

ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 20
Выпуск 2

2024
Июнь

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
ИНФОРМАТИКА
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАН В АВГУСТЕ 1946 ГОДА
ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК СПбГУ. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ» ВЫХОДИТ В СВЕТ С МАРТА 2005 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Балыкина Ю. Е., Захаров В. В.</i> Интегральная модель притока и оттока и ее приложения	120
<i>Гайдаш А. А., Гончаров Р. К., Козубов А. В., Яковлев П. В.</i> Математическая модель квантового генератора случайных чисел на основе флуктуации вакуума	135
<i>Прокаев А. Н.</i> Принцип максимума энтропии в теории принятия решений	153
<i>Zhao Ch., Parilina E. M.</i> Analysis of consensus time and winning rate in two-layer networks with hypocrisy of different structures	170
<i>Фунг Д. М., Шешин Е. П.</i> Автоэмиссионные характеристики и структура углеродсодержащих катодных материалов	193
<i>Ци Д., Буре В. М.</i> Исследование методов прогнозирования временных рядов для предсказания качества воздуха: объяснительный сравнительный анализ	206



© Санкт-Петербургский
государственный
университет, 2024

ИНФОРМАТИКА

- Баевский А. А., Аносов М. С., Панов А. Ю.* Выбор способа передачи данных при проведении исследования, направленного на повышение надежности и обеспечение безопасной эксплуатации изделий..... 220
- Ляхова У. А., Ляхов П. А.* Мультимодальная ансамблевая нейросетевая система обнаружения рака кожи на основе анализа гетерогенных дерматологических данных..... 231
- Aleksandrov A. Yu., Ruzin S. B.* Triaxial electrodynamic stabilization of a satellite via PID controller 244

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

- Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Неклассическое условие оптимальности в гибридной задаче управления гиперболическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием 255
- Samatov B. T., Akbarov A. Kh.* Differential game with a “life line” under the Grönwall constraint on controls 265
- Сачков А. В.* Схема обратной связи в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето 281
- Zhou J., Petrosian O. L., Gao H.* Dynamic decision-making under uncertainty: Bayesian learning in environmental game theory 289
- Шмыров А. С., Шмыров В. А., Шиманчук Д. В.* Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса..... 298

На журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления» можно подписаться по каталогу «Пресса России».

Подписной индекс 36429

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-71583
от 13 ноября 2017 г. (Роскомнадзор)

Учредитель: Санкт-Петербургский государственный университет

Главный редактор *Л. А. Петросян*, д-р физ.-мат. наук, проф.

Редактор *Э. А. Горелик*

Корректор *Т. В. Хорошавина*

Компьютерная верстка *А. Л. Рядковой*

Дата выхода в свет 18.04.2024.

Формат 70 x 100¹/₁₆. Усл. печ. л. 9,4. Уч.-изд. л. 9,2. Печать по заказу. Тираж 35 экз. Цена свободная

Адрес редакции: 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Адрес Издательства: 199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11.

Тел./факс: 328-44-22

Типография Издательства СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

CONTENTS

APPLIED MATHEMATICS

<i>Balykina Yu. E., Zakharov V. V.</i> Integral inflow and outflow model and its applications	120
<i>Gaidash A. A., Goncharov R. K., Kozubov A. V., Yakovlev P. V.</i> Mathematical model of random number generator based on vacuum fluctuations	135
<i>Prokaev A. N.</i> The maximum entropy principle in decision theory	153
<i>Zhao Ch., Parilina E. M.</i> Analysis of consensus time and winning rate in two-layer networks with hypocrisy of different structures	170
<i>Phung D. M., Sheshin E. P.</i> Field emission characteristics and structure of carbon-containing cathode materials	193
<i>Qi D., Bure V. M.</i> Explanatory comparative analysis of time series forecasting algorithms for air quality prediction	206

COMPUTER SCIENCE

<i>Baevskiy A. A., Anosov M. S., Panov A. Y.</i> The choice of the data transmission method during the study of improving the reliability and ensuring safe operation of products	220
<i>Lyakhova U. A., Lyakhov P. A.</i> Multimodal ensemble neural network system for skin cancer detection on heterogeneous dermatological data	231
<i>Aleksandrov A. Yu., Ruzin S. B.</i> Triaxial electrodynamic stabilization of a satellite via PID controller	244

CONTROL PROCESSES

<i>Arguchintsev A. V., Poplevko V. P.</i> The non-classical optimality condition in the hybrid control problem of hyperbolic and ordinary differential equations with delay	255
---	-----

<i>Samatov B. T., Akbarov A. Kh.</i> Differential game with a “life line” under the Grönwall constraint on controls.....	265
<i>Sachkov A. V.</i> Feedback loop scheme as related to axiomatic approach to Pareto set reduction.....	281
<i>Zhou J., Petrosian O. L., Gao H.</i> Dynamic decision-making under uncertainty: Bayesian learning in environmental game theory	289
<i>Shmyrov A. S., Shmyrov V. A., Shymanchuk D. V.</i> Controlling the orbital motion of the spacecraft near the libration point by changing the solar sail reflectivity.....	298

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 004.94, 616-036.22
MSC 92D30, 93A30, 68T05

Интегральная модель притока и оттока и ее приложения*

Ю. Е. Балыкина^{1,2}, В. В. Захаров¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова,
Российская Федерация, 198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7

Для цитирования: Балыкина Ю. Е., Захаров В. В. Интегральная модель притока и оттока и ее приложения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 120–134.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.201>

Описана общая интегральная модель притока и оттока динамической системы, параметры которой имеют стохастический характер. Для такого типа динамических систем формулируется общий принцип динамического баланса, а также вводятся понятия интервальной динамической сбалансированности интегральных объемов притока и оттока и характеристики динамического баланса. Класс стохастических динамических процессов и систем притока и оттока, удовлетворяющих принципу динамического баланса, достаточно широк (распространение эпидемий вирусов и динамика заболеваемости в медицине, процессы изменения численности и структуры населения в демографии, динамика спроса-предложения в экономике и т. д.). Возможности применения предлагаемой модели для построения кратко- и долгосрочных прогнозов демонстрируются на примерах распространения эпидемии COVID-19 в Москве и Санкт-Петербурге, а также прогнозирования роста населения Земли и отдельных стран. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по построению ретроспективных прогнозов состояния динамических систем с использованием метода динамических трендов стохастических параметров интегральной модели и классического метода ARIMA. Проводится сравнительный анализ точности прогнозирования.

Ключевые слова: динамические системы притока и оттока, принцип динамического баланса, характеристика динамического баланса, математическое моделирование, прогнозирование.

1. Введение. Класс стохастических динамических процессов и систем притока и оттока достаточно широк. К нему, например, относятся многочисленные процес-

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-10049 (<https://rscf.ru/project/23-21-10049>) и гранта Санкт-Петербургского научного фонда № 23-21-10049.
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

сы в области здравоохранения, такие как эволюция вирусных эпидемий и заболева- ний невирусного характера, в области демографии — процессы роста численности и изменения структуры населения стран и Земли в целом, в экономике — процессы движения капиталов.

Пусть динамическая система X в момент времени $t = t_0 \geq 0$ состоит из $X(t_0) \geq 0$ элементов определенного типа. Предположим, что в каждый момент времени $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_0 + T$ ($1 \leq T < \infty$) задано число $x_{\text{inf}}(t) > 0$ новых элементов того же типа, поступающих в систему, и число $x_{\text{of}}(t) > 0$ элементов, покидающих систему, $x_{\text{inf}}(t_0) = x_{\text{of}}(t_0) = 0$. Временные ряды $x_{\text{inf}}(t)$ и $x_{\text{of}}(t)$ будем соответственно называть притоком и оттоком. Рассмотрим дискретную модель динамики системы $X(t)$ при наличии притока $x_{\text{inf}}(t)$ и оттока $x_{\text{of}}(t)$. Очевидно, что состояние системы можно описать дискретным уравнением

$$X(t) = X(t-1) + x_{\text{inf}}(t) - x_{\text{of}}(t). \quad (1)$$

Если приток и отток представляют собой недетерминированные динамические процессы, то эволюция системы $X(t)$ есть случайный процесс, определяемый динамикой временных рядов притока и оттока, а сама система (1) в общем случае имеет стохастический характер.

Прогнозирование динамики такой системы не представляет труда, если значения притока и оттока $x_{\text{inf}}(t)$ и $x_{\text{of}}(t)$ являются детерминированными функциями времени. Для анализа и прогнозирования систем, для которых указанные временные ряды стационарные, существует много статистических методов, позволяющих генерировать прогнозы достаточно высокой точности. Однако если условие стационарности не выполняется и/или функции распределения неизвестны, то принятие решений о построении прогнозов динамики системы будет связано со значительной неопределенностью.

К наиболее известным и часто используемым моделям прогнозирования временных рядов относится модель $\text{ARIMA}(p, d, q)$. Аббревиатура ARIMA носит описательный характер и отражает ключевые аспекты самой модели (AutoRegressive Integrated Moving Average, интегрированная модель авторегрессии — скользящего среднего). AR отвечает за авторегрессионную часть, т. е. за порядок запаздывания (p), I — за степень разности (d), MA — за размер окна скользящего среднего, также называемого порядком скользящего среднего (q). Получается, что разности временного ряда порядка d подчиняются модели $\text{ARMA}(p, q)$.

В общем виде модель $\text{ARIMA}(p, d, q)$ можно представить следующим образом:

$$\Delta^d X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i \Delta^d X_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

где a_i, b_j, c — параметры модели; ε_t — стационарный временной ряд; Δ^d — оператор разности временного ряда порядка d (последовательное взятие d раз разностей первого порядка); X_t соответствует значению $X(t)$.

Автокорреляционные методы регрессионного анализа достаточно широко применялись для прогнозирования, например, динамики временного ряда притока новых случаев заболевания во время пандемии COVID-19. В статьях [1–4] рассматривается использование модели ARIMA при построении прогнозов распространения пандемии в ряде стран мира. Следует отметить, что эта модель по сравнению с другими инструментами дает более точные прогнозы, однако, хотя модели временных рядов

и являются популярным инструментом прогнозирования, их применение для оценки распространения новых инфекций не всегда позволяет построить прогнозы высокой степени точности.

Модели анализа временных рядов широко внедрены для прогнозирования тенденций, структурных сдвигов, циклов и ненаблюдаемых значений и доказали свою полезность в области медицины [5, 6]. Было показано, что модель авторегрессионно-скользящего среднего обладает многообещающей точностью для прогнозирования динамики различных инфекционных заболеваний [7, 8]. При этом исследователи отмечают, что ARIMA способна давать качественные результаты на краткосрочном горизонте прогнозирования [9].

При изучении COVID-19 с помощью модели ARIMA проводилось прогнозирование количества новых случаев заболевания, смертей и выздоровлений на основе ежедневных данных из разных стран для оценки будущей динамики эпидемии [10–13]. В течение первой волны эпидемии COVID-19 было несколько попыток спрогнозировать дальнейшее развитие эпидемической ситуации, благодаря моделям ARIMA. Например, в работе [14] модель ARIMA применялась для краткосрочного прогноза общего количества новых случаев заболевания на основе ежедневных данных ООН с 21 января по 16 марта 2020 г. Для оценки построенных моделей использовались информационный критерий Акаике (AIC) и тест Лjung–Бокса. Чтобы оценить достоверность предложенной модели, были рассчитаны средняя абсолютная процентная ошибка (MAPE) и среднеквадратическая ошибка (RMSE) между наблюдаемыми и спрогнозированными значениями числа новых случаев COVID-19. Авторы [14] предложили использовать модель с параметрами ARIMA(1, 2, 1), при этом горизонт прогнозирования составлял 5 дней. В [15] была проанализирована динамика развития эпидемии COVID-19 в Южной Африке. С помощью модели ARIMA(11, 1, 9) был осуществлен 15-дневный прогноз новых случаев заболевания COVID-19, обучающими историческими данными служили сведения за период с 7 марта 2020 г. по 3 августа 2021 г.

2. Интегральная модель притока и оттока. Рассмотрим суммы членов временных рядов притока и оттока до момента времени $t \leq T$.

Определение 1. Будем называть $X_{\text{inf}}(t)$ интегральным значением притока в систему X с момента времени $t_0 + 1$ до момента времени $t \leq T$ сумму членов временного ряда притока:

$$X_{\text{inf}}(t) = \sum_{\tau=t_0}^t x_{\text{inf}}(\tau).$$

Определение 2. Будем называть $X_{\text{of}}(t)$ интегральным значением оттока из системы X с момента времени $t_0 + 1$ до момента времени $t \leq T$ сумму членов временного ряда оттока:

$$X_{\text{of}}(t) = \sum_{\tau=t_0}^t x_{\text{of}}(\tau).$$

Следует заметить, что полученные таким образом временные ряды $X_{\text{inf}}(t)$ и $X_{\text{of}}(t)$ зависят от всех членов временных рядов $x_{\text{inf}}(\tau)$ и $x_{\text{of}}(\tau)$, $t_0 + 1 \leq \tau \leq t$ соответственно.

Уравнение (1) с учетом введенных ограничений можно преобразовать к виду

$$X(t) = X(t_0) + X_{\text{inf}}(t) - X_{\text{of}}(t).$$

Введем также для любого $t > t_0 + 1$ следующие обозначения:

$$r_{\text{inf}}(t) = 100 \cdot \frac{X_{\text{inf}}(t) - X_{\text{inf}}(t-1)}{X_{\text{inf}}(t-1)}, \quad (2)$$

$$r_{\text{of}}(t) = 100 \cdot \frac{X_{\text{of}}(t) - X_{\text{of}}(t-1)}{X_{\text{of}}(t-1)}. \quad (3)$$

Величина $r_{\text{inf}}(t)$ называется процентным приростом интегрального значения притока в момент времени t , а $r_{\text{of}}(t)$ — процентным приростом интегрального значения оттока.

