + \varepsilon^2 u_{n2}^{(k)} + \dots$. Заметим, что на данном этапе частота ω в ряд не раскладывается, поэтому граничные условия на краях, при наличии таковых, не рассматриваются. Подстановка асимптотических разложений разыскиваемых функций в (3), а также в граничные условия, порождает последовательность краевых задач. Процедура интегрирования данных задач в случае двухслойной пластины, возникающих в первых двух приближениях, детально описана в [7]. В нашем случае, ее реализация позволила получить в явном виде асимптотически корректные соотношения для перемещений и напряжений во всех слоях трехслойной пластины.

Модель эквивалентной однослойной пластины. С использованием полученных в явном виде формул для перемещений точек всех слоев, выведено дифференциальное уравнение

$$I\Delta^2 w_i - \omega^2 \mathbf{J} w_i + O(\varepsilon^4) = 0, \quad (5)$$

описывающее колебания интерфейсных поверхностей. Здесь

$$I = \frac{1}{12} \left[c_0^{(2)} \varkappa_2^3 + \varepsilon^2 \sum_{j=1,3} c_j c_0^{(j)} \varkappa_j (4\varkappa_j^2 + 6\varkappa_2 \varkappa_j + 3\varkappa_2^2) \right], \quad (6)$$

$$\mathbf{J} = \eta_2 + \varepsilon^2 \left[\varsigma_1 \eta_1 + \varsigma_3 \eta_3 - \varkappa_2^2 \eta_2 \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6^{(2)}}{12} \right) \Delta \right]$$

— безразмерная эффективная жесткость на изгиб и так называемый модифицированный оператор инерции [8], соответственно.

Уравнение (5) можно интерпретировать как модель типа Тимошенко–Рейсснера для эквивалентной однослойной пластины. Данное уравнение учитывает поперечные сдвиги в «жестком» слое, а также эффекты внешних «мягких» слоев.

Литература

- [1] Njuguna J. Lightweight composite structures in transport: design, manufacturing, analysis and performance. Sawston: Woodhead Publishing, 2016. 474 p.
- [2] Avmus M., Naumenko K., Altenbach H. A multiscale projection approach for the coupled global-local structural analysis of photovoltaic modules // Composite Structures. 2016. Vol. 158. P. 340–358.
- [3] Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. 2010. Vol. 93(1). P. 14–31.

- [4] Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E. Applicability ranges for four approaches to determination of bending stiffness of multilayer plates // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. Vol. 33. P. 1659–1673.
- [5] Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // *ZAMM*. 2017. Vol. 97(3). P. 296–308.
- [6] Mikhasev G., Botogova M., Le N. Flexural Deformations and Vibrations of a Three-Layer Beam-Strip with a Stiff Core and Soft Skins // *Progress in Continuum Mechanics (Advanced Structured Materials)*, edited by Altenbach H., Irschik H., Porubov A. V. Springer. 2023. Vol. 196. P. 265–282.
- [7] Mikhasev G. I. Asymptotic long-wave model for a high-contrast two-layered elastic plate // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 29(4). P. 776–795.
- [8] Kaplunov J., Kossovitch L. Nolde E. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. Cambridge, MA: Academic Press, 1998. 226 p.

Винтовые потенциалы гармонических волн в полуизотропных микрополярных средах

Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.

evmurashkin@gmail.com, y.radayev@gmail.com

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
119526, Российская Федерация, Москва, пр-т Вернадского, 101/1

Аннотация. Настоящая работа посвящена задачам распространения волн в полуизотропном цилиндрическом волноводе. Для исследования применяется метод винтовых потенциалов. Векторы трансляционных и спиновых перемещений представляются в виде суммы скалярного и винтового потенциала. Используемые разложения Гельмгольца позволяют развязать систему уравнений для скалярных и винтовых потенциалов. Вихревые составляющие трансляционных и спиновых перемещений представляются одним фундаментальным вихревым векторным потенциалом с различными масштабными факторами. Несвязанные винтовые уравнения для фундаментального вихревого потенциала в цилиндрической области исследованы с использованием стандартной схемы решения уравнений в частных производных: методом разделения пространственных переменных с выделением спектра волн различных азимутов. С помощью полученных винтовых и скалярных потенциалов вычислены поля трансляционных и спиновых перемещений, компоненты тензора деформаций, тензора изгиба–кручения, силовые и моментные напряжения.

Ключевые слова: микрополярность, разложение Гельмгольца, трансляционное перемещение, спиновое перемещение, винтовой потенциал, волна.

Введение. Распространение волн в микро/наноразмерных полуизотропных термоупругих телах, термомеханические определяющие свойства которых

чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства, является сложной актуальной задачей современной механики сплошных сред. В рамках настоящего исследования развивается теория теплопроводности в поллизотропных телах [1, 2], существенным образом опирающаяся на фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, т.е. неизменность поля температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства и принципиальную невозможность приписать этому фундаментальному физическому полю какой бы то ни было ненулевой алгебраический псевдоскалярный вес. При этом определяющим псевдоскаляром, которому может быть естественным образом приписан нечетный алгебраический вес, является характерная нано/микродлина, относящаяся к той или иной микрополярной теории (например, микродлина l , предложенная в работах Нейбера [3]). В этом случае, характерная нано/микродлина оказывается чувствительной к изменениям ориентации координатного базиса, т.е., например, к зеркальным отражениям относительно координатной плоскости.

Дифференциальные уравнения поллизотропной микрополярной среды. Связанные уравнения динамики и теплопроводности для поллизотропного микрополярного термоупругого континуума можно записать в ковариантной форме [1]

$$\begin{aligned}
 & G[(1 + c_1)\nabla^s \nabla_s u^i + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i \nabla_k u^k + 2c_1 \varepsilon^{ikl} \nabla_k \varphi_l + \\
 & + Lc'_4 \nabla^i \nabla_k \varphi^k + Lc'_5 \nabla^k \nabla_k \varphi^i] - 2G\alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \nabla_i \theta = -\rho(f^i - \partial..u^i), \\
 & GL^2[(1 + c_2)\nabla^s \nabla_s \varphi_i + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla_i \nabla_k \varphi^k + \\
 & + L^{-1}c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1}c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1}c'_6 \varepsilon_{ist} \nabla^s \varphi^l] - \\
 & - 2Gc_1(2\varphi_i - e^2 \varepsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2GL^2 \beta \nabla_i \theta = -\rho(l_i - \mathfrak{I} \partial.. \varphi_i), \\
 & \lambda \nabla_s \nabla^s \theta - c\rho \partial.. \theta - 2G\alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \theta_0 \nabla_s \partial.. u^s - 2GL^2 \beta \theta_0 \nabla_s \partial.. \varphi^s = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u^k — вектор трансляционных перемещений; φ^s — вектор спинорных перемещений; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная нано/микродлина микрополярной теории; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности определяющие постоянные; ρ — массовая плотность; \mathfrak{I} — коэффициент микроинерции; α — коэффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент теплового изгиба–кручения; θ_0 — референциальная температура; θ — температурный инкремент; c — теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности. Кроме того принято:

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6, \quad 2l^2 = L^2(1 + c_2).$$

Распространение гармонической связанной термоупругой волны в полуизотропном волноводе. Рассмотрим задачу о распространении гармонической волны вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического волновода. С этой целью воспользуемся разложениями Гельмгольца для полей трансляционных и спинорных перемещений на вихревые и безвихревые составляющие [2, 4]:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad \varphi = \nabla\Sigma + \nabla \times \mathbf{H}, \quad (2)$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных Φ , Σ и векторных потенциалов Ψ , \mathbf{H} . Разложения (2) позволяют провести процедуру развязывания системы векторных дифференциальных уравнений (1).

Для однозначной определенности абсолютных векторных потенциалов Ψ , \mathbf{H} дополним разложения (2) калибровочными соотношениями

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Введем в рассмотрение для вихревых составляющих трансляционных и спинорных перемещений вихревой векторный потенциал Υ с различными масштабными факторами [4]:

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Upsilon. \quad (3)$$

Фундаментальный векторный потенциал Υ , определяемый согласно (3), играет исключительно важную роль, поэтому мы будем называть его фундаментальным векторным потенциалом микрополярной теории. Процедура «развязывания» векторных динамических уравнений для вихревых векторных потенциалов, выполненная с помощью фундаментального универсального вихревого потенциала, позволила получить несвязанные винтовые уравнения. Несвязанные винтовые уравнения для универсального вихревого потенциала в цилиндрической области исследованы с использованием стандартной схемы решения уравнений в частных производных: методом разделения пространственных переменных с выделением спектра волн различных азимутов. С помощью полученных винтовых и скалярных потенциалов (2) удастся вычислить поля абсолютной температуры, трансляционных и спинорных перемещений. Затем получены компоненты тензора деформаций и тензора изгиба-кручения, позволяющие в конце концов определить силовые и моментные напряжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

Литература

- [1] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2023. Т. 165. № 4. С. 389–403.
- [2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Warszawa, Oxford: PWN and Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69.
- [4] Радаев Ю. Н. О факторизации основного гиперболического дифференциального оператора микрополярной теории упругости // Известия РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 24–32.

Колебания трехслойной пластины

Наумова Н. В., Иванов Д. Н., Дорофеев Н. П.

n.v.naumova@spbu.ru, denisiv3@rambler.ru, st067927@student.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В данной работе рассмотрена трехслойная прямоугольная пластина. Получено осредненное дифференциальное уравнение колебаний пластины. Вычислены значения собственных частот. Исследование было основано на сравнении аналитических и численных результатов при использовании программного комплекса ANSYS методом конечных элементов и пакета MAXIMA.

Ключевые слова: трехслойная пластина, колебания трехслойных пластин.

Введение. Трехслойные пластины нашли широкое применение в различных областях промышленности, авиации и судостроении. Такие пластины используются в конструкциях, имеющих небольшую массу и высокую прочность, а также для шумоизоляции, термоизоляции и поглощения вибрации. Как правило, трехслойные пластины — это конструкции, представляющие собой две жесткие лицевые пластины и внутренний (средний) слой — наполнитель, состоящий из одного или нескольких слабо сопротивляющихся изгибу слоев.

Общая теория тонких упругих пластин. Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину ширины a и длины b (рис. 1). На срединной поверхности наполнителя введем декартовы координаты (x, y, z) . Внешний и внутренний несущие слои предполагаются изотропными материалами, а наполнитель трансверсально изотропным.

На рис. 1 показана нумерация слоев пластины, принятая в работе [1].

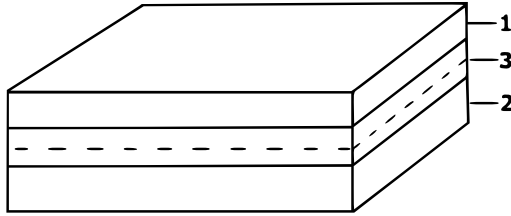


Рис. 1. Трехслойная пластина.

Далее введены следующие обозначения:

h_k — толщина слоя с номером k ($k = 1, 2, 3$);

h — общая толщина пластины;

E_k и ν_k — модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го слоя;

w — нормальное перемещение точек поверхности (прогиб).

В работе [1] вариационным методом получены основные дифференциальные уравнения, описывающие деформацию и колебания тонких упругих трехслойных пластин. При построении уравнений для несущих слоев используются гипотезы Кирхгоффа–Лява о прямой нормали. Для заполнителя используется гипотеза о несжимаемости материала в поперечном направлении, а также предполагается, что деформация поперечного сдвига по толщине заполнителя распределена по некоторому заданному закону $\alpha_i \cdot (\frac{\partial f}{\partial z})$.

Кроме того, для более компактной записи аналитических формул введем, так называемый, приведенный коэффициент Пуассона и осредненный модуль упругости

$$\nu = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k \nu_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}, \quad E = 1 - \nu^2 h \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2},$$

безразмерные жесткостные характеристики и безразмерные толщины слоев

$$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad t_k = \frac{h_k}{h}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Тогда, очевидно, для γ_k и t_k выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1, \quad \sum_{k=1}^3 t_k = 1, \quad \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} = \frac{E h}{1 - \nu^2} \gamma_k.$$

Свободные поперечные колебания трехслойной пластины. В случае отсутствия внешних сил линеаризованные уравнения малых поперечных колебаний трехслойной пластины, согласно [1, 2] примут вид

$$D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda w. \quad (1)$$

Жесткость D составной трехслойной пластины и коэффициент Θ вычисляются по формулам:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \Theta, \quad (2)$$

$$\Theta = t_3^2 + 4\gamma_1 (t_3^2 + 3t_1 t_3 + 2t_1^2). \quad (3)$$

Для шарнирно закрепленной по периметру трехслойной пластины граничные условия при $x = 0$ и $x = l$, а также при $y = 0$ и $y = l$ имеют вид

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (1) при выполнении условий (4) будем искать в виде

$$w = C \cdot \sin \frac{p\pi x}{a} \cdot \sin \frac{q\pi y}{b}, \quad (5)$$

где p — число волн в направлении оси Ox , q — число волн в направлении оси Oy , a и b — ширина и длина пластины, C — неизвестная постоянная. Подставляя (5) в (1), с учетом граничных условий (4) получим формулу для определения приближенного значения частот колебаний рассматриваемой трехслойной пластины

$$\lambda = D\pi^4 \cdot \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)^2. \quad (6)$$

Минимум выражения (6) достигается при значениях $p = 1$ и $q = 1$, это соответствует наличию одной полуволны вдоль стороны пластины.

В качестве примеров были рассмотрены квадратные пластины со стороной 10 м. В численных расчетах первый и второй слой пластины имели толщины $h_1 = h_2 = 0.007$ м и были сделаны из алюминия. Третий (средний) слой — заполнитель толщиной $h_3 = 0.08$ м изготовлен из майлара.

В таблице 1 приведены значения первых четырех собственных частот колебаний рассматриваемой трехслойной пластины. В третьем и четвертом столбцах табл. 1 представлены результаты расчетов частот колебаний, полученные аналитическими и численными методами.

Таблица 1. Частоты колебаний пластины.

Номер частоты	Кол-во полуволн по ширине и длине	Частота колебаний, Гц, формула (6)	Частота колебаний, Гц, МКЭ (ANSYS)	Отн. погр., %
1	1-1	03.982	03.915	1.71
2	1-2, 2-1	09.955	09.794	1.62
3	2-2	15.928	15.524	2.50
4	3-1, 1-3	19.910	19.520	1.96

В третьем столбце представлены значения частот колебаний, полученные по аналитической формуле (6), а в четвертом столбце приведены значения частот, найденные методом конечных элементов (МКЭ) с помощью пакета ANSYS [3]–[5].

При уменьшении общей толщины пластины частоты колебаний также уменьшаются, при этом относительная погрешность между асимптотическими и численными результатами изменяется в пределах от 1.6% до 2.5%. При расчете частот колебаний методом конечных элементов в пакете ANSYS рассматриваемые пластины разбивались на 40 элементов вдоль длины и на 40 элементов вдоль ширины. Расчет частот и соответствующих им форм колебаний в пакете ANSYS занимает не более минуты. На рисунке 2 показаны первые две формы колебаний рассматриваемой трехслойной пластины.

**Рис. 2.** Первая и вторая формы колебаний трехслойной пластины.

Надо отметить, что частоты колебаний трехслойной пластины близки к частотам колебаний однослойной пластины с осредненным модулем упругости, толщина которой равна суммарной толщине трехслойной пластины. Что касается форм колебаний трехслойных и однослойных пластин, то можно заметить, что по общему деформационному виду они полностью совпадают.

Литература

- [1] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., 1973. 170 с.

- [2] Григолюк Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М., 1997. 272 с.
- [3] Наумова Н. В., Иванов Д. Н. Исследование статических деформаций, колебаний и устойчивости конструкций в пакете ANSYS: учеб. пособие / СПб., 2007.
- [4] Конохов А. В. Основы анализа конструкций в ANSYS. Казань, 2001. 105 с.
- [5] Naumova N. V., Ivanov D., Voloshinova T. Deformation of a Plate with Periodically Changing Parameters // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. P. 070026. <https://doi.org/10.1063/1.5034701>

Собственные частоты и формы колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с концевой пластиной

Нестерчук Г. А., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б.

g.nesterchuk@spbu.ru, a.l.smirnov@spbu.ru, s.filippov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе исследуется спектр собственных частот колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с торцевой круговой пластиной. Решения, полученные асимптотическим методом, сравниваются с численными решениями, полученными с методом конечных элементов. Изучается влияние геометрических параметров конструкции на структуру спектра частот.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, круговая пластина, собственные частоты, асимптотические методы, численные методы, оптимизация.

В работе рассматривается конструкция, состоящая из тонкой круговой цилиндрической оболочки, сопряженной с тонкой торцевой пластиной или половинным сегментом. Исследуются свободные низкочастотные колебания конструкции и влияние геометрических параметров на спектр собственных частот колебаний. В описании используются безразмерные параметры, связанные с размерными следующим образом: $l = L/R$, $h_s = H_s/R$ — длина и толщина цилиндрической оболочки соответственно, $r_p = R_p/R$, $h_p = H_p/R$ — радиус и толщина сферического сегмента соответственно, $\delta = h_s/h_p$ — отношение толщин оболочек.

Начальным этапом исследования стало моделирование и анализ спектра собственных частот и форм колебаний цилиндрической оболочки с плоской крышкой в программном комплексе Comsol Multiphysics версии 5.6. Этот этап позволил понять структуру спектра и помог при постановке задач для асимптотического решения.

Основной целью исследования является решение оптимизационной задачи: нахождение значений геометрических параметров p , заданных в областях P ,

для которых при фиксированной массе конструкции ее наименьшая (фундаментальная) частота ω_i является максимальной.

Результаты изучения влияния геометрических параметров на динамические характеристики цилиндрических оболочек и сопряженных с ними элементов были опубликованы авторами в [1]–[3].

Спектр собственных частот цилиндрической оболочки, сопряженной с концевой пластиной (крышкой), отвечает сложной системе колебаний, включающей взаимодействие между различными частями конструкции.

Анализировались три задачи, соответствующие различным типам собственных колебаний конструкции — крышечным, оболочечным и балочным. Для каждой из задач были получены асимптотические формулы, позволяющие получить приближенные значения собственных частот для всех типов колебаний.

Полученные результаты для спектра могут быть использованы при решении оптимизационных задач. Наиболее распространенной задачей оптимизации спектра является максимизация значения наименьшей собственной частоты колебаний при изменении параметров системы, как геометрических, так и физических.

Было выполнено решение задач однопараметрической и двухпараметрической оптимизации с целью максимизации фундаментальной частоты конструкции при сохранении заданной массы.

В первой оптимизационной задаче рассматривалось влияние толщины пластины ($1/r_p = 0$) на собственные частоты при условии сохранения массы конструкции. Поскольку низшие собственные частоты конструкции принадлежат к серии «пластиночных» частот, для увеличения фундаментальной собственной частоты необходимо увеличить толщину пластины так, чтобы ее низшая частота совпадала с низшей частотой оболочки.

На рис. 1(а) показаны аналитические зависимости частотного параметра Ω от δ для низшей «пластиночной» частоты ($m = 0$), двух низших «оболочечных» частот ($m = 4$ и $m = 5$) и первой «балочной» частоты при $h = 0,01$, $l = 4$.

При $\delta = 1$ фундаментальной является низшая частота «пластиночной» серии колебаний. С увеличением δ уменьшается h_s и увеличивается масса пластины, следовательно, уменьшаются как первая «оболочечная», так и первая «балочная» частоты. С увеличением длины оболочки l низшая «балочная» частота уменьшается и при $l > 8$ становится фундаментальной частотой конструкции.

При изменении параметра δ частоты могут становиться кратными. При совпадении пластинчатых и оболочечных частот искажения соответствующих форм колебаний пренебрежимо малы. Когда «пластиночная» и «балочная» частоты близки, форма колебаний представляет собой суперпозицию «балочной» и «пластиночной» формы колебаний, что не позволяет определить тип колебаний. Взаимодействие первой «балочной» и второй «пластиночной» частот объясняет немонотонность зеленой линии на рис. 1.

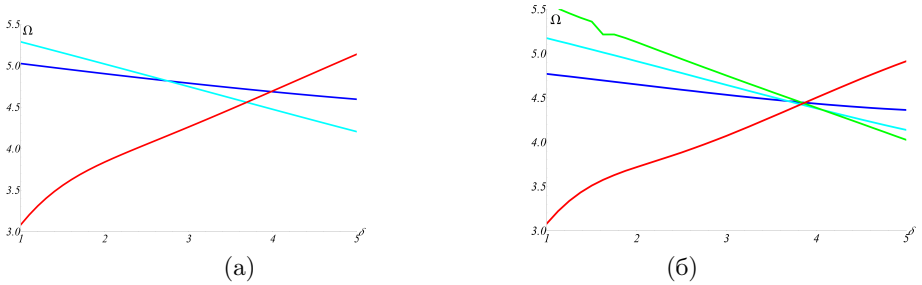


Рис. 1. Зависимость частотного параметра низших собственных частот от толщины пластины при сохранении общей массы конструкции. Аналитические результаты (а), численные (МКЭ) (б). «Пластиночная» частота — красные кривые, «балочная» частота — зеленые, «оболочочные» частоты: для $m = 4$ — синие, $m = 5$ — голубые.

В таблице 1 приведены значения оптимальных толщин элементов конструкции и соответствующие им значения частотного параметра, найденные аналитически и методом конечных элементов.

Таблица 1. Оптимальные толщины элементов конструкции и соответствующий частотный параметр.

	Аналитика	МКЭ
Ω	4,50	4,43
h_p	3,90	3,83
h_s	0,64	0,65

В случае двухпараметрической оптимизации рассматривается задача о колебаниях конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки длины l , радиуса 1 и толщины h_s , сопряженной со сферическим сегментом радиуса r_p толщины $h_p = h_s/\delta$. При $r_p \rightarrow \infty$ сферическая оболочка превращается в плоскую круглую пластину.

Уменьшение радиуса кривизны сферического сегмента приводит к быстрому росту его собственных частот, в то время как уменьшение толщины сферического сегмента приводит к не столь значительному снижению его собственных частот. При этом для сохранения массы конструкции «лишний» материал может быть использован для увеличения толщины цилиндрической оболочки, что приводит к повышению ее собственных частот.

В первой оптимизационной задаче для заданной массы конструкции найдем кривизну крышки k ($k = 1/r_p$) и отношение толщин δ , при котором фундаментальная частота конструкции является наибольшей.

В таблице 2 приведены значения первых частот конструкций для разных значений δ и r_p .

Таблица 2. Частотный параметр оболочки, сопряженной с пологим сферическим сегментом.

ρ	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13
$\delta = 1$	3,162	3,500	3,940	4,386	4,768	4,768	4,767
$\delta = 2$	2,446	3,032	3,640	4,171	4,633	4,823	4,823
$\delta = 3$	2,122	2,892	3,564	4,118	4,594	4,843	4,842
$\delta = 4$	1,957	2,850	3,554	4,127	4,619	4,852	4,852
$\delta = 5$	1,869	2,845	3,573	4,164	4,673	4,858	4,857

Оптимальное решение, при котором фундаментальная частота достигает максимального значения при условии сохранения массы конструкции, достигается при значении параметров $r_p = 9,851$ и $\delta = 30$. Такая постановка не является оправданной, так как для цилиндрической оболочки радиуса $R = 1$ м и толщины $H = 1$ см крышка будет иметь толщину $H_p = 0,3$ мм, что недопустимо для реальных конструкций. В частности, в большинстве инженерных нормативов, например, для проектирования железнодорожных цистерн, указывается минимальная толщина торцевой крышки в 3 мм.

Поэтому рассматривается вторая оптимизационная задача: при заданной массе конструкции и заданной минимальной толщине крышки $H_p = 3$ мм найти радиус кривизны крышки, при котором фундаментальная частота конструкции является наибольшей.

Для конструкции с параметрами, определенными выше, максимум фундаментальной частоты 40,36 Гц достигается при $R_p = 9,851$ м, что существенно превышает фундаментальную частоту конструкции с плоской крышкой 16,318 Гц.

Литература

- [1] Филиппов С. Б., Смирнов А. Л., Нестерчук Г. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. № 10. С. 109–120.
- [2] Филиппов С. Б., Смирнов А. Л., Нестерчук Г. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. II. Анализ спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. № 10. С. 334–343.
- [3] Filippov S. B., Smirnov A. L., Nesterchuk G. A. Free Vibrations of a Cylindrical Shell Closed with the Cap // Advanced Structured Materials. 2022. P. 71–86.

Механическое поведение пластин и оболочек с градиентом предела текучести

Пронина Ю.Г.

y.pronina@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Неравномерное ускоренное охлаждение стального проката может вызывать неравномерное распределение прочностных свойств в объеме материала. В данной работе исследуется влияние градиента предела текучести по толщине изделий, вызванного их односторонним ускоренным охлаждением, на напряженное состояние пластин при их изгибе и сосудов давления. Проводится сопоставление несущей способности изделий из градиентного материала и стального проката после нормализации и термоупрочнения. Решения строятся в рамках плоской задачи при малых деформациях на основе экспериментальных данных А.Б. Максимова.

Ключевые слова: изгиб пластин, сосуды давления, градиент прочностных свойств, упругопластический материал, SD-эффект, термическое упрочнение, судовая сталь.

Введение. Функционально-градиентные материалы (ФГМ) нашли широкое применение в различных отраслях промышленности; как правило, они состоят из различных фаз, объемная доля которых изменяется в каком-либо направлении, приводя к ненулевому градиенту эффективных свойств. Заметим, что эффективные характеристики материала могут меняться в том числе и из-за наличия несплошностей [1]. В данной работе рассматривается частный случай ФГМ, когда упругие свойства постоянны по всему объему, а предел текучести меняется по толщине изделий. В качестве примера используются данные А.Б. Максимова для листовой судовой стали А32 с градиентом прочностных свойств по толщине, вызванным односторонним ускоренным охлаждением из аустенитной области, вследствие чего по толщине листа формируется спектр микроструктур: от феррито-бейнитной на ускоренно охлаждаемой поверхности до феррито-перлитной на другой [2, 3]. Изменением модуля упругости (как структурно-малочувствительной характеристики) при такой обработке можно пренебречь, в то время как градиент прочностных свойств оказывается значительным. Кроме того, для уточнения расчетов необходимо учитывать разность пределов текучести на растяжение и сжатие материала — так называемый SD-эффект. Многочисленные исследования изгиба балок и пластин с SD-эффектом при различных нагрузках проведены Г.В. Павилайнен [4, 5]. Обзор работ по моделированию изгиба пластин и цилиндрических сосудов давления из ФГМ можно найти в работах [6, 7]. Исследование возможности управления траекторией трещин в трубах с помощью подобной технологии локального ускоренного двухстороннего охлаждения листового проката представлено в [8].

В данной работе исследуется плоская деформация изгибаемых пластин и цилиндрических сосудов давления, изготовленных из упруго-пластического материала с градиентом предела текучести по толщине изделия и SD-эффектом, оценивается несущая способность изделий из таких материалов по сравнению с изделиями, материал которых был подвергнут нормализации или стандартному термическому упрочнению.

Согласно [2, 3], предел текучести на растяжение можно задавать кубической функцией от координаты вдоль толщины листа (x):

$$\sigma_y^+ = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3,$$

где постоянные коэффициенты C_i определяются по результатам измерения твердости по Виккерсу на поперечном сечении листа. Предел текучести на сжатие связан с пределом текучести на растяжение соотношением

$$|\sigma_y^-| = d\sigma_y^+, \quad d > 1.$$

Задачи изгиба пластин решаются в рамках технической теории изгиба, при малых деформациях, с использованием критерия текучести Треска. При чистом изгибе поведение пластин при постепенно повышающемся изгибающем моменте можно разбить на три стадии:

1. стадия чисто упругого изгиба, продолжающаяся до тех пор, пока напряжения хотя бы на одной из поверхностей не достигнут предела текучести;
2. стадия упругопластического изгиба, когда зона пластичности образовалась и растет только на одной из сторон пластины: внешней или внутренней;
3. стадия упругопластического изгиба, начинающаяся в момент достижения предела текучести на второй поверхности пластины и заканчивающаяся в момент перехода пластины в состояние текучести по всей толщине.

При некоторых сочетаниях градиента пластичности и коэффициента разнородности d вторая стадия может оказаться пропущенной. В общем случае, при переменной кривизне пластины, все три «стадии» могут сосуществовать на разных сечениях пластины одновременно.

Решение задачи для чисто упругого изгиба известно. При упругопластическом изгибе задача осложняется тем, что происходит смещение нейтральной плоскости пластины, вызываемое как разностью пределов текучести на растяжение и сжатие, так и градиентом предела текучести. Первое всегда направлено в сторону сжатых волокон, направление второго всегда совпадает с направлением градиента прочности. Если эти два направления совпадают, то знак смещения нейтральной плоскости известен заранее, в противном случае его сложно предсказать. Смещение нейтральной плоскости, напряжения и размеры зон пластичности в каждом сечении определяются из решения уравнений

равновесия главного вектора и главного момента всех сил, а также условий непрерывности напряжений.

В работе показано, что величина предельной нагрузки при изгибе пластин из стали А32 с градиентом прочностных свойств по толщине заметно выше чем для нормализованного состояния и сопоставима с таковой для термоупрочненного состояния — при любом сочетании направления градиента прочности и направления изгиба. Комплекс механических свойств листового проката с градиентом прочности по толщине не уступает свойствам термоупрочненного состояния, что позволяет использовать его в промышленности. При этом экономия охлаждающей воды составляет до 40% [6].

Сосуды давления. В качестве примера рассматривается толстостенная труба под действием внешнего и внутреннего давления, в рамках теории малых деформаций, с принятием критерия текучести Мизеса. Решение задачи строится в соответствие с алгоритмом, представленным в [9]. В зависимости от направления градиента пластичности и коэффициентов C_i возможны различные варианты возникновения и распространения областей текучести по толщине трубы. Для используемых экспериментальных данных могут наблюдаться следующие конфигурации взаимного расположения упругой и пластической областей:

1. одна зона пластичности вокруг внутренней поверхности трубы;
2. одна зона пластичности, примыкающая к внешней поверхности трубы;
3. две зоны пластичности у внутренней и внешней поверхностей трубы;
4. одна зона пластичности внутри стенки трубы.

При постепенном повышении давления первая и вторая ситуации могут переходить в третью, а четвертая — в первую и вторую. При этом каждая из них может завершиться переходом в состояние текучести по всей толщине стенки сосуда. Однако следует учитывать, что при потере устойчивости [10] равномерное распространение зон пластичности нарушается.

Расчеты показали, что выигрыш в несущей способности сосудов при переходе в пластическое состояние по всей толщине слабо зависит от направления градиента (он немного выше в случае, когда градиент прочности направлен внутрь сосуда, но эта разница заметна только при достаточно высоких отношениях радиуса сосуда к толщине стенки). Этот результат не зависит от того, где зарождается зона пластичности: у поверхностей или же внутри стенки. Предельная нагрузка сосудов с градиентом прочности существенно превышает таковую для нормализованного состояния и немного ниже чем для термоупрочненного состояния. При применимости локального критерия максимального напряжения градиентный материал может демонстрировать более высокую несущую способность по сравнению с термоупрочненным материалом, но

только при относительно высоких отношениях радиуса сосуда к толщине его стенки и при направлении градиента прочности внутрь сосуда.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 21-19-00100, <https://rscf.ru/project/21-19-00100/>.

Литература

- [1] Абакаров А. М., Пронина Ю. Г. Об эффективных упругих свойствах материала со взаимно перпендикулярными системами параллельных трещин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 1. С. 111–119.
- [2] Максимов А. Б., Шевченко И. П., Ерохина И. С. Толстолистовой прокат с изменяющимися механическими свойствами по толщине // Изв. вузов. Черная металлургия. 2019. Т. 62. № 8. С. 587–593.
- [3] Maksimov A. B., Erokhina I. S. Properties of rolled plate with strength gradient across thickness // Inorganic Materials: Applied Research. 2021. Vol. 12. No. 1. P. 172–176.
- [4] Павилайнен Г. В. Математическая модель задачи изгиба пластически анизотропной балки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2(60). Вып. 4. С. 633–638.
- [5] Павилайнен Г. В., Бембеева А. И., Канин М. С. Упруго-пластический изгиб разнородных балок // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. № 2. С. 284–291.
- [6] Максимов А. Б., Пронина Ю. Г. Исследование изгиба толстолистого проката с градиентом прочностных свойств по толщине // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2022. Т. 65. № 1. С. 21–27.
- [7] Pronina Y., Maksimov A. Hollow cylinder with thermally induced gradient of the yield strength: The gain in loading capacity under pressure // International Journal of Engineering Science. 2023. Vol. 193. Art. 103936.
- [8] Maksimov A., Pronina Y. On crack propagation in a two-component thermally reinforced pipe // Advanced Problems in Mechanics. APM: International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”. Cham, 2019. Springer Nature. P. 179–184.
- [9] Пронина Ю. Г. Механохимическая коррозия полого цилиндра из идеального упруго-пластического материала под действием постоянного давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2006. № 3. С. 121–130.
- [10] Пронина Ю. Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. С. 55–63.

О реализации метода Ритца в задаче о потере устойчивости пластины с отверстием или включением при растяжении

Ржонсницкий А.В.^{1,3} *Кашианова С.В.*^{1,2}
rzhonsnitskiy@yandex.ru, kastasya@yandex.ru

¹Санкт-Петербургский технологический государственный институт (технический университет),

199013, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московский пр., 24–26,

²Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

³Санкт-Петербургский академический университет им. Ж.И. Алферова РАН,
194021, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Хлопина, 8/3

Аннотация. Задача о потере устойчивости пластины решается вариационным методом Ритца. В данной работе ищутся способы улучшения его сходимости. Основными факторами, улучшающими сходимость, авторы считают построение ортонормированного базиса энергетического пространства, учет естественных граничных условий и использование симметрии задачи. Большое внимание уделяется математической технике вычислений.

Ключевые слова: потеря устойчивости при растяжении, пластина с отверстием.

Введение. Для нахождения критической нагрузки, при которой случается потеря равновесия (выход из плоской формы) пластины с отверстием или вставкой при растяжении, требуется решить вариационную задачу. И если в случае круга это удастся сделать без излишних изысков, то в случае усложнения геометрии выреза или вставки, громоздкость вычислений значительно возрастает, теряется устойчивость вычислений и получение достоверного ответа становится мало реальным. В докладе будет рассмотрена математическая техника организации вычислений, причина потери устойчивости вычислений и метод ее устранения, а также рассмотрено влияние учета естественных граничных условий на сходимость последовательных приближений к ответу задачи.

Постановка задачи. Основное уравнение устойчивости имеет вид

$$D \cdot \Delta \Delta w = ph \left(\sigma_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),$$

где D — изгибная жесткость пластины, w — прогиб, p — прикладываемая нагрузка, h — толщина пластины. На свободном краю выреза и в бесконечности ставятся граничные условия [1], которые как показано, например в [2], являются естественными. Задача состоит в поиске минимального собственного числа, отвечающего критической нагрузке, и собственного вектора, отвечающего фор-

ме потери устойчивости. Заметим, что собственный вектор определен с точностью до константы, поэтому уместно говорить именно о форме. Для решения энергетическим методом необходимо считать потенциальную энергию:

$$U = \frac{D}{2} \iint [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w)] dx dy, \quad (1)$$

$$L = 2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

и работу:

$$W = \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (2)$$

Далее необходимо искать минимум квадратичного функционала $U - \lambda W$. Тогда λ , при котором минимум существует, позволит найти критическую нагрузку, а сам минимум форму потери устойчивости.

Техника решения. Авторы работ, посвященных подобным задачам, не дают никакой информации об организации вычислений интегралов для потенциальной энергии и работы.

Заметим, что в формуле (1) $\Delta w = \text{tr}H$, $L = 2 \det H$, где H — матрица Гессе функции прогиба:

$$H(w(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления интеграла как правило необходимо сделать замену переменной, и преобразования в матричном виде с использованием свойств определителя и следа позволяют произвести значительные упрощения.

Подынтегральное выражение в формуле (2) есть квадратичная форма относительно частных производных от прогиба:

$$\sigma_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau \\ \tau & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Разложим тензор напряжений в сферическую и девиаторную части: $\sigma = \sigma_{sp} + \sigma_{dev}$. Тогда после перехода к новым координатам матрица квадратичной формы примет следующий вид: $J^{-1}(\sigma_{sp} + \sigma_{dev})(J^{-1})^T$, где J — матрица

Якоби. При этом матрица σ_{sp} коммутирует со всеми матрицами и как правило специфические особенности выбранных координат позволяют провести еще больше упрощений. Например, для эллиптических координат получаем

$$J^{-1}(\sigma_{sp} + \sigma_{dev})(J^{-1})^T = \frac{\sigma_{sp}}{\det J} + \frac{\sigma_{dev} \cdot J^2}{(\det J)^2}.$$

Также доказана достаточность поиска только симметричных форм потери устойчивости, значительно упрощающая вычислительный процесс.

В докладе обсуждаются подобного рода технические приемы, особую важность занимает тема обсуждение базиса, по которому раскладываются решения: он должен быть минимальным [3], чего не наблюдается в классических работах.

Литература

- [1] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
- [2] Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В. О естественных граничных условиях в задаче о потере устойчивости пластины с эллиптической вставкой при растяжении // Механика машин, механизмов и материалов. 2023. № 1(62).
- [3] Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

Демпфирование связанных колебаний неоднородных композитных коробчатых стержней

Рябов В.М.,¹ Ярцев Б.А.,² Паршина Л.В.²

victor.ryabov@mail.ru, boris_yar@mail.ru, ludaparshina@mail.ru

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²ФГУП «Крыловский государственный научный центр»,

196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Аннотация. Предложена математическая модель затухающих колебаний композитного тонкостенного стержня замкнутого профиля. Приведены результаты численных исследований влияния ориентации армирования силового слоя неоднородной по толщине оболочки тонкостенного стержня, относительной толщины вибропоглощающего слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого материала и температуры окружающей среды на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных колебаний симметричного и асимметричного неоднородных коробчатых стержней. Показано, что при колебаниях симметричного коробчатого стержня возникает изгибно-крутильное и продольно-сдвиговое взаимодействия, а при колебаниях

асимметричного коробчатого стержня возникают продольно-крутильное и изгибно-изгибное взаимодействия.

Ключевые слова: композит, колебания, демпфирование, коробчатый стержень.

Наряду с высокими удельными жесткостными и прочностными характеристиками к преимуществам полимерных композитов относится повышенная, по сравнению с металлами и сплавами, демпфирующая способность. С этим связан растущий интерес к созданию композитных вибропоглощающих конструкций. Реализуемые конструкциями из волокнистых композитов уровни рассеяния энергии часто не позволяют снизить амплитуды резонансных колебаний до требуемых величин. Поэтому появились предложения по способам существенного повышения демпфирования за счет введения в состав слоистой структуры вязкоупругих материалов [1]–[5]. Несмотря на успехи в достижении высоких уровней рассеяния энергии при колебаниях пластин задача повышения диссипативных свойств низших тонов колебаний тонкостенных стержней и стержневых систем до сих пор не решена [6].

Для решения указанной задачи предложена математическая модель затухающих колебаний тонкостенного стержня замкнутого профиля. Неоднородная по толщине оболочка тонкостенного стержня образована силовым и вибропоглощающим слоями. Силовой слой представляет собой совокупность конечного числа компоуемых в моноклинную структуру произвольно ориентированных относительно оси стержня ортотропных вязкоупругих слоев конструкционных композитов. На одну из наружных поверхностей силового слоя нанесен вибропоглощающий слой «жесткого» изотропного вязкоупругого материала (рис. 1).

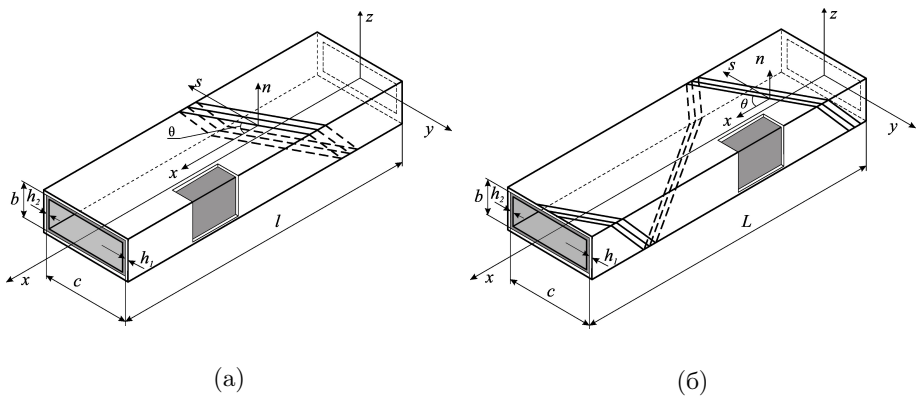


Рис. 1. Схема армирования симметричного (а) и асимметричного (б) коробчатого стержня.

Уравнения движения тонкостенного стержня получены на основе использования вариационного принципа Гамильтона [7], уточнённой теории изгиба балки Тимошенко [8], теории стесненного кручения [9] и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости [10]. При описании физических соотношений вязкоупругих материалов силового слоя влияние частоты колебаний и температуры окружающей среды считается пренебрежимо малым, в то время как для вибропоглощающего слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого материала учёт температурно-частотной зависимости упруго-диссипативных характеристик выполняется на основе экспериментально определённых обобщённых кривых. Минимизация функционала Гамильтона позволяет свести задачу о затухающих колебаниях анизотропных конструкций к алгебраической проблеме комплексных собственных значений. Для формирования системы алгебраических уравнений применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. Сначала находятся вещественные собственные частоты. Затем, используя в качестве начального приближения к искомой комплексной собственной частоте комплексное число, вещественная часть которого равна частоте упругих собственных колебаний, а мнимая часть — произвольное значение в пределах ожидаемого коэффициента механических потерь, вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка. Идентификация мод колебаний осуществляется по виду соответствующих собственных форм.

Обсуждаются результаты численных исследований влияния ориентации армирования силового слоя неоднородной по толщине оболочки, относительной толщины вибропоглощающего слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого материала и температуры окружающей среды на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных затухающих колебаний безопорных симметричных и асимметричных неоднородных коробчатых стержней. Сопоставление значений собственных частот и коэффициентов механических потерь неоднородных коробчатых стержней со значениями собственных частот и коэффициентов механических потерь квазиоднородных коробчатых стержней, оболочки которых содержат только силовые слои, позволило оценить эффективность включения в состав конструкции вибропоглощающего слоя.

Показано, что при колебаниях неоднородных и квазиоднородных симметричных коробчатых стержней возникает изгибно-крутильное и продольно-сдвиговое взаимодействия. Колебания неоднородных и квазиоднородных асимметричных коробчатых стержней характеризуются появлением изгибно-изгибного (в двух взаимно ортогональных плоскостях) и продольно-крутильного взаимодействий. Если дифференциальные уравнения собственных колебаний содержат нечетные производные искомых собственных функций по пространственной переменной (симметричные неоднородные и квазиоднородные стержни, изгибно-изгибное взаимодействие несимметричных неоднородных и квази-

однородных стержней), то при изменении ориентации армирования происходит взаимная трансформация связанных мод колебаний. Если же уравнения содержат только четные производные (продольно-крутильное взаимодействие несимметричных неоднородных и квазиоднородных стержней), то взаимная трансформация связанных мод колебаний не возникает. Вне областей взаимной трансформации связанных мод колебаний достаточную точность при расчете собственных частот и коэффициентов механических потерь обеспечивает приближенный метод, основанный на вычислении парциальных частот и соответствующих им коэффициентов механических потерь при использовании предложенных Фойгтом «чистых» и «свободных» комплексных модулей упругости и сдвига в плоскости армирования.

Установлено, что каждой моде собственных колебаний коробчатого стержня соответствует эффективная относительная толщина вибропоглощающего слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого материала. Дальнейшее увеличение относительной толщины не приводит к значимым изменениям величин коэффициентов механических потерь.

Отмечено существенное влияние температуры окружающей среды на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь всех рассматриваемых мод колебаний как симметричных, так и асимметричных безопорных неоднородных коробчатых стержней, обусловленное температурно-частотной зависимостью вещественной и мнимой частей комплексного модуля упругости «жесткого» вязкоупругого материала.

Литература

- [1] Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5(63). Вып. 2. С. 300–309.
- [2] Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 2. Метод решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5(63). Вып. 4. С. 678–688.
- [3] Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 3. Численный эксперимент // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). Вып. 1. С. 144–156.
- [4] Рябов В. М., Ярцев Б. А., Паршина Л. В. Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 1. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7(65). Вып. 3. С. 469–480.
- [5] Рябов В. М., Ярцев Б. А., Паршина Л. В. Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 2. Численный эксперимент // Вестник

- Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8(66). Вып. 1. С. 88–100.
- [6] Ионов А. В. Средства снижения вибрации и шума на судах. Санкт-Петербург: ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2000. 348 с.
- [7] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. 542 с.
- [8] Тимошенко С. П. К учету сдвига в дифференциальном уравнении поперечных колебаний призматических стержней // Статистические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наукова думка. 1975. С. 56–57.
- [9] Librescu L., Song O. Thin-walled composite beams. Theory and application. Dordrecht: Springer, 2006. 600 p.
- [10] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. Москва: Мир, 1974. 340 с.

Описание ступенчатых нагружений при высокотемпературной ползучести

Сайтова Р. Р., Арутюнян А. Р.

rigastr@yandex.ru, a.arutyunyan@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Эволюция поврежденности металлических материалов происходит в условиях высокотемпературной ползучести. Для ее описания используется концепция поврежденности Качанова–Работнова. В работе параметр поврежденности определяется как относительное изменение плотности материала, которая является интегральной характеристикой поврежденности. С учетом этого параметра и закона сохранения массы сформулированы взаимосвязанные кинетические уравнения для деформации ползучести и параметра поврежденности. Получены аналитические решения этих уравнений для случая двухступенчатого нагружения. Проведены сравнения аналитических решений с экспериментальными исследованиями на ползучесть титанового сплава при переменных нагрузках и температуре 500°С. Наблюдается хорошее согласие полученных теоретических кривых с экспериментальными результатами.

Ключевые слова: ползучесть, длительная прочность, тепловая хрупкость металлов, концепция сплошности, концепция поврежденности, двухступенчатое нагружение.

Введение. Рассматривается задача ползучести и длительной прочности металлических материалов и сплавов. Под действием относительно низких напряжений и высоких температур металлические материалы становятся хрупкими и разрушаются при небольшой величине остаточных деформаций (проблема тепловой хрупкости металлов). Данный эффект наблюдается в элементах многих важных инженерных объектов. Для решения этой проблемы в механике материалов в работах Л. М. Качанова [1], Ю. Н. Работнова [2] была введена

концепция сплошности (поврежденности). Для описания хрупкой области экспериментальной кривой длительной прочности была предложена система простых кинетических уравнений для параметра поврежденности и деформации ползучести, а также был сформулирован критерий длительной прочности. В работе Р. А. Арутюняна [3] предлагается модифицированный вариант системы кинетических уравнений Качанова–Работнова с учетом закона сохранения массы и конкретизации параметра поврежденности в виде отношения текущей величины плотности материала к начальной. Результаты многочисленных экспериментальных исследований по изменению пористости и плотности различных металлов и сплавов вследствие образования и развития микропор и микротрещин в условиях высокотемпературной ползучести [4]–[6] позволяют рассматривать плотность в качестве интегральной меры накопления структурных микродефектов.

Теоретическое описание ступенчатого нагружения при ползучести. Рассмотрим систему взаимосвязанных кинетических уравнений Р. А. Арутюняна [3] для скорости ползучести и параметра поврежденности (сплошности):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon}, \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^{n-\alpha} e^{n\varepsilon}, \quad (2)$$

где $\psi = 1 - \omega = \rho/\rho_0$ — сплошность, ρ_0 — начальная, ρ — текущая плотность образца, $B, A, m, n, \alpha, \beta$ — постоянные.

Система уравнений (1)–(2) для скорости ползучести и параметра поврежденности может быть решена для случая двухступенчатого нагружения. Рассмотрим случай чисто хрупкого разрушения и малых деформаций при $e^{m_1 \varepsilon_1} \approx 1 + m_1 \varepsilon_1$, $e^{n_1 \varepsilon_1} \approx 1 + n_1 \varepsilon_1$ и перепишем систему уравнений (1)–(2) в виде [7]:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt_1} = B_1 \sigma_{01}^{m_1} \psi_1^{m_1-\beta_1} (1 + m_1 \varepsilon_1), \quad (3)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt_1} = -A_1 \sigma_{01}^{n_1} \psi_1^{n_1-\alpha_1} (1 + n_1 \varepsilon_1). \quad (4)$$

При условиях $m_1 = \beta_1$, $n_1 = 1 + \alpha_1$ система уравнений (3)–(4) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка [8]:

$$\psi_1 \psi_1'' - (n_1 - \alpha_1) (\psi_1')^2 - m_1 B_1 \sigma_{01}^{m_1} \psi_1^\tau \psi_1' - A_1 B_1 \sigma_{01}^{m_1+n_1} (m_1 - n_1) \psi_1^\gamma = 0, \quad (5)$$

где $\tau = m_1 - \beta_1 + 1$, $\gamma = m_1 - \beta_1 - \alpha_1 + n_1 + 1$.

Учитывая условия $m_1 = \beta_1$, $n_1 = 1 + \alpha_1$ в (3) и при начальных условиях $t_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{e^{B_1 m_1 \sigma_{01}^{m_1} t_1} - 1}{m_1}. \quad (6)$$

Для второй ступени нагружения при начальных условиях $t_2 = t_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ имеем:

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt_2} = B_2 \sigma_{02}^{m_2} \psi_2^{m_2 - \beta_2} (1 + m_2 \varepsilon_2). \quad (7)$$

Учитывая условия $m_2 = \beta_2$ и начальные условия $t_2 = t_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, в (7) получим

$$\varepsilon_2 = \frac{e^{B_2 m_2 \sigma_{02}^{m_2} (t_2 - t_1) + \ln \left| 1 + \frac{m_2}{m_1} \left(e^{B_1 m_1 \sigma_{01}^{m_1} t_1} - 1 \right) \right|} - 1}{m_2}. \quad (8)$$

Сравнение теоретических кривых с экспериментальными результатами. Наиболее важным в теоретическом и практическом отношении является случай переменных нагрузок. В работе [9] была проведена серия экспериментов по ползучести при ступенчато изменяющихся нагрузках цилиндрических образцов титанового сплава в состоянии поставки. Диаметр рабочей части образцов составлял 5 ± 0.02 мм, рабочая длина 27 ± 0.05 мм. К образцу после прогрева, соответствующего данной температуре (500°C), прикладывалось напряжение σ_1 , при котором он полз в течение времени t_1 . В момент времени t_1 напряжение изменялось до σ_2 , и образец оставался при нем в течение времени $t_2 - t_1$. На рис. 1 показаны теоретические кривые ползучести по решениям (6) и (8) и экспериментальная кривая для образца титанового сплава при ступенчатом нагружении при температуре 500°C [9]. Значения коэффициентов, использованных в расчетах, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты в расчетах.

σ , МПа	615	675
t , ч	20.1	29.4
$B \times 10^{-7}$, МПа $^{-2} \times \text{ч}^{-1}$	1.18	1.1
m	2	2

Для рис. 1 эффективные напряжения составили 615 МПа и 675 МПа, из этого рисунка видно, что наблюдается хорошее согласие теоретических и экспериментальных кривых ползучести титанового сплава при ступенчатом нагружении при температуре 500°C . Таким образом, предложенная система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности позволяет описать случаи ступенчатого нагружения, что указывает на универсальность рассматриваемой системы.

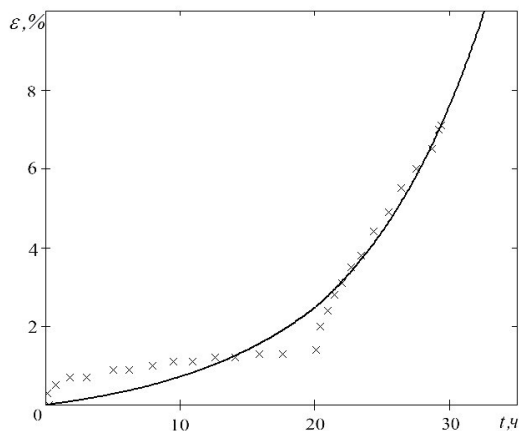


Рис. 1. Теоретические кривые ползучести по решениям (6) и (8) и экспериментальная кривая для титанового сплава при ступенчатом нагружении при температуре 500°C с эффективными напряжениями, равными 615 МПа и 675 МПа [9].

Заключение. Рассматривается модифицированный вариант системы взаимосвязанных кинетических уравнений Качанова–Работнова с учетом закона сохранения массы и конкретизации параметра поврежденности в виде отношения текущей величины плотности материала к начальной. Получены решения данной системы кинетических уравнений для случая двухступенчатого нагружения. Проведено сравнение аналитических решений с экспериментальными результатами по ползучести титанового сплава при ступенчатых нагрузках при температуре 500°C . Полученные теоретические кривые ползучести хорошо описывают экспериментальные кривые ползучести при двухступенчатом нагружении. Таким образом, предложенная система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности позволяет описать случаи ступенчатого нагружения, что указывает на универсальность рассматриваемой системы.

Литература

- [1] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд. Техн. Наук. 1958. № 8. С. 26–31.
- [2] Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
- [3] Arutyunyan R. A. The Problem of High-Temperature Creep and Long-Term Strength in the Mechanics of Materials // Doklady Physics. 2017. Vol. 62. No. 8. P. 384–386.

- [4] Новожилов В. В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. № 4. С. 681–689.
- [5] Betekhtin V. I., Porosity of solids // Trans. St.- Petersburg Acad. Sci. strength problems. 1997. Vol. 1. P. 201–210.
- [6] Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2015. 506 с.
- [7] Arutyunyan A. R., Saitova R. R. Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2231. No. 1. P. 012001.
- [8] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003. 783 p.
- [9] Hu X., Ye W., Ma X. and Song Y. A new creep damage assessment method for metallic material under variable load conditions at elevated temperature // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2019. Vol. 42. No. 12. P. 2725–2737.

Исследование волн в средах со случайными упруго-массовыми параметрами при помощи спектрального разложения

Смирнов С. А., Беляев А. К.

serg.a.smir@gmail.com, vice.ipme@gmail.com

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61

Аннотация. В данной работе рассматривается задача о распространении одномерной волны в упругой среде со случайными модулем Юнга и массовой плотностью. Рассмотрены полностью коррелированные случайности в упруго-массовых параметрах. С помощью метода интегральных спектральных представлений найдены среднее поле волны и ее дисперсия. Установлено, что по мере удаления от места возбуждения колебаний снижается достоверная информация о параметрах волны.

Ключевые слова: волновое уравнение, случайные волны, спектральное разложение.

Введение. Задача о распространении волн в случайных средах встречается во многих научных дисциплинах, таких как теория колебаний, акустика, радиофизика. Особого внимания данная задача заслуживает и в механике сплошных сред. Такая задача актуальна, поскольку может использоваться для моделирования распространения волн в различных конструкциях из поликристаллических материалов, механические свойства которых можно считать стохастическими, так как ориентация и размер кристаллических зерен распределены случайным образом. Также в данной постановке могут рассматриваться сейсмические волны [1] в земной поверхности, геофизические характеристики которой стохастически изменяются в различных точках пространства.

В настоящее время существуют различные подходы к описанию волн в случайных средах [2], основанные как на предположении о малости случайных отклонений и использовании методов возмущений, так и на более общих методах корреляционного анализа и теории случайных процессов [3]. В данной работе будут получены математическое ожидание и дисперсия случайной волны с помощью метода интегральных спектральных представлений.

Постановка задачи. Моделью для исследования распространения упругих волн в случайных средах выбрано одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\tilde{u}(x, t)$ — перемещение, x — пространственная координата ($x \geq 0$), t — время, $E(x)$ — модуль Юнга, $\rho(x)$ — массовая плотность. Предполагается, что $E(x)$ и $\rho(x)$ являются случайными и могут быть представлены в виде $E(x) = \langle E \rangle [1 + \varepsilon(x)]$, $\rho(x) = \langle \rho \rangle [1 + r(x)]$, где $\langle E \rangle$ и $\langle \rho \rangle$ — средние значения $E(x)$ и $\rho(x)$, безразмерные случайные функции $\varepsilon(x)$ и $r(x)$ описывают их отклонение от среднего. Символ $\langle \rangle$ обозначает операцию математического ожидания.

