Компьютерные инструменты в образовании, 2024
№ 2: 5–29
УДК: 519.8
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2024-2-5-29

РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Кривулин Н. К.[1], доктор физ.-мат. наук, профессор, ✉ nkk@math.spbu.ru
Булгакова Д. С.[1], студент, st086963@student.spbu.ru
Григорьев Д. А.[1], студент, st069106@student.spbu.ru
Нагуманова К. И.[1], студент, st076933@student.spbu.ru
Приньков А. С.[1], аспирант, aprinkov@yahoo.com
Салова Я. А.[1], студент, st087259@student.spbu.ru
Филатова А. А.[1], студент, st087669@student.spbu.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7-9, 199034, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматриваются известные примеры многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений. Представлены численные решения указанных задач, полученные с помощью метода анализа иерархий, метода взвешенных геометрических средних, а также метода на основе log-чебышевской аппроксимации матриц парных сравнений. При решении задач с использованием log-чебышевской аппроксимации применяются модели и методы тропической математики, которая изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями.

Ключевые слова: *многокритериальные задачи принятия решений, парные сравнения, метод анализа иерархий, тропическая математика.*

Цитирование: Кривулин Н. К., Булгакова Д. С., Григорьев Д. А., Нагуманова К. И., Приньков А. С., Салова Я. А., Филатова А. А. Решение многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 2. С. 5-29. doi:10.32603/2071-2340-2024-2-5-29

1. ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений [1–3] встречаются во многих областях практической деятельности и составляют важный класс актуальных проблем, которые продолжают привлекать значительное внимание специалистов в области принятия решений. Рассматриваются задачи, в которых по известным результатам парных сравнений имеющихся альтернатив в соответствии с заданными критериями, а также по результатам парных сравнений самих критериев необходимо найти абсолютные оценки (рейтинги, приоритеты, веса) альтернатив для сравнения и последующего выбора наилучшей альтернативы для принятия решения. Одной из целей решения рассматриваемой задачи парных сравнений является упорядочивание (ранжирование) альтернатив в соответствии с величиной их оценок.

Для решения задач парных сравнений используются различные инструменты [4], включая эвристические процедуры, которые не гарантируют оптимальност и полученного результата, но обычно обеспечивают приемлемую для приложений точность, а также формальные методы, которые приводят к математически обоснованным результатам, но могут потребовать решения слишком сложных вычислительных задач. Наиболее известными примерами являются эвристический метод анализа иерархий [2, 5, 6] и формальный метод взвешенных геометрических средних [7–9], которые позволяют получить результат с невысокой вычислительной сложностью.

В то же время известно, что существующие методы решения рассматриваемых задач могут на практике давать различные и даже противоположные результаты [10–14]. Возможность получения противоречивых результатов затрудняет использование этих методов как эффективного средства поддержки принятия решений и сохраняет актуальность проблемы дальнейшего расширения набора применяемых инструментов и сравнительного анализа полученных решений. В случае, когда результаты, полученные с помощью различных методов, противоречат друг другу, их использование для принятия решений представляется не вполне обоснованным. С другой стороны, совпадение или близость полученных результатов могут служить аргументом в пользу любого из них как решения, близкого к оптимальному.

В настоящей работе рассматривается ряд примеров многокритериальных задач парных сравнений, описанных в работах [15–19]. Приводятся численные решения указанных задач с помощью метода анализа иерархий и метода взвешенных геометрических средних, которые дополняются решениями на основе метода log-чебышевской аппроксимации матриц парных сравнений [20–23]. Представленный материал продолжает начатую в работе [24] публикацию результатов, полученных в рамках выполнения студентами математико-механического факультета СПбГУ индивидуальных учебных проектов по курсу «Принятие решений».

2. МНОГОРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Рассмотрим многокритериальную задачу оценки рейтингов N альтернатив $\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_N$ принятия решений в соответствии с K критериями, в которой альтернативы и критерии сравниваются попарно. Предполагается, что критерии оценки альтернатив имеют разную степень важности (вес) для принятия решений. Имеются результаты парных сравнений критериев, которые образуют матрицу $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ порядка K, у которой элемент $c_{ij} > 0$ показывает, во сколько раз критерий i более важен для принятия решений, чем критерий j.

Для каждого критерия $k = 1,\ldots,K$ составлена матрица $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ порядка N, где величина $a_{ij}^{(k)} > 0$ определяет, во сколько раз альтернатива i считается более предпочтительной в смысле критерия k, чем альтернатива j. Требуется на основе относительных результатов парных сравнений критериев и альтернатив, заданных матрицами $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_K$, определить N-вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов (приоритетов) альтернатив при принятии решений.

Ниже представлено краткое описание трех методов решения многокритериальной задачи парных сравнений, которые используются в работе: метод анализа иерархий, метод взвешенных геометрических средних и метод log-чебышевской аппроксимации (более подробный обзор этих методов можно найти, например, в [24]).

2.1. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий, предложенный в 1970-х годах Т. Саати [2, 5, 6], является наиболее распространенным эвристическим методом решения многокритериальной задачи парных сравнений. Используется подход, при котором вектор рейтингов для произвольной матрицы парных сравнений находится как взвешенная сумма столбцов матрицы при условии, что веса считаются пропорциональными элементам искомого вектора рейтингов [4]. В этом случае определение вектора рейтингов сводится к вычислению собственного вектора матрицы парных сравнений, который соответствует максимальному собственному числу матрицы (главному собственному вектору).

Для решения многокритериальной задачи парных сравнений сначала находят нормированные относительно суммы элементов главные собственные векторы матрицы сравнений критериев $\boldsymbol{C}$ и матриц сравнений альтернатив $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_K$. Вектор $\boldsymbol{x}$ рейтингов альтернатив вычисляется как взвешенная сумма полученных главных собственных векторов матриц парных сравнений альтернатив с элементами главного собственного вектора матрицы парных сравнений критериев в качестве весов.

Обозначим через $\boldsymbol{w}=(w_k)$ нормированный главный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{C}$, а через $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_K$ нормированные главные собственные векторы матриц $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_K$ соответственно. Решение многокритериальной задачи парных сравнений с помощью метода анализа иерархий записывается в виде

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{K} w_k \boldsymbol{x}_k.$$

2.2. Метод взвешенных геометрических средних

Метод взвешенных геометрических средних [7–10] относится к числу формальных методов, в которых результат получают с помощью решения задачи аппроксимации матриц. В процессе решения ошибка аппроксимации вычисляется в евклидовой метрике в логарифмической шкале (log-евклидова аппроксимация). Для произвольной матрицы парных сравнений минимизация ошибки приводит к вектору рейтингов, составленному из геометрических средних элементов строк матрицы.

В случае многокритериальной задачи метод минимизирует взвешенную сумму квадратов ошибок аппроксимации для матриц парных сравнений альтернатив по каждому критерию, где в качестве вектора весов берется вектор геометрических средних матрицы парных сравнений критериев. Такую задачу аппроксимации можно решить аналитически и получить необходимый результат в явном виде, удобном для непосредственных расчетов с малой вычислительной сложностью.

Для решения задачи сначала находят нормированный по сумме элементов вектор $\boldsymbol{w}=(w_k)$ геометрических средних строк матрицы $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ по формуле

$$w_k=\left(\prod_{j=1}^{K} c_{kj}\right)^{1/K} \Big/ \sum_{i=1}^{K}\left(\prod_{l=1}^{K} c_{il}\right)^{1/K}, \qquad k=1,\dots,K.$$

Минимизация взвешенной суммы квадратов ошибок аппроксимации для матриц $\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})$ по каждому критерию k приводит к вектору рейтингов с элементами

$$x_i=\prod_{k=1}^{K}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\right)^{w_k/N} u, \qquad i=1,\dots,N; \qquad u>0.$$

Вектор $\boldsymbol{x}$, который часто нормируют относительно суммы элементов, называют решением задачи по методу взвешенных геометрических средних.

2.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

Решение задачи аппроксимации матрицы парных сравнений с вычислением ошибки аппроксимации в метрике Чебышева приводит к формальному методу решения на основе log-чебышевской аппроксимации [25–27]. Решение такой задачи в терминах обычной математики требует минимизации сложной нелинейной и негладкой функции, что обычно представляет собой слишком трудоемкую процедуру.

Для построения аналитического решения задачи log-чебышевской аппроксимации могут быть использованы модели и методы тропической (идемптотентной) математики, которая изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями [28–32]. Операция называется идемпотентной, если ее применение к аргументам с одним и тем же значением дает это значение в качестве результата. Например, операция определения максимума двух вещественных чисел является идемпотентной: $\max(x,x) = x$, а операция арифметического сложения — нет: $x + x = 2x$. Решение задачи парных сравнений с помощью log-чебышевской аппроксимации как задачи тропической оптимизации позволяет получить результат в виде тропического пространства векторов, которое генерируется столбцами некоторой матрицы.