Рассмотрим систему дискретных уравнений переменных $X(t)$, $X_{\text{inf}}(t)$ и $X_{\text{of}}(t)$ с недетерминированными параметрами $r_{\text{inf}}(t)$ и $r_{\text{of}}(t)$ (см. (2) и (3)):

$$X(t) = X(t_0) + X_{\text{inf}}(t) - X_{\text{of}}(t), \quad (4)$$

$$X_{\text{inf}}(t) = \left(1 + \frac{r_{\text{inf}}(t)}{100}\right) X_{\text{inf}}(t-1), \quad (5)$$

$$X_{\text{of}}(t) = \left(1 + \frac{r_{\text{of}}(t)}{100}\right) X_{\text{of}}(t-1) \quad (6)$$

при $X_{\text{inf}}(t_0) = X_{\text{of}}(t_0) = 0$, $t > t_0 + 1$. Систему (4)–(6) будем называть интегральной моделью притока и оттока системы X .

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $X(t_0) = 0$, $x_{\text{inf}}(t_0) = x_{\text{of}}(t_0) = 0$, $x_{\text{inf}}(t) > 0$ и $x_{\text{of}}(t) > 0$ для всех $t > t_0$. Для того чтобы множество динамической системы X , состоянием которой удовлетворяет системе (4)–(6), было не пусто при $t > t_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $t > t_0$ было выполнено неравенство

$$X_{\text{inf}}(t) > X_{\text{of}}(t). \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество системы X не является пустым при $t > t_0$, это означает, что $X(t) > 0$. Тогда, поскольку $X(t_0) = 0$, с учетом системы (4)–(6) получаем справедливость неравенства (7) для $t > t_0$.

Достаточность. Пусть для всех $t > t_0$ неравенство (7) выполняется. Тогда $X(t) > 0$ при любом значении $X(t_0) \geq 0$. То есть множество элементов системы X не является пустым при любом $t > t_0$. \square

Рассмотрим для всех значений t , таких, что $t_0 + 1 \leq t \leq t_0 + T$, задачу целочисленного линейного программирования

$$\min_{t_0+1 \leq \tau \leq t} \tau \quad (8)$$

при условии, что

$$X_{\text{inf}}(\tau) \geq X_{\text{of}}(\tau). \quad (9)$$

Обозначим через $\tau(t)$ решение задачи (8), (9).

Справедлива следующая теорема.

Теорема (принцип динамического баланса систем притока и оттока). Пусть для любых целых значений t , таких, что $t_0 + 1 \leq t \leq t_0 + T$, выполнено неравенство $X_{\text{inf}}(t) > X_{\text{of}}(t)$, и $\tau(t)$ есть решение задачи целочисленного программирования (8), (9). Тогда для любых значений t , таких, что $t_0 + 1 \leq t \leq t_0 + T$, имеет место неравенство

$$X_{\text{inf}}(\tau(t)) \geq X_{\text{of}}(t) \geq X_{\text{inf}}(\tau(t) - 1). \quad (10)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в [16].

Замечание. В соответствии с принципом динамического баланса систем притока и оттока временные ряды $X_{\text{inf}}(t)$ и $X_{\text{of}}(t)$ удовлетворяют условию (10), которое содержательно означает, что величины интегральных объемов оттока в момент времени t находятся между последовательными значениями интегральных объемов притока в моменты времени $\tau(t) - 1$ и $\tau(t)$. Такое свойство будем называть интервальной динамической сбалансированностью притока и оттока.

Определение 3. Пусть $\tau(t)$ есть решение задачи (8), (9). Величина $\theta(t) = t - \tau(t)$ называется характеристикой динамического баланса интегральных объемов притока и оттока в системе X .

3. Применение интегральной модели притока и оттока.

3.1. Прогнозирование динамики эпидемий новых вирусов. Наиболее популярной моделью для описания процессов распространения инфекционных заболеваний в некоторой популяции является трехкамерная модель SIR (Susceptible—Infected—Removed). В текущий момент времени каждый человек из этой популяции принадлежит одной из трех групп: восприимчивые к вирусу (Susceptible), инфицированные (Infected) и группа, для которых болезнь завершилась (выздоровевшие или умершие (Removed)). В группу восприимчивых входят все люди, которые еще не подверглись заражению инфекцией. По мере распространения вируса часть из них переходят в группу инфицированных, а затем в группу выбывших (выздоровевших или умерших). Предполагается, что полное число людей в популяции равно сумме численностей этих трех групп. Впервые модель была в общем виде описана в работе У. Кермака и А. Мак-Кендрика в 1927 г. [17], однако наибольший интерес исследователей был в дальнейшем сосредоточен на частном случае этой модели в виде системы из трех дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [18].

Следует заметить, что публикуемые статистические данные о заболеваемости COVID-19 содержат ежедневное число новых случаев заболевания, ежедневное количество выздоровевших и умерших, общее количество заболевших и общее количество выздоровевших и умерших с начала эпидемии. На основании этих данных можно вычислить текущее число болеющих людей (активных случаев болезни). Фактически статистические данные содержат значения временных рядов притока (новых случаев заболевания) $x_{\text{inf}}(t)$ и оттока (общее число выздоровевших и умерших) $x_{\text{of}}(t)$ в системе, текущее число элементов в которой $X(t)$ равно численности группы инфицированных (болеющих людей) в момент времени t .

Вместо трехкамерной модели SIR рассмотрим модель, описываемую при $t > t_0$ системой дискретных уравнений следующего вида:

$$I(t) = C(t) - R(t), \quad (11)$$

$$C(t) = \left(1 + \frac{r_{\text{inf}}(t)}{100}\right) C(t-1), \quad (12)$$

$$R(t) = \left(1 + \frac{r_{\text{of}}(t)}{100}\right) R(t-1), \quad (13)$$

$$I(t_0) = C(t_0) = R(t_0) = 0.$$

В этой модели переменная $C(t)$ характеризует интегральный приток (общее количество) новых случаев заболевания (Confirmed Cases), а переменная $R(t)$ — интегральный отток суммарного количества выздоровевших и умерших (Removed), начиная с момента времени $t_0 + 1$ до момента времени t (включительно):

$$C(t) = \sum_{t=t_0+1}^t x_{\text{inf}}(t),$$

$$R(t) = \sum_{t=t_0+1}^t x_{\text{of}}(t).$$

Параметрами модели являются процентный прирост интегрального объема притока (общего количества выявленных случаев заболевания) $r_{\text{inf}}(t)$ и процентный прирост интегрального объема оттока (общего количества выздоровевших и умерших пациентов) $r_{\text{of}}(t)$, меняющиеся во времени.

Будем называть модель динамики заболевания (11)–(13) интегральной моделью притока и оттока болеющих людей.

3.2. Результаты вычислительных экспериментов. Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов по построению ретроспективных прогнозов состояния динамических систем с использованием прогнозов линейных по времени трендов стохастических параметров интегральной модели и классического метода ARIMA.

Приведем сначала пример применения интегральной модели притока и оттока болеющих людей для прогнозирования динамики заболевания COVID-19 в Москве и Санкт-Петербурге в период первой волны эпидемии при прогнозировании динамики процентных приростов интегральных объемов притока с помощью линейных трендов [16] этих параметров.

Таблица 1. Ретроспективные прогнозы количества болеющих людей в Москве в период первой волны эпидемии COVID-19 в 2020 г. при использовании линейных трендов процентных приростов интегральных объемов притока и оттока

Дата	ИП, чел.	Прирост ИП, %	ИО, чел.	Прирост ИО, %	$I(t)$, чел.	$I(t)$, чел. (прогноз)	Точность прогноза, %
1	2	3	4	5	6	7	8
14 апреля	13 002	12.93	1 111	20.89	11 891		
15 апреля	14 776	13.64	1 311	18.00	13 465		
16 апреля	16 146	9.27	1 507	14.95	14 639		
17 апреля	18 105	12.13	1 644	9.09	16 461		
18 апреля	20 754	14.63	1 827	11.13	18 927		
19 апреля	24 324	17.20	1 939	6.13	22 385		
20 апреля	26 350	8.33	2 042	5.31	24 308		
21 апреля	29 433	11.70	2 290	12.14	27 143		
22 апреля	31 981	8.66	2 528	10.39	29 453		
23 апреля	33 940	6.13	2 736	8.23	31 204		
24 апреля	36 897	8.71	3 060	11.84	33 837		
25 апреля	39 509	7.08	3 413	11.54	36 096		
26 апреля	42 480	7.52	3 579	4.86	38 901		
27 апреля	45 351	6.76	3 959	10.62	41 392		
28 апреля	48 426	6.78	4 609	16.42	43 817		
29 апреля	50 646	4.58	5 156	11.87	45 490		
30 апреля	53 739	6.11	5 746	11.44	47 993		
1 мая	57 300	6.63	6 424	11.80	50 876	50 876	100.00
2 мая	62 658	9.35	7 069	10.04	55 589	53 813	96.81
3 мая	68 606	9.49	7 758	9.75	60 848	56 793	93.34
4 мая	74 401	8.45	8 337	7.46	66 064	59 802	90.52
5 мая	80 115	7.68	8 686	4.19	71 429	62 827	87.96

1	2	3	4	5	6	7	8
6 мая	85 973	7.31	9 324	7.35	76 649	65 852	85.91
7 мая	92 676	7.80	10 132	8.67	82 544	68 861	83.42
8 мая	98 522	6.31	11 215	10.69	87 307	71 835	82.28
9 мая	104 189	5.75	13 789	22.95	90 400	74 756	82.69
10 мая	109 740	5.33	14 858	7.75	94 882	77 604	81.79
11 мая	115 909	5.62	18 946	27.51	96 963	80 358	82.87
12 мая	121 301	4.65	20 821	9.90	100 480	MAPE = 13.24 %	
13 мая	126 004	3.88	22 738	9.21	103 266		
14 мая	130 716	3.74	24 617	8.26	106 099		
15 мая	135 464	3.63	25 920	5.29	109 544	109 544	100.00
16 мая	138 969	2.59	27 464	5.96	111 505	112 873	98.77
17 мая	142 824	2.77	28 993	5.57	113 831	116 069	98.03
18 мая	146 062	2.27	30 493	5.17	115 569	119 114	96.93
19 мая	149 607	2.43	33 147	8.70	116 460	121 991	95.25
20 мая	152 306	1.80	38 662	16.64	113 644	124 683	90.29
21 мая	155 219	1.91	42 476	9.86	112 743	127 175	87.20
22 мая	158 207	1.93	45 449	7.00	112 758	129 450	85.20
23 мая	161 397	2.02	49 347	8.58	112 050	131 495	82.65
24 мая	163 913	1.56	51 833	5.04	112 080	133 298	81.07
25 мая	166 473	1.56	55 620	7.31	110 853	134 845	78.36
26 мая	169 303	1.70	63 729	14.58	105 574	MAPE = 10.63 %	
27 мая	171 443	1.26	69 641	9.28	101 802		
28 мая	173 497	1.20	73 505	5.55	99 992		
29 мая	175 829	1.34	77 055	4.83	98 774		
30 мая	178 196	1.35	80 732	4.77	97 464		
31 мая	180 791	1.46	82 656	2.38	98 135		
1 июня	183 088	1.27	84 792	2.58	98 296		
2 июня	185 374	1.25	90 893	7.20	94 481		
3 июня	187 216	0.99	94 339	3.79	92 877		
4 июня	189 214	1.07	97 464	3.31	91 750	91 750	100.00
5 июня	191 069	0.98	100 164	2.77	90 905	90 582	99.64
6 июня	193 061	1.04	103 295	3.13	89 766	89 379	99.57
7 июня	195 017	1.01	105 633	2.26	89 384	88 147	98.62
8 июня	197 018	1.03	107 317	1.59	89 701	86 892	96.87
9 июня	198 590	0.80	112 766	5.08	85 824	85 620	99.76
10 июня	199 785	0.60	116 618	3.42	83 167	84 338	98.59
11 июня	201 221	0.72	118 907	1.96	82 314	83 053	99.10
12 июня	202 935	0.85	121 211	1.94	81 724	81 771	99.94
13 июня	204 428	0.74	122 789	1.30	81 639	80 500	98.60
14 июня	205 905	0.72	124 972	1.78	80 933	79 244	97.91
15 июня	207 264	0.66	126 574	1.28	80 690	78 013	96.68
16 июня	208 680	0.68	129 500	2.31	79 180	76 811	97.01
17 июня	209 745	0.51	131 819	1.79	77 926	75 645	97.07
18 июня	210 785	0.50	133 914	1.59	76 871	74 523	96.94
19 июня	211 921	0.54	135 965	1.53	75 956	73 449	96.70
20 июня	212 978	0.50	138 114	1.58	74 864	72 429	96.75
21 июня	213 946	0.45	139 153	0.75	74 793	71 470	95.56
22 июня	215 014	0.50	140 287	0.81	74 727	70 576	94.44
23 июня	216 095	0.50	142 891	1.86	73 204	69 752	95.28
24 июня	216 906	0.38	144 925	1.42	71 981	69 003	95.86
25 июня	217 791	0.41	145 863	0.65	71 928	68 333	95.00
26 июня	218 604	0.37	147 885	1.39	70 719	67 746	95.80
27 июня	219 354	0.34	149 757	1.27	69 597	67 244	96.62
28 июня	220 071	0.33	150 833	0.72	69 238	66 831	96.52
29 июня	220 853	0.36	151 863	0.68	68 990	66 508	96.40
30 июня	221 598	0.34	154 193	1.53	67 405	66 278	98.33
							MAPE = 2.71 %

В табл. 1 в столбцах 2–5 находятся фактические данные об интегральных объемах притока (ИП) и оттока (ИО), значениях их процентных приростов и количестве активных случаев в Москве, полученные из ежедневных отчетов Коммуникационного центра Правительства РФ по ситуации с коронавирусом, размещенных в открытом доступе на портале стопкоронавирус.рф. В столбце 7 представлены ретроспективные прогнозы количества болеющих людей, построенные при использовании линейных трендов процентных приростов интегральных объемов притока и оттока на основании статистики, предшествующей датам построения прогнозов 1 мая, 15 мая и 4 июня 2020 г., в столбце 8 — ежедневные абсолютные значения точности полученных прогнозов, а также MAPE — средняя абсолютная ошибка в процентах для соответствующего горизонта прогнозирования.