Принимается, что возбуждение колебаний происходит в начале координат

$$\tilde{u}(x, t)|_{x=0} = H e^{i\omega t}, \quad H = \text{const}, \quad (2)$$

а на бесконечности задано условие излучения Зоммерфельда. Случайные составляющие $\varepsilon(x)$ и $r(x)$ выбираются полностью коррелированными в виде

$$\varepsilon(x) = b_\varepsilon q(x), \quad r(x) = b_r q(x), \quad S_q(k) = \frac{\sigma_q^2}{\pi} \frac{\alpha_q}{k^2 + \alpha_q^2}, \quad (3)$$

где $q(x)$ — случайная функция, имеющая спектральную плотность $S_q(k)$. Параметры α_q и σ_q отвечают за степень локализованности и размер неоднородности. Решение уравнения (1) разыскивается в виде $\tilde{u}(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$, что позволяет получить волновое уравнение для $u(x)$ в форме уравнения Гельмгольца

$$\frac{d \left([1 + b_\varepsilon q(x)] \frac{du(x)}{dx} \right)}{dx} + \lambda_0^2 [1 + b_r q(x)] u(x) = 0, \quad \lambda_0 = \omega \sqrt{\langle \rho \rangle / \langle E \rangle}. \quad (4)$$

Среднее поле случайной волны. Случайные параметры раскладываются по волновым числам в интеграл Фурье–Стилтьеса

$$q(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k_1) e^{ik_1 x} dk_1, \quad u(x) = \langle u(x) \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} W(k) \mu(x, k) e^{ikx} dk, \quad (5)$$

где $Q(k_1)$, $W(k)$ — случайные Фурье-спектры, математические ожидания которых равны нулю, $\mu(x, k)$ — детерминированная функция. Представления (5) позволяют получить систему линейных уравнений, связывающую неизвестные $\langle u(x) \rangle$ и $\mu(x, k)$. Решение этой системы разыскивается в виде $\langle u \rangle = Ve^{\lambda x}$, $\mu(x, k) = M(k)e^{\lambda x}$, что приводит к характеристическому уравнению

$$(\lambda^2 + \lambda_0^2) [(\lambda + \alpha_q)^2 + \lambda_0^2] - \sigma_q^2 (b_\varepsilon \lambda (\lambda + \alpha_q) + b_r \lambda_0^2)^2 = 0. \quad (6)$$

Корни характеристического уравнения (6) вычисляются с помощью выражения

$$\lambda_{1,2,3,4} = -\frac{\alpha_q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_q}{2}\right)^2 - \frac{1 - \sigma_q^2 b_\varepsilon b_r \pm \sqrt{\sigma_q^2 (b_\varepsilon - b_r)^2 - \frac{\alpha_q^2}{\lambda_0^2} (1 - \sigma_q^2 b_\varepsilon^2)}}{1 - \sigma_q^2 b_\varepsilon^2}}. \quad (7)$$

Условию излучения Зоммерфельда удовлетворяют корни λ_2 и λ_4 , имеющие отрицательную мнимую часть. Среднее поле случайной волны, удовлетворяющее граничным условиям при $x = 0$, может быть представлено в виде

$$\langle u(x) \rangle = \left[\frac{\lambda_4^2 + \lambda_0^2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2} e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2^2 + \lambda_0^2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2} e^{\lambda_4 x} \right] H. \quad (8)$$

График полученного среднего поля представлен на рис. 1. Приняты следующие параметры: $H = 1$, $\lambda_0 = 1$, $\alpha_q = 0.1$, $\sigma_q = 0.08$, $b_\varepsilon = 0.5$, $b_r = 1$.

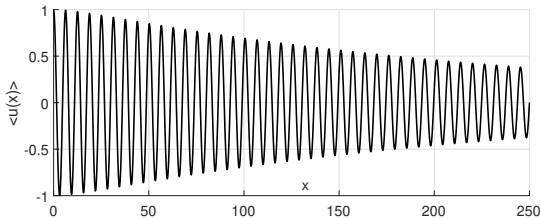


Рис. 1. Среднее поле случайной волны.

Дисперсия случайной волны. Согласно [4], дисперсия выражается как

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(x, k)|^2 S_w(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, k) \mu(x, k)^* S_w(k) dk, \quad (9)$$

где $S_w(k)$ — спектральная плотность случайного процесса $W(k)$, звездочкой обозначена комплексно сопряженная величина. Спектральную плотность $S_w(k)$ можно найти при помощи волнового уравнения, умножив его на комплексно сопряженный Фурье-спектр $W^*(k)$ и проведя необходимые преобразования. В окончательной форме выражение для поиска дисперсии записывается в виде

$$\sigma_u^2 = A \sum_{i=2,4} \sum_{j=2,4} B_i B_j^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[b_\varepsilon \lambda_i (\lambda_i + ik) + \lambda_0^2 b_r] [b_\varepsilon \lambda_j (\lambda_j - ik) + \lambda_0^2 b_r]}{[(\lambda_i + ik)^2 + \lambda_0^2][(\lambda_j^* - ik)^2 + \lambda_0^2][k^2 + \alpha_q^2]} (e^{\lambda_i x} - e^{-i(k+\lambda_0)x}) (e^{\lambda_j x} - e^{i(k+\lambda_0)x}) dx, \quad (10)$$

где $A = \frac{\sigma_q^2 \alpha_q}{\pi}$, $B_2 = \frac{\lambda_4^2 + \lambda_0^2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2}$, $B_4 = -\frac{\lambda_2^2 + \lambda_0^2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2}$. Интегралы в уравнении (10) вычисляются с помощью вычетов. График дисперсии, полученный при выбранных параметрах, представлен на рис. 2.

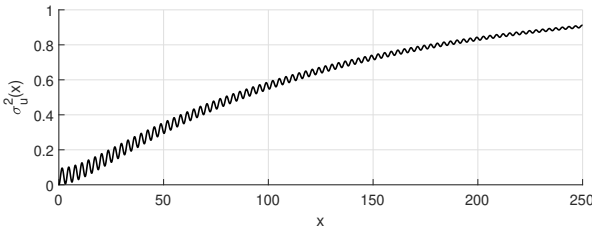


Рис. 2. Дисперсия случайной волны.

Закключение. В данной работе проведено исследование задачи о распространении одномерной упругой волны в среде со случайным модулем Юнга и случайной массовой плотностью. Рассмотрен случай, когда случайные отклонения в выбранных параметрах среды являются полностью коррелированными функциями. При помощи метода разложения случайных функций в интеграл Фурье–Стилтьеса были получены аналитические выражения для нахождения математического ожидания и дисперсии случайной волны. Было установлено, что при удалении от места возбуждения математическое ожидание уменьша-

ется и стремится к нулю, тогда как дисперсия волны возрастает. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что по мере распространения волны в среде со случайными упруго-массовыми характеристиками достоверная информация о параметрах волны уменьшается и становится стохастической.

Литература

- [1] Askar A., Cakmak A. S. Seismic waves in random media // Probabilistic engineering mechanics. 1988. Vol. 3. No. 3. P. 124–129.
- [2] Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
- [3] Belyaev A. K., Polyanskiy V. A. Some approaches to harmonic wave propagation in elastic solids with random microstructure // 2018 Days on Diffraction (DD). IEEE, 2018. P. 38–43.
- [4] Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.

«Микронапряжения» и «скрытая» энергия деформации при упругопластическом деформировании

Судьенков Ю.В.,¹ Зимин Б.А.,² Ялыч Е.С.²

y.sudenkov@yandex.ru, zimin_ba@voenmeh.ru, ialych_es@voenmeh.ru

¹Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²Балтийский государственный технический университет

«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Для оценки упруго-пластического поведения материалов при медленном нагружении существенный интерес представляет анализ характера изменений энергетического баланса в ходе структурных перестроек на разных стадиях процесса деформирования. Вследствие большого разнообразия поведения с различной микроструктурой при деформировании возникает необходимость в обобщении описания таких сред. В работе предлагается использовать методы термодинамики необратимых процессов для описания деформирования материалов с учётом введения некоторого параметра — двухвалентного тензора, характеризующего микроструктурные перестройки.

Ключевые слова: микроструктура, упруго-пластическое деформирование, необратимая и обратимая деформация, «скрытая энергия».

Введение. В исследованиях поведения твёрдых тел при действии внешних нагрузок существенный интерес представляет анализ характера изменений

энергетического баланса в ходе структурных перестроек на разных стадиях процесса деформирования [1].

Постановка задачи. Обратимся к термодинамике. Уравнение баланса энергии можно записать в виде [2]:

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma^{\alpha\beta} \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} - \operatorname{div} q, \quad (1)$$

где p , u — плотности соответственно вещества и внутренней энергии; $\sigma^{\alpha\beta}$ — тензор напряжений; q — поток тепла; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензор деформации.

Согласно второму началу термодинамики, при пренебрежении диффузией вещества через границу:

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq -\frac{1}{T} \operatorname{div} q, \quad (2)$$

где T — абсолютная температура; s — плотность энтропии.

При упругопластическом деформировании понятия квазистатического (равновесного) и обратимого процессов, отождествлявшееся в классической термодинамике, не совпадают. Для неупругой среды в состав полной системы аргументов состояния вместе с σ^{ij} и T в общем случае должны входить и другие переменные, связанные с σ^{ij} и T , самое большее, неголономными связями (Л.И. Седов и М.Э. Эглит).

Функция состояния и разбиение деформации на обратимую и необратимую. Полагаем, что u и s представимы в виде функций от σ^{ij} и T и лишь таких переменных ψ_1, ψ_2, \dots , которые при обратимых процессах сохраняют своё значение:

$$\rho T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} q = 0, \quad \frac{d\psi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Пусть h — функция состояния элемента среды, удовлетворяющая:

$$\sigma^{\alpha\beta} \frac{dh}{d\sigma^{\alpha\beta}} - h = u - Ts, \quad \frac{dh}{dt} = s. \quad (4)$$

Выразив u из (4) и, подставив в (1) получим:

$$T \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} q = \sigma^{\alpha\beta} \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} - s \frac{dT}{dt} - \frac{\partial h}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} \frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt} - \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (5)$$

Из (5) и (2) можно получить:

$$\sigma^{\alpha\beta} \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} + \sum_n \frac{dh}{d\psi_n} \frac{d\psi_n}{dt} \geq 0. \quad (6)$$

Для любого обратимого изменения состояния среды соотношения (2), и следовательно (6) должны выполняться со знаком равенства. Если уравнение (4) рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции h при заданных u и s , то заданием необходимых по чисто физическим соображениям начальных данных решение определяется с точностью до постоянного слагаемого, тем самым тензор с компонентами $\frac{\partial h}{\partial \sigma^{ij}}$ и тензор

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{\partial h}{\partial \sigma^{ij}} \quad (7)$$

определяются однозначно, ε_{ij}^p — необратимая, а ε_{ij}^e — обратимая составляющая тензора деформаций. При этом существует такая функция состояния h , позволяющая выполнению (7). Это разделение деформации в некотором смысле соответствует разделению работы внешних сил W [3] на:

$$W = W_\nu + W_s, \quad (8)$$

где W_ν — работа, затраченная на изменение объёма; W_s — работа, затраченная на формоизменение.

Известно, что для необратимого процесса деформации, замкнутого в отношении значений внешних сил и температуры образца.

$$W = Q + L, \quad (9)$$

где Q — выделяющееся тепло (диссипация); L — латентная, скрытая энергия.

«Скрытая» энергия. Параметр структуры деформации.

Для описания эффекта скрытой энергии предлагается в (4) ввести:

$$H = \rho h = H(\sigma_{ij}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, T), \quad (10)$$

причём ψ_i при обратимых процессах остаются неизменными. Будем считать, что под знак функции H кроме σ_{ij} , T и ψ_i входят компоненты некоторого двухвалентного («структурного») тензора $T_\alpha(\alpha_{ij})$, определяемого [4]:

$$\frac{d\alpha_{ij}}{dt} = A \frac{\varepsilon_{ij}^p}{dt}, \quad (11)$$

где A — некоторая функция σ_{ij} и температуры; $c_i (i = \overline{1, 5})$ — некоторые константы.

Таким образом $H(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, T, \psi_i)$.

Для изначально изотропной среды компонент тензоров под знак функции H могут входить лишь через свои скалярные комбинации. Полная система ска-

лярных инвариантов тензоров (включая совместные инварианты) состоит из девяти инвариантов (И.И. Гольденблатт).

Тогда учитывая, что H должна быть квадратичной по напряжениям можно записать:

$$H = c_1(spT_\sigma)^2 + c_2 spT_\sigma^2 + c_3 sp(T_\sigma^2 T_\alpha) + c_4 (sp(T_\sigma T_\alpha))^2 + c_5 (sp(T_\sigma T_\alpha^2))^2 + H_\alpha. \quad (12)$$

где H_α — функция spT_α , spT_α^2 , spT_α^3 .

Из (7) с учётом (4) получим:

$$\sigma_{\alpha\beta} \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}^p}{dt} + \frac{d_p H}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} q, \quad (13)$$

где $\frac{d_p H}{dt} = \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{dt}$.

На основании второго начала термодинамики (2) для любого состояния:

$$\sigma_{\alpha\beta} \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}^p}{dt} + \frac{d_p H}{dt} \geq 0. \quad (14)$$

В концепции скрытой энергии все «дополнительные» (характеризующие плотности микродефектов) аргументы функции состояния H не могут быть тождественно постоянными (в необратимых процессах), тогда $\frac{d_p H}{dt} \neq 0$.

Следовательно (13) означает, что лишь часть работы $\sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p$ превращается в некомпенсированную теплоту. Остальная часть затрачивается на «скрытые» изменения в системе (латентная энергия). Поэтому результаты энергетического баланса и тепловыделения для различных материалов при медленном нагружении могут характеризовать развитие «структурного» тензора T_α материала при нагружении:

$$\frac{\partial_p H}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{dt}. \quad (15)$$

Для однофазной среды, используя (13), (14) и (15) можно записать выражение для источников энтропии ξ :

$$\xi = \frac{1}{T} (\sigma_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}) \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}^p}{dt}, \quad (\xi \gg 0), \quad (16)$$

отсюда $\mu_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p$ — представляет собой изменение скрытой энергии, а $\sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}^p$ — работа макронапряжений.

Используя уравнение (16) возможно анализировать эксперименты при одноосном растяжении металлов [5].

Литература

- [1] Zimin B. A., Sventitskaya V. E., Smirnov I. V., Sud'enkov Yu. V. Influence of strain rate on heat release under quasi-static stretching of metals. *Experiment // Physics of the Solid State*. 2018. Vol. 60. P. 758–763.
- [2] Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
- [3] Кузьменко В. А. Новые схемы деформирования твердых тел / АН УССР. Ин-т проблем прочности. Киев: Наук. думка, 1973. 200 с.
- [4] Смирнов И. В., Судьенков Ю. В., Зимин Б. А. Влияние исходной структуры металлов на энергетический баланс упругопластического деформирования // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XV Всероссийской школы. Под ред. Ватульян А. О. Ростов-на-Дону — Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2021. С. 63.
- [5] Судьенков Ю. В. Вклад работы изменения объёма и деформаций сдвига в энергетический баланс при одноосном растяжении металлов. *Эксперименты // Физика твёрдого тела*. 2024. Вып. 2. С. 310–315.

Условие на восстановленную длину — новый подход к определению критической нагрузки продольного изгиба колонны в упруго-пластической области деформаций

Чистяков В. В.

v.chistyakov@mail.ioffe.ru

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,

194021, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

Аннотация. Приводится свободный от традиционных упрощений новый метод решения задачи продольного изгиба однородной колонны, опираемой поворотными пружинами. Метод базируется на ограничении на восстановленную длину оси. Получена, решена и верифицирована в важном частном случае одинаковых пружин система уравнений, связывающая критическое напряжение σ_{cr} с нелинейной диаграммой сжатия $\varepsilon(\sigma)$ материала, гибкостью колонны λ и величинами пружинных жёсткостей γ_1 , γ_2 , Н·м. Также решение системы определяет профиль начального изгиба.

Ключевые слова: продольный изгиб, критическое напряжение, восстановленная длина, приведённая жесткость, минимальная гибкость.

Задача определения критической нагрузки F_{cr} для сжимаемой вдоль своей оси колонны длиной l_0 , сечением S и минимальным моментом инерции $J_x^{(II)} = S i_x^2$ актуальна как с чисто прикладной точки зрения, так и с фундаментальной как проблема потери устойчивости.

Случай опирания концов A (неподвижный) и B (подвижный вдоль оси z) колонны (рис. 1(а)) на две поворотные пружины с жёсткостями γ_1 и γ_2 , Н·м,

охватывает почти все реальные варианты фиксации — от идеальных шарниров ($\gamma_i = 0$) до жёстких заделок ($\gamma_i \rightarrow \infty$).

Традиционно [1] продольный изгиб при упругом опирании рассматривается: а) в предположении выполнения закона Гука для материала и б) в пренебрежении предизгибного укорочения колонны ε_{rc} . Между тем, как нелинейность диаграммы сжатия $\varepsilon(\sigma, \text{Па})$ некоторых материалов предполагает относительные деформации ε порядка нескольких процентов и требует своего учёта в граничных условиях управляющего (governing) уравнения.

Подход в рамках модели Тимошенко требует также учёта сдвиговых деформаций в сечении, возникающих из-за изгиба оси колонны и поперечной силы реакции в опорах при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (рис. 1(a)). Но при нелинейных нормальных напряжениях учёт даже незначительных касательных относит проблему к теории пластичности.

На концы действуют осевые силы $\pm F$, поперечные — $\pm N$, и пары $M_1 = -\gamma_1 \arctg(p_{f1}) < 0$ и $M_2 = -\gamma_2 \arctg(p_{f2}) > 0$, ($p_{f1} > 0$, $p_{f2} < 0$ — концевые наклоны оси), связанные соотношением $N_{z_B} = -M_1 - M_2$, z_B — аппликата подвижного конца (рис. 1(a)).

Из-за наличия пружин осевой наклон не будет убывать монотонно с координатой z . В начале он растёт от $p_{f1} > 0$ до q_1 в точке перегиба 1, потом, проходя через ноль, убывает до $q_2 < 0$ в точке перегиба 2 и вновь растёт до концевого $p_{f2} < 0$ (рис. 1(б)).

Рассматривается её отсечённая часть AZ от точки $A(z = 0)$ до точки $Z(z > 0)$ (рис. 1(a)), в которой в сечении действует изгибающий момент M_Z . Уравнение равновесия для AZ :

$$\frac{J_x^{(II)} y''_{zz}}{(1 + (y'_z)^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) + Fy - \gamma_1 \arctg(p_{f1}) + Nz = 0, \quad y(0) = 0, y(z_B) = 0. \quad (1)$$

В нем фигурирует неизвестные концевые наклоны p_{f1}, p_{f2} и сила N , подлежащие нахождению. Так называемый *касательный* модуль $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right)^{-1}$ определён для величин на оси, и он зависит от её наклона $p = y'_z$. Заменой $w = y - \frac{\gamma_1 \arctg(p_{f1}) - Nz}{F}$ — превышение $y(z)$ над линией точек перегиба (рис. 1(б)) — и переходом к переменной $p = y'_z$ уравнение преобразуется к

$$\frac{J_x^{(II)} \frac{dp}{dw} \left(p + \frac{N}{F} \right) \frac{d\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon}}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} + Fw = 0, \quad w(p_{fi}) = (-1)^i \cdot \frac{\gamma_i \arctg(p_{fi})}{F}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

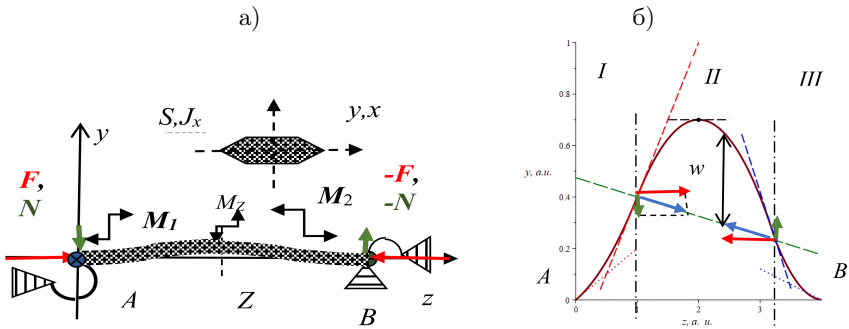


Рис. 1. а) Схема нагружения изогнутой колонны; б) относительный профиль $y(z)$: вертикальный черный штрих-пунктир — границы областей выпуклости I, II, III, красные точки — наклон оси p_{f1} в точке А, красный пунктир — наклон q_1 в точке перегиба 1, синие точки — наклон оси p_{f2} в точке В, синий пунктир — наклон q_2 в точке перегиба 2, зеленый длинный пунктир — линия точек перегиба, горизонт. Черный пунктир — касательная в точке максимума отклонения y .

Его условное решение (для $y(p)$) зависит также от наклонов $q_{1,2}$ в точках перегиба:

$$y(p) = \begin{cases} \frac{\gamma_1 \operatorname{arctg}(p_{f1}) - Nz}{F} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 \operatorname{arctg}(p_{f1})}{F}\right)^2 - \frac{2J_x^{(II)}}{F} \int_{p_{f1}}^p \frac{(p' + \frac{N}{F}) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}}, & p_{f1} \leq p \leq q_1, \\ \frac{\gamma_1 \operatorname{arctg}(p_{f1}) - Nz}{F} + \sqrt{\frac{2J_x^{(II)}}{F} \int_p^{q_1} \frac{(p' + \frac{N}{F}) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}}, & q_2 \leq p \leq q_1, \\ \frac{\gamma_1 \operatorname{arctg}(p_{f1}) - Nz}{F} - \sqrt{\frac{2J_x^{(II)}}{F} \int_p^{q_1} \frac{(p' + \frac{N}{F}) E_t dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}}, & q_2 \leq p \leq p_{f1}, \end{cases} \quad (3)$$

а продольная координата определится из рекурсивного соотношения $dz = \frac{dy}{p} \implies z = \int \frac{dy}{p}$.

Аналогичным образом [2, 3] определяется элементарная длина деформированной оси $dl = dz(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{p}(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ и оси восстановленной — $d\Lambda = \frac{dl}{1-\varepsilon} = \frac{dy}{p} \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-\varepsilon}$.

Пять неизвестных параметров в (3) определяется из следующих соотношений:

1. Обращение вспомогательной функции $w(p)$ в ноль в точках перегиба 1,2:

$$q_1 : (\gamma_1 \operatorname{arctg}(p_{f1}))^2 = 2J_x^{(II)} \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{E_t(p'F + N)dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4)$$

$$q_2 : (\gamma_2 \operatorname{arctg}(p_{f2}))^2 = 2J_x^{(II)} \int_{p_{f2}}^{q_2} \frac{E_t(p'F + N)dp'}{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

2. Вариация функции $w(p)$ (2) между точками перегиба равна нулю:

$$\int_{q_2}^{q_1} (Fp' + N)E_t(p')(1 + p'^2)^{-\frac{3}{2}} dp' = 0. \quad (6)$$

3. Уравнение баланса внешних пар для всей колонны:

$$N \left(\int_{p_{f1}}^{q_1} dz(p) + \int_{q_2}^{q_1} dz(p) + \int_{q_2}^{p_{f2}} dz(p) \right) = \gamma_1 \operatorname{arctg}(p_{f1}) + \gamma_2 \operatorname{arctg}(p_{f2}). \quad (7)$$

4. Принципиально новое [2, 3] условие на восстановленную длину оси:

$$\int d\Lambda = \int_{p_{f1}}^{q_1} \frac{\sqrt{1 + p^2}}{1 - \varepsilon} \frac{dy(p)}{p} + \int_{q_2}^{q_1} \frac{\sqrt{1 + p^2}}{1 - \varepsilon} \frac{dy(p)}{p} + \int_{q_2}^{p_{f2}} \frac{\sqrt{1 + p^2}}{1 - \varepsilon} \frac{dy(p)}{p} = l_0. \quad (8)$$

Уравнения (4)-(8) при подстановке в них осевого напряжения $\sigma_{ax} = \frac{F}{S\sqrt{1+p^2}}$, диаграммы сжатия $\varepsilon_{ax}(\sigma_{ax})$ — согласно закону Рамберга–Осгуда [4], или же кубическому [2, 3], теоретически разрешимы относительно зависимостей $p_{f1}(F)$, $p_{f2}(F)$, $q_1(F)$, $q_2(F)$, $N(F)$.

В начале изгиба $p_{f1} \ll 1$, а $z_B \approx l_0 \left(1 - \varepsilon \left(\frac{F}{S}\right)\right)$, и уравнения (4)-(7) принимают вид $N \approx \frac{\gamma_1 p_{f1} + \gamma_2 p_{f2}}{l_0 \left(1 - \varepsilon(F/S)\right)} = \frac{p_{f1}}{l_0 \left(1 - \varepsilon(F/S)\right)} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{p_{f2}}{p_{f1}}\right)$, $N \approx -\frac{F(q_1 + q_2)}{2} = -\frac{Fp_{f1}}{2} \left(\frac{q_1}{p_{f1}} + \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \cdot \frac{q_2}{p_{f2}}\right)$, $\gamma_1^2 p_{f1}^2 \approx J_x^{(II)} F E_t(\tilde{p})(q_1 - p_{f1})(p_{f1} - q_2)$, $\gamma_2^2 p_{f2}^2 \approx J_x^{(II)} F E_t(q_2 - p_{f2})(p_{f2} - q_1)$.

Предельным переходом $\chi_1 = \lim_{p_{f1} \rightarrow 0} \frac{q_1}{p_{f1}} \geq 1$, $\chi_2 = \lim_{p_{f1} \rightarrow 0} \frac{q_2}{p_{f2}} \geq 1$, $\chi_3 = \lim_{p_{f1} \rightarrow 0} \frac{p_{f2}}{p_{f1}} \leq 0$ и заменой $F = \sigma S$, $l_0 = \lambda i_x$, $\mu_i = \frac{\gamma_i}{S i_x}$, $i = 1, 2$ (приведенная

жесткость) (4)-(8) получается система уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mu_1 + \mu_2 \chi_3}{\sigma \lambda (1 - \varepsilon(\sigma))} + \frac{\chi_1 + \chi_2 \chi_3}{2} = 0, \\ & (\chi_1 - 1)(1 - \chi_2 \chi_3) = \frac{\mu_1^2}{\sigma E_t(\sigma)}, \quad (\chi_2 - 1) \left(1 - \frac{\chi_1}{\chi_3} \right) = \frac{\mu_2^2}{\sigma E_t(\sigma)}, \\ & \lambda = \frac{\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma(1 - \varepsilon(\sigma))}} \times \\ & \times \left(2\pi - \arcsin \left(\frac{\chi_3 - 0.5(\chi_1 + \chi_3 \chi_2)}{0.5(\chi_2 \chi_3 - \chi_1)} \right) - \arcsin \left(\frac{1 - 0.5(\chi_1 + \chi_3 \chi_2)}{0.5(\chi_1 - \chi_2 \chi_3)} \right) \right). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Общее решение для $\chi_i, i = 1, 2, 3$ (9) сводится к уравнению 4-й степени. Но, очевидно, что при одинаковых приведённых жёсткостях пружин $\mu_n, n = 1, 2$ у двух геометрически различающихся колонн из одного материала 4-е соотношение в системе (9) даёт идентичные зависимости $\sigma(\lambda)$. Одинаковы будут и ключевые параметры начального изгиба при одном и том же $p_{f1} \ll 1$: $q_1 = \chi_1 p_{f1}$, $p_{f2} = \chi_3 p_{f1}$, $q_2 = \chi_2 \chi_3 p_{f1}$ и отношение $\frac{N}{F} = -0.5(\chi_1 + \chi_2 \chi_3) p_{f1}$ — угловой наклон линии равнодействующей F и N , проходящей через точки перегиба (рис. 1(б)).

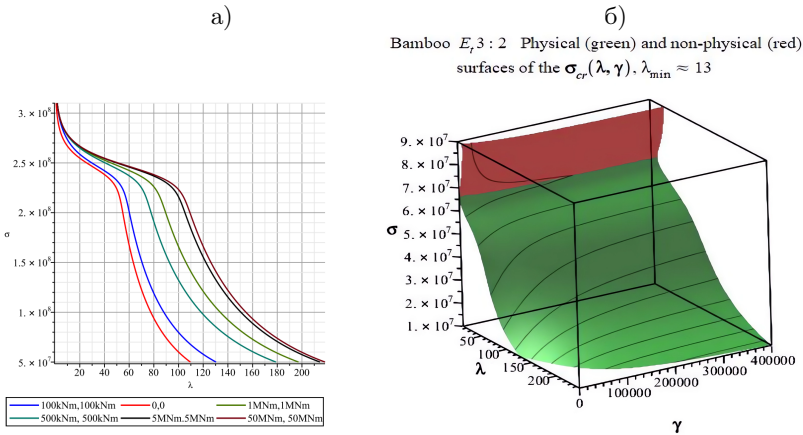


Рис. 2. а) Зависимость $\sigma_{cr}(\lambda)$, Па (10) для двутавра $S = 51.3 \text{ см}^2, i_x = 3.6 \text{ см}$, сплав А1 6061 Т6 [4] для $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0 \dots 50 \text{ МНм}$; б) 3d-график σ_{cr} , Па в зависимости от λ, γ , Н·м для бамбуковых колонн с сечением $100 \times 100 \times 10 \text{ мм}$, зеленый — физический лист, красный — нефизический.

В случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, Н·м поперечная сила $N = 0$, изгиб симметричен: $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, $\chi_3 = -1$, и

$$\lambda = \frac{2\sqrt{E_t(\sigma)}}{\sqrt{\sigma}(1 - \varepsilon(\sigma))} \left(\pi - \arctg \left(\frac{\sqrt{\sigma E_t(\sigma)}}{\mu} \right) \right). \quad (10)$$

Подстановка реальных данных для двутавра из алюминиевого сплава и колонн прямоугольно-трубчатого сечения из бамбука дают семейство линий (рис. 2(а)) и поверхность (рис. 2(б)) с физическим и нефизическим листами, смыкающимися над линией минимальной гибкости $\lambda_{min}(\gamma)$ — значений, при которых колонна не изгибается никакой осевой нагрузкой.

Литература

- [1] Yaylı M. Ö, Yerel Kandemir S. Buckling Analysis of a Column with Rotational Springs at Both Ends in Aircraft Column // Sustainable Aviation. 2016, P. 159–165. doi: 10.1007/978-3-319-34181-1_14
- [2] Chistyakov V. V., Soloviev S. M. Buckling in inelastic regime of a uniform console with symmetrical cross section: computer modeling using Maple 18 // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2023. Vol. 31. N 2. P. 174–188. doi: 10.22363/2658-4670-2023-31-2-174-188
- [3] Чистяков В.В Аналитическое и численное моделирование продольного изгиба в пластическом режиме однородной консоли с симметричным сечением // Журнал Технической Физики. 2023. Вып. 12. С. 1712–1716. doi: 10.61011/JTF.2023.12.56801.f207-23
- [4] Wang Y. Q. et al. Compressive buckling strength of extruded aluminium alloy I-section columns with fixed-pinned end conditions // Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 119. P. 396–403. doi: 10.1016/j.tws.2017.06.034

Изменение формы рельефа межфазной границы под действием межфазной диффузии

Шувалов Г.М., Костырко С.А.

g.shuvalov@spbu.ru, s.kostyrko@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Разработан подход для анализа морфологической устойчивости границы соединения двух материалов, учитывающий различие упругих свойств основных материалов и межфазного слоя. Предполагается, что неоднородность полей напряжений вдоль искривлённой межфазной поверхности приводит к изменению формы рельефа посредством массопереноса вдоль межфазной границы. При этом поток атомов вдоль границы считается пропорциональным градиенту химического потенциала.

Определены физические и геометрические параметры задачи, при которых наблюдается рост амплитуды начального рельефа и его сглаживание. Исследовано изменение формы рельефа межфазной границы в процессе его развития.

Ключевые слова: межфазная граница, поверхностная упругость, морфологическая неустойчивость.

Введение. Слоистые композитные структуры широко применяются во многих отраслях современной промышленности, поскольку обладают улучшенными механическими и физическими характеристиками. Однако несмотря на значительные успехи в применении таких структур, проблема их износа и разрушения остается актуальной. Например, еще на стадии выращивания гетероэпитаксиальных материалов на их межфазных поверхностях могут образовываться неровности, эволюционирующие при дальнейшей эксплуатации и приводящие к зарождению трещин и других дефектов. В связи с этим важно понимать законы образования и развития рельефа границы соединения двух материалов.

Данная работа продолжает наши исследования [1, 2] по изучению процессов образования топологических дефектов на свободных и межфазных поверхностях твердых тел и слоистых структур. Основной целью работы является анализ морфологической неустойчивости границы соединения двух материалов, вызванной межфазной диффузией, а также исследование изменения формы рельефа межфазной границы в процессе его развития.

Основные концепции. В качестве модели гетероэпитаксиального материала находящегося в условиях плоской деформации рассмотрим неоднородную плоскость $B_1 \cup B_2$ с границей раздела S

$$S = \{z : z \equiv \zeta = x_1 + if(x_1, \tau)\}, \quad (1)$$

$$B_1 = \{z : x_2 > f(x_1, \tau)\}, \quad B_2 = \{z : x_2 < f(x_1, \tau)\},$$

где $z = x_1 + ix_2$, $i^2 = -1$, оси x_1 , x_2 определяют декартову прямоугольную систему координат, $f(x_1, \tau)$ — периодическая функция, описывающая рельеф межфазной границы, при этом $f(x_1, \tau) = f(x_1 + a, \tau)$, $\max |f(x_1, \tau)| = A(\tau)$. Также считается, что в каждый момент времени межфазная граница имеет слабое искривление, т.е. $A(\tau) \ll a$.

Предполагается, что для минимизации полной энергии рассматриваемой системы форма межфазной границы S может меняться под действием межфазной диффузии. При этом изменение профиля межфазной границы с течением времени описывается уравнением [3]

$$\frac{\partial f(x_1, \tau)}{\partial \tau} = h(\zeta, \tau) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{r}{1+r} J_1(\zeta, \tau) - \frac{1}{r+1} J_2(\zeta, \tau) \right], \quad (2)$$

где $r = \mu_1/\mu_2$ — отношение жёсткостей материалов, J_j — поток атомов материала B_j вдоль межфазной границы, h — метрический коэффициент.

Поток атомов каждого материала вдоль границы их соединения связан с химическим потенциалом χ_j [4]

$$J_j(\zeta, \tau) = -\frac{D_j C_j}{k_b T} \frac{\partial \chi_j(\zeta, \tau)}{\partial s}, \quad (3)$$

где D_j и C_j — коэффициент межфазной самодиффузии и количество диффундирующих атомов на единицу площади для материала B_j , соответственно, k_b — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Выражение для химического потенциала χ_j имеет вид [3, 4]

$$\chi_j(\zeta, \tau) = [U_j(\zeta, \tau) + (-1)^{j+1} \varkappa(\zeta, \tau) U_s(\zeta, \tau)] \Omega_j, \quad \zeta \in S, \quad j = \{1, 2\}, \quad (4)$$

где \varkappa — локальная кривизна, U_s — плотность межфазной энергии, Ω_j и U_j — атомный объем и плотность энергии деформации материалов B_j .

Таким образом, для интегрирования уравнения (2) необходимо определить напряжённо-деформированное состояние композита (1). В результате приходим к плоской задаче теории упругости для бесконечной комплексной плоскости $B_1 \cup B_2$ под действием продольных усилий σ_1 и σ_2 . Для учёта упругого деформирования межфазной поверхности используется модель поверхностной/межфазной упругости Гёртина–Мёрдока [5], в соответствии с которой межфазная граница рассматривается как упругая мембрана S , идеально связанная с объёмными фазами B_1 и B_2 .

Условие идеального сцепления материалов имеет вид

$$\Delta u(\zeta) = u^+(\zeta) - u^-(\zeta) = 0, \quad \zeta \in S, \quad (5)$$

здесь $u = u_1 + iu_2$ — вектор перемещений, $u^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \pm i0} u(z)$, u_1 и u_2 — перемещения вдоль осей декартовой прямоугольной системы координат (x_1, x_2) .

На межфазной границе S также задаётся условие механического равновесия, которое формулируется в терминах обобщённого закона Юнга–Лапласа и в случае модели межфазной упругости Гёртина–Мёрдока имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \Delta \sigma(\zeta) = \sigma^+(\zeta) - \sigma^-(\zeta) = \gamma_0 \varkappa + \left[M \varkappa \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \gamma_0 \operatorname{Im} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} e^{i\alpha} \right] + \\ + i \left[M \operatorname{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} e^{i\alpha} - \gamma_0 \varkappa \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \pm i0} \sigma(z)$, $\sigma(z) = \sigma_{nn}(z) + i\sigma_{nt}(z)$ — вектор напряжений, γ_0 — остаточное межфазное напряжение, $M = \lambda^s + 2\mu^s$ — межфазная жёсткость, λ^s и μ^s — модули упругости, аналогичные параметрам Ламе, α — угол между касательной t к кривой S и осью x_1 .

На бесконечности заданы следующие условия:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{22} = \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{12} = \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \omega = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{11} = \sigma_j, \quad j = \{1, 2\}, \quad (7)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = \{1, 2\}$) — напряжения в глобальных координатах (x_1, x_2) и ω — угол поворота материальной частицы.

Энергия упругой деформации U_j материала B_j с упругими параметрами Ламе λ_j и μ_j и межфазная энергия U_s могут быть выражены следующим образом [1, 2]:

$$U_j = \left(\frac{1}{2}\lambda_j + \mu_j\right)(\varepsilon_{tt})^2 + (\varepsilon_{nn})^2 + \lambda_j\varepsilon_{nn} \varepsilon_{tt} + 2\mu(\varepsilon_{nt})^2, \quad (8)$$

$$U_s = \gamma_0 + \left(\frac{1}{2}\lambda_s + \mu_s\right) (\varepsilon_{tt}^s)^2,$$

здесь ε_{ij} — компоненты тензора объемных деформаций в локальной декартовой прямоугольной системе координат n, t (ось n перпендикулярна S), ε_{tt}^s — окружные деформации межфазной границы.

Напряженно-деформированное состояние композита (1), (5)–(7) определяется с использованием подхода предложенного в [6], который основывается на применении метода возмущений, выражений Мухелишвили и комплексных потенциалов Гурса – Колосова. При этом в качестве малого параметра выступает отношение амплитуды к длине волны искривления $\varepsilon = A(\tau)/a$.

При вычислении компонент тензоров деформаций объемных фаз и межфазной границы, а также метрического коэффициента h и кривизны межфазной границы \varkappa , используется первое приближение метода возмущений

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij(0)} + \varepsilon\varepsilon_{ij(1)}, \quad \varepsilon_{tt}^s = \varepsilon_{tt(0)}^s + \varepsilon\varepsilon_{tt(1)}^s, \quad (9)$$

$$\varkappa(x_1, \tau) = \varepsilon(\tau) f''(x_1), \quad h(x_1, \tau) = 1,$$

при этом функции $\varepsilon_{ij(1)}$, $\varepsilon_{tt(1)}^s$ ищутся в виде рядов Фурье.

Решение задачи (1), (5)–(7) дает неизвестные компоненты тензоров межфазной и объемной деформации, необходимые для интегрирования эволюционного уравнения и определения амплитуды каждой гармоники искривления рельефа как функции времени. С использованием изложенного подхода определены параметры системы, при которых наблюдается рост амплитуды рельефа и его сглаживание. Исследовано влияние продольных усилий, остаточного межфаз-

ного напряжения, межфазной жесткости, отношения жесткостей материалов и формы исходного рельефа на критическое значение длины волны искривления межфазной границы, при превышении которой наблюдается развитие рельефа. Также исследовано изменение формы рельефа межфазной границы в процессе его эволюции.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00087, <https://rscf.ru/project/22-11-00087/>.

Литература

- [1] Shuvalov G., Kostyrko S. On the role of interfacial elasticity in morphological instability of a heteroepitaxial interface // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2021. Vol. 33. P. 2095–2107.
- [2] Shuvalov G. M., Kostyrko S. A. Stability analysis of nanoscale surface patterns in ultrathin film coating // *Materials Physics and Mechanics.* 2022. Vol. 48. No. 2. P. 232–241.
- [3] Goldstein R. V., Makhviladze T. M., Sarychev M. E. Electromigration-induced instability of the interface between solid conductors // *Physical Mesomechanics.* 2018. Vol. 21. P. 275–282.
- [4] Asaro R. J., Tiller W. A. Interface morphology development during stresscorrosion cracking: Part I. Via surface diffusion // *Metallurgical and Materials Transactions B.* 1972. Vol. 3. P. 1789–1796.
- [5] Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 1975. Vol. 57. P. 291–323.
- [6] Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Stress distribution at the wavy surface of a solid incorporating surface stresses and surface tension. In: H. Altenbach et al. (eds.) *Advances in Solid and Fracture Mechanics.* Springer Cham. 2022. Vol. 180. P. 151–166.

Секция 6

Устойчивость и стабилизация механических и электромеханических систем

Stability and Stabilization of Mechanical and Electromechanical Systems

Управление поворотом транспортного средства на основе нейроинтерфейса

Бабич Н.А.¹ Фрадков А.Л.^{1,2}

fradkov@mail.ru, nickware@mail.ru

¹Институт проблем машиноведения РАН,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61,

²Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В работе описывается комплекс алгоритмических и программных средств для сбора и обработки сигналов электроэнцефалограммы (ЭЭГ), предназначенный для нейроинтерфейса, позволяющего управлять движением транспортного средства (мобильный робот, инвалидная коляска). Представлен порядок проведения экспериментов и классификации сигналов ЭЭГ с целью реализации двухвариантных движений роботов (поворот налево или направо, движение вперед или назад и т.п.).

Ключевые слова: мобильный робот, нейроинтерфейс, электроэнцефалограмма, подвижные объекты.

Введение. Одной из интереснейших и важнейших задач на стыке кибернетики, робототехники и нейронаук является управление оборудованием «силой мысли». Ее решение позволит расширить возможности реабилитации пациентов с нарушениями двигательного аппарата, улучшить качество робототехнических протезов, откроет новые возможности управления объектами, находящимися в труднодоступных и опасных областях и т.д. [1, 2]. Обычный подход к решению подобных задач состоит в создании программно-аппаратных комплексов, позволяющих измерять и обрабатывать сигналы электроэнцефалограммы (ЭЭГ) в режиме реального времени. Такие комплексы должны позволять производить предобработку сигналов ЭЭГ с целью снижения уровня шума и удаления артефактов, выделять информативные признаки, фиксировать и классифицировать намерения человека совершать то или иное движение [3]. Результаты классификации передаются на исполнительные устройства, подключенные к оборудованию или транспортным средствам, что при правильной работе всего комплекса позволяет совершить задуманное движение. Разработка подходов к созданию таких комплексов на основе нейроинтерфейсов уже несколько лет ведется в ИПМаш РАН [4, 5]. Ниже описывается структура одного из разработанных комплексов, применяемые алгоритмы и программы, приводится типовый план экспериментов по управлению медицинским транспортным средством. В качестве примера приводится описание и результаты одной серии экспериментов.

Постановка задачи сбора и обработки данных ЭЭГ. Опишем математическую постановку задачи управления оборудованием на ос-

нове нейроинтерфейса. Пусть $X(t)$, $t > 0$ — векторный сигнал ЭЭГ, а $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}$, где $i = 1, \dots, M$ — последовательные результаты измерений сигнала с i -го канала (отведения) электроэнцефалографа (измеряются на самом деле разности потенциалов между текущим и некоторым референтным электродом). Величины $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}$ относятся к моментам времени $t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0N}$, где $t_{0j} = t_0 + j\Delta t$, через t_0 обозначено время начала сбора данных, Δt — шаг сбора данных (sampling interval) $j = 1, \dots, N$. Обычно $t_0 = 0$, $\Delta t = T/N$, где T — величина интервала сбора данных (кадра). Результаты измерений сигнала в следующем кадре обозначаются через $x_{i,N+1}, x_{i,N+2}, \dots, x_{i,2N}$ и т.д. Время начала k -го кадра обозначается через t_k , так что $t_{kj} = t_k + j\Delta t$ — моменты измерений в k -м кадре. Размер кадра T определяется, исходя из того, что число отсчетов в кадре должно быть не менее 500–1000, чтобы уменьшить погрешность статистических оценок. С другой стороны, размер кадра T не должен быть большим, чтобы не вносить больших запаздываний в контур управления. В нашей работе было выбрано $T = 2$ с, $N = 500$, $\Delta t = 4$ мс = 0,004 с. Число отведений в экспериментах выбиралось $M = 21$.

Расчет и выдача управляющих воздействий происходит для каждого кадра в моменты $t_k = kT$. Предобработка измерений внутри кадра выполняется по алгоритму фильтра Баттерворта с нижней и верхней границами диапазона фильтрации $\omega_1 = 8$ Гц и $\omega_2 = 30$ Гц, соответственно. В промежутках между отсчетами считаем выходной сигнал фильтра постоянным: $g(t) = g(t_{kj})$ при $t_{k,j-1} < t < t_{k,j}$. Начальные условия при фильтрации задаются нулевыми.

Классификация намерений совершить движение. За этапом предобработки следует этап анализа (классификации) измеряемых сигналов и выдачи управляющих сигналов. Он начинается с подачи звукового или светового сигнала, сообщающего испытуемому, в какую сторону он должен повернуть транспортное средство: влево или вправо. В наших экспериментах повороту влево соответствовал короткий звуковой сигнал (0,5 с), а повороту вправо — длинный (2 с). Для полученного на последующем этапе предобработанного сигнала ЭЭГ $g(t)$ производится его анализ и обучение системы с целью определения его принадлежности к одному из двух классов, соответствующих намерениям совершить движение влево или вправо. Этап обучения состоит из нескольких кадров и длится до подачи следующего звукового сигнала. Для обучения используется один из известных алгоритмов машинного обучения (SVM, KNN, RF и др.) [6]. Обучение производится по сигналам в течение нескольких кадров (эпохи). Если эпоха содержит S кадров (батчей), то в ней содержится SN измерений. При обучении формируется вектор весов $w_S = (w_{S1}, w_{S2}, \dots, w_{Sn})$, который используется для классификации намерений испытуемого. Начальное значение вектора весов w_0 берется из результатов ранее проведенных экспериментов.

В конце каждой эпохи, завершающейся подачей нового звукового сигнала, проводится анализ обученной системы. А именно, по значению $H(t_k, g)$, вычисляется матрица ошибок $E(t_k) = \|e_{ab}(t_k)\|$, $a, b = 1, 2$ предсказания того, к какому классу относится сигнал. В качестве классификатора был выбран алгоритм k -ближайших соседей [6]. Полученная матрица ошибок $E(t, k)$ используется для принятия решения о том, какой управляющий сигнал следует отправить на объект управления на следующем этапе.

Проведение эксперимента. Для тестирования алгоритма был проведен эксперимент с целью оценить эффективность выбранного подхода. В эксперименте испытуемый сидит в инвалидном кресле с дистанционным управлением, на него надета электродная шапочка беспроводного электроэнцефалографа. И инвалидное кресло, и электроэнцефалограф подключены к устройству управления (устройству связи с объектом). В экспериментах нами использовался беспроводной электроэнцефалограф NeoRec CAP, который имеет 21 отведение, т. е. $M = 21$. Все время эксперимента делится на несколько интервалов — эпох. Каждая эпоха начинается с подачи звукового сигнала, который говорит испытуемому, в какую сторону нужно повернуть кресло (влево или вправо). Задача испытуемого за эту эпоху (которая длится 6–10 секунд) попытаться представить себе движение левой или правой рукой (в зависимости от звукового сигнала) таким образом, чтобы инвалидное кресло повернулось влево или вправо соответственно. Таким образом, эксперимент состоит из нескольких этапов: подача звукового сигнала, который говорит испытуемому, в какую сторону нужно повернуть; реакция испытуемого; обработка и анализ сигнала на устройстве управления; принятие решения и выдача управляющего сигнала на объект управления (инвалидное кресло).

Алгоритм управления был реализован на языке программирования Python. На этапе принятия решения о повороте происходит сохранение ЭЭГ сигнала при удачных попытках управления (когда тип поданного звукового сигнала совпадает с классом распознанного воображаемого движения). Эти сохранённые отрезки сигнала ЭЭГ дополняют собой датасет для обучения классификатора. Таким образом, возникает положительная обратная связь — алгоритм адаптируется под конкретного испытуемого и обучается лучше распознавать его намерения. Дообучение системы управления происходит через определённые промежутки времени, называемые сессиями. Один эксперимент длительностью 40 минут может состоять из 3–5 сессий. Для оценки корректности работы системы в целом также было введено понятие общей точности распознавания $P = D/K$, где D — количество правильно распознанных кадров, K — общее количество кадров в сессии.

Предполагается, что помимо адаптации (обучения) системы управления инвалидным креслом в процессе эксперимента также происходит и адаптация испытуемого. Это означает, что чем больше испытуемый пытается выполнять

задачи управления с помощью активности головного мозга, тем чаще у него должно это получаться. И действительно, было замечено, что в течение одной сессии (т. е. в течение времени, когда данные обучения неизменны) способность испытуемого совершать воображаемые движения так, чтобы получить правильную реакцию системы управления (и, соответственно, поворот инвалидного кресла в нужную сторону), растёт. Это выражается в том, что значение P возрастает в течение сессии.

Описанный эксперимент был многократно проведён в лаборатории ИПМаш РАН на разных испытуемых и показал, что разработанный подход позволяет получить точность распознавания воображаемых движений $P \approx 0.62$ (62%) за 4–5 сессий обучения по 10–15 минут каждая. За это время происходит адаптация как системы управления (классификатора), так и испытуемого. Реализованный программный комплекс позволяет автоматизировать процесс обучения системы управления, что упрощает практическое применение подхода в системах управления движением транспортного средства. Этот процесс не требует привлечения специалистов и может быть выполнен самим испытуемым.

Таким образом, предложенный подход к управлению поворотом транспортного средства на основе нейроинтерфейса показал себя перспективным. Дальнейшие исследования будут направлены на повышение точности распознавания и поддержку управления дополнительными типами движения (например, движением вперёд).

Работа поддержана Минобрнауки Российской Федерации (проект госзадания 124041500008-1).

Литература

- [1] Бодин О. Н., Солодимова Г. А., Спиркин А. Н. Нейроинтерфейс для управления роботизированными устройствами // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2019. № 4(30). С. 70–76.
- [2] Лобода Ю. О., Функ А. В., Гасымов З. А., Рачкован О. А. Управление мехатронными системами нейроинтерфейсом // XIII Международная научно-практическая конференция, посвященная 55-летию ТУСУРа. 2017. С. 143–146.
- [3] Lotte F., Bougrain L., Cichocki A. et al. A review of classification algorithms for EEG-based brain–computer interfaces: a 10 year update // J. Neural Eng. 2018. Vol. 15. P. 031005.
- [4] Plotnikov S. A., Semenov D. M., Lipkovich M., Fradkov A. L. Artificial intelligence based neurofeedback // Cybernetics And Physics. 2019. Vol. 8. Iss. 4. P. 287–291.
- [5] Babbysh N. Computing brain rhythm indicators of EEG signal // 2021 5th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA). 2021. С. 32–35.
- [6] Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Second Edition. 2019. 1104 p.

О стабилизации вертикального спуска квадрокоптера с подвешенным к нему грузом

Голуб А.П., Зудов В.Б., Ложкин Б.Я., Селоцкий Ю.Д.
seliutski@imec.msu.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, НИИ механики,
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский просп., 1

Аннотация. Рассматривается задача о полете квадрокоптера в вертикальной плоскости с подвешенным к нему грузом. Учитывается аэродинамическое воздействие как на квадрокоптер, так и на груз. Исследуются вопросы робастной стабилизации вертикального равномерного спуска в условиях отсутствия точной информации об аэродинамических характеристиках груза. Предложена схема построения закона управления, обеспечивающего такую стабилизацию в достаточно широкой области пространства параметров. Проведено численное моделирование.

Ключевые слова: динамика, управление, стабилизация, квадрокоптер, колебания.

Введение. В последнее время квадрокоптеры нашли применение в самых разных отраслях. Одним из перспективных вариантов их использования является транспортировка грузов на тросовом подвесе (например, в сфере строительства, при проведении наружных ремонтных работ и т. д.). При этом размеры груза могут быть достаточно значительными, так что воздействие на него аэродинамических сил будет оказывать заметное влияние на поведение системы в целом.

Исследованию динамики квадрокоптера с подвешенным к нему грузом посвящен целый ряд работ (например, [1]–[3]). Однако в них предполагается, что груз не взаимодействует со средой. Целью данной работы является исследование возможности стабилизации вертикального спуска квадрокоптера с грузом с учетом аэродинамического воздействия на груз.

Постановка задачи и уравнения движения. Рассмотрим механическую систему, состоящую из квадрокоптера и подвешенного к нему груза (рис. 1). Будем считать, что груз подвешен к центру масс квадрокоптера G на твердом стержне с помощью цилиндрического шарнира, и представляет собой твердое тело с центром масс в точке P . Ограничимся случаем, когда движение осуществляется в вертикальной плоскости.

Пусть OXY — неподвижная система координат, ось ординат которой вертикальна. Введем следующие обобщенные координаты: x, y — координаты центра масс коптера, θ — угол между прямой, соединяющей центры соседних винтов, и горизонталью, φ — угол между прямой GP и вертикалью.

Будем считать, что аэродинамическое воздействие на квадрокоптер сводится к силам \mathbf{T}_A и \mathbf{T}_B тяги, создаваемым передней и задней парой винтов (управления, направлены перпендикулярно плоскости винтов), и силе лобового сопро-

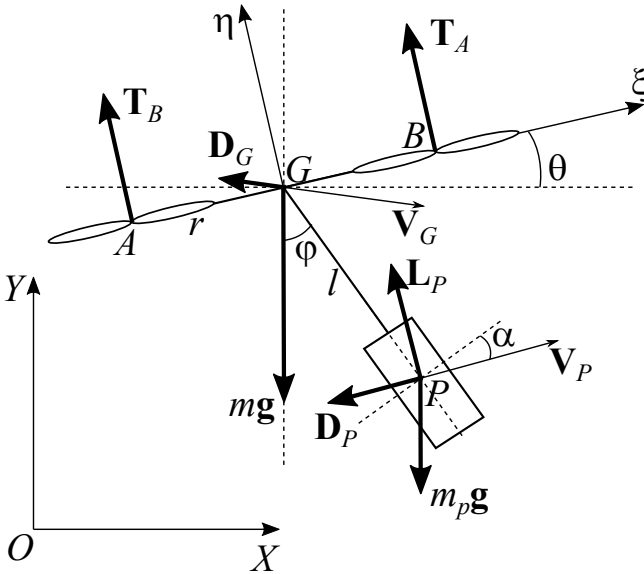


Рис. 1. Квадрокоптер с подвешенным к нему грузом в вертикальной плоскости.

тивления \mathbf{D}_G (направленной против скорости \mathbf{V}_G точки G). Кроме того, будем считать, что аэродинамическое воздействие на груз сводится к силе лобового сопротивления \mathbf{D}_P и боковой силе \mathbf{L}_P , которые приложены в центре масс груза (причем сила \mathbf{D}_P направлена против скорости \mathbf{V}_P точки P , а сила \mathbf{L}_P — перпендикулярно ей).

Введем единицы измерения таким образом, чтобы масса m коптера, половина r расстояния между центрами соседних винтов и ускорение свободного падения были равны единице (это эквивалентно обезразмериванию). Тогда уравнения движения можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + m_p) \ddot{x} + m_p l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -\mu(\tilde{C}_d V_G + \sigma C_d V_P) \dot{x} - \\ \quad - \mu \sigma C_l V_P \dot{y} - \mu \sigma V_P l (C_d \cos \varphi + C_l \sin \varphi) \dot{\varphi} - (T_A + T_B) \sin \theta, \\ (1 + m_p) \ddot{y} + m_p l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -\mu(\tilde{C}_d V_G + \sigma C_d V_P) \dot{y} + \\ \quad + \mu \sigma C_l V_P \dot{x} - \mu \sigma V_P l (C_d \sin \varphi - C_l \cos \varphi) \dot{\varphi} + \\ \quad + (T_A + T_B) \cos \theta - (1 + m_p), \\ J \ddot{\theta} = T_A - T_B, \\ m_p (r_p^2 + l^2) \ddot{\varphi} + m_p l (\ddot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) = \mu \sigma V_P l (C_l \sin \varphi - C_d \cos \varphi) \dot{x} - \\ \quad - \mu \sigma V_P l^2 C_d \dot{\varphi} - \mu \sigma V_P l (C_l \cos \varphi + C_d \sin \varphi) \dot{y} - m_p l \sin \varphi. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь J — центральный момент инерции квадрокоптера, r_p — центральный радиус инерции груза, \tilde{C}_d — безразмерный коэффициент лобового сопротивления квадрокоптера (будем считать его константой), σ — отношение характерных площадей груза и квадрокоптера, $\mu = 2m/\rho Sr$ (где ρ — плотность среды, S — характерная площадь квадрокоптера), C_d, C_l — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы груза, соответственно. Будем считать их функциями мгновенного угла атаки α (т. е. угла между скоростью \mathbf{V}_P и прямой, перпендикулярной GP).

Режим стационарного спуска и его робастная стабилизация. Рассмотрим режим стационарного вертикального спуска: $x \equiv 0$, $\dot{y} \equiv V_* < 0$, $\theta \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. При таком движении угол атаки груза равен $\pi/2$. Будем учитывать, что, в силу симметрии формы груза, вблизи данного режима имеют место соотношения

$$C_d = C_{d0} + O((\alpha - \pi/2)^2), \quad C_l = C_{l\alpha}(\alpha - \pi/2) + O((\alpha - \pi/2)^2).$$

Нетрудно показать, что для осуществления стационарного спуска с целевой скоростью необходимо задать для пар винтов тяги, равные

$$T_{A0} = T_{B0} = -\mu \frac{\tilde{C}_d + \sigma C_{d0}}{2} V_*^2 + \frac{1 + m_p}{2}.$$

Тогда систему, линеаризованную в окрестности режима стационарного спуска, можно представить в следующей форме:

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta A)X + Bu, \quad (2)$$

где $X = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi})^T$, $u = (T_A - T_{A0}, T_B - T_{B0})^T$ (управление), $\Delta A = A_1 C_{d0} + A_2 C_{l\alpha}$. Элементы матриц $A_{0,1,2}$ и B представляют собой определенные комбинации параметров.