В отличие от методов анализа иерархий и взвешенных геометрических средних, которые приводят к единственному результату, решение при помощи log-чебышевской аппроксимации может быть неединственным. При решении задачи парных сравнений неединственный вектор рейтингов альтернатив представляется вполне адекватным приблизительному характеру математической модели парных сравнений, известной тем, что разные методы решения могут давать противоположные результаты.

Чтобы произвести оценку альтернатив в случае, когда оптимальное решение состоит из множества векторов, в работах [20–23] используется подход на основе замены множества решений двумя векторами, которые максимально и минимально различают альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами. При этом находят вектор наилучшего дифференцирующего решения, для которого отношение между максимальным и минимальным элементами максимально, и вектор наихудшего дифференцирующего решения, для которого это отношение минимально. С использованием указанного подхода оценка альтернатив в многокритериальной задаче парных сравнений сводится к серии задач тропической оптимизации, для которых могут быть получены прямые аналитические результаты в компактной векторной форме.

2.3.1. Max-алгебра

Для решения задачи парных сравнений на основе log-чебышевской аппроксимации используется max-алгебра — алгебраическая система, определенная на множестве неотрицательных вещественных чисел, в которой сложение и умножение заданы следующим образом. Операция сложения определена как вычисление максимума и обозначается символом $\oplus$ так, что $x \oplus y = \max(x,y)$ для любых неотрицательных x и y. Операция умножения определена и обозначается как обычно (при записи арифметических выражений знак операции умножения $\times$ опускается). Изучению тропической математики посвящены работы [28–32], в которых можно найти другие примеры тропических алгебраических систем, включая (max,+)-алгебру, min-алгебру и т. п.

Тропические операции сложения и умножения матриц и векторов с элементами из множества неотрицательных вещественных чисел выполняется по обычным правилам с заменой скалярной операции сложения $+$ на операцию $\oplus$. Нулевая и единичная матрицы имеют обычный вид. Единичная матрица обозначается через $\boldsymbol{I}$.

Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ целая неотрицательная степень определяется как тропическое умножение матрицы на себя: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$ для любых целых $p > 0$. След квадратной $(N \times N)$-матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus a_{22} \oplus \cdots \oplus a_{NN} = \bigoplus_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Тропический спектральный радиус λ матрицы $\boldsymbol{A}$ находится как сумма

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/N}(\boldsymbol{A}^N) = \bigoplus_{k=1}^{N} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k).$$

При условии $\lambda \leq 1$ для матрицы $\boldsymbol{A}$ определен оператор (звезда) Клини в виде

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{N-1} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{A}^k.$$

Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определен сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$ если $x_i \neq 0$, и $x_i^- = 0$ в противном случае.

Норма N-вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определяется следующим образом:

$$\|\boldsymbol{x}\| = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_N = \bigoplus_{i=1}^{N} x_i = \mathbf{1}^T\boldsymbol{x},$$

где $\mathbf{1}^T = (1, \ldots, 1)$ обозначает вектор-строку, все элементы которого равны 1.

Вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_M$, если его можно представить в виде тропической линейной комбинации этих векторов: $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_M\boldsymbol{a}_M$ для некоторых неотрицательных вещественных чисел $x_1, \ldots, x_M$. В частности, вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ для некоторого $x \geq 0$.

Множество всех линейных комбинаций $x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_M\boldsymbol{a}_M$ образует тропическое линейное пространство. Любой вектор $\boldsymbol{y}$ этого пространства записывается в виде произведения: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_M)$ — генерирующая матрица пространства, составленная из векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_M$, а $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_M)^T$ — вектор коэффициентов.

2.3.2. Решение многокритериальной задачи парных сравнений

В этом разделе описывается новая процедура решения задачи парных сравнений на основе log-чебышевской аппроксимации, которая опирается на вычислительную схему, предложенную в работах [20–22]. Процедура использует новый подход к решению задач нахождения наилучшего и наихудшего дифференцирующих решений, разработанный в [33], который существенно сокращает необходимые вычисления.

Для решения задачи с матрицей $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев и матрицами $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_K$ парных сравнений альтернатив выполнение процедуры состоит в следующем. Сначала с помощью log-чебышевской аппроксимации матрицы $\boldsymbol{C}$ находится множество векторов весов критериев, из числа которых выбирается наилучший и наихудший дифференцирующие векторы весов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{v}$ (или один вектор весов $\boldsymbol{w}$, если решение задачи аппроксимации приводит к единственному решению).

Затем составляется взвешенная тропическая сумма матриц $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_K$ парных сравнений альтернатив с элементами вектора $\boldsymbol{w}$ в качестве весов. Для полученной матрицы с помощью log-чебышевской аппроксимации находится вектор рейтингов альтернатив. Если получен неединственный вектор рейтингов, то среди полученных векторов выбирается наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Для взвешенной суммы матриц парных сравнений альтернатив с элементами вектора $\boldsymbol{v}$ в качестве весов находятся векторы рейтингов, для которых определяется наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив.

Процедура решения задачи включает следующие шаги (все выражения ниже записаны в терминах max-алгебры, где вычисления выполняются с учетом определения операции сложения $\oplus$ как операции вычисления максимума max).

1. Определение для заданной матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев наилучшего и наихудшего дифференцирующих векторов весов.

   1.1. Построение генерирующей матрицы $\boldsymbol{D}$ весов критерниев:

$$\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \bigoplus_{k=0}^{K-1} (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^k, \qquad \lambda = \bigoplus_{k=1}^{K} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{C}^k). \tag{1}$$

   1.2. Вычисление по матрице $\boldsymbol{D}$ со столбцами $\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_K$ наилучшего вектора весов $\boldsymbol{w}$ как наименьшего (в смысле покомпонентного сравнения) на множестве векторов:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}_l \|\boldsymbol{d}_l\|^{-1}, \qquad l = \arg\max_{1 \le k \le K} \|\boldsymbol{d}_k\| \|\boldsymbol{d}_k^-\|. \tag{2}$$

   Если наименьший вектор не единственный, то в качестве наилучших берутся все векторы, которые не доминируют над каким-либо другим вектором.

   1.3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{D}$ наихудшего дифференцирующего вектора весов:

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{D})^-. \tag{3}$$

2. Определение для матриц $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_K$ парных сравнений альтернатив и вектора $\boldsymbol{w} = (w_k)$ наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив.

   2.1. Вычисление взвешенной суммы матриц парных сравнений:

$$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{k=1}^{K} w_k \boldsymbol{A}_k. \tag{4}$$

   2.2. Построение генерирующей матрицы $\boldsymbol{Q}$ рейтингов альтернатив:

$$\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^* = \bigoplus_{n=0}^{N-1} (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^n, \qquad \mu = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{P}^n). \tag{5}$$

   2.3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{Q}$ со столбцами $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_N$ наилучшего вектора рейтингов альтернатив как наименьшего на множестве векторов:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_m \|\boldsymbol{q}_m\|^{-1}, \qquad m = \arg\max_{1 \le n \le N} \|\boldsymbol{q}_n\| \|\boldsymbol{q}_n^-\|. \tag{6}$$

   Если наименьший вектор не единственный, то в качестве наилучших берутся все векторы, которые не доминируют над каким-либо другим вектором.

3. Определение для матриц $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_K$ парных сравнений альтернатив и вектора $\boldsymbol{v}=(v_k)$ наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив.

   3.1. Вычисление взвешенной суммы матриц парных сравнений:

$$\boldsymbol{R}=\bigoplus_{k=1}^{K} v_k\boldsymbol{A}_k. \tag{7}$$

   3.2. Построение генерирующей матрицы $\boldsymbol{S}$ рейтингов альтернатив:

$$\boldsymbol{S}=(\nu^{-1}\boldsymbol{R})^{*}=\bigoplus_{n=0}^{N-1}(\nu^{-1}\boldsymbol{R})^{n},\qquad \nu=\bigoplus_{n=1}^{N}\mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{R}^{n}). \tag{8}$$

   3.3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{S}$ наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив:

$$\boldsymbol{y}=(\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{S})^{-}. \tag{9}$$

3. ПРИМЕРЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В этом разделе рассмотрены примеры многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений, которые изучались в работах [15–19]. Приведены решения этих задач с помощью методов анализа иерархий, взвешенных геометрических средних и log-чебышевской аппроксимации.