В табл. 2 приведены аналогичные данные для Санкт-Петербурга. Однако прогнозы количества активных случаев болезни (см. столбец 7) получены при использовании для прогнозирования процентных приростов притока и оттока модели ARIMA. Для этого были построены модели ARIMA отдельно для прогнозирования динамики изменения интегральных притока и оттока. Гиперпараметры моделей обновлялись при рассмотрении различных интервалов для моделирования. Так, для прогнозирования прироста интегрального притока в начале мая 2020 г. применялась модель ARIMA(7, 1, 7), для интервала прогнозирования с 1 по 30 июня 2020 г. — модель ARIMA(2, 1, 1). Для каждого горизонта прогнозирования также приведены точность прогноза и показатель MAPE.

Таблица 2. Ретроспективные прогнозы количества болеющих людей в Санкт-Петербурге в период первой волны эпидемии COVID-19 в 2020 г. при использовании ARIMA

Дата	ИП, чел.	Прирост ИП, %	ИО, чел.	Прирост ИО, %	$I(t)$, чел.	$I(t)$, чел. (прогноз)	Точность прогноза, %
1	2	3	4	5	6	7	8
14 апреля	799	17.85	82	0.00	717		
15 апреля	929	16.27	100	21.95	829		
16 апреля	1083	16.58	117	17.00	966		
17 апреля	1507	39.15	138	17.95	1369		
18 апреля	1646	9.22	240	73.91	1406		
19 апреля	1760	6.93	247	2.92	1513		
20 апреля	1846	4.89	249	0.81	1597		
21 апреля	1973	6.88	291	16.87	1682		
22 апреля	2267	14.90	341	17.18	1926		
23 апреля	2458	8.43	385	12.90	2073		
24 апреля	2711	10.29	431	11.95	2280		
25 апреля	2926	7.93	483	12.06	2443		
26 апреля	3077	5.16	516	6.83	2561		
27 апреля	3238	5.23	516	0.00	2722		
28 апреля	3436	6.11	571	10.66	2865		
29 апреля	3726	8.44	737	29.07	2989		
30 апреля	4062	9.02	808	9.63	3254		
1 мая	4411	8.59	812	0.50	3599	3599	100.00
2 мая	4734	7.32	910	12.07	3824	3693	96.59
3 мая	5029	6.23	1095	20.33	3934	3858	98.07
4 мая	5346	6.30	1234	12.69	4112	4004	97.37
5 мая	5572	4.23	1505	21.96	4067	4138	98.25
6 мая	5 884	5.60	1572	4.45	4312	4265	98.91
7 мая	6190	5.20	1596	1.53	4594	4387	95.50
8 мая	6565	6.06	1645	3.07	4920	4506	91.59
9 мая	6990	6.47	1715	4.26	5275	4623	87.64

Окончание таблицы 2

1	2	3	4	5	6	7	8	
10 мая	7404	5.92	1727	0.70	5677	4739	83.47	
11 мая	7711	4.15	1737	0.58	5974	4854	81.25	
12 мая	8050	4.40	1842	6.04	6208	MAPE = 7 %		
13 мая	8485	5.40	1911	3.75	6574			
14 мая	8945	5.42	1968	2.98	6977			
15 мая	9486	6.05	2079	5.64	7407	7407	100.00	
16 мая	10 011	5.53	2189	5.29	7822	7710	98.57	
17 мая	10 462	4.51	2260	3.24	8202	8075	98.45	
18 мая	10 887	4.06	2299	1.73	8588	8437	98.24	
19 мая	11 340	4.16	2367	2.96	8973	8796	98.03	
20 мая	11 795	4.01	2579	8.96	9216	9152	99.31	
21 мая	12 203	3.46	2765	7.21	9438	9506	99.28	
22 мая	12 592	3.19	2966	7.27	9626	9856	97.61	
23 мая	12 955	2.88	3237	9.14	9718	10 203	95.01	
24 мая	13 339	2.96	3585	10.75	9754	10 548	91.86	
25 мая	13 713	2.80	3728	3.99	9985	10 889	90.95	
26 мая	14 076	2.65	3894	4.45	10 182	MAPE = 5 %		
27 мая	14 463	2.75	4616	18.54	9847			
28 мая	14 846	2.65	4950	7.24	9896			
29 мая	15 215	2.49	5291	6.89	9924			
30 мая	15 580	2.40	5564	5.16	10 016			
31 мая	15 949	2.37	5884	5.75	10 065			
1 июня	16 313	2.28	5961	1.31	10 352			
2 июня	16 689	2.30	6231	4.53	10 458			
3 июня	17 069	2.28	6571	5.46	10 498			
4 июня	17 444	2.20	6959	5.90	10 485	10 485	100.00	
5 июня	17 822	2.17	7367	5.86	10 455	10 709	97.57	
6 июня	18 169	1.95	7808	5.99	10 361	10 816	95.61	
7 июня	18 509	1.87	8136	4.20	10 373	10 924	94.68	
8 июня	18 835	1.76	8307	2.10	10 528	11 035	95.18	
9 июня	19 153	1.69	8534	2.73	10 619	11 148	95.02	
10 июня	19 466	1.63	9003	5.50	10 463	11 262	92.36	
11 июня	19 769	1.56	9384	4.23	10 385	11 379	90.43	
12 июня	20 043	1.39	9837	4.83	10 206	11 497	87.35	
13 июня	20 305	1.31	10 130	2.98	10 175	11 616	85.83	
14 июня	20 561	1.26	10 274	1.42	10 287	11 738	85.90	
15 июня	20 813	1.23	10 374	0.97	10 439	11 861	86.38	
16 июня	21 047	1.12	10 660	2.76	10 387	11 986	84.61	
17 июня	21 275	1.08	11 414	7.07	9861	12 112	77.18	
18 июня	21 506	1.09	12 080	5.83	9426	12 239	70.15	
19 июня	21 734	1.06	12 964	7.32	8770	12 369	58.97	
20 июня	21 966	1.07	13 779	6.29	8187	12 499	47.33	
21 июня	22 195	1.04	14 303	3.80	7892	12 631	39.95	
22 июня	22 412	0.98	14 516	1.49	7896	12 765	38.34	
23 июня	22 632	0.98	14 772	1.76	7860	12 899	35.89	
24 июня	22 850	0.96	15 453	4.61	7397	13 035	23.78	
25 июня	23 071	0.97	16 061	3.93	7010	13 172	12.09	
26 июня	23 294	0.97	16 503	2.75	6791	13 311	4.00	
27 июня	23 518	0.96	17 276	4.68	6242	13 450	0.00	
28 июня	23 735	0.92	17 895	3.58	5840	13 591	0.00	
29 июня	23 954	0.92	18 161	1.49	5793	13 732	0.00	
30 июня	24 207	1.06	18 446	1.57	5761	13 875	0.00	
							MAPE = 45 %	

На рисунке представлены результаты моделирования для Москвы и Санкт-Петербурга.

При использовании краткосрочных прогнозов линейных трендов процентных приростов ошибка MAPE при оценке будущего количества болеющих людей для Москвы в периоды 1–11 и 15–20 мая 2020 г. первой волны составила 13.24 и 10.63 % со-

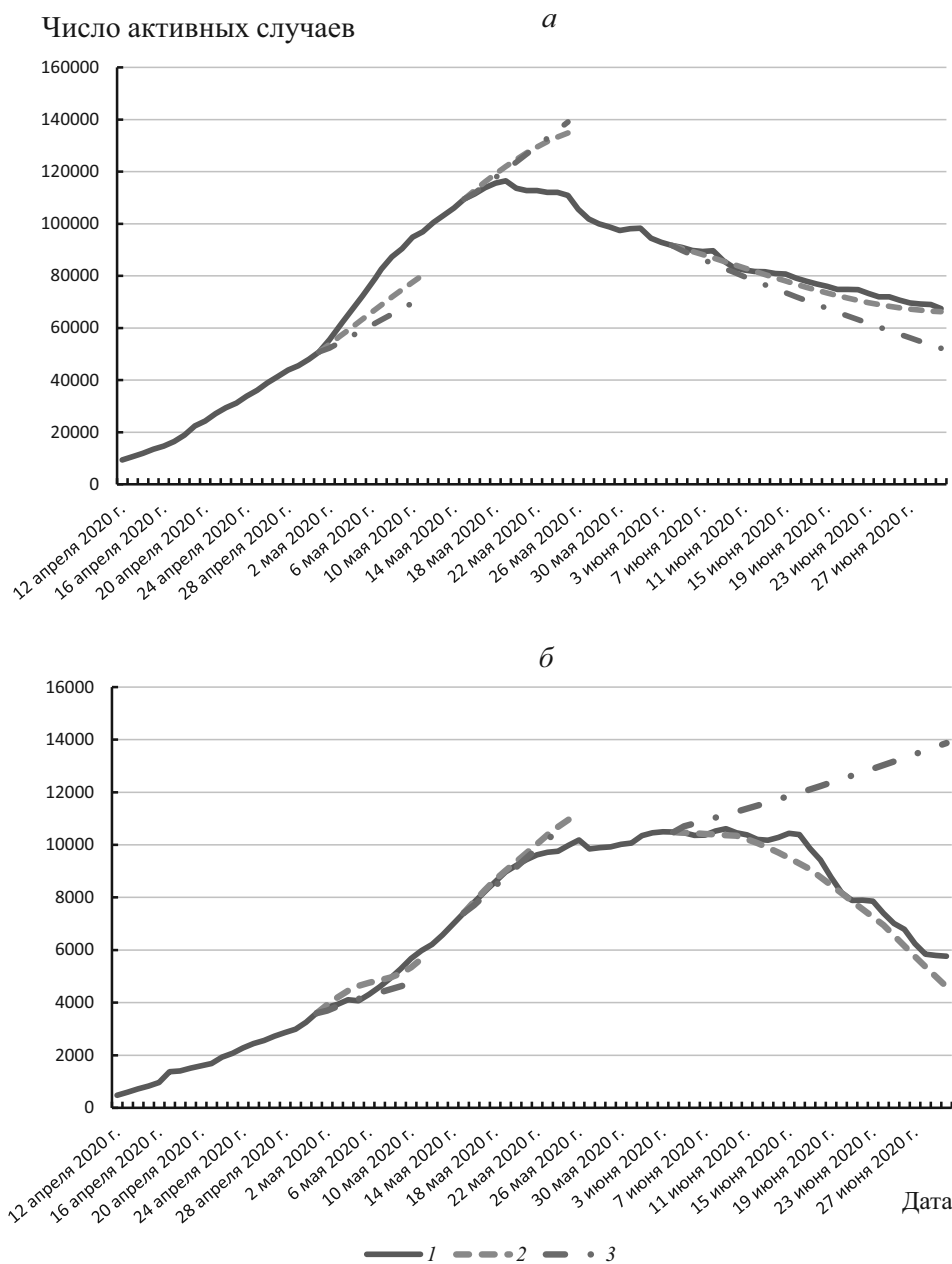


Рис. 1. Фактические и расчетные траектории изменения числа активных случаев заболевания COVID-19 в Москве (а) и Санкт-Петербурге (б) на рассматриваемых интервалах прогнозирования (2020 г.)
 Количество активных случаев: 1 — фактическое, 2 — прогноз с помощью линейных трендов, 3 — прогноз, модель ARIMA.

ответственно. Показатели для модели ARIMA были равны 18 и 10 % соответственно. При увеличении горизонта прогнозирования до 27 дней (период с 4 по 30 июня 2020 г.)

прогнозы линейных трендов показали более высокие результаты — ошибка MAPE составила 2.7 % против 10 % при применении модели ARIMA. Схожие результаты были получены и при рассмотрении ситуации в Санкт-Петербурге. Ошибка краткосрочных прогнозов при оценке с помощью линейных трендов не превышала 5.6 %, а модели ARIMA — не более 7 %. В случае более далекого горизонта прогнозирования (27 дней) ошибка модели ARIMA возрастала до 45 %, в то время как при использовании модели оценки линейных трендов процентных приростов MAPE = 3.6 %.

Таким образом, следует отметить, что и для Москвы, и для Санкт-Петербурга при коротких горизонтах прогнозирования как модель притока и оттока, так и модель ARIMA показывали схожие результаты. При этом при увеличении интервала прогнозирования ошибка модели ARIMA начинала нарастать, а модель оценки линейных трендов стохастических параметров интегральной модели притока и оттока демонстрировала значительно более высокую точность.

3.3. Прогнозирование динамики численности населения. Для прогнозирования численности населения Земли и отдельных стран построим интегральную модель динамики численности населения. Временные ряды ежегодных значений количества родившихся детей $B(t)$ и умерших людей $D(t)$, формирующих приток и отток в систему народонаселения Земли, содержатся в базе данных ООН [19]. При построении модели следует дополнительно учесть отток населения за счет чистой миграции $NM(t)$. Систему народонаселения страны обозначим N , численность ее элементов — $N(t)$. Приток в систему N обеспечивает годовая рождаемость $B(t)$, отток из системы $DNM(t)$ равен $D(t) + NM(t)$.

Тогда система дискретных уравнений, описывающих динамику численности населения $N(t)$, будет иметь следующий вид:

$$N(t) = N(t_0) + B_{\text{int}}(t) - DNM_{\text{int}}(t), \quad (14)$$

$$B_{\text{int}}(t) = \left(1 + \frac{r_{\text{inf}}(t)}{100}\right) B_{\text{int}}(t-1), \quad (15)$$

$$DNM_{\text{int}}(t) = \left(1 + \frac{r_{\text{of}}(t)}{100}\right) DNM_{\text{int}}(t-1), \quad (16)$$

где

$$B_{\text{int}}(t) = \sum_{t_0+1}^t B(t),$$

$$DNM_{\text{int}}(t) = \sum_{t_0+1}^t DNM(t).$$

Результаты моделирования и прогнозирования динамики численности населения Земли в целом представлены в статье [16], а численности населения двух стран Западной Африки — в [20]. Важными особенностями полученных результатов применения модели (14)–(16) при прогнозировании численности населения Земли и отдельно взятых стран являются достаточно высокая точность ретроспективного прогнозирования и достаточно хорошо предсказуемая будущая динамика характеристики динамического баланса рассмотренных демографических процессов. Следует отметить, что в процессе вычислительных экспериментов по ретроспективному прогнозированию интегральных объемов притока и оттока значения характеристики динамического баланса, рассчитанные на основе полученных прогнозов, практически полностью совпадают с фактическими.