Анализ системы (2) показывает, что управляемость имеет место при всех значениях скорости спуска V_* , за исключением трех (которые мы обозначим через V_{1-3}).

На практике аэродинамические характеристики конкретного груза могут быть заранее неизвестны. Однако для целого класса форм оболочки груза можно указать диапазоны изменения величин C_{d0} и $C_{l\alpha}$:

$$C_{d0} \in [C_{d0}^{\min}, C_{d0}^{\max}], \quad C_{l\alpha} \in [C_{l\alpha}^{\min}, C_{l\alpha}^{\max}].$$

Таким образом, необходимо исследовать возможность построения управления, обеспечивающего робастную стабилизацию целевого режима (т. е. его ста-

билизацию при любых значениях аэродинамических коэффициентов грузов из указанных интервалов).

Показано, что в области значений параметров, в которой выполнено неравенство $V_* < V_r = \max(V_{1,2,3}) \leq 0$, робастная стабилизация невозможна.

Для системы без учета аэродинамики груза было построено управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость спуска с показателем затухания не менее $\lambda_* > 0$, где $\lambda_* \geq \|\Delta A\|$ (в качестве нормы используется спектральная норма).

Для изучения робастности этого управления была проведена серия расчетов. На рис. 2 серым цветом изображена полученная при этом область значений на плоскости (m_p, V_*) , в которой построенное управление обеспечивает робастную стабилизацию. Сплошной кривой представлена зависимость $V_r(m_p)$. Видно, что построенная кривая дает достаточно точную оценку области робастной стабилизации.

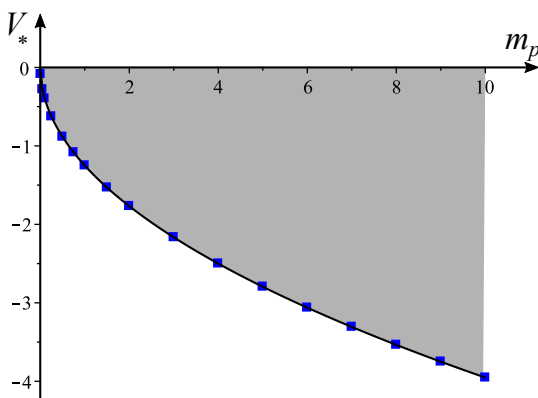


Рис. 2. Область параметров, в которой возможна робастная стабилизация (выделена серым).

Были проведены расчеты динамики объекта в силу полной системы (1) при разных значениях параметров системы и различных начальных условиях. Результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенного управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 24-29-00151.

Литература

- [1] Guerrero-Sánchez M.E., Mercado-Ravell D.A. et al. Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload // ISA Transactions. 2017. Vol. 68. P. 433–449.

- [2] Omar H.M., Akram R., Mukras S.M.S., Mahvouz A.A. Recent advances and challenges in controlling quadrotors with suspended loads // Alexandria Engineering Journal. 2023. Vol. 63. P. 253–270.
- [3] Куликов В. Е., Чукаева А. Н. Система управления квадрокоптером при транспортировке груза на внешней подвеске // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. 2016. № 14. С. 2–16.

Отображение кольца для изучения вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина

*Жусубалиев Ж.Т.*¹, *Коломиец Е.А.*¹, *Сопуев У.А.*², *Цуканов Д.Ю.*¹,
*Иванова Е.Н.*¹, *Цаньсин М.*¹, *Цзылун Н.*¹
 zhanyubai@gmail.com, lenus07@yandex.ru, ulansopuev@mail.ru,
 dmitrtsukanov@yandex.ru, verksel@mail.ru, inswsu@gmail.com,
 694587245@qq.com

¹Юго-Западный государственный университет, Международная научная лаборатория динамики негладких систем,
 305040, Российская Федерация, Курск, ул. 50 лет Октября, 94,
²Ошский государственный университет,
 723500, Кыргызстан, Ош, ул. Ленина, 331

Аннотация. Приводится отображение кольца для исследования вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина. В качестве автоколебательной системы, подверженной внешнему периодическому воздействию, рассматривается скалярное импульсное дифференциальное уравнение, которое хорошо описывает сложную динамику осциллятора Гудвина и поддается детальному бифуркационному анализу. Численно изучена бифуркационная структура областей вынужденной синхронизации.

Ключевые слова: осциллятор Гудвина, импульсное дифференциальное уравнение, вынужденная синхронизация, бифуркационная структура языков Арнольда.

Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \xi(t). \quad (1)$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^n$; A — постоянная Гурвицева $n \times n$ матрица; n -мерная вектор-функция $\xi(t)$, равная нулевому вектору, если $t \neq t_k$, и в момент $t = t_k$ ее интеграл равен b_k , где $b_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, \mathbb{Z}^+ — множество неотрицательных целых чисел. Решения $x(t)$ в интервалах $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$

непрерывны и удовлетворяют уравнению $\frac{dx}{dt} = Ax$, а при $t = t_k$ имеют разрыв $x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k$, $x(t_k^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x(t)$.

К системе уравнений (1) приводят многие задачи механики, электроники, теории управления, биологии [1]. В [2] была введена импульсная модель осциллятора Гудвина в форме динамической системы (1) для изучения регуляции уровня тестостерона в мужском организме. В серии публикаций [3, 4] исследовались регулярные и хаотические колебания, а в [5] — механизмы захвата автоколебаний импульсного осциллятора Гудвина внешним периодическим возбуждением в связи с анализом суточного ритма секреции гормонов, участвующих в выработке тестостерона.

Многие физиологические процессы в живых организмах, от одноклеточных микробов до млекопитающих, подчиняются 24-часовому ритму, называемому циркадным ритмом, который является результатом адаптации организма к смене дня и ночи [6]. В отсутствии смены дня и ночи период циркадного ритма может отличаться от 24 часов. В нормальных условиях циркадный ритм захватывается колебаниями освещенности и температуры. Известно, что существуют биологические часы, задающие циркадный ритм, которые управляются периодической внешней силой [6]. Описание внешнего периодического воздействия на автоколебательную систему основано на построении отображения окружности или кольца [6].

В данной работе ставится цель разработать методику получения отображения кольца для исследования вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие бифуркационную структуру областей вынужденной синхронизации, сопоставление которых с результатами исследований [5] показывает их качественное совпадение.

Импульсная модель с внешним периодическим воздействием. Будем рассматривать действие внешнего периодического возбуждения на автоколебания скалярного осциллятора Гудвина [4]:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \lambda = -b, \quad t \neq t_k, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t = t_k, \quad t_k \geq 0. \quad (2)$$

Здесь $b_k = F(z(t_k^-))$; $t_{k+1} = t_k + T_k$; $T_k = \Phi(z(t_k^-))$; $z(t_k^-) = M(1 + \cos(\omega t_k)) + x(t_k^-)$; $\omega = 2\pi/T$, где M, T — амплитуда и период внешнего воздействия. Функции Φ, F являются ограниченными и принимают положительные значения. В биологических приложениях Φ, F есть функции Хилла:

$$\Phi(z) = k_1 + k_2 \frac{(z/r)^p}{1 + (z/r)^p}, \quad F(z) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (z/r)^p},$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, r, p — параметры. Как мы отмечали ранее, решение уравнения (2) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках t_k .

Уравнение (2) определяет отображение кольца. В пределах интервала $t_k < t < t_{k+1}$ уравнение (2) имеет вид $\frac{dx}{dt} = \lambda x$, решение которого $x(t) = e^{\lambda(t-t_k^+)} x(t_k^+)$, $x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k$.

Отсюда для момента времени $t = t_{k+1}^+$ получаем, что

$$x(t_{k+1}^-) = e^{\lambda(t_{k+1}-t_k^+)} (x(t_k^-) + b_k), \quad t_{k+1} - t_k = T_k.$$

Введем обозначения $x_k = x(t_k^-)$ и $\theta_k = \omega t_k$. Тогда окончательно отображение принимает вид

$$x_{k+1} = e^{\lambda\Phi(x_k, \theta_k)} (x_k + F(x_k, \theta_k)), \quad \theta_{k+1} = \theta_k + \omega \Phi(x_k, \theta_k) \bmod 2\pi. \quad (3)$$

Параметры (3): $b = 0.1$; $k_1 = 40.0$; $75.0 < k_2 < 150.0$; $k_3 = 1.0$; $k_4 = 6.0$; $r = 2.7$; $p = 3$; $2.0 < M < 25.0$; $T = 1440$.

Показано, что если аппроксимировать функции Φ, F кусочно-линейными зависимостями, то отображение (3) становится кусочно-гладким.

Численные эксперименты. На рис. 1(а) изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма отображения (3), рассчитанная численно на плоскости параметров (M, k_2) . В динамической системе (3) возможны три режима — периодический, квазипериодический и хаотический. Области вынужденной синхронизации (резонансов) имеют вид, аналогичный структуре

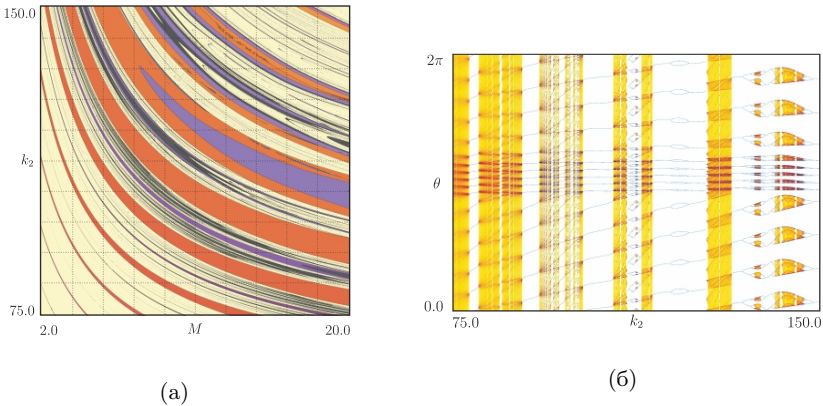


Рис. 1. Двухпараметрическая диаграмма (а). Однопараметрическая диаграмма (б).

языков Арнольда [6]. На плоскости параметров (M, k_2) между резонансными языками (областями с периодической динамикой) расположены области с квазипериодическими колебаниями.

На рис. 1(б) приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма для $M = 15.0$, показывающая переходы к синхронизации и выход из нее через седло-узловую бифуркацию, а также бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся возникновением хаоса. Как показано в [5], хаотизация колебаний в импульсном осцилляторе Гудвина происходит через классический сценарий Афраймовича–Шильникова. Выполнен бифуркационный анализ кусочно-гладкого отображения кольца. Основной упор в исследованиях сделан на различиях в структуре языков синхронизации и сценариях перехода к хаосу.

Заключение. Приведена методика построения отображения кольца для исследования вынужденной синхронизации импульсного осциллятора Гудвина. В качестве автоколебательной системы, подверженной внешнему периодическому возбуждению, рассмотрено скалярное импульсное дифференциальное уравнение, которое хорошо описывает сложную динамику осциллятора Гудвина и поддается детальному бифуркационному анализу [4]. Представлены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие бифуркационную структуру областей вынужденной синхронизации, сопоставление которых с результатами исследований [5] показало их качественное совпадение.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Юго-Западного государственного университета (программы стратегического лидерства «Приоритет 2030», проект № 1.7.21/4-24-7), а также гранта № 14-22 Омского государственного университета.

Литература

- [1] Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989. 273 p.
- [2] Churilov A., Medvedev A., Shepeljavi A. Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback // Automatica. 2009. Vol. 45. No. 1. P. 78–85. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.06.016>
- [3] Zhusubaliyev Zh. T., Churilov A., Medvedev A. Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation // Chaos. 2012. Vol. 22. No. 1. P. 013121. <https://doi.org/10.1063/1.3685519>
- [4] Zhusubaliyev Zh. T., Churilov A., Medvedev A. Complex dynamics and chaos in a scalar linear continuous system with impulsive feedback // Proc. of the 2012 American Control Conference, Montreal, Canada, 27-29 June, 2012. P. 2419–2424. DOI: 10.1109/ACC.2012.6314909

- [5] Medvedev A., Proskurnikov A.V., Zhusubaliyev Zh.T. Mathematical modeling of endocrine regulation subject to circadian rhythm // Annual Reviews in Control . 2018. Vol. 46. P. 148–164. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.08.002>
- [6] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge University Press, New York. 2001. 411 p.

Border collisions and merging phenomena in the unipolar pulse-width modulated control system

Zhusubaliyev Zh.T.,¹ *Sopuev U.A.*,² *Abdirasulov A.Z.*,²
Kolomiets E.A.,¹ *Gol'tsov Yu.A.*,³ *Tsukanov D.Yu.*¹
zhanybai@gmail.com, ulansopuev@mail.ru, aitibek.osh@gmail.com,
lenus07@gmail.com, umin@mail.ru, dmitrtsukanov@yandex.ru,

¹Southwest State University, International Scientific Laboratory for Dynamics of Nonsmooth Systems,

305040, Russian Federation, Kursk, 50 Years of October Str., 94,

²Osh State Universit,

723500, Kyrgyzstan, Osh, Str. Lenina, 331,

³Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov,

308012, Russian Federation, Belgorod, Kostyukov Str., 46

Annotation. The paper describes some of the nonlinear phenomena that one can observe in the unipolar pulse modulated control system. We show that the unusual character and large variety of these phenomena are a consequence of the interplay between the classical and border-collision bifurcations. As result one can observe the bistability, hysteresis phenomenon and transition to chaos through a finite sequence of border-collision bifurcations. The paper examines also the merging bifurcation, known also as “merging crisis”, associated with homoclinic bifurcations of unstable cycles.

Keywords: unipolar pulse-width modulated control system, non-smooth bimodal map, border-collisions bifurcations, merging crises.

Introduction. Many applications in physics, mechanics, control theory, electronics, biology and economics lead us to consider piecewise-smooth maps. Pulse-modulated control systems belong to the specified class of dynamical systems. Piecewise smooth dynamical systems mentioned above can exhibit various border-collision phenomena that have no analogues in smooth systems. These phenomena occur when an invariant set such as, for example, a fixed point, collides with a switching manifold at which the map changes its definition [1, 2]. As a result, unusual nonlinear phenomena arise that they are called border-collision bifurcations. An overview of border collision phenomena may be found in [3]–[6].

The purpose of the present study is to describe some of the nonlinear phenomena that one can observe in the unipolar pulse-width modulation control

system, associated with the interplay between the classical and border- collisions bifurcations, and merging phenomena [7].

The paper also explains the causes for the merging bifurcation of the chaotic attractors [7]. This type of non-local bifurcations in pulse modulated control systems remains poorly understood.

Bimodal non-smooth map and bifurcation analysis. Let us consider the unipolar pulse-width modulated control system which is described by the following non-smooth continuous bimodal map [8, 9]:

$$x_{k+1} = F(x_k), \tag{1}$$

$$F(x) = \begin{cases} e^\lambda(x - 1) + 1, & \text{if } x < \frac{q}{\Gamma} - \frac{P}{\alpha\Gamma}, \\ e^\lambda x + e^{0.5\lambda(1-z)} - e^{0.5\lambda(1+z)}, & \text{if } \frac{q}{\Gamma} - \frac{P}{\alpha\Gamma} \leq x \leq \frac{q}{\Gamma} + \frac{P}{\alpha\Gamma}, \\ e^\lambda(x + 1) - 1, & \text{if } x > \frac{q}{\Gamma} + \frac{P}{\alpha\Gamma}, \end{cases}$$

with $z = \frac{\alpha q}{P} - \frac{\alpha\Gamma}{P}$. Parameters: $P = 2.0$, $q = 4.0$, $\lambda = -0.2$, $2.0 < \alpha < 4.0$.

Fig. 1(a) shows the bifurcation diagram for $2.0 < \alpha < 4.1$. Fig. 1(b) illustrates a magnification of the bifurcation diagram that is outlined by the rectangle in Fig. 1(a). When the parameter α increases the fixed point undergoes the classical

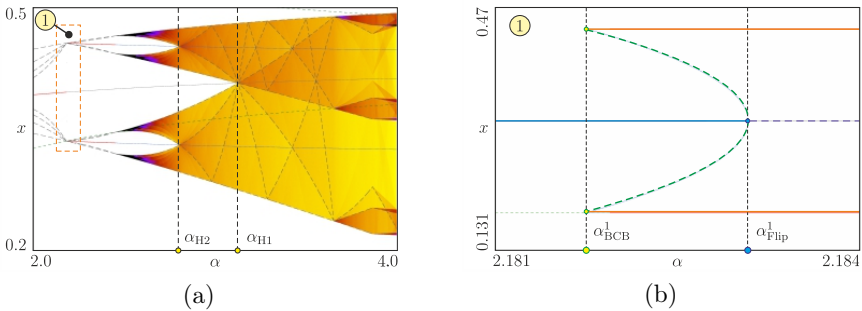


Fig. 1. (a) Bifurcation diagram for $2.0 < \alpha < 4.0$, $\alpha_{H2} \approx 2.80178842$ and $\alpha_{H1} \approx 3.121461424$. (b) Coexistence of the stable fixed point with a stable 2-cycle.

subcritical period-doubling bifurcation. As a result, a fixed point becomes an unstable one. At the bifurcation point $\alpha = \alpha_{FIP}^1$ the unstable 2-cycle merges with the fixed point. Inspection of Fig. 1(b) shows how the unstable and stable 2-cycles appear in a fold border-collision bifurcation at α_{BCB}^1 . As the parameter α decreases

the stable 2-cycle merges with the saddle 2-cycle and disappears in a border-collision fold bifurcation. The domain between the point of subcritical flip bifurcation α_{Flip}^1 and of border-collision fold bifurcation α_{BCB}^1 is a region of bistability. In this region the stable fixed point coexists with a stable 2-cycle. When crossing the boundaries of the region bistability the map (1) demonstrates hard transitions from the stable 2-cycle to the stable fixed point and vice versa (Fig. 1(b)).

A merging bifurcation occurs when, under the variation of the parameter, a chaotic attractor collides with an unstable m -cycle and the bands of this attractor which contacts with the unstable m -cycle merge in pairs [5] (Fig. 2).

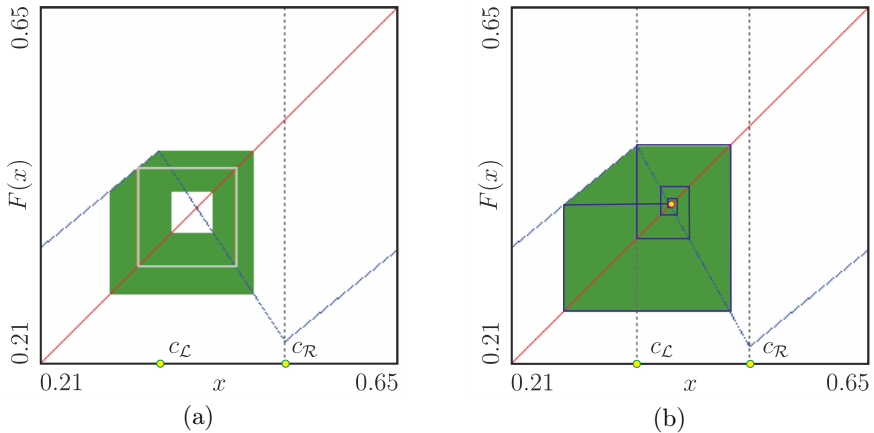


Fig. 2. (a) The 2-band chaotic attractor for $\alpha = \alpha_{\text{H2}}$. (b) The single-band chaotic attractor for $\alpha = \alpha_{\text{H1}}$.

Note that the boundaries of a chaotic attractor are formed by critical points and their images and at the bifurcation point the unstable m -cycle collides with some of them. This leads to the appearance of a homoclinic orbit to this cycle, which is critical at the bifurcation point [5]. As a result, the number of bands of the chaotic attractor is decreased by m [5].

Conclusions. The purpose of this paper was to discuss some of the complex dynamic behavior such as bistability, hysteresis phenomenon and transition to chaos in a unipolar pulse-width modulated control system. The behavior of such a converter is described by a piecewise-smooth bimodal map. The paper showed how the unipolar pulse-width modulated control system can exhibit the bistability, hysteresis phenomena and transition to chaos via the finite sequence of classical period-doubling and border-collision fold bifurcations. We also examined merging

transitions of chaotic attractors [5, 7] associated with homoclinic bifurcations of unstable cycles with negative multipliers.

Acknowledgements. Zh.T. Zhusubaliyev and E.A. Kolomiets were supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the scope of the programme “Implementation of the Strategic Academic Leadership program Priority 2030” (1.7.21/4-24-7). Sopuev U.A. and Abdirasulov A.Z. acknowledge the support of the Osh State University under grant 19-24. The work of Yu.A. Gol'tsov was supported within the framework of the Program “Priority 2030” on the base of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. The work was realized using equipment of High Technology Center at BSTU named after V.G. Shukhov.

References

- [1] Feigin M.I. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems // J. Appl. Math. Mech. 1970. Vol. 34. Iss. 5. P. 861–869. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
- [2] Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems // Physica D. 1992. Vol. 57. P. 39–57. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90087-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90087-4)
- [3] Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003. 363 p.
- [4] Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. New York: Springer, 2008. 497 p.
- [5] Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019. 637 p.
- [6] Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Sushko I., Gardini L. Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve // Chaos. 2022. Vol. 32. P. 043101. <https://doi.org/10.1063/5.0086419>
- [7] Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Chaotic attractors in crisis // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1507–1510. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1507>
- [8] Avrutin A., Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Cascades of alternating pitchfork and flip bifurcations in H-bridge inverters // Physica D. 2017. Vol. 345. P. 27–39. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.12.008>
- [9] Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T. Piecewise-linear map for studying border collision phenomena in DC/AC converters // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2020. Vol. 30. Iss. 7. P. 2030015. <https://doi.org/10.1142/S0218127420300153>

Об устойчивости системы «мост-пешеходы»

Зайцева Ю.С.,^{1,2} Фрадков А.Л.^{1,3}

zyus@ipme.ru, alf@ipme.ru

¹Институт проблем машиноведения РАН,

199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61,

²Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,

197022, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5,

³Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Оценка устойчивости инженерных сооружений, включая мосты, является неотъемлемой частью проектирования. Для этого применяются статические методы сопротивления материалов и дифференциальные уравнения, описывающие динамику конструкции. Однако воздействие человека как нагрузки изучено недостаточно из-за сложности его поведения. В данном исследовании предлагается рассмотреть систему «мост-пешеходы» через призму теории автоматического управления и проанализировать ее устойчивость с использованием известных критериев.

Ключевые слова: гашение колебаний, танцующий мост, динамика конструкции, модель человека, мост Миллениум, синхронизация, мостостроение.

Введение. Капитальные строения, используемые человеком, такие как здания, лестницы, лифты, виадуки, мосты, пешеходные переходы относятся к ответственным инженерным сооружениям. К ним предъявляются высокие требования по обеспечению прочности, жесткости и устойчивости конструкции. Одним из факторов, влияющих на долговечность конструкции являются колебания, поэтому при проектировании проверяется возможность возникновения резонанса на собственных частотах конструкции и вычисляются пределы допустимой нагрузки [1, 2]. Помимо внешних природных воздействий, на конструкцию может действовать временное усилие в виде транспорта и пешеходов. Воздействие последних зафиксировано, по большей части, во время колебаний пешеходных мостов, где существенное значение имеет количество пешеходов.

Модель системы «мост-пешеходы». Устойчивость мостов, подверженных различным внешним нагрузкам, оценивают путем дифференциальных уравнений вида [3, 4]:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t), \quad (1)$$

где M , C , K — масса, демпфирование и жесткость моста, соответственно, x — перемещение моста в поперечном направлении, F — силы внешнего возмущения.

Для исследования влияния пешеходов на устойчивость моста силу F принимают равной сумме поперечных компонент сил реакций опор всех пешехо-

дов, а модель пешехода представляют в виде механического осциллятора [4, 5]. Наиболее известным случаем стала раскачка пешеходного моста Миллениум, имеющего характерные для вантового моста характеристики. Эксперименты подвергли сомнению предполагаемую причину раскачивания моста — синхронный шаг пешеходов, переопределив ее как следствие [4]. На основе этого предположения появились результаты [4, 5], где исходя из равенства периодических решений уравнений для пешеходов и моста выводится критическое количество пешеходов, создающих отрицательную силу демпфирования, раскачивающую мост.

Однако известно, что локомоция человека основана на его естественном свойстве сохранять равновесие, что до сих пор не было отражено ни в одной модели хождения человека. В то же время, существуют кибернетические модели человека-оператора, выполняющего задачи ручного управления, структура которых основана на представлении процессов нервной системы в частотной области [6, 7]. Такие модели описывают поведение человека как динамическое звено замкнутой системы управления. На основе результатов [7] в данной работе предложено использовать упрощенную кибернетическую модель пешехода, предполагая, что он стремится сохранить равновесие шагая по колеблющейся поверхности и ориентируясь по зрительному стимулу:

$$-K_p(A, \omega)N\dot{x}(t)e^{-\tau t} = F_N(t), \quad (2)$$

где K_p — отрицательный коэффициент усиления, A и ω — средние величины амплитуды и частоты шага, F_N — поперечная компонента силы реакции опоры N пешеходов, τ — время нейромускульного запаздывания.

Коэффициент K_p зависит от параметров шага пешехода и имеет смысл поперечной силы, формирующейся в результате действия пешехода на поверхность моста. Количественно в зависимости от типа походки: спокойного шага, бега и т. д. — коэффициент будет лежать в некоторых пределах.

Анализ устойчивости. Представление системы «мост-пешеходы» в виде замкнутой системы автоматического управления позволяет работать с ее характеристическим уравнением, применяя различные методы оценки устойчивости, не решая при этом дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему без учета запаздывания и преобразуем (1), (2) в передаточную функцию со следующим характеристическим уравнением:

$$M\lambda^2 + (C - K_p N)\lambda + K = 0. \quad (3)$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной системы (1), (2) является отрицательный знак всех корней (3), то есть: $\text{Re}\{p_{1,2}\} < 0$. Применяя алгебраический критерий устойчивости Гурвица к (3), получим следующее

критическое количество пешеходов:

$$N_{cr} < \frac{C}{K_p}. \quad (4)$$

Для численной оценки рассмотрим случай, когда пешеходы идут с частотой $\omega = 5, 4$ рад/с, чему соответствует $K_p \approx 40$. Мост имеет величину демпфирования $C = 7681$ кг/с [8]. Подставив эти параметры в (4), получим, что $N_{cr} = 192$.

Для учета влияния запаздывания на систему удобно воспользоваться частотным критерием Я.З. Цыпкина [9], который позволяет найти критические для устойчивости системы частоту и запаздывание из следующих соотношений:

$$|W(\omega_0, N_{cr})| = 1, \quad (5)$$

$$\tau_0(n) = \frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0} + \frac{2\pi n}{\omega_0}, \quad (6)$$

где W — передаточная функция разомкнутой системы (2), (3), ω_0 и τ_0 — критическая частота и запаздывание, соответственно, $\theta(\omega_0) = \arctg(W)$, n — любое целое положительное число.

Решая (5) относительно параметра N_{cr} для всех $\omega_0 > 0$, получим, что система устойчива для $N_{cr} = 160$, при этом частота и запаздывание системы могут быть любыми. Дальнейшие вычисления для большего числа пешеходов выявляют нелинейную зависимость $N_{cr}(\tau_0, \omega_0)$.

Заключение. Предложенное новое описание системы «мост-пешеход» в терминах теории автоматического управления позволяет оценивать ее устойчивость с помощью критерия Гурвица и частотного критерия Я. З. Цыпкина для систем с запаздыванием. В результате исследования получено, что для более точных результатов необходимо учитывать запаздывание в системе.

Работа поддержана Минобрнауки Российской Федерации (проект госзадания 124041500008-1).

Литература

- [1] Веселов С. А., Смирнов И. М., Шестовицкий Д. А. Использование современных программных комплексов для решения задач устойчивости при проектировании мостов // Транспорт: проблемы, идеи, перспективы (Санкт-Петербург, 18–25 апреля, 2022 г.): сб. трудов LXXXII Всерос. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Санкт-Петербург: Изд-во ПГУПС. 2022. Т. 2. С. 17–22.
- [2] Овчинников И. И., Овчинников И. Г., Филиппова В. О. Насколько уникальны колебания Волгоградского моста? // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2015. Т. 6. № 14. С. 81–91.

- [3] Zivanovic S., Pavic A., Reynolds P. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review // *J. of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 279. P. 1–74.
- [4] Belykh I., Bocian M., Champneys A., Jeter R., Macdonald J., McRobie A. Emergence of the London Millenium Bridge instability without synchronisation // *Nature Communications*. 2021. Vol. 12. No. 7223.
- [5] Belykh I., Jeter R., Belykh V. Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // *Applied Sciences and Engineering*. 2017. Vol. 3. No. e1701512.
- [6] Ефремов А. В., Тяглик М. С., Тяглик А. С., Иргалеев И. Х. Разработка математической модели летчика в задаче управления с предвидением // *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2019. Т. 3. С. 39–45.
- [7] Hess R., Moore J. K., Hubbard M. Modeling the Manually Controlled Bicycle // *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*. 2012. Vol. 42. No. 3.
- [8] Han H., Zhou D., Ji T., Zhang J. Modeling of Lateral Forces Generated by Pedestrians Walking Across Footbridges // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 89. P. 1775–1791.
- [9] Цыпкин Я. З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // *Авт. и Тел.*. 1946. Т. 7. № 2-3. С. 107–129.

Стабилизация рассогласования угловых значений в одноканальной системе слежения

Зубов С. В.

sergei.zubov010921@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Рассматривается одноканальная система слежения по угловой координате. Как угловая координата объекта слежения, так и угловая координата наблюдателя предполагаются малыми по абсолютной величине относительно некоторой линии визирования. Исследуется математическая модель некоторой системы слежения и для нее строится стабилизирующее управление, удерживающее величину углового рассогласования в малой окрестности нулевого значения.

Ключевые слова: одноканальная система слежения, стабилизация углового рассогласования.

Введение. Существующие и проектируемые системы слежения за объектами наблюдения как правило, являются двухканальными [1]. Это соответствует двум процессам слежения в двух плоскостях — вертикальной и горизонтальной. В большинстве случаев эти два процесса независимы друг от друга, поэтому для анализа достаточно изучать только один канал слежения, например, только вертикальный, или только горизонтальный. Поэтому ниже исследу-

ется только одноканальная система слежения. Здесь рассматривается система только для малых значений угловых координат как для объекта наблюдения, так и для наблюдателя. Это связано с тем, что получаемая модель системы слежения в этом случае является линейной и может быть разрешена в явном виде. Имеется в виду, что в большинстве практически важных случаев (например, для малых значений центрального угла) путь по дуге окружности может быть заменен путем по хорде, т. е. криволинейный путь — путем по прямой. Формульно это выражается таким образом: $\sin \alpha = \alpha$ при малом $|\alpha|$.

Постановка задачи. В качестве базовой математической модели одноканальной системы слежения возьмем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{dt} &= zv, \\ \frac{dy}{dt} &= v. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x , z — соответственно угловые координаты объекта наблюдения и наблюдателя, отсчитываемые от некоторой зафиксированной линии визирования, $v = \text{const} > 0$ — скорость удаления объекта наблюдения от точки наблюдения (где располагается наблюдатель), y — расстояние от нашей точки наблюдения до объекта наблюдения (дальность). Система (1) является корректной в смысле равенства размерностей величин, входящих в правые и левые части. Кроме этого, система (1) адекватна процессу слежения за объектом наблюдения, что к тому же подтверждается практикой.

Предположим, что в системе (1) для каждого данного момента времени t известна величина $x(t)$. Поставим себе целью за счет выбора величины z в системе (1) стабилизировать разность $\psi = x - z$ в окрестности точки $\psi = 0$, т. е. будем искать такой способ выбора величины z , при котором величина $\psi = x - z$ будет удерживаться в некоторой достаточно малой наперед заданной окрестности точки $\psi = 0$. Предлагается взять в качестве управляющего воздействия скорость угловой координаты z и составить соответствующую систему уравнений для величин x , y , z :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \beta \frac{v}{y} (x - z), \\ \frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{dz}{dt} &= u. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь величина u — управляющее воздействие на систему (2), которое и предстоит выбрать. Величина β — это коэффициент, равный либо $+1$, либо -1 , и

выбирается в зависимости от наличия соотношений $\dot{x} > 0$, $\dot{x} < 0$, $x > z$, $x < z$. То есть имеем всего четыре случая и для каждого величина β определяется однозначно.

Метод решения. Фактически анализ системы (2) сводится к рассмотрению скалярного уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta \frac{v}{y} \psi - u, \quad y = y_0 + vt, \quad y_0 = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Приступим теперь к формированию закона управления $u(t)$, при котором величина $\psi(t)$, подчиняющаяся уравнению (3), не будет выходить за пределы интервала $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ для всех моментов времени $t \geq 0$ при том условии, что $|\psi(0)| < \varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ — постоянный параметр. Ниже мы убедимся, что параметр ε может быть выбран сколь угодно малым и быть наперед заданным.

Предположим, что $|\psi(t)| < \varepsilon$ для всех t , $0 \leq t < t_1$ и в момент t_1 выполняется равенство $|\psi(t_1)| = \varepsilon$, т. е. либо $\psi(t_1) = +\varepsilon$, либо $\psi(t_1) = -\varepsilon$. Пусть для определенности $\psi(t_1) = +\varepsilon$. Организуем управление $u(t)$ следующим образом. Возьмем $u(t) = +M$ для всех t , $t_1 \leq t < t_2$, где t_2 — первый после t_1 момент времени, для которого выполняется равенство $\psi(t_2) = -\varepsilon$. Если такого момента времени нет, то полагаем в качестве t_2 символ $+\infty$. Здесь $M = \text{const} > 0$, выбирается из соотношения $v\varepsilon/y < M$, например, достаточно положить $M = v\varepsilon/y_0$. При таком управлении $u(t)$ величина $\psi(t)$ в соответствии с уравнением (3) будет удовлетворять неравенствам $-\varepsilon < \psi(t) \leq +\varepsilon$ для всех t , $t_1 \leq t < t_2$. Если указанный момент t_2 существует, то для него и для последующих моментов времени управление $u(t)$ строится аналогично, значение управления уже будет $-M$. Случай $\psi(t_1) = -\varepsilon$ также рассматривается по аналогии.

Таким образом, сформировано релейное управление $u(t)$, принимающее лишь два значения: $+M$ и $-M$. Моментами переключения являются моменты времени t_k , $k = 1, 2, \dots$, для которых выполняется соотношение $|\psi(t_k)| = +\varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$. Это релейное управление $u(t)$, применяемое в уравнении (3), обеспечивает для величины $\psi(t)$ выполнение неравенств $-\varepsilon \leq \psi(t) \leq +\varepsilon$ для всех моментов времени. Что касается параметра ε , то его величина использовалась лишь для выбора константы M , поэтому делаем вывод, что при указанном способе построения релейного управления $u(t)$ параметр $\varepsilon > 0$ может быть выбран заранее и по величине может быть взят сколь угодно малым.

Обсуждение результатов и выводы. Для исходной одноканальной системы слежения, описываемой системой уравнений (1), в предположении малости значений соответственно углов, составляемых визуальными линиями наблюдаемого объекта и наблюдателя с некоторой фиксированной линией визирования, построена математическая модель системы стабилизации рассогласования значений этих углов за счет использования релейного управления.

Параметры этого управления могут быть выбраны заранее и определяются значениями коэффициентов исходной системы слежения. С точки зрения математической теории управления [2] построенное стабилизирующее управление $u(t)$ осуществляет возникновение для величины $\psi(t)$ в уравнении (3) одномерного стабильного колебания, каковым и является вышеупомянутый отрезок $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ на числовой оси. К примеру, для двухканальной системы слежения с угловыми координатами объекта наблюдения (x_1, x_2) и с угловыми координатами наблюдателя (z_1, z_2) для соответствующего вектора углового рассогласования (ψ_1, ψ_2) , $\psi_1 = x_1 - z_1$, $\psi_2 = x_2 - z_2$ после введения стабилизирующего управления стабильным колебанием будет некоторый прямоугольник в фазовом пространстве (ψ_1, ψ_2) [3].

Литература

- [1] Лебедев А. А., Карабанов В. А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М.: Машиностроение., 1965. 528 с.
- [2] Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение., 1966. 352 с.
- [3] Зубов С. В. Стабилизация движений линейных систем при наличии ограниченных возмущений // IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. СПбГУ, 09–12 марта 2021 г. Санкт-Петербург, 2021. С. 380–382.

К вопросу асимптотической устойчивости системы автономных дифференциальных уравнений с голоморфной правой частью

Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Королев В.С.

guennadi.ivanov@gmail.com, g.alferov@spbu.ru, v.korolev@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Рассмотрены условия устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагается новый подход к задаче устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений. Если нулевое решение системы автономных дифференциальных уравнений с голоморфной правой частью асимптотически устойчиво, то и нулевое решение системы уравнений с полиномиальной правой частью также будет асимптотически устойчивым.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость решений.

Введение. Основной результат настоящей заметки состоит в следующем: если нулевое решение системы автономных дифференциальных уравнений с голоморфной правой частью асимптотически устойчиво, то и нулевое решение системы автономных дифференциальных уравнений с полиномиальной

правой частью, где полином представляет собой сумму достаточно большого числа первых членов ряда, стоящего в правой части исходной системы, также будет асимптотически устойчивым [1]–[12].

Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

представляется в виде сходящегося в окрестности нуля ряда

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + \dots,$$

в котором $f_k(x)$ — однородная степени k форма относительно переменных x с постоянными коэффициентами.

Теорема 1. Если решение $x \equiv 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво, то существует $l \geq 1$ такое, что решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x} = g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_l(x) \quad (2)$$

также будет асимптотически устойчивым.

Доказательство. По предположению нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Тогда существует окрестность нуля A , которая для системы (1) будет областью асимптотической устойчивости, и в силу теоремы об области асимптотической устойчивости [13, 2] для этой области будут существовать отрицательно определенная функция $v(x)$, $-1 < v(x) < 0$, и положительно определенная функция $w(x)$, $w(x) > \alpha > 0$ при $\|x\| > \beta > 0$, связанные на решениях системы (1) соотношением

$$\frac{dv(x)}{dt} = w(1 + v). \quad (3)$$

Соотношение (3) запишем в виде

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} f(x) = w(1 + v(x)). \quad (4)$$

Для некоторого l определим функцию $h(x)$ равенством

$$h(x) = \sum_{k=l}^{\infty} f_k(x).$$

Тогда соотношение (4) можно записать так:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x}(g(x) + h(x)) = w(1 + v).$$

Отсюда ясно, что на решениях системы (2) будет выполняться соотношение

$$\frac{dv(x)}{dt} = w(1 + v) - \frac{\partial v(x)}{\partial x}h(x). \quad (5)$$

Из свойств функций $v(x)$ и $w(x)$ ясно, что, увеличивая значение параметра l , можно добиться, чтобы второе слагаемое из правой части соотношения (5) не меняло знак первого слагаемого. Но тогда в силу теоремы об асимптотической устойчивости [14] нулевое решение системы (2) будет асимптотически устойчивым, что и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Замечания. Из доказательства теоремы следует, что:

1. Увеличение значения параметра l не будет влиять на устойчивость системы (2). Поэтому для любого $m > l$ нулевое решение системы (2), в которой l заменено на m , будет также асимптотически устойчивым.
2. Для проверки асимптотической устойчивости систем (1) и (2) можно использовать одну и ту же функцию Ляпунова.

Из приведенных замечаний с очевидностью следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Для того, чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое l , при котором нулевое решение системы (2) будет асимптотически устойчивым.

Литература

- [1] Иванов Г. Г., Алферов Г. В., Ефимова П. А. Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 37–48.
- [2] Иванов Г. Г., Алферов Г. В., Королев В. С. Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1(56). С. 5–13.
- [3] Иванов Г. Г., Алферов Г. В., Королев В. С. Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 31–39.
- [4] Иванов Г. Г., Алферов Г. В., Королев В. С. Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 16–28.

- [5] Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements // AIP Conference Proceedings, ICNAAM. 2018. Vol. 2040. P. 150014.
- [6] Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P. Conditions of asymptotic stability for linear homogeneous switched systems // AIP Conference Proceedings, ICNAAM. 2017. Vol. 1863. P. 080002.
- [7] Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A. Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) / Stochastic methods for estimation and problem solving in engineering. 2018. P. 74–112.
- [8] Alferov G., Ivanov G., Efimova P. Structural study of limited invariant sets of relay stabilized (Book Chapter) / Mechanical systems: Research, Applications and Technology. 2017. P. 101–164.
- [9] Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings, ICNAAM. 2020. Vol. 2293. P. 060004.
- [10] Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. About asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings, ICNAAM. 2020. Vol. 2293. P. 060005.
- [11] Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. About stability of selector linear differential inclusions // AIP Conference Proceedings, ICNAAM. 2020. Vol. 2040. P. 150013.
- [12] Kadry S., Alferov G., Korolev V., Shymanchuk D. Mathematical Models of Control Processes and Stability In Problems of Mechanics // AIP Conference Proceedings. 2022. Vol. 2425. P. 080004.
- [13] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
- [14] Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 271 с.

О рациональном выборе переменных и формы уравнений в задачах устойчивости и стабилизации систем с геометрическими связями

Красинский А.Я.

krasinsk@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Аннотация. Математическое моделирование динамики систем с геометрическими связями составляет специальный раздел аналитической механики несвободных систем. Полученные в этом направлении абстрактно-теоретические результаты до

недавнего времени не применялись в прикладных исследованиях. Поэтому традиционное для технической практики описание управляемой динамики современных устройств уравнениями с множителями связей приводит к громоздким моделям размерностей, превышающим число степеней свободы. В данной работе переходом к уравнениям в избыточных координатах размерность модели сокращена на удвоенное число связей. В общей задаче стабилизации заданной конфигурации системы с геометрическими связями на основе теории критических случаев размерность модели сокращается дополнительно: управление определяется из подсистемы, содержащей только первое приближение уравнений для независимых координат.

Ключевые слова: несвободные системы, аналитическая механика, геометрические связи, модель динамики, устойчивость, стабилизация.

Введение. Широкое распространение манипуляторов с параллельной кинематикой придало особую актуальность разработке способов строгого нелинейного моделирования механических систем с геометрическими связями. Аналитическая механика несвободных систем [1]–[4] представляет широкий выбор форм уравнений и типов переменных, однако до сих пор практически во всех исследованиях конкретных технических устройств с геометрическими связями динамика моделируется [5, 6] громоздкими уравнениями Лагранжа с множителями связей. Возможно поэтому для технических устройств с параллельной кинематикой нет результатов по включению в модель динамики исполнительных приводов. В данной работе предложено упрощение исследования динамики систем с геометрическими связями, основанное на результатах аналитической механики в избыточных координатах [3]. Размерность модели в избыточных координатах за счет исключения из рассмотрения зависимых скоростей и множителей связей сокращается на удвоенное число связей. В задачах стабилизации структура полученной модели создает возможность дополнительного сокращения методами теории критических случаев размерности системы, из которой определяется стабилизирующее воздействие. Предлагаемое сокращение размерности позволяет включать в модель динамику приводов.

Математические модели динамики систем с геометрическими связями. Рассмотрим несвободную механическую систему с координатами $q' = (q_1, q_2, \dots, q_{n+m})$, $m \leq n$ (штрих означает транспонирование), кинетической энергией (суммирование по повторяющимся индексам)

$$T(q, \dot{q}) = 1/2 a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + a_i(q) \dot{q}_i + T_0(q), \quad i, j = \overline{1, n+m}, \quad (1)$$

потенциальной энергией $\Pi(q)$, находящейся под действием непотенциальных сил $\tilde{Q}_i(q, \dot{q})$, $i = \overline{1, n+m}$, в которые могут входить управления. На систему наложены независимые геометрические связи

$$f_\sigma(q_1, q_2, \dots, q_{n+m}), \quad \sigma = \overline{1, m}, \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \neq 0. \quad (2)$$

Уравнения движения с множителями связей. Введем векторы:

$$\begin{aligned} q' &= (q_1, \dots, q_{n+m}); & r' &= (q_1, \dots, q_n); & s' &= (q_{n+1}, \dots, q_{n+m}); \\ f'(q) &= (f_1(q), \dots, f_m); & \tilde{Q}'(q, \dot{q}) &= (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{n+m}); & \lambda' &= (\lambda_1, \dots, \lambda_m); \\ \tilde{Q}'_r(q, \dot{q}) &= (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n); & \tilde{Q}'_s(q, \dot{q}) &= (\tilde{Q}_{n+1}, \dots, \tilde{Q}_{n+m}). \end{aligned}$$

Связи (2) накладывают на вариации координат условия

$$\frac{\partial f(q)}{\partial r} \delta r + \frac{\partial f(q)}{\partial s} \delta s = 0, \quad \delta s = -B(q) \delta r, \quad B(q) = - \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Из принципа Даламбера–Лагранжа получаются уравнения с множителями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tilde{Q} + \left(\frac{\partial f(q)}{\partial q} \right)' \lambda, \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - \Pi(q). \quad (4)$$

Размерность модели (4), (2) значительно превышает число степеней свободы. В большинстве задач нет необходимости в получении реакций связей, поэтому исключаемыми переменными, начиная с [1], в первую очередь являются множители связей. При моделировании конкретных технических устройств для исключения множителей связей применяется (см., напр. [6]) чрезвычайно трудоемкий способ, предложенный еще А. М. Ляпуновым [1] (ср. [2]–[4]).

Свободные от множителей связей уравнения в избыточных координатах. Используя для δs их выражения из (3), перепишем (4)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \tilde{Q}_r - B'(q) \lambda, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = \tilde{Q}_s + \lambda, \quad (5)$$

откуда в общем случае можно выразить множители связей

$$\lambda = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} - \tilde{Q}_s.$$

Подставляя множители в уравнения для независимых координат, из (5) имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \tilde{Q}_r - B'(q) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} - \tilde{Q}_s \right).$$

Из продифференцированных по времени уравнений связей (2) получим

$$\dot{s} = - \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \dot{r} = B(q)\dot{r}. \quad (6)$$

Используя (6), исключим их из кинетической энергии (1) и непотенциальных сил, обозначив полученные выражения через $T^*(q, \dot{r})$ и $Q(q, \dot{r})$. Сравнивая соответствующие производные $T^*(q, \dot{r})$ и $T(q, \dot{q})$, учитывая интегрируемость связей (6), будем иметь математическую модель размерности $2n + m$ в избыточных координатах в форме М. Ф. Шульгина [3]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = Q_r + B'(q) \left(\frac{\partial L^*}{\partial s} + Q_s \right), \quad \dot{s} = B(q)\dot{r}. \quad (7)$$

Устойчивость и стабилизация конфигураций систем с геометрическими связями. Допустим, что система допускает равновесие $r = r_0, s = s_0$. Вводя возмущения $r = r_0 + x, s = s_0 + y$, полученные из (7), уравнения возмущенного движения могут быть приведены к форме [7]

$$\dot{x} = x_1, \quad \dot{x}_1 = Mx + Nx_1 + Hy + X_1^{(2)}(x, x_1, z), \quad \dot{y} = B(x, y)x_1. \quad (8)$$

Выделив критические переменные заменой $z = y - B(0, 0)x$ [8], для характеристического уравнения имеем

$$\lambda^m [E_n \lambda^2 - N\lambda - (M + B'(0, 0)H)] = 0. \quad (9)$$

На основе теоремы Каменкова [9] с использованием условия $F(r_0 + x(t), s_0 + y(t)) = 0$ доказана теорема [10].

Теорема. Если действительные части всех ненулевых корней уравнения (9) отрицательны, положение равновесия асимптотически устойчиво.

Согласно этой теореме стабилизация равновесия до асимптотической устойчивости в полной нелинейной системе обеспечивается решением методом [11] линейно-квадратичной задачи для линейной управляемой подсистемы

$$\dot{x} = x_1, \quad \dot{x}_1 = (M + B'(0, 0)H)x + Nx_1 + Vu, \quad u = Kx + K_1x_1. \quad (10)$$

Таким образом, размерность задачи управления сокращена до $2n$, т. е. еще на m .

Благодаря свойству асимптотической устойчивости при наличии циклических координат переход в модели к переменным Рауса делает возможным дополнительное в сравнении с (10) уменьшение размерности задачи управле-

ния: из управляемой подсистемы, кроме зависимых координат, исключаются и неуправляемые импульсы.

Литература

- [1] Ляпунов А. М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982. 632 с.
- [2] Суслов Г. К. Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1946. 670 с.
- [3] Шульгин М. Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании // Труды Среднеазиатского ун-та им. В. И. Ленина. 1958. Вып. 144. Ташкент: Издательство САГУ. С. 183.
- [4] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 824 с.
- [5] Deabs A., Goma F. R., Khader K. Parallel robot // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2021. Vol. 14(6). P. 10–27.
- [6] Brinker J., Corves B., Wahle M. Comparative study of inverse dynamics based on Clavel's Delta robot // 14th IFToMM World Congress. Taipei. 2015.
- [7] Krasinskii A. Y., Krasinskaya E. M. Complex Application of the Methods of Analytical Mechanics and Nonlinear Stability Theory in Stabilization Problems of Motions of Mechatronic Systems // Lecture Notes in Electrical Engineering. 641 LNEE. P. 357–370.
- [8] Aiserman M. A., Gantmacher F. R. Stabilitaet der Gleichgewichtslage in einem nichtholonomen System // Z. angew. Math. und Mech. 1957. Vol. 37. No. 1/2. P. 74–75.
- [9] Каменков Г. В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 211 с.
- [10] Krasinskiy A. Y., Krasinskaya E. M. A stabilization method for steady motions with zero roots in the closed system // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. No. 8. P. 1386–1398.
- [11] Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1967. С. 475–514.

Об устойчивости одномерной модели движений чувствительного элемента электромагнитного бесконтактного подвеса

Удалов П.П.,¹ Лукин А.В.,¹ Попов И.А.,¹ Штукин Л.В.,¹
Полеткин К.В.²

udalov_pp@spbstu.ru, lukin_av@spbstu.ru, popov_ia@spbstu.ru,
shtukin_lv@spbstu.ru, 022810003@hfut.edu.cn

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29,

²Технологический университет Хэфэй,

230026, Китайская Народная Республика, Хэфэй, ул. Цзиньчжай, 96

Аннотация. В работе рассматривается модель одномерных движений токопроводящего тела в форме тонкостенного кольца в электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. С помощью асимптотического метода многих масштабов получено приближенное аналитическое решение для динамики системы в окрестности квазистатического равновесия. В пространстве параметров системы исследована устойчивость режима стационарной левитации. Отмечено влияние учета медленных масштабов времени при построении асимптотических разложений на получаемые условия устойчивости режима левитации.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, электромагнитная индукция, левитация, нелинейная динамика, устойчивость колебаний, метод многих масштабов.

Введение. Электромагнитный подвес — устройство, работающее на основе принципа электромагнитной индукции [1] и уравнивающее силы тяжести инерционной массы (ИМ) пандеромоторными силами [2], что позволяет реализовывать бесконтактное позиционирование ИМ в вертикальном направлении (левитацию) [1, 3]. Отсутствие механического контакта между ИМ и неподвижной частью устройства позволяет достигать высокую надежность, стабильность и большее время безотказной работы. Инерционная масса электромагнитного подвеса выполнена в форме простейшего геометрического объекта (диск, кольцо, прямоугольная рамка, сфера), и изготовлен из проводящего материала.

Основная цель настоящего исследования заключается в аналитическом исследовании динамики кольцеобразной ИМ в поле двух круговых катушек индуктивности в предположении о том, что высота левитации является медленно меняющейся во времени. Для медленно меняющейся компоненты высоты левитации исследуются зоны асимптотической устойчивости. Они дополняют условия на устойчивость постоянной компоненты высоты левитации, уже исследованные в литературе.

Математическая модель. Рассматривается модель вертикальных движений инерционной массы (ИМ) электромагнитного подвеса, выполненного в форме тонкого кольца прямоугольного сечения и находящегося в переменном электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности.

Система уравнений колебаний ИМ в безразмерном виде запишется как [4]:

$$\xi_l'' + \varepsilon \lambda \xi_l' = \varepsilon (\alpha m^{\xi_l} j_{pm} \sin \tau - 1), \quad j_{pm}' + r j_{pm} = -m \cos \tau - m^{\xi_l} \xi_l' \sin \tau, \quad (1)$$

где $\xi_l = \frac{l}{r_l}$, $\xi_{l0} = \frac{l_0}{r_l}$, $j_s = \frac{I_s}{I_l}$, $j_{pm} = \frac{i_{pm}}{I_l}$, $\tau = \omega t$, $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 r_l}$, $\alpha = \frac{L_l I_l^2}{\hat{m} g r_l} \delta$, $r = \frac{R_{pm}}{L_{pm} \omega}$, $\lambda_l = \frac{\lambda}{\hat{m} \omega}$, $b_l = \frac{r_{pm}}{r_l}$, $b_s = \frac{r_{pm}}{r_s}$, $\hat{\chi}_l^2 = \frac{4b_l}{(1+b_l)^2 + \xi_l^2}$, $\hat{\chi}_s^2 = \frac{4b_s}{(1+b_s)^2 + \xi_l^2}$, $m_{l|pm} = \frac{M_{l|pm}}{L_{pm}} = \frac{1}{\delta} \frac{M_{l|pm}}{L_l} = \frac{1}{\pi \delta} \frac{\sqrt{b_l} \left(\frac{2}{\hat{\chi}_l} - \hat{\chi}_l \right) K(\hat{\chi}_l^2) - \frac{2}{\hat{\chi}_l} E(\hat{\chi}_l^2)}{\ln\left(\frac{8r_l}{0.4470t_l}\right) - 2}$, $m_{s|pm} = \frac{M_{s|pm}}{L_{pm}} = \frac{1}{\delta} \frac{M_{s|pm}}{L_l} = \frac{1}{\pi \delta} \frac{w_s}{w_l^2} \frac{b_l}{\sqrt{b_s}} \frac{\left(\frac{2}{\hat{\chi}_s} - \hat{\chi}_s \right) K(\hat{\chi}_s^2) - \frac{2}{\hat{\chi}_s} E(\hat{\chi}_s^2)}{\ln\left(\frac{8r_l}{0.4470t_l}\right) - 2}$, $m = m_{l|pm} + j_s m_{s|pm}$, $\delta = \frac{L_{pm}}{L_l} = \frac{b_l}{w_l^2} \frac{\ln\left(\frac{8r_{pm}}{0.4470t_{pm}}\right) - 2}{\ln\left(\frac{8r_l}{0.4470t_l}\right) - 2}$, t — время, g — ускорение свободного падения, \hat{m} — масса ИМ, R_{pm} — электрическое сопротивление ИМ, λ — коэффициент вязкого трения между ИМ и окружающей средой, $L_l = \ln\left(\frac{8r_l}{0.4470t_l}\right) - 2$ — собственная индуктивность левитационной катушки, $M_{l|pm}$ — величина взаимной индуктивности между левитационной катушкой и ИМ, $M_{s|pm}$ — между стабилизирующей катушкой и ИМ, $\hat{\chi}_{l,s}$ — эллиптические модули; $K(\hat{\chi}_{l,s}^2)$, $E(\hat{\chi}_{l,s}^2)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно, $(\)' = \frac{\partial}{\partial \tau}$, $(\)'' = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$, $(\)^{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}$.

В предположении о высокой частоте ($\omega = 10$ МГц) токов i_l , i_s и при характерном размере левитационной катушки ($r_l \approx 1000$ мкм) [5] параметр ε является малым ($\varepsilon \approx 10^{-7} - 10^{-5}$), что позволяет применить асимптотический метод нелинейной механики для оценки динамики системы (1).

Построение асимптотического решения. Для нахождения равномерно пригодного асимптотического разложения решения системы (1) применим метод многих масштабов [6]. Для этого представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned}
 j_{pm}(\varepsilon, T_0) &= j_0(T_0) + \varepsilon j_1(T_0) + \varepsilon^2 j_2(T_0), \\
 \xi_l(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= \xi_{l0}^{st} + \xi_{l0}^{dyn}(T_1) + \varepsilon \xi_{l1}(T_0) + \varepsilon^2 \xi_{l2}(T_0), \\
 m &= m_0 + m_0^{\xi_l}(\xi_l - \xi_{l0}) + \frac{1}{2} m_0^{\xi_l \xi_l}(\xi_l - \xi_{l0})^2, \\
 \tau &= T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \\
 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $T_n = \varepsilon^n \tau$, $n = 0, \dots, \infty$, $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, $m_0 = m(\xi_{l0})$, $m_0^{\xi_l} = m^{\xi_l}(\xi_{l0})$, $m_0^{\xi_l \xi_l} = m^{\xi_l \xi_l}(\xi_{l0})$, $(\)^{\xi_l \xi_l} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2}$.

Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , возможно получить набор систем дифференциальных уравнений, на основе решения которых может быть найдено приближенное решение искомой системы (1).

Для того, чтобы решение системы (1) было равномерно пригодным, необходимо приравнять к нулю т. н. секулярные члены [6]:

$$m_0 m_0^{\xi_l} = -\frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma}, \tag{3}$$

$$D_1^2 \xi_{l0}^{dyn} + g(\xi_{l0}) D_1 \xi_{l0}^{dyn} + f(\xi_{l0}) = 0. \tag{4}$$

Для нахождения условий на асимптотическую устойчивость уравнения (4) применяется вторая теорема Ляпунова [7].

Условия на асимптотическую устойчивость (4) примут вид

$$g(\xi_{l0}) > 0, \quad f^{\xi_{l0}}(\xi_{l0}) > 0. \tag{5}$$

Условия (5) определяют области в пространстве параметров системы, при которых решения (4) асимптотически устойчивы.

С учетом (5) уравнение (3) примет вид

$$m(\xi_{l0}^{st}) m^{\xi_l}(\xi_{l0}^{st}) = -\frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma}. \tag{6}$$

Уравнение (6) наряду с (3) выражает равенство потенциальных сил тяжести ИМ и Ампера [4]. Устойчивость положения равновесия находится из условия положительности положительной определенности квадратичной формы потенциальной энергии в окрестности положения равновесия [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{i0}^{st}} \left(m(\xi_{i0}^{st}) m^{\xi_i}(\xi_{i0}^{st}) + \frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma} \right) > 0 \Rightarrow (m^{\xi_i}(\xi_{i0}^{st}))^2 + m(\xi_{i0}^{st}) m^{\xi_i \xi_i}(\xi_{i0}^{st}) > 0. \quad (7)$$

Заключение. В проведенной работе рассмотрена аналитическая модель одномерных нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в форме тонкостенного кольца из токопроводящего материала. С помощью асимптотического метода многих масштабов получено приближенное аналитическое решение для динамики системы в окрестности квазистатического равновесия. Показано, что учет зависимости величины положения ИМ от медленных времен приводит к новым условиям на устойчивость колебаний электромагнитного подвеса.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 21-71-10009.

Литература

- [1] Maxwell J. C. An elementary treatise on electricity. Oxford: The Clarendon Press, 1888. 208 p.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1941. 510 с.
- [3] Han H. S., Kim D. S. Magnetic levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer Dordrecht, 2016. 247 p.
- [4] Скубов Д. Ю., Индейцев Д. А., Удалов П. П., Попов И. А., Лукин А. В., Полеткин К. В. Нелинейная динамика микромеханического неконтактного индукционного подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 98–112.
- [5] Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // Sensors and actuators A: physical. 2000. Vol. 83. No. 1–3.
- [6] Nayfeh A. H. Perturbation methods. New-York: John Wiley & Sons, 2008. 425 p.
- [7] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 407 с.

Обобщенная нумерация Вольфрама для клеточных автоматов, моделирующих динамику одночастичных цепочек Буслаева

Яшина М.В.,^{1,2,3} *Таташев А.Г.*^{1,3}

yash-marina@yandex.ru, a-tatashev@yandex.ru

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),

125319, Российская Федерация, Москва, Ленинградский пр., 64,

²Московский авиационный институт (НИУ МАИ),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

³Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),

111024, Российская Федерация, Москва, ул. Авиамоторная, 4-а

Аннотация. Задачи управления потоками частиц на сетях со сложной геометрией и конкуренцией за пространство требуют разработки эффективных алгоритмов. Исследуются системы, которые, с одной стороны, могут быть представлены в виде клеточных автоматов, и, с другой стороны, в виде динамических систем, относящихся к классу систем, называемых контурными сетями или сетями Буслаева. Эти системы могут использоваться при моделировании автотранспортных потоков. Замкнутая последовательность из $2m$ ячеек образует контур, каждый из которых имеет общие точки (узлы) с двумя соседними. На каждом контуре находится частица, перемещающаяся на каждом шаге. Частицы, стремящиеся одновременно пересечь общий узел, прекращают перемещаться и не возобновляют движение. При $m = 1$ правило работы системы эквивалентно правилу элементарного клеточного автомата 071 (ЕСА 071) в терминологии С. Вольфрама. Двойственным для него элементарным клеточным автоматом является ЕСА 184, представляющий простейшую модель трафика. В настоящей работе приводится алгоритм вычисления номера клеточного автомата, соответствующего цепочке с произвольным значением m , и двойственного автомата.

Ключевые слова: алгоритмы нумерации, клеточные автоматы Вольфрама.

Введение. В работах [1, 2] рассматривалась система, называемая бинарной цепочкой контуров и принадлежащая классу динамических систем, которые называются контурными сетями. Этот класс разработан А.П. Буслаевым с целью создания моделей трафика, имеющих сетевую структуру. Системы этого класса называются также сетями Буслаева. В [3] исследовалась обобщение бинарной цепочки — одночастичная замкнутая цепочка контуров. Обобщение одночастичной цепочки и ее непрерывный аналог исследовались соответственно в [4] и [5]. В [2] отмечается соответствие бинарных цепочек с соответствующими элементарными клеточными автоматами [6]. В [7] установлено, что двойственными к элементарным клеточным автоматам, соответствующим бинарным цепочкам, являются клеточные автоматы, которые также используются в моделировании трафика. В настоящей работе устанавливается соответствие

между одночастичными цепочками контуров и клеточными автоматами, являющимися обобщением элементарных клеточных автоматов. Найден алгоритм, позволяющий вычислить для этих клеточных автоматов номера в терминологии Вольфрама.

Бинарные цепочки контуров. Бинарная цепочка контуров содержит N контуров с номерами $0, 1, \dots, N - 1$, на каждом из которых располагаются две ячейки — нижняя ячейка 1 и верхняя ячейка 0, рис. 1. На каждом

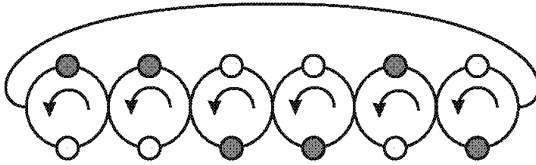


Рис. 1. Бинарная замкнутая цепочка Буслаева.

контуре имеется частица, находящаяся в каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ в одной из ячеек. Каждый контур имеет два соседних — слева и справа. Соседние контуры i и $i + 1$ (сложение по модулю N) имеют общую точку (узел), которая на каждом контуре размещена между ячейками этого контура. На каждом шаге частица переходит в другую ячейку контура, если нет задержки. Если частицы движутся против часовой стрелки, то частица контура i при переходе из ячейки 0 в ячейку с номером 1 проходит через узел общий с контуром $i + 1$ (сложение по модулю N), а при переходе из ячейки 1 в ячейку с номером 0 проходит через узел общий с контуром $i - 1$ (вычитание по модулю N), $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Задержки в перемещении частицы возникают при попытках двух частиц одновременно пересечь один и тот же общий узел. При такой попытке перемещается только одна частица, выбираемая в соответствии с правилом разрешения конкуренции, или ни одна из двух конкурирующих частиц не перемещается в текущий момент и в будущем (при ленивом правиле разрешения конкуренции). В настоящей работе считаем, что действует ленивое правило.

Элементарные клеточные автоматы. Элементарный клеточный автомат содержит одномерную бесконечную или кольцевую последовательность клеток. В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ каждая клетка находится в одном из состояний: 0 или 1. Состояние клетки i однозначно определяется состоянием в момент t клеток $i - 1$, i и $i + 1$, т. е. состояний данной клетки и соседних слева и справа. Элементарный клеточный автомат определяется таблицей

$$111 \rightarrow a_7, 110 \rightarrow a_6, 101 \rightarrow a_5, 100 \rightarrow a_4,$$

$$011 \rightarrow a_3, 010 \rightarrow a_2, 001 \rightarrow a_1, 000 \rightarrow a_0.$$

Тогда номер N клеточного автомата вычисляется по формуле $N = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot 2^i$.
 Имеется 256 элементарных клеточных автоматов: ЕСА 000, ЕСА 001, ..., ЕСА 255.

Соответствие бинарных цепочек элементарным клеточным автоматам. Бинарной цепочке контуров ставится элементарный клеточный автомат, в котором клетка с номером i находится в момент t в состоянии 0 или 1, если в этот момент на контуре i частица находится соответственно в ячейке 0 или 1.

Бинарной цепочке с ленивым правилом соответствует ЕСА 029 (если частицы движутся против часовой стрелки) или ЕСА 071 (если частицы движутся по часовой стрелке).

Элементарные клеточные автоматы и модели трафика.

Если в таблице элементарного клеточного автомата заменить в правых частях строк таблицы нули на единицы и, наоборот, то получится таблица элементарного клеточного автомата, называемого двойственным к исходному. Сумма номеров двойственных друг к другу элементарных клеточных автоматов равна 255.

Двойственным для элементарного клеточного автомата ЕСА 071, т.е. для элементарного клеточного автомата, соответствующего бинарной цепочке с ленивым правилом и движением по часовой стрелке, соответствует автомат ЕСА 184, который рассматривается как простейшая модель трафика [8, 9]. В этой модели частицы движутся по бесконечной или замкнутой последовательности ячеек, при этом на каждом шаге частица перемещается на ячейку вперед, если ячейка впереди свободна, и остается на месте, если ячейка впереди занята. Соответствующая клетка автомата находится в состоянии 1, если в соответствующей ячейке в модели находится частица, и находится в состоянии 0, если соответствующая ячейка свободна. Двойственным к автомату ЕСА 029 является автомат ЕСА 226, которому соответствует модель трафика, которая отличается от модели, соответствующей ЕСА 184, только направлением движения частиц.

Одночастичная цепочка контуров. Обобщением бинарной цепочки является одночастичная цепочка, на каждом контуре которого имеется $2m$ ячеек. Общий для контуров i и $i+1$ узел располагается между ячейками с номерами 0 и 1 на контуре $i+1$ и между ячейками m и $m+1$ на контуре $i+1$. На каждом контуре имеется одна частица, которая перемещается в ячейку с номером, на единицу большим по модулю $2m$, если нет конкуренции, которая возникает, если частица контура i находится в ячейке 0, а частица контура $i+1$

в ячейке m . Считаем, что действует ленивое правило, при котором ни одна конкурирующая частица не перемещается в текущий момент и в будущем.

Обобщение элементарных клеточных автоматов. Одним из обобщением элементарного клеточного автомата является автомат, отличающийся от бинарного тем, что каждая клетка в каждый момент находится в одном из k состояний. Такой автомат задается таблицей из k^3 строк, при этом в левой части i -й снизу строки находится запись числа i в k -ичной системе тремя символами, а в правой части k -ичный символ.

Номер N автомата вычисляется по формуле

$$N = \sum_{i=0}^{k^3-1} a_i \cdot k^i. \quad (1)$$

Метод нумерации клеточных автоматов для динамики одночастичной цепочки с ленивым правилом разрешения конкуренции. Поставим в соответствие клеточный автомат одночастичной цепочке с ленивым правилом и движением частиц против часовой стрелки. Контур i цепочки соответствует клетка автомата, которая в момент t находится в состоянии, номер которого равен номеру ячейки, в которой в этот момент находится частица контура i .

Формула (1) позволяет вычислить номер этого автомата, если положить $k = 2m$, а значения a_i вычислять следующим образом. Если k -ичная запись числа i начинается с «0m», т. е. $2m^2 + 1 \leq i \leq 2m(m+1)$, то $a_i = m$. Если k -ичная запись числа i кончается на «0m», т. е. остаток от деления числа i на $4m^2$ равен m , то $a_i = 0$. Для всех остальных i значение a_i на единицу больше (по модулю $2m$) значения второго символа в левой части.

Заключение. Рассматриваются бинарные и одночастичные цепочки контуров и их приложения. Одночастичной цепочке контуров поставлен в соответствие клеточный автомат и найден алгоритм вычисления его номера.

Литература

- [1] Kozlov V. V., Buslaev A. P., Tatashev A. G. Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector // International Journal of Computer Mathematics. 2015. Vol. 92. № 9. P. 1910–1920.
- [2] Tatashev A., Yashina M. Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours // Machines. 2019. Vol. 7. Iss. 2. P. 1919–1920.
- [3] Мышкис П. А., Таташев А. Г., Яшина М. В. Дискретная замкнутая одночастичная цепочка контуров // Прикладная дискретная математика. 2021. № 52. С. 114–125.

- [4] Buslaev A. P., Fomina M. Yu., Tatashev A. G., Yashina M. V. On discrete flow networks model spectra: statements, simulation, hypotheses // *Journal of Physics. Conference Series*. 2018. Vol. 1053. Art. 012034.
- [5] Бугаев А. С., Таташев А. Г., Яшина М. В. Спектр непрерывной замкнутой симметричной цепочки с произвольным числом контуров // *Математическое моделирование*. 2021. Т. 33. № 4. С. 21–44.
- [6] Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata // *Reviews of Modern Physics*. 1983. Vol. 55. Iss. 3. P. 601–644.
- [7] Kozlov V., Tatashev A., Yashina M. Elementary Cellular Automata as Invariant under Conjugation Transformation or Combination of Conjugation and Reflection Transformations, and Applications to Traffic Modeling // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. Iss. 19. Art. 3541.
- [8] Бланк М. Л. Точный анализ динамических систем, возникающих в моделях транспортных потоков // *Успехи математических наук*. 2000. Т. 55. № 3(333). С. 167–168.
- [9] Belitsky V., Ferrari P. A. Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // *Journal of Statistical Physics*. 2005. Vol. 118. Iss. 3. P. 589–623.

Секция 7

Биомеханика

Biomechanics

Механическая модель операции по коррекции зрения при имплантации жесткого кольца в роговицу глаза. Влияние нелинейных свойств роговицы на напряженно–деформированное состояние корнеосклеральной оболочки

Бауэр С.М., Венатовская Л.А.

l.venatovskaya@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Рассматривается задача о деформации тонкой оболочки, состоящей из двух сферических сегментов переменной толщины под действием нормального давления, у которой происходит изменение толщины меньшего сегмента за счет введения кольцевой вставки внутрь слоя. Данная модель используется для описания напряженно–деформированного состояния внешней оболочки глаза при коррекции зрения с использованием кольца MyoRing. Моделирование выполняется в программном комплексе ANSYS. Для описания биологических тканей роговицы и склеры используются трансверсально–изотропная и гиперупругие модели материала: двухпараметрическая модель Муни–Ривлина и модель Огдена 1-го порядка. Оценивается влияние разных моделей материалов на деформацию глазного яблока в результате введения жесткой вставки в роговицу глаза.

Ключевые слова: сферический слой, жесткая вставка, гиперупругий материал, деформация сферического слоя.

Лазерная коррекция зрения является одним из перспективных направлений для эффективного исправления близорукости. Однако при миопии высокой степени и при очень тонкой роговице она не всегда выполнима, так как помимо остаточной миопии имеется высокий риск развития послеоперационной кератэктазии. Интрастромальная имплантация кольца MyoRing является еще одним вариантом лечения пациентов с миопией высокой степени и миопическим астигматизмом. При данной технологии установка жесткого кольца не только придает роговице правильную форму, но и усиливает ее механические свойства за счет создания дополнительного каркаса роговицы [1].

Модель трансверсально–упругого материала использованная для описания биологических тканей роговицы и склеры в работе [2] дает оценку поведения глазного яблока в результате операции по имплантации кольца MyoRing, но не позволяет получить деформации такого же порядка как в клинической практике. В данной работе при моделировании используются модели гиперупругого материала для оценки влияния нелинейных свойств роговицы на изменение ее профиля в результате операции. Среди гиперупругих моделей используются 2-параметрическая модель Муни–Ривлина и модель Огдена 1-го порядка.

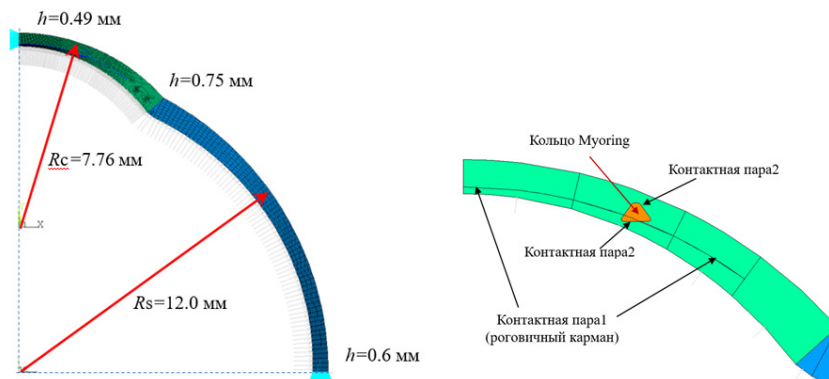


Рис. 1. Модель операции по коррекции зрения при имплантации жесткого кольца в роговицу глаза.

Выполняется конечно–элементное моделирование в программном пакете ANSYS. Внешняя оболочка глаза представляется двумя сферическими сегментами переменной толщины задающих геометрию роговицы и склеры глаза. Предполагается, что составная оболочка заполнена несжимаемой жидкостью давлением p . Согласно технологии имплантации MyoRing роговица разбивается на два отдельных слоя, между которыми устанавливается жесткое по сравнению с мягкой роговицей замкнутое кольцо. Задаются контакты между слоями роговицы, верхней и нижней поверхностью кольца с зонами контакта внутри роговицы. В контактных парах с кольцом задается начальный геометрический зазор (gap), который на каждом шаге решения постепенно уменьшается до тех пор, пока кольцо полностью не установится в область кармана. Решается нелинейная задача при больших деформациях. Оценивается влияние разных моделей материалов: упругого трансверсально–изотропного и гиперупругого, на деформацию глазного яблока в результате введения жесткой вставки в роговицу глаза. Полученные результаты сравниваются с клиническими данными.

Литература

- [1] Daxer A. Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia // J. Cataract Refract. Surg. 2008. Vol. 34(2). P. 194–198.
- [2] Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Kornikov V. V., Avershina L. A., Terenteva A. E. Mathematical Model for Myopia Correction with MyoRing Implants // Advanced Structured Materials. 2023. Vol. 96, P. 81–90.

Биомеханическое моделирование реакции нижней челюсти с полным протезом на продукты питания различной жесткости

Босяков С.М.¹, Назаренко Д.В.¹, Рубникович С.П.²
bosiakov@bsu.by, dm.nazarenko96@gmail.com, rubnikovichs@mail.ru

¹Белорусский государственный университет,

220030, Республика Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4,

²Белорусский государственный медицинский университет,

220083, Республика Беларусь, Минск, пр. Дзержинского, 83

Аннотация. Целью исследования является определение реакции полного протеза и напряженно-деформированного состояния нижней челюсти с установленным на имплантаты полным протезом при действии жевательной нагрузки, соответствующей продуктам питания различной жесткости. Рассматриваются случаи установки полного протеза на два, четыре и шесть сферических имплантатов. Модель нижней челюсти является параметризованной по толщине слизистой оболочки и толщине кортикальной костной ткани. На основании конечно-элементного расчета установлено, что установка полного протеза нижней челюсти на два или шесть имплантатов является наиболее благоприятной для пациента.

Ключевые слова: нижняя челюсть, полный протез, сферический имплантат, слизистая оболочка, мышечные силы, жевательная нагрузка, конечно-элементное моделирование, эквивалентные напряжения.

Введение. Одним из подходов к эффективному восстановлению жевательной функции при полном отсутствии зубов нижней челюсти является установка полного протеза на имплантаты. При этом существенное влияние на нагружение тканей слизистой оболочки и костной ткани оказывает количество имплантатов, используемое при тотальном протезировании, жесткость и локализация продуктов питания. Целью настоящей работы является определение реакции протеза и эквивалентных напряжений, возникающих в тканях нижней челюсти с установленным на имплантаты полным протезом при действии жевательной нагрузки, соответствующей продуктам питания различной жесткости.

Конечно-элементное моделирование. Параметризованная по толщинам слизистой оболочки и слоя кортикальной костной ткани конечно-элементная модель нижней челюсти с протезом разработана на основании томографических данных. Толщина слизистой оболочки изменялась в диапазоне от 2.0 до 3.0 мм; толщина кортикальной костной ткани принимала значения из диапазона от 3.1 до 3.7 мм. Эти значения геометрических параметров биологических тканей соответствуют экспериментальным данным [1]. Длина имплан-

тата, диаметр сферического элемента, высота соединения составляли 10.0 мм, 4.2 мм и 9.4 мм соответственно.

Граничные условия соответствовали жесткому закреплению поверхностей нижнечелюстных мышцелков, а также действию семи групп мышечных сил, участвующих в пережевывании пищи [2]. Направление мышечных сил определялось направляющими косинусами в соответствии с данными [3]. Предполагалось, что продукты питания располагаются (слева) в области второго премоляра и первого моляра нижней челюсти. Граничные условия для нижней челюсти с установленным полным протезом обозначены на рис. 1. Значения сил, приведенные на рис. 1, соответствуют величинам соответствующих мышечных сил в норме согласно данным работы [4].

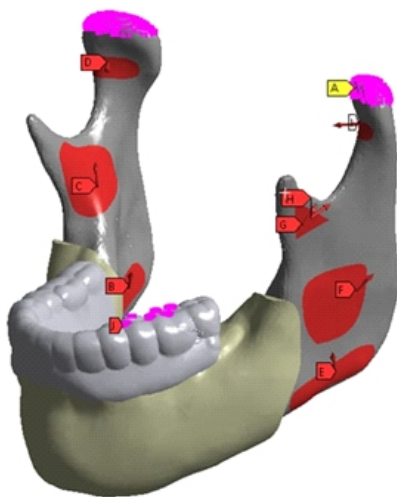


Рис. 1. Граничные условия для модели нижней челюсти с прикрепленным протезом: маркер А — зафиксированные узлы на поверхностях нижнечелюстных суставов; маркер В — результирующая сил от действия поверхностной жевательной мышцы, 190.38 Н; маркер С — результирующая от действия глубокой жевательной мышцы, 81.691 Н; маркер D — результирующая от действия медиальной крыловидной мышцы, 132.96 Н; маркер E — результирующая от действия передней височной мышцы, 154.88 Н; маркер F — результирующая от действия средней височной мышцы, 91.767 Н; маркер G — результирующая от действия задней височной мышцы, равная 71.073 Н; маркеры H и I — результирующие от действия боковой крыловидной мышцы, 34.351 Н; маркер J — область действия жевательной нагрузки на бугорки второго премоляра и первого моляра.

Полный протез жестко фиксировался на имплантатах. Слой кортикальной костной ткани также жестко прикреплялся к губчатой кости. Между остальными элементами модели задавалось контактное взаимодействие с учетом трения. Коэффициенты трения между имплантатом и кортикальной костной тканью, имплантатом и губчатой костной тканью, имплантатом и абатментом, а также между полным протезом и слизистой оболочкой принимались равными 0.40, 0.72, 0.323 и 0.334 [5, 6]. При моделировании имплантатов использовалось виртуальное резьбовое соединение высотой 3.50 мм, шагом резьбы 0.25 мм и углом наклона резьбы 30° .

Физико–механические свойства компонентов модели (губчатой и кортикальной костной ткани, слизистой оболочки, полного протеза, имплантатов и абатментов) задавались в соответствии с данными работы [2].

Конечно–элементный расчет. Конечно–элементный расчет выполнен с использованием программного комплекса ANSYS Workbench 22 R1 (Ansys Inc., USA). Проверка сеточной сходимости осуществлялась на основании сравнительного анализа величин эквивалентных напряжений, возникающих в кортикальной костной ткани, при фиксированной области пятого и шестого зубов и действии мышечных сил норме. В результате количество конечных элементов узлов модели составило 1293635 и 1915172 соответственно. Размер ребра конечного элемента для различных компонентов модели изменялся от 0.5 мм до 3.0 мм.

При расчете реакции нижней челюсти с установленным на различное количество имплантатов полным протезом величины мышечных сил принимали значения равные величинам, приведенным на рис. 1, умноженным на коэффициент, изменяющийся от 0.2 до 2.0 с шагом 0.2. Для каждой группы значений мышечных сил определялась результирующая реакции протеза в области пятого и шестого зубов, соответствующая воздействию продуктов питания на протез, а также эквивалентные напряжения, возникающие в слизистой оболочке. На основании значений эквивалентных напряжений осуществлялась оценка болевых ощущений, возникающих в слизистой оболочке пациента, при воздействии на протез различных продуктов питания на основании экспериментальных данных для напряжений [7].

Заключение. В результате конечно–элементного моделирования получены следующие результаты:

1. Независимо от количества имплантатов, результирующие реактивные силы в области пятого и шестого зубов полного протеза при возрастании величин мышечных сил до значений в норме принимают значения, соответствующие силам, необходимым для пережевывания различных продуктов питания (шоколад, яблоко, морковь, колбасные изделия) [8] без возникновения болевых ощущений в слизистой оболочке.

2. Наиболее неблагоприятным для пациента является установка полного протеза на четыре имплантата, поскольку в этом случае для пережевывания одних и тех же продуктов питания необходимо прикладывать большие по величине мышечные силы по сравнению со случаями установки полного протеза на два или шесть имплантатов.
3. С увеличением толщины слизистой оболочки наблюдается более равномерное распределение эквивалентных напряжений, возникающих в ней при действии на полный протез продуктов питания; в слизистой оболочке малой толщины область высоких напряжений располагается в окрестности имплантатов.

Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 «Разработка дифференциальных и дробно-дифференциальных методов и их применение к моделированию сложных биомеханических и экономических систем» Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

Литература

- [1] Swasty D., Lee J. S., Huang J. C., Koutaro M., Gansky S. A., Hatcher D., Miller A. J. Anthropometric analysis of the human mandibular cortical bone as assessed by cone-beam computed tomography // *J. Oral Maxillofacial Surg.* 2009. Vol. 67. No. 3. P. 491–500. DOI: 10.1016/j.joms.2008.06.089
- [2] Moldoveanu S. A. B., Munteanu F., Forna N. C. Impact of implant-retained mandibular overdenture on oral mucosa - a finite element analysis // *Roman. J. Oral Rehabil.* 2020. Vol. 12. No. 1. P. 6–12.
- [3] Daas M., Dubois G., Bonnet A. S., Lipinski P., Rignon-Bret C. A complete finite element model of a mandibular implant-retained overdenture with two implants: Comparison between rigid and resilient attachment configurations // *Med. Eng. Phys.* 2008. Vol. 30. P. 218–225.
- [4] Huang H.-L., Su K.-Ch., Fuh L.-J., Chen Michael Y. C., Wu J., Tsai M.-T., Hsu J.-T. Biomechanical analysis of a temporomandibular joint condylar prosthesis during various clenching tasks // *J. Cranio-Maxillofacial Surg.* 2015. Vol. 43. No. 7. P. 1194–1201. DOI: 10.1016/j.jcms.2015.04.016
- [5] Prados-Privado M., Martinez-Martinez C., Gehrke S. A., Prados-Frutos J. C. Influence of bone definition and finite element parameters in bone and dental implants stress: a literature review // *Biology.* 2020. Vol. 9. P. 224. DOI: 10.3390/biology9080224
- [6] Liu J., Pan Sh., Dong J., Mo Zh., Fan Yu., Feng H. Influence of implant number on the biomechanical behaviour of mandibular implant-retained/supported overdentures: a three-dimensional finite element analysis // *J. Dent.* 2013. Vol. 41. No. 3. P. 241–249. DOI: 10.1016/j.jdent.2012.11.008
- [7] Арутюнов С. Д., Перцов С. С., Муслев С. А., Шанидзе З. Л. Исследования порогов болевой чувствительности слизистой оболочки полости рта к механическим стимулам // *Рос. Стоматолог. Ж.* 2018. Т. 22. № 1. С 11–17. DOI: 10.18821/1728-2802-2018-22-1-11-17

- [8] Stróżyk P., Balchanowski J.K. Effect of foodstuff on muscle forces during biting off // Acta Bioeng. Biomech. 2016. Vol. 18, No. 2. P. 81–91.

Зависимость «объем–давление» для сферического слоя переменной толщины

Герашченко М.В., Бауэр С.М., Венатовская Л.А.
gerashchenko.mariia@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Рассматривается задача о деформации упругого сферического слоя переменной толщины под действием нормального давления в трехмерной постановке. Получено аналитическое решение задачи, описывающее поведение слоя. Представленная модель может быть использована, как для оценки влияния повышенного внутриглазного давления (ВГД) на изменения формы глазного яблока, так и для описания изменения внутриглазного давления после инъекций. Проводится, также, моделирование с использованием программного комплекса ANSYS. Проведено сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: сферический слой, инъекции, изменение объема

В настоящее время интрасклеральные инъекции эффективно используются при лечении ряда глазных заболеваний. Однако, при введении лекарства в первый момент происходит резкое увеличение внутриглазного давления, что может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва. Поэтому задача об оценке возможного уровня изменения внутриглазного давления в зависимости от объема инъекции является важной и актуальной.

Для трансверсально–изотропного слоя постоянной толщины задача решается аналитически [1]. Для ортотропного сферического слоя задача также решена численно [2, 3], но реальная корнеосклеральная оболочка имеет переменную толщину и в данной работе сделана попытка учесть насколько существенно переменная толщина влияет на результаты оценки изменения ВГД.

Рассматривается задача трехмерной теории упругости о деформации сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 ($R_1 < \rho < R_2$), находящегося под действием внутреннего давления P , где ρ —радиальная координата. Срединная поверхность слоя является сферой. Полагается, что толщина слоя меняется по закону $h = h_0 (1 - \varepsilon \cos \varphi)$, где h_0 — толщина в апексе сферического слоя, φ — координата в окружном направлении, ε — малый параметр. Используется метод возмущений. Выводятся уравнения нулевого и первого приближений. В нулевом приближении получено аналитическое решение. Уравнения, полученные в первом приближении, решаются численно. Получено соотношение для определения изменения объема исходной сферы, находящейся

под действием давления P . Из данного соотношения можно вывести и обратную зависимость $P = f(\Delta V)$, характеризующую изменение внутреннего давления от дополнительно введенного объема жидкости.

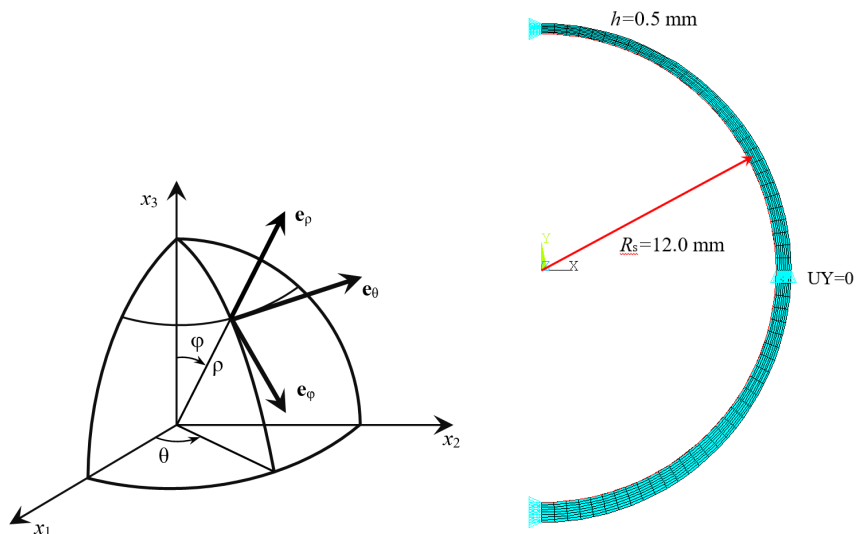


Рис. 1. Справа — сферический слой, слева — конечно-элементная модель сферического слоя переменной толщины под действием внутреннего давления.

Выполняется конечно-элементное моделирование сферического слоя переменной толщины под действием внутреннего давления в программном пакете ANSYS. Данная модель позволяет оценить изменение напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза под действием увеличивающегося внутриглазного давления. По зависимости «объем–давление» можно также оценить изменения ВГД при инъекции определенного объема. Результаты расчетов сравниваются с аналитическими результатами, представленными в работе.

Литература

- [1] Бауэр С. М., Замураев Л. А., Котляр К. Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. № 2. С. 43–49.
- [2] Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Ibragimova O. P., Smirnov A. L. Scleral deformation under intravitreal injections // Russian Journal of Biomechanics. 2017. Vol. 21, No. 2, P. 107–115.

- [3] Bauer S. M., Smirnov A. L. Axisymmetric deformations of the orthotropic spherical layer under normal pressure // Vestnik St.Petersb. Univ. Math. 2015. Vol. 48, P. 35–40.

Прогнозирование результата коррекции гиперметропии методом дискриминантного анализа

Давыденко Б.Н., Корников В.В.

st086788@student.spbu.ru, vkornikov@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Одним из самых распространенных нарушений зрения остается гиперметропия, известная также как дальнозоркость. Коррекция этого заболевания методом рефракционной хирургии чаще приводит к послеоперационному регрессу и менее прогнозируема, чем коррекция миопии. Данное исследование направлено на решение этой проблемы. Результатом работы является дискриминационное правило, позволяющее с достаточной степенью точности предсказать результат операции по нескольким исследованиям биомеханических параметров глаза.

Ключевые слова: гиперметропия, Femto LASIC, биомеханика, рефракционная хирургия, дискриминантный анализ.

Актуальность. Гиперметропия — одна из наиболее часто встречающихся аномалий рефракции глаза. По некоторым данным [1] доля этого заболевания среди иных нарушений рефракции составляет 27–40%. Один из методов коррекции гиперметропии — операция по методу Femto LASIK. Однако результат лечения гиперметропии менее прогнозируем в сравнении с коррекцией миопии этим же методом. Биомеханика глаза естественным образом способствует повышению вероятности послеоперационного регресса [2]. Именно поэтому целью исследования стало предложить способ прогнозирования результата операции, применимый в медицинской практике.

Данные и предварительный анализ. Исследуемую выборку составили данные о 169 рефракционных операциях по методу Femto LASIK. Среди них были следующие измерения и исследования:

- возраст пациента,
- НОЗ (некорригированная острота зрения) с узким зрачком, измеренная до операции и при выписке,
- КОЗ (корригированная острота зрения) с узким зрачком,
- субъективное измерение рефракции,
- рефрактометрия с узким зрачком,
- рефрактометрия с широким зрачком,

- кератометрия по рефрактометрии и кератотопографу,
- средний радиус кривизны роговицы,
- тонография по прибору GlauTest-60,
- дифференциальная тонометрия по прибору GlauTest-60,
- диаметр лимба по оптическому биометру.

Данные для анализа были собраны и предоставлены Чебоксарским филиалом ФГАУ «НМИЦ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова» Минздрава России. При вычислениях использовались программные пакеты MATLAB и SPSS.

При предварительной обработке данных распределения исследуемых переменных были проверены на близость к нормальному распределению критерием Колмогорова [3]. Для нормально распределенных данных на основании квантилей нормального распределения были исключены резко выделяющиеся значения. Для параметров, распределение которых значимо отличалось от нормального, при определении выбросов применялся фильтр Хэмпеля. Также исключались данные, не соответствующие биомеханическому значению переменных.

Количество исследуемых переменных (27) делает целесообразным использование метода главных компонент для снижения размерности. Для удобства интерпретации переменные были разбиты на группы по биомеханическому смыслу и степени корреляции. К каждой из таких групп по отдельности был применен метод главных компонент, при этом сохранялись компоненты, объясняющие не менее 85% дисперсии исходных параметров. Одиночные переменные, такие как возраст пациента, НОЗ, КОЗ и диаметр лимба не были изменены. Это позволило сократить количество переменных до 11 некоррелирующих главных компонент и одиночных переменных, над которыми производился дальнейший анализ.

Построение дискриминантной функции. Выборка была разделена на две группы пациентов по разности между НОЗ до операции и при выписке: «неблагоприятный» результат означает незначительное улучшение (на не более чем 0,1) или ухудшение зрения, иной результат был признан «благоприятным». Эти группы были приняты в качестве прогнозируемых.

Средствами SPSS был проведен дискриминантный анализ групп с «благоприятным» и «неблагоприятным» исходами операции. В качестве переменных-предикторов были использованы все 11 полученных ранее переменных. Так как данные содержат множество пропусков, для построения дискриминантной функции использовалось 21 наблюдение. В результате метод показал достаточно высокую точность классификации — 90,5% исходных наблюдений были классифицированы верно. Однако для проверки качества построенной модели был применен метод кросс-проверки, при которой каждое наблюдение поочеред-

по исключается из выборки и классифицируется дискриминантной функцией, построенной с помощью оставшихся данных. В ходе проверки верно были классифицированы лишь 61,9% наблюдений, что говорит о неприменимости данной функции на практике. Такая неустойчивость возникает из-за большого количества переменных и малого числа наблюдений, используемых в построении. Проблема была решена исключением некоторых малозначимых переменных из анализа.

В итоговую функцию вошли 5 переменных. Из-за этого немного возросло количество используемых в построении наблюдений — 23. Было верно классифицировано 91,3% исходных наблюдений, в результате кросс-проверки — 87% верно классифицированных. Результат проверки говорит о том, что такую функцию можно распространить на более широкие данные и применить на практике. Дискриминантная функция имеет следующий вид: $D = 0,284 - 0,003TG - 0,108DT - 12,135NVA + 6,817CVA + 0,033AX$, где NVA и CVA обозначают НОЗ и КОЗ соответственно, а TG , DT и AX — из метода главных компонент, вычисляются по формулам: $TG = 0,0491P - 0,0021C - 0,0033F + 0,9988BC$, где P — истинное внутриглазное давление, C — коэффициент легкости оттока внутриглазной жидкости, F — скорость продукции внутриглазной жидкости, BC — коэффициент Беккера, измеренные по тонографии на GlauTest-60; $DT = 0,2786P_0 + 0,9604P_e - 0,0016E$, где P_0 — истинное внутриглазное давление, P_e — значение внутриглазного давления, скорректированное на коэффициент ригидности корнеосклеральной капсулы глаза, E — коэффициент ригидности корнеосклеральной капсулы глаза, измеренные по дифференциальной тонометрии на GlauTest-60; $AX = 0,6122ax + 0,6057ax_n + 0,5083ax_w$, где ax — ось цилиндра по субъективной оценке рефракции, а ax_n и ax_w — ось цилиндра по рефрактометрии с широким и узким зрачком соответственно. Положительным значениям D соответствует «благоприятный» результат операции, отрицательным — «неблагоприятный».

Выводы. Построена дискриминантная функция, позволяющая по нескольким исследованиям биомеханических параметров глаза спрогнозировать результат операции. Полученные данные свидетельствуют в пользу того, что полученное дискриминантное правило можно применять в медицинской практике при подготовке к операциям по коррекции гиперметропии. Работа оставляет потенциал для продолжения исследований с применением иных статистических методов, проверки изложенных результатов.

Литература

- [1] Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Авершина Л. А., Пикусова С. М. Оценка биомеханических характеристик на основе эластонометрии после операций по коррекции гиперметропии // Вестник офтальмологии. 2020. № 5. С. 32–38.
- [2] Балашевич Л. И. Рефракционная хирургия. СПб.: СПбМАПО, 2002. 288 с.

- [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. 3 изд. М.: Наука, 1983. 416 с.

Об учете биомеханических характеристик при моделировании тела человека в условиях вибрации

Егорова Н.К.

nadezhda_ego@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Среди всего многообразия вибрационных воздействий на тело человека–оператора чаще других встречается действие вертикально направленной вибрации. При экспериментальном исследовании динамики тела человека в этом случае наиболее достоверными являются измерения на вибрирующем основании (сигнал на входе) и на голове испытуемого (сигнал на выходе). Построенная по результатам этих измерений передаточная функция является математической моделью для описания тела человека при вибрации. При переходе от математической модели к механической, т.е. к механической системе с конкретными структурой и параметрами, необходимо учитывать реальные биомеханические характеристики тела человека. В связи с этим проведено исследование систем, моделирующих межпозвоночный диск и связочно–мышечную структуру тела человека для дальнейшего учета этих результатов при моделировании тела человека при вибрационном воздействии.

Ключевые слова: амплитудно–частотная характеристика, нецелое число степеней свободы, резонансная частота, многосуставные мышцы.

При моделировании биомеханических систем широко применяются механические системы с сосредоточенными параметрами. Эти модели состоят обычно из абсолютно твердых тел, соединенных последовательно пружинами и демпферами. Такую комбинацию принято называть моделью Кельвина–Фойхта. Однако известно, что эта модель непригодна для описания свойств целого ряда полимеров и биологических тканей в случае, если развиваемое усилие в деформируемом элементе зависит не только от деформации и скорости изменения деформации, но также и от скорости изменения самой силы. Такие зависимости были установлены, в частности, при исследовании механических свойств межпозвоночных дисков [1]. В этих случаях применяют трехкомпонентную комбинацию элементов, которая состоит из параллельно соединенных пружины и демпфера, с последовательно прикрепленной к ним пружиной. Эту комбинацию называют стандартным линейным телом или моделью Зинера. Дополнив данную конструкцию массой, получаем систему с 1.5 степенями свободы, т.к. ее движение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением тре-

тьего порядка. Будем использовать данную механическую систему для моделирования позвонка с межпозвонковым диском.

Анализ построенной амплитудно–частотной характеристики (АЧХ) для данной одномассовой колебательной системы подтвердил, что при увеличении коэффициента демпфирования максимальное значение частотной характеристики уменьшается только до определенного ненулевого значения, а затем увеличивается до бесконечности при определенном значении частоты, которое, по сути, является резонансной частотой, что согласуется с работами [2, 3]. В результате приведенных исследований АЧХ появляется возможность строить и многозвенные системы, у которых каждое звено имеет полторы степени свободы. Такие системы можно использовать для моделирования, например, поясничного отдела позвоночника, который в наибольшей степени подвержен вибрационному воздействию.

Кроме того, построен алгоритм определения значений параметров одномассовой модели данной структуры и показано, что этот набор значений является единственным.

С анатомической точки зрения многосуставные мышцы позвоночника вносят основной вклад в механические свойства тела человека. Так, в частности, хорошо известно, что в отсутствие мышц позвоночный столб не в состоянии сохранять свою конфигурацию. Однако влияние многосуставных мышц на механические характеристики тела человека в условиях вибрации не изучалось, хотя в случае ударных воздействий такие попытки предпринимались [4].

Математическое моделирование работы скелетных мышц было основано на механической модели мышцы Хилла, состоящей из сократительной компоненты и двух упругих компонент: параллельной и последовательной по отношению к сократительной [5]. Им же было получено уравнение, связывающее силу и скорость изотонического сокращения мышцы.

Построен ряд механических моделей цепной структуры с дополнительным вязкоупругим соединением и изучены их особенности. Так, на простейшей модели с двумя степенями свободы было показано, что наложение двухзвенных соединений в дополнение к однозвенным приводит к появлению антирезонансной частоты на верхней массе, что невозможно при их отсутствии. Анализ механических моделей с произвольным числом степеней свободы с многозвенными соединениями показал, что введение многозвенных соединений в структуру модели в отсутствие трения приводит к увеличению числа антирезонансных частот на всех массах системы. В частности, антирезонансные частоты появляются и на верхней массе, что в отсутствие многозвенных соединений невозможно, а их число будет принимать значения из интервала $[1, n - 1]$ (n - число масс рассматриваемой системы) в зависимости от того, каким образом наложены дополнительные упругие соединения.

Следует также отметить, что введение дополнительных соединений в модель тела человека, в отличие от модели традиционной структуры, предлагаемой в работе [6], приводит к повышению степени полинома числителя передаточной функции, что дает возможность точнее приблизить теоретическую передаточную функцию к экспериментальной.

Используя численные методы для изучения подобных моделей, удалось также выяснить, что наложением многозвенного вязкоупругого соединения можно добиться снижения пиков АЧХ и появления частот, при которых значения минимумов АЧХ близки к нулю. В качестве иллюстрации существенного влияния дополнительных соединений на динамику механической системы с восемью степенями свободы приведены графики ее АЧХ при наличии и отсутствии многозвенных соединений.

Изучение динамики механических систем, имеющих многозвенные вязкоупругие соединения, и систем, моделирующих позвонки с межпозвонковым диском, показывает целесообразность расширения класса механических систем цепной структуры. Такие системы можно использовать для моделирования некоторых отделов позвоночника, подверженных вертикальному вибрационному воздействию. Так, последовательная комбинация из семи трехэлементных звеньев с дополнительным вязкоупругим соединением может быть использована для моделирования поясничного отдела позвоночника в структуре общей модели тела сидящего человека, подверженного вертикальной вибрации. Но для определения значений параметров предложенной модели в настоящее время необходимы дополнительные экспериментальные исследования. В целом, это модель тела сидящего человека, и она могла бы быть применена после доработки для построения системы виброзащиты человека–оператора.

Литература

- [1] Orne D., Liu Y. K. A mathematical model of spinal response to impact // *Journal of Biomechanics*. 1971. Vol. 4. No. 1. P. 49–71.
- [2] Трегубов В. П. Системы с нецелым числом степеней свободы // *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Серія «Математика, прикладна математика і механіка»*. 2009. № 850. С. 83–90.
- [3] Трегубов В. П., Егорова Н. К. Моделирование биомеханических систем с нецелым числом степеней свободы // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 267–276. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.305>
- [4] Трегубов В. П., Селезнева Н. А. Математическое моделирование динамики шейного отдела позвоночника при импульсных воздействиях // *Вестн. С.-Петерб. унта. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2016. Вып. 1. С. 53–65.
- [5] Хилл А. В. Механика мышечного сокращения. Старые и новые опыты / пер. с англ. Ю. А. Шаронова; под ред. Г. М. Франка. М.: Мир, 1972. 183 с.

- [6] Frolov K. V. Modern problems of vibroprotection of man-operator // Man under vibration: Proceedings of the second international CIMS-IFTtoMM. Moscow, 1985. P. 11–19.

Натурные и численные эксперименты для оценки подошвенного давления

*Иванов Д.В., Доль А.В., Бессонов Л.В., Полиенко А.В.,
Мулдашева А.М., Марьянкин К.А., Киреев С.И.*
ivanovdv.84@ya.ru, bessonov@sgu.ru, st_aav@mail.ru,
alinamuldasheva@yandex.ru, kostya.maryankin.04@mail.ru, kireevsi@rambler.ru
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,
410012, Российская Федерация, Саратов, Астраханская, 83

Аннотация. Разработана и валидирована биомеханическая модель стопы человека. Модель включает в себя кости стопы, связочный аппарат, а также хрящи и мягкие ткани. При ее создании учтены также мышечные усилия. Геометрическая модель стопы построена на основе данных компьютерной томографии пациента в положении стоя. Валидация модели осуществлена на основе данных о распределении подошвенного давления под первой, пятой плюсневными костями и пяточной костью. Характеристики подошвенного давления под указанными костями были получены в рамках натуральных экспериментов со здоровыми добровольцами (26 человек). Показано, что значения давления из натуральных и численных экспериментов отличаются не более, чем на 10%.

Ключевые слова: стопа, биомеханическая модель, натуральный эксперимент, подошвенное давление.

Введение. Подошвенное давление является одним из важнейших биомеханических показателей оценки и моделирования послеоперационных результатов лечения пациентов с деформациями первого луча стопы. Современная хирургия стопы предполагает раннюю активизацию пациента после операции. Универсальность и надежность данного подхода к реабилитации пациентов после хирургической коррекции вальгусной деформации первого пальца стопы могут быть необоснованными. В этой связи количественные характеристики подошвенного давления у здоровых людей, а также у пациентов после перенесенного лечения оцениваются в рамках натуральных [1, 2] и численных экспериментов [3, 4]. При этом исследуют величины давления под первой и пятой плюсневными костями, а также под пяткой. Отметим, что не все авторы, исследующие биомеханические модели стопы задаются вопросами их валидации. Более того, не найдено работ, в которых биомеханические модели стопы учитывают мышечные усилия, играющие важнейшую роль в ее биомеханике.

Цель данного исследования состояла в разработке и валидации биомеханической модели стопы человека. Валидация модели проводилась на основе полученных ранее данных о распределении подошвенного давления в рамках натуральных экспериментов на здоровых добровольцах [1].

Материалы и методы. Геометрическая модель строилась по данным компьютерной томографии (КТ) стопы здорового пациента в положении стоя. КТ обрабатывалась в программе Mimics, затем твердотельная модель дорабатывалась в SolidWorks. Постановка и решение статической задачи биомеханики о напряженно-деформированном состоянии стопы пациента под действием веса его тела и мышечных усилий осуществлялось в системе Ansys.

Связки моделировались элементами типа пружина [3]. Кости, мягкие ткани, хрящи, подложка, на которой стояли испытуемые в рамках экспериментов, считались линейно-упругими изотропными и однородными. Свойства элементов стопы брались из литературы [3, 4], а модуль Юнга подложки был получен из результатов экспериментов на сжатие и равнялся 7 МПа.

Между фалангами пальцев моделировались шарниры без трения. Между мягкими тканями и подложкой учитывалось контактное взаимодействие с коэффициентом трения 0.6. В разработанной биомеханической модели стопы впервые были учтены усилия следующих мышц (рис. 1, справа):

- задняя большеберцовая;
- длинная малоберцовая;
- длинный изгибатель первого пальца стопы;
- короткая малоберцовая;
- передняя большеберцовая.

Другие нагрузки, которые также учитывает модель:

- Вес тела человека и сила ахиллова сухожилия.

Верхние грани большеберцовой и малой берцовой костей жестко закреплялись. На нижнюю грань подложки по нормали действовала сила, равная половине веса тела человека (350 Н). Величина силы ахиллова сухожилия равнялась половине от нагрузки, выражающей вес тела человека (175 Н) [4].

Таким образом, моделировалось вертикальное статическое положение тела человека, при котором стопа располагается на горизонтальной подложке.

В рамках натуральных экспериментов [1] участники исследования находились в положении стоя с опорой на обе стопы без наклонов и поворотов головы, глядя перед собой. В перерыве между повторными измерениями проводилась имитация ходьбы на месте в количестве 10 шагов с последующим переходом к двухопорной вертикальной стойке. Датчик давления последовательно располагали в трех точках (рис. 1, слева): под пяточной костью (точка — С), в области головки первой плюсневой кости (точка — М1) и в области головки пятой плюсневой кости (точка — М5). Датчик закрепляли в нужной точке

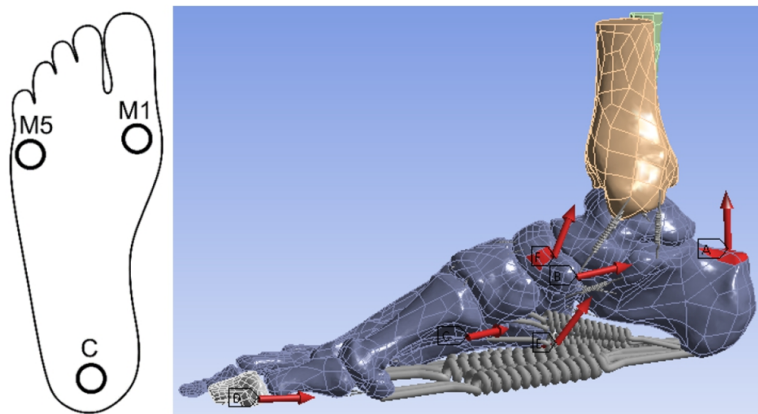


Рис. 1. Схема расположения датчиков давления под стопой (слева) и схема нагружения модели мышечными усилиями и силой ахиллова сухожилия: стрелками показаны направления действия сил, пружинами показаны связки (справа).

стопы посредством тонкого тканевого пластыря. Фиксацию показаний датчика осуществляли по пять раз для каждого его положения на стопе.

Результаты и обсуждение. На рис. 2 показано распределение подошвенного давления, полученное в численном эксперименте.

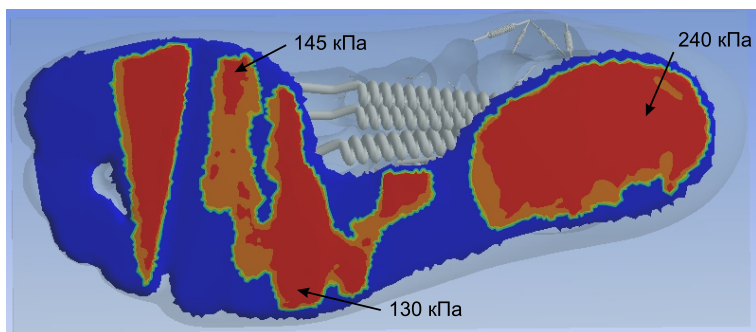


Рис. 2. Распределение подошвенного давления между мягкими тканями и подложкой.

Из рис. 2 видно, что распределение давления под стопой является неоднородным, а его наибольшие значения сосредоточены под пяткой и достигают 240 кПа. При этом значения давления под первой плюсневой костью и пятой плюсневой костью не превышают 145 и 130 кПа соответственно. В натуральных экспериментах [1] на разработанном испытательном стенде значение давления под пяткой равнялось 257.84 ± 98.57 кПа, под первой плюсневой — 151.52 ± 91.63 кПа, а под пятой плюсневой костью — 145.28 ± 69.56 кПа. Таким образом, средние значения подошвенного давления, полученные в численных и натуральных экспериментах, отличаются не более, чем на 10%.

Дальнейшая работа с биомеханической моделью стопы будет связана с моделированием различных вариантов остеотомий первой плюсневой кости. Под остеотомией понимается распиливание кости на два фрагмента и дальнейшее их совмещение под нужным углом и фиксация с помощью винтов или других имплантатов.

Выводы. Разработана и валидирована на результатах натуральных экспериментов биомеханическая модель стопы, включающая в себя костные структуры и мягкие ткани, а также мышечные усилия.

Исследование выполнено в рамках Государственного задания (проект FSRR-2023-0009).

Литература

- [1] Gulyaeva A., Falkovich A., Kireev S., Terin D., Magomedov I. Investigation of the relationship between plantar pressure and calf muscle tone. Development and testing of the new test bench // Russian Journal of Biomechanics. 2023. Vol. 27. No. 4. P. 104-111.
- [2] He Y. J., Zheng X. L., Wang D. F., Mu Z. Z., Li G. Y., Fang Z. Z., Fei W., Huan K. Static and dynamic plantar pressure distribution in 94 patients with different stages of unilateral knee osteoarthritis using the Footscan[®] platform system: An observational study // Med Sci Monit. 2023. Vol. 29. P. e938485.
- [3] Li Y., Wang Y., Wang F., Tang K., Tao X. Biomechanical Comparison between Rotational Scarf Osteotomy and Translational Scarf Osteotomy: A Finite Element Analysis // Orthopaedic surgery. 2023. Vol. 15. No. 12. P. 3243-3253.
- [4] Zhang Y., Awrejcewicz J., Szymanowska O., Shen S., Zhao X., Baker J. S., Gu Y. Effects of severe hallux valgus on metatarsal stress and the metatarsophalangeal loading during balanced standing: A finite element analysis // Comput Biol Med. 2012. Vol. 1. No. 97. P. 1-7.

Исследование влияния характеристик межсистемных шунтов на гемодинамические показатели и распределение кислорода

*Кучумов А.Г.,¹ Хайруллин А.Р.,¹ Ракишьева И.О.,¹ Голуб М.В.,²
Шехмамбетьев Р.М.,² Лазарьков П.В.³*
kuchumov@inbox.ru

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990, Российская Федерация, Пермь, Комсомольский проспект, 29,

²Кубанский государственный университет,
350040, Российская Федерация, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

³Федеральный центр сердечно-сосудистой хирургии им. С.Г. Суханова,
614990, Российская Федерация, Пермь, ул. Маршала Жукова, 35

Аннотация. Различные межсистемные шунты широко применяются при лечении новорожденных с врожденными пороками сердца и сниженным кровообращением легких. Установка шунта сопровождается высоким риском развития послеоперационных осложнений и летальности. Развитие некоторых осложнений возможно предсказать, используя методы математического моделирования, и скорректировать лечение. Были проанализированы три варианта расположения шунта с разными диаметрами у трех пациентов. При исследовании полученных 27 вариантов использовались распределенные гемодинамические показатели. На основе численного решения показана зависимость распределения кровотока в легочной артерии от расположения шунта. Также было показано, что потери энергии шунтов диаметром 4 мм почти в два раза больше, чем у 3 мм шунтов. Индивидуальный подход к лечению каждого новорожденного сможет уменьшить число случаев детской смертности и повысить эффективность реабилитации.

Ключевые слова: межсистемный шунт, сатурация, врожденные пороки сердца, гемодинамика, моделирование.

