Сравнение динамики скольжения твердого тела по плоскости с учетом адгезионного и линейного ортотропного трения

Дмитриев Н.Н.[1,2]
dn7@rambler.ru
[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,
[2]Балтийский государственный технический университет
«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

Аннотация. Построена математическая модель движения твердого тела по плоскости с ортотропным адгезионным трением. Получены условия равновесия твердого тела, условия начала движения и определены величины начального ускорения и его направление. Решена задача о финальном движении тонкого кольца и диска по плоскости с ортотропным адгезионным трением. Проведено сравнение с соответствующими результатами при наличии линейного ортотропного трения.

Ключевые слова: анизотропное трение, ортотропное трение, динамика систем с трением.

Введение. В [1, 2] вводится ассоциированный закон ортотропного трения. В соответствии с этими работами предполагается, что оси прямоугольной декартовой системы координат являются главными осями скольжения: сила трения, действующая на материальную точку, вдоль оси Ox равна f_xN, вдоль оси Oy – f_yN, N – нормальная реакция плоскости. Конец вектора силы трения скольжения описывает в плоскости Oxy эллипс

$$\frac{T_x^2}{f_x^2N^2}+\frac{T_y^2}{f_y^2N^2}=1 \tag{1}$$

Вектор силы трения не пересекает границу эллипса трения (1). Поэтому справедливо неравенство

$$F(T_x,T_y)=\sqrt{\frac{T_x^2)}{f_x^2N^2}+\frac{T_y^2}{f_y^2N^2}}-1\leqslant 0 \tag{2}$$

В предельном состоянии выполнено соотношение $F(T_x,T_y)=0$. Составим функцию Лагранжа в виде суммы диссипативной функции и предельной функции (2):

$$L=-(T_xv_x+T_yv_y)+\lambda\left(\sqrt{\frac{T_x^2)}{f_x^2N^2}+\frac{T_y^2}{f_y^2N^2}}-1\right), \tag{3}$$

где λ – множитель Лагранжа. В соответствии с теоремой Куна – Такера для действительного движения функция Лагранжа (3) должна иметь экстремум, что означает необходимость обращения в ноль производных по T_x и T_y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_x} &= -v_x + \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{T_x^2)}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}}} \cdot \frac{T_x}{f_x^2 N^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial T_y} &= -v_y + \lambda \frac{1}{\sqrt{\frac{T_x^2)}{f_x^2 N^2} + \frac{T_y^2}{f_y^2 N^2}}} \cdot \frac{T_y}{f_y^2 N^2} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Откуда следуют соотношения

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{f_y^2}{f_x^2} \cdot \frac{v_y}{v_x}, \;\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{f_y^2}{f_x^2} \cdot \operatorname{tg}\vartheta, \tag{5}$$

где α – угол, который составляет с осью Ox вектор силы трения $\mathbf{T} = T_x\mathbf{i} + T_y\mathbf{j}$, ϑ – угол, определяющий направление вектора скорости $\mathbf{v} = v\,(\cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j})$. Откуда с учетом (4) находятся проекции силы трения на оси Ox и Oy:

$$T_x = -\frac{N f_x^2 \cos\vartheta}{\sqrt{f_x^2\cos^2\vartheta + f_y^2\sin^2\vartheta}}, T_y = -\frac{N f_y^2 \sin\vartheta}{\sqrt{f_x^2\cos^2\vartheta + f_y^2\sin^2\vartheta}} \tag{6}$$

Движение материальной точки под действием адгезионной ортотропной силы трения. Тангенциальная и нормальная оси естественного трехгранника имеют орты

$$\tau = \cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}, \mathbf{n} = -\sin\vartheta\mathbf{i} + \cos\vartheta\mathbf{j} \tag{7}$$

Следовательно, уравнения движения материальной точки на указанные оси имеют вид

$$m\dot{v} = T_\tau = -\frac{N(f_x^2 + (f_y^2 - f_x^2)\sin^2\vartheta}{\sqrt{f_x^2\cos^2\vartheta + f_y^2\sin^2\vartheta}}, \; mv\dot{\vartheta} = T_n = -\frac{N(f_y^2 - f_x^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{f_x^2\cos^2\vartheta + f_y^2\sin^2\vartheta}} \tag{8}$$

Деление первого уравнения на второе и последующее разделение переменных приводит к зависимости

$$\frac{dv}{v} = \frac{f_x^2 + (f_y^2 - f_x^2)\sin^2\vartheta}{(f_y^2 - f_x^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

интегрирование которого при начальных условиях $t = 0, v = v_0, \vartheta = \vartheta_0$, приводит к соотношению

$$v = v_0 |\operatorname{tg}\vartheta|^{\frac{f_x^2}{f_y^2 - f_x^2}} \frac{1}{\cos\vartheta} \cdot C_0,\ C_0 = \frac{\cos\vartheta_0}{|\operatorname{tg}\vartheta_0|^{\frac{f_x^2}{f_y^2 - f_x^2}}} \tag{9}$$

Формула (8) показывает, что скорость материальной точки стремится к нулю при стремлении угла ϑ к нулю или π.