4. Заключение. Описанная в работе интегральная модель притока и оттока динамической системы может быть использована при прогнозировании динамики достаточно широкого класса процессов со стохастическими параметрами. Сформулированный общий принцип динамического баланса систем притока и оттока, а также наличие у системы свойства интервальной динамической сбалансированности интегральных объемов притока и оттока вместе со свойством монотонного убывания значений процентных приростов этих объемов позволяют обеспечить высокую точность прогнозирования динамики таких систем на достаточно продолжительных временных горизонтах.

Приведенные результаты ретроспективного прогнозирования распространения эпидемии COVID-19 на примере мегаполисов, к каким относятся Москва и Санкт-Петербург, могут быть положены в основу создания аналитической системы для обеспечения мероприятий органов здравоохранения по борьбе с эпидемиями как на общенациональном, так и на региональном уровне. Применение разработанной методики построения линейных трендов значений процентных приростов интегральных объемов притока и оттока вместе с моделью ARIMA дает возможность получения достаточно высокой точности будущей динамики основных переменных рассматриваемых процессов. Однако, как показали проведенные эксперименты, использование линейных трендов имеет существенные преимущества в точности прогнозирования на продолжительных горизонтах времени. Эта методика для построения прогнозов динамики численности населения Земли, ее стран и регионов также хорошо зарекомендовала себя в процессе проведения численных экспериментов. Перспективной задачей будущих исследований является расширение класса динамических процессов и систем притока и оттока, для которых с помощью предложенной модели можно будет обеспечить приемлемый уровень точности прогнозирования будущей динамики таких процессов и систем.

Литература

1. *Moftakhar L., Seif M., Safe M. S.* Exponentially increasing trend of infected patients with COVID-19 in Iran: a comparison of neural network and ARIMA forecasting models // *Iran Journal of Public Health*. 2020. Vol. 9. P. 92–100.
2. *Ahmar A. S., del Val E. B.* SutteARIMA: short-term forecasting method, a case: COVID-19 and stock market in Spain // *Science of the Total Environment*. 2020. Vol. 729. Art. N 138883.
3. *Chaudhry R. M., Hanif A., Chaudhary M., Minhas S. 2nd, Mirza K., Ashraf T., Gilani S. A., Kashif M.* Coronavirus disease 2019 (COVID-19): Forecast of an emerging urgency in Pakistan // *Cureus*. 2020. Vol. 12. N 5. Art. N e8346.
4. *Tandon H., Ranjan P., Chakraborty T., Suhag V.* Coronavirus (COVID-19): Arima based time-series analysis to forecast near future and the effect of school reopening in India // *Journal of Health Management*. 2022. Vol. 24. Iss. 3. P. 373–388.
5. *Earnest A., Chen M. I., Ng D., Leo Y. S.* Using autoregressive integrated moving average (ARIMA) models to predict and monitor the number of beds occupied during a SARS outbreak in a tertiary hospital in Singapore // *BMC Health Services Research*. 2005. Vol. 5. Art. N 36.
6. *Li X. J., Kang D. M., Cao J., Wang J. Z.* A time series model in incidence forecasting of hemorrhagic fever with renal syndrome // *Journal of Shandong University (Health Sciences)*. 2008. Vol. 46. N 5. P. 547–549.
7. *Heisterkamp S. H., Dekkers A. L., Heijne J. C.* Automated detection of infectious disease outbreaks: hierarchical time series models // *Statistics in Medicine*. 2003. Vol. 25. N 24. P. 4179–96.
8. *Zhang G. P.* Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model // *Neurocomputing*. 2003. Vol. 50. P. 159–175.
9. *De Beer J.* Projecting age-specific fertility rates by using time-series methods // *European Journal of Population*. 1990. Vol. 5. N 4. P. 315–346.
10. *Abonazel M., Darwish N.* Forecasting confirmed and recovered COVID-19 cases and deaths in Egypt after the genetic mutation of the virus: ARIMA Box-Jenkins approach // *Communications in*

Mathematical Biology and Neuroscience. 2022. Vol. 2022. Art. N 17.

11. *Gecili E., Ziady A., Szczesniak R. D.* Forecasting COVID-19 confirmed cases, deaths and recoveries: revisiting established time series modeling through novel applications for the USA and Italy // PLoS One. 2021. Vol. 16. N 1. Art. N e0244173.

12. *Singh S., Parmar K. S., Makkhan S. J. S., Kaur J., Peshoria S., Kumar J.* Study of ARIMA and least square support vector machine (LS-SVM) models for the prediction of SARS-CoV-2 confirmed cases in the most affected countries // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. Vol. 139. Art. N 110086.

13. *Aditya S. C. B., Darmawan W., Nadia B. U., Hanafiah N.* Time series analysis and forecasting of coronavirus disease in Indonesia using ARIMA model and PROPHET // Procedia Computer Science. 2021. Vol. 179. P. 524–532.

14. *Duong N., Phuong Th. L., Nhu Q. D., Binh L., Ai L. C., Hong D. P.* Predicting the pandemic COVID-19 using ARIMA model // VNU Journal of Science: Mathematics—Physics. 2020. Vol. 36. N 4. Art. N 4492.

15. *Claris S., Peter N.* ARIMA model in predicting of COVID-19 epidemic for the Southern Africa region // African Journal of Infectious Diseases. 2022. Vol. 17. N 1. P. 1–9.

16. *Захаров В. В.* Принцип динамического баланса демографического процесса и пределы роста населения Земли // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 15. С. 108–114. <https://doi.org/10.31857/S2686954323600301>

17. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society A. 1927. Vol. 115. P. 700–721.

18. *Anderson R. M., May R. M.* Infectious diseases of humans: Dynamics and control. Oxford: Oxford University Press, 1991. 757 p.

19. *United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division.* World Population Prospects 2022: Methodology of the United Nations population estimates and projections. New York, United Nations Publ., 2022. 64 p.

20. *Захаров В. В., Ндиайе С. М.* Прогнозирование численности населения и динамические игры против природы // Математическая теория игр и ее приложения. 2024. Т. 16. № 1. С. 17–37

Статья поступила в редакцию 9 января 2024 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я :

Балыкина Юлия Ефимовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; j.balykina@sbpu.ru

Захаров Виктор Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.zaharov@sbpu.ru

Integral inflow and outflow model and its applications*

Yu. E. Balykina^{1,2}, *V. V. Zakharov*¹

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, 5/7, Dvinskaya ul, St. Petersburg, 198035, Russian Federation

For citation: Balykina Yu. E., Zakharov V. V. Integral inflow and outflow model and its applications. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 120–134.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.201> (In Russian)

The article describes a general integral model of the inflow and outflow of a dynamic system, the parameters of which are stochastic in nature. For this type of dynamic systems, the general principle of dynamic balance is formulated, and the concepts of interval dynamic balance of integral volumes of inflow and outflow as well as the concept of dynamic balance characteristic are introduced. The class of stochastic dynamic processes and systems of inflow and outflow that satisfy the principle of dynamic balance is quite wide (the spread of viral

* This research was supported by the Russian Science Foundation, project N 23-21-10049, and Saint Petersburg Science Foundation, project N 23-21-10049 (<https://rscf.ru/project/23-21-10049/>).

epidemics and the dynamics of morbidity in medicine, processes of changes in the size and structure of the population in demography, the dynamics of supply and demand in the economy, etc.). The possibilities of using the proposed model for constructing short-term and long-term forecasts are demonstrated using examples of the spread of the COVID-19 epidemic in Moscow and Saint Petersburg, as well as using the example of forecasting the growth of the Earth population and population of countries. The results of computational experiments on constructing retrospective forecasts of the state of dynamic systems using the method of dynamic trends of stochastic parameters of the integral model and using the classical ARIMA method are presented. A comparative analysis of forecasting accuracy is provided.

Keywords: dynamic systems of inflow and outflow, principle of dynamic balance, dynamic balance characteristic, mathematical modeling, forecasting.

References

1. Moftakhar L., Seif M., Safe M. S. Exponentially increasing trend of infected patients with COVID-19 in Iran: a comparison of neural network and ARIMA forecasting models. *Iran Journal of Public Health*, 2020, vol. 9, pp. 92–100.
2. Ahmar A. S., del Val E. B. SutteARIMA: short-term forecasting method, a case: COVID-19 and stock market in Spain. *Science of The Total Environment*, 2020, vol. 729, art. no. 138883.
3. Chaudhry R. M., Hanif A., Chaudhary M., Minhas S. 2nd, Mirza K., Ashraf T., Gilani S. A., Kashif M. Coronavirus Disease 2019 (COVID-19): Forecast of an Emerging urgency in Pakistan. *Cureus*, 2020, vol. 12, iss. 5, art. no. e8346.
4. Tandon H., Ranjan P., Chakraborty T., Suhag V. Coronavirus (COVID-19): Arima based time-series analysis to forecast near future and the effect of school reopening in India. *Journal of Health Management*, 2022, vol. 24, iss. 3, pp. 373–388.
5. Earnest A., Chen M. I., Ng D., Leo Y. S. Using an autoregressive integrated moving average (ARIMA) models to predict and monitor the number of beds occupied during a SARS outbreak in a tertiary hospital in Singapore. *BMC Health Services Research*, 2005, vol. 5, art. no. 36.
6. Li X. J., Kang D. M., Cao J., Wang J. Z. A time series model in incidence forecasting of hemorrhagic fever with renal syndrome. *Journal of Shandong University (Health Sciences)*, 2008, vol. 46, no. 5, pp. 547–549.
7. Heisterkamp S. H., Dekkers A. L., Heijne J. C. Automated detection of infectious disease outbreaks: hierarchical time series models. *Statistics in Medicine*, 2003, vol. 25, no. 24, pp. 4179–96.
8. Zhang G. P. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, 2003, vol. 50, pp. 159–175.
9. De Beer J. Projecting age-specific fertility rates by using time-series methods. *European Journal of Population*, 1990, vol. 5, no. 4, pp. 315–346.
10. Abonazel M., Darwish N. Forecasting confirmed and recovered COVID-19 cases and deaths in Egypt after the genetic mutation of the virus: ARIMA Box-Jenkins approach. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2022, vol. 2022, art. no. 17.
11. Gecili E., Ziady A., Szczesniak R. D. Forecasting COVID-19 confirmed cases, deaths and recoveries: revisiting established time series modeling through novel applications for the USA and Italy. *PLoS One*, 2021, vol. 16, no. 1, art. no. e0244173.
12. Singh S., Parmar K. S., Makkhan S. J. S., Kaur J., Peshoria S., Kumar J. Study of ARIMA and least square support vector machine (LS-SVM) models for the prediction of SARS-CoV-2 confirmed cases in the most affected countries. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, vol. 139, art. no. 110086.
13. Aditya S. C. B., Darmawan W., Nadia B. U., Hanafiah N. Time series analysis and forecasting of coronavirus disease in Indonesia using ARIMA model and PROPHET. *Procedia Computer Science*, 2021, vol. 179, pp. 524–532.
14. Duong N., Phuong Th. L., Nhu Q. D., Binh L., Ai L. C., Hong D. P. Predicting the pandemic COVID-19 using ARIMA model. *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics*, 2020, vol. 36, no. 4, art. no. 4492.
15. Claris S., Peter N. ARIMA model in predicting of COVID-19 epidemic for the Southern Africa region. *African Journal of Infectious Diseases*, 2022, vol. 17, no. 1, pp. 1–9.

16. Zaharov V. V. Printcip dinamicheskogo balansa demograficheskogo processa i predely rosta zemli [Dynamic balance principle of the demographic process and the limits of earth population growth]. *Papers of Russian Academy of Sciences*, 2023, vol. 15, pp. 108–114. <https://doi.org/10.31857/S2686954323600301> (In Russian)

17. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*, 1927, vol. 115, pp. 700–721.

18. Anderson R. M., May R. M. *Infectious diseases of humans: Dynamics and control*. Oxford, Oxford University Press, 1991, 757 p.

19. United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division. *World Population Prospects 2022: Methodology of the United Nations population estimates and projections*. New York, United Nations Publ., 2022, 64 p.

20. Zaharov V. V., Ndiaye S. M. Prognozirovaniye chislennosti naseleniya i dinamicheskie igry protiv prirody [Population growth forecasting and dynamic games against nature]. *Mathematical Game Theory and its Applications*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 17–37. (In Russian)

Received: January 9, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

A u t h o r ' s i n f o r m a t i o n :

Yulia E. Balykina — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; j.balykina@spbu.ru

Victor V. Zaharov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.zaharov@sbpu.ru

Математическая модель квантового генератора случайных чисел на основе флуктуации вакуума

А. А. Гайдаш¹, Р. К. Гончаров¹, А. В. Козубов¹, П. В. Яковлев²

¹ Университет ИТМО,

Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, 49

² Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Гайдаш А. А., Гончаров Р. К., Козубов А. В., Яковлев П. В. Математическая модель квантового генератора случайных чисел на основе флуктуации вакуума // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 135–152.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.202>

Рассматривается математическая модель широко распространенного физического квантового генератора случайных чисел на основе флуктуации вакуума. Приводится математическое обоснование «случайности» генерируемой последовательности в предположении об истинности основных постулатов квантовой теории и справедливости пуассоновского распределения вероятности для потока фотонов. Представлены результаты экспериментов и получены численные оценки минимальной энтропии.

Ключевые слова: квантовый генератор случайных чисел, оценка минимальной энтропии, флуктуация вакуума.

1. Описание оптической схемы. Случайные числа служат важным ресурсом в науке, технике и многих аспектах повседневной жизни. В частности, они есть неотъемлемая составляющая различных подходов к моделированию, построению криптографических систем и компьютерных сетей. В 50-х годах прошлого века развитие получил метод Монте-Карло (метод статистических испытаний), основой применения которого является одномерная равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина (см.[1]). Активно продолжает развиваться теория задачи поиска [2]. Во всех этих задачах высокая скорость выработки случайных битовых последовательностей и их степень случайности являются краеугольными факторами. К устройствам, создающим подобные последовательности, относятся и генераторы случайных чисел (ГСЧ).