3.1. Выбор руководителя проекта

Рассмотрим задачу выбора руководителя группы для выполнения совместного учебного проекта в области программирования [15]. Кандидаты на роль руководителя оцениваются экспертами попарно в соответствии с $K=4$ критериями: 1) персональные качества, 2) академические достижения, 3) опыт работы в команде и 4) уровень программирования. Матрица парных сравнений критериев имеет вид

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&4&3&7\\1/4&1&1/3&3\\1/3&3&1&5\\1/7&1/3&1/5&1\end{pmatrix}.$$

Имеется $N=4$ кандидата $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3,\mathscr{A}_4$, результаты оценки которых по каждому критерию отражают следующие матрицы парных сравнений альтернатив:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1/2&1&3&2\\1/3&1/3&1&1/3\\1/4&1/2&3&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1/2&1&2&3\\1/3&1/2&1&2\\1/4&1/3&1/2&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\1/2&1&2&3\\1/2&1/2&1&2\\1/3&1/3&1/2&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&3&2&3\\1/3&1&2&4\\1/2&1/2&1&1\\1/3&1/4&1&1\end{pmatrix}.$$

3.1.1. Метод анализа иерархий

Для решения задачи с помощью метода анализа иерархий сначала находят главные собственные векторы матриц парных сравнений критериев и альтернатив. В результате вычисления главного собственного вектора матрицы парных сравнений критериев $\boldsymbol{C}$, нормированного относительно суммы элементов, получаем

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0,5476 & 0,1266 & 0,2699 & 0,0559 \end{pmatrix}^T.$$

Вычисление для матриц парных сравнений альтернатив $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ нормированных главных собственных векторов приводит к следующему результату:

$$\boldsymbol{x}_1 \approx \begin{pmatrix} 0,4688 \\ 0,2683 \\ 0,0947 \\ 0,1681 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 0,4673 \\ 0,2772 \\ 0,1601 \\ 0,0954 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 0,4155 \\ 0,2926 \\ 0,1849 \\ 0,1070 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0,4567 \\ 0,2800 \\ 0,1489 \\ 0,1144 \end{pmatrix}.$$

Вектор рейтингов альтернатив и вектор рейтингов, нормированный относительно максимального элемента, принимают значения

$$\boldsymbol{x} = w_1\boldsymbol{x}_1 + w_2\boldsymbol{x}_2 + w_3\boldsymbol{x}_3 + w_4\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0,4535 \\ 0,2767 \\ 0,1304 \\ 0,1394 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,6100 \\ 0,2875 \\ 0,3074 \end{pmatrix}.$$

Элементы вектора рейтингов устанавливают следующий порядок альтернатив:

$$\mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.1.2. Метод взвешенных геометрических средних

Применение этого метода требует вычисления геометрических средних для элементов строк матриц парных сравнений критериев и альтернатив. Найдем вектор геометрических средних строк матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев. Нормирование этого вектора относительно суммы элементов приводит к следующему результату:

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0,5462 & 0,1276 & 0,2698 & 0,0564 \end{pmatrix}^T.$$

Векторы геометрических средних строк матриц парных сравнений альтернатив принимают значения

$$\boldsymbol{x}_1 \approx \begin{pmatrix} 2,2134 \\ 1,3161 \\ 0,4387 \\ 0,7825 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 2,2134 \\ 1,3161 \\ 0,7598 \\ 0,4518 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 1,8612 \\ 1,3161 \\ 0,8409 \\ 0,4855 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 2,0598 \\ 1,2779 \\ 0,7071 \\ 0,5373 \end{pmatrix}.$$

Результат вычисления вектора рейтингов альтернатив и нормированный относительно максимального элемента вектора рейтингов имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11}^{w_1} x_{12}^{w_2} x_{13}^{w_3} x_{14}^{w_4} \\ x_{21}^{w_1} x_{22}^{w_2} x_{23}^{w_3} x_{24}^{w_4} \\ x_{31}^{w_1} x_{32}^{w_2} x_{33}^{w_3} x_{34}^{w_4} \\ x_{41}^{w_1} x_{42}^{w_2} x_{43}^{w_3} x_{44}^{w_4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,1037 \\ 1,3139 \\ 0,5761 \\ 0,6280 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,6246 \\ 0,2739 \\ 0,2985 \end{pmatrix}.$$

Полученный вектор задает следующий порядок альтернатив:

$$\mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.1.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

Для решения задачи применим общую процедуру, описанную в подразделе 2.3.2. Заметим, что все выражения ниже следует понимать в терминах max-алгебры, в которой операция сложения $\oplus$ определена как max (а умножения — как обычно).

Сначала найдем веса критериев, для чего вычислим (тропические) степени матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев:

$$\boldsymbol{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 15 \\ 3/7 & 1 & 3/4 & 3 \\ 3/4 & 3 & 1 & 9 \\ 1/7 & 3/5 & 3/7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^3 = \begin{pmatrix} 9/4 & 9 & 3 & 27 \\ 3/7 & 9/4 & 9/7 & 15/4 \\ 9/7 & 3 & 9/4 & 9 \\ 3/20 & 9/7 & 3/7 & 15/7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^4 = \begin{pmatrix} 27/7 & 9 & 27/4 & 27 \\ 9/16 & 27/7 & 9/7 & 27/4 \\ 9/7 & 27/4 & 27/7 & 45/4 \\ 9/28 & 9/7 & 9/20 & 27/7 \end{pmatrix}.$$

Применим формулы (1), чтобы найти спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{C}$ в виде

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{C} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{C}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{C}^3) \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{C}^4) = 3^{3/4} 7^{-1/4} \approx 1.4014,$$

а затем составим матрицу $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$ и построим матрицу Клини

$$\boldsymbol{D} = \bigoplus_{k=0}^{3} (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^k = \begin{pmatrix} 1 & 7\lambda^2/3 & 3/\lambda & 7\lambda \\ \lambda^2/9 & 1 & \lambda/3 & 3/\lambda \\ \lambda/3 & 3/\lambda & 1 & 7\lambda^2/3 \\ 1/7\lambda & \lambda/3 & \lambda^2/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что все столбцы полученной матрицы коллинеарны и потому генерируют одно и то же решение (с точностью до положительного множителя). Следовательно, в качестве вектора весов можно взять любой из них, например первый:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2/9 & \lambda/3 & 1/7\lambda \end{pmatrix}^T.$$

Заметим, что вычисление наилучшего и наихудшего дифференцирующих векторов для матрицы $\boldsymbol{D}$ по формулам (2) и (3) приводит к такому же вектору как единственному результату.

Составим взвешенную сумму (4) матриц парных сравнений альтернатив с элементами вектора $\boldsymbol{w}$ в качестве весов

$$\boldsymbol{P} = w_1\boldsymbol{A}_1 \oplus w_2\boldsymbol{A}_2 \oplus w_3\boldsymbol{A}_3 \oplus w_4\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 2\lambda/3 \\ 1/4 & 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\boldsymbol{P}$ найдем степени

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 2\lambda \\ 1/3 & 2/3 & 2\lambda & 4/3 \\ 1 & 1 & 3 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 & 8\lambda \\ 2 & 2 & 6\lambda & 4\lambda \\ 2\lambda/3 & 2\lambda/3 & 4 & 4\lambda^2/3 \\ 1 & 2 & 6\lambda & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 24\lambda & 16 \\ 2\lambda & 4 & 12\lambda & 8 \\ 4/3 & 4\lambda/3 & 4\lambda^2 & 8\lambda/3 \\ 2\lambda & 2\lambda & 12 & 4\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Теперь используем формулы (5). Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{P}$ равен

$$\mu = \operatorname{tr} \boldsymbol{P} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{P}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{P}^3) \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{P}^4) = 2^{1/2} 3^{3/8} 7^{-1/8} \approx 1{,}6742.$$

Составим матрицу $\mu^{-1}\boldsymbol{P}$ и найдем матрицу Клини $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$ в виде

$$\boldsymbol{Q} = \bigoplus_{n=0}^{3} (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^n = \begin{pmatrix} 1 & 2/\mu & 12/\mu^2 & 4/\mu \\ 2/\mu^3 & 1 & 6/\mu^2 & 2/\mu \\ 1/3\mu & 2/3\mu^2 & 1 & \mu/3 \\ 1/\mu^2 & 2/\mu^3 & 3/\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что не все столбцы полученной матрицы коллинеарны, построим наилучшее дифференцирующее решение по формулам (6). Сначала найдем

$$\|\boldsymbol{q}_1\|\|\boldsymbol{q}_1^{-1}\| = \|\boldsymbol{q}_2\|\|\boldsymbol{q}_2^{-1}\| = 3\mu \approx 5,0225, \qquad \|\boldsymbol{q}_3\|\|\boldsymbol{q}_3^{-1}\| = \|\boldsymbol{q}_4\|\|\boldsymbol{q}_4^{-1}\| = 1/\mu^2 \approx 4,2814.$$

Следовательно, условию в (6) удовлетворяет $m = 1, 2$. Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{q}_1\|\boldsymbol{q}_1\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/\mu^3 \\ 1/3\mu \\ 1/\mu^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,4262 \\ 0,1991 \\ 0,3568 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2\|\boldsymbol{q}_2\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu/2 \\ 1/3\mu \\ 1/\mu^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8371 \\ 0,1991 \\ 0,3568 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что второй вектор доминирует над первым, первый вектор является наилучшим дифференцирующим решением $\boldsymbol{x}$.