Врожденные пороки сердца — это аномалии строения сердца и (или) магистральных сосудов, при которых нарушена нормальная гемодинамика [1, 2, 3]. При некоторых из них нарушается процесс насыщения крови кислородом, вследствие чего страдает организм новорожденного в целом, во внутренних органах возникают патологические процессы. От врожденных пороков сердца страдают около одного процента от числа новорожденных [4]. Критические пороки и пороки, требующие коррекции на первом году жизни, при своем естественном течении приводят к тяжелым проблемам со здоровьем и даже летальности. Одним из методов паллиативного лечения младенцев с врожденными пороками сердца (в частности, при атрезии легочной артерии и в редких случаях при синдроме гипоплазии левого сердца) является межсистемный шунт [5]. Однако необходимо отметить, что процедура установки межсистемных шунтов связана с высоким риском развития заболеваемости и смертности. Уровень

смертности среди новорожденных все еще остается значительным, находясь в диапазоне от 3% до 14% [3]. Эти последствия возможно предупредить, если соблюсти баланс между достаточным насыщением крови кислородом и низким давлением в легочной артерии [6]. В настоящее время клиницисты узнают процент сатурации и соотношение потоков крови в сосудах непосредственно при операции, но для качественного планирования необходима преоперативная оценка данных характеристик. В данной статье исследовано влияние различных вариантов установки межсистемного шунта на гемодинамику в системе «аорта–шунт–легочная артерия» у реальных пациентов.

Анализ гемодинамического воздействия на межсистемный шунт проведен с использованием методов вычислительной гидродинамики. Расчеты были выполнены для ряда характеристик, включая потерю энергии, напряжение сдвига стенки, соотношение потоков в левой и правой легочной артерии (LPA/RPA) и распределение кислорода.

Для трех пациентов, получавших лечение в Федеральном центре сердечно-сосудистой хирургии им. С. Г. Суханова, была проведена мультиспиральная компьютерная томография грудной клетки. Использовался МСКТ-томограф Somatom Definition AS от Siemens, размерность 512×512 , толщина слоя 0.6 мм. С помощью программы ITC-SNAP созданы трехмерные модели аорты и легочной артерии.

Далее в графическом пакете Spaceclaim к сосудам добавлены различные варианты шунтов (по расположению: центральный, левый, правый и по диаметру: 3, 3.5 и 4 мм). Всего получилось 27 вариантов. Для входа в аорту была использована зависимость скорости от времени в периоды систолической и диастолической фаз левого желудочка. Длительность систолического периода левого желудочка составляет 0.22 с, а диастолического — 0.28 с. Для выходов из аорты и легочных артерий использовались зависимости давления от времени, рассчитанные с помощью модели Франка.

Для оценки взаимодействия и распределения потоков рассчитывались пристеночные касательные напряжения (англ. wall shear stress — WSS), осредненные за сердечный цикл пристеночные касательные напряжения (англ. Time Averaged Wall Shear Stress — TAWSS), индекс колебаний касательных напряжений (англ. Oscillatory Shear Index — OSI), скорость, давление, относительное время пребывания (англ. Relative Residence Time — RRT), потеря энергии (англ. Energy Loss — EL), оксигенация (Delivery oxygen — Do) и η — соотношение потоков между левой и правой легочной артерией.

Потери энергии являются количественным показателем гемодинамической эффективности системно-легочного шунтирования и постнагрузки на один желудочек. Чем меньше потери энергии, тем выше эффективность преобразова-

ния энергии системно-легочных шунтов.

$$EnergyLoss = \sum W_{inlet} - \sum W_{outlet},$$

$$W = Q_V(P + 1/2\rho v^2).$$

Соотношение кровотоков между левой и правой легочной артерией η :

$$\eta = Q_{LPA}/Q_{RPA},$$

где Q_{LPA} и Q_{RPA} — объемные скорости потока в левой легочной артерии (ЛЛА) и правой легочной артерии (ПЛА) соответственно.

Оценка доставки кислорода — показатель, имеющий большое значение и в значительной степени связанный с ранними повторными вмешательствами после операции. Пусть CV_{O_2} — потребление кислорода всем телом, $C_{PV_{O_2}}$ — концентрация кислорода в аорте, системной и легочной венах соответственно; Q_S и Q_P — системный и легочный потоки.

Насыщение легочных вен принималось равным 98%. $C_{PV_{O_2}}$ и CV_{O_2} были установлены на уровне 0.22 мл O_2 /мл и 0.874 мл O_2 /с соответственно.

Наибольшие значения пристеночных касательных напряжений наблюдаются в области шунта, что может представлять риск тромбоза. Также высокие значения касательных напряжений концентрируются в области вихревого и застойного потоков крови в легочной артерии — непосредственно под шунтом, где кровь сталкивается со стенками артерии, а также на ответвлениях аорты, включая левую подключичную артерию, левую общую артерию и плечеголовную ствол. Наименьшие значения пристеночных касательных напряжений наблюдаются в областях нисходящей части аорты, и на легочной артерии — в областях равномерного течения крови.

Значения осредненных за сердечный цикл пристеночных касательных напряжений в пиковый момент систолы достигают максимальных значений в области шунта, что может способствовать тромбозу шунта. Кроме того, высокие значения касательных напряжений наблюдаются в области вихревого движения крови в нижней части легочной артерии.

Исследования показали, что при системно-легочном шунтировании сбалансированная перфузия легочных артерий тесно связана с улучшением состояния в послеоперационный период. Одним из основных критериев выбора места локализации шунта является симметричное распределение кровотока в легочных артериях. Равномерная перфузия и развитие как правой, так и левой легочных артерий имеют важное значение. Правильное распределение кровотока помогает обеспечить оптимальный рост и развитие в обеих артериях, а также предотвращает неравномерное перфузирование легочной ткани, что может быть нежелательным для пациента.

Также были определены наиболее благоприятные варианты шунтов с точки зрения их расположения и диаметра. Обнаруженные результаты совпадают с данными о распределении кислорода. Это закономерно, так как распределение кислорода в легочной артерии в первую очередь зависит от объема крови, поступающей в правую и левую легочные артерии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания, грант № FSNM-2023-0003.

Литература

- [1] O'Connor M. J., Ravishankar C., Ballweg J. A., Gillespie M. J., Gaynor J. W., Tabbutt S., Dominguez T. E. Early systemic-to-pulmonary artery shunt intervention in neonates with congenital heart disease // *Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2011. Vol. 142. Iss. 1. P. 106–112. <https://doi.org/10.1016/j.jtcvs.2010.10.033>
- [2] Petrucci O., O'Brien S. M., Jacobs M. L., Jacobs J. P., Manning P. B., Eghtesady P. Risk factors for mortality and morbidity after the neonatal Blalock–Taussig shunt procedure // *Annals of Thoracic Surgery*. 2011. Vol. 92. Iss. 2. P. 642–652. <https://doi.org/10.1016/j.athoracsur.2011.02.030>
- [3] Ahmad U., Fatimi S. H., Naqvi I., Atiq M., Moizuddin S. S., Sheikh Kh. B., Shahbuddin S., Naseem T. M., Javed M. A. Modified blalock-taussig shunt: immediate and short-term follow-up results in neonates // *Heart Lung and Circulation*. 2008. Vol. 17. Iss. 1. P. 54–58. <https://doi.org/10.1016/j.hlc.2007.06.003>
- [4] Van Der Linde D., Konings E. E. M., Slager M. A., Witsenburg M., Helbing W. A., Takkenberg J. J. M., Roos-Hesselink J. W. Birth prevalence of congenital heart disease worldwide: A systematic review and meta-analysis // *Journal of the American College of Cardiology*. 2011. Vol. 58. Iss. 21. P. 2241–2247. <https://doi.org/10.1016/j.jacc.2011.08.025>
- [5] Yuan S. M., Jing H. Palliative procedures for congenital heart defects // *Archives of Cardiovascular Diseases*. 2009. Vol. 102. Iss. 6–7. P. 549–557. <https://doi.org/10.1016/j.acvd.2009.04.011>
- [6] Sisli E., Tuncer O. N., Senkaya S., Dogan E., Sahin H., Ayik M. F., Atay Y. Blalock–Taussig shunt size: Should it be based on body weight or target branch pulmonary artery size? // *Pediatric Cardiology*. 2019. Vol. 40. Iss. 1. P. 38–44. <https://doi.org/10.1007/s00246-018-1958-9>

Оценка реальных физических характеристик роговицы по данным, получаемым с помощью анализатора реакции глаза (ORA)

Моисеева И.Н., Штейн А.А.

moiseeva.ir@yandex.ru, stein.msu@bk.ru

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,

119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

Аннотация. Выполнено математическое моделирование деформирования роговицы глаза под действием быстро меняющегося внешнего давления, приложенного к ее центральной области. Распределение этого давления по роговице и изменение его со временем соответствуют анализатору реакции глаза (ORA), широко применяемому в клинике. Для оценки физических свойств роговицы в ORA используются давления, при которых она в окрестности апекса становится практически плоской, что имеет место дважды: при возрастании и убывании давления. Роговица рассматривается как вязкоупругое тело фойгтовского типа. Показано, что полусумма давлений уплощения зависит от механических свойств роговицы и склеральной области, но с практической степенью точности может быть использована для оценки внутриглазного давления. Разность давлений уплощения (корнеальный гистерезис) не является мерой только вязкоупругих свойств роговицы, но также сильно зависит от этого давления. Как такая мера может рассматриваться время запаздывания второго уплощения по сравнению с первым.

Ключевые слова: глаз, роговица, вязкоупругие свойства, внутриглазное давление, анализатор реакции глаза (ORA), корнеальный гистерезис, математические модели.

Введение. В анализаторе реакции глаза (Ocular Response Analyzer, сокращенно ORA) [1] глаз подвергается воздействию струи, давление в которой сначала возрастает с характерным временем порядка десятков миллисекунд по некоторому закону, а затем убывает по тому же закону; таким образом, кривая зависимости давления от времени симметрична. Для диагностики используются значения давления в моменты прохождения апикального участка роговицы через уплощение, т. е. через форму, максимально близкую к плоской. Роговица проходит через такую деформацию дважды: при возрастании и при убывании внешнего давления. Давление уплощения при убывании давления меньше, чем при возрастании, что указывает на присутствие вязкоупругих свойств. На основании двух измеренных давлений уплощения определяются их полусумма, интерпретируемая как внутриглазное давление по Гольдману, и их разность, называемая корнеальным гистерезисом. В числе определяемых характеристик еще две дополнительные (в настоящей работе не рассматриваемые), которые вычисляются по давлениям уплощения с учетом центральной толщины роговицы. По кривым давление–время можно также определить время запаздывания второго уплощения по сравнению с первым, но эта характеристика в приборе

на печать не выводится. В работе на основе разработанной авторами математической модели процесса уточняется физический смысл определяемых ORA параметров.

Постановка задачи. Выполненные нами ранее [2] оценки показали, что на временах, характерных для струйного нагружения роговицы, все еще можно пренебрегать инерционными эффектами, а также вязкостью жидкости в передней камере. Поэтому будем, в соответствии с ранее плодотворно использовавшимся нами подходом [3], представлять роговицу как безмоментную (мягкую) осесимметричную поверхность, описываемую статическими уравнениями, а склеральную область как нульмерный элемент, откликающийся изменением объема на изменения внутриглазного давления. Внешнее давление предполагается распределенным в ограниченной апикальной области роговицы как функция времени и координаты в соответствии с данными, имеющимися для ORA [4].

Считаем поверхность, представляющую роговицу, изотропной и однородной. Будем использовать рассмотренные в [2] линейные определяющие соотношения, учитывающие вязкоупругость фойгтовского типа, которые в пренебрежении дополнительной вязкостью, проявляющейся при изменении площади поверхности, имеют вид:

$$\varepsilon_1 + \tau \dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E_c^*} [T_1 - \nu_c T_2 - T_0 (1 - \nu_c)],$$

$$\varepsilon_2 + \tau \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{E_c^*} [T_1 - \nu_c T_2 - T_0 (1 - \nu_c)],$$

здесь T_1 и T_2 — касательные усилия в главных (меридиональном и окружном) направлениях; ε_1 и ε_2 — деформации в направлениях главных осей, отсчитываемые от начального состояния ненагруженной извне роговицы, в котором она имеет форму сферического сегмента с $T_1 = T_2 = T_0$; коэффициенты $E_c^* = \delta E_c$ и ν_c имеют смысл упругих модулей (модуля растяжения и коэффициента Пуассона) роговицы как двумерной упругой поверхности при медленных процессах (δ — средняя толщина роговицы, а E_c — ее средняя жесткость); τ — время релаксации деформаций роговицы ($\tau = \mu/E_c$, где μ — фойгтовская вязкость). Точкой обозначена производная по времени. Склеральная область считается упругой, и ее механические свойства характеризуются склеральной жесткостью E_s [3].

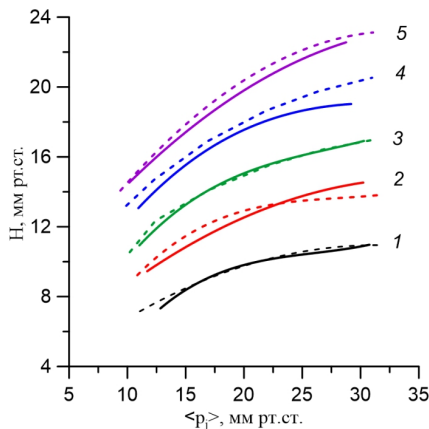
Как показывает изучение экспериментальных кривых, характеризующих вязкоупругое поведение роговицы, параметр τ , по крайней мере, на порядок меньше характерного времени процесса нагружения–разгрузки. Это позволяет рассматривать, как нулевое приближение, решение в каждый момент времени чисто упругой задачи ($\tau = 0$) при внешнем давлении, соответствующим

тому времени. Деформации и перемещения роговицы в следующем приближении тогда могут быть рассчитаны из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Под внешним давлением в каждый момент времени далее понимается максимальное давление на роговицу p_j в этот момент, которое достигается в апексе. Внешние давления, соответствующие «уплощению» (которое в точности не достигается), рассчитываются как такие, при которых сумма модулей угла отклонения нормали к роговице от оси симметрии глаза в центральной области минимальна. Показано, что при давлениях уплощения эти углы удовлетворяют весьма жестким критериям малости.

Результаты. Изучалась зависимость от механических характеристик системы давлений уплощения (и выражаемых через них величин), а также времени запаздывания уплощения при уменьшении внешнего давления по сравнению уплощением при его возрастании.

Полусумма давлений уплощения $\langle p_j \rangle$ (среднее давление уплощения) с точностью до некоторой константы близка к истинному внутриглазному давлению p_0 , т. е. тому давлению, которое имеет место до нагружения. Давление p_0 отличается от $\langle p_j \rangle$ на величину, которая зависит как от обеих жесткостей (склеральной и роговичной) и времени релаксации деформаций τ , так и от p_0 , однако эта зависимость относительно невелика и ее учет приводит к поправкам, допустимым при уровне точности, принятом в офтальмологии.

Разность давлений уплощения (корнеальный гистерезис) H очень слабо зависит от склеральной жесткости и не слишком значительно от роговичной, однако эта величина существенно зависит не только от τ , но и от $\langle p_j \rangle$ (т. е. от истинного давления). На рисунке представлена зависимость H от $\langle p_j \rangle$ при $E_s = 10$ МПа для двух сильно различающихся роговичных жесткостей



$E_c = 0.3$ МПа (сплошные линии) и 0.7 МПа (пунктир) при $\tau = 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4$ мс (кривые 1–5). Таким образом, корнеальный гистерезис не может рассматриваться как характеристика только вязкоупругих свойств роговицы, а сильно зависит от давления в глазу, с приемлемой точностью оцениваемого по среднему давлению уплощения.

Что касается времени запаздывания уплощения, то эта характеристика в очень малой степени зависит как от упругих свойств системы, так и от внутриглазного давления, и может непосредственно использоваться для оценки τ , т.е. вязкоупругих свойств роговицы. Анализ нескольких конкретных кривых, выводимых ОРА показал, что значения τ , рассчитанные по гистерезису и среднему давлению уплощения, близки к значениям этой величины, рассчитанным по времени запаздывания.

Заключение. В результате математического моделирования установлено, что стандартно используемое при обработке данных, получаемых в ОРА, среднее давление уплощения, может быть использовано для оценки истинного внутриглазного давления: поправки, вносимые учетом реальных механических свойств и состояния системы, не слишком значительны.

Величина корнеального гистерезиса, обычно рассматриваемая как характеристика вязкоупругих свойств роговицы, мало зависит от упругих свойств системы, но сильно зависит от внутриглазного давления. Таким образом, эта величина непригодна для оценки, собственно, вязкоупругих свойств роговицы, которые могут быть оценены по гистерезису и давлению в результате дополнительного расчета. С другой стороны, по времени запаздывания уплощения, которое не входит в число параметров, выдаваемых ОРА, но может быть в принципе определено, по получаемым кривым, вязкоупругие свойства роговицы могут быть оценены без привлечения других характеристик.

В дальнейшем предполагается разработать более подробную модель, учитывающую пространственную неоднородность роговицы. Однако изучение данных измерений показывает что внутриглазное давление, рассчитанное с учетом конкретных упругих и вязкоупругих свойств, может отличаться от среднего давления уплощения на более значительную величину, чем выдаваемое ОРА т.н. роговично компенсированное давление, учитывающее только толщину роговицы.

Литература

- [1] Luce D. A. Determining in vivo biomechanical properties of the cornea with an ocular response analyzer // J. Cataract Refract. Surg. 2005. Vol. 31. Iss. 1. P. 156–162.
- [2] Моисеева И. Н., Штейн А. А. Математическое моделирование деформирования роговицы глаза приложенным извне давлением // Росс. журн. биомех. 2019. Т. 23. № 4. С. 511–525.

- [3] Моисеева И. Н., Штейн А. А. Анализ зависимости давление – объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 5. С. 3–15.
- [4] Elsheikh A., Alhasso D., Kotecha A., Garway-Heath D. F. Assessment of the ocular response analyzer as a tool for intraocular pressure measurement // J. Biomech. Eng. 2009. Vol. 131. ArticleID 081010. P. 1–9.

Перистоматическое кольцо и краевое устьичное кольцо — аналогичные структуры устьичных комплексов цветковых растений

Паутов А.А., Бауэр С.М., Иванова О.В., Крылова Е.Г.

a.pautov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Устьица играют ключевую роль в осуществлении фотосинтеза и в поддержании водного режима растений. Это определяет необходимость выявления всех структурных особенностей устьичных комплексов, влияющих на их работу. Световая и электронная микроскопия использованы для изучения устьичного комплекса тополя мексиканского. Стенки его околоустьичных клеток образуют перистоматическое кольцо, которое упирается сверху в устьице. Для выявления функции перистоматического кольца был использован метод конечных элементов. Моделирование проводилось с использованием программного комплекса ANSYS. Оно показало, что перистоматическое кольцо ограничивает движения наружных тангентальных стенок устьичных клеток. При его наличии открытая устьичная щель погружается глубже в эпидерму. Она уже и сильнее прикрыта сверху выступами, чем в комплексах без перистоматических колец. Такая устьичная механика адаптивна к аридным условиям.

Ключевые слова: устьице, замыкающая клетка, перистоматическое кольцо, деформация, моделирование.

Устьица относятся к числу обязательных структурных элементов покровной ткани растений — эпидермы. Они обеспечивают поддержание баланса между поглощением растениями необходимого для фотосинтеза диоксида углерода и потерей воды. В конечном счете от работы устьиц зависит фотосинтез, движение в растениях воды с растворенными в ней веществами, оводненность тканей и др. Выполнение столь важных для растений функций определяет необходимость выявления всего комплекса структурных особенностей устьиц, влияющих на их работу.

Каждое устьице состоит из двух замыкающих клеток, которые способны к обратимым деформациям. В результате этих деформаций замыкающие клетки могут отодвигаться друг от друга или, наоборот, смыкаться друг с другом, соответственно, открывая или закрывая отверстие между ними — устьичную

цель. Она связывает внутренние ткани листа с внешней средой. Деформация замыкающих клеток зависит от изменения в них тургорного давления и строения их стенок, прежде всего — их неравномерного утолщения и специфического расположения в них микрофибрилл целлюлозы. На деформацию замыкающих клеток влияет и ряд других структурных особенностей. К числу последних относятся, в частности, краевые устьичные кольца. Они могут представлять собой либо выросты целлюлозных стенок замыкающих клеток, покрытые кутикулой, либо складки кутикулы, субкутикулярное пространство которых заполнено пектиновыми веществами. Эти опоясывающие устья кольца играют роль ребер жесткости, которые влияют на поведение замыкающих клеток при изменении в них тургорного давления [1].

Замыкающие и примыкающие к ним околоустьичные клетки составляют устьичные комплексы. Эти два типа клеток находятся в тесном взаимодействии друг с другом. Так, между ними происходит обмен ионами, которые непосредственно влияют на повышение, или, напротив, снижение тургорного давления в замыкающих клетках.

Стенки околоустьичных клеток могут образовывать расположенные вокруг устьиц кольцеобразные утолщения — перистоматические кольца (рис. 1(A)). Приуроченность этих колец к устьичным комплексам позволяет предположить, что они также способны влиять на устьичные движения. Цель работы — оценка влияния перистоматического кольца на устьичную механику. Модельный объект — *Populus mexicana* Wesm. ex DC (тополь мексиканский). Использованы образцы этого растения, хранящиеся в гербарии Ботанического института им. В.Л. Комарова РАН (LE 00018228, LE 00018229). Исследованы фрагменты из средней части листовой пластинки, расположенные между ее краем и главной жилкой. Изучение устьичных комплексов проведено традиционными методами световой, сканирующей и трансмиссионной электронной микроскопии соответственно на микроскопах Leica DM1000 (Wetzlar, Germany), JSM-6390LA (Akishima, Japan) и Zeiss Libra 120 (Oberkochen, Germany).

Устья тополя мексиканского крупные. Их длина около 40 мкм. Замыкающие клетки лежат на одном уровне с околоустьичными. У замыкающих клеток утолщены наружные и внутренние тангентальные стенки, дорсальные и вентральные стенки более тонкие. Имеется более крупный наружный устьичный выступ и небольшой внутренний. Перистоматическое кольцо образовано целлюлозной стенкой и покрыто кутикулой. Основную роль в его формировании играют вентральные стенки околоустьичных клеток, упирающиеся в наружные тангентальные стенки замыкающих клеток.

Для оценки влияния перистоматического кольца на устьичные движения использован метод конечных элементов. Моделирование проведено с использованием программного комплекса ANSYS (ANSYS v. 13).

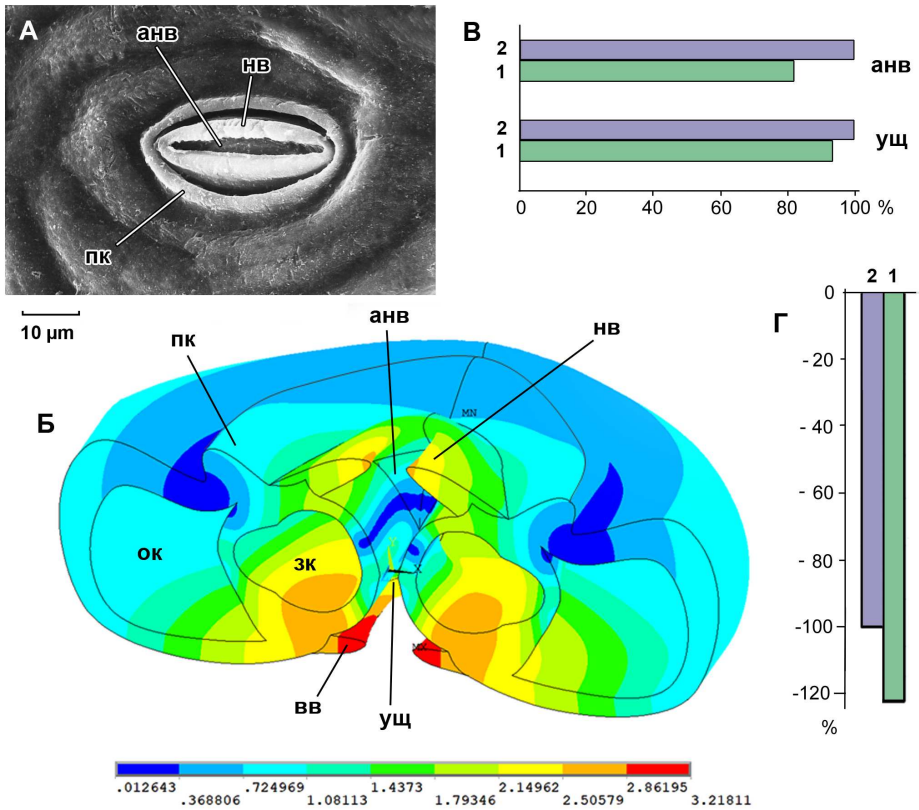


Рис. 1. Устьичные движения у тополя мексиканского. А — поверхность устьичного комплекса. Б — изолинии суммарных перемещений клеточных стенок в устьичном комплексе с перистоматическим кольцом. В, Г — диаграммы перемещений устьичной щели и апертуры наружных устьичных выступов: В — ширина устьичной щели (иц) и апертуры наружных выступов (анв) в модели с кольцом (1) по сравнению с их шириной в устьичном комплексе без кольца (2), принятой за 100%; Г — положение открытой устьичной щели в модели с перистоматическим кольцом (1) по сравнению с ее начальной позицией, когда устьице закрыто. Положение открытой устьичной щели в модели без кольца (2) принято за 100%. зк — замыкающая клетка, ок — околоустьичная клетка, нв — наружный выступ, анв — апертура наружных выступов, иц — устьичная щель, пк — перистоматическое кольцо.

Реконструкция устьичных комплексов с перистоматическим кольцом (рис. 1(Б)) и без него осуществлена на основе полутонких срезов (2 мкм), сделанных по всей длине нескольких реальных комплексов. Разбиение клеток устьичных комплексов на конечные элементы выполнено с применением элементов PLANE42, SOLID45 и SOLID95. В работе были приняты следующие значения модуля Юнга: для клеточных стенок, включая перистоматическое кольцо, 108 МПа [2], для устьичных выступов — 520 МПа [3]. Коэффициент Пуассона составил 0,45 для клеточных стенок и 0,48 для устьичных выступов. Тургорное давление в замыкающих клетках имитировалось созданием распределенной по их внутренней поверхности нагрузкой в 3 МПа [4]. В ходе моделирования были получены следующие характеристики моделей: изолинии суммарных перемещений клеточных стенок устьичных комплексов, ширина открытых устьичных щелей и их положение относительно поверхности листа, ширина апертур наружных и внутренних устьичных выступов открытых устьиц.

Моделирование показало, что в процессе открывания устьица, входящего в комплекс с перистоматическим кольцом, происходят вертикальные движения тангентальных стенок его замыкающих клеток: наружных — в сторону внешней среды, внутренних — вглубь листа. При этом основные движения совершают внутренние тангентальные стенки (рис. 1(Б)). Максимальные перемещения демонстрируют здесь внутренние устьичные выступы. Существенные перемещения свойственны также граничащим с внутренними выступами центральным участкам внутренних тангентальных стенок замыкающих клеток. В наружных тангентальных стенках замыкающих клеток более подвижны как их участки, лежащие под устьичными выступами, так и сами выступы. Существенно более подвижны также и внутренние тангентальные стенки околоустьичных стенок по сравнению с их наружными тангентальными стенками, включая перистоматическое кольцо. Картина перемещений клеточных стенок в устьичном комплексе без перистоматического кольца сходна с таковой в комплексе с кольцом. Однако, наличие перистоматического кольца, упирающегося в наружные тангентальные стенки замыкающих клеток, ослабляет движения этих стенок. Кольцо препятствует широкому раскрытию устьичной щели (рис. 1(В)), способствует ее более глубокому погружению в лист (рис. 1(Г)), вызывает во время открывания устьица уменьшение отверстия между прикрывающими устьичную щель наружными устьичными выступами (рис. 1(В)). Согласно традиционным взглядам, такой характер устьичных движений накладывает определенные ограничения на потери листьями воды через открытые устьица в процессе транспирации. Это хорошо согласуется с ксероморфным строением листьев тополя мексиканского, проникающего в пустынные районы юго-запада Северной Америки.

Полученные результаты свидетельствуют о влиянии морфологии клеток устьичного комплекса, включая перистоматическое кольцо, на механику

устычных движений. Учитывая положение перистоматического кольца в комплексе и характер его влияния на движения замыкающих клеток у тополя мексиканского, можно заключить, что перистоматическое кольцо этого растения аналогично типичному краевому устьичному кольцу. Эти кольца имеют разное происхождение, но в силу идентичности выполняемых функций они приобрели сходные черты строения. Возникновение краевых устьичных колец и перистоматических колец в качестве аналогичных образований косвенно свидетельствуют об их реальном влиянии на устьичную механику.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-24-00572, <https://rscf.ru/project/22-24-00572/>.

Литература

- [1] Pautov A., Bauer S., Ivanova O., Krylova E., Yakovleva O., Sapach Yu., Pautova I. Influence of stomatal rings on movements of guard cells // *Trees*. 2019. Vol. 33. P. 1459–1474. <https://doi.org/10.1007/s00468-019-01873-y>
- [2] Woolfenden H. C., Bourdais G., Kopischke M., Miedes E., Molina A., Robatzek S., Morris R. J. A computational approach for inferring the cell wall properties that govern guard cell dynamics // *Plant J*. 2017. Vol. 92. P. 5–18. <https://doi.org/10.1111/tpj.13640>
- [3] Wiedemann P., Neinhuis C. Biomechanics of isolated plant cuticles // *Botanica Acta*. 1998. Vol. 111. No. 1. P. 28–34. <https://doi.org/10.1111/j.1438-8677.1998.tb00673.x>
- [4] Franks P.J., Cowan I.R., Farquhar G.D. A study of stomatal mechanics using the cell pressure probe // *Plant Cell Environ*. 1998. Vol. 21. P. 94–100. <https://doi.org/10.1046/j.1365-3040.1998.00248.x>

Автоматизированная обработка результатов механических экспериментов по одноосному сжатию губчатой кости головок бедра

Сидоренко Д.А., Иванов Д.В., Фалькович А.С.

sysanin9569@gmail.com, ivanovdv.84@ya.ru, falkovichas@yandex.ru

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,

410012, Российская Федерация, Саратов, Астраханская, 83

Аннотация. Создан алгоритм автоматической обработки результатов механических испытаний на одноосное сжатие. Разработанная на основе алгоритма программа в автоматическом режиме обрабатывает группы текстовых файлов формата csv с результатами экспериментов и определяет модули Юнга образцов. Программа была использована для анализа 123 экспериментов по одноосному сжатию образцов губчатой

кости головок бедра. Также были построены регрессионные зависимости, связывающие модуль Юнга губчатой кости (в продольном и поперечном направлениях) и рентгеновскую плотность, выражающуюся в единицах Хаунсфилда, полученных для исследованных образцов при их сканировании в компьютерном томографе. Результаты данной работы могут быть использованы при пациент-ориентированном биомеханическом моделировании: по данным компьютерной томографии можно рассчитать индивидуальный модуль Юнга губчатой кости конкретного пациента и использовать его в конечно-элементных расчетах.

Ключевые слова: единица Хаунсфилда, модуль Юнга, одноосное сжатие, кластерный анализ, биомеханическое моделирование.

Введение. Минеральная плотность кости (МПК) применяется для оценки ее качества и диагностики остеопороза. Механические характеристики кости, такие как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, предел прочности, используются для пациент-ориентированного биомеханического моделирования и исследования механического поведения костной ткани под действием различных нагрузок [1]. Известно, что МПК сильно коррелирует с прочностью и модулем Юнга костной ткани [2, 3]. При предоперационном планировании травм и дегенеративных заболеваний позвоночника по данным компьютерной томографии вычисляются единицы Хаунсфилда губчатой кости, которые определяют ее МПК. Построенные зависимости между модулем Юнга и МПК (или единицами Хаунсфилда) могут быть использованы при задании индивидуальных свойств костной ткани для изучения напряженно-деформированного состояния пациент-ориентированных биомеханических моделей элементов опорно-двигательного аппарата человека.

Ранее в Саратовском университете исследовались прочностные свойства губчатой кости головок бедра человека [4]: проведена серия экспериментов по одноосному сжатию образцов, в рамках стержневой теории рассчитаны их модули Юнга. Однако обработка результатов экспериментов проводилась в ручном режиме. Каждый текстовый файл в формате csv загружался в MS Excel, а по линейному участку на диаграмме рассчитывался модуль упругости. При большом числе экспериментов этот процесс является крайне трудоемким. Более того, образцы для экспериментов выпиливались независимо от направления действия нагрузки в суставе человека. В то же время, перед экспериментами на сжатие образцы сканировались в компьютерном томографе для определения их рентгеновской плотности, выраженной в единицах Хаунсфилда [4, 5]. Это позволило построить зависимость, связывающую модуль Юнга губчатой кости (вне зависимости от направления выпиливания образца) и единицы Хаунсфилда.

Цель данной работы состояла в разработке оригинального алгоритма автоматической обработки файлов с результатами экспериментов по одноосному сжатию и вычисления модуля Юнга. На основе алгоритма была создана про-

грамма, с помощью которой были обработаны результаты 123 экспериментов и были вычислены модули упругости. Кластерный анализ получившейся выборки позволил разделить ее на две. Первая выборка, по нашему предположению, содержит значения модулей Юнга образцов, выпиленных вдоль оси физиологической нагрузки в суставе, а вторая — поперек. В результате для каждой выборки была построена регрессионная зависимость для пересчета единиц Хаунсфилда в модуль упругости.

Материалы и методы. Образцы губчатой кости головок бедра человека выпиливались с помощью ручной ножовки по металлу. Испытания на одноосное сжатие проводились на машине Instron 3342, скорость нагружения — 2 мм/мин. Результаты каждого эксперимента сохранялись в текстовый файл формата csv.

Поиск линейного участка диаграммы «деформации–напряжения» осуществлялся на участке от первой точки до точки с максимальной нагрузкой. Ось абсцисс, соответствующая данному участку, делилась на N равных отрезков. Методом наименьших квадратов рассчитывался угол наклона прямой, аппроксимирующей кривую на каждом отрезке. Из полученного множества отрезков с подсчитанными углами наклона выбирается пара соседних с наибольшей суммой углов. Отрезок из выбранной пары, рассчитанный угол для которого является наибольшим, соответствует искомому линейному участку кривой.

Число разбиений N выбирается из диапазона от 3 до 9. Для каждого числа разбиений применяется алгоритм поиска линейного участка. Результатом будет последовательность линейных участков для каждого числа N . Критерием выбора итогового числа разбиений является коэффициент детерминации прямой линейного участка, аппроксимирующей диаграмму «деформации–напряжения»: выбирается N , которому соответствует самый высокий коэффициент.

Результаты и обсуждение. Было обработано 123 эксперимента по одноосному сжатию образцов губчатой кости головок бедра. Это позволило в автоматическом режиме для каждого образца рассчитать модуль Юнга. Для каждого исследованного образца по данным компьютерной томографии было вычислено число Хаунсфилда. Данные были нормализованы и представлены на рис. 1.

Кластерный анализ позволил разделить получившуюся выборку на две, для каждой из которых была построена регрессионная зависимость, связывающая модуль Юнга и единицы Хаунсфилда (рис. 1).

Выводы. По нашему предположению, регрессионная кривая на рис. 1, построенная по точкам, обозначенным треугольниками, описывает зависимость модуля Юнга от единиц Хаунсфилда для образцов, выпиленных из головок бедренной кости вдоль направления физиологической нагрузки, которую испытывает кость в условиях жизнедеятельности человека. Вторая кривая на рис. 1,

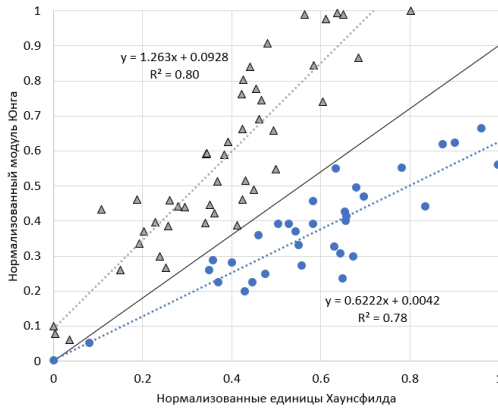


Рис. 1. Регрессионные зависимости, связывающие нормализованный модуль Юнга образца и его нормализованные единицы Хаунсфилда.

построенная по точкам, обозначенным кружками, описывает зависимость модуля Юнга от единиц Хаунсфилда для образцов, выпиленных в поперечном направлении. Данное предположение подтверждается литературными источниками [6]: что модули Юнга кости в продольном направлении (в направлении приложения физиологической нагрузки) всегда выше поперечных модулей.

Таким образом, результатом данной работы стали:

- алгоритм автоматической обработки результатов экспериментов по одноосному сжатию и расчета модулей Юнга;
- регрессионные зависимости, связывающие модули Юнга с единицами Хаунсфилда.

Дальнейшая работа будет связана с построением аналогичных зависимостей для предела прочности губчатой костной ткани.

Исследование выполнено в рамках Государственного задания (проект FSRR-2023-0009).

Литература

- [1] Полиенко А. В., Иванов Д. В., Киреев С. И., Бессонов Л. В., Мулдашева А. М., Оленко Е. С. Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеоцитов первой плюсневой кости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. № 4. С. 496–511.
- [2] Ohman-Magi C., Holub O., Wu D., Hall R. M., Persson C. Density and mechanical properties of vertebral trabecular bone—A review // JOR Spine. 2021. Vol. 4. No. 4. P. 1176.

- [3] Haba Y., Lindner T., Fritsche A., Schiebenhöfer A.K., Souffrant R., Kluess D., Skripitz R., Mittelmeier W., Bader R. Relationship between mechanical properties and bone mineral density of human femoral bone retrieved from patients with osteoarthritis // Open Orthop J. 2012. Vol. 6. P. 458–463.
- [4] Bessonov L.V., Golyadkina A.A., Dmitriev P.O., Dol A.V., Zolotov V.S., Ivanov D.V., Kirillova I.V., Kossovich L.Y., Titova Yu.I., Ulyanov V.Yu., Kharlamov A.V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2021. Vol. 21. No. 2. P. 182–193.
- [5] Ivanov D.V., Kirillova I.V., Kossovich L.Yu., Bessonov L.V., Petraikin A.V., Dol A.V., Ahmad E.S., Morozov S.P., Vladzmyrskyy A.V., Sergunova K.A., Kharlamov A.V. Influence of convolution kernel and beam-hardening effect on the assessment of trabecular bone mineral density using quantitative computed tomography // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2020. Vol. 20. No. 2. P. 205–219.
- [6] Kalouche I., Crepin J., Abdelmoumen S., Mitton D., Guillot G., Gagey O. Mechanical properties of glenoid cancellous bone // Clin Biomech. 2010. Vol. 25. No. 4. P. 292–298.

Контактная мезомеханика: на стыке трибологии и механики композитов

Шилько С.В.

shilko_mpri@mail.ru

Государственное научное учреждение «Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого Национальной академии наук Беларуси»,
246050, Республика Беларусь, Гомель, ул. Кирова, 32А

Аннотация. В докладе обозначено новое научное направление «контактная мезомеханика», представляющее собой трибоанализ и оптимальное проектирование пар трения на принципах мультимасштабного моделирования структурно-неоднородных материалов с учетом макро- и мезоскопического контактного взаимодействия. На примере ряда решенных прикладных задач контактной мезомеханики показана практическая значимость разработанных моделей, аналитических и численных методов расчета и технических решений для материаловедения, технологии переработки материалов давлением и триботехники.

Ключевые слова: пары трения, композиты, структурные уровни, трибоанализ, мезомеханика, контактное взаимодействие.

Введение. В работах [1, 2] убедительно показана важность рассмотрения процессов контактного и объемного деформирования на различных масштабных уровнях. Трибоанализ пар трения из композитов и оптимизация тех-

нологических режимов обработки материалов давлением предполагает учет неоднородности материала, обусловленной его многокомпонентной структурой, а также наличием внутренних дефектов (трещин и других несплошностей) в исходном состоянии и образующихся при воздействии внешних факторов.

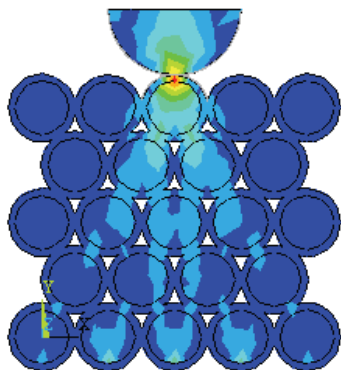


Рис. 1. Напряженно-деформированное состояние гранулированного материала при контактном нагружении.

и при моделировании разрабатываемых в последнее время «умных» пар трения, демонстрирующих прямую и обратную связь между структурой и эксплуатационными свойствами.

Целью работы является создание научных основ трибоанализа и проектирования пар трения из композитов с оптимальными показателями свойств на принципах мультимасштабного моделирования структурно-неоднородных материалов с учетом макро- и мезоскопического контактного взаимодействия. В цели работы отражена современная тенденция разработки материалов исходя из требуемых свойств путем «конструирования» структуры методами компьютерного моделирования и виртуальных испытаний [3].

Методы исследования: аналитические и численные решения контактных задач, теория микромеханического моделирования композитов с трением, а также механические и трибоиспытания.

Результаты и их обсуждение. В докладе обсуждаются формулировки и решения ряда типичных задач контактной мезомеханики:

- анализ напряженно-деформированного состояния микрогетерогенного полимерного материала в условиях стесненного сжатия порошка при формировании заготовок методом прессования;

К примеру, распространенной является ситуация возникновения и эволюции множества микроконтактов в объеме материала в процессе контактного нагружения ячеистых и гранулированных материалов (рис. 1), а также прокатки заготовок с дефектами.

В указанных случаях имеет место взаимное влияние процессов контактирования на макроскопическом (пара трения) и мезоскопическом (промежуточном с точки зрения детализации структуры) уровнях. Подобные задачи на стыке трибологии и механики композитов возникают

- описание залечивания дефектов при прокатке листовой заготовки на машинах непрерывной разливки стали;
- моделирование процесса трения в условно-неподвижном фрикционном соединении;
- расчет полимер-керамического тонкопленочного датчика контактного давления на основе нанопористого анодного оксида алюминия с учетом физически нелинейного деформирования керамического и полимерного компонентов;
- моделирование актомиозинового мышечного сокращения.

Рассмотрена также процедура многоуровневого компьютерного дизайна пар трения из структурно-неоднородных материалов.

Заключение. На основе выполненных теоретических и экспериментальных исследований показаны возможности механико-математического описания сложной взаимосвязи параметров контактного взаимодействия на микроуровне (уровне частиц и структурных дефектов) материала от макроскопических характеристик пар трения и обратно — трибологических характеристик пары трения на макроуровне от условий контактного взаимодействия частиц на микроструктурном уровне. Указанную область задач предложено рассматривать как новое научное направление на стыке трибологии и механики композитов. Показана практическая значимость разработанных моделей, методов расчета и технических решений для оптимизации структуры трибоматериалов и конструкции узлов трения.

Работа выполнена в рамках НИР 2 задания 4.2.3 «Физика и механика фрикционного взаимодействия перспективных полимерных композитов нового поколения со специальными триботехническими, акустическими и электрическими характеристиками» ГПНИ «Материаловедение, новые материалы и технологии» на 2021–2025 гг. и при поддержке БРФФИ (проект № T24-067 «Биоподобные композиты конструкционного и триботехнического назначения на основе полимеров и эластомеров, реализующие самоупрочнение и самозалечивание структурных повреждений»).

Литература

- [1] Панин В. Е. Физическая мезомеханика материалов. Томск: Изд. Дом Томского гос. ун-та, 2015. Т. 2. 464 с.
- [2] Горячева И. Г., Цуканов И. Ю. Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел // ПММ. 2020. Т. 84. № 6. С. 757–789.
- [3] Люкшин Б. А., Шилько С. В., Панин С. В., и др. Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения. Новосибирск: Изд.-во СО РАН., 2017. 311 с.

Секция 8

Физическая механика

Physical Mechanics

Распространение плоской упругопластической волны с учетом разгрузки, связанной с пластическими деформациями

Иванов В.С., Кац В.М., Морозов В.А.

st048035@student.spbu.ru, v.kats@spbu.ru, v.morozov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Проведен численный расчёт распространения упругопластического импульса механического напряжения при кратковременном импульсном нагружении алюминиевой пластины электронным пучком с учётом разгрузки, связанной с пластическими деформациями. Показано, что при этом происходит быстрое затухание амплитуды упругопластической волны, особенно при распространении коротких импульсов напряжения.

Ключевые слова: плоская упругопластическая волна, электронный пучок, пластическая волна разгрузки, кратковременный импульс нагружения.

Введение. Исследование динамики высокоскоростного нагружения материалов является одной из сложнейших задач механики. Особенную трудность представляет изучение процессов, происходящих в приповерхностной области твердого тела при воздействии импульсов нагружения в субмикросекундном и наносекундном диапазонах длительности. Это связано с аномальной зависимостью от расстояния основных характеристик ударно-волнового процесса.

При исследовании зависимости между напряжением и деформацией в условиях распространения продольных плоских волн в безграничной среде в статье Д. Вуда [1], пожалуй, впервые, была обнаружена интересная особенность. Оказалось, что снятие нагрузки, вызвавшей упругопластическую деформацию, приводит к появлению вторичных пластических деформаций, т.е. разгрузка связана как с упругими, так и с пластическими деформациями. Эта особенность рассматриваемого в работе Д. Вуда случая существенно отличает его от случая волн в тонких длинных стержнях, где волны разгрузки полностью упруги. Отмеченная особенность более основательно проанализирована в работе [2], в которой рассмотрены основные закономерности упругопластического деформирования твердого тела в одномерных ударных волнах при однооснонапряженном состоянии. Важным, на наш взгляд, является отмеченное в работе [2] замечание, что с наличием упругих предвестников разряжения связано ускоренное (по сравнению с гидродинамическим) затухание упругопластических волн. Данное замечание будет использовано в настоящей работе.

Распространение импульса напряжения. Основная цель нашего исследования заключается в численном расчете задачи распространения упругопластической волны напряжения в материале при кратковременном импульсном нагружении алюминиевой пластины электронным пучком и сравнении экспериментальных данных с расчетными. При такой постановке задачи рассматривается распространение волновых возмущений в полупространстве. Существенной особенностью этого случая, отличающего его от случая распространения волн в тонких длинных стержнях, является то, что разгрузка в полуограниченном пространстве идет как упругим, так и пластическим способом [1]. Данное обстоятельство, как будет показано далее, приводит к более быстрому затуханию амплитуды упругопластической волны по сравнению с гидродинамическим затуханием. Особенно это актуально при распространении коротких импульсов напряжения, с которыми мы имеем дело в настоящей работе.

Затухание импульса в данном случае осуществляется таким образом, что упругая часть волны разгрузки (имеющая скорость c_0) «догоняет» пластическую часть волны первичного нагружения (двигающуюся с меньшей скоростью c_1). Это приводит к затуханию волн, ускоренному по сравнению с гидродинамическим режимом распространения волны.

Расчёт параметров распространения импульса. Расчет проводится для относительных параметров задачи. Исходный импульс напряжения выбирается в виде равнобедренного треугольника с шириной на половине амплитуды, равной длительности экспериментального импульса, составляющей 70 нс. Амплитуда импульса составляет 280 МПа, и в относительных параметрах берется за единицу. Толщины образцов, на которых проводились измерения напряжений, и их расчет составляли: 1,8 мм; 2,5 мм; 3,5 мм; 4,3 мм. Амплитуда упругого предвестника при распространении волны считалась постоянной, скорость упругих волн в алюминии $c_0 = 6.26 \cdot 10^3$ м/с.

В качестве оптимизируемых параметров для обеспечения корреляции расчетных и экспериментальных данных применялись: скорость распространения пластических деформаций, длительность импульса, соотношение амплитуды упругого предвестника и амплитуды волны. В результате расчета они составили: скорость распространения пластических деформаций $c_1 = 5.95 \cdot 10^3$ м/с, длительность импульса сохранилась равной 70 нс, соотношение амплитуды упругого предвестника и амплитуды волны 1/10.

На рис. 1 приведена картина изменения расчетного профиля упругопластической волны и его амплитуды на выбранных толщинах образцов.

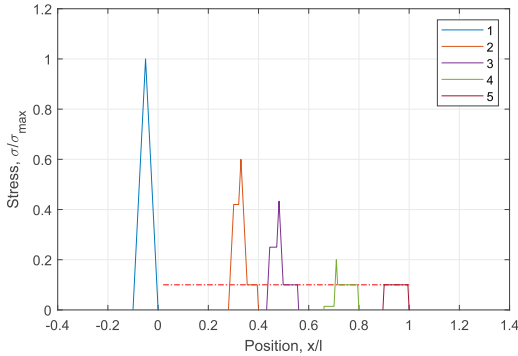


Рис. 1. Картина изменения расчетного профиля упругопластической волны и его амплитуды на выбранных толщинах образцов (1 — исходный импульс, 2 — импульс в сечении 1,8 мм, 3 — импульс в сечении 2,5 мм, 4 — импульс в сечении 3,5 мм, 5 — импульс в сечении 4,3 мм, пунктирной линией обозначен уровень упругого предвестника).

В таблицу 1 сведены амплитуды напряжений на различных толщинах образцов.

Таблица 1. Сравнение результатов расчета и эксперимента.

Толщина образцов, мм	Амплитуда напряжения (эксперимент), МПа	Относительная амплитуда напряжения (эксперимент)	Относительная амплитуда напряжения (расчет)
0	280	1	1
1,8	170	0,61	0,6
2,5	90	0,32	0,43
3,5	60	0,21	0,2
4,3	30	0,11	0,1

Заключение. Проведенный численный расчёт распространения кратковременного импульса механического напряжения показал быстрое затухание на достаточно малом, 4,3 мм, расстоянии от зоны приложения нагружения по сравнению с хорошо известным гидродинамическим затуханием.

Полученный результат может найти практическое применение при проектировании конструкций, работающих в условиях кратковременных динамических воздействий.

Литература

- [1] Wood D. On Longitudinal Plane Waves of Elastic-Plastic Strain in Solids // J. Appl. Mech. 1952. Vol. 19. Iss. 4. P. 521-525. doi: 10.1115/1.4010552.
- [2] Канель Г. И., Разоренов С. В., Уткин А. В., Фортгов В. Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 407 с.

О периодических орбитах заряженных частиц в суперпозиции поля магнитного диполя и однородного магнитного поля, коллинеарного магнитному моменту диполя

Колесников Е.К.,¹ Клюшников Г.Н.^{1,2}
e.kolesnikov@spbu.ru, g.klyushnikov@spbu.ru

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

²Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова НИЦ
«Курчатовский институт»,

188300, Российская Федерация, Ленинградская обл., Гатчина, мкр. Орлова роща, 1

Аннотация. Известны основные типы периодических орбит заряженных частиц, движущихся в дипольном магнитном поле. В то же время условия, гарантирующие существование периодических орбит, выполняются для достаточно широкого класса магнитных полей. В настоящей работе рассмотрены периодические орбиты в одной из простейших аппроксимаций геомагнитного поля — суперпозиции поля магнитного диполя и однородного магнитного поля с магнитным моментом диполя, коллинеарным индукции однородного поля. Приведены результаты численного поиска периодических орбит в суперпозиционном поле по специальному алгоритму.

Ключевые слова: адиабатические инварианты, заряженные частицы, геомагнитное поле, уравнения движения, периодические орбиты, КАМ-теория, теорема Мозера, сечение Пуанкаре, гамильтониан.

Введение. В большинстве случаев обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), используемые для описания физических и механических процессов, не имеют аналитического решения, поэтому нельзя сделать никакие выводы о множестве решений системы уравнений в целом и о поведении её отдельных решений на бесконечно больших временах. Когда известны периодические решения либо решения, асимптотически стремящиеся к периодическим, исследование поведения динамической системы значительно упрощается. Периодические решения существуют во многих задачах небесной механики и динамики материальной точки.

Классификация периодических решений определяется соответствием решений ОДУ точкам двумерной плоскости. Такое соответствие может быть легко

установлено, если существует особая поверхность, которую пересекает каждая траектория — сечение Пуанкаре. Два последовательных пересечения сечения Пуанкаре траекторией изображаются двумя соседними точками сечения. Соответствие последующей точки предыдущей определяет отображение T плоскости в себя, и задача о нахождении периодических решений дифференциальных уравнений, таким образом, эквивалентна задаче отыскания неподвижных точек отображения T .

Периодические орбиты заряженных частиц в дипольном магнитном поле достаточно хорошо изучены (см. [1]–[9]), их можно разделить на симметричные и асимметричные. Примечательно, что периодические орбиты могут существовать не только во внутренней, но и во внешней компоненте разрешённой области. Как следует из теоремы Мозера о неподвижной точке [10], в магнитном поле, представляющем собой суперпозицию поля магнитного диполя и однородного магнитного поля, коллинеарного магнитному моменту диполя, существование периодических орбит также допускается. Суперпозиция дипольного и однородного магнитных полей является одной из простейших моделей геомагнитного поля [11]. Настоящая работа посвящена численному поиску периодических орбит в суперпозиционном магнитном поле.

Обоснование существования периодических орбит. Как показано в [12], если выполняются следующие условия на магнитное поле \mathbf{V} :

1. модуль магнитной индукции B является выпуклой функцией вдоль любого отрезка S силовой линии магнитного поля,
2. векторный потенциал магнитного поля $A(\rho, z)$ является аналитической функцией координат ρ и z в некоторой окрестности T отрезка S ,
3. модуль магнитной индукции B не равен 0 ни в одной точке S ,

то в T существуют квазипериодические траектории. Под квазипериодическими понимаются траектории, соответствующие периодическим орбитам в сечении Пуанкаре.

Можно показать, что приведённые три условия выполнены для магнитного поля

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_d = 3M\rho z \mathbf{e}_\rho / r^5 + (M(2z^2 - \rho^2) / r^5 + B_0) \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

где \mathbf{V}_0 — индукция однородного магнитного поля, \mathbf{V}_d — индукция поля магнитного диполя, M — магнитный момент диполя, \mathbf{e}_ρ и \mathbf{e}_z — орты цилиндрической системы координат, ρ и z — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ — расстояние до диполя.

Поле (1) представляет собой суперпозицию поля магнитного диполя и однородного магнитного поля, коллинеарного магнитному моменту диполя.

Для характеристики вклада однородного магнитного поля в суперпозиционное будем использовать параметр $\alpha = B_0 R_E^3 / M$, где R_E — радиус Земли.

Поиск симметричных периодических орбит. Основные типы симметричных периодических орбит для дипольного магнитного поля представлены на рис. 1. Для численного построения периодических орбит в меридиональной плоскости дополнительно требуется решение алгебраических уравнений, определяющих начальные данные для выбранной траектории.

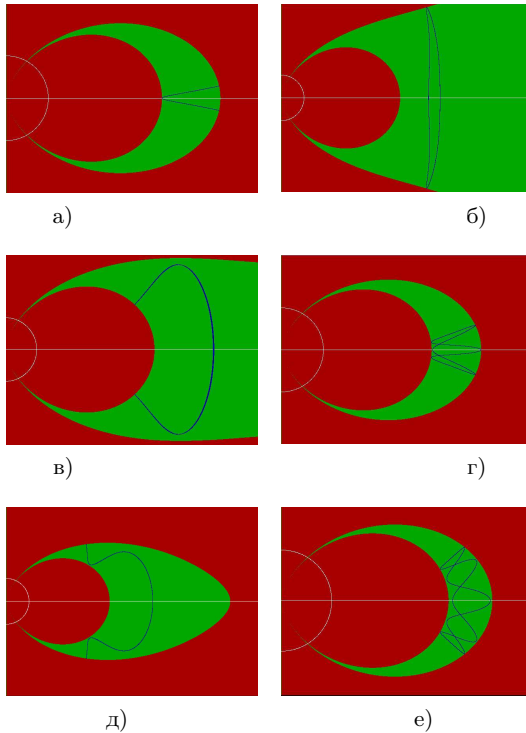


Рис. 1. Основные типы симметричных периодических орбит заряженных частиц в дипольном магнитном поле.

Для получения рис. 1 был использован следующий алгоритм численного нахождения симметричных периодических орбит [2]:

- Задание энергетической константы C_0 ,
- Нахождение наименьшего из трёх корней уравнения

$$C_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0^2} \right)^2,$$

где ρ_0 — начальное значение безразмерной цилиндрической координаты ρ ,
 – Определение проекции безразмерного импульса p_{z0} по формуле

$$p_{z0} = \sqrt{2C_0 - \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0^2}\right)^2}.$$

Поиск асимметричных периодических орбит. Для получения асимметричных периодических орбит необходимо помимо уравнений движения в меридианальной плоскости решить систему дифференциальных уравнений с вариациями начальных координат и скоростей [1]:

$$\dot{v}_{ij} = \sum_{k=1}^4 f_{ik} v_{kj}, \quad (2)$$

где $v_{ij} = \partial x_i / \partial x_{j0}$, $f_{ik} = \partial f_i / \partial x_k$, f_i — функции правых частей системы ОДУ, $x_{j0} = x_j(t=0)$, $\mathbf{x} = (\rho, z, \dot{\rho}, \dot{z})$ — безразмерные фазовые переменные, а затем уточнить полученные значения начальных данных с помощью специального коррекционного метода.

Влияние однородного поля на периодические орбиты. Описанные алгоритмы были использованы для построения периодических траекторий заряженных частиц в меридианальной плоскости в суперпозиционном магнитном поле с параметром α , отличным от 0. На рис. 2 в качестве примера показано исчезновение асимметричной периодической орбиты при увеличении параметра $\alpha > 0$.