В настоящее время все ГСЧ можно разделить на две группы: детерминированные, или псевдослучайные, и физические. Несмотря на высокую скорость генерации случайной последовательности, детерминированные ГСЧ имеют один ключевой недостаток — наличие цикла. Существует точка, после которой последовательность начинает повторяться. Физические ГСЧ основаны на сборе непредсказуемых данных в различных физических системах. Например, это может быть движение мышью компьютера или появление запроса в сети, тепловой шум процессора, атмосферный шум и т. д. Процесс сбора непредсказуемых данных обычно называют сбором энтропии. Рассматриваемый в этой работе ГСЧ относится к классу физических, а точнее, к его подклассу квантовых генераторов случайных чисел (КГСЧ). Подробный обзор КГ-

СЧ содержится в [3]. Базовый принцип в построении оптической схемы устройства был ранее представлен в работах [3–8]. Основным элементом подобных устройств является гомодинный детектор, детальный анализ которого можно найти в [9].

В данной работе приводится обоснование возможности создания КГСЧ, основанного на когерентном излучении одномодового лазера и флуктуации вакуума. Помимо этого, проводятся численное моделирование по расчету энтропии получаемой битовой последовательности, а также сравнение результатов моделирования с экспериментом.

2. Описание принципиальной схемы рассматриваемой модели КГСЧ.

В общей структуре ГСЧ можно выделить два основных блока (рис. 1).

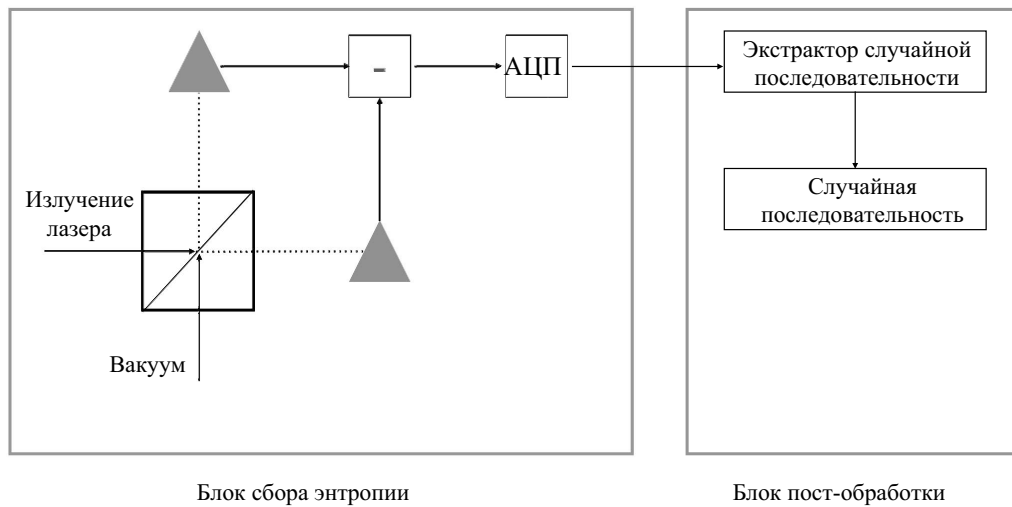


Рис. 1. КГСЧ на основе гомодинного детектора

Блок источника энтропии состоит из физической системы, характеризующейся некоторой «случайной» физической величиной, и измерительного оборудования, ее регистрирующего. Накопленные аналоговые измерения величин преобразовываются в битовые строки с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП).

Основу гомодинного детектора [9, 10] составляет светоделитель. На два входа симметричного светоделителя с отношением 50:50 (рис. 2) подаются световые потоки с интенсивностями α и β . Следуя законам классической оптики, в случае, когда эти потоки на входе имеют по одной моде, амплитуды мод на выходе светоделителя будут равны $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)$. Переходя к квантовой трактовке, заменим интенсивности на квантовые состояния $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

Если эти состояния когерентны и независимы, то на выходе светоделителя будем иметь состояния $\left| \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle$ и $\left| \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle$ соответственно. Измерение разности интенсивности поля на выходе светоделителя дает возможность оценить статистику фотоотчетов (см. [9, с. 402]).

В общем случае, когда $|\alpha\rangle$ — когерентное состояние, а $|\beta\rangle$ имеет волновую функцию общего вида, статистика фотоотчетов вычисляется аналитически. Если же оба потока когерентны и независимы, то вид распределения вероятности фотоотчетов существенно упрощается. В рассматриваемом КГСЧ один вход светоделителя закрыт,

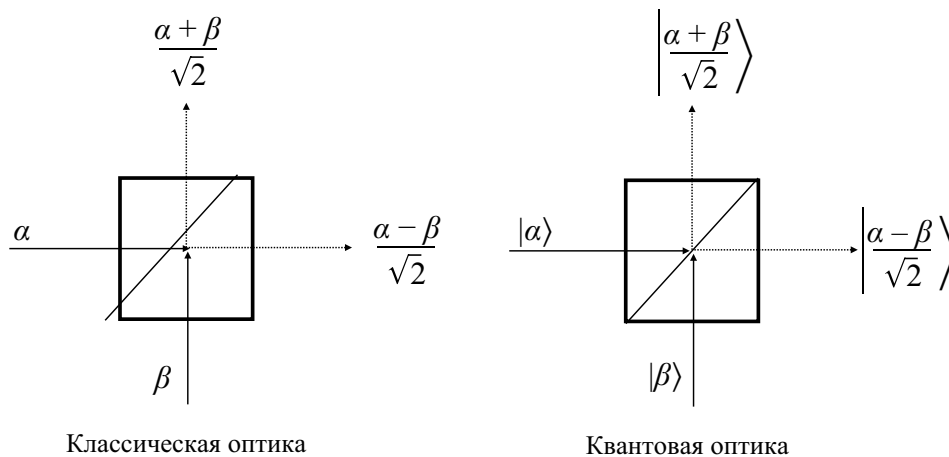


Рис. 2. Симметричный светоделитель

$|\hat{\beta}\rangle = |0\rangle$. В этом случае говорят (см. [3–6]), что измеряется состояние вакуума, который в квантовой трактовке является частным случаем когерентного состояния. Точнее говоря, когерентное состояние можно трактовать как смещенное состояние вакуума (см. [9, с. 336]). Отсюда происходит название «Генератор случайных чисел, основанный на флуктуации вакуума».

Блок пост-обработки получает на входе необработанную последовательность бит и формирует из них более короткую последовательность, свободную от корреляций. Данная операция называется экстракцией случайных бит и является важной составляющей КСГЧ. Экстракция случайных бит производится так называемой **хеш-функцией**, которая преобразует необработанную последовательность бит в последовательность бит с сохранением части или всей случайности входной последовательности и имеющей распределение, максимально близкое к равномерному. Компромисс выбора конкретной хеш-функции состоит в определении баланса между быстродействием и сохранением «случайности» (см. [11–14]).

3. Основные термины, определения и утверждения. Все дальнейшие обоснования энтропийности источника и «случайности» генерируемой последовательности чисел основываются на следующих предположениях.

1. Предполагаются верными постулаты квантовой теории света, в частности тот факт, что когерентное излучение одномодового лазерного источника представляет собой поток фотонов, являющийся однородным пуассоновским процессом, который описывается плотностью распределения

$$p_k(t) = \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t}$$

с интенсивностью $\nu [c^{-1}]$, или, в других обозначениях, $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = \nu t$. Однородность пуассоновского потока означает, что его интенсивность ν не зависит от времени.

2. Все процессы стационарные. Считаем, что изменением интенсивности излучения лазера в пределах достаточно большого количества временных окон генерации случайных чисел, как и изменением параметров классических шумов, можно пренебречь.

3. Все процессы являются эргодическими. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если значение среднего и ковариационная функция, вычисленные по ансамблю выборочных функций, совпадают со средним и ковариационной функцией, определенными путем усреднения по времени в пределах отдельных выборочных функций, входящих в ансамбль.

4. Классический аппаратный (побочный) шум есть аддитивный независимый гауссовый процесс с нулевым средним $\mu_e = 0$ и дисперсией σ_e^2 .

Рассмотрим процесс измерения флуктуации вакуума с точки зрения математической статистики и свойств пуассоновских процессов (потоков).

Определение 1 (Независимое смещение). Пусть $\{x_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots$, — случайная последовательность частиц на прямой, образующих при $t = 0$ стационарный пуассоновский поток. Координата каждой частицы $x_i(t)$ меняется случайным образом во времени t . Причем значения смещения за интервал времени от 0 до t , равные $x_i(t) - x_i(0)$, предполагаются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Тогда такой процесс изменения координат называется независимым смещением.

Определение 2 (Операция разреживания). Пусть последовательность $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots$, образует стационарный пуассоновский поток. Определим операцию разреживания следующим образом: каждая точка последовательности исключается из исходной последовательности с вероятностью γ , причем независимо от остальных, и делается одна и только одна попытка исключить каждую точку.

Утверждение 1. Если в начальный момент времени $t = 0$ последовательность $\{x_i(0)\}$, $i = 0, 1, \dots$, образует стационарный пуассоновский процесс с интенсивностью ν , то при независимом смещении последовательность $\{x_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots$, в момент времени t также образует стационарный пуассоновский процесс с интенсивностью ν .

Доказательство см. в [15].

Ввиду важности для обоснования энтропийности источника следующих утверждений, приведем их доказательства.

Утверждение 2. Если к пуассоновскому процессу с интенсивностью ν применяется операция разреживания с вероятностью исключения γ , то оставшийся поток является пуассоновским с интенсивностью $(1 - \gamma)\nu$.

Доказательство. Справедливость утверждения 2 следует из выполнения определяющих свойств пуассоновского процесса:

- 1) ординарность: вероятность наступления более одного события на любом малом интервале времени Δt имеет более высокий порядок малости, чем Δt ;
- 2) стационарность;
- 3) отсутствие последствий: имеет независимые приращения на неперекрывающихся промежутках времени.

Условие ординарности означает, что

$$P(x_i(t + \Delta t) - x_i(t) = 1) = P(x_i(\Delta t) = 1) = \nu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(x_i(t + \Delta t) - x_i(t) > 1) = P(x_i(\Delta t) > 1) = o(\Delta t).$$

При операции разреживания ординарность сохраняется, так как количество точек может только уменьшиться.

Стационарность сохраняется, поскольку операция разреживания производится одинаково при любом значении x_i .

И, наконец, в силу того, что исключение точек происходит всегда независимо от предыдущих исключений, сохраняется свойство отсутствия последствий.

Известно (см. [15]), что случайный процесс, удовлетворяющий перечисленным трем свойствам, является пуассоновским, а удаление точек с вероятностью γ уменьшает интенсивность потока на коэффициент $(1 - \gamma)$. \square

Следствие. В случае, если к пуассоновскому процессу с интенсивностью ν применить операцию разреживания с вероятностью исключения $\gamma = \frac{1}{2}$, то разреженный процесс и процесс, составленный из удаляемых точек, будут пуассоновскими с интенсивностью $\frac{1}{2}\nu$.

Утверждение 3. Разность двух пуассоновских процессов $u_i = x_i - y_i$ с интенсивностями α и μ соответственно имеет распределение

$$P_u(k) = e^{-(\alpha+\mu)t} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\alpha\mu}t),$$

где $I_k(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода целого порядка.

Доказательство. Найдем распределение случайной величины $u = x - y$, в котором величины x и y имеют пуассоновское распределение вероятности

$$P_x(n) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t}, \quad P_y(n) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}.$$

Запишем распределение вероятности для величины $u = x - y$:

$$\begin{aligned} P_u(k) &= P(u = k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(x = k + l) P(y = l) = \\ &= e^{-(\alpha+\mu)t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{k+l} (\mu t)^l}{(k+l)! l!} = e^{-(\alpha+\mu)t} (\alpha t)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\alpha\mu}t)^{2l}}{(k+l)! l!} \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением в ряд модифицированной функции Бесселя первого рода целого порядка (см. [16])

$$I_k(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}{(k+l)! l!}$$

и положим, что $z = 2\sqrt{\alpha\mu}t$. Тогда искомое распределение приобретает требуемый вид

$$P_u(k) = e^{-(\alpha+\mu)t} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\alpha\mu}t). \quad (1)$$

\square

Следствие. В случае, когда вычитаются два пуассоновских процесса с одинаковыми интенсивностями $\alpha = \mu$, результирующий процесс имеет распределение

$$P_u(k) = e^{-2\alpha t} I_k(2\alpha t).$$

В дальнейшем функцию вероятности пуассоновского процесса с интенсивностью α будем записывать следующим образом:

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

здесь $\lambda = \alpha t$.

Утверждение 4. Разность двух пуассоновских процессов $u_i = x_i - y_i$ с одинаковым средним λ при большой интенсивности аппроксимируется нормальным (гауссовым) распределением со средним $\mu = 0$ и дисперсией $\sigma^2 = \lambda$:

$$p_k(\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{k^2}{2\lambda}}.$$

Доказательство. Оно следует из аппроксимации функции Бесселя при фиксированном значении k для больших величин λ (см. [16, с. 199]):

$$I_k(\lambda) = \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mu-1)(\mu-3^2)\cdots(\mu-(2n-1)^2)}{n!(8\lambda)^n} \right],$$

где $\mu = 4k^2$. При больших значениях λ получаем, что

$$I_k(\lambda) \approx \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(k^2)^n}{n!(2\lambda)^n} \right] = \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{k^2}{2\lambda}}.$$

Окончательно имеем, что

$$p_k(\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{k^2}{2\lambda}}.$$

□

Частный случай разности двух пуассоновских процессов с равными средними значениями был получен в 1937 г. Дж. Ирвином (см. [17]), общий случай в 1946 г. рассмотрел Дж. Г. Скеллам (см. [18]). Доказательство утверждений 2 и 3 приведено в соответствии с [15].