Найдем наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Сначала заметим, что из равенства векторов весов $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ следует, что $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}$, $\nu = \mu$ и $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$. Используя (9), получаем наихудший дифференцирующий вектор $\boldsymbol{y}$ в виде

$$(\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{S})^- = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{Q})^- = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu/2 \\ \mu^2/12 \\ \mu/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8371 \\ 0,2336 \\ 0,4185 \end{pmatrix}$$

Запишем полученные наилучший и наихудший дифференцирующие решения

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,4262 \\ 0,1991 \\ 0,3568 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8371 \\ 0,2336 \\ 0,4185 \end{pmatrix}.$$

Оба решения упорядочивают альтернативы одинаковым образом:

$$\mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3.$$

Этот порядок совпадает с результатом упорядочивания альтернатив, полученным с помощью методов анализа иерархий и взвешенных геометрических средних.

3.2. Оценка программных средств компьютерного моделирования

Рассматривается задача оценки функциональной полноты (набора возможностей) программных средств компьютерного моделирования при выборе программного продукта для приобретения производственной компанией [16]. Для оценки применяются

$K = 3$ критерия, включая 1) гибкость системы, 2) средства статистического анализа и 3) графические возможности. Матрица парных сравнений критериев имеет вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изучаются $N = 5$ программных продуктов $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_5$, которые сравниваются по каждому критерию. Результаты сравнений альтернатив составляют матрицы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1/3 & 1 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1/5 & 1/3 & 1 & 5 \\ 1/5 & 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 3 & 5 \\ 1/9 & 1 & 1/5 & 1/7 & 1/5 \\ 1/5 & 5 & 1 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & 7 & 3 & 1 & 3 \\ 1/5 & 5 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 9 & 1/3 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 1/5 & 1/3 & 1 & 3 \\ 9 & 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.1. Метод анализа иерархий

Вычислим нормированные относительно суммы элементов главные собственные векторы матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев и матриц $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ парных сравнений альтернатив. После нахождения вектора $\boldsymbol{x}$ рейтингов альтернатив как взвешенной суммы собственных векторов матриц парных сравнений альтернатив нормируем его относительно максимального элемента. В результате получим векторы рейтингов альтернатив и порядок альтернатив в виде

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0,1610 \\ 0,4403 \\ 0,2106 \\ 0,1290 \\ 0,0591 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0,3657 \\ 1 \\ 0,4784 \\ 0,2930 \\ 0,1341 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_5.$$

3.2.2. Метод взвешенных геометрических средних

Вычислим вектор геометрических средних строк матрицы $\boldsymbol{C}$ и нормируем его относительно максимального элемента. Затем построим векторы геометрических средних строк матриц $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ и найдем вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x}$. Получим следующие векторы рейтингов и порядок альтернатив:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0,7864 \\ 2,7302 \\ 1,4812 \\ 0,8555 \\ 0,3676 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0,2880 \\ 1 \\ 0,5425 \\ 0,3134 \\ 0,1346 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_5.$$

3.2.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

В соответствии с формулами (1) вычислим степени матрицы $\boldsymbol{C}$ и их следы, чтобы определить ее спектральный радиус λ. Составим матрицу $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$, найдем ее степени и построим матрицу Клини $\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$. В результате получим:

$$\lambda = 3^{1/3}5^{1/3}7^{-1/3} \approx 1,2892, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 7\lambda & 3/\lambda \\ 1/7\lambda & 1 & \lambda/5 \\ \lambda/3 & 5/\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все столбцы матрицы коллинеарны, в качестве вектора весов критериев можно взять любой, например, первый:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1/7\lambda & \lambda/3 \end{pmatrix}.$$

Взвешенная сумма (4) матриц парных сравнений альтернатив принимает вид

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} = w_1 \boldsymbol{A}_1 \oplus w_2 \boldsymbol{A}_2 \oplus w_3 \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9/7\lambda & 1 & 2 & 5 \\ 3\lambda & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3\lambda & 5/7\lambda & 1 & 3 & 5 \\ 3\lambda & 1/\lambda & 1/3 & 1 & 5 \\ 3\lambda & 5/7\lambda & 1/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления степеней матрицы $\boldsymbol{P}$ и их следов найдем спектральный радиус μ матрицы $\boldsymbol{P}$, а затем для матрицы $\mu^{-1}\boldsymbol{P}$ найдем матрицу Клини $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$. Результаты расчетов по формулам (5) принимают вид:

$$\mu = 3^{2/3} 5^{2/3} 7^{-1/6} \approx 4,3976, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu^3/375 & 1/\mu & 2/\mu & 5/\mu \\ 7/5 & 1 & 3/\mu & 5/\mu & 7/\mu \\ 1 & \mu^3/375 & 1 & 3/\mu & 5/\mu \\ 1 & \mu^3/375 & 1/\mu & 1 & 5/\mu \\ \mu/5 & 27/7\mu^2 & 1/5 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти наилучшее дифференцирующее решение, вычислим

$$\|\boldsymbol{q}_1\| \|\boldsymbol{q}_1^{-1}\| = 7/\mu \approx 1,5918, \qquad \|\boldsymbol{q}_2\| \|\boldsymbol{q}_2^{-1}\| = 7\mu^2/27 \approx 5,0137,$$
$$\|\boldsymbol{q}_3\| \|\boldsymbol{q}_3^{-1}\| = 5, \qquad \|\boldsymbol{q}_4\| \|\boldsymbol{q}_4^{-1}\| = 25/2\mu \approx 2,8425, \qquad \|\boldsymbol{q}_5\| \|\boldsymbol{q}_5^{-1}\| = 7/\mu \approx 1,5918.$$

Условию в (6) удовлетворяет $m = 2$. В результате получаем следующий вектор рейтингов и порядок альтернатив:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_2 \|\boldsymbol{q}_2\|^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^3/375 \\ 1 \\ \mu^3/375 \\ \mu^3/375 \\ 27/7\mu^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,2268 \\ 1 \\ 0,2268 \\ 0,2268 \\ 0,1995 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_3 \equiv \mathcal{A}_4 \equiv \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_5.$$

Учитывая, что из равенства $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ следует, что $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$, найдем наихудший дифференцирующий вектор рейтингов и порядок альтернатив в виде

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{S})^- = (\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{Q})^- = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1 \\ 1 \\ \mu/5 \\ \mu/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,7143 \\ 1 \\ 1 \\ 0,8795 \\ 0,6282 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_3 \succ \mathcal{A}_4 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_5.$$

Порядки альтернатив, соответствующие наилучшему и наихудшему дифференцирующим векторам, можно объединить так

$$\mathcal{A}_2 \succeq \mathcal{A}_3 \succeq \mathcal{A}_4 \succeq \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_5.$$

Заметим, что упорядочения альтернатив, полученные разными методами, имеют некоторые различия. В частности, метод анализа иерархий устанавливает иную последовательность альтернатив $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_4$, чем другие методы. Наихудший дифференцирующий вектор метода log-чебышевской аппроксимации присваивает максимальные рейтинги альтернативам $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$, что не позволяет однозначно определить наилучшую альтернативу для принятия решений.

3.3. Выбор транспортной компании

В задаче выбора транспортной компании [17] учитывают $K = 5$ факторов: 1) стоимость услуг, 2) качество обслуживания, 3) обработка претензий и послепродажное обслуживание, 4) ассортимент оборудования и гибкость обслуживания, 5) финансовая стабильность компании. Матрица парных сравнений факторов имеет вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & 9 & 3 \\ 1/5 & 1/7 & 1 & 3 & 1/3 \\ 1/7 & 1/9 & 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выбор осуществляется между $N = 3$ компаниями на основе парных сравнений по каждому критерию, представленных в форме следующих матриц парных сравнений:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 1/7 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1/4 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/7 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.1. Метод анализа иерархий

После вычисления главных собственных векторов матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_5$ получим вектор рейтингов и определим порядок альтернатив, которые записываются в виде

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0,2975 \\ 0,4452 \\ 0,2573 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0,6682 \\ 1 \\ 0,5781 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.3.2. Метод взвешенных геометрических средних

В результате вычисления векторов геометрических средних для матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_5$ получим следующие векторы рейтингов и порядок альтернатив:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0,7427 \\ 1,3783 \\ 0,9768 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0,5389 \\ 1 \\ 0,7087 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1.$$

3.3.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

Вычислим спектральный радиус λ матрицы $\boldsymbol{C}$. Составим матрицу $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$ и найдем матрицу Клини $\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$. Получим следующие результаты:

$$\lambda = 3^{2/5} \approx 1{,}5518, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/3 & 9/\lambda^2 & 3\lambda^2 & 3/\lambda \\ 3/\lambda & 1 & 3\lambda^2 & 9\lambda & 9/\lambda^2 \\ \lambda^2/9 & 1/3\lambda^2 & 1 & 3/\lambda & \lambda/3 \\ 1/3\lambda^2 & 1/9\lambda & \lambda/3 & 1 & \lambda^2/9 \\ \lambda/3 & \lambda^2/9 & 3/\lambda & 9/\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все столбцы полученной матрицы коллинеарны и задают (с точностью до положительного множителя) один и тот же вектор весов критериев. Возьмем второй столбец