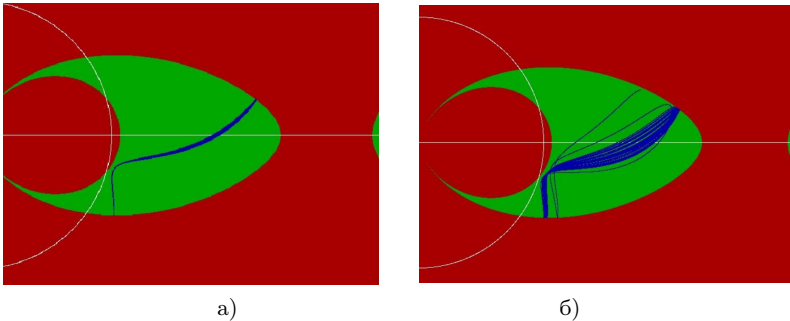


Рис. 2. Исчезновение периодической орбиты при увеличении параметра однородности α : а) $0 < \alpha < \alpha_{cr}$, б) $\alpha > \alpha_{cr} > 0$.

Как показывают предварительные результаты расчётов, все основные типы периодических орбит, наблюдаемые в дипольном магнитном поле, сохраняются и в суперпозиционном магнитном поле для малых по модулю значений параметра α , причём критические значения $\alpha_{1cr} > 0$ и $\alpha_{2cr} < 0$, при которых орбита перестаёт быть периодической, не равны по модулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 23-21-00038.

Литература

- [1] Markellos V. V., Klimopoulos S. A new family of periodic oscillations in the Störmer problem: the principal asymmetric // *Astr. and Space Sciences*. 1977. Iss. 48. P. 471–482.
- [2] Goudas C. L., Halioulas A. A., Markellos V. V., Macris G. Periodic Oscillations of the First Generation in the Störmer Problem // *Long-time predictions in dynamics; Proceedings of the Advanced Study Institute*. 1976. P. 267–276.
- [3] Markellos V., Klimopoulos S., Goudas C. Periodic Oscillations of the Second Generation in the Störmer Problem // *Long-time predictions in dynamics; Proceedings of the Advanced Study Institute*. 1976. P. 340–340.
- [4] Mavraganis A. The periodicity of a charged particle motion in a magnetic dipole field. *Astrophysics and Space Science* // *Astrophys. Space Sci.* 1981. Vol. 76. P. 159–166. doi: 10.1007/BF00651252
- [5] Juarez A. Periods of Motion in Periodic Orbits in the Equatorial Plane of a Magnetic Dipole // *Physical Review X*. 1949. Vol. 75. P. 137–139. doi: 10.1103/PhysRev.75.137
- [6] DeVogelaere R. On the structure of symmetric periodic solutions of conservative systems // *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*. 1958. Vol. 4, P. 53–84.
- [7] Dragt A. Trapped Orbits in a Magnetic Dipole Field // *Reviews of Geophysics*. 1965. Vol 3. Iss. 2. P. 255–298. doi: 10.1029/RG003i002p00255
- [8] Bonfim O., Griffiths D., Hinkley S. Chaotic and Hyperchaotic Motion of a Charged Particle in a Magnetic Dipole Field // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10. P. 265–271. doi:10.1142/S0218127400000177
- [9] Jimenez L., Eduardo P. Periodic orbits of an electric charge in a magnetic dipole field // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1990. Vol. 49. P. 327–345. doi: 10.1007/BF00049443
- [10] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука., 1974. 432 с.
- [11] Katsiaris G. A., Psillakis Z. Analytic models of the Earth's magnetosphere // *Astr. and Space Sciences*. 1987. Vol. 132. P. 165–175.
- [12] Brawn M. Particle motions in a magnetic field // *J. of diff. eq.* 1970. Vol. 8. P. 294–332.

Влияние нанокремниевых добавок (графена, фуллеритов) на эффективность энергонасыщенных композиций пористого кремния с перхлоратами бария и натрия при воздействии импульсного электронного пучка

Побережная У.М.,^{1,2} Морозов В.А.,³ Кац В.М.,³ Платонов П.С.,³
Илюшин М.А.,¹ Зегря Г.Г.,² Савенков Г.Г.^{1,2}

sav-georgij@yandex.ru

¹Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),

190013, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московский пр., 26,

²Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,

194021, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26,

³Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Представлены результаты экспериментов по воспламенению образцов при помощи высокоэнергетического пучка наносекундной длительности энергонасыщенных композитов (ЭНК) на основе пористого кремния с двумя окислителями — перхлоратом бария и перхлоратом натрия и двумя добавками — графеном и фуллеритами. Установлено, что с некоторой долей вероятности добавки являются своеобразными триггерами фазовых превращений в латунных колпачках, в которых находился запрессованный ЭНК.

Ключевые слова: энергонасыщенный композит, высокоэнергетический электронный пучок, пористый кремний, графен, фуллерит, быстрая экзотермическая реакция, горение.

В последние два десятилетия в мире возник устойчивый интерес к энергонасыщенным композитам (ЭНК) на основе пористого кремния (por-Si) (в качестве горючего) с различными окислителями [1]. Наиболее эффективными из них являются перхлораты, имеющие как высокое содержание кислорода, так и относительно высокую физическую и химическую стабильность по сравнению с другими окислителями. По мнению некоторых авторов наиболее оптимальный из перхлоратов для применения в ЭНК на основе пористого кремния — перхлорат натрия (NaClO_4) [1]. Теплота (q), выделяющаяся в условиях быстрой экзотермической реакции (которая инициируется различными внешними источниками и является горением композита) при взаимодействии por-Si с NaClO_4 — 20 МДж/кг [2]. Для сравнения аналогичная теплота быстрой экзотермической реакции для гексогена (RDX) — 5,77 МДж/кг [3]. Расчеты теплового эффекта, проведенные нами в рамках стандартной вычислительной программы АСТРА-4, разработанной в МГТУ им. Н.Э. Баумана, для быстрой

экзотермической реакции взаимодействия пористого кремния с перхлоратом бария ($\text{Ba}(\text{ClO}_4)_2$) дали значение $q = 21,4$ МДж/кг.

Настоящая работа посвящена исследованию возможностей ЭНК на основе пористого кремния с перхлоратом натрия и перхлоратом бария с добавками графена и фуллеренов при инициировании реакции сильноточным электронным пучком (СЭП) наносекундной длительности.

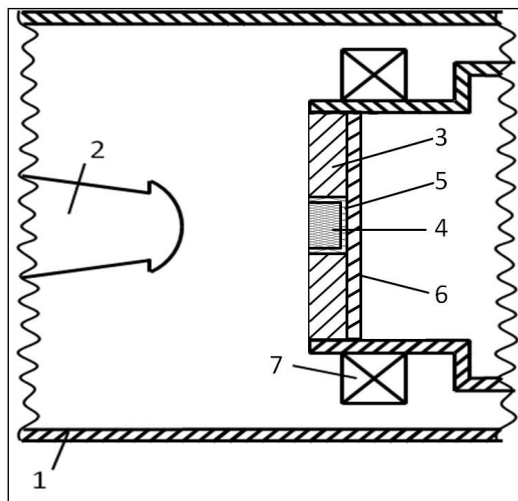


Рис. 1. Экспериментальная схема облучения пучком электронов образца: 1 — вакуумная камера, 2 — катод, 3 — стальное кольцо, 4 — энергонасыщенная композиция, 5 — колпачок, 6 — подложка.

ностью 50 Вт в течение 30 минут при комнатной температуре. В результате $\text{NaClO}_4/\text{Ba}(\text{ClO}_4)_2$ адсорбировался на стенках пор и равномерно распределялся в массе пористого кремния. В качестве добавок использовались многослойный (2 — 5 слоев) графен (Gr), который содержит гидроксильные группы $\text{OH}-$, в результате чего в таком графене содержится $\sim 9\%$ кислорода, что увеличивает содержание окислителя в ЭНК, и фуллериты (со средним размером 30 — 50 нм). Фуллериты — системы, состоящие из молекул фуллеренов (которые в свою очередь являются сферическими многогранниками, состоящими, например, как в настоящей работе из 60 или 70 атомов углерода), имеют размеры в десятки нанометров и являются типичными полупроводниками, легко эмитирующими

Соотношение между пористым кремнием и соответствующим окислителем в ЭНК составляло 50:50 (массовые доли). Пористый кремний с пористостью $\sim 66 - 68\%$ был получен из пластин толщиной $\sim 700 - 800$ мкм монокристаллического кремния, легированного бором (марка КДБ-100). Технология получения пластин пористого кремния, порошка (размер частиц порошка 35 — 45 мкм) из них и энергонасыщенного композита на основе $\text{por} - \text{Si}$ изложена в работе [1, 4]. Раствор перхлората натрия или перхлората бария в этиловом спирте и порошок пористого кремния обрабатывали в ультразвуковой ванне «Сапфир» мощностью

свободные электроны при нагревании [5]. Массовое содержание фуллеритов и графена в ЭНК составляло 17% от суммарной массы пористого кремния и перхлората. Значение массового содержания добавок (17%) объясняется тем, что оно является значением перколяционного предела, при достижении которого в системе (в нашем случае в ЭНК) образуются перколяционные кластеры — цепочки контактирующих частиц (графена или фуллеритов), пронизывающие весь объем запрессованного ЭНК. Все ЭНК запрессовывали в латунные колпачки с внутренним диаметром 4,55 мм на высоту 1,6 — 1,7 мм (полная глубина колпачка 2,0 мм). Масса всех запрессованных ЭНК составляла 30 — 35 мг, плотность $\rho \approx 1,1 - 1,3 \text{ г/см}^3$. Внешний диаметр стального кольца, в которое устанавливался колпачок с составом — 30 мм. Стальное кольцо устанавливалось на стальную подложку толщиной 2,2 — 2,5 мм, под которую устанавливался датчик давления. Схема облучения образца (ЭНК) пучком приведена на рис. 1. В качестве электронного ускорителя использовалась установка ГКВИ — 300. Длительность импульса тока на его полувывоте составляла 20 — 40 нс, средняя энергия электронов в пучке — 250 кэВ, расстояние между катодом и образцом — 4 мм, диаметр пучка — 8 мм.

Результаты экспериментов по иницированию исследуемых ЭНК приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты экспериментов по иницированию ЭНК.

№	ЭНК	Плотность, г/см ³	Результат	Примечание
1	por – Si + Ba(ClO ₄) ₂	1,17 – 1,2	+	
2	por – Si + Ba(ClO ₄) ₂ + Gr (17% mass)	1,17 – 1,28	+	Колпачок в камере отсутствовал, на катоде частицы латуни
3	por – Si + Ba(ClO ₄) ₂ + Ф(17% mass)	1,17 – 1,2	+	Колпачок в камере отсутствовал, на катоде частицы латуни
4	por – Si + NaClO ₄	1,1 – 1,15	+	
5	por – Si + NaClO ₄ + Gr (17% mass)	1,15 – 1,17	+	Выгорело ~ 2/3 массы ЭНК
6	por – Si + NaClO ₄ + Ф (17% mass)	1,8 – 1,2	+	В одном образце выгорело ~ 1/4 массы ЭНК, в другом — ЭНК полностью сгорел

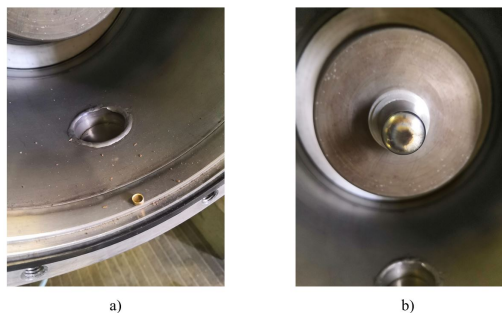


Рис. 2. Изображение камеры с колпачком (а) и вид катода с частицами латуни (б).

говыведения во время быстрой экзотермической реакции, а также воздействия катодного факела (взрыв микронеоднородностей на катоде из-за лавинообразного нарастания тока, вызванного джоулевым нагревом эмиттера), имеющего высокую температуру (~ 5000 К), колпачки могли испариться (температура кипения латуни ~ 1300 К). Таким образом, существует вероятность того, что добавки графена или фуллеритов в ЭНК послужили неким триггером для фазовых превращений латуни колпачка.

Отсутствие аналогичных изменений при воздействии СЭП на ЭНК с перхлоратом натрия, а также неполное выгорание композитов с добавками может быть связано с меньшим энерговыделением при горении композита и с его большим критическим диаметром горения.

Зафиксированные на осциллограммах кривые давления (пример осциллограммы приведён на рис. 3) позволили оценить скорости горения ЭНК с перхлоратом натрия.

Оценки скорости горения (u_{ign}) дали следующие значения: ЭНК без добавок — $u_{\text{ign}} \approx 350 - 400$ м/с, ЭНК с добавками — $u_{\text{ign}} \approx 400 - 480$ м/с. Таким об-

Прокомментируем результаты, приведенные в примечаниях строк 2 и 3. Во всех случаях полного выгорания ЭНК в колпачке, последний всегда находился в камере (рис. 2(а)).

Однако в случаях 2 и 3 колпачок отсутствовал, а на катоде наблюдались частицы латуни, которые хорошо были заметны при его полировке для последующих экспериментов. Можно предполагать, что вследствие большого энер-

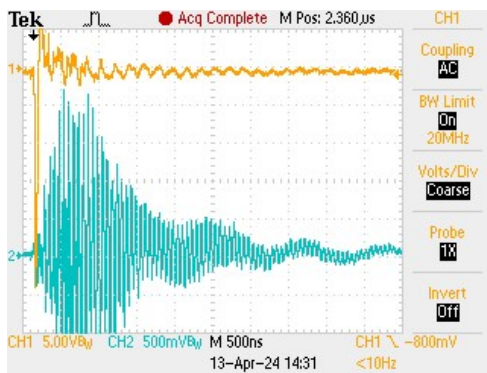


Рис. 3. Осциллограмма процессов при испытании образца ЭНК с графеном (строка 5 в таблице 1): 1 — кривая импульса напряжения; 2 — кривая импульса давления.

разом, и в этом случае добавки являются каталитическими элементами. Для сравнения, скорость горения пористого кремния без окислителя находится в диапазоне $u_{\text{ign}} \approx 20 - 25$ м/с.

Литература

- [1] Савенков Г. Г., Зегря А. Г., Зегря Г. Г., Румянцев Б. В., Синани А. Б., Михайлов Ю. М. Возможности энергонасыщенных композитов на основе нанопористого кремния (обзор и новые результаты) // Журнал технической физики. 2019. Т. 89. № 3. С. 397–403.
- [2] Abraham A., Nicholas W., Piekiet N. W., Christopher J., Morris C. J., Dreizin E. L. Combustion of Energetic Porous Silicon Composites Containing Different Oxidizers // Propell. Explos. Pyrot. 2016. Vol. 41. P. 179–188.
- [3] Физика взрыва. Т. 1. / Под ред. Л. П. Орленко. М.: Физматлит, 2002. 832 с.
- [4] Савенков Г. Г., Козачук А. И., Побережная У. М., Фрейман В. М., Зегря Г. Г. Скорость горения порошкообразного пористого кремния в условиях ограниченного пространства // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 47. № 4. С. 7–10.
- [5] Kratschmer W., Lamb L. D., Fostiropulos K., Huffman D. R. Solid C60: a new form of carbon // Nature. 1990. Vol. 347. P. 354–358.

Исследование динамики температуры следа СВЧ разряда с лазерной безыскровой инициацией при различных давлениях

*Ренев М. Е., Добров Ю. В., Лапиков В. А., Машек И. Ч.,
Хоронжук Р. С.*

*renevme@mail.ru, youdobrov@gmail.com, youdobrov@gmail.com,
Igor.Mashek@gmail.com, khoronzhuk@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В статье проведено исследование лазерно-иницированного СВЧ-разряда, был определен порог зажигания микроволнового разряда в воздухе при различных давлениях, как без инициации, так и с использованием лазерной безыскровой инициации (он равен 50 и 80 Торр). Была получена динамика температуры нагрева в следе микроволнового разряда с лазерной инициацией в диапазоне давлений от 40 до 75 Торр с использованием интерферометрии. Оказалось, что при давлении среды 40 Торр (меньше порога зажигания) использование лазерной инициации приводит к повышению температуры следа на 110 К. Зафиксирован значительный нагрев газа в следе инициированного разряда, достигающий 1100–1300 К при 40–75 Торр.

Ключевые слова: СВЧ-разряд, лазерная безыскровая инициация, подкритический разряд, интерферометр, измерение температуры.

Введение. Актуальна разработка плазменных методов энерговложения в среду для задач сверхзвуковой аэродинамики. Один из способов осуществления этого — использование СВЧ-разряда [1, 2]. Плотностная неоднородность, вызванная, например, СВЧ-разрядом, попадает в ударную волну перед телом, вызывает неустойчивость Рихтмайера–Мешкова [2, 3] и изменение нагрузок на теле. Для получения желаемого воздействия (изменение силы сопротивления, тепловых потоков, создание моментов) требуется обеспечить точность попадания возмущения в нужное место в ударной волне [4].

СВЧ-разряд зависим от фона затравочных электронов (1 ед. каждые 10 мс в 1 см^3) [5], а антенны для фокусировки СВЧ-излучения могут иметь множество фокусов [6]. В результате СВЧ-плазма может не появляться или же образовываться сразу в нескольких местах. В таком случае трудно ожидать качественной работы устройства для управления сверхзвуковым потоком на базе такого «обычного» СВЧ-разряда. Практический интерес представляет использование подкритического СВЧ-разряда.

Описанные особенности СВЧ-разряда могут быть устранены лазерной инициацией [7, 8], при этом разряд будет образовываться там, где проходило лазерное излучение, или была лазерная искра, обеспечивающие затравочные электроны [9]. В этих работах также показано, что можно повысить порог зажигания разряда по давлению, то есть разряд при повышенных давлениях подкритический. Требуется дальнейшее исследование таких разновидностей СВЧ-разряда.

В данной работе исследовано энерговложение подкритического СВЧ-разряда при безыскровой лазерной инициации в неподвижном воздухе при различных давлениях. Метод исследования — эксперимент по получению интерферограмм. Провели измерения для СВЧ разряда без инициации и с инициацией при давлении меньше и больше порогового значения. Получили зависимости динамики температуры следа разряда от давления.

Постановка эксперимента. Фотографии экспериментальной установки и оптическая схема приведены на рис. 1. Использовалась камера Эйфеля для получения низкого давления. СВЧ излучение генерировалось системой с магнетроном МИ-505 в виде импульсов по 3 мкс с частотой повторения 10 Гц, фокусировалось параболической антенной. Лазерное излучение создавалось лазером Evergreen-200 (импульсы 200 мДж), фокусировалось линзой с фокусным расстоянием 250 мм. Луч лазера проходил через главный фокус антенны вдоль направления напряженности СВЧ-поля. Применялись интерферометр Фабри–Перо и прибор ИАБ-451, видеокамера PCO DiCAM-PRO GaAs P46. Обработка интерферограмм для получения температуры нагрева следа плазмы проводилась по методике [10]. Лазерный импульс подавался на 100 нс позже окончания переднего фронта СВЧ-импульса.

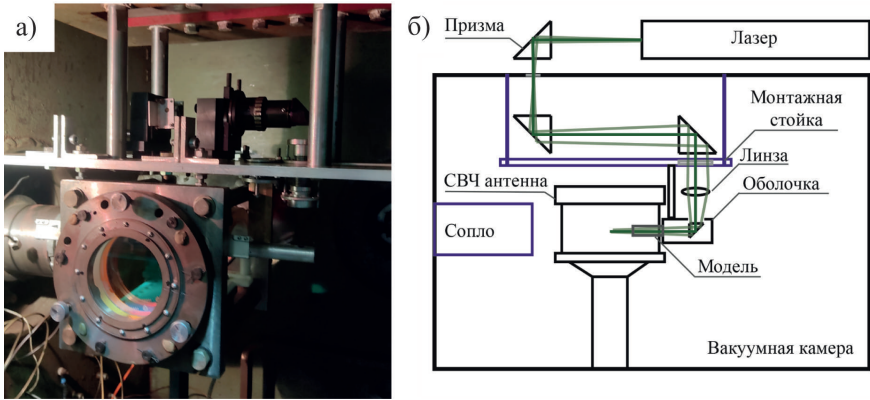


Рис. 1. а) Экспериментальный стенд, б) оптическая схема.

Анализ результатов. В ходе эксперимента получен порог зажигания СВЧ-разряда без инициации равный 50 Торр. След СВЧ-разряда попадал на две полосы интерферометра — это две точки измерения. На рис. 2(а) представлена динамика максимальных по двум полосам температур следа разряда

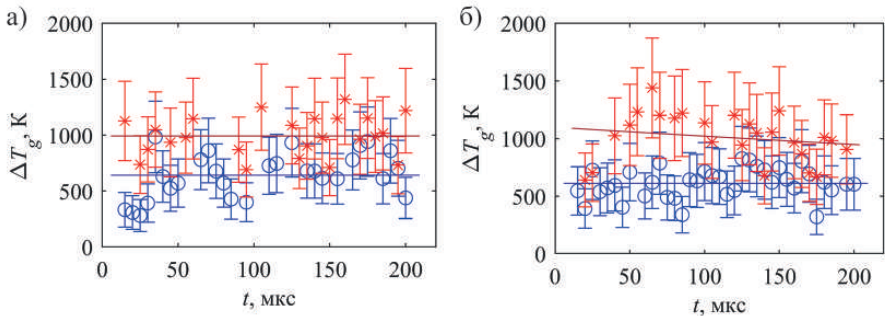


Рис. 2. Температура нагрева следа разряда при 40 Торр: а) без лазера, б) с лазером.

да при 40 Торр. Полоса «1» (синяя) показывает температуру нагрева края следа разряда, равную 640 К. Полоса «2» (красная) интерферометра расположена ближе к середине следа, а соответствующая температура нагрева равна 990 К. Заметного спада температур не обнаружено. При использовании лазерную инициацию СВЧ-разряда (рис. 2(б)), полосой «2» обнаруживается рост

температуры на 110 К до 1100 К в начальные моменты времени распада следа (до 50 мкс). Температура спадает экспоненциально с характерным временем 1000 мкс. Показания полосы «1» не изменились существенно при использовании инициации. Такие результаты могут быть связаны с лазерным излучением и его способностью указания положения следа. От эксперимента к эксперименту без инициации могли измеряться положения следов разрядов относительно полос интерферометра.

С использованием инициации порог зажигания поднят до 80 Торр. На рис. 3 представлена динамика максимальных по полосе «2» температуры нагрева для давлений 40–75 Торр и функции аппроксимации с коэффициентами (в легенде). С ростом давления повышается максимальная температура нагрева следа в начальные моменты времени (до 1310 К), но ускоряется спад этой температуры (характерное время уменьшается с 1000 до 285 мкс).

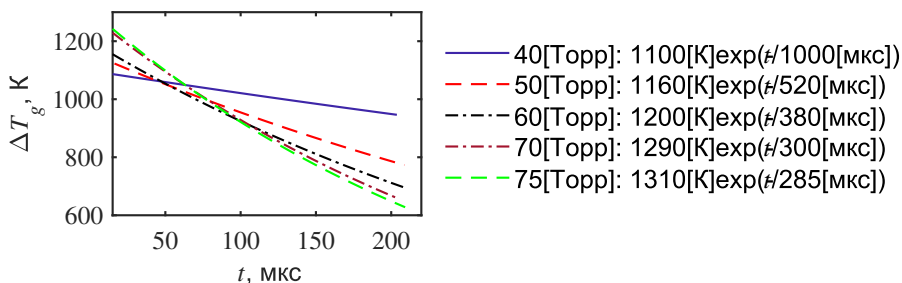


Рис. 3. Скачок температуры, след разряда с лазерной инициацией при давлениях 40–75 Торр.

Заключение. Проведены эксперименты по измерению температуры следа СВЧ-разряда без лазерной инициации и с ней как над- и подкритического. Без инициации разряд не зажигался при давлении выше 50 Торр, инициация позволила поднять порог до 80 Торр (разряд подкритический при давлении 50–80 Торр). Температура нагрева следа надкритического СВЧ-разряда возросла из-за лазерной инициации (с 990 до 1100 К). Температура нагрева подкритического разряда повышалась с ростом давления до 1310 К (75 Торр), при этом уменьшалось характерное время спада с 1000 до 285 мкс.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-19-00241).

Литература

- [1] Fomin V. M., Tretyakov P. K., Taran J.-P. Flow control using various plasma and aerodynamic approaches (Short review) // *Aerospace Science and Technology*. 2004. Vol. 8. Iss. 5. P. 411–421.
- [2] Starikovskiy A. Y., Aleksandrov N. L. Gasdynamic Flow Control by Ultrafast Local Heating in a Strongly Nonequilibrium Pulsed Plasma // *Plasma Physics Reports*. 2021. Vol. 47. Iss. 2. P. 148–209.
- [3] Dobrov Y. V., Renev M. E., Lashkov V. A., Mashek I. Ch., Khoronzhuk R. S. Heat flux on streamlined body surface after local energy input // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 1959. Iss. 1. P. 012016.
- [4] Knight D., Azarova O., Kolesnichenko Y. Drag force control via asymmetrical microwave filament location in a supersonic flow // *ESA journal*. 2008. Vol. 50. Iss. 100. P. 150.
- [5] Usoskin I. G., Desorgher L., Velinov P., Storini M., Fluckiger E. O., Butikofer R., Kovaltsov G. A. Ionization of the earth's atmosphere by solar and galactic cosmic rays // *Acta Geophys.* 2009. Vol. 57. Iss. 1. P. 88–101.
- [6] Saifutdinov A. I., Kustova E. V. Dynamics of plasma formation and gas heating in a focused-microwave discharge in nitrogen // *Journal of Applied Physics*. 2021. Vol. 129. Iss. 2. P. 023301.
- [7] Khoronzhuk R. S., Karpenko A. G., Mashek I. Ch., Lashkov V. A., Potapenko D. P. Microwave discharge initiated by double laser spark in a supersonic airflow // *J. Plasma Phys.* 2015. Vol. 81. Iss. 3. P. 905810307.
- [8] Afanas'ev S. A., Brovkin V. G., Kolesnichenko Yu. F., Mashek I. Ch. Effect of gasdynamic processes on structure and threshold of laser spark initiated microwave discharge // *Tech. Phys. Lett.* 2011. Vol. 37. Iss. 8. P. 710–713.
- [9] Popov V. S. Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in a strong laser field (Keldysh theory) // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 2004. Vol. 174, Iss. 9. P. 921.
- [10] Aseev G. I. Using the Mach-Zehnder interferometer to determine the spatial distribution of the refractive index and temperature in the flame: Textbook for universities. Saratov: Faculty of Physics SSU, 2005. 30 p.

Нормальный тлеющий разряд в потоке

Рулева Л.Б., Солодовников С.И.

ruleva@ipmnet.ru, sis63@yandex.ru

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101/1

Аннотация. Нормальный тлеющий разряд был экспериментально исследован в вакуумном блоке ударной аэродинамической трубы. Определены режимы высоковольтного питания для поддержания плазменного столба при давлениях среды 3...5 Торр.

Показана возможность самоорганизации плазмы в течение 12...16 мс при скорости потока 1000 м/с. Информация датчиков в квазистационарных режимах получена для наполнения базы валидационных данных для математического моделирования.

Ключевые слова: газоразрядная плазма, воздушный поток, эксперимент.

Математическое моделирование аэротермодинамических параметров подвижных объектов [1] валидируется физическим моделированием в лабораторных аэродинамических установках. Например, на уникальной научной установке ГУАТ ИПМех РАН [2]. Квазистационарные участки графиков датчиков, так называемые «полочки», наиболее удобны для сравнений параметров. Такие «полочки» графиков давления наблюдаются в падающей и отраженной ударной волне в ударных трубах, в начальном истечении газового потока из сопла от долей до единиц миллисекунд [3]. Время наблюдения в экспериментах [4] по влиянию на скоростной поток высокочастотной наносекундной газоразрядной плазмы, или импульсного оптического лазерного разряда мало. В экспериментальных исследованиях на установке ГУАТ по взаимодействию газового разряда с потоком валидационными характеристиками обладает самоорганизуемая газоразрядная плазма — нормальный тлеющий разряд. Квазистационарное время существования нормального тлеющего разряда при пониженном давлении до 3...5 Торр в потоке, истекающего из сопла в ГУАТ на скорости 1 км/с [5], составляло от 14 до 20 мс. Влияние экспериментально задаваемых параметров на организацию нормального тлеющего разряда из аномального разряда и на валидационное время является целью настоящей работы. Модель, в виде плоского канала с парой анод–катод и встроенных датчиков давления и теплового потока на расстоянии 100 мм от катода показана на (рис. 1).

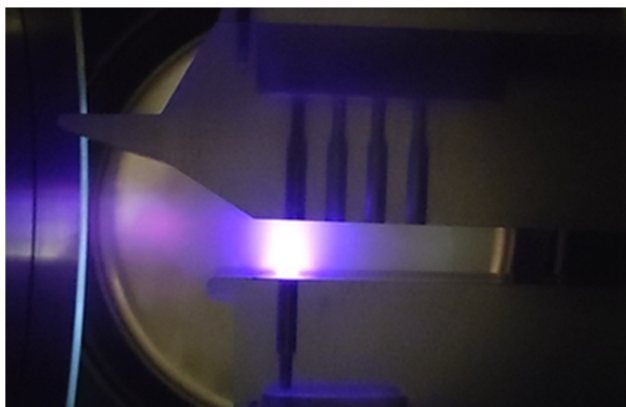


Рис. 1. Модель с разрядом у сопла.

Сигналы всех датчиков, в том числе фотоэлектронного умножителя (ФЭУ), тока и напряжения в разрядном промежутке преобразуются в цифровую форму на частоте 10 МГц. Примеры графиков показаны на (рис. 2). Здесь обозначены:

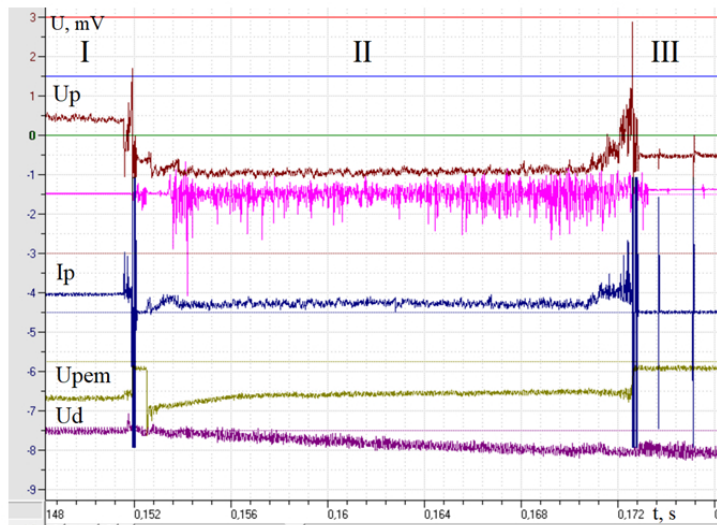


Рис. 2. Сигналы при 2,5 кВ, 6 мА, 2 Торр.

ны: U_d , U_t — напряжение датчиков давления и теплового потока; U_p , I_p — напряжение и ток в разрядном промежутке; U_{pem} — сигнал ФЭУ.

Начало графиков (I) соответствует горению разряда без потока. Затем, при истечении из сопла (II) газового потока, разряд сносит. Через короткое время, около 2 мс за счет приповерхностной ионизации за счет отраженных скачков уплотнений, разряд вспыхивает, что показывает график ФЭУ. Затем самоустанавливается нормальный тлеющий разряд (квазистационарный фрагмент графика U_p) в течение 12–16 мс. Давление U_d падает, скорость потока возрастает и разряд гаснет (III), что ограничивает время существования разряда, зажженного при стационарных условиях. По определению нормального тлеющего разряда в паре катод–анод при уменьшении тока в разрядном промежутке, напряжение занимает свое постоянное минимальное значение. Этот факт можно наблюдать на графиках напряжения в разрядном промежутке U_p при уменьшении тока I_p . Данный экспериментальный фрагмент удобен для валидационных целей. Таким образом, экспериментально выявлено, что нормальный тлеющий разряд устойчиво горит в течение 12...16 мс при скорости потока 1000 м/с, в

диапазонах: давлений среды 3...5 Торр, питающем напряжении 2...2,5 кВ и токе 5...6 мА.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 22-11-00062.

Литература

- [1] Surzhikov S. T. Validation of computational code UST3D by the example of experimental aerodynamic data // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 815. P. 012023. doi: 10.1088/1742-6596/815/1/012023
- [2] Суржиков С. Т. Расчетные исходные данные для решения тестовых задач в измерительной секции гиперзвуковой ударной аэродинамической трубы ГУАТ лаборатории РадГД ИПМех РАН // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2021. Т. 22. Вып. 1.
- [3] Ruleva L. B., Solodovnikov S. I. Experimental studies of wedge models // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. P. 012040. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012040
- [4] Стариковский А. Ю., Александров Н. Л. Управление газодинамическими потоками с помощью сверхбыстрого локального нагрева в сильнонеравновесной импульсной плазме. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2006/2006.11681.pdf>
- [5] Солодовников С. И., Рулева Л. Б. Экспериментальные исследования газоразрядной плазмы в потоке // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24. Вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1079/>

Анализ современных подходов к исследованию движения микрочастиц вблизи поверхности безатмосферных небесных тел

Яковлев А.Б., Белобородов Д.А.

a.b.yakovlev@spbu.ru, st117207@student.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Промышленное освоение Луны признано в экономически развитых мировых державах одной из первоочередных задач космических исследований Солнечной системы. Для ее осуществления требуется решить проблему нейтрализации негативного воздействия лунной пыли. Изучение динамики частиц лунного грунта является важным направлением внутри указанной комплексной проблемы. В работе дан анализ современных подходов к исследованию движения микрочастиц вблизи поверхности безатмосферных небесных тел.

Ключевые слова: Луна, астероид, экзосфера, левитация, микрочастица.

Исследование движения микрочастиц лунного реголита и связанных с этим вопросов имеет более чем сорокалетнюю историю. Первоначально они были

вызваны стремлением понять причины наблюдавшегося экипажем «Аполлона 17» рассеивания солнечного света около лунного терминатора, вызывающего «свечение горизонта» и «поток света» над лунной поверхностью (см. рис. 1).

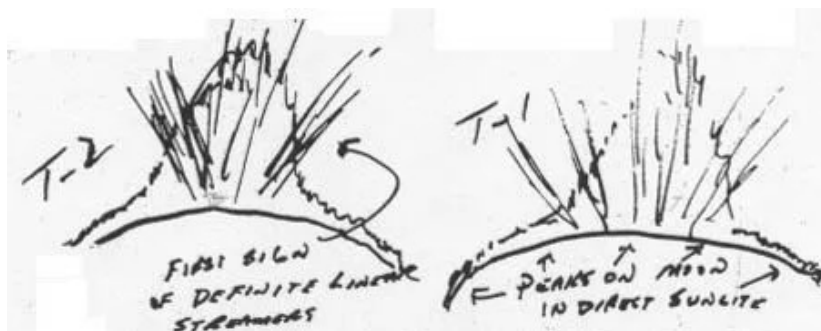


Рис. 1. Зарисовка свечения, наблюдавшегося экипажем «Аполлона 17».

Сделанное в [1] предположение связало явление свечения горизонта с возможным подъемом микрочастиц лунного реголита (лунной пыли) в приповерхностном электрическом поле, возникающем в результате бомбардировки поверхности Луны плазмой солнечного ветра. К этому моменту задача о расчете потенциала вблизи плоской поверхности, на которую воздействуют световой и плазменный потоки, была поставлена и разработаны несколько методов ее решения [2]–[6]. На первом этапе было осуществлено определение эмиссионных характеристик лунного грунта и с их помощью рассчитана функция распределения фотоэлектронов для произвольного угла падения солнечного излучения [2, 7, 8]. Сделанные в этот период оценки позволили сделать вывод о невозможности непосредственного подъема микрочастиц грунта непосредственно с поверхности и связывали возможность существования левитирующих микрочастиц с их инжекцией при бомбардировке метеоритами [8, 9]. Условно начало второго этапа можно связать с получением критерия подъема микрочастиц с поверхности [10] и записи уравнений для вертикального [11, 12] и горизонтального [12] движений микрочастиц вблизи лунного терминатора. Начало нового этапа исследований, приведшее к резкому увеличению количества публикаций и научных групп, занимающихся данной проблемой, вызвано подготовкой сразу в нескольких странах программ по посылке автоматических космических аппаратов к Луне и астероидам.

Наметившийся кризис с добычей ряда полезных ископаемых, в частности редкоземельных металлов, привел к необходимости детального изучения бо-

гатств Луны [13]. Это подразумевает в том числе использование посадочных аппаратов и проектирование долговременных лунных баз. Также возросшее осознание астероидной опасностью привело осуществлению нескольких полетов к астероидам, сопровождавшихся забором грунта с их поверхности. Как отмечено в [13] «промышленное освоение Луны выдвигается на первый план среди первоочередных задач космических исследований Солнечной системы, ведущихся в экономически развитых мировых державах».

Осуществление любых операций на поверхности Луны вызывает необходимость решения проблемы предотвращения негативного воздействия лунной пыли на механизмы и членов экспедиции. В ходе полета «Аполлона 12» было обнаружено, что поднятая пыль быстро покрывает все предметы, включая скафандры, инструмент и системы лунного модуля. Попытки их очистить оказались неудачными. Осаждение пыли приводило к заклиниванию движущихся частей механизмов, сбоям в работе систем терморегулирования, отказам застежек типа «молния» скафандров и нарушению герметизации ампул с образцами лунной экзосферы. Очень неприятным фактором лунной пыли оказалось влияние на самочувствие человека: раздражение кожи, глаз и кашель [14]. Также левитирующая лунная пыль может отрицательно влиять на оптические наблюдения как научные, так и при мониторинге транспортных операций. По этим причинам изучение лунной экзосферы и свойств лунной пыли стало важнейшим направлением исследований при подготовке и осуществлении лунных посадочных миссий. К основным направлениям исследований можно отнести следующие:

- 1) разработка и тестирование специальных датчиков для определения параметров экзосферы, заряда, массы и скорости движущихся над поверхностью планеты микрочастиц [15, 16];
- 2) уточнение эмиссионных характеристик лунного грунта и соответствующий перерасчет функции распределения фотоэлектронов [17, 18];
- 3) проведение экспериментальных наблюдений за движением микрочастиц над поверхностями Луны и астероидов [19, 20];
- 4) теоретическое исследование процессов переноса микрочастиц грунта у поверхности астероидов [20];
- 5) создание земных аналогов лунного реголита и проведение лабораторных исследований по осуществлению вертикального и горизонтального переноса микрочастиц [21];
- 6) экспериментальное и теоретическое изучение влияния потоков метеорных тел на количество и распределение левитирующих над поверхностью микрочастиц [19, 22].

Следует отметить, что проводившиеся теоретические исследования процессов электризации и движения микрочастиц проводились в предположении шарообразности микрочастиц. Однако значительная часть микрочастиц лунного

грунта имеет сложную форму, для которой отношение площади поверхности к объему существенно превышает таковое для шара. Изучение влияния формы частицы на процессы ее электризации и движения может стать важным элементом для лучшего соответствия между теоретическими предсказаниями и результатами натуральных экспериментов.

Литература

- [1] Zook H. A., McCoy J. E. Large scale lunar horizon glow and a high altitude lunar dust exosphere // *Geophys. Res. Lett.* 1991. Vol. 18. Iss. 11. P. 2117–2120.
- [2] Walbridge E. W. The lunar photoelectron layer // *J. of Geophysical research.* 1973. Vol. 78. Iss. 19. P. 3668–3687.
- [3] Freeman I. W., Ibrahim M. Lunar electric fields, surface potential and associated plasma sheaths // *Moon.* 1975. Vol. 14, Iss. 1. P. 103–114.
- [4] Singer S. F., Walker E. H. Photoelectric screening of bodies in interplanetary space // *Icarus.* 1962. Vol. 1. Iss. 1. P. 7–12.
- [5] Guernsey R. L., Fu J. H. Potential distribution surrounding a photoemission plate in a dilute plasma // *J. of Geophys. Res.* 1970. Vol. 75. Iss. 16. P. 3193–3199.
- [6] Мануйлов А. С., Колесников Е. К. К вопросу о немонотонном ходе электростатического потенциала в фотоэлектронном слое над поверхностью Луны в период средней солнечной активности // *Вестник ЛГУ серия: математика, механика, астрономия.* 1984. Сер. 1. Вып. 7. С. 101–104.
- [7] Колесников Е. К., Мануйлов А. С. Расчет напряженности электростатического поля над поверхностью Луны, покрытой монослоем водорода // *Астрономический журнал.* 1982. Т. 59. № 5. С. 996–998.
- [8] Мануйлов А. С., Колесников Е. К. Кинетика фотоэлектронного слоя у поверхности безатмосферного небесного тела // *Физическая механика.* Вып. 5. 1984. С. 110–125.
- [9] Колесников Е. К., Мануйлов А. С. К вопросу об электростатической эрозии участка поверхности Луны, покрытой монослоем водородистых соединений // *Астрономический журнал.* 1983. Т. 60. № 5. С. 995–998.
- [10] Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Условие электростатической левитации микрочастиц лунного реголита // *Астрономический вестник.* 1997. Т. 31. № 1. С. 70–71.
- [11] Яковлев А. Б. Динамика левитирующих микрочастиц лунного реголита // *Астрономический вестник.* 1998. Т. 32. № 4. С. 398–400.
- [12] Kolesnikov E. K., Yakovlev A. B. Vertical dynamics and horizontal transfer of submicron-sized lunar-regolith microparticles levitating in the electrostatic field of the near-surface photoelectron layer // *Planetary and Space Science.* 2003. Vol. 51. P. 879–885.
- [13] Зеленый Л. М., Шевченко В. В. Клондайк на поверхности // *Русский космос.* 2021. № 11. С. 20–27.

- [14] Зеленый Л. М., Захаров А. В. Загадки лунной пыли // Русский космос. 2022. № 2. С. 42–49.
- [15] Wang X., Horányi M., et al. Electrostatic dust analyzer for dust transport measurements on the lunar surface // *The Planetary Science Journal*. 2024. Vol. 5. Iss. 2. P. 41. doi: 10.3847/PSJ/ad1ffe
- [16] Li Y., Srama R., et al. Instrument study of the lunar dust eXplorer (LDX) for a lunar lander mission // *Advances in Space Research*. 2014. Vol. 54. Iss. 10. P. 2094–2100. doi: 10.1016/j.ast.2013.12.006
- [17] Sana T., Mishra S. K. Velocity Distribution of Photoelectrons over Sunlit Moon // *Icarus*. 2024. Vol. 412. P. 115996. doi: 10.1016/j.icarus.2024.115996
- [18] Попель С. И., Голубь А. П., и др. К вопросу о распределении фотоэлектронов над освещенной частью Луны // *Письма в ЖЭТФ*. 2014. Т. 99. № 3. С. 131–137.
- [19] Szalay J.R., Horányi M. Detecting meteoroid streams with an in-situ dust detector above an airless body // *Icarus*. 2016. Vol. 275. P. 221–231. doi: 10.1016/j.icarus.2016.04.024
- [20] Hartzell C., Zimmerman M., Hergenrother C. An evaluation of electrostatic lofting and subsequent particle motion on Bennu // *The Planetary Science Journal*. 2022. Vol. 3. Iss. 4. P. 85. doi: 10.3847/PSJ/ac5629
- [21] Gan H., Zhang X. Experiments on the electrostatic transport of charged anorthite particles under electron beam irradiation // *The Astrophysical Journal*. 2022. Vol. 930. Iss. 1. P. 42. doi: 10.3847/1538-4357/ac5d48
- [22] Popel S.I., Golub A.P. Impacts of Fast Meteoroids and the Separation of Dust Particles from the Surface of the Moon // *JETP Letters*. 2016. Vol. 103. Iss. 9. P. 563–567.

Секция 9

Методы искусственного интеллекта в задачах механики

*Artificial intelligence methods
in mechanics problems*

О проблемах и перспективах учета возмущений и неопределенностей в задачах динамики космических аппаратов

Граничин О.Н., Тихонов А.А., Копылова К.Д., Максименко М.В., Сахаров В.Ю., Иванский Ю.В., Амелина Н.О.

*o.granichin@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru, ksenia.pochta@spbu.ru,
mig_sab@rambler.ru, v.sakharov@spbu.ru, y.ivansky@spbu.ru,
natalia_amelina@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В статье представлен краткий обзор методов искусственного интеллекта, используемых для расчета стратегии управления космическим аппаратом в условиях неопределенностей. Также изучается вопрос применения рандомизированных алгоритмов оптимизации и оценивания, эволюционных алгоритмов и генетических алгоритмов, нечеткой логики и методов на основе нейронных сетей для управления ориентацией спутников.

Ключевые слова: искусственный интеллект, космический аппарат, спутник, стабилизация ориентации, возмущения, неопределенности, асимптотическая устойчивость.

Введение. В настоящее время, при описании динамики вращательного движения космических аппаратов (КА) используются различные по качеству и степени сложности аналитические модели — как линейные, так и нелинейные. Для успешного решения задач управления орбитальным и угловым движением КА адекватность математической модели во многих случаях является определяющим фактором. Однако, во многих случаях не представляется возможным заранее точно построить математическую модель ввиду наличия разного рода возмущений и неопределенностей в действующих силах и моментах, а также шумов в измерительной аппаратуре. В таких случаях используются различные подходы, развитые на основе методов искусственного интеллекта (ИИ), рассматриваемые в данном кратком обзоре.

Методы искусственного интеллекта. В последнее время стало возможным повышение качества стабилизации и управления ориентацией КА благодаря применению методов ИИ за счет учета возмущений, шумов и неопределенностей при моделировании динамики и пр. В частности, рандомизированные алгоритмы оптимизации и оценивания позволяют снизить негативное влияние возмущений, шумов и неопределенностей благодаря вычислительно простым и эффективным схемам и при более слабых предположениях о природе возмущений, шумов и неопределенностей по сравнению со многими другими (см., например, [1, 2, 3]). Алгоритмы такого рода применяются также при диагностике неисправностей в системах управления ориентацией КА, что

позволяет преодолеть проблемы, обусловленные особенностями конструкции, нелинейностью модели и внешними возмущениями [4]. Для оптимизации регуляторов на основе нечеткой логики [5, 6], дробных ПИД-регуляторов [7, 8] используются генетические алгоритмы [9]. Кроме того, может быть применено управление на основе метода дифференциальной эволюции [10] или нейрорезолюционные алгоритмы [11]. Для управления ориентацией КА регулятор с нечеткой логикой эффективнее ПИД регулятора с точки зрения скорости и отказоустойчивости [12], при этом модели управления часто линеаризуются [12, 13]. Методы нечеткой логики также используются при создании систем управления КА, в которых учитываются ограничения использования только «электромагнитного» привода для трехосной стабилизации и управления ориентацией на основе магнитного момента [14], а также для достижения высокоточной стабилизации орбиты [15] для КА с упругой конструкцией [16]. Подход, основанный на нечеткой логике применяется для оценки динамики системы с учетом параметрических неопределенностей, возникающих из-за отсутствия данных об угловой скорости в связи с высокой стоимостью или техническими ограничениями [17]. Для получения оптимальной стратегии управления используются методы глубокого обучения с подкреплением [18, 19]. Обучение с подкреплением на основе нейронных сетей (НС) используется для автономного управления ориентацией КА [18] и в режиме слежения с полностью неизвестной динамикой [20]. НС может быть использована для аппроксимации неизвестной динамики в режиме скользящего интеллектуального управления для КА [21] с неопределенной матрицей инерции и возмущающим моментом, вызванным двигателем при переходе на орбиту. В работе [22] предложена робастная система управления на основе обобщенной инверсной динамики с оценкой, получаемой с помощью адаптивной НС для отслеживания ориентации в условиях отсутствия знаний о параметрах инерции КА. Активное управление на основе НС применяется к модели с внешним возмущением с ограниченным входом в [23]. В статье [24] представлен подход к управлению заданными характеристиками за конечное время, основанный на обучающейся НС Чебышева для отслеживания ориентации КА с моделированием неопределенностей, неисправностей исполнительного механизма и внешних возмущений. В целях повышения точности измерения ориентации и управления КА в [25] предложен метод, основанный на управляемых чувствительных гироскопах с регулируемой скоростью и магнитной подвеской и законе управления НС дробного порядка. Была сделана попытка рассмотреть большинство методов, учитывающих неопределенности, с целью в дальнейшем создать алгоритм управления, учитывающий максимальное количество неточностей. Это важно для достижения действительно эффективного управления ориентацией. Между тем, отметим, что в литературе практически отсутствуют методы использования рандомизированных алгоритмов для уменьшения ошибок, связанных с практически произвольными возму-

щениями, шумами и неопределенностями, поэтому в дальнейшем планируется применить эти методы к моделям, рассмотренным в [26, 27, 28] и сравнить эти методы с современными методами ИИ для повышения качества стабилизации и ориентации КА.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>.

Литература

- [1] Sabug Jr. L., et al. Simultaneous design of passive and active spacecraft attitude control using black-box optimization // *Control Eng. Pract.* 2023. Vol. 135. Art. 105516.
- [2] Granichin O., Zeev V. V., Toledano-Kitai D. *Randomized algorithms in automatic control and data mining.* Springer, 2015. 251 p.
- [3] Granichin O., Ivanskiy Y., Kopylova K. Polyak's Method based on the stochastic Lyapunov function for justifying the consistency of estimates produced by a stochastic approximation search algorithm under an unknown but bounded noise // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2003. Vol. 64. Iss. 4. P. 771–780.
- [4] Chen S., et al. A Random Forest and Model-Based Hybrid Method of Fault Diagnosis for Satellite Attitude Control Systems // *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 2023. Vol. 72. Art. 3279453.
- [5] Correa C., Sandri S. A., de Souza L. C. G. The use of genetic algorithms on a fuzzy controller for a satellite attitude control during the pointing phase // *Revista Brasileira de Ciencias Mecanicas. Special Issue.* 1999. Vol. 21. P. 615–624.
- [6] Choi D., Chhabra A., Kim D. Genetic algorithm-aided fuzzy controller for spacecraft attitude maneuver with uncertainties // *ASCEND 2021.* 2021. Art. 4174.
- [7] Negara A. T., Mustiko S., Firmansyah L. Genetic algorithm based fopid controller for nano-satellite attitude control // *J. Inf. Polinema.* 2022. Vol. 9. Iss. 1. P. 59–66.
- [8] Sayin E., Bitirgen R., Bayezit I. Attitude Control and Parameter Optimization: A Study on Hubble Space Telescope // *Meas. Sci. Rev.* 2023. Vol. 23. Iss. 4. P. 146–153.
- [9] Sands T. *Advances in Spacecraft Attitude Control.* InTech Open, 2020. 288 p.
- [10] Elisov N. A., et al. An attitude control by the functional series in the problem of nanosatellite reorientation // *Aerosp. Sci. Technol.* 2023. Vol. 132. Art. 108038.
- [11] Gavra V., van Kampen E. J. Evolutionary Reinforcement Learning: Hybrid Approach for Safety-Informed Fault-Tolerant Flight Control // *J. Guid. Control Dyn.* 2024. P. 1–13.
- [12] Adunola F., Sani S., Nyitamen D. Comparative study of FLC and PID for satellite attitude control // *Global J. of Adv. Eng. Technol.* 2002. Vol. 5. Iss. 2. P. 183–195.
- [13] Zapf J. Robust attitude control with fuzzy momentum unloading for satellites using reaction wheels // *20th Annual AIAA/USU Conf. on Small Satell.* 2006.

- [14] Asadabadi A., Anvar A. Small satellite modelling and attitude control using fuzzy logic // *Int. J. of Aerosp. and Mech. Eng.* 2012. Vol. 6. Iss. 12. P. 2598–2601.
- [15] Yue X., Lyu B., Liu C. Fuzzy-Logic-Based Integrated Orbit-Attitude-Vibration Prescribed-Time Control for Large-Scale Flexible Spacecraft // *In Int. Conf. on Comput. & Exp. Eng. and Sci.* 2023. Cham: Springer Int. Pub. P. 839–849.
- [16] Aslam S., et. al. Model predictive control for Takagi-Sugeno fuzzy model-based Spacecraft combined energy and attitude control system // *Adv. in Space Res.* 2023. Vol. 71. Iss. 10. P. 4155–4172.
- [17] Beyramzad J., Daneshjou K., Khanmirza E. Design a finite-time chattering free attitude controller for rigid spacecraft's without angular velocity measurement using interval type-II fuzzy logic nonsingular terminal sliding mode and nonlinear extended state ob-server // *In 21st Int. Conf. of Iranian Aerosp. Soc.* 2023. P. 1–8.
- [18] Sarmiento J.A.R., et al. Sample efficient deep reinforcement learning for Diwata microsatellite reaction wheel attitude control // *Aerosp. Syst.* 2023. Vol. 6. Iss. 1. P. 61–69.
- [19] Enders N. A. Deep reinforcement learning applied to spacecraft attitude control and moment of inertia estimation via recurrent neural networks, Master's Thesis, 2021.
- [20] Liu Y., et al. Neural network-based reinforcement learning control for combined spacecraft attitude tracking maneuvers // *Neurocomput.* 2022. Vol. 484. P. 67–78.
- [21] Wang X., Xu B., Pan Y. Neural network-based sliding mode control for satellite attitude tracking // *Adv. Space Res.* 2023. Vol. 71. Iss. 9. P. 3565–3573.
- [22] Jafri S. M. N., Aslam M. I. Spacecraft attitude control based on generalised dynamic inversion with adaptive neural network // *Aeronaut. J.* 2024. Vol. 128. Iss. 1321. P. 504–516.
- [23] Fu Y. Neural network-based active control of a rigid-flexible spacecraft with bounded input // *J. Vib. Control.* 2024. Vol. 30. Iss. 5–6. P. 1117–1132.
- [24] Jia Q., et al. Learning Chebyshev neural network-based spacecraft attitude tracking control ensuring finite-time prescribed performance // *Aerosp. Sci. Technol.* 2024. Vol. 148. Art. 109085.
- [25] Li L., et al. Spacecraft Attitude Measurement and Control Using VSMSCSG and Fractional-Order Zeroing Neural Network Adaptive Steering Law // *Sensors.* 2024. Vol. 24. Iss. 3. Art. 766.
- [26] Aleksandrov A. Y., Tikhonov A. A. Application of a PID-like control to the problem of triaxial electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the orbital frame // *Aerosp. Sci. Technol.* 2022. Vol. 127. Art. 107720.
- [27] Aleksandrov A. Y., Tikhonov A. A. Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: Dynamics and Stability Analysis // *J. Appl. Comput. Mech.* 2023. Vol. 9. Iss. 2. P. 513–520.
- [28] Tikhonov A. A. Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: The Concept and Kinematic Analysis // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. Vol. 7. Iss. 4. P. 2113–2119.

Оптимизация расчётов поуровневых коэффициентов скорости колебательных энергообменов для O_2 и NO-содержащих смесей

Исаков А.А., Гориховский В.И., Мельник М.Ю.

st076147@student.spbu.ru, v.gorikhovskii@spbu.ru, melnik.mxm@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. В данной работе представлен метод для оптимизации расчёта поуровневых коэффициентов скорости колебательных энергообменов, используемых для решения задач неравновесной газодинамики. Для повышения скорости вычислений был применен подход, основанный на нелинейном регрессионном анализе. Он позволил получить вычислительно эффективные аппроксимационные формулы для коэффициентов скорости энергообменов в модели нагруженного гармонического осциллятора с учетом свободных вращений (FHO-FR). По полученным регрессионным формулам было произведено численное моделирование, позволившее выполнить валидацию модели на базе экспериментальных измерений релаксации различных смесей газов за падающей и отраженной ударными волнами. Полученная регрессионная модель FHO-FR-reg даёт значения газодинамических параметров, близкие к модели FHO, однако имеет более широкую область применимости и высокую вычислительную эффективность.

Ключевые слова: колебательная релаксация, поуровневая кинетика, ударная волна, нелинейная регрессия, машинное обучение.

Физико-химические процессы в газах существенно нарушают термодинамическое равновесие системы в ряде условий, что требует совместного решения газодинамических уравнений с уравнениями кинетики неравновесных процессов. Для описания неравновесных реакций в данной работе используется хорошо себя зарекомендовавший поуровневый подход [1, 2]. Он является точным, но при этом вычислительно затратным из-за необходимости расчёта коэффициентов скорости колебательного энергообмена и химических реакций для каждого колебательного состояния частицы. Для моделирования коэффициентов VT и VV обменов рассматривается модель нагруженного гармонического осциллятора с учетом свободного вращения молекул (FHO-FR) [3, 4], как наиболее физически обоснованная по сравнению с классическими теоретическими моделями. Однако данная модель требует больших вычислительных ресурсов. Поэтому для оптимизации расчетов предлагается использовать аппроксимацию точных значений, полученную с помощью инструментов нелинейной регрессии.