Среднее значение λ количества фотонов в потоке излучения лазера, рассматриваемого в качестве конкретного источника, рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{PT}{\hbar\omega} \approx 3.9 \cdot 10^8,$$

в которой \hbar — редуцированная постоянная Планка, $T = 10^{-9}$ — время усреднения, определяемое частотой дискретизации 1 ГГц, $\omega \approx 2\pi \cdot 1.93414 \cdot 10^{14}$ — круговая частота лазера с длиной волны 1550 нм, $P = 5 \cdot 10^{-3}$ В — мощность лазера. Данное значение λ позволяет воспользоваться асимптотическим поведением измеряемого случайного процесса.

Приведенное выше обоснование формулы распределения случайного процесса, описывающего измерение величины на выходе гомодинного детектора (утверждения 2, 3) аналогично обоснованиям, использующим обозначения и терминологию, принятые в квантовой оптике [9, 19]. Во всех случаях основой производимых расчетов являются два основополагающих факта:

- количество фотонов в потоке описывается распределением Пуассона;
- светоделитель гомодинного детектора разделяет поток фотонов в равной пропорции 50:50 в соответствии с приведенным определением 2.

В обширной литературе, посвященной КГСЧ, основанных на флуктуации вакуума, вопрос о виде распределения случайной величины, измеряемой на выходе гомодинного детектора, часто опускается. Предполагают, что сигнал на выходе гомодинного детектора описывается нормальным (гауссовым) законом распределения (см. [4–8]).

Основываясь на сделанных предположениях и приведенных выше утверждениях, можно сделать вывод, что когерентное лазерное излучение генерирует случайный стационарный поток фотонов, подчиняющийся распределению Пуассона со средним значением λ за время T , равное интервалу детектирования (дискретизации).

Далее пуассоновский поток фотонов, проходя через гомодинный детектор, разделяется при помощи симметричного светоделителя на два пуассоновских потока с одинаковым средним значением $\frac{1}{2}\lambda$, после чего происходит их вычитание. В результате получается случайный стационарный поток фотонов, асимптотически описываемый гауссовым законом распределения с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = \lambda$.

4. Оценка минимальной энтропии. Для того чтобы воспользоваться результатом леммы об остаточном хеше и построить хеш-функцию, извлекающую последовательность случайных бит, близких к равномерному распределению, необходимо оценить значение минимальной энтропии условного распределения дискретного сигнала при условии наличия шума.

Для идеального случая, когда наблюдаем только результат измерения состояния вакуума без посторонних шумов, можно получить верхнюю границу минимальной энтропии для рассматриваемого источника излучения

$$H_{\min}(X) = -\log_2(\max_k p_k(\lambda)) = -\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\right) \approx \log_2(\sqrt{2\pi \cdot 3.9 \cdot 10^8}) \approx 15.59 \text{ бит.} \quad (2)$$

Для оценки условной минимальной энтропии при наличии шума воспользуемся сделанными в п. 3 предположениями о процессах. Считаем, что сигнал x , подаваемый на вход АЦП, является суммой двух независимых стационарных гауссовых процессов с нулевым средним: полезного квантового сигнала x_q (флуктуация вакуума) и шума x_e , $x = x_q + x_e$ со средними $\mu_q = \mu_e = 0$ и дисперсиями $\sigma_q^2, \sigma_e^2, \sigma_x^2 = \sigma_q^2 + \sigma_e^2$. Тогда, учитывая последнее предположение, плотность условного распределения измеряемого сигнала x при наличии шума x_e равна (см. [20])

$$p(x|x_e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 - \sigma_e^2)}} e^{-\frac{(x-x_e)^2}{2(\sigma_x^2 - \sigma_e^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}} e^{-\frac{(x-x_e)^2}{2\sigma_q^2}},$$

а для условной минимальной энтропии измеряемого сигнала при наличии шума запишем, что

$$H_{\min}(X|E) = -\log_2\left(\max_{x_e \in \{x_e \in E | p(x_e) > 0\}} \max_{x_i \in X} P(x_i|x_e)\right), \quad (3)$$

где x_i и e_i — дискретные значения измеряемого сигнала и шума соответственно.

Рассмотрим идеальное АЦП с n двоичными разрядами, динамическим диапазоном $[-R, R]$, интервалом квантования $\delta = \frac{R}{2^{n-1}}$ и нулем в середине центрального интервала. Обозначим границы интервалов квантования через $\{m_1, m_2, \dots, m_{2^n+1}\}$, $m_1 = -R$, $m_{2^n+1} = R$. Введем два дополнительных узла квантования $m_0 = -\infty$ и $m_{2^n+2} = +\infty$. Тогда, производя интегрирование в выражении для условной минимальной энтропии (3), получаем, что

$$H_{\min}(X|E) = -\log_2\left(\max_{x_e \in \{x_e \in E | p(x_e) > 0\}} \max_{i \in 0:2^n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}} \int_{m_i}^{m_{i+1}} e^{-\frac{(x-x_e)^2}{2\sigma_q^2}} dx\right).$$

Рассмотрим выражение $\max_{i \in 1:2^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q} \int_{m_i}^{m_{i+1}} e^{-\frac{(x-x_e)^2}{2\sigma_q^2}} dx$ в пределах динамического диапазона $[-R, R]$. Находим, что

$$\begin{aligned} \max_{i \in 1:2^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q} \int_{m_i}^{m_{i+1}} e^{-\frac{(x-x_e)^2}{2\sigma_q^2}} dx &= \max_{i \in 1:2^n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_i}^{u_i+\tilde{\delta}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} (erf(\frac{\tilde{\delta}}{2}) - erf(-\frac{\tilde{\delta}}{2})) = \\ &= erf(\frac{\tilde{\delta}}{2}) = erf(\frac{\delta}{2\sqrt{2}\sigma_q}), \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma_q}$; $u = \frac{x-x_e}{\sqrt{2}\sigma_q}$; $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ — функция ошибок. Такое значение максимума обусловлено тем, что функция ошибок имеет максимальное приращение вблизи нуля. В рассматриваемом случае это интервал интегрирования с центром в нуле.

Добавляя два бесконечных интервала $[-\infty, -R]$ и $[R, \infty]$, получим, что

$$H_{\min}(X|E) = -\log_2 \left(\max_{x_e \in \{x_e \in E | p(x_e) > 0\}} \max \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - erf\left(\frac{x_e+R}{\sqrt{2}\sigma_q}\right) \right), erf\left(\frac{\delta}{2\sqrt{2}\sigma_q}\right), \frac{1}{2} \left(erf\left(\frac{x_e-R}{\sqrt{2}\sigma_q}\right) + 1 \right) \right\} \right).$$

Легко заметить, что выражение под знаком логарифма стремится к единице, когда $x_e \rightarrow -\infty$ или $x_e \rightarrow +\infty$. Поэтому для практической оценки вынуждены ограничиться рассмотрением случая, когда значение постороннего шума ограничено в диапазоне $[e_{\min}, e_{\max}]$. Например, если возьмем диапазон $e_{\min} = -5\sigma_e$, $e_{\max} = 5\sigma_e$, то значение шума попадет в него в 99.9999 % случаев.

Тогда, если $e_{\min} = e_{\max}$, оценка минимальной энтропии приобретает вид

$$H_{\min}(X|E) = -\log_2 \left(\max \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - erf\left(\frac{e_{\min}+R}{\sqrt{2}\sigma_q}\right) \right), erf\left(\frac{\delta}{2\sqrt{2}\sigma_q}\right) \right\} \right) \quad (4)$$

Вопрос выбора оптимальных параметров дискретизации (количество бит, динамический диапазон) рассмотрен в [21].

4.1. Учет нелинейных искажений АЦП. Основными искажениями АЦП, которые могут повлиять на энтропию измеряемого цифрового сигнала, являются дифференциальная нелинейность (DNL — Differential Nonlinearity) и ошибка смещения (offset error). Дифференциальная нелинейность измеряется в долях от величины интервала квантования, или, другими словами, в процентах от младшего разряда (LSB — Least Significant Bit), ошибка смещения — в процентах от динамического диапазона (FSR — Full Scale Range). Обозначим эти ошибки соответственно через Δ_{dnl} , Δ_{offs} . Дифференциальная нелинейность может увеличить длину интервала интегрирования с δ до $\hat{\delta} = \delta(1 + \Delta_{dnl})$. Тогда оценка минимальной энтропии изменится следующим образом:

$$H_{\min}(X|E) = -\log_2 \left(\max \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - erf\left(\frac{e_{\min} + \Delta_{offs} + R}{\sqrt{2}\sigma_q}\right) \right), erf\left(\frac{\hat{\delta}}{2\sqrt{2}\sigma_q}\right) \right\} \right).$$

Интегральная нелинейность АЦП (INL — Integral Nonlinearity) по сути представляет собой сумму дифференциальных нелинейностей, поэтому не оказывает влияния

на величину минимальной энтропии, так как определяющим является максимальное значение вероятности на каком-либо из интервалов дискретизации. Ошибкой смещения также можно пренебречь в случае достаточной ширины динамического диапазона АЦП. Например, при дифференциальной нелинейности 1.5 LSB оценка минимальной энтропии уменьшается на 1.32 бит равномерно по разрядности АЦП.

4.2. Параметры расчета оценки минимальной энтропии. Поскольку нет возможности оценивать шумовые параметры и искажения, производимые каждым конкретным экземпляром устройства, то единственным корректным источником оценки минимальной энтропии являются паспортные характеристики используемых в устройстве модулей и их подтверждение в процессе испытаний:

- отношение сигнал/шум $\text{SNR} = 20 \log_{10} \frac{\sigma_q}{\sigma_e}$, которое может быть оценено по паспортным данным лазера, гомодинного детектора и других компонент КГСЧ;
- динамический диапазон АЦП (R);
- разрядность АЦП и δ — величина младшего значащего разряда (LSB);
- дифференциальная нелинейность и ошибка смещения $\Delta_{dnl}, \Delta_{offs}$.

Влияние уменьшения мощности лазера на значение минимальной энтропии оценивается, исходя из формулы (2), так при уменьшении мощности лазера с 50 до 10 мВ верхняя оценка минимальной энтропии понижается всего на 1 бит — с 15.6 до 14.6 бит.

Нарушение балансировки симметричного светоделителя приводит к смещению среднего значения итогового распределения. Пусть пуассоновский поток со средним значением λ делится в соотношении γ и $(1 - \gamma)$, где $\gamma \in (0, 1)$. Из формулы (1) и аппроксимации модифицированной функции Бесселя следует, что разность таких потоков будет иметь смещенное среднее $\tilde{\lambda} = \lambda \sqrt{\gamma(1-\gamma)} \ln \frac{\gamma}{1-\gamma}$. Если смещение балансировки светоделителя не выводит сигнал из динамического диапазона АЦП, то это не приведет к изменению минимальной энтропии. В противном случае существенное смещение должен выявить встроенный тест устройства.

4.3. Влияние ограниченности полосы пропускания гомодинного детектора. Используемый в рассматриваемой схеме гомодинный детектор является линейным устройством. Искажения, которым подвержен сигнал, проходящий через него, обусловлены:

- наличием независимого аддитивного гауссова шума, который учитывается при оценке минимальной энтропии в параметре сигнал / шум;
- ограниченностью полосы пропускания детектора, которая приводит к изменению спектральной плотности сигнала и соответственно его функции автокорреляции.

Воспользуемся свойствами гауссовых случайных процессов:

1) если A — инвариантный во времени линейный оператор, $x(t)$ — стационарный случайный гауссов процесс, то $A(x(t))$ также является стационарным гауссовым процессом;

2) гауссов стационарный случайный процесс с нулевым средним полностью определяется функцией спектральной плотности.

Рассмотрим стационарный случайный процесс $x(t)$ с нулевым средним.

Обозначим $S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$ — спектральную плотность процесса $x(t)$, где $R_{xx}(\tau)$ — функция автокорреляции. Односторонняя спектральная плотность равна $G_{xx} = \begin{cases} 2S_{xx}(f), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$ Тогда $R_{xx}(\tau) =$

$\int_0^{\infty} G_{xx}(f) \cos(2\pi f\tau) df$, и дисперсия $\sigma_x^2 = R_{xx}(0) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df$.

Введем понятия **эффективной шумовой ширины спектра** и **эффективного шумового времени корреляции** (см. [22]). Эффективная шумовая ширина спектра, по определению, равна

$$B_x = \frac{\int_0^{\infty} G_{xx}(f) df}{\max_{f \in [0, \infty)} G_{xx}(f)} = \frac{R_{xx}(0)}{\max_{f \in [0, \infty)} G_{xx}(f)},$$

а эффективное шумовое время корреляции определяется по формуле

$$T_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau}{\max_{\tau \in [0, \infty)} R_{xx}(\tau)} = \frac{2 \int_0^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau}{R_{xx}(0)}.$$

Нетрудно показать, что выполняется так называемое **соотношение неопределенности**

$$B_x T_x = \frac{2 \int_0^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau}{\max_{f \in [0, \infty)} G_{xx}(f)} \geq \frac{1}{2}.$$

Для гауссова нормального шума с нулевым средним и дисперсией σ_x^2 данные величины равны

$$B_x = \frac{\sigma_x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1.25 \sigma_x, \quad T_x = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.40}{\sigma_x},$$

$$B_x T_x = \frac{1}{2}.$$

Соотношение неопределенности говорит о том, что чем меньше эффективная шумовая ширина спектра, тем больше эффективное шумовое время корреляции.

Обозначим $H(f)$ — частотную характеристику гомодинного детектора, которая представляет собой фильтр нижних частот. Тогда односторонняя спектральная плотность выходного сигнала $y(t)$ будет равна $G_{yy}(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f)$. Для стационарного гауссова процесса $y(t)$ дисперсия равна

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} G_{yy}(f) df = R_{yy}(0) = \int_0^{\infty} |H(f)|^2 G_{xx}(f) df.$$

Поэтому, если полоса пропускания низкочастотного фильтра $H(f)$ намного шире эффективной шумовой ширины спектра сигнала $x(t)$, то влиянием данного фильтра на дисперсию сигнала можно пренебречь.

Для рассматриваемого в работе устройства ширина полосы пропускания гомодинного детектора равна 1.6 ГГц, в то время, как дисперсия сигнала $\sigma_x^2 \approx 3.9 \cdot 10^8$. Таким образом, эффективная шумовая ширина спектра сигнала $B_x \approx 2.0 \cdot 10^4 \ll 1.6 \cdot 10^9$, и изменением дисперсии можно пренебречь.