Замечание. Если в линейном законе ортотропного трения [3, 4, 5] и в законе адгезионного ортотропного трения коэффициенты f_x и f_y одинаковы, то имеет место соотношение

$$T^2_{\tau\, line} - T^2_{\tau adg} = -N^2(f_y - f_x)^2 sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \leqslant 0,\ f_y \geqslant f_x$$

Откуда можно сделать вывод, что остановка материальной точки, движущейся по инерции при ортотропном адгезионном трении, произойдет за время не более, чем в случае линейного ортотропного трения.

Движение твердого тела по горизонтальной плоскости, опирающегося на кольцевую площадку. Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела по горизонтальной плоскости опирающейся на кольцевую область записываются в виде

$$\begin{gathered}
m\ddot{x} = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} \tau_x r dr d\psi,\ \ m\ddot{y} = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} \tau_y r dr d\psi, \\
J\dot{\omega} = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} mom_{Cz}(\tau) r dr d\psi, \\
\tau_x = -p \cdot \frac{f_x^2\left(v\cos\vartheta - \omega r\sin(\vartheta+\psi)\right)}{\sqrt{f_x^2\left(v\cos\vartheta - \omega r\sin(\vartheta+\psi)\right)^2 + f_y^2\left(v\sin\vartheta + \omega r\cos(\vartheta+\psi)\right)^2}}, \\
\tau_y = -p \cdot \frac{f_y^2\left(v\sin\vartheta + \omega r\cos(\vartheta+\psi)\right)}{\sqrt{f_x^2\left(v\cos\vartheta - \omega r\sin(\vartheta+\psi)\right)^2 + f_y^2\left(v\sin\vartheta + \omega r\cos(\vartheta+\psi)\right)^2}}, \\
mom_{Cz}\tau = \tau_y \cdot r\cos(\vartheta+\psi) - \tau_x \cdot r\sin(\vartheta+\psi), \\
p = \frac{mg}{\pi R_2^2\left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)}
\end{gathered} \tag{10}$$

В этих соотношениях двойные интегралы не удается свести к эллиптическим интегралам, так как это было сделано при линейном трении [5]. Но в случае тонкой кольцевой области, применив теорему о среднем, можно произвести предельный переход при $R_1 \to R_2$, после чего остается одинарный интеграл по переменной ψ что значительно упрощает исследование системы (10). Если область круговая ($R_1 = 0$), то можно проинтегрировать выражения в (10) по радиальной переменной, что так же приводит к некоторым упрощениям.

Можно показать, что финальное движение твердого тела, опирающегося на круговую и тонкую кольцевую области, при ортотропном адгезионном трении, как и в случае линейного ортотропного трения, характеризуется стремлением угла ϑ к нулю. Предельные значения $\delta_* = \frac{\omega_*}{v_*}$ в момент остановки представлены в таблице 1 и 2. ($f_x = 0,42$, $\mu = f_y - f_x$)

Таблица 1. Значение $\delta_* = \frac{\omega_*}{v_*}$ в момент остановки для тонкого кольца

μ	Адгезионное трение	Линейное трение
0,03	$0,973$	$0,990$
0,06	$0,924$	$0,975$
0.09	$0,848$	$0,956$
0,12	$0,729$	$0,934$
0,15	$0,526$	$0,907$
0,18	–	$0,876$
0,21	–	$0,839$

Таблица 2. Значение $\delta_* = \frac{\omega_*}{v_*}$ в момент остановки для диска

μ	Адгезионное трение	Линейное трение
0,03	$1,368$	$1,435$
0,06	$1,123$	$1,345$
0.09	$1,119$	$1,285$
0,12	$1,009$	$1,225$
0,15	$0,789$	$1,172$
0,18	–	$1,123$
0,21	–	$1,018$

Литература

[1] Mroz Z., Stupkiewicz S. An Anisotropic friction and wear model // Int. J. Solids Struc-tures. 1994. Vol. 31. №8. P. 1113 – 1131

[2] Konyukhov A, Vielsack P., Schweizerhof K. On coupled models of anisotropic contact surfaces and their experimental validation // Wear. 2008. №264. P.579 – 588

[3] Zmitrowicz A. A theoretical model of anisotropic dry friction // Wear.1981. Vol. 73. P. 9 – 39

[4] Александрович А.И., Векшин В.С., Потапов И.Н. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхно-стей // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 6. С. 996 – 1004

[5] Дмитриев Н.Н. Движение диска и кольца по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2002. Т. 23. № 1. С. 10 – 15