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \lambda/3 & 1 & 1/3\lambda^2 & 1/9\lambda & \lambda^2/9 \end{pmatrix}^T.$$

Взвешенная сумма матриц парных сравнений альтернатив имеет вид

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} = w_1\boldsymbol{A}_1 \oplus w_2\boldsymbol{A}_2 \oplus w_3\boldsymbol{A}_3 \oplus w_4\boldsymbol{A}_4 \oplus w_5\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 7\lambda/3 & 5\lambda/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2\lambda/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления степеней матрицы $\boldsymbol{P}$ определим ее спектральный радиус μ и найдем матрицу Клини $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$ в виде

$$\mu = 3^{-3/10}5^{1/2}7^{1/2} \approx 4{,}2550, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/5 & \mu/7 \\ 5/\mu & 1 & 5/7 \\ 3/\mu & 3/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим наилучшее дифференцирующее решение. Сначала найдем

$$\|\boldsymbol{q}_1\|\|\boldsymbol{q}_1^{-}\| = \|\boldsymbol{q}_2\|\|\boldsymbol{q}_2^{-}\| = 5/3 \approx 1{,}6667, \qquad \|\boldsymbol{q}_3\|\|\boldsymbol{q}_3^{-}\| = 7/\mu \approx 1{,}6451.$$

Условие (5) выполняется для столбцов $m = 1, 2$, которые приводят к одному и тому же наилучшему дифференцирующему решению:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1\|\boldsymbol{q}_1\|^{-1} = \boldsymbol{q}_2\|\boldsymbol{q}_2\|^{-1} = \begin{pmatrix} \mu/5 \\ 1 \\ 3/5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8510 \\ 1 \\ 0{,}6000 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_3.$$

В силу того, что $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$, получим наихудший дифференцирующий вектор в виде

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{S})^- = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{Q})^- = \begin{pmatrix} \mu/5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8510 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \succeq \mathcal{A}_3 \succ \mathcal{A}_1.$$

Заметим, что порядок альтернатив, который устанавливает наилучший дифференцирующий вектор, совпадает с порядком, полученным методом анализа иерархий. Порядок наихудшего дифференцирующего вектора оказывается наиболее близким к порядку метода взвешенных геометрических средних.

3.4. Выбор проекта информационной системы

В задаче выбора проекта информационной системы [18] заданы $K = 4$ критерия сравнения альтернативных вариантов проекта: 1) повышение точности канцелярских операций, 2) эффективность обработки информации, 3) содействие организационному обучению, 4) затраты на внедрение. Попарное сравнение критериев по степени важности приводит к матрице

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/7 & 1/5 \\ 9 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1/2 & 1 & 3 \\ 5 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеется $N = 6$ альтернативных проектов, результаты сравнения которых по каждому критерию описываются следующими матрицами парных сравнений:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/8 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1/8 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/8 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1 & 7 & 3 & 1/5 & 1 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/6 \\ 1 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1 & 5 & 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 2 & 1/3 & 1/2 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 3 & 7 \\ 1/2 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1/2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1/3 & 2 & 1/2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/8 \\ 1/4 & 2 & 1 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 1/4 \\ 1/3 & 3 & 2 & 1/2 & 1 & 1/5 \\ 3 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.1. Метод анализа иерархий

Решение задачи с помощью метода анализа иерархий дает следующий вектор рейтингов и порядок альтернатив:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0,2249 \\ 0,2063 \\ 0,0477 \\ 0,1679 \\ 0,1807 \\ 0,1724 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,9171 \\ 0,2120 \\ 0,7465 \\ 0,8034 \\ 0,7667 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5 \succ \mathscr{A}_6 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.4.2. Метод взвешенных геометрических средних

В результате решения методом взвешенных геометрических средних имеем вектор рейтингов и порядок альтернатив в виде

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1,4290 \\ 1,2302 \\ 0,3552 \\ 1,2282 \\ 1,2975 \\ 1,0049 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8609 \\ 0,2485 \\ 0,8595 \\ 0,9080 \\ 0,7032 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_5 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_6 \succ \mathscr{A}_3.$$

3.4.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

После вычисления спектрального радиуса λ матрицы $\boldsymbol{C}$ и построения матрицы Клини $\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$ получим

$$\lambda = 3^{-2/3}5^{2/3} \approx 1{,}4057, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1/9\lambda & 2\lambda/25 & \lambda/5 \\ 9\lambda & 1 & 2/\lambda & 5/\lambda \\ 27\lambda/5 & 3/5 & 1 & 3/\lambda \\ 5/\lambda & \lambda/5 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить наилучший дифференцирующий вектор, сначала заметим, что

$$\|\boldsymbol{d}_1\|\|\boldsymbol{d}_1^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_2\|\|\boldsymbol{d}_2^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_3\|\|\boldsymbol{d}_3^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_4\|\|\boldsymbol{d}_4^{-1}\| = 9\lambda.$$

Теперь найдем векторы

$$\boldsymbol{d}_1\|\boldsymbol{d}_1\|^{-1} = \boldsymbol{d}_2\|\boldsymbol{d}_2\|^{-1} = \boldsymbol{d}_3\|\boldsymbol{d}_3\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9\lambda \\ 1 \\ 3/5 \\ \lambda/5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0790 \\ 1 \\ 0{,}6000 \\ 0{,}2811 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_3\|\boldsymbol{d}_3\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9\lambda \\ 1 \\ \lambda/2 \\ \lambda/5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0790 \\ 1 \\ 0{,}7029 \\ 0{,}2811 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что второй вектор доминирует над первым, в качестве наилучшего дифференцирующего вектора весов $\boldsymbol{w}$ возьмем первый вектор

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1/9\lambda & 1 & 3/5 & \lambda/5 \end{pmatrix}^T.$$

Наихудший дифференцирующий вектор весов $\boldsymbol{v}$ записывается в виде

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{D})^- = \begin{pmatrix} 1/9\lambda & 1 & \lambda/2 & \lambda/5 \end{pmatrix}^T.$$

Составим взвешенную сумму матриц парных сравнений альтернатив на основе наилучшего дифференцирующего вектора весов

$$\boldsymbol{P} = w_1\boldsymbol{A}_1 \oplus w_2\boldsymbol{A}_2 \oplus w_3\boldsymbol{A}_3 \oplus w_4\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 7 & 3 & 9/5 & 21/5 \\ 2/3\lambda & 2\lambda/5 & 1 & 1/5 & 3/10 & 3/5 \\ 9/5 & 4\lambda/5 & 5 & 1 & 6/5 & 3 \\ 6/5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 3\lambda/5 & 8\lambda/5 & 6 & 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления степеней матрицы $\boldsymbol{P}$ и их следов определим спектральный радиус μ матрицы. Составим матрицу $\mu^{-1}\boldsymbol{P}$ и найдем матрицу Клини $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$. В результате получим

$$\mu = 3^{2/3}5^{1/3} \approx 3{,}5569, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/3 & 42/5\mu & 21/5\mu & 3/\mu & 7/5 \\ 3/\mu & 1 & 14\mu/25 & 7\mu/25 & \mu/5 & 21/5\mu \\ 2/15 & 2\mu/45 & 1 & 14/25\mu & 2/5\mu & 14/75 \\ 9/5\mu & 3/5 & 2\mu/5 & 1 & 3\mu/25 & 3/\mu \\ \mu/3 & 5/\mu & 14/5 & 7/5 & 1 & 7\mu/15 \\ 8/15 & 8\mu/45 & 6/\mu & 3/\mu & 8/5\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Все столбцы полученной матрицы коллинеарны. В качестве наилучшего вектора рейтингов альтернатив можно взять любой из них, например, пятый. Полученный вектор рейтингов и соответствующий порядок альтернатив записываются в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3/\mu \\ \mu/5 \\ 2/5\mu \\ 3\mu/25 \\ 1 \\ 8/5\mu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,8434 \\ 0,7114 \\ 0,1125 \\ 0,4268 \\ 1 \\ 0,4498 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_5 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_6 \succ \mathcal{A}_4 \succ \mathcal{A}_3.$$

Найдем взвешенную сумму матриц парных сравнений альтернатив на основе наихудшего дифференцирующего вектора весов:

$$\boldsymbol{R} = v_1\boldsymbol{A}_1 \oplus v_2\boldsymbol{A}_2 \oplus v_3\boldsymbol{A}_3 \oplus v_4\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 5\lambda/2 & 1 & 7 & 3 & 3\lambda/2 & 7\lambda/2 \\ 2/3\lambda & 2\lambda/5 & 1 & 1/5 & \lambda/4 & \lambda/2 \\ 3\lambda/2 & 4\lambda/5 & 5 & 1 & \lambda & 5\lambda/2 \\ \lambda & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 3\lambda/5 & 8\lambda/5 & 6 & 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим степени матрицы $\boldsymbol{R}$ и их следы. Найдем спектральный радиус ν матрицы $\boldsymbol{R}$, который принимает значение

$$\nu = (75\lambda/2)^{1/3} \approx 3,7495,$$

а затем построим матрицу Клини $\boldsymbol{S} = (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^*$ в виде