Подтверждение того, что ограниченная полоса пропускания рассматриваемого устройства не оказывает влияния на дисперсию, можно получить, сравнив расчетную и фактическую величины дисперсии сигнала.

Кроме того, в обосновании энтропийности источника случайных чисел используется только дисперсия и нигде не применяется конкретный вид спектральной плотности сигнала и его автокорреляционной функции.

Ограниченность полосы пропускания уменьшает как дисперсию сигнала, так и дисперсию постороннего шума. Этим можно воспользоваться, чтобы увеличить отношение сигнал/шум. Если имеется априорная информация о спектре постороннего классического шума, то можно отфильтровать частоты с малым отношением сигнал/шум. Например, если энергия постороннего шума на нижних частотах $f \in [0, f_0]$ преобладает над уровнем энергии квантового шума на тех же частотах, то можно использовать полосовой фильтр, убирающий данные частоты, и увеличить отношение

$$\frac{\sigma_q^2}{\sigma_e^2} \leq \frac{\hat{\sigma}_q^2}{\hat{\sigma}_e^2} = \frac{\int_0^\infty G_{xx}(f)df}{\int_{f_0}^\infty G_{ee}(f)df},$$

где $G_{ee}(f)$ — односторонняя спектральная плотность шума.

Ограниченность полосы пропускания детектора можно учитывать разными эквивалентными способами. Например, в работе [7] влияние ограниченности полосы пропускания и появление временных автокорреляций рассматриваются в рамках понятия независимых одинаково распределенных величин (НОР) (identical and independent distribution, i.i.d.). Данное понятие применяется к случайным процессам с дискретным временем, поэтому появление автокорреляции оценивается через среднее число регистрируемых фотонов в дискретные моменты времени. Авторы статьи [7] отвергают гипотезу НОР, предполагают зависимость количества регистрируемых фотонов от предыдущих измерений (вследствие ограниченности полосы пропускания детектора) и вносят соответствующую поправку в расчет дисперсии.

В предлагаемой методике переходим к непрерывной модели измеряемого сигнала. Передаточные функции гомодинного детектора, как и других компонент, входящих в устройство, изменяют спектральную плотность мощности сигнала и его автокорреляционную функцию. Поэтому отсчеты сигнала, получаемые на выходе АЦП, не могут рассматриваться как независимые одинаково распределенные величины, т. е. гипотеза НОР отвергается в момент перехода к непрерывному гауссову процессу. Тем не менее это не мешает получить корректную оценку минимальной энтропии, поскольку в ней не учитывается конкретный вид спектра и автокорреляционной функции сигнала, а используются только независимость и гауссовость сигнала и шума, а также значения их дисперсий.

5. Численное моделирование и результаты экспериментов. Для проведения экспериментальных расчетов и сравнения с результатами моделирования применялся тестовый сигнал, являющийся измерением флуктуации вакуума при помощи гомодинного детектора. Для измерения использовался одномодовый лазер с длиной волны 1550 нм, мощностью $P = 5 \cdot 10^{-3}$ В и АЦП с разрядностью 12 бит и частотой дискретизации 1 ГГц.

Гистограмма тестового сигнала приведена на рис. 3. Обозначим через $\hat{\sigma}$ оценку среднеквадратического отклонения распределения вероятности тестового сигнала. Динамический диапазон АЦП в данном эксперименте составил $R \approx 4.44 \cdot \hat{\sigma}$. Для моделирования полезного квантового сигнала было использовано нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним и дисперсией, равной дискретной оценке дисперсии тестового сигнала: $\sigma_q^2 = \hat{\sigma}^2$.

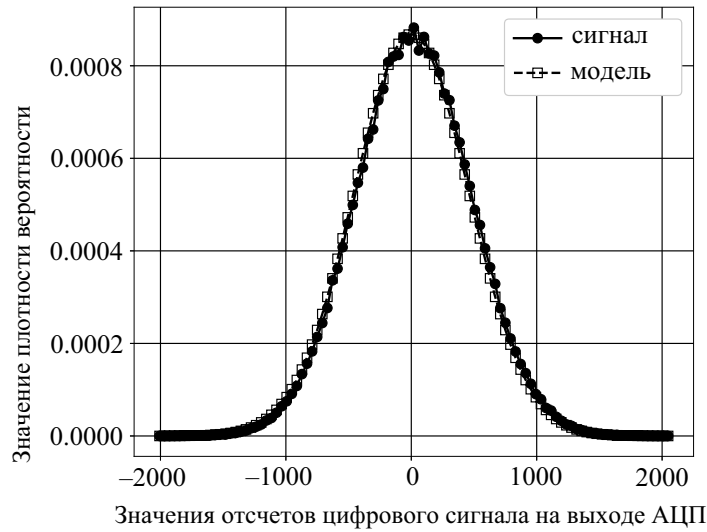


Рис. 3. Гистограмма тестового сигнала

Уровень постороннего шума, являющегося, по нашему предположению, независимым, стационарным гауссовым процессом, задается значением отношения сигнал/шум (SNR).

Рисунки 4, 5 иллюстрируют сравнение зависимости максимума дискретной плотности вероятности и дискретной оценки минимальной энтропии от разрядности АЦП для модельного и тестового сигналов. Можно заметить, что имеются небольшие расхождения для модельного и тестового сигналов для крайних значений разрядности АЦП, равных 3 и 10–11 бит. При малом количестве бит такое расхождение можно объяснить смещением при моделировании пороговых значений дискретизации (offset error), которое может не совпадать со смещением дискретизации тестового сигнала и имеет большой относительный вес при малой разрядности. Возможно, для значений разрядности 10–12 бит проявляется отклонение параметров сигналов, поскольку тестовый сигнал уже содержит посторонний шум.

В соответствии с формулой (4) при оценке минимальной энтропии учитывается вероятность попадания зашумленного сигнала за пределы динамического диапазона АЦП («хвостовая составляющая»). На рис. 6 приведена зависимость оценки минимальной энтропии от разрядности АЦП и отношения сигнал/шум. Пунктирной линией обозначена «хвостовая составляющая» минимальной энтропии, которая зависит от динамического диапазона АЦП. Видно, что при значении границы динамического диапазона $R \approx 4.44 \cdot \hat{\sigma}$ и максимальном уровне шума $e_{\min} = -5\sigma_e$, $e_{\max} = 5\sigma_e$, начиная от уровня сигнал/шум выше 10 дБ, определяющей является центральная часть области определения функции плотности распределения вероятности сигнала.

6. Экстракция равномерной случайной последовательности. Формирование (экстракция) равномерно распределенной последовательности бит из исходной случайной последовательности бит, имеющей произвольную функцию вероятности и заданный уровень минимальной энтропии, основано на лемме об остаточном хеше (см. [11] и с. 00).

Определение 3. Семейство функций $h \in H$, отображающих множество A в множество B , называется семейством универсальных хеш-функций, если для любых эле-

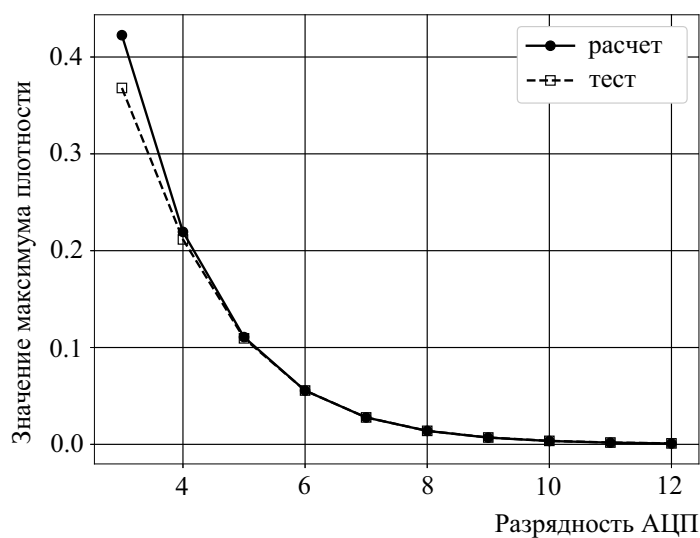


Рис. 4. Зависимость максимума дискретной плотности вероятности от разрядности АЦП

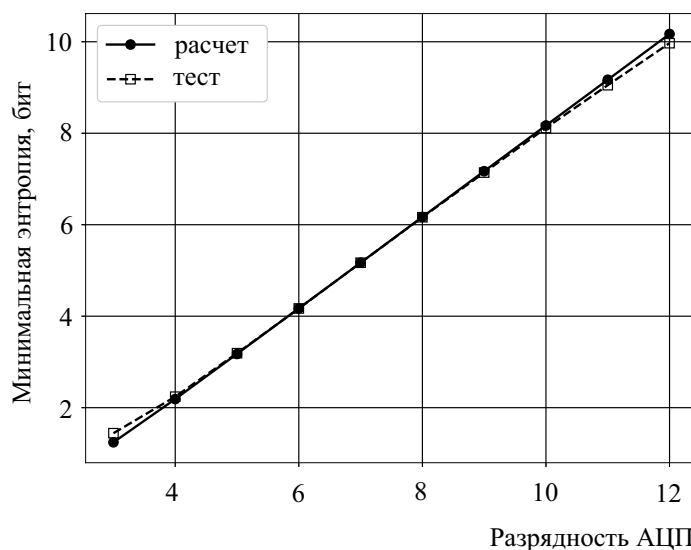


Рис. 5. Зависимость минимальной энтропии от разрядности АЦП

ментов $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ и $b_1, b_2 \in B$ вероятность совпадения образов обратно пропорциональна квадрату мощности множества B :

$$P_{h \in H} \{h(a_1) = b_1 \wedge h(a_2) = b_2\} = \frac{1}{|B|^2}.$$

Определенное выше семейство хеш-функций часто называют универсальным семейством хеш-функций второго рода (two-universal hash functions).

Определение 4. Экстрактором случайных бит называется функция, отображающая случайную последовательность бит, с, вообще говоря, неизвестным распреде-

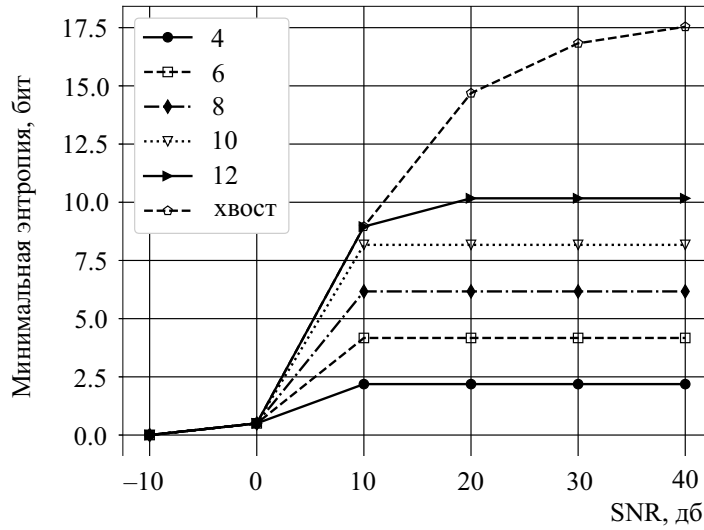


Рис. 6. Зависимость энтропия модельного сигнала от отношения SNR

лением вероятности, в другую, более короткую последовательность случайных бит, распределенных по закону, близкому к равномерному:

$$T : x = \{0, 1\}^n \rightarrow y = \{0, 1\}^m.$$

Определение 5. Экстрактором Теплица называется экстрактор, определенный при помощи матрицы Теплица, элементы которой состоят из нулей и единиц, выбранных случайным образом, а генерируемая строка бит получается умножением данной матрицы на вектор исходной последовательности по модулю 2:

$$T = T[1 : l, 1 : n], \quad T[i, j] = T[i - 1, j - 1], \\ y[1 : l] = (T[1 : m, 1 : n] \cdot x[1 : n]) \pmod 2.$$

Определение 6. Два вероятностных распределения X и Y , заданных в одной и той же области определения Z , называются ϵ -близкими, если

$$\max_{V \subseteq Z} \left\| \sum_{v \in V} (P(X = v) - P(Y = v)) \right\| \leq \epsilon.$$

Утверждение 5. Семейство хеш-функций, состоящих из экстракторов Теплица со случайно выбранными элементами, является универсальным семейством хеш-функций второго рода.

Доказательство утверждения см. в [13].

Лемма (Лемма об остаточном хеше). Пусть X — случайная величина, $H_{\min}(X|E)$ — минимальная энтропия X при условии E . Пусть F — семейство универсальных хеш-функций второго рода из X в $\{0, 1\}^l$. Тогда среднее распределение по $f \in F$ будет ϵ -близко к равномерному распределению, где

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{2^{l - H_{\min}(X|E)}}.$$

Доказательство леммы об остаточном хеше см. в [11].

В качестве следствия к лемме об остаточном хеше получаем, что из случайной последовательности $x \in X$ длиной n бит можно извлечь l случайных бит, ϵ -близких к равномерно распределенной последовательности при

$$l = \lfloor nH_{\min}(X|E) - \log_2 \frac{1}{\epsilon^2} + 2 \rfloor. \quad (5)$$

7. Заключение. В работе рассмотрена математическая модель физического КГСЧ, основанного на когерентном излучении одномодового лазера. Физическим источником энтропии служит случайный поток фотонов лазерного излучения, подчиняющийся пуассоновскому распределению вероятностей. Использование для измерения гомодинного детектора, в котором исходное излучение является опорным сигналом, приводит к так называемому измерению флуктуации вакуума (нулевого квантового состояния), что дает широко распространенное название таких КГСЧ: «Квантовый генератор случайных чисел, основанный на флуктуации вакуума». Приведенные математические утверждения позволяют четко определить источник энтропии и сделать вывод о «случайности» генерируемой последовательности чисел в рамках сделанных предположений.

Результаты численных экспериментов показывают, что рассматриваемая математическая модель хорошо согласуется с экспериментом.