Для проверки рассматриваемого подхода используются задачи одномерной релаксации газа за ударной волной в поуровневой постановке. Таким образом, уравнения для числовых заселённости колебательных состояний молекул и

концентраций атомов записываются следующим образом:

$$v \frac{dn_{ci}}{dx} + n_{ci} \frac{dv}{dx} = \sum_{\gamma} R_{ci}^{\gamma}, \quad c = 1, \dots, l_m, i = 0, \dots, l_c, \quad (1)$$

$$v \frac{dn_c}{dx} + n_c \frac{dv}{dx} = \sum_{\gamma} R_c^{\gamma}, \quad c = l_m + 1, \dots, l_m + l_a, \quad (2)$$

где n_c и n_{ci} — числовая плотность и колебательная заселенность на i -м колебательном уровне молекул сорта c , l_m и l_a — числа молекулярных и атомарных компонентов смеси, v — скорость потока. Данные уравнения решаются совместно с уравнениями движения и энергии, записанными в одномерной форме для установившегося течения [5].

Изменение заселённости колебательных уровней вследствие неравновесных процессов описывается с помощью релаксационных членов R_{ci}^{γ} , которые выражаются через концентрации компонентов рассматриваемой смеси и коэффициенты скорости переходов колебательной энергии $k_{ii'}^{kk'}$, $k_{ii'}^M$ для каждого колебательного уровня:

$$R_{ci}^{\text{VT}} = \sum_M n_M \sum_{i \neq i'} (k_{c,i'i}^M n_{ci'} - k_{c,ii'}^M n_{ci}), \quad (3)$$

$$R_{ci}^{\text{VV}} = \sum_{M,k} \sum_{k' \neq k} \sum_{i' \neq i} (k_{c,i'i}^{M,k'k} n_{ci'} n_{Mk'} - k_{c,ii'}^{M,kk'} n_{ci} n_{Mk}). \quad (4)$$

Здесь M — партнер молекулы по столкновению.

Для вычисления коэффициентов колебательного энергообмена чаще всего используют следующие теоретические модели: модель Шварца–Славского–Герцфельда (SSH) [6], модель нагруженного гармонического осциллятора (ФНО) [7]. В данной работе исследуется модифицированная модель нагруженного гармонического осциллятора (ФНО-FR) [3, 4], описывающая трехмерный характер столкновения частиц и их свободное вращение.

Для расчёта коэффициентов с помощью модели ФНО-FR требуются значительные вычислительные ресурсы. Поэтому было предложено рассмотреть нелинейные регрессионные модели для аппроксимации точных значений коэффициентов скорости энергообменов k^* в следующем виде (в формуле для наглядности опущена индексация энергетических уровней):

$$k^*(T) = A \left(T^{-\frac{1}{3}} \right) e^{B \left(T^{-\frac{1}{3}} \right)} + C \left(T^{-\frac{1}{3}} \right). \quad (5)$$

Здесь $A = a_0 + a_1 T^{-\frac{1}{3}} + \dots + a_{l_A} T^{l_A}$, $B = b_0 + b_1 T^{-\frac{1}{3}} + \dots + b_{l_B} T^{l_B}$ и $C = c_0 + c_1 T^{-\frac{1}{3}} + \dots + c_{l_C} T^{l_C}$ — некоторые полиномы от температуры газа степени l_A , l_B и l_C , соответственно.

В результате применения данного подхода был получен набор аппроксимационных формул для расчёта коэффициентов колебательных энергооменов для столкновений молекул O_2 , N_2 и NO с частицами O_2 , N_2 , NO , N , O и Ag . Полученная регрессионная модель FHO-FR-reg — первая эффективная модель расчёта, использующая FHO-FR для описания VT-обменов в континуальном подходе. С помощью нее было получено ускорение расчёта коэффициентов примерно в 9 000 раз для столкновений молекула–атом и в 300 000 раз для столкновений молекула–молекула с сохранением точности.

С использованием полученных формул была проведена валидация модели FHO-FR-reg путем сравнения с экспериментом. Решалась задача о моделировании колебательно-химической релаксации сильно неравновесного газа за падающей и отраженной ударными волнами. На рис. 1 представлены типичные профили колебательной температуры для O_2 для экспериментов в кислороде

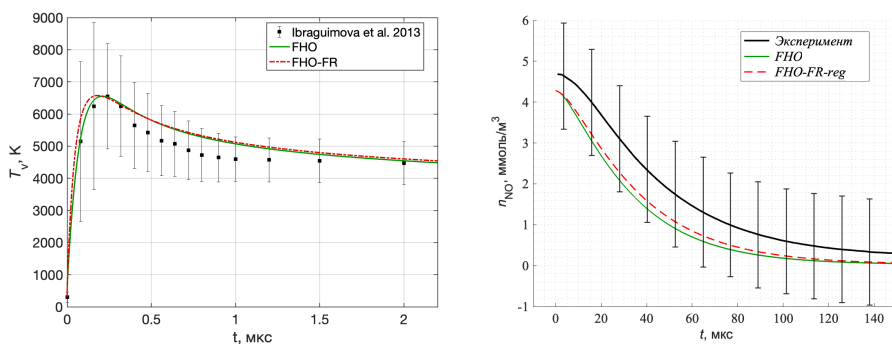


Рис. 1. Слева: Колебательная температура кислорода за фронтом падающей ударной волны. Сравнение с экспериментальным исследованием [8] с начальной температурой за фронтом $T_{tr}^1 = 10\,820$ К. Справа: Изменение концентрации NO за отражённой ударной волной. 1% NO в аргоне. Сравнение с экспериментом [9] с температурой сразу за отражённой волной 7090 К.

и концентрации NO для экспериментов в NO-содержащих смесях. Также на графиках представлены данные, рассчитанные с использованием модели FHO. Предложенная модель FHO-FR-reg дает хорошее соответствие с экспериментами и оказывается более вычислительно эффективной.

Найденные аппроксимации могут быть эффективно использованы в расчётах кинетики любых смесей, содержащих O_2 , NO , N_2 . Модель FHO-FR-reg показывает ускорение расчётов в несколько раз, даже по сравнению с моделью FHO, поэтому для оптимизации расчётов неравновесной кинетики рекомендуются как предложенная в данной работе модель, так и регрессионный подход в целом.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» № 22-1-1-17-3.

Литература

- [1] Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003.
- [2] Campoli L., Kunova O., Kustova E., Melnik M. Models validation and code profiling in state-to-state simulations of shock heated air flows // *Acta Astronaut.* 2020. Vol. 175. P. 493–509. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.06.008
- [3] Adamovich I., Rich J. Three-dimensional nonperturbative analytic model of vibrational energy transfer in atom–molecule collisions // *J. Chem. Phys.* 1998. Vol. 109. P. 7711–7724. doi: 10.1063/1.477417
- [4] Adamovich I., Rich J. Three-dimensional analytic model of vibrational energy transfer in molecule–molecule collisions // *AIAA Journal.* 2001. Vol. 39. Iss. 10. P. 1916–1925. doi: 10.1063/1.477417
- [5] Кравченко Д. С., Кустова Е. В., Мельник М. Ю. Моделирование по-уровневой кинетики кислорода за отраженными ударными волнами // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* 2022. Т. 9(67). № 3. С. 426–439. doi: 10.21638/spbu01.2022.304
- [6] Schwartz R. N., Slawsky Z. I., Herzfeld K. F. Calculation of vibrational relaxation times in gases // *J. Chem. Phys.* 1952. Vol. 20. Iss. 10. P. 1591–1599. doi: 10.1063/1.1700221
- [7] Adamovich I., Macheret S., Rich J., Treanor C. Vibrational energy transfer rates using a forced harmonic oscillator model // *J. Thermophys. Heat Transf.* 1998. Vol. 12. Iss. 1. P. 57–65. doi: 10.2514/2.6302
- [8] Ibraguimova L. B., Sergievskaya A. L., Levashov V. Yu., Shatalov O. P., Tunik Yu. V., Zabelinskii I. E. Investigation of oxygen dissociation and vibrational relaxation at temperatures 4000–10800 K // *J. Chem. Phys.* 2013. Vol. 139. P. 034317. doi: 10.1063/1.4813070
- [9] Streicher J., Krish A., Hanson R. High-temperature vibrational relaxation and decomposition of shock-heated nitric oxide. I. Argon dilution from 2200 to 8700 K // *Phys. Fluids.* 2022. Vol. 34. No. 11. P. 116122.

Использование методов машинного обучения при моделировании переноса в задаче высокоскоростного обтекания сферы

Истомин В.А., Павлов С.А.

v.istomin@spbu.ru, st040077@student.spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Корректное вычисление коэффициентов переноса при моделировании высокоскоростных потоков реагирующего воздуха является фундаментально важным при анализе процессов теплопередачи в различных задачах газодинамики, например, при расчете теплозащиты спускаемых аппаратов. Наиболее физически точными в рамках континуального приближения являются так называемые поуровневые модели, которые в то же время обладают значительной вычислительной сложностью, в связи с чем обычно используются упрощенные одно- и многотемпературные приближения. Одним из способов эффективного применения таких моделей является регрессия коэффициентов переноса при помощи методов машинного обучения. В данной работе показано применение такого подхода к задаче моделирования коэффициентов вязкости и теплопроводности для 11-компонентной ионизированной воздушной смеси в задаче обтекания сферы высокоскоростным воздушным потоком.

Ключевые слова: коэффициенты переноса, 11-компонентный воздух, вязкость, теплопроводность, регрессия, машинное обучение, нейросеть.

Введение. В высокоскоростных потоках реагирующего воздуха происходит значительное повышение температуры за фронтом головной ударной волны, размытие фронта, торможение потока внутри ударного слоя и аэродинамический нагрев поверхности. Указанные эффекты приводят к необходимости корректного учёта физико-химических процессов, таких как возбуждение внутренних степеней свободы (в частности, колебательных и электронных), процессов диссоциации и ионизации, а также поуровневых реакций. Корректный учет перечисленных процессов, а также уменьшение плотности газовой среды при полете на больших высотах может оказывать существенное влияние на характер течения [1, 2].

Для точного расчета коэффициентов переноса используются алгоритмы кинетической теории процессов переноса и релаксации [3]. С помощью метода Чепмена–Энскога функция распределения выражается через градиенты макроскопических параметров потока. Уравнение для функции распределения зависит от градиентов макропараметров и содержит неизвестные функции, которые в свою очередь находятся из линейных интегральных уравнений с учетом дополнительных соотношений для обеспечения единственности, следующих из условий нормировки функции распределения. Наконец, коэффициенты переноса

са выражаются через интегралы относительно указанных неизвестных функций.

Таким образом, на каждом шаге расчета модели численно решаются системы линейных уравнений для каждого коэффициента переноса [4]. Следует отметить, что порядок линейных систем зависит от выбранного приближения: например, в случае двухтемпературного подхода количество линейных уравнений исчисляется десятками, тогда как в наиболее точном поуровневом приближении порядок системы может достигать нескольких тысяч уравнений [4].

Таким образом, при использовании точных кинетических моделей в прикладных расчетах, таких как решение аэродинамических задач методом конечных объемов, требуются значительные вычислительные мощности. В связи с этим в прикладных инженерных задачах чаще всего используются приближенные формулы, такие как формула вязкости Блоттнера [5]:

$$\mu_s = 0.1e^{[(A_s \ln T + B_s) \ln T + C_s]}, \quad (1)$$

где A_s, B_s, C_s — табулированные константы.

Кроме того, для учета влияния внутренних степеней свободы принято использовать формулу теплопроводности Эйкена [6]:

$$\lambda_s = f_{tr} c_{v_s, tr} \mu_s + f_{int} c_{v_s, int} \mu_s, \quad f_{tr} = \frac{5}{2}, \quad (2)$$

где $f_{int} = 1$, $f_{int} = 1.328$ — альтернативная поправка [6]. Для смеси итоговый коэффициент получается по формулам смешивания Уилки [7], Армали-Саттона [8, 9] для вязкости и теплопроводности или Мейсона-Саксена [10] для теплопроводности, имеющих общий вид:

$$\mu = \sum_s \frac{X_s \mu_s}{\varphi_s}, \quad \lambda = \sum_s \frac{X_s \lambda_s}{\varphi_s}, \quad (3)$$

где X_s — молярная доля компоненты s , φ_s — коэффициент, зависящий от отношения вязкостей (теплопроводностей) и молярных масс компонент.

Данные формулы хорошо изучены и просты в вычислительном плане, однако имеют допустимую погрешность и могут использоваться только в ограниченном диапазоне температур.

Применение методов машинного обучения. Использование аппроксимации точного решения при помощи многочленов или методов машинного обучения является широко используемой стратегией для понижения вычислительной сложности [11, 12, 13, 4]. Ранее нами было произведена оценка применения методов машинного обучения для задачи регрессии коэффициентов переноса при моделировании 5-и компонентной воздушной смеси, и была

показана эффективность таких методов, в частности, многослойного перцептрона (вид нейронной сети) [13, 14].

На схеме на рис. 1 описан сценарий использования регрессии методами машинного обучения в данной работе. Для начала, используя однотемпературное приближение кинетической теории, составляется база данных для обучения ре-

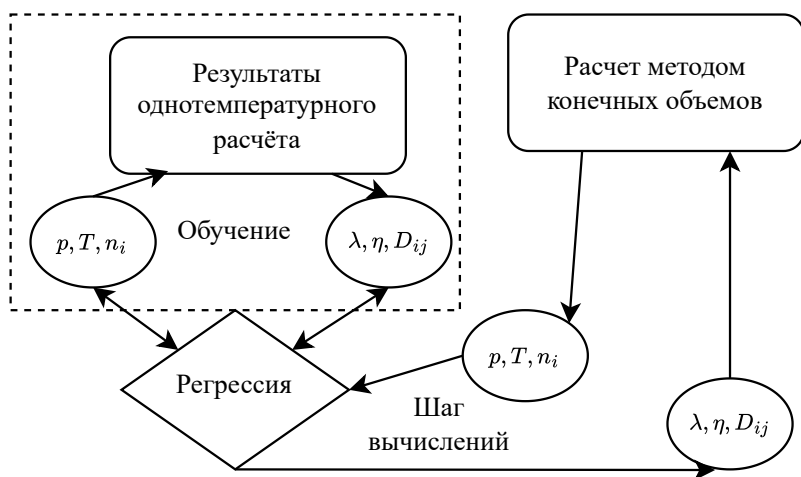


Рис. 1. Общая схема использования регрессии: обучение модели на точных данных и встраивание в конечно-объемный расчетный алгоритм.

грессионной модели, которая разбивается на тестовое и обучающее множество. На основании результатов кросс-валидации на тестовом множестве происходит выбор гиперпараметров модели. Результирующая модель встраивается в конечно-объемный решатель, который на каждом вычислительном шаге передает модели текущие гидродинамические параметры и концентрации и получает в качестве выходного вектора коэффициенты переноса. В качестве модели регрессии могут использоваться классические методы, такие как линейная или полиномиальная регрессия, а также методы машинного обучения: метод опорных векторов, случайного леса, градиентный бустинг или нейросети.

Результаты. В работе проведен анализ различных подходов в машинном обучении для моделирования вязкости и теплопроводности 11-компонентной смеси. В результате выбрана оптимальная модель исходя из баланса скорости и точности. Проведено сравнение с приближенными формулами. Регрессор интегрирован в конечно-объемный решатель и применен для решения задач об-

текания сферы высокоскоростным воздушным потоком, проведено сравнение с экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект № 23-29-00055.

Литература

- [1] Суржииков С. Т. Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. М.: Физматлиб, 2018.
- [2] Dobrov Yu., Gimadiev V., Karpenko A., Volkov K. Numerical simulation of hypersonic flow with non-equilibrium chemical reactions around sphere // *Acta Astronautica*. 2022. Vol. 194. P. 468–479.
- [3] Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2003.
- [4] Istomin V. A., Kustova E. V. PAINeT: Implementation of neural networks for transport coefficients calculation // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 1959. P. 012024.
- [5] Blottner F. G., Johnson M., Ellis M. Chemically reacting viscous flow program for multicomponent gas mixtures: tech. rep. Albuquerque, New Mexico, 1971.
- [6] Istomin V. A., Kustova E. V., Mekhonoshina M. A. Eucken correction in high-temperature gases with electronic excitation // *J. Chem. Phys.* 2014. Vol. 140. No. 18.
- [7] Wilke C. R. A Viscosity Equation for Gas Mixtures // *The Journal of Chemical Physics*. 1950. Vol. 18. No. 4. P. 517–519.
- [8] Armaly B. F., Sutton K. Viscosity of multicomponent partially ionized gas mixtures // *AIAAPaper*. 1980. No. 1495.
- [9] Armaly B. F., Sutton K. Thermal conductivity of partially ionized gas mixtures // *AIAA Paper*. 1982. No. 469.
- [10] Mason E. A., Saxena S. C. Approximate formula for thermal conductivity of gas mixtures // *J. Phys. Fluids*. 1958. Vol. 1. No. 5. P. 361–369.
- [11] Гориховский В. И., Кустова Е. В. Нейросетевой подход к описанию колебательной кинетики углекислого газа // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2022. Vol. 9. № 4. С. 665–678.
- [12] Campoli L., Kustova E., Maltseva P. Assessment of machine learning methods for state-to-state approach in nonequilibrium flow simulations // *Mathematics*. 2022. Vol. 10(6). P. 1–21.
- [13] Istomin V., Pavlov S. Suitability of different machine learning methods for high-speed flow modeling issues // *Cybernetics and Physics*. 2023. P. 264–274.
- [14] Pavlov S., Istomin V. Application of Machine Learning Methods to Numerical Simulation of Hypersonic Flow // *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. Vol. 78. P. 180–187.

Нейросетевой подход в вычислении коэффициентов скорости химических реакций

Максудова З.М., Савельев А.С., Кустова Е.В.

st076791@student.spbu.ru, aleksey.schumacher@gmail.com, e.kustova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Работа посвящена оптимизации расчета поуровневых коэффициентов скорости химических реакций (реакций диссоциации, рекомбинации и обмена), зависящих от температуры и колебательных состояний реагентов. Используются нейросетевые методы как мощный инструмент для обобщения и ускорения теоретических расчетов. Изложенный в работе подход к представлению и обработке данных при учете электронного возбуждения молекулы позволяет достичь ускорения вычислений на 1–2 порядка без существенных потерь точности.

Ключевые слова: коэффициенты скорости химической реакции, поуровневая кинетика, оптимизация численных расчётов, нелинейная регрессия, нейронные сети.

Введение. Изучение коэффициентов скорости химических реакций в поуровневом приближении важно для моделирования неравновесных высокотемпературных течений (см. работы [1, 2, 3]). Однако большинство моделей ограничиваются учетом только состояний распадающейся или обменивающейся молекулы, не учитывая при этом состояния остальных участников столкновения и продуктов реакции. В недавнем исследовании [4] с учетом работы [5] была разработана обобщенная модель для вычисления коэффициентов скорости химических реакций в поуровневом приближении, которая позволяет учитывать колебательное и электронное возбуждение любого числа реагентов и продуктов реакции. Кроме того, было обнаружено, что модели Маррона–Тринора [6] и Алиата [7] являются частными предельными случаями данной формулы. Недостатком модели [4] является высокая вычислительная сложность, поэтому для ее применения в практических задачах необходима оптимизация расчетов.

Теоретическая модель. Согласно работе [4], обобщенная формула для вычисления коэффициентов скорости реакций диссоциации и обмена с учетом колебательного и электронного возбуждения всех участников реакции представляется следующим образом:

$$k_{V_r \rightarrow V_p}^{\text{ex,diss}} = k^{\text{eq}}(T) \cdot B(T) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_{V_r \rightarrow V_p} \cdot \Theta(\Delta E_{V_r \rightarrow V_p})}{k} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U}\right)\right), \quad (1)$$

$$\Delta E_{V_r \rightarrow V_p} = E_a + E_p - E_r, \quad (2)$$

где k — постоянная Больцмана, V_r, V_p — внутренние состояния реагентов и продуктов реакции, E_r, E_p — соответствующие энергии, $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, E_a — энергия активации реакции, T — температура, U — параметр модели, имеющий размерность температуры, $k^{\text{eq}}(T)$ — равновесный коэффициент скорости реакции, определяемый по закону Аррениуса, B — нормирующий множитель:

$$B(T) = \left(\sum_{V_r^*, V_p^*} \left[\exp \left(- \frac{\Delta E_{V_r^* \rightarrow V_p^*} \cdot \Theta \left(\Delta E_{V_r^* \rightarrow V_p^*} \right) \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U} \right) \prod_{l=1}^{M_r} n_{V_{r,l}^{\text{eq}}} \right) \right] \right)^{-1}, \quad (3)$$

M_r — число реагентов, $n_{V_{r,l}^{\text{eq}}}$ — приведенное равновесное распределение Больцмана l -го реагента при температуре T .

При вычислении нормирующего множителя необходимо суммировать экспоненты от энергии и температуры по всем возможным энергетическим состояниям участников реакции (3). Если ограничиваться учетом только колебательного возбуждения распадающейся молекулы в воздухе, количество суммируемых экспонент составляет несколько десятков. Однако при учете всех колебательных состояний всех частиц, участвующих в реакции, нам придется рассматривать полное декартово произведение колебательных состояний, что приведет к десяткам и сотням тысяч слагаемых, даже без учета электронного возбуждения. Подобная проблема большого числа слагаемых возникает и при моделировании более сложных газов.

Применение нейросетевого подхода. В недавних работах [8, 9] использование алгоритмов машинного обучения показало хорошие результаты в оптимизации различных задач неравновесной гидроаэромеханики. Повысить эффективность расчета коэффициентов скорости химических реакций может полиномиальное приближение, но оно имеет недостаток: в отличие от универсальной теоретической модели, которую можно применять для любого колебательного спектра молекулы и любой степени детализации расчетов, предложенный метод требует отдельного исследования и создания большого количества формул для каждого конкретного случая. Этот подход может значительно ускорить проведение систематических расчетов с фиксированными химическими моделями, однако он неудобен с исследовательской точки зрения. В настоящей работе было принято решение оценить возможность применения нейронных сетей для предсказания коэффициентов скорости химических реакций.

В качестве входных данных предлагается использовать температуру газа, тип реакции ($\text{O}_2 + \text{O}$, $\text{O}_2 + \text{O}_2$, $\text{N}_2 + \text{N}$, $\text{N}_2 + \text{O}$, $\text{N}_2 + \text{N}_2$, $\text{NO} + \text{N}$ или $\text{NO} + \text{O}$), а также энергию нулевого уровня для молекул O_2 , NO , N_2 . Для предсказания логарифмов всех коэффициентов была реализована архитектура Feedforward

Neural Network (FNN), представленная на рис. 1. В случае учета колебательно-электронного возбуждения размерность исследуемых данных увеличивается: для каждого электронного состояния выбранной молекулы реализуется полный спектр колебательных уровней, вплоть до энергии диссоциации. В таком случае можно распрямить данные (преобразование Flatten) или использовать Multi-Head подход, который сохраняет идеи одномерного случая, но на последнем слое использует несколько выводов, соответствующих электронным состояниям молекулы (см. рис. 2).

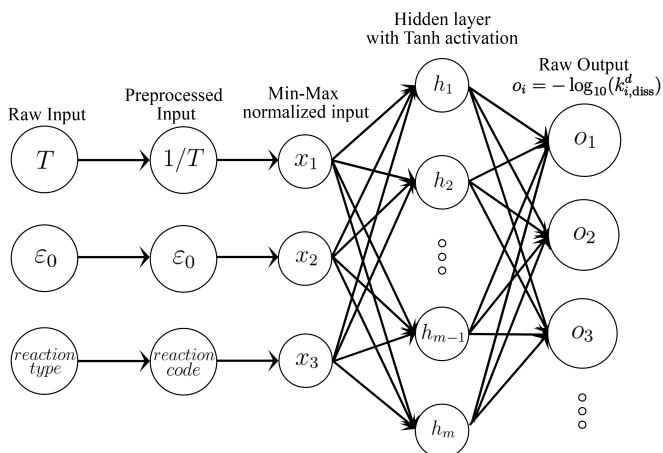


Рис. 1. FNN сеть с одномерными данными на выходе.

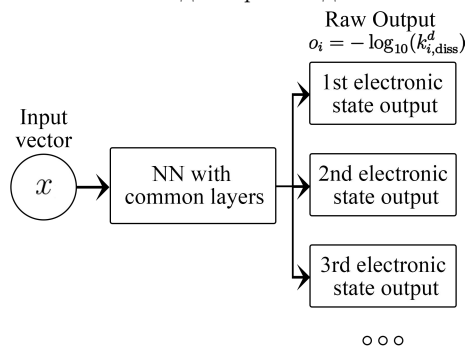


Рис. 2. Multi-Head сеть для учета электронного возбуждения.

Результаты исследования. Описанный в данной работе подход к представлению и обработке данных был реализован для реакций диссоциации в воздухе в диапазоне температур от 1000 К до 10000 К. Подход легко масштабируется и, например, при учете электронного возбуждения молекулы, позволяет добиться выигрыша по времени на 1–2 порядка с относительной процентной ошибкой не более 10%. В итоге данное исследование показало, что использование нейронных сетей позволяет получать коэффициенты скорости химических реакций с высокой степенью точности без проведения прямых расчетов по ресурсоемким теоретическим формулам непосредственно в рабочем коде. В то же время такой результат достигается путем серьезной предварительной работы и требует получения больших массивов предварительных данных, описывающих все варианты использования формул.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00078.

Литература

- [1] Esposito F., Armenise I., Capitta G., Capitelli, M. O–O₂ state-to-state vibrational relaxation and dissociation rates based on quasiclassical calculations // *Chemical Physics*. 2008. Vol. 351. Iss. 1. P. 91–98. doi: 10.1016/j.chemphys.2008.04.004
- [2] Baluckram V. T., Andrienko D. A. First-principle simulation of vibrational activation and dissociation in oxygen shock flows // *AIAA Scitech 2021 Forum*. 2021. Vol. 2021. Art. 0447. doi: 10.2514/6.2021-0447
- [3] Armenise I., Esposito F. Dissociation-recombination models in hypersonic boundary layer O₂/O // *Chemical Physics*. 2012. Vol. 398. P. 104–110. doi: 10.1016/j.chemphys.2007.05.015
- [4] Kustova E., Savelev A. Generalised model for state-resolved chemical reaction rate coefficients in high-temperature air // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1959. Iss. 1. Art. 012033.
- [5] Arsentiev I., Loukhovitski B., Starik A. Application of state-to-state approach in estimation of thermally nonequilibrium reaction rate constants in mode approximation // *Chemical Physics*. 2012. Vol. 398. P. 73–80. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012033
- [6] Marrone P. V., Treanor C. E. Chemical Relaxation with Preferential Dissociation from Excited Vibrational Levels // *Phys. Fluids*. 1963. Vol. 6. Iss. 9. P. 1215–1221. doi: 10.1063/1.1706888
- [7] Aliat A. State-to-state dissociation–recombination and chemical exchange rate coefficients in excited diatomic gas flows // *Physica A*. 2008. Vol. 387. P. 4163–4182. doi: 10.1016/j.physa.2008.02.004
- [8] Гориховский В. И., Кустова Е. В. Нейросетевой подход к описанию колебательной кинетики углекислого газа // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2022. Т. 9. № 4. С. 665–678. doi: 10.21638/spbu01.2022.409

- [9] Campoli L., Kustova E., Maltseva P. Assessment of Machine Learning Methods for State-to-State Approach in Nonequilibrium Flow Simulations // Mathematics. 2022. Vol. 10. Iss. 6. Art. 928. doi: 10.3390/math10060928

Машинное обучение и определение момента перехода к следующей стадии ползучести

Орехов А.В.

a.orekhov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Рассматривается задача аналитического определения момента перехода к следующей стадии ползучести в классическом случае, описанном акад. Ю. Н. Работновым. Моменты перехода к новой стадии ползучести определяются как особые точки (аномалии) соответствующей кривой. Обнаружение этих аномалий возможно методами машинного обучения без учителя при помощи аппроксимационно-оценочных критериев. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: кривая ползучести, машинное обучение без учителя, обнаружение аномалий, метод локтя, аппроксимационно-оценочные критерии.

Ползучесть — это, как правило, медленная, происходящая во времени, деформация твёрдого тела под воздействием постоянной нагрузки. Она описывается так называемой «кривой ползучести», которая представляет собой зависимость деформации от времени при постоянных температуре и силовых воздействиях. Механизмы ползучести зависят и от вида материала, и от условий, в которых она происходит. Её физический механизм имеет преимущественно диффузионную природу, чем и отличается от пластической деформации, которая связана с быстрым скольжением вдоль атомных плоскостей зёрен поликристалла [1, 2].

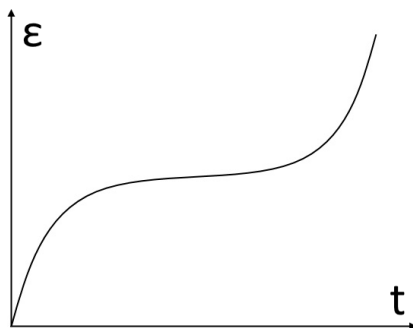


Рис. 1. Классическая кривая ползучести (по Работнову) [2].

Классическую кривую ползучести (см. рис. 1) условно делят на три участка (стадии): участок неустановившейся ползучести (стадия I), когда скорость ползучести замедляется, участок установившейся ползучести, когда деформация

происходит с постоянной скоростью (стадия II), участок ускоренной ползучести (стадия III). Кривые ползучести имеют одинаковую форму для широкого круга материалов: металлов, сплавов, полимеров, льда и т. п.

При первой стадии ползучести начальная скорость, заданная мгновенной начальной деформацией, постепенно убывает до некоторого минимального значения. На второй стадии ползучесть происходит с постоянной скоростью. В целом, на этом фрагменте кривой ползучести зависимость между абсциссой и ординатой сначала является линейной, потом логарифмической или арктангенциальной, а затем снова линейной.

Будем называть момент изменения характера возрастания деформации от линейного к логарифмическому или арктангенциальному типу — «первой особой точкой классической кривой ползучести».

На третьей стадии рост деформации происходит с возрастающей скоростью и заканчивается разрушением материала. Переход от второй стадии к третьей характеризуется изменением скорости возрастания деформации от линейной, к параболической или экспоненциальной [2].

Будем называть момент изменения характера возрастания деформации от линейного к параболическому или экспоненциальному типу — «второй особой точкой классической кривой ползучести».

Обе особые точки классической кривой ползучести можно считать, по определению, моментами перехода к следующей стадии ползучести.

Определение момента перехода к следующей стадии процесса ползучести материалов в строительстве, машиностроении, авиации и проч., имеет важное прикладное значение, помогая предотвратить возможные повреждения оборудования и техногенные аварии. Если процесс ползучести описывается монотонно возрастающим временным рядом, то эту задачу можно решить при помощи аппроксимационно-оценочных критериев.

Обнаружение аномалий — одна из задач, решаемая методами машинного обучения без учителя. В 1953 году Р. Торндайком был сформулирован эвристический «метод локтя» [3]. Суть этого метода заключается в том, что если график монотонно возрастающих значений временного ряда похож на «согнутую руку», то «локоть» графика является «особой точкой» которая, почти всегда, совпадает с моментом качественного изменения соответствующего случайного процесса, и эту точку можно назвать аномалией временного ряда. В эвристическом «методе локтя» эта «особая точка» определяется визуально; наглядно очевидно, что в окрестности этой точки линейный тип возрастания числовых значений компонент временного ряда изменяется на нелинейный.

Аппроксимационно-оценочные критерии являются аналитическим обобщением эвристики «метода локтя» [4]. Если изучается дискретный случайный процесс с монотонно возрастающими траекториями (которые в случае реально проведённых наблюдений за случайным процессом называются временными

рядами), то момент изменения характера их возрастания от линейного типа к нелинейному, можно определить сравнивая квадратичную погрешность линейной аппроксимации временного ряда, с квадратичной погрешностью его же нелинейной аппроксимации. Очевидно, что разность таких погрешностей является квадратичной формой, и в момент качественного изменения характера возрастания временного ряда (в точке аномалии временного ряда) эта квадратичная форма изменяет знак.

Особые точки кривой ползучести являются аномалиями процесса деформация твёрдого тела под воздействием постоянной нагрузки. Их можно обнаружить при помощи квадратичных форм аппроксимационно-оценочных критериев [4], которые строятся локально, не по всем значениям временного ряда y_t , а только по нескольким его членам $y_{t_0-k}, \dots, y_{t_0-2}, y_{t_0-1}$, расположенным в левой полуокрестности точки t_0 .

При построении квадратичных форм аппроксимационно-оценочных критериев используется приём, который облегчает вычисления. Значения y_t можно рассматривать в точках y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , полагая, что всегда $y_0 = 0$. Выполнения этого условия легко добиться на любом шаге аппроксимации значений временного ряда при помощи преобразования:

$$y_0 = y_j - y_j, y_1 = y_{j+1} - y_j, \dots, y_{k-1} = y_{j+k-1} - y_j. \quad (1)$$

Первую особую точку классической кривой ползучести можно обнаружить при помощи арктангенциального аппроксимационно-оценочного критерия, вторую особую точку — при помощи экспоненциального критерия.

Обозначим через $\delta_t^2(k_0)$ — квадратичную погрешность линейной аппроксимации узлов y_0, y_1, \dots, y_{k-1} в классе функций $ax + b$, $\delta_e^2(k_0)$ — квадратичная погрешность экспоненциальной аппроксимации в классе функций $pe^x + q$, $\delta_a^2(k_0)$ — квадратичная погрешность арктангенциальной аппроксимации в классе функций $w \operatorname{arctg} x + v$. В общем случае экспоненциальный аппроксимационно-оценочный критерий имеет вид:

$$\delta_{le}^2(k_0) = \delta_t^2(k_0) - \delta_e^2(k_0),$$

а арктангенциальный аппроксимационно-оценочный критерий:

$$\delta_{la}^2(k_0) = \delta_t^2(k_0) - \delta_a^2(k_0).$$

Рассмотрим модельные данные представленные в условных единицах. Значения деформации — это кортеж $\{0, 2, 4, 5.5, 6.25, 6.5, 6.75, 7, 7.25, 8.4\}$, а время изменяется с единичным шагом от 0 до 9. Определим особые точки кривой ползучести как марковские моменты, которые равны минимальному значению времени, при котором квадратичные формы соответствующих аппроксимационно-

оценочных критериев изменяют знак. Для тестирования модельных данных будем использовать арктангенциальный и экспоненциальный критерии, построенные по трём точкам [4]; их квадратичные формы соответственно равны:

$$\delta_{la}^2(3_0) = \delta_l^2(3_0) - \delta_a^2(3_0) \simeq 0.036820y_1^2 + 0.226946y_1y_2 - 0.150292y_2^2,$$

$$\delta_{le}^2(3_0) = \delta_l^2(3_0) - \delta_e^2(3_0) \simeq 0.044302y_1^2 - 0.33191y_1y_2 + 0.12165y_2^2.$$

Таблица. Результаты вычислительных экспериментов по определению особых точек модельной кривой, имитирующей процесс ползучести.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ε	0	2	4	5.5	6.25	6.5	6.75	7	7.25	8.4
$\delta_{la}^2(3_0)$			-0.4	-0.1	0.09	0.04	-0.01	-0.01	-0.01	-0.2
$\delta_{le}^2(3_0)$			-0.5	-0.7	-0.4	-0.1	-0.01	-0.01	-0.01	0.13

Квадратичная форма $\delta_{la}^2(3_0)$ первый раз изменяет знак в момент времени 4, $\delta_{le}^2(3_0)$ — в момент времени 9. Визуальная оценка расположения особых точек модельной деформации (см. рис. 2) совпадает с результатами вычислительных экспериментов, которые приведены в таблице.

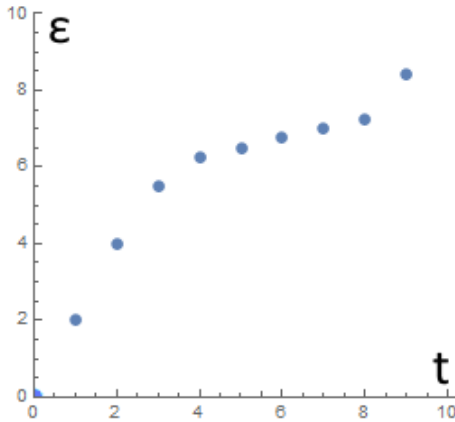


Рис. 2. График значений модельных данных, имитирующих процесс ползучести. Числовые значения времени и деформации представлены в условных единицах.

Литература

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 753 с.
- [2] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 743 с.

- [3] Thorndike R. L. Who belongs in the family? // Psychometrika. 1953. Vol. 18. P. 267–276. <https://doi.org/10.1007/BF02289263>
- [4] Orekhov A. V. Quasi-deterministic processes with monotonic trajectories and unsupervised machine learning // Mathematics. 2021, 9, 2301. <https://doi.org/10.3390/math9182301>

Построение нечетких регуляторов в задаче управления движением группировки солнечных парусов вблизи точки либрации системы Солнце–Земля

Шиманчук Д.В.
d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Исследуется возможность управления движением группировки космических аппаратов в виде группировки солнечных парусов в окрестности коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля. Предложен подход построения законов управления орбитальным движением группировки солнечных парусов в окрестности коллинеарной точки либрации при использовании элементов искусственного интеллекта. Подход основан на использовании устойчивого инвариантного многообразия и элементов нечеткой логики. Он позволяет строить нечеткие регуляторы для задачи удержания группировки солнечных парусов около точки либрации. Управление реализуется путем изменения отражательной способности парусов.

Ключевые слова: группировка КА, солнечный парус, точка либрации, управление, нечеткий регулятор, отражательная способность.

Введение. В работе на примере космического аппарата с солнечным парусом исследуем вопрос построения нечеткого регулятора в задаче удержания солнечного паруса вблизи коллинеарной точки либрации [1]. Среди ставших классическими в данной области исследований можно отметить труды [2, 3]. В работе [4] предложен подход при использовании отражательной способности паруса. В работе [5] предложен алгоритм управления для удержания космического аппарата вблизи инвариантного многообразия в окрестности коллинеарной точки либрации.

Известно, что частным решением ограниченной задачи трех тел является движение в плоскости эклиптики. В данном случае именно свойства плоского движения и обеспечивают неустойчивость точки либрации. Для построения закона управления используем элемент искусственного интеллекта — нечеткую логику [6].

Постановка задачи. Примем допущение, что при движении солнечного паруса в достаточно малой окрестности линии, проходящей через центры масс Земли и Солнца, направление фотонов коллинеарно этой линии (см. рис. 1). Тогда уравнения управляемого движения солнечного паруса во вра-

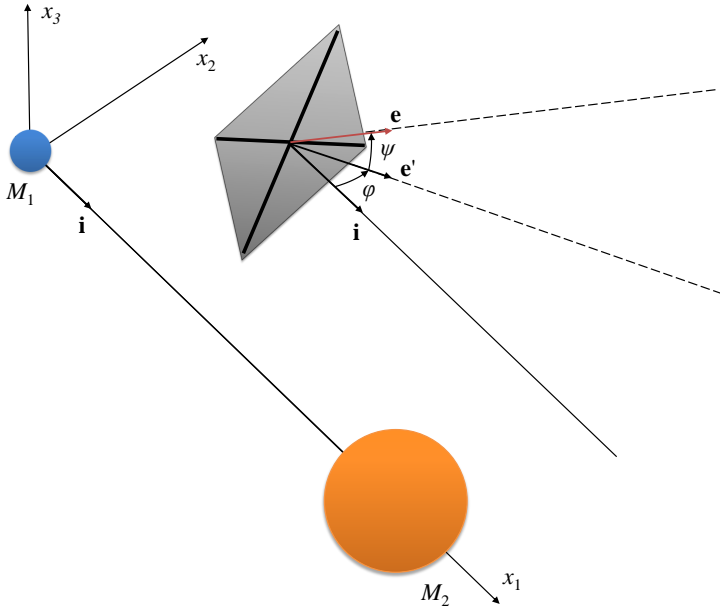


Рис. 1. Модель солнечного паруса.

щающейся геоцентрической системе координат $M_1x_1x_2x_3$ при использовании хилловского приближения для солнечного потенциала следуя [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} + 2x_1 + y_2 - 2kpw \cos^3 \psi \cos^3 \varphi - (1-k)pw \cos \psi \cos \varphi, \\ \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_2 - y_1 - 2kpw \cos^3 \psi \cos^2 \varphi \sin \varphi, \\ \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_3 - 2kpw \cos^2 \psi \cos^2 \varphi \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ — вектор координат солнечного паруса, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ — вектор сопряженных импульсов, центр инерции Земли совпадает с началом си-

стемы координат, а ось M_1x_1 направлена вдоль оси, соединяющей центры масс Земли и Солнца; p — давление солнечного света; $w = \frac{S}{m}$ — парусность; S — площадь паруса; m — масса солнечного паруса; k — коэффициент отражательной способности паруса, удовлетворяющий ограничениям $0 \leq k \leq 1$ (при $k = 1$ имеем случай идеально отражающей поверхности паруса, при $k = 0$ — случай абсолютно черной поверхности); φ — угол между осью M_1x_1 и проекцией \mathbf{e}' на плоскость параллельную плоскости эклиптики $M_1x_1x_2$ орта вектора нормали паруса \mathbf{e} , ψ — угол между \mathbf{e} и \mathbf{e}' . Если парус обладает односторонней отражающей поверхностью, то согласно (1) управляющие параметры лежат в отрезках $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Если $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ и/или $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$, то движение паруса — неуправляемое, а саму систему (1) будем называть неуправляемой. В принятой модели единица расстояния приблизительно равна 10^{-2} а.е., а единица времени — 58.0916 суток (год, деленный на 2π). Точка либрации L_1 во вращающейся системе неподвижна и имеет координаты $\mathbf{x}^* = (1; 0; 0)$, $\mathbf{y}^* = (0; 1; 0)$.

Для неуправляемой системы (1) линеаризованные уравнения в окрестности L_1 и соответствующие собственные значения имеют вид [5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1), \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -4x_3. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1 + 2\sqrt{7}} = \pm l, \\ \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2\sqrt{7} - 1} = \pm i\omega_e, \\ \lambda_{5,6} = \pm 2i = \pm i\omega_n. \end{cases} \quad (2)$$

Из $\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$ следует, что координаты точки L_1 — неустойчивое положение равновесия типа седло, центр, центр.

Требуется построить нечеткий регулятор отражательной способностью k для удержания паруса в окрестности точки либрации $\varphi = \psi = 0$. Для этого предлагается подход построения нечеткого регулятора отражательной способностью солнечного паруса. Данный подход также предлагается расширить на систему солнечных парусов, удерживаемых в окрестности коллинеарной точки либрации.

Описание принципа построения управления. В работах [5, 7] описаны алгоритмы управления орбитальным движением по принципу оптимального демпфирования некоторой функции фазовых переменных — функции опасности, которая строится на основании имеющегося свойства уравнений движения. В случае неуправляемого движения знак данной функции характеризует уход космического аппарата на геоцентрические или гелиоцентрические орбиты. Если значение данной функции равно нулю, то космический аппарат находится на устойчивом многообразии в окрестности коллинеарной точки либрации. Для управляемого движения можно указать область фазово-

го пространства, в которой возможно удержание солнечного паруса с заданной парусностью w . Учитывая ограниченность солнечного паруса, удержание производится относительно заданного значения функции опасности.

Всё это позволяет перейти к проблеме построения нечетких регуляторов движением системы солнечных парусов на основе специальных функций принадлежности [6], которые также строятся в работе.

Заключение. Простота полученных нечетких регуляторов управления группировкой солнечных парусов обусловлена использованием значения лишь одной функции опасности (построения соответствующей функции принадлежности), что подчеркивает важность проведения фундаментальных исследований, в том числе и при использовании технологий искусственного интеллекта.

Предложенный подход может быть использован для разработки нечетких регуляторов в задаче удержания группировки солнечных парусов вблизи коллинеарной точки либрации за счет изменения их ориентации [7].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00027, <https://rscf.ru/project/23-21-00027>.

Литература

- [1] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [2] Лукьянов С. С. Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации круговой задачи трех тел с помощью светового давления // Космич. исслед. 1981. Т. 19. № 4. С. 518–527.
- [3] McInnes C. R. *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*. Springer Science & Business Media, 2004. 296 p.
- [4] Назиров Р. Р., Эйсмонт Н. А., Чумаченко Е. Н., Данхэм Д. У., Логашина И. В., Федоренко А. Н. Управление группировкой космических аппаратов в окрестности Солнечно-Земных коллинеарных точек либрации с помощью солнечного паруса // Вестник машиностроения. 2013. Т. 2. С. 43–46.
- [5] Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А. Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // Письма в астрономический журнал. 2020. Т. 46. № 3. С. 193–200.
- [6] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986. 312 с.
- [7] Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А. Стабилизация орбитального движения солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации за счет изменения отражательной способности // Письма в астрономический журнал. 2022. Т. 48. № 8. С. 592–600.

Секция 10

История механики

History of Mechanics

Людвиг Прандтль. 150 лет спустя

Богданов А.Н.^{1,3} *Кондратьев И.М.*^{2,3}

bogdanov@imes.msu.ru, kiimash@yandex.ru

¹НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,

119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский проспект, 1,

²Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,

101000, Российская Федерация, Москва, Малый Харитоньевский переулок, 4,

³МГТУ им. Н.Э. Баумана,

105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5/1

Аннотация. Имя Людвиг Прандтля хорошо известно в нашей стране, в первую очередь благодаря его работам в области механики жидкости и газа. Пользуются признанием и достижения созданной им гёттингенской школы гидроаэромеханики. Хотя основные работы Прандтля относятся к этой области науки, его научные интересы были также связаны с теорией упругости, теорией пластичности, строительной механикой. Идеи Прандтля успешно развивали и продолжают это делать советские и российские учёные.

Ключевые слова: Людвиг Прандтль, гидромеханика, аэромеханика, механика жидкости и газа, пограничный слой, Гёттинген.

В следующем году научная общественность отметит 150-летний юбилей немецкого учёного Людвиг Прандтля (1875–1953). В мире и России он известен и пользуется уважением прежде всего у специалистов в области механики жидкости и газа за свой фундаментальный вклад в эти разделы науки, при том что его научные интересы не ограничивались только этими направлениями, а включали также теорию упругости, теорию пластичности и строительную механику [1].

О весомом вкладе Прандтля в становление и развитие гидро- и аэромеханики и его влиянии на отечественную науку свидетельствует, в частности, тот факт, что в посвященном механике жидкости и газа втором томе четырёхтомного фундаментального труда «Механика в СССР за 50 лет» его имя — среди наиболее упоминаемых: оно держит безусловное первенство среди зарубежных учёных (в именном указателе содержится более 40 ссылок на Прандтля) и уступает лишь немногим русским и советским (Чаплыгину С.А., Жуковскому Н.Е., Ландау Л.Д. и некоторым другим). Интересно, что второе место по упоминанию среди зарубежных учёных занимает ученик Прандтля — Теодор фон Карман, имя которого встречается там же около 30 раз [2].

Применительно к Прандтлю нередко употребляют эпитет «отец гидродинамики». Пожалуй, наиболее примечательным достижением Прандтля является разработка теории пограничного слоя. Немецкий учёный кратко изложил её в своём выступлении на III международном конгрессе по математике, проходив-

шем в 1904 году в Гейдельберге. Его работа открыла целое научное направление, которое успешно развивается до сих пор. Фундаментальные достижения в этой области достигнуты в том числе советскими и российскими учёными: А.Н. Колмогоровым, Л.Г. Лойцянским, М.Д. Миллионщиковым и др.

Эпохальность открытия Прандтля подтверждена и проведением в 2004 году симпозиума Международного союза теоретической и прикладной механики, посвящённого столетию исследований пограничного слоя. Около 40 экспертов, в том числе российских, выступили с докладами о своих наиболее значимых результатах в этой области. Местом проведения симпозиума был выбран Немецкий аэрокосмический центр (DLR), расположенный в Гёттингене — городе, в котором с 1904 года жил и работал Людвиг Прандтль.

Доклад Прандтля о теории пограничного слоя мгновенно сделал его известным. А вскоре по инициативе Феликса Клейна он получил приглашение занять кафедру прикладной механики и возглавить недавно созданный при философском факультете Гёттингенского университета Институт прикладной механики. С тех пор с Гёттингеном была связана вся дальнейшая научная и педагогическая деятельность Прандтля, который неоднократно подчёркивал тот факт, что связь между чистой и прикладной наукой была для него важной и незаменимой, и, что развитие этого духа было уникальной чертой жизни в Гёттингенском университете.

Там он создал научную школу, наиболее известным из учеников которой стал Т. фон Карман (он был аспирантом Прандтля с 1906 по 1908 год), оставивший воспоминания, местами довольно критические, о своём наставнике в науке, характеризующие и его творческую манеру, и объясняющие её [3].

По воспоминаниям Кармана, «Прандтль был одарен редким умением понимать физические явления и необычайной способностью излагать их в относительно простой математической форме». Возможно, опять же по мнению Кармана, этому способствовало то обстоятельство, что Прандтль не был особенно силен в высшей математике.

Педагогическая карьера Прандтля в Гёттингене продолжалась более 40 лет до его ухода с профессорской должности в 1947 году. Многих студентов, слушавших его лекции, Прандтль побудил продолжать обучение в аспирантуре и работать в одном из руководимых им институтов. По воспоминаниям С.П. Тимошенко, много лет спустя Прандтль «сказал, что я был хороший студент, так как не затруднял его вопросами и работал самостоятельно» [4].

На сайте Mathematics Genealogy Project [5] указаны 90 учёных, считающихся его учениками (по свидетельству Г. Шлихтинга, под руководством Прандтля диссертации защитили 83 его ученика [6]). О сотрудничестве Прандтля с некоторыми из них, кроме того, известно по опубликованным результатам совместных исследований. Так, например, вместе с А. Бегдем и М. Мунком были проведены исследования подъёмной силы реального аэродинамического кры-

ла, в результате которых в 1918–1919 годах появилась теория, известная ныне как «теория крыла Ланчестера–Прандтля».

По словам Кармана, Прандтля не останавливали следования уже пройденными, но оставшимися неизвестными ему, путями в науке, он считал, например, что собственная упорная работа даст свои результаты: «Ланчестер начал работать раньше нас, но мы тоже работали независимо от него, и потому, когда его идеи дошли до нас, мы восприняли их с глубоким пониманием». В целом, библиография Прандтля превышает полторы сотни названий.

Среди наиболее известных учеников Прандтля — помимо Кармана — также прославившиеся своими работами в области механики жидкости и газа Герман Шлихтинг, Генрих Блаузиус, Иоганн (Георгий) Никурадзе, Вальтер Толмин.

Л. Прандтля часто называют и основателем экспериментальной аэродинамики. Он, в частности, разработал и построил в 1908 году в Гёттингене первую в мире аэродинамическую трубу с закрытым каналом, которая стала образцом для создания аэродинамических труб во многих странах. В 1917 году началась эксплуатация второй построенной им, более скоростной (в 5 раз) по сравнению с первой, аэродинамической трубы, конструкция которой стала известна как «гёттингенский тип». А с 1920 года Прандтль совместно с А. Буземанном работал над созданием сверхзвуковой аэродинамической трубы.

Получила распространение среди экспериментаторов трубка Прандтля — усовершенствованный вариант трубки Пито для одновременного измерения полного и статического давлений в потоке жидкости или газа. По воспоминаниям Л.Г. Лойцянского, в организованной при Главной палате мер и весов (ныне — Всероссийский НИИ метрологии имени Д.И. Менделеева) аэродинамической лаборатории для измерений использовалась «образцовая скоростная трубка Прандтля» с достаточно чувствительным микроманометром [7]. Интересно, что проводить измерения было поручено инженеру–исследователю К.Н. Васильеву, незадолго до этого прошедшему научную стажировку в Аэродинамическом институте Прандтля в Гёттингене.

Первой работой Прандтля, переведённой на русский язык, стала «Подъёмная сила и лобовое сопротивление несущих поверхностей в теории», опубликованная в 1922 году. А на учебниках Прандтля выросло не одно поколение отечественных научных работников, тем более что вначале необходимых учебных материалов по гидроаэромеханике просто ещё не существовало. Как вспоминал Лойцянский, приступая после смерти А.А. Фридмана к преподаванию расширенного курса гидродинамики (включающего теорию пограничного слоя и турбулентных движений), он не обнаружил пригодных учебников на русском языке, за исключением курса лекций Прандтля, составленного его учеником О. Титьенсом [8]. Как указывал Л.С. Лейбензон, написавший предисловие к этим лекциям, «в книге гёттингенского профессора инженеры найдут надёж-

ный фундамент в своей практической деятельности, а научные работники получают прекрасное руководство к дальнейшим научным изысканиям».

И хотя, как отмечал Лойцянский, выдающиеся русские учёные Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин, общепризнанные основоположники теории крыла и винта в идеальной несжимаемой жидкости, остались в стороне от новых научных направлений в гидродинамике, выдвинутых школой Прандтля, отечественные учёные позже услышали призыв Лейбензона, и идеи Прандтля получили развитие в их трудах. В качестве примера можно назвать исследования, посвящённые концепции нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия [9]–[11].

В заключение стоит добавить, что Людвиг Прандтль в 1929 году побывал в СССР, посетил ЦАГИ и МГУ и прочитал несколько лекций, посвящённых вихревым течениям, турбулентности и сверхзвуковым течениям [12].

Литература

- [1] Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Библиогр. справ. Киев: Наукова думка, 1983. 639 с.
- [2] Механика в СССР за 50 лет. В 4-х т. / Академия наук СССР. Национальный комитет СССР по теоретической и прикладной механике; ред. Л.И. Седов. М.: Наука, 1968 - . Т. 2: Механика жидкости и газа, 1970. 879 с.
- [3] Карман Т. Аэродинамика. Избранные темы в их историческом развитии. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 208 с.
- [4] Тимошенко С. П. Воспоминания. Киев: Наукова думка, 1993. 424 с.
- [5] Ludwig Prandtl — The Mathematics Genealogy Project. <http://mathgenealogy.org/id.php?id=51374> (дата обращения: 31.03.2024).
- [6] Schlichting H. Tribute to Ludwig Prandtl // Int. J. Heat Mass Transfer. 1975. Vol. 18. P. 1333–1336.
- [7] Лойцянский Л. Г. Из моих воспоминаний. Записки профессора–политехника. СПб: Б. С. К., 1998. 139 с.
- [8] Титъенс О. Гидро- и аэромеханика: По лекциям проф. Л. Прандтля. / пер. с нем. Москва; Ленинград: ГТТИ, 1932–1935. Т. 1–2.
- [9] Нейланд В. Я. Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва / III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Сб. аннотаций докладов. М.: Наука, 1968. С. 224.
- [10] Рыжов О. С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосзвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
- [11] Богданов А. Н., Диесперов В. Н., Жук В. И. Неклассические трансзвуковые пограничные слои. К преодолению некоторых тупиковых ситуаций в аэродинамике больших скоростей // ЖВММФ. 2018. Т. 58. № 2. С. 270–280.
- [12] ЦАГИ. 100 фактов. 100 лет. М.: Изд-во «Москва», 2018. 100 с.

Об олимпиаде по фундаментальной механике Petropolitan (Re)Search СПбГУ

Кальницкий В.С., Кутеева Г.А.

v.kalnitsky@spbu.ru, g.kuteeva@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Petropolitan Science (Re)Search — открытая международная олимпиада среди студентов и молодых специалистов, организованная Санкт-Петербургским государственным университетом. В настоящее время эти интеллектуальные соревнования проходят по 17 направлениям. Одно из таких направлений — фундаментальная механика. В докладе представлена небольшая статистика всей олимпиады и отдельно по направлению «фундаментальная механика», перечислены работы–победители по фундаментальной механике с 2017 года по настоящее время.

Ключевые слова: олимпиада по фундаментальной механике, интеллектуальные соревнования, молодые специалисты, фундаментальная механика.

Введение. В настоящее время существует множество интеллектуальных конкурсов для студентов и молодых специалистов разных специальностей. Petropolitan Science (Re)Search (сокращенно, PS(R)S) — один из таких конкурсов, это «открытая международная олимпиада студентов и молодых специалистов», организатором которой является Санкт-Петербургский государственный университет. Основные сведения о статистике олимпиады можно почерпнуть с сайта <https://psrs.spbu.ru>. Перечислим некоторые данные по статистике и поощрения, которые получают участники олимпиады.

В первый раз эта олимпиада проводилась в 2017/2018 учебном году. Начиналась с 14 направлений: математика, фундаментальная механика, вычислительные технологии, физика, науки о Земле, психология, социальные науки, политология, международные отношения, филология, лингвистика, междисциплинарные исследования, история искусств, экономика и финансы. К настоящему времени добавились еще 3 направления: международный турнир естественных наук (химия, физика, биология, медицина, фармацевтика, инженерные науки), педагогика и управление городским развитием. Предполагается, что один и тот же участник может участвовать в нескольких направлениях этой олимпиады. Среди данных статистики — это число университетов, студенты которых принимают участие, т.е. ежегодно около 400 университетов России и зарубежных стран. Считаю важным отметить, что олимпиада Petropolitan Science (Re)Search включена в утвержденный Министерством науки и высшего образования Российской Федерации перечень мероприятий для предоставления грантов лицам, поступившим на обучение в образовательные организации высшего образования, научные организации по программам магистратуры.

Олимпиада поощряет талантливых молодых специалистов, обладающих глубокими знаниями и широким научным кругозором. Победители и призеры олимпиады PS(R)S в зависимости от направления подготовки получают до 100 дополнительных баллов за индивидуальные достижения при поступлении на программы магистратуры и аспирантуры СПбГУ.