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 15/\nu^2 & 42/5\nu & 21/5\nu & 3/\nu & 7/5 \\ \nu^2/15 & 1 & 14\nu/25 & 7\nu/25 & \nu/5 & 7\nu^2/75 \\ 4\nu^4/5625 & 4\nu^2/375 & 1 & 28\nu^3/9375 & 4\nu^3/1875 & 28\nu^4/28125 \\ \nu^2/25 & 3/5 & 2\nu/5 & 1 & 3\nu/25 & \nu^2/15 \\ \nu/3 & 5/\nu & 14/5 & 7/5 & 1 & 7\nu/15 \\ 16\nu^4/5625 & 16\nu^2/375 & 6/\nu & 3/\nu & 16\nu^3/1875 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов и определение соответствующего порядка альтернатив приводит к следующему результату:

$$\boldsymbol{y} = (\mathbf{1}^T\boldsymbol{S})^- = \begin{pmatrix} 3/\nu \\ \nu/5 \\ 5/14 \\ 5/7 \\ 1 \\ 15/7\nu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,8001 \\ 0,7499 \\ 0,3571 \\ 0,7143 \\ 1 \\ 0,5715 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_5 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_4 \succ \mathcal{A}_6 \succ \mathcal{A}_3.$$

Все полученные решения упорядочивают альтернативы различным образом. При этом альтернативы $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_5$, $\mathscr{A}_2$ всегда оцениваются более высоко, чем $\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_6$, $\mathscr{A}_3$.

3.5. Выбор строительного подрядчика

В задаче о выборе строительного подрядчика [19] изучается $N = 5$ альтернатив выбора строительной компании, которые сравниваются попарно в соответствии с $K = 6$ критериями: 1) опыт работы, 2) финансовая стабильность, 3) показатели качества, 4) обеспечение персоналом, 5) обеспечение оборудованием, 6) текущая рабочая загрузка. Имеется матрица парных сравнений важности критериев, которая имеет вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1 & 2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Парные сравнения альтернатив по каждому критерию отражены в матрицах

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1/2 & 4 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1/3 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 1/6 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3 \\ 1/3 & 4 & 1 & 1/3 & 5 \\ 1/2 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/3 & 2 & 8 \\ 1/7 & 1 & 1/5 & 1/4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 9 \\ 1/2 & 4 & 1/4 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/4 & 1/9 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1/3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1/2 & 1/5 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/7 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/8 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1/4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 9 & 9 \\ 1/2 & 1/5 & 1/9 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1/5 & 1 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5.1. Метод анализа иерархий

Вектор рейтингов и порядок альтернатив, найденные с помощью метода анализа иерархий имеют вид

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0,2235 \\ 0,1979 \\ 0,2423 \\ 0,2914 \\ 0,0450 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0,7670 \\ 0,6790 \\ 0,8315 \\ 1 \\ 0,1546 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

3.5.2. Метод взвешенных геометрических средних

Решение методом взвешенных геометрических средних дает следующий результат:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1,2268 \\ 1,0857 \\ 1,4519 \\ 1,6949 \\ 0,3051 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0,7238 \\ 0,6406 \\ 0,8566 \\ 1 \\ 0,1800 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

3.5.3. Метод log-чебышевской аппроксимации

Чтобы решить задачу с помощью метода log-чебышевской аппроксимации, сначала определим спектральный радиус λ матрицы $\boldsymbol{C}$ и найдем матрицу $\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$ в виде

$$\lambda = 2^{2/5}3^{1/5} \approx 1,6438, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2/\lambda & 6/\lambda^2 & 2\lambda^2 & 6\lambda & 3\lambda^2/2 \\ \lambda/2 & 1 & 3/\lambda & 12/\lambda^2 & 3\lambda^2 & 9/\lambda^2 \\ \lambda^2/6 & \lambda/3 & 1 & 4/\lambda & 12/\lambda^2 & 3/\lambda \\ 1/3\lambda^2 & \lambda^2/18 & \lambda/6 & 1 & 2/\lambda & 1/2 \\ 1/6\lambda & 1/3\lambda^2 & \lambda^2/12 & \lambda/3 & 1 & \lambda/4 \\ 2/3\lambda^2 & \lambda^2/9 & \lambda/3 & 4/3 & 4/\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим наилучший дифференцирующий вектор весов. Сначала найдем

$$\|\boldsymbol{d}_1\|\|\boldsymbol{d}_1^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_2\|\|\boldsymbol{d}_2^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_3\|\|\boldsymbol{d}_3^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_4\|\|\boldsymbol{d}_4^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_5\|\|\boldsymbol{d}_5^{-1}\| = \|\boldsymbol{d}_6\|\|\boldsymbol{d}_6^{-1}\| = 6\lambda.$$

Вычислим следующие векторы:

$$\boldsymbol{d}_1\|\boldsymbol{d}_1\|^{-1} = \boldsymbol{d}_2\|\boldsymbol{d}_2\|^{-1} = \boldsymbol{d}_3\|\boldsymbol{d}_3\|^{-1} = \boldsymbol{d}_5\|\boldsymbol{d}_5\|^{-1} = \boldsymbol{d}_6\|\boldsymbol{d}_6\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda/2 \\ \lambda^2/6 \\ 1/3\lambda^2 \\ 1/6\lambda \\ 2/3\lambda^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8219 \\ 0,4503 \\ 0,1234 \\ 0,1014 \\ 0,2467 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_4\|\boldsymbol{d}_4\|^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda/2 \\ \lambda^2/6 \\ 1/2\lambda^2 \\ 1/6\lambda \\ 2/3\lambda^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8219 \\ 0,4503 \\ 0,1851 \\ 0,1014 \\ 0,2467 \end{pmatrix}.$$

Второй вектор доминирует над первым и его можно отбросить. В качестве наилучшего дифференцирующего вектора весов $\boldsymbol{w}$ возьмем первый вектор

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 & \lambda^2/6 & 1/3\lambda^2 & 1/6\lambda & 2/3\lambda^2 \end{pmatrix}^T.$$

После вычисления наихудшего дифференцирующего вектора весов получим

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{D})^- = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 & \lambda^2/6 & 1/2\lambda^2 & 1/6\lambda & 2/3\lambda^2 \end{pmatrix}^T.$$

Построим взвешенную сумму матриц парных сравнений альтернатив с использованием наилучшего дифференцирующего вектора весов

$$\boldsymbol{P} = w_1\boldsymbol{A}_1 \oplus w_2\boldsymbol{A}_2 \oplus w_3\boldsymbol{A}_3 \oplus w_4\boldsymbol{A}_4 \oplus w_5\boldsymbol{A}_5 \oplus w_6\boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda & 3\lambda/2 & \lambda & 7\lambda/2 \\ 3 & 1 & 2 & 4/\lambda^2 & 4 \\ 2 & 2\lambda & 1 & 2\lambda^2/3 & 5\lambda/2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & \lambda/6 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим спектральный радиус μ матрицы $\boldsymbol{P}$ и построим матрицу $\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$. В результате получим

$$\mu = 3\lambda^{1/2} \approx 3,8462, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/3 & 2/3 & 108/\mu^4 & 7\mu/18 \\ 3/\mu & 1 & 2/\mu & 324/\mu^5 & 7/6 \\ 4\mu^2/81 & 4\mu^3/243 & 1 & 2\mu^3/243 & 14\mu^3/729 \\ 6/\mu & 2 & 4/\mu & 1 & 7/3 \\ 1/2\mu & 1/6 & 1/3\mu & 54/\mu^5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы выбрать наилучшее дифференцирующее решение, найдем

$$\|\boldsymbol{q}_1\|\|\boldsymbol{q}_1^{-1}\| = \|\boldsymbol{q}_2\|\|\boldsymbol{q}_2^{-1}\| = \|\boldsymbol{q}_3\|\|\boldsymbol{q}_3^{-1}\| = 12,$$
$$\|\boldsymbol{q}_4\|\|\boldsymbol{q}_4^{-1}\| = 9\cdot 3^(1/2) = 3^{5/2} \approx 15,5885, \qquad \|\boldsymbol{q}_5\|\|\boldsymbol{q}_5^{-1}\| = 7/3 \approx 2,3333.$$

Условию (6) удовлетворяет $m = 4$. Найдем наилучший дифференцирующий вектор и порядок рейтингов альтернатив в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_4\|\boldsymbol{d}_4\|^{-1} = \begin{pmatrix} 108/\mu^4 \\ 324/\mu^5 \\ 2\mu^3/243 \\ 1 \\ 54/\mu^5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,4935 \\ 0,3849 \\ 0,4683 \\ 1 \\ 0,0642 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