Для КГСЧ, включающем в качестве основных компонент

- лазер с длиной волны 1550 нм и мощностью $5 \cdot 10^{-3}$ В,
- гомодинный детектор с симметричным светоделителем,
- АЦП 14 бит, частота дискретизации 1–1.25 ГГц,

можно получить последовательность случайных чисел с минимальной энтропией 10–12 бит в зависимости от уровня шума входящих в КГСЧ компонент. При этом приведенная выше верхняя оценка минимальной энтропии составляет $H_{\min}(X) \approx 15.59$ бит.

Скорость генерации случайной последовательности для конкретного устройства можно получить, задав требуемое допустимое отклонение от равномерного распределения и расчетную оценку минимальной энтропии, с учетом шумовых параметров устройства.

Литература

1. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975. 472 с.
2. Прокаев А. Н. Принцип максимума энтропии в теории поиска // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 27–42. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.103>
3. Herrero-Collantes M., Garcia-Escartin J. C. Quantum random number generators // Rev. Mod. Phys. 2017. Vol. 89. N 2. Art. N 015004. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.015004>
4. Gabriel C., Wittmann C., Sych D., Dong R., Maurer W., Andersen U. L., Marquardt C., Leuchs G. A generator for unique quantum random numbers based on vacuum states // Nature Photon. 2010. N 4. P. 711–715. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.197>
5. Shi Y., Chng B., Kurtsiefer C. Random numbers from vacuum fluctuations // Applied Physics Letters. 2016. Vol. 109. N 4. Art. N 041101. P. 1–5 <https://doi.org/10.1063/1.4959887>
6. Bruynsteen C., Gehring T., Lupo C., Bauwelinck J., Yin X. 100-Gbit/s integrated quantum random number generator based on vacuum fluctuations // PRX Quantum. 2023. Vol. 4. N 1. Art. N 010330. <https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.4.010330>
7. Gehring T., Lupo C., Kordts A., Solar N. D., Jain N., Rydberg T., Pedersen T. B., Pirandola S., Andersen U. L. Homodyne-based quantum random number generator at 2.9 Gbps secure against quantum side-information // Nature Communications. 2021. Vol. 12. N 1. Art. N 605. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-20813-w>

8. *Drahi D., Walk N., Hoban M. J., Fedorov A. K., Shakhovoy R., Feimov A., Kurochkin Y., Kolthammer W. S., Nunn J., Barrett J., Walmsley I. A.* Certified quantum random numbers from untrusted light // *Physical Review X*. 2020. Vol. 10. N 4. Art. N 041048. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.09665>
9. *Шлях В. П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве / пер. с англ; под ред. В. П. Яковлева. М.: Физматгиз, 2005. 760 с.
10. *Collett M. J., Loudon R., Gardiner C. W.* Quantum theory of optical homodyne and heterodyne detection // *Journal of Modern Optics*. 1987. Vol. 34. N 6–7. P. 881–902. <https://doi.org/10.1080/09500348714550811>
11. *Tomamichel M., Schaffner C., Smith A., Renner R.* Leftover hashing against quantum side information // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2011. Vol. 57. N 8. P. 5524–5535. <https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2158473>
12. *Carter J. L., Wegman M. N.* Universal classes of hash functions // *Journal of Computer and System Sciences*. 1979. Vol. 18. Iss. 2. P. 143–154. [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(79\)90044-8](https://doi.org/10.1016/0022-0000(79)90044-8)
13. *Mansour Y., Nisan N., Tiwari P.* The computational complexity of universal hashing // *Theoretical Computer Science*. 1993. Vol. 107. P. 121–133. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(93\)90257-T](https://doi.org/10.1016/0304-3975(93)90257-T)
14. *Ma X., Xu F., Xu H., Tan X., Qi B., Lo H.-K.* Postprocessing for quantum random-number generators: entropy evaluation and randomness extraction // *Physical Review A*. 2013. Vol. 87. N 6. Art. N 062327. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.062327>
15. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1977. 488 с.
16. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
17. *Irwin J. O.* The frequency distribution of the difference between two independent variates following the same Poisson distribution // *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 1937. Vol. 100. Iss. 3. P. 415–416. <https://doi.org/10.1111/j.2397-2335.1937.tb04518.x>
18. *Skellam J. G.* The frequency distribution of the difference between two Poisson variates belonging to different populations // *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*. 1946. Vol. 109. Iss. 3. P. 290–296. <https://doi.org/10.1111/j.2397-2335.1946.tb04670.x>
19. *Vogel V., Grabow J.* Statistics of difference events in homodyne detection // *Physical Review A*. 1993. Vol. 47. N 5. P. 4227–4235.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятности и ее приложения. В 2-х т. / пер. с англ. Ю. В. Прохорова. М.: Мир, 1984. Т. 2. 738 с.
21. *Haw J. Y., Assad S. M., Lance A. M., Ng N. H. Y., Sharma V., Lam P. K., Symul T.* Maximization of extractable randomness in a quantum random-number generator // *Physical Review Applied*. 2015. Vol. 3. N 5. Art. N 054004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.3.054004>
22. *Бендат Д., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных / пер. с англ. В. Е. Привального, А. И. Кочубинского; под ред. И. Н. Коваленко. М.: Мир, 1989. 540 с.

Статья поступила в редакцию 9 февраля 2024 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Гайдаш Андрей Алексеевич — канд. физ.-мат. наук; andrewdkg@gmail.com

Гончаров Роман Константинович — rkgoncharov@itmo.ru

Козубов Антон Владимирович — канд. физ.-мат. наук; avkozubov@itmo.ru

Яковлев Павел Валентинович — канд. физ.-мат. наук; p.yakovlev@spbu.ru

Mathematical model of random number generator based on vacuum fluctuations

A. A. Gaidash¹, R. K. Goncharov¹, A. V. Kozubov¹, P. V. Yakovlev²

¹ University ITMO, 49, Kronversky pr., St. Petersburg, 197101, Russian Federation

² St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Gaidash A. A., Goncharov R. K., Kozubov A. V., Yakovlev P. V. Mathematical

model of random number generator based on vacuum fluctuations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 135–152. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.202> (In Russian)

A mathematical model of quantum random number generator based on vacuum fluctuations is considered. A mathematical justification for the “randomness” of the generated sequence is given under the assumption of the truth of the basic postulates of quantum theory and the validity of the Poisson probability distribution for the photon flux. The results of experiments and the obtained estimates of the minimum entropy are presented.

Keywords: quantum random number generator, minimal entropy estimation, vacuum fluctuations.

References

1. Ermakov S. M. *Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy [Monte-Carlo method and related issues]*. Moscow, Nauka Publ., 1975, 472 p. (In Russian)
2. Prokaev A. N. Printsip maksimuma entropii v teorii poiska [The maximum entropy principle in search theory]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 27–42. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.103> (In Russian)
3. Herrero-Collantes M., Garcia-Escartin J. C. Quantum random number generators. *Rev. Mod. Phys.*, 2023, vol. 89, no. 2, art. no. 015004. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.015004>
4. Gabriel C., Wittmann C., Sych D., Dong R., Maurer W., Andersen U. L., Marquardt C., Leuchs G. A generator for unique quantum random numbers based on vacuum states. *Nature Photon*, 2010, no. 4, pp. 711–715. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.197>
5. Shi Y., Chng B., Kurtsiefer C. Random numbers from vacuum fluctuations. *Applied Physics Letters*, 2016, vol. 109, no. 4, art. no. 041101, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1063/1.4959887>
6. Bruynstee C., Gehring T., Lupo C., Bauwelinck J., Yin X. 100-Gbit/s integrated quantum random number generator based on vacuum fluctuations. *PRX Quantum*, 2023, vol. 4, no. 1, art. no. 010330. <https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.4.010330>
7. Gehring T., Lupo C., Kordts A., Solar N. D., Jain N., Rydberg T., Pedersen T. B., Pirandola S., Andersen U. L. Homodyne-based quantum random number generator at 2.9 Gbps secure against quantum side-information. *Nature Communications*, 2021, vol. 12, no. 1, art. no. 605. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-20813-w>
8. Drahi D., Walk N., Hoban M. J., Fedorov A. K., Shakhovoy R., Feimov A., Kurochkin Y., Kolthammer W. S., Nunn J., Barrett J., Walmsley I. A. Certified quantum random numbers from untrusted light. *Physical Review X*, 2020, vol. 10, no. 4, art. no. 041048. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.09665>
9. Schleich W. P. *Kvatovaya optika v fazovom prostranstve [Quantum optics in phase space]*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 2005, 760 p. (In Russian)
10. Collett M. J., Loudon R., Gardiner C. W. Quantum theory of optical homodyne and heterodyne detection. *Journal of Modern Optics*, 1987, vol. 34, no. 6–7, pp. 881–902. <https://doi.org/10.1080/09500348714550811>
11. Tomamichel M., Schaffner C., Smith A., Renner R. Leftover hashing against quantum side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, vol. 57, no. 8, pp. 5524–5535. <https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2158473>
12. Carter J. L., Wegman M. N. Universal classes of hash functions. *Journal of Computer and System Sciences*, 1979, vol. 18, iss. 2, pp. 143–154. [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(79\)90044-8](https://doi.org/10.1016/0022-0000(79)90044-8)
13. Mansour Y., Nisan N., Tiwari P. The computational complexity of universal hashing. *Theoretical Computer Science*, 1993, vol. 107, pp. 121–133. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(93\)90257-T](https://doi.org/10.1016/0304-3975(93)90257-T)
14. Ma X., Xu F., Xu H., Tan X., Qi B., Lo H-K. Postprocessing for quantum random-number generators: Entropy evaluation and randomness extraction. *Physical Review A*, 2013, vol. 87, no. 6, art. no. 062327. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.062327>
15. Tikhonov V. I., Mironov M. A. *Markovskie processy [Markov processes]*. Moscow, Sov. Radio Publ., 1977, 488 p. (In Russian)
16. Abramovitz M., Stegun I. *Spravochnik po spetsialnym aeyrubzv s formulami, grafikami i tablitsami [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables]*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p. (In Russian)

17. Irwin J. O. The frequency distribution of the difference between two independent variates following the same Poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 1937, vol. 100, iss. 3, pp. 415–416. // <https://doi.org/10.1111/j.2397-2335.1937.tb04518.x>

18. Skellam J. G. The frequency distribution of the difference between two Poisson variates belonging to different populations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 1946, vol. 109, iss. 3, pp. 296–296. <https://doi.org/10.1111/j.2397-2335.1946.tb04670.x>

19. Vogel V., Grabow J. Statistics of difference events in homodyne detection *Physical Review A*, 1993, vol. 47, no. 5, pp. 4227–4235.

20. Feller W. *Vvedenie v teoriyu veroyatnosti i ee prilozheniya* [An introduction to probability theory and its applications]. In 2 vol. Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 2, 738 p. (In Russian)

21. Haw J. Y., Assad S. M., Lance A. M., Ng N. H. Y., Sharma V., Lam P. K., Symul T. Maximization of extractable randomness in a quantum random-number generator. *Physical Review Appl.*, 2015, vol. 3, no. 5, art. no. 054004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.3.054004>

22. Bendat J. S., Piersol A.G. *Prikladnoy analiz sluchainykh dannykh* [Random data analysis and measurement procedures]. Moscow, Mir Publ., 1989, 540 p. (In Russian)

Received: February 9, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Andrey A. Gaidash — PhD in Physics and Mathematics; andrewdgk@gmail.com

Roman K. Goncharov — rkgoncharov@itmo.ru

Anton V. Kozubov — PhD in Physics and Mathematics; avkozubov@itmo.ru

Pavel V. Yakovlev — PhD in Physics and Mathematics; p.yakovlev@spbu.ru

Принцип максимума энтропии в теории принятия решений

А. Н. Прокаев

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации — Научно-техническое бюро высоких технологий, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В. О., 39

Для цитирования: Прокаев А. Н. Принцип максимума энтропии в теории принятия решений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 153–169.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.203>

Традиционно принцип максимума энтропии используется для нахождения неизвестных законов распределения случайных величин. В теории принятия решений данный принцип применяется преимущественно в ситуации неопределенности относительно распределения вероятности гипотез о «состоянии среды», где под средой понимается совокупность параметров, влияющих на результат принимаемого решения. Рассмотрено использование принципа максимума энтропии с иной целью, а именно для оптимального распределения ресурсов различного вида. Приведены доказательства теорем, позволяющих создать алгоритмы решения разных задач распределения ресурсов на основе принципа максимума энтропии, а также примеры решения демонстративных задач.

Ключевые слова: теория информации, теория принятия решений, теория поиска, теория ожидаемой полезности, функция полезности, принцип максимума энтропии.

1. Введение. Принцип максимума энтропии (ПМЭ) был сформулирован Э. Джейнсом [1, 2], его суть заключается в следующем. Предположим, дискретная случайная величина X может принимать значения x_1, \dots, x_n с вероятностями p_1, \dots, p_n . Значения вероятностей неизвестны, но известно, например, математическое ожидание или второй начальный момент некоторой функции $f(x)$ данной случайной величины. Требуется определить распределение вероятностей p_1, \dots, p_n . Так называемый «формализм Э. Джейнса» состоит в том [1, с. 622], что в условиях недостатка информации о случайной величине X «наименее сомнительным» считается такое распределение вероятностей, которое максимизирует функцию информационной энтропии К. Шеннона [3] с учетом наложенных на величину X ограничений. Функция энтропии имеет вид

$$H = -K \sum_{j=1}^n p_j \log p_j, \quad (1)$$

где K — константа, соответствующая выбранному основанию логарифма, которое, в свою очередь, может быть любым. Согласно Джейнсу [1, с. 622], «ПМЭ можно рассматривать как распространение принципа недостаточного основания Бернулли — Лапласа с тем отличием, что оно однозначно допускает позитивное соображение о наибольшей изменчивости недостающей информации вместо негативного соображения об отсутствии оснований предложить что-либо другое». Там же Джейнс указывает, что поскольку выражение (1) соответствует формуле энтропии в статистической механике, термины «энтропия» и «неопределенность» используются им как синонимы.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

Следует заметить, что ПМЭ, в