В настоящий момент олимпиада по **фундаментальной механике** представляет конкурс научно-исследовательских работ. Первый отборочный этап олимпиады — заочный, он длится несколько месяцев. Студенты-участники присылают работы, оформленные по правилам Олимпиады, которые указаны на сайте. Критерии оценивания также указаны на сайте олимпиады (<https://psrs.spbu.ru/8-perechen-olimpiad/8-fundamentalnaya-mekhanika>). По этим критериям Жюри (число членов Жюри — от трех до восьми человек) отбирает работы для участия во втором, заключительном туре олимпиады. Работу участника олимпиады каждый член Жюри получает без указания фамилии, написавшего исследовательскую работу. Обычно каждый член Жюри оценивает только те работы, по тематике которых он наиболее компетентен. Далее — заключительный этап олимпиады. В настоящее время он проводится в режиме видеоконференцсвязи и представляет собой публичную защиту работ, представленных на отборочном этапе.

Год за годом. Олимпиада по фундаментальной механике. Работа над созданием проекта Регламента олимпиады началась летом 2016 года. Над проектом по направлению «фундаментальная механика» работал, ставший координатором по направлению, доцент Кальницкий В.С. Создание направления было поддержано академиком РАН Морозовым Никитой Фёдоровичем. Заключительный этап нескольких первых олимпиад проводился очно (без применения видеоконференцсвязи) на математико-механическом факультете СПбГУ, после публичной защиты были сделаны фотографии победителей с членами Жюри (рис. 1, 2).

В 2017/2018 учебном году победа была присуждена работе «Определение структурно-временных параметров для моделирования процесса высокоскоростного разрушения алюминиевых кольцевых образцов» (рис. 1).

Членами Жюри, Методической и Апелляционных комиссий стали: академик РАН Морозов Н.Ф., профессора Соколов Л.Л., Кустова Е.В., Товстик П.Е., Морозов В.А., Рыдалевская М.А., Филиппов С.Б., доценты Кутеева Г.А., Волков Г.А., Кальницкий В.С. (координатор), Илехменев А.Л. (БГТУ «Военмех»), научные сотрудники Яковлев А.Б., Казаринов Н.А., ведущий инженер Тверев К.К. Позже членами Жюри также стали доцент Наумова Н.В., научный сотрудник Добров Ю.В. (все члены утверждаются учебно-методической комиссией СПбГУ).

В 2018/2019 учебном году было 8 участников и победителями стали две работы: «Моделирование нагрева, неупругого деформирования и термоусталост-



Рис. 1. Победитель Олимпиады — 2017/18 г. с членами Жюри: Кутеева Г.А., Кальницкий В.С., Победитель, Товстик П.Е., Морозов В.А.

ного разрушения монокристаллических никелевых сплавов» и «Анализ влияния процесса влагопоглощения на формо- и размеростабильность крупногабаритного трехслойной конструкции антенного рефлектора» (см. рис. 2).

В 2019/2020 году победителем стал студент Мельник Максим Юрьевич, «Влияние учёта взаимодействий со свободными электронами на макропараметры газа в поуровневом приближении на примере неравновесной бинарной смеси атомов и молекул кислорода».

С 2020 года на сайте представлены презентации по всем направлениям Олимпиады, а с 2022 года ведутся прямые трансляции презентаций перед заключительным этапом. В 2020/2021 году победителем стал студент Злобин Данил Юрьевич, «Построение квазиоптимальных траекторий с использованием полиномов Бернштейна».

В 2021/2022 году победителями стали две работы «Исследование высокочастотной дифракции на скачке кривизны границы» и «Исследование скорости звука в ионизированной воздушной смеси».

С 2022 года председателем Жюри стала доцент Кутеева Галина Анатольевна. Для участия в Олимпиаде 2022/2023 года зарегистрировались 20 участников. Лучшими среди студентов были признаны трое: Ключин Максим Александрович «Аналитическое и компьютерное исследование движения космического



Рис. 2. Один из победителей Олимпиады — 2018/19 г. с членами Жюри: Кутеева Г.А., Кальницкий В.С., Победитель — Екатерина Васильева, Товстик П.Е., Морозов В.А.

аппарата в геофизических полях», Дорофеев Никита Павлович «Структурно-временные особенности необратимого деформирования материалов» и Антонова Мария Николаевна «Исследование деформаций стержневых систем и пластин аналитическими и численными методами».

В 2023/2024 году на Олимпиаду зарегистрировалось 27 человек. На заключительный этап прошли 5 работ.

Заключение. В настоящее время увеличивается число участников, а также число победителей олимпиады по фундаментальной механике Petrozavodsk (Re)Search. Организаторы и члены Жюри уверены, что олимпиада позволяет привлечь талантливых молодых исследователей к занятиям фундаментальной наукой, повышает престиж специалистов в этой области.

История отечественного кораблестроения. Очерки, второе издание

Кропачева Н.Ю., Павилайнен Г.В., Рудакова Т.В.
natakr4@gmail.com, g.pavilaynen@spbu.ru, t.rudakova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Группой учёных математико-механического факультета СПбГУ подготовлено второе издание сборника статей «Очерки истории отечественного кораблестроения», опубликованного в 1990 году под редакцией академика Николая Степановича Соломенко. Новое издание вышло в свет при активном участии сотрудников Санкт-Петербургского филиала Института истории естествознания и техники РАН. В статьях и очерках сборника освещаются малоизвестные страницы из истории военного кораблестроения и флота, они написаны в популярной форме, но с соблюдением документальной достоверности фактов. Необходимо отметить, что за 30 лет с момента своего появления, книга, изданная в мягком переплёте тиражом 2500 экземпляров, стала библиографической редкостью.

Ключевые слова: история кораблестроения, гидродинамика.

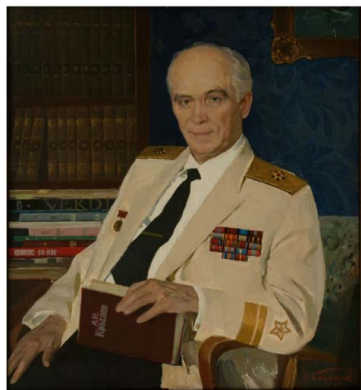


Рис. 1. Портрет Н.С. Соломенко. Художник И.Н. Баскаков. Холст, масло, 1994. Частное собрание.

Николай Степанович Соломенко (1923, Минск – 1995, Санкт-Петербург) — профессор и создатель единственной в России кафедры гидроупругости остался в истории нашего Университета как приветливый и внимательный руководитель, стройный и подтянутый с офицерской выправкой человек, вдумчивый и талантливый учёный. Его заслуги можно долго перечислять — Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, академик АН СССР (1984), академик РАН (1991), лауреат Государственной премии СССР, участник Великой Отечественной войны, инженер-контр-адмирал. Организатор и первый директор Института проблем транспорта РАН, который в 2006 году назван его именем. Кроме этого, Н.С. Соломенко написал и отредактировал ряд блестящих работ по истории науки, корабельного дела, надёжности су-

дов. В предисловии ко второму изданию «Очерков истории отечественного кораблестроения» академик Н.Ф. Морозов пишет: «Россия – мор-

ская держава, и достижения отечественного кораблестроения, великие имена Л. Эйлера, А.Н. Крылова, И.Г. Бубнова, С.О. Макарова, В.В. Новожилова наши отечественные приоритеты, научные прорывы в различных областях гидродинамики, теории корабля, механике разрушения, создании новых конструкционных материалов, обязательно должны становиться предметом изучения историков науки и публиковаться в научных и научно-популярных журналах, в монографиях и учебниках по истории» [1].



Рис. 2. Обложка второго издания книги «Очерки истории отечественного кораблестроения».

Неуклонно возрастающий интерес к историко-научным исследованиям вполне понятен и закономерен, если учесть, что только на основе твёрдых, объективно установленных исторических фактов и выводов может быть осмыслено прошлое и спроектированы и спрогнозированы сложнейшие механизмы процессов, протекающих в современном обществе, намечены правильные пути развития техники и технологии кораблестроения.

В предисловии первого издания «Очерков» Н.С. Соломенко отмечает: «В рамках исследований исторических материалов и их анализа существует и относительно самостоятельное направление — это развитие специальных областей истории общества, в числе которых видное место занимает история науки и техники. За последние годы, в частности, существенное развитие получили и исследования в области отечественного кораблестроения» [2].

Научные основы кораблестроения — это целый комплекс технических наук, в состав которого входят теория корабля со всеми её разделами: строительная механика корабля, архитектура корабля, теория проектирования и технология постройки корабля и область научно-технических знаний, связанных с корабельным вооружением и энергетикой. Особую роль в истории кораблестроения играет уровень развития средств вооружённой борьбы на море. Огромно влияние Академии наук с самого её основания в научном кораблестроении. В исследовании Е.А. Шитикова отмечается, что завершение создания русского регулярного военного флота и учреждение в России Академии наук совпали по времени [3].

Второе издание книги «Очерки истории отечественного кораблестроения» осуществлено группой увлечённых учёных, знавших и работавших вместе с Н.С. Соломенко на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Это академик Н.Ф. Морозов, профессора С.М. Бауэр, А.А. Тихонов, М.П. Юшков.

Это коллектив редакторов-составителей — Н.Ю.Кропачева, Г.В. Павилайнен, Т.В.Рудакова, Т.М.Товстик, Т.П.Товстик, Н.П. Стукалова, которые постарались подготовить рукопись к переизданию в сжатые сроки, ведь переиздание сборника планировалось к 100-летию со дня рождения академика Н.С. Соломенко.

Большую помощь и поддержку коллектив получил от Санкт-Петербургского отделения Института истории естествознания и техники имени С.И. Вавилова Российской академии наук в лице директора отделения — Н.А. Ащеуловой, учёного секретаря СПбФ ИИЕТ РАН А.А. Фёдоровой, доктора исторических наук В.С. Соболева и кандидата исторических наук А.Ю. Скрыдлова. Они помогли восстановить должности и годы жизни некоторых авторов книги — сотрудников института, в частности, ст.н.с. ИИЕТ, вице-адмирала, кандидата техн. наук Евгения Александровича Шитикова.

Нельзя не отметить вклад в переиздание книги Почётного профессора СПбГУ Михаила Петровича Юшкова, председателя секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Дома учёных им. М. Горького РАН. Он дал развёрнутый отзыв, подобрал дополнительную литературу: статью Н.С. Соломенко, посвящённую научной деятельности академика А.Н. Крылова, статью коллектива авторов, в которой обсуждается история создания Петром I Школы математических и навигацких наук (1701). Он же стал основателем Российской Академии наук (1724). Пётр I уже с 1717 г. состоял членом Парижской Академии наук. Опыт стран Западной Европы подсказывал, что отсутствие масштабного мореплавания вело к отставанию России в развитии астрономии и механики, зависящих в сильной степени от уровня математических знаний. Пётр вступил на престол, когда Россия не имела не только флота, но и даже выходов к Балтийскому и Чёрному морям. К концу же его правления страна превратилась в крупную морскую державу. Один из секретов такого превращения состоит в постоянном стремлении Петра, взявшего на себя функции главного судостроителя, к научному подходу в этом новом для государства деле.

Первое взаимодействие Академии наук с флотом и отчасти с кораблестроением осуществлялось во второй камчатской экспедиции В. Беринга (1733–1743 гг.), в которую входили пять действительных членов Академии наук. В Охотске строили суда для экспедиции. В их постройке принимал участие



Рис. 3. Шитиков Е.А.
(1922–1998).

Г.Г. Скорняков-Писарев, ранее возглавлявший Морскую академию и написавший первую книгу по механике на русском языке «Наука статическая или механика» (1722), где ознакомил судостроителей с рядом приспособлений: рычагом, блоком, воротом, клином и т.д.

Посадка нескольких крупных боевых кораблей на мель требовала принятия конструктивных мер, повышения точности бортовых навигационных приборов, проведения гидрографических и астрономических работ. В качестве оперативной меры Пётр I предложил устанавливать фальшкиль, который с помощью «ершей» крепился к основной кильбалке и первым должен был воспринимать удары о грунт. На публичных научных собраниях Академия наук слушала доклады, содержащие различные идеи по повышению точности навигационного обеспечения мореплавания (Д. Бернулли, А.Н. Гришов, М.В. Ломоносов). В деревянном судостроении наиболее трудоёмкими были лесопильные работы. Их старались по возможности механизировать. Например, верфь в Колпино возникла на базе вододействующей «ильной мельницы» на реке Ижора (Ижорский завод), а к испытаниям лесопильной мельницы на Галерной верфи привлекались академики Г. Крафт и Л. Эйлер.

Крупнейший вклад в кораблестроение внёс Л. Эйлер (1707–1783). Академик А.Н. Крылов писал: «...В нашей Академии наук зародилась теория корабля в виде двухтомного сочинения Л. Эйлера» [4]. «Scientia navalis», трактат о «Морской науке», написанный по заказу Академии наук, вышел в Петербурге на латинском языке в 1749 г. Первый том труда носит теоретический характер и посвящён устойчивости тел в воде и сопротивлению, которое они испытывают при прямолинейном движении.

Для кораблестроителей большой интерес представляет второй том. Его прикладное значение наглядно отражают названия глав: 1) О кораблях вообще; 2) О положении равновесия кораблей; 3) Об устойчивости положения равновесия; 4) О качке кораблей; 5) О наклоне, который разрешается иметь кораблям, подверженным действию каких-либо сил; 6) О действии руля; 7) О действии вёсел; 8) О конструкции гребных судов; 9) О силе, с которой ветер действует на парус; 10) О конструкции мачт; 11) О косом курсе корабля.



Рис. 4. Леонард Эйлер. Портрет работы Иогана Кёнига. 1881 г.

К решению задач устойчивости корабля Эйлером привлекался его ученик, впоследствии академик, Н.И. Фусс (1755–1826), которым написана статья «О равновесии полностью нагруженного корабля...» [3]. В дальнейшем, будучи академиком, Н.И. Фусс выполнил несколько работ по гидродинамике, часть из которых была опубликована.

Для облегчения пользования «Морской наукой» практиками Эйлер в 1773 г. сокращённо, более популярно и с прикладной направленностью изложил её по-французски. Его ученик, М.Е. Головин (1756 - 1790) — почётный член Академии наук с 1786 г., перевёл изложение на русский, дополнив пояснениями и новыми сведениями. Книга вышла под названием «Полное умозрение строения и вождения кораблей, сочинённое в пользу учащихся навигации» (1778 г.).

Н.С. Соломенко в предисловии к [2] справедливо критикует научное сообщество советского периода за неоправданное замалчивание научного вклада в корабельное дело знаменитых иностранцев, например, англичанина Эдварда Джеймса Рида (1830 - 1906). Мы же хотели бы вспомнить деятельность Сэмюэля Грейга (1735 - 1788), флотоводца шотландского происхождения. Когда российское правительство обратилось к правительству Великобритании с просьбой направить нескольких британских морских боевых офицеров в Россию для помощи в модернизации российского флота, Грейг оказался в числе выбранных для этой миссии. В мае 1764 года он поступил на русскую службу в чине капитана 1 ранга, получив в 1765 году в командование фрегат «Святой Сергий» Балтийского флота. В 1766 году ему было доверено командование только что спущенным на воду линейным кораблём «Три иерарха». Добросовестным выполнением целого ряда важных поручений он обратил на себя внимание императрицы Екатерины II и руководителя Адмиралтейств-Коллегии графа И.Г. Чернышёва (1726–1797).

Использованию деревянных судов в Балтийском море препятствовала необходимость защиты судов от древоточцев. В 1752 году Адмиралтейств-коллегия попросила Академию наук помочь в борьбе с размножением в Кронштадтской гавани червей, точивших корабли. Достаточно эффективной мерой оказалась обшивка подводной части судов медными листами, предложенная адмиралом Сэмюэлем Грейгом. Грейг в короткий срок хорошо выучил русский язык, что



Рис. 5. Сэмюэль Грейг.

способствовало успеху его карьеры [5] и позволило ему стать инициатором улучшения парусного вооружения флота и устанавливать на вновь строящихся кораблях паруса по своим пропорциям.

Славу флотоводца и звание конр-адмирала Грейг заслужил в Русско-турецкой войне 1768–1774 годов как участник сражения в Чесменской бухте (1772). В 1775 году Грейг получил должность главного командира Кронштадтского порта. В период его пребывания в должности была проведена масштабная реконструкция порта, в том числе строительство новых доков, расширение порта и возведение госпиталя для моряков. В 1777 г. были утверждены новые штаты парусов, рангоуты и такелажи для линейных кораблей и фрегатов. Заслугой С.К. Грейга была организация производства в России карронад — облегчённых орудий большого калибра с коротким стволом, эффективных в ближнем морском бою. Он же разработал проект 66-пушечного корабля, который впоследствии был реализован. Директор Академии наук Е.Р. Дашкова (Е.Р. Дашкова одновременно была директором Академии наук (президент — К.Г. Разумовский) и президентом Российской академии) предложила в 1783 г. избрать адмирала С.К. Грейга почётным академиком. В 1785 году по его инициативе совет Адмиралтейства был переведён из Санкт-Петербурга в Кронштадт. Впоследствии несколько поколений Грейгов были флотоводцами и корабелями.

Литература

- [1] Очерки истории отечественного кораблестроения. Издание второе, испр. и доп. СПб.: Изд-во ВВМ, 2023. 287 с.
- [2] Очерки истории отечественного кораблестроения. Под ред. ак. Н.С. Соломенко. М.: Изд-во Наука, 1990. 208 с.
- [3] Шитиков Е.А., Академия наук и кораблестроение в России. /Очерки истории отечественного кораблестроения. СПб.: Изд-во ВВМ, 2023. С.10.
- [4] Крылов А.Н., Леонард Эйлер: Математик, механик, астроном. Серия: Биографии выдающихся личностей. № 85. Изд. 2. М.: Изд-во URSS. 2019. 48 с. ISBN 978-5-9710-5999-8.
- [5] Игнатенко В.М., Адмирал Самуил Карлович Грейг в Кронштадте и Ораниенбауме. /В сборнике статей "XXV Дашковские чтения". СПб.: Изд-во музея "Нарвская застава". 2023. С.197–219.

Лига экскурсоводов — по материалам музея истории физики и математики СПбГУ

Синильщикова Г.А., Кутеева Г.А.

g.kuteeva@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Аннотация. Лига экскурсоводов — конкурс, который был объявлен зимой 2024 года (<https://ekskursovedy.rsv.ru>). От отделения механики СПбГУ участвовало три проекта: «Выпрямляющие механизмы из коллекции музея истории физики и математики СПбГУ», «Механизмы П.Л. Чебышёва в СПбГУ» и третий проект «Прочнее стали», о сотрудниках математико–механического факультета, участвовавших в боях Великой Отечественной войны. Все три проекта поддержаны сотрудниками музея истории физики и математики СПбГУ. О реализации этих проектов, а также участии в конкурсе, будет рассказано в докладе.

Ключевые слова: лига экскурсоводов, музей истории физики и математики СПбГУ, прямолинейно–направляющие механизмы, механизмы Чебышёва, математико–механический факультет, Великая Отечественная война.

Введение. Лига экскурсоводов — конкурс, который был объявлен зимой 2023/2024 года. Конкурс длительный, проходит с конца декабря 2023 года до середины мая 2024 года, состоит из нескольких этапов.

На официальном сайте (<https://ekskursovedy.rsv.ru>) есть положение об организации и проведении этой Всероссийской программы — конкурса. По положению организатором программы является Общество с ограниченной ответственностью «Неформальное образование». Соорганизатором является Автономная некоммерческая организация «Россия — страна возможностей», среди партнеров есть Российское общество «Знание» и другие организации.

В конкурсе «Лига экскурсоводов», от отделения механики СПбГУ участвовало три проекта. Первые два проекта были созданы студентами магистратуры отделения механики в рамках учебной практики, которую проводит доцент Г.А. Кутеева. Первый проект, выполненный студентом магистратуры М.А. Ключиным, можно назвать «Выпрямляющие механизмы из коллекции музея истории физики и математики СПбГУ». Второй проект «Механизмы П.Л. Чебышёва в СПбГУ», выполнялся студенткой магистратуры Т.Ю. Тепловой. Третий проект создавался командой из двух человек (доцент, к.ф.-м.н. Г.А. Кутеева, к.ф.-м.н. А.Ф. Нечунаев). Этот проект посвящен памяти сотрудников математико–механического факультета, участвовавших в боях Великой Отечественной войны. Все три проекта участвовали в категории конкурса «Автор цифрового контента».

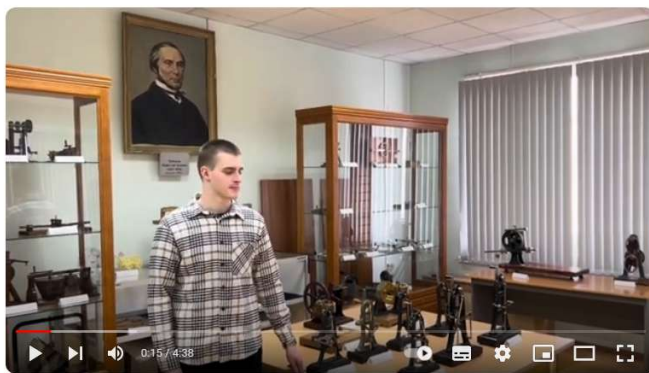
Основными источниками, которыми пользовались составители проектов, являются [1, 2, 3].

Проекты, созданные в рамках учебной практики.

Проект «**Выпрямляющие механизмы из коллекции музея истории физики и математики СПбГУ**». Наиболее подробно расскажем об этапах конкурса в создании проекта студента магистратуры 1 курса Максима Ключина. Ему было дано задание: на основе материалов, полученных и созданных этим студентом ранее, весной 2022 года и осенью 2023 года, создать свой цифровой материал о прямолинейно–направляющих (выпрямляющих) механизмах середины XIX века, хранящихся в музее истории физики и математики СПбГУ, для участия в конкурсе.

Перечислим задания и этапы–действия создателя проекта:

1. Создать видеоролик, в котором должны были участвовать все прямолинейно–направляющие механизмы середины XIX века нашего музея, включая собственный gif–файл. Для этого студент М. Ключин создал видеоролик, в котором были сняты и смонтированы видео об экспонатах — прямолинейно–направляющих механизмах, в основном из коллекции немецкого профессора XIX века Франца Рёло (рис. 1). Длительностью ролик оказался более 4 минут (4 минуты 39 секунды).



Выпрямляющие механизмы из Музея истории физики и математики СПбГУ

Выпрямляющие мех:
12 подписчиков

Вы подписаны

2

Поделиться

Поделиться

...

Рис. 1. Кадр из видеоролика, созданного под руководством Максима Ключина. На кадре студент М. Ключин показывает на столе выпрямляющие механизмы XIX века музея истории физики и математики СПбГУ (дата просмотра — 15.04.24).

- Этот видео-ролик успешно загружен на платформу *izi.travel* в раздел музея истории физики и математики СПбГУ, в коллекцию, посвященную механизмам Франца Рёло.
- Следующее задание состояло в том, чтобы разбить длительный ролик на четыре минуты на короткие ролики, посвященные одному из экспонатов музея, что и было сделано (рис. 2). Здесь представлено четыре небольших

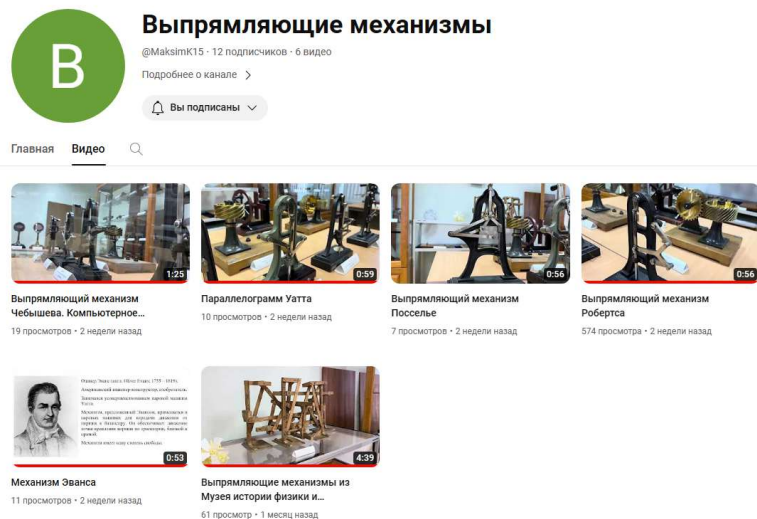


Рис. 2. Videоконтент проекта «Выпрямляющие механизмы» (дата просмотра — 15.04.24).

(около минуты) ролика о механизмах: выпрямляющий механизм Чебышёва, параллелограмм Уатта, выпрямляющий механизм Посселье, механизм Робертса, механизм Эванса. В каждом ролике кратко рассказывается о создателях этих механизмов.

- Дистанционная защита проекта на питчинге перед жюри организаторов конкурса.

Проект «Механизмы П.Л.Чебышёва в музее истории физики и математики СПбГУ» был предложен студентке магистратуры 1 курса Татьяне Тепловой. Ею создан видеоролик, состоящий из трех частей. Первая часть — посвящена жизни П.Л. Чебышёва, вторая часть — посвящена механизмам нашего музея, в следующей, последней части говорится о механике Императорского

кабинета практической механики, создателе наших механизмов по чертежам П.Л. Чебышёва, Викторе Францене.



Рис. 3. Кадр из видеоролика, созданного студенткой Т. Тепловой. Татьяна Теплова рассказывает о механизмах П.Л. Чебышёва в музее истории физики и математики СПбГУ. Внизу слева на столе лежат механизмы П.Л.Чебышёва (дата просмотра - 15.04.24).

В процессе создания проекта **«Прочнее стали»**, его содержание несколько раз менялось. На дистанционной защите проекта (питчинге) был представлен вариант, когда была показана галерея фото–портретов сотрудников и студентов математико-механического факультета Ленинградского государственного университета, участников боев Великой Отечественной войны.

Заключение. Авторы доклада считают, что участие в конкурсах, подобных «Лиге экскурсоводов», развивает способности талантливых молодых студентов и преподавателей в самых различных областях, от умения довести проект до реализации в виде видео–контента, расположенного на различных современных интернет–платформах, до личного выступления и представления проекта перед аудиторией.

Литература

- [1] Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. Том IV: Теория механизмов, 1948. 256 с.
- [2] Кутеева Г. А., Павилайнен Г. В., Поляхова Е. Н., Рудакова Т. В., Сабанев В. С., Тихонов А. А. Очерки по истории механики и физики. Учебное пособие. Санкт-Петербург, 2020. 514 с.
- [3] Кутеева Г. А., Синильщикова Г. А. О механике Викторе Францене // *Фундаментальные основы механики*. 2023. № 11. С. 5–10.

О работах по направлению общей и прикладной механики на кафедре «Механика и процессы управления» Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина в 1950–1980-е гг.

Смольников Б.А., Смирнов А.С.

smolnikovba@yandex.ru, smirnov.alexey.1994@gmail.com

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

²Институт проблем машиноведения Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61

Аннотация. В работе дается обзор исследований по направлению общей и прикладной механики, выполненных на кафедре «Механика и процессы управления» Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина в 1950–1980-е гг. Представлены наиболее важные достижения по ориентации и стабилизации искусственных спутников Земли, механике и оптимизации роботов–манипуляторов, колебательным явлениям в кинематических цепях и управлению движениями составных систем.

Ключевые слова: небесная механика, робототехника, биомеханика, аналитическая механика, динамика твердого тела, теория устойчивости движения, теория колебаний.

1 июня 2024 г. исполняется 90 лет со дня образования Высшей школы механики и процессов управления (прежние названия — кафедра «Специальная механика», «Механика», «Техническая механика», «Динамика и прочность машин», «Механика и процессы управления») Физико–механического института (ранее — Физико–механического факультета, Института прикладной математики и механики) Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (ранее — Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина). Этой кафедрой заведовали выдающиеся ученые–механики — проф., засл. деят. науки РСФСР Е.Л. Николаи (в 1934–1944 гг.); проф., чл.-корр. АН СССР А.И. Лурье (в 1944–1976 гг.); проф., засл. деят. науки РФ В.А. Пальмов (в 1976–2013 гг.); проф., чл.-корр. РАН Д.А. Индейцев (в 2013–2021 гг.) и проф., чл.-корр. РАН А.К. Беляев (с 2021 г.).

На протяжении всей истории кафедры одним из основных направлений, в рамках которого проводятся многочисленные исследования, является направление общей и прикладной механики, включающее такие разделы, как аналитическая механика, теория колебаний механических систем, теория устойчивости движения, динамика твердого тела и др. Его бурному развитию в 1950–1980-е гг. способствовала необходимость решения целого ряда серьезных практических задач в области небесной механики, робототехники и биомеханики.

В этой связи представляет большой интерес проследить основные достижения кафедры по данному направлению в период его наивысшего подъема.

Период наибольшего расцвета кафедры пришелся на то время, когда ею руководил А.И. Лурье — создатель всемирно известной научно-педагогической школы («кафедра Лурье»), которая на многие десятилетия стала признанным во всем мире центром фундаментального и прикладного образования в области механики. Его перу принадлежит немало канонических трудов, в числе которых — энциклопедическая монография «Аналитическая механика» [1], которая сразу после выхода в свет стала библиографической редкостью и превратилась в настольное руководство для огромной армии инженеров и исследователей, участвующих в разработке новой техники, методов анализа и математических моделей. Именно в этот «золотой период» истории кафедры в 1960 г. в связи с существенным расширением тематики научных работ и педагогической деятельности кафедра «Динамика и прочность машин» была переименована в кафедру «Механика и процессы управления». При этом в рамках направления общей и прикладной механики на кафедре проводились исследования по многим разделам, однако подавляющее их число относится к двум областям — динамике твердого тела и механике роботов-манипуляторов.

Еще в конце 1940-х гг. на кафедре сложился круг специалистов, выполнявших научно-исследовательские работы по заказам авиационной промышленности. Именно они заложили основы таких новых дисциплин, как динамика и управление движением ракет, математическое моделирование этих процессов, разработка измерительных и навигационных комплексов и пр. Особенностью проводимых исследований было то, что в них наряду с глубоким теоретическим анализом задач динамики летательных аппаратов большое место отводилось модельным и натурным испытаниям гироскопических устройств и приборов на вибростендах [2]. Важным толчком к развитию направления, связанного с небесной механикой, стало создание в 1956 г. на базе Института электромеханики АН СССР научной группы под руководством А.И. Лурье, тематика работ которой была связана с проблемами разработки и исследования электромеханических систем ориентации и стабилизации искусственных спутников Земли (ИСЗ) [3]. Этот коллектив решил целый ряд прикладных задач механики, а также осуществил перевод американской книги «Космическая техника» [4].

Все это способствовало всплеску интереса к вопросам динамики твердого тела, где огромную роль играла необходимость изучения движений составных систем «в большом», т. е. при больших углах поворота отдельных тел системы и при больших угловых скоростях вращения. К числу специфических особенностей задач этой области относятся вопросы устойчивости положений равновесия и режимов стационарного движения составных спутников и гиросатов, снабженных той или иной системой стабилизации. В проводимых исследованиях, в частности, было установлено, что широко применяемая Эйлера модель твердого тела в общем случае не годится для суждения об устойчивости таких режимов на бесконечном интервале времени, т. к. нередко приводит к физи-

чески неверным выводам. Отсюда вытекает необходимость построения диссипативных моделей твердого тела, учитывающих его внутреннюю неконсервативность. На этом пути была предложена новая формула для диссипативной функции, учитывающей влияние внутреннего трения на вращательное движение свободных тел, а также введено понятие «эволюционной динамики» [3]. Помимо этого, перспективной задачей было и построение оптимальных режимов управления вращательными и поступательными движениями ИСЗ, а большой практический интерес представлял синтез рациональных законов управления движением составных систем. В результате были сформулированы новые понятия и принципы теории оптимального управления механическими системами — «коллинеарное управление» и «ортогональное управление» [5].

К отдельному циклу задач относится изучение механики рабочих движений роботов–манипуляторов [6]. В первую очередь нужно отметить специфичность этих проблем, связанную с большим числом степеней свободы кинематических цепей и существенной неоднозначностью их конфигурации при больших перемещениях захвата манипулятора. Вследствие этого даже чисто геометрический и кинематический анализ таких цепей нередко оказывается весьма нетривиальным и приводит к постановкам новых кинематических задач, не встречавшихся в других приложениях. Например, при наличии избыточных степеней свободы в кинематической цепи естественным образом возникают задачи определения ее оптимальной конфигурации по тому или иному критерию оптимальности. Аналогичные вопросы решались и при анализе положений равновесия манипуляторов для различных конфигураций его кинематической цепи.

Большое внимание уделялось также и изучению колебательных явлений в кинематической цепи манипулятора, возникающих при ее разгоне или торможении. Здесь существенное значение имеет эволюция частот и форм колебаний кинематической цепи при изменении ее конфигурации и при перемещении захвата с грузом в пределах рабочей зоны. Параметры этих колебаний оказывают сильное влияние на точность позиционирования при подходе захвата с грузом к месту его номинальной остановки. Кроме того, рассматривались процессы развития колебательных движений в системах с несколькими степенями свободы, что и здесь подразумевало конструирование рациональных управляющих воздействий, удобных для практического использования. Эти вопросы оказались тесно связанными с биомеханикой живых организмов и особенно с движениями гимнастов на перекладине, которые обладают высокими оптимизационными качествами, так что их изучение имеет важное значение для формирования т. н. «биоморфного управления» в технических устройствах. На основе анализа процессов развития колебаний многомерных механических систем был сделан вывод, что использование биоморфного управления позволяет снизить расход энергии управляющих приводов. Подчеркнем, что данная тематика была продолжена и существенно углублена в последующие годы, причем было

установлено, что биоморфное управление дает возможность осуществлять раскачку системы вплоть до достаточно больших отклонений при весьма малых амплитудах управляющих воздействий. Это свойство связано с резонансным характером такого управления, которое обеспечивает синфазность управляющих воздействий с движением системы по одной из форм главных колебаний.

Остается также отметить, что многие из научных сотрудников кафедры успешно сочетали творческую работу с преподавательской деятельностью, приобщая пытливых студентов к современным задачам механики и математики. И эта взаимосвязь давала прекрасные плоды — приток молодых специалистов благотворно отражался как на тематике новых разработок, так и на применяемых методах исследования. Особенно важную роль начиная с 1980-х годов начала играть вычислительная техника, которую молодежь осваивала с особым интересом и энтузиазмом, замахиваясь при этом на столь сложные задачи, о которых их старшие товарищи и даже наставники не могли и мечтать.

Таким образом, по направлению общей и прикладной механики на кафедре «Механика и процессы управления» в 1950–1980-е гг. основные исследования проводились в двух областях, которые можно объединить под названием «Механика составного тела». Первая из них связана с изучением режимов вращательного движения космических аппаратов относительно собственного центра масс, вторая же охватывает вопросы механики роботов-манипуляторов. Обе эти области имеют ряд общих постановок задач и методов их исследования, однако каждой из них присущи и свои специфические особенности, которые были отмечены в настоящей работе.

Литература

- [1] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
- [2] Смольников Б. А., Смирнов А. С. Физмех и физмеховцы — пионеры космонавтики в Ленинграде // Наука и техника: Вопросы истории и теории. Материалы XLIII Международной годичной научной конференции Санкт-Петербургского отделения Российского национального комитета по истории и философии науки и техники Российской академии наук. 2022. С. 127–128.
- [3] Великая Россия. Российская биографическая энциклопедия. Т. 29. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Биографии. СПб.: Гуманистика, 2017. 628 с.
- [4] Сейферт Г. Космическая техника. / пер. с англ. А. А. Карымова, А. Н. Радченко, Б. А. Смольникова, Т. В. Харитоновой. Под ред. А. И. Лурье. М.: Наука, 1964. 727 с.
- [5] Меркин Д. Р., Смольников Б. А. Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб: Изд-во СПбГУ, 2003. 532 с.
- [6] Смольников Б. А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.

Механизмы, спектр квадратной матрицы и численное интегрирование эллиптических дифференциальных уравнений в трудах С.А. Гершгорина

Смык А.Ф.,¹ Яшина М.В.^{1,2,3}

afsmyk@mail.ru, yash-marina@yandex.ru

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),

125319, Российская Федерация, Москва, Ленинградский пр., 64,

²Московский авиационный институт (НИУ МАИ),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

³Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),

111024, Российская Федерация, Москва, ул. Авиамоторная, 4-а

Аннотация. Развитие информатики и вычислительной техники в XX веке связано с успехами в области электроники, во многом этому предшествовали достижения в области создания аналоговых средств вычисления. В период довоенной индустриализации в СССР был очень высок интерес отечественных ученых к использованию физических законов для создания вычислительных машин, позволяющих выполнять численные расчеты при решении краевых задач математической физики. Изобретения подобных вычислительных машин требовали не только качественной математической подготовки, но также глубоких знаний в области теоретической механики и физики. В статье исследуются работы С.А. Гершгорина, получившего за небольшой срок в тридцатые годы прошлого века выдающиеся результаты, которые развиваются и цитируются до сих пор в ведущих научных журналах. Основное внимание уделяется физическим принципам и подходам теоретической механики при разработке устройства для численного интегрирования краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: механический интегратор, численное решение уравнения Лапласа, локализация спектра квадратной матрицы, круги Гершгорина.

К числу блестящих математиков, оставивших заметный след в истории математики, но при этом незаслуженно забытых, относится Семен Аронович Гершгорин (1901–1933). Несмотря на то, что его имя есть во всех математических энциклопедиях, есть сотни статей и книг по математике, в которых упоминается имя Гершгорина, историко-научные исследования, посвященные личности и его трудам, нам не известны. Исключение составляет книга, посвященная теореме о кругах Гершгорина в линейной алгебре, выпущенная в 2004 году в немецком издательстве “Springer Series in Computational Mathematics” на английском языке, в которой дана высокая оценка трудов С.А. Гершгорина [1].

Образование и вся дальнейшая научная деятельность С.А. Гершгорина прошли в Петрограде (Ленинграде) и совпали с первыми годами установления и

развития социалистического строя в стране. Его с полным основанием можно назвать советским математиком. Основными направлениями научных работ в новых институтах в результате реформирования Ленинградского Политехнического института были: создание теории моделирования процессов теплообмена, теории и систем автоматического регулирования, методов расчета циркуляции, исследования внутрикотловых процессов, процессов горения, течений с большими скоростями, исследования решеток профилей турбин и турбомашин, вопросы прочности и ресурса энергооборудования и др. Эти задачи ставил перед собой и С.А. Гершгорин [2]–[13]. О важности полученных им результатов говорит и тот факт, что в 1931 году его статью «О разграничении собственных значений матрицы» в журнал «Доклады Академии наук» представлял академик А.Н. Крылов [14].

Первые достижения в науке С.А. Гершгорина связаны с изобретением прибора, позволяющего находить решения дифференциальных уравнений в частных производных (уравнение Лапласа). История создания механических устройств, позволяющих находить решения дифференциальных уравнений, началась еще в 19 веке и относится к созданию аналоговых вычислительных машин, имитирующих процесс вычисления. К таким устройствам относится интегратор (механический, гидравлический, электрический). В 1904 году А.Н. Крылов при проектировании кораблей предложил идею и в 1912 году построил механический интегратор для решения дифференциальных уравнений [13].

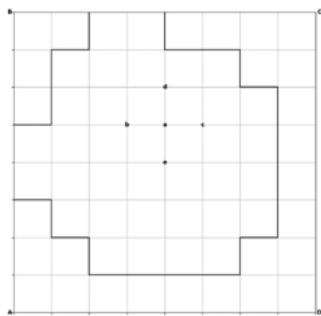


Рис. 1. Квадратная сетка Гершгорина [12].

С.А. Гершгорин в 1925 году предложил прибор, который основан на способе приближенного решения дифференциальных уравнений путем преобразования их в уравнения в конечных разностях [15]–[17]. Контуром служит как основной контур прибора (квадрат ABCD), так и всякая другая кривая, расположенная внутри его. Если контур криволинейный, он заменяется подходящей ломанной, как это показано на рис. 1. Точность такой модели зависит от шага сетки. Точность можно увеличить, сгущая сетку в местах больших градиентов функции.

В более поздней своей статье «О механизмах для построения функций комплексного переменного» (1926) Гершгорин останавливается на недостатках шарнирных механизмов для любой алгебраической функции, которые главным образом связаны с количеством стержней, которые мешают друг другу при работе [18]. В этой работе он предлагает сложение двух комплексных чисел $z_1 = ae^{i\varphi}$

Литература

- [1] Varga R. S. *Gersgorin and his Circles*. Springer, 2004.
- [2] Гершгорин С. А. О числе нулей функции и ее производной // Журнал физико-математического общества. 1927. № 1. С. 248–256.
- [3] Гершгорин С. А. О приближенном интегрировании уравнений Лапласа и Пуассона // Известия Ленинградского политехнического института. 1927. № 20. С. 75–95.
- [4] Гершгорин С. А. Механизм построения функции $\xi = 1/2(z - r^2/z)$ // Известия Ленинградского политехнического института. 1928. № 26. С. 17–24
- [5] Гершгорин С. А. Об электрических сетках для приближенного решения дифференциального уравнения Лапласа // Журнал прикладной физики. 1929. Т. 6. Вып. 3–4. С. 3–29.
- [6] Гершгорин С. А. Об электрических сетках для приближенного решения уравнения Лапласа // Журнал прикладной физики. 1929. Т. 6(3–4). С. 3–30.
- [7] Gerschgorin S. A. Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1930. V. 10. P. 373–382.
- [8] Гершгорин С. А. О разграничении собственных значений матрицы // Доклады Академии наук (А). 1931. С. 749–754.
- [9] Гершгорин С. А. Об одной общей теореме о среднем в математической физике // Доклады Академии наук (А). 1932. С. 50–53.
- [10] Гершгорин С. А. Колебания пластинок, нагруженных сосредоточенными массами // Прикладная математика и механика. 1933. Т. 1. В. 1.
- [11] Гершгорин С. А. О конформном отображении произвольной области на круг // Математический сборник. 1933. № 40. С. 48–58.
- [12] Прибор для интегрирования дифференциальных уравнений и для нахождения корней численных уравнений. К патенту С. А. Гершгорина, заявленному 8 мая 1924 года (заяв. свид. № 78203).
- [13] Прибор для вычерчивания так называемых кривых Жуковского, например, профилей аэропланых крыльев, пропеллеров и т. и. К патенту С. А. Гершгорина, заявленному 25 октября 1927 года (заяв. свид. № 20339).
- [14] Тимошенко С. П. Описание прибора А. Н. Крылова для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. С.-Петербург. Политехн. ин-та. 1905. Т. 3. Вып. 3–4. С. 397–406.
- [15] Гершгорин С. А. Прибор для интегрирования уравнения Лапласа // Журнал прикладной физики. 1925. Т. 2. С. 161–167.
- [16] Гершгорин С. А. Об одном методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Русского физико-химического общества. 1925. № 27. С. 171–178.

- [17] Гершгорин С. А. К описанию прибора для интегрирования дифференциального уравнения Лапласа // Журнал прикладной физики. 1926. Т. 3. С. 271–274.
- [18] Гершгорин С. А. О механизмах для построения функций комплексного переменного // Журнал физико-математического общества. 1926. Т. 1. В. 1. С. 102–113.
- [19] Гутенмахер Л. И. Электрическое моделирование (электроинтегратор). М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. 128 с.
- [20] Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М.: Физматгиз, 1959. 319 с.
- [21] Веников В. А. Физическое моделирование электрических систем. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956. 359 с.
- [22] Штейн Н. И. Методы электрического моделирования волноводов. В Сб. «Электрическое моделирование». Изд-во АН СССР, 1952.
- [23] Пухов В. В., Сазонов В. П. Модели с сосредоточенными параметрами для изучения электромагнитных полей // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1 Электроника. 1961. Вып. 12.
- [24] Федоров Н. Н. Решение двумерных задач электродинамики в неоднородных средах методом моделирования. М.: Труды МЭИ. Радиотехника. 1969. Вып. 65.
- [25] Федоров Н. Н. Решение некоторых задач электродинамики в неоднородных средах методами конечно разностных сеток // Диссертация на соискание степени доктора технических наук. М.: МЭИ, 1969. 472 с.
- [26] Иванов С. А., Сестрорецкий Б. В. Метод импедансного аналога электромагнитного пространства для двумерных задач электродинамики // Журнал радиоэлектроники. 2007. № 5.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ (*AUTHOR INDEX*)

- Abdirasulov A.Z., 606
Altenbach H., 534
Baghdadi M.K., 358
Brutyanyan M.A., 287
Bykov N.Yu., 404
Fevralskiy A.V., 358
Gol'tsov Yu.A., 606
Gorbachev Yu.E., 404, 408, 412
Grekov M.A., 503, 534
Kolomiets E.A., 606
Kostyrko S., 534
Kunova O.V., 408
Natour M.Z., 358
Pavlenko O.V., 358, 287
Petrova V.I., 145
Rukolaine S.A., 412
Shutyomov I.T., 184
Sopuev U.A., 606
Tsukanov D.Yu., 606
Ye Htun, 287
Yushkov M.P., 184
Zhusubaliyev Zh.T., 606
Абрамов А.Г., 322
Айшвария Сантош, 361
Алферов Г.В., 212, 616
Амелина Н.О., 697
Амелюшкин И.А., 279
Анесян В.М., 530
Антонов А.Ю., 473
Антонова М.Н., 477
Ардашев Н., 129
Арутюнян А.Р., 481, 571
Архипов П.А., 336
Бабаджанянц Л.К., 189
Бабич Н.А., 594
Багдади М.К., 299
Байков А.Е., 193
Банько В.А., 485
Барабанов И.Н., 59
Бардин Б.С., 61
Баталов С.А., 390, 449
Бауэр С.М., 489, 634, 640, 660
Беличенко М.В., 65
Белобородов Д.А., 691
Белоусов И.Ю., 283
Беляев А.К., 575
Бессонов Л.В., 648
Богданов А.Н., 722
Бордовицына Т.В., 270
Борисов С.П., 466
Босяков С.М., 37, 636
Бочкарев А.О., 492
Брыкина И.Г., 197, 394
Буров А.А., 70
Бурьян С.Н., 74
Быков Н.Ю., 398, 401, 456
Вавилов Д.С., 78
Вараюнь М.И., 473
Васильева М.А., 236
Васькова В.С., 201
Венатовская Л.А., 634, 640
Виноградов О.Н., 283
Виноградова Е.М., 349
Волков Г.А., 496
Воронкова Е.Б., 489
Вьюненко Ю.Н., 496
Гайфуллин А.М., 30
Галаев С.А., 291
Галушина Т.Ю., 204
Гатаулин Я.А., 377
Гембаржевский Г.В., 295
Георгиевский Д.В., 33, 485
Герашенко М.В., 640
Головина В.В., 78

- Головкин М.А., 299
Голоскоков Д.П., 499
Голуб А.П., 598
Голуб М.В., 652
Голубев Ю.Ф., 82
Горбачев Ю.Е., 398
Гориховский В.И., 701
Граничин О.Н., 697
Губский В.В., 302, 306
Давыденко Б.Н., 642
Данилов А.В., 371
Дегилевич Е.А., 86
Дегтярев Н.Д., 311
Демина А.Ю., 259
Деринг Е.Д., 398
Джайчибеков Н.Ж., 315, 338
Дзедзисашвили Г.Т., 507
Дмитриев Н.Н., 90
Добров Ю.В., 684
Доброславский А.В., 208
Доль А.В., 648
Дорофеев Н.П., 509, 553
Дорофеева Ю.А., 318, 513
Досаев М.З., 94
Дружинин О.В., 302
Дударенко Н.А., 121
Душин Н.С., 47
Егоров Н.В., 473
Егорова Л.А., 197, 394
Егорова Н.К., 645
Еремин А.С., 242
Ефимов Д.А., 318
Ефимова П.А., 212
Женг М., 477
Жуманбаева А.С., 315
Жусубалиев Ж.Т., 602
Зайцева Ю.С., 610
Засимова М.А., 322
Захаров В.В., 401
Зегря Г.Г., 680
Зимин Б.А., 579
Зубов С.В., 613
Зудов В.Б., 598
Зыков И.Д., 513
Иванов В.С., 672
Иванов Г.Г., 616
Иванов Д.В., 648, 664
Иванов Д.Н., 553
Иванова Е.Н., 602
Иванова О.В., 660
Иванский Ю.В., 697
Иванохин А.В., 216, 220
Ивашкин В.В., 55, 220
Ильин А.А., 517
Илюшин М.А., 680
Исаев С.А., 47
Исаков А.А., 701
Исламова А.Г., 326, 330
Исмагилов А.Р., 232
Истомин В.А., 705
Казанков В.К., 334
Кальницкий В.С., 726
Каун Ю.В., 336
Кац В.М., 672, 680
Каштанова С.В., 521, 565
Кинса С.Б., 279
Киреев В.Н., 338
Киреев С.И., 648
Кириллова И.В., 524
Киселев А.Ю., 496
Клемешев В.А., 349
Клюс А.А., 47
Клюшин М.А., 224
Клюшников Г.Н., 675

- Ковалёв М.Д., 97
Козлова А.С., 528
Колесников А.М., 530
Колесников Е.К., 675
Коломиец Е.А., 602
Колычев А.В., 336
Кондратьев И.М., 722
Коносевич Б.И., 101
Коносевич Ю.Б., 101
Копылова К.Д., 697
Корников В.В., 642
Корнушенко А.В., 283
Королев В.С., 228, 616
Корянов В.В., 82
Кострова М.С., 343
Костырко С.А., 588
Косьянчук В.В., 416
Котов Л.Н., 538
Кравченко Д.С., 420
Красильников П.С., 208, 232
Красинский А.Я., 619
Кропачева Н.Ю., 730
Крылова Е.Г., 660
Кугушев Е.И., 45, 105
Кудрявцев А.А., 78
Кудрявцев А.Н., 466
Кузнецов М.М., 424
Кузнецов Э.Д., 236
Куйбин П.А., 345
Кулешов А.С., 109
Кулешова Ю.Д., 424
Кунова О.В., 420
Курбатова Г.И., 349
Курманова Д.Е., 315
Кустова Е.В., 28, 390, 420,
438, 449, 460
Кутеева Г.А., 253, 726, 736
Кучумов А.Г., 652
Лаврененко Э., 129
Лазарева Г.Г., 427
Лазарьков П.В., 652
Лаптинская М.М., 353
Ласёк М.П., 538
Лашков В.А., 684
Ле Н.Д., 546
Левченя А.М., 291
Летнер О.Н., 204
Ли Б., 477
Локшин Б.Я., 598
Лукин А.В., 153, 624
Майоров А.Ю., 193
Максименко М.В., 224, 697
Максудова З.М., 709
Маламанов С.Ю., 431
Малец Е.Л., 37
Малых Е.В., 114
Малькова Ю.В., 542
Маркеев А.П., 118
Марьянкин К.А., 648
Матросов А.В., 499
Машек И.Ч., 684
Мелкумова Е.В., 82
Мельник М.Ю., 420, 460, 701
Мельников В.Г., 121
Михасев Г.И., 546
Можайский С.А., 385
Моисеева И.Н., 656
Морозов А.А., 434, 446, 453
Морозов В.А., 672, 680
Морозов В.М., 240
Морозов Д.В., 125, 157
Мулдашева А.М., 648
Мурашкин Е.В., 550
Мусса Х., 302, 306

- Мушка И.Н., 355
Назаренко Д.В., 636
Науменко А., 129
Наумова Н.В., 509, 553
Нестерчук Г.А., 557
Нечунаев А., 129
Нечунаев А.Ф., 509
Никитин С.В., 513
Николаев И.В., 153
Никущенко Д.В., 47
Новиков А.Н., 385
Норкин М.М., 438, 463
Овчинников М.Ю., 51
Окунев Ю.М., 134
Олемской И.В., 242
Орёл Н.А., 137
Орехов А.В., 492, 713
Офицерова Т.И., 65
Павилайнен Г.В., 492, 730
Павленко О.В., 279, 283, 299,
302, 306, 361
Павлов С.А., 705
Парёнкина В.И., 424
Паршина Л.В., 567
Паутов А.А., 660
Перегудин С.И., 334
Перепелкин В.В., 246
Перепухов Д.Г., 249
Перминов А.С., 236
Петров Н.А., 253
Петров Т.А., 141
Петров Ю.В., 477
Петрова Л.Г., 37
Петухов В.Г., 41
Пигусов Е.А., 361
Платонов П.С., 680
Побережная У.М., 680
Пожилов А.А., 322
Полеткин К.В., 624
Полиенко А.В., 648
Поляхова Е.Н., 228, 259
Попов И.А., 153, 624
Потоцкая И.Ю., 189, 228
Привалова О.Г., 134
Прозорова Э.В., 442
Пронина Ю.Г., 561
Пушышева Ю.Ю., 189
Радаев Ю.Н., 550
Раздобарин А.М., 299
Ракишева И.О., 652
Ренев М.Е., 684
Реслан М.Г., 279
Ржонсницкий А.В., 521, 565
Рис В.В., 291
Родников А.В., 256
Рожков М.А., 259
Розенблат Г.М., 149
Рубникович С.П., 636
Рудакова Т.В., 730
Рулева Л.Б., 688
Рыбаков М.О., 365
Рымкевич О.В., 78
Рябинин А.Н., 367, 371
Рябов В.М., 567
Савельев А.С., 709
Савенков Г.Г., 680
Сайтова Р.Р., 571
Салейко К.В., 270
Сальникова Т.В., 45
Самборский Г.Д., 513
Самсонов В.А., 134
Сатюков Д.Г., 424
Сафронова В.С., 236
Сахаров В.Ю., 224, 240, 697

- Свириденко Ю.Н., 30
Селин Н.А., 153
Селоцкий Ю.Д., 598
Сероштанов В.В., 47
Сидоренко В.В., 55
Сидоренко Д.А., 664
Синильщикова Г.А., 736
Скорюпин А.И., 446
Скрипкин А.Д., 109
Смирнов А.А., 374
Смирнов А.Л., 507, 557
Смирнов А.С., 86, 125, 157, 740
Смирнов Е.М., 377
Смирнов С.А., 575
Смирнова Н.В., 161
Смольников Б.А., 740
Смык А.Ф., 744
Смышляева А.В., 114
Соловьев С.Ю., 381, 385
Солодовников С.И., 688
Сопуев У.А., 602
Старинова О.Л., 259
Старцева Ю.В., 318
Стрижак П.А., 326, 330
Судьенков Ю.В., 538, 579
Суслов К.С., 263
Суханов А.А., 164
Сухов Е.А., 168
Тань Л., 449
Таташев А.Г., 628
Теплова Т.Ю., 172
Тетерина И.В., 343
Титарев В.А., 434, 453
Титов В.Б., 267
Тихонов А.А., 28, 224, 240, 697
Ткаченко П.П., 326
Томилова И.В., 270
Тонков Д.Н., 401
Трофимов С.П., 249
Турешбаев А.Т., 176, 228
Тхай В.Н., 59, 178
Тханг Нгок Чинь, 283, 361
Удалов П.П., 153, 624
Фалькович А.С., 664
Февральских А.В., 279, 306
Фёдоров С.А., 398, 456
Филатова А.В., 322
Филиппов С.Б., 507, 509, 528, 557
Фрадков А.Л., 594, 610
Хабибуллин Р.М., 259
Хайрулин А.Р., 652
Холодова С.Е., 334
Хоронжук Р.С., 684
Храпунов Е.Ф., 381, 385
Цаньсин М., 602
Цзылун Н., 602
Циркунов Ю.М., 374
Цуканов Д.Ю., 602
Чекин А.М., 168
Чекина Е.А., 168
Черкасов О.Ю., 114
Чернов В., 129
Чернышов М.В., 353
Чернякина И.В., 259
Чертищева С.А., 538
Чжао Ш., 477
Чистяков В.В., 583
Чулонин А.Ю., 47
Шайхутдинова А.А., 460
Шакурова Л.А., 438, 463
Шалабаева Б.С., 338
Шамолин М.В., 182
Шахова Т.В., 105
Шершнев А.А., 466

- Шехмаматъев Р.М., 652
Шилько С.В., 668
Шиманчук Д.В., 212, 717
Широбоков М.Г., 51, 263, 274
Шкредов Т.Ю., 466
Шлегель Н.Е., 326
Шоев Г.В., 466
Штейн А.А., 656
Штукин Л.В., 624
Шувалов Г.М., 588
Шуляев С.А., 330
Юдин И.Б., 446
Юшков М.П., 172
Яковлев А.Б., 691
Яльч Е.С., 579
Ярцев Б.А., 567
Яшина М.В., 628
Яшина М.В., 149, 628, 744

Научное издание

X Поляховские чтения

Материалы международной научной конференции по механике

Компьютерная верстка: Кунова О.В., Орехов А.В.

Подписано в печать с оригинал-макетов авторов 04.09.2024. Формат $60 \times 84 \frac{1}{8}$
Бумага офсетная. Гарнитура Century Schoolbook. Печать офсетная и цифровая.
Усл.печ.л 87,65. Тираж 60 экз. Заказ № 2355.

Отпечатано в Издательстве ВВМ
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41, литер А, пом. 06н