Построим взвешенную сумму матриц парных сравнений альтернатив с помощью наихудшего дифференцирующего вектора весов

$$\boldsymbol{R} = v_1\boldsymbol{A}_1 \oplus v_2\boldsymbol{A}_2 \oplus v_3\boldsymbol{A}_3 \oplus v_4\boldsymbol{A}_4 \oplus v_5\boldsymbol{A}_5 \oplus v_6\boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda & 3\lambda/2 & \lambda & 7\lambda/2 \\ 3 & 1 & 2 & 4/\lambda^2 & 4 \\ 2 & 2\lambda & 1 & 2\lambda^2/3 & 5\lambda/2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & \lambda/6 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что построенная матрица $\boldsymbol{R}$ совпадает с полученной выше матрицей $\boldsymbol{P}$. Из этого следует, что $\nu = \mu$ и $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$. Тогда вычисление наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов и определение порядка альтернатив дает результат:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{S})^- = (\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{Q})^- = \begin{pmatrix} \mu/6 \\ 1/2 \\ \mu/4 \\ 1 \\ 3/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6410 \\ 0,5000 \\ 0,9616 \\ 1 \\ 0,4286 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_5.$$

Заметим, что векторы рейтингов альтернатив, полученные с помощью метода анализа иерархий и метода взвешенных геометрических средних, а также наихудший дифференцирующий вектор метода log-чебышевской аппроксимации одинаково упорядочивают альтернативы. Порядок, который устанавливает наилучший дифференцирующий вектор рейтингов, отличается перестановкой альтернатив $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_3$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен ряд многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений, в которых для заданных матриц парных сравнений альтернатив по каждому критерию и матрицы сравнений критериев требуется найти вектор рейтингов (приоритетов, весов) альтернатив. Найденные рейтинги альтернатив затем могут быть использованы для упорядочивания альтернатив по степени их предпочтения для принятия решений.

Представлены численные результаты оценки рейтингов, полученные с помощью метода анализа иерархий, метода взвешенных геометрических средних и метода log-чебышевской аппроксимации матриц. Для каждого полученного решения альтернативы упорядочивались в соответствии со значениями их рейтингов, а затем результаты упорядочивания сравнивались.

Опыт решения рассматриваемых задач показал, что порядок альтернатив, полученный с помощью одного метода, обычно отличается от порядка, полученного другим методом. Однако для большинства задач выбор альтернатив с самым высоким и самым низким рейтингами у всех методов совпадает.

Список литературы

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
2. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.
3. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.
4. *Choo E. U., Wedley W. C.* A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices // Comput. Oper. Res. 2004. Vol. 31, № 6. P. 893–908. doi:10.1016/S0305-0548(03)00042-X
5. *Saaty T. L.* A scaling method for priorities in hierarchical structures // J. Math. Psych. 1977. Vol. 15, № 3. P. 234–281. doi:10.1016/0022-2496(77)90033-5
6. *Saaty T. L.* On the measurement of intangibles: A principal eigenvector approach to relative measurement derived from paired comparisons // Notices Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 60, № 2. P. 192–208. doi:10.1090/noti944
7. *Narasimhan R.* A geometric averaging procedure for constructing supertransitive approximation to binary comparison matrices // Fuzzy Sets and Systems. 1982. Vol. 8, № 1. P. 53–61. doi:10.1016/0165-0114(82)90029-X
8. *Crawford G., Williams C.* A note on the analysis of subjective judgment matrices // J. Math. Psych. 1985. Vol. 29, № 4. P. 387–405. doi:10.1016/0022-2496(85)90002-1
9. *Belton V. and Gear T.* On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies // Omega. 1983. Vol. 11, № 3. P. 228–230. doi:10.1016/0305-0483(83)90047-6
10. *Barzilai J., Cook W. D., Golany B.* Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives // Oper. Res. Lett. 1987. Vol. 6, № 3. P. 131–134. doi:10.1016/0167-6377(87)90026-5
11. *Ishizaka A., Lusti M.* How to derive priorities in AHP: a comparative study // Cent. Eur. J. Oper. Res. 2006. Vol. 14, № 4. P. 387–400. doi:10.1007/s10100-006-0012-9

12. *Tran N. M.* Pairwise ranking: choice of method can produce arbitrarily different rank order // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438, № 3. P. 1012–1024. doi:10.1016/j.laa.2012.08.028
13. *Mazurek J., Perzina R., Ramík J., Bartl D.* A numerical comparison of the sensitivity of the geometric mean method, eigenvalue method, and best–worst method // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 5. P. 554. doi:10.3390/math9050554
14. *Saaty T. L., Vargas L. G.* Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios // Math. Modelling. 1984. Vol. 5, № 5. P. 309–324. doi:10.1016/0270-0255(84)90008-3
15. *Muhisn Z. A. A., Omar M., Ahmad M., Muhisn S. A.* Team leader selection by using an Analytic Hierarchy Process (AHP) technique // J. Softw. 2015. Vol. 10, № 10. P. 1216–1227. doi:10.17706/jsw.10.10.1216-1227.
16. *Davis L., Williams G.* Evaluating and selecting simulation software using the analytic // Integr. Manuf. Syst. 1994. Vol. 5, № 1. P. 23–32. doi:10.1108/09576069410050314
17. *Bagchi P. K.* Carrier selection: The Analytic Hierarchy Process // Logist. Transp. Rev. 1989. Vol. 25, № 1. P. 63.
18. *Muralidhar K., Santhanam R., Wilson R. L.* Using the analytic hierarchy process for information system project selection // Inf. Manag. 1990. Vol. 18, № 2. P. 87–95. doi:10.1016/0378-7206(90)90055-M
19. *Al-Subhi Al-Harbi K. M.* Application of the AHP in project management Int. J. Proj. Manag. 2001. Vol. 19, № 1. P. 19–27. doi:10.1016/S0263-7863(99)00038-1
20. *Krivulin N.* Methods of tropical optimization in rating alternatives based on pairwise comparisons // Operations Research Proceedings 2016 / Ed. by A. Fink, A. Fügenschuh, M. J. Geiger. Cham: Springer, 2018. P. 85–91. doi:10.1007/978-3-319-55702-1_13
21. *Кривулин Н. К., Агеев В. А.* Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. 2019. Т. 15, вып. 4. С. 472–488. doi:10.21638/11702/spbu10.2019.405
22. *Krivulin N., Sergeev S.* Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31–51. doi:10.1016/j.fss.2018.10.013.
23. *Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В.* Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. 2017. Т. 13, Вып. 1. С. 27–41. doi:10.21638/11701/spbu10.2017.103
24. *Кривулин Н. К., Абильдаев Т., Горшечникова В. Д., Капаца Д., Магдич Е. А., Мандрикова А. А.* О решении многокритериальных задач принятия решений на основе парных сравнений // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. Р. 27–58. doi:10.32603/2071-2340-2020-2-27-58
25. *Krivulin N.* Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems // 2015 12th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD), 15–17 August, Zhangjiajie, China Ed. by Z. Tang, J. Du, S. Yin, L. He, R. Li. IEEE, 2015. P. 162–167. doi:10.1109/FSKD.2015.7381933
26. *Кривулин Н. К., Гладких И. В.* Построение согласованной матрицы парных сравнений в маркетинговых исследованиях на основе методов тропической математики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 8. Менеджмент. 2015. Вып. 1. С. 3–43.
27. *Krivulin N.* Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons // 2016 Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing / Ed. by A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, B. Ucar. Philadelphia, PA: SIAM, 2016. P. 62–72. doi:10.1137/1.9781611974690.ch7
28. *Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.
29. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
30. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations over Them. New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. 256 p. doi:10.1007/978-94-017-0383-3
31. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.
32. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 255 с.
33. *Krivulin N.* Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation // Int. J. Approx. Reason. 2024. Vol. 169. P. 109168. doi:10.1016/j.ijar.2024.109168.

Поступила в редакцию 10.06.2024, окончательный вариант — 27.06.2024.

Кривулин Николай Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, ✉ nkk@math.spbu.ru

Булгакова Дарья Сергеевна, студент 4-го курса программы бакалавриата, кафедра статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, st086963@student.spbu.ru

Григорьев Дмитрий Артемович, студент 4-го курса программы бакалавриата, кафедра статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, st069106@student.spbu.ru

Нагуманова Карина Ильнуровна, студент 4-го курса программы бакалавриата, кафедра статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, st076933@student.spbu.ru

Приньков Алексей Сергеевич, аспирант 2-го курса, кафедра статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, aprinkov@yahoo.com

Салова Яна Алексеевна, студент 4-го курса программы бакалавриата, кафедра статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, st087259@student.spbu.ru

Филатова Арина Алексеевна, студент 4-го курса программы бакалавриата, кафедра статистического моделирования, математико-механический факультет, СПбГУ, st087669@student.spbu.ru

Computer tools in education, 2024
№ 2: 5–29
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2024-2-5-29

Solving Multicriteria Problems of Rating Alternatives Based on Pairwise Comparisons

Krivulin N. K.[1], Doctor sc., Professor, ✉ nkk@math.spbu.ru
Bulgakova D. S., Student, st086963@student.spbu.ru
Grigoriev D. A., Student, st069106@student.spbu.ru
Nagumanova K. I., Student, st076933@student.spbu.ru
Prinkov A. S., Postgraduate, aprinkov@yahoo.com
Salova Y. A., Student, st087259@student.spbu.ru
Filatova A. A., Student, st087669@student.spbu.ru

[1] Saint Petersburg State University, 7-9, Universitetskaya nab., 199034, Saint Petersburg, Russia

Abstract

Well-known examples of multicriteria problems of evaluating alternatives based on paired comparisons are considered. Numerical solutions to these problems are presented, obtained using the method of analytic hierarchy process, the method of weighted geometric means, and also a method based on the log-Chebyshev approximation of pairwise comparison matrices. When solving problems using log-Chebyshev approximation, models and methods of tropical mathematics are used, which studies the theory and applications of algebraic systems with idempotent operations.

Keywords: *multicriteria decision making problems, pairwise comparisons, analytic hierarchy process, tropical mathematics.*

Citation: N. K. Krivulin, D. S. Bulgakova, D. A. Grigoriev, K. I. Nagumanova, A. S. Prinkov, Y. A. Salova, and A. A. Filatova, “Solving Multicriteria Problems of Rating Alternatives Based on Pairwise Comparisons,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 5–29, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-2-5-29

References

1. V. V. Podinovskii and V. D. Nogin, *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions to multicriteria problems], Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
2. T. Saati, *Decision making. Hierarchy analysis method*, Moscow: Radio i svyaz', 1993 (in Russian).
3. V. D. Nogin, *Prinyatie reshenii v mnogokriterial'noi srede: kolichestvennyi podkhod* [Decision making in a multicriteria environment: a quantitative approach], Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
4. E. U. Choo and W. C. Wedley, “A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices,” *Computers Operations Research*, vol. 31, no. 6, pp. 893–908, 2004; doi:10.1016/S0305-0548(03)00042-X
5. T. L. Saaty, “A scaling method for priorities in hierarchical structures,” *J. Math. Psych.*, vol. 15, no. 3, pp. 234–281, 1977; doi:10.1016/0022-2496(77)90033-5
6. T. L. Saaty, “On the Measurement of Intangibles. A Principal Eigenvector Approach to Relative Measurement Derived from Paired Comparisons,” *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 60, no. 02, p. 192, 2013; doi:10.1090/noti944
7. R. Narasimhan, “A geometric averaging procedure for constructing supertransitive approximation to binary comparison matrices,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 53–61, 1982; doi:10.1016/0165-0114(82)90029-x
8. G. Crawford and C. Williams, “A note on the analysis of subjective judgment matrices,” *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 29, no. 4, pp. 387–405, 1985; doi:10.1016/0022-2496(85)90002-1
9. V. Belton and T. Gear, “On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies,” *Omega*, vol. 11, no. 3, pp. 228–230, 1983; doi:10.1016/0305-0483(83)90047-6
10. J. Barzilai, W. D. Cook, and B. Golany, “Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives,” *Operations Research Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 131–134, 1987; doi:10.1016/0167-6377(87)90026-5
11. A. Ishizaka and M. Lusti, “How to derive priorities in AHP: a comparative study,” *Central European Journal of Operations Research*, vol. 14, no. 4, pp. 387–400, 2006; doi:10.1007/s10100-006-0012-9
12. N. M. Tran, “Pairwise ranking: choice of method can produce arbitrarily different rank order,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 438, no. 3, pp. 1012–1024, 2013; doi: 10.1016/j.laa.2012.08.028
13. J. Mazurek, R. Perzina, J. Ramík, and D. Bartl, “A Numerical Comparison of the Sensitivity of the Geometric Mean Method, Eigenvalue Method, and Best–Worst Method,” *Mathematics*, vol. 9, no. 5, p. 554, 2021; doi:10.3390/math9050554
14. T. L. Saaty and L. G. Vargas, “Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios,” *Mathematical Modelling*, vol. 5, no. 5, pp. 309–324, 1984; doi:10.1016/0270-0255(84)90008-3
15. Z. A. A. Muhisn, M. Omar, M. Ahmad, and S. A. Muhisn, “Team Leader Selection by Using an Analytic Hierarchy Process (AHP) Technique,” *Journal of Software*, vol. 10, no. 10, pp. 1216–1227, 2015; doi:10.17706/jsw.10.10.1216-1227
16. L. Davis and G. Williams, “Evaluating and Selecting Simulation Software Using the Analytic Hierarchy Process,” *Integrated Manufacturing Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 23–32, 1994; doi:10.1108/09576069410050314
17. P. K. Bagchi, “Carrier selection: The Analytic Hierarchy Process,” *Logist. Transp. Rev.*, vol. 25, no. 1, p. 63, 1989.
18. K. Muralidhar, R. Santhanam, and R. L. Wilson, “Using the analytic hierarchy process for information system project selection,” *Information and Management* , vol. 18, no. 2, pp. 87–95, 1990; doi:10.1016/0378-7206(90)90055-m
19. K. M. A.-S. Al-Harbi, “Application of the AHP in project management,” *International Journal of Project Management*, vol. 19, no. 1, pp. 19–27, 2001; doi:10.1016/s0263-7863(99)00038-1
20. N. K. Krivulin, “Methods of tropical optimization in rating alternatives based on pairwise comparisons,” in *Operations Research Proceedings 2016. Operations Research Proceedings (GOR (Gesellschaft für Operations Research e.V.))*, Springer, Cham, pp. 85–91, 2018; doi:10.1007/978-3-319-55702-1_13
21. N. K. Krivulin and V. A. Ageev, “Methods of tropical optimization in multicriteria problems of raiting alternatives from pairwise comparisons,” *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 15, no. 4, pp. 472–488, 2019 (in Russian); doi:10.21638/11702/spbu10.2019.405

22. N. K. Krivulin and S. N. Sergeev, “Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 377, pp. 31–51; doi:10.1016/j.fss.2018.10.013
23. N. K. Krivulin, V. A. Ageev, and I. V. Gladkikh, “Application of methods of tropical optimization for evaluating alternatives based on pairwise comparisons,” *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 13, no. 1, pp. 27–41, 2017 (in Russian); doi:10.21638/11701/spbu10.2017.103
24. N. K. Krivulin et al., “On Solving Multicriteria Decision Making Problems Based on Pairwise Comparisons,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 27–58, 2020; doi:10.32603/2071-2340-2020-2-27-58
25. N. K. Krivulin, “Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems,” in *Proc. 12th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD)*, Zhangjiajie, China, 2015, pp. 162–167; doi: 10.1109/FSKD.2015.7381933
26. N. K. Krivulin and I. V. Gladkikh, “Computation of the consistent pairwise comparison matrix in marketing research by using methods of tropical mathematics,” *Vestnik of St Petersburg University. Management*, no. 1, pp. 3–43, 2015 (in Russian).
27. N. K. Krivulin, “Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons,” in *Proc. Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing*, Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2016, pp. 62–72; doi:10.1137/1.9781611974690.ch7
28. F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics*, Chichester, UK: Wiley, 1993.
29. V. P. Maslov and V. N. Kolokol’tsov, “Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal’nom upravlenii” [Idempotent analysis and its application in optimal control], Moscow: Fizmatlit, 1994 (in Russian).
30. J. S. Golan, *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications*, Netherlands: Springer , 2003; doi:10.1007/978-94-017-0383-3
31. B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. van der Woude, *Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics*, Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2006.
32. N. K. Krivulin, “Metody idempotentnoi algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem” [Idempotent algebra methods in modeling and analysis of complex systems], St. Petersburg, Russia: Izdatel’stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2009.
33. N. Krivulin, “Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation” *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 169, p. 109168, 2024; doi:10.1016/j.ijar.2024.109168

Received 10-06-2024, the final version — 27-06-2024.

Nikolai Krivulin, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, ✉ **nkk@math.spbu.ru**

Daria Bulgakova, 4th year Student of the Bachelor’s Degree Program, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, st086963@student.spbu.ru

Dmitriy Grigoriev, 4th year Student of the Bachelor’s Degree Program, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, st069106@student.spbu.ru

Karina Nagumanova, 4th year Student of the Bachelor’s Degree Program, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, st076933@student.spbu.ru

Alexey Prinkov, 2nd year Postgraduate, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, aprinkov@yahoo.com

Yana Salova, 4th year Student of the Bachelor’s Degree Program, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, st087259@student.spbu.ru

Arina Filatova, 4th year Student of the Bachelor’s Degree Program, the Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbGU, st087669@student.spbu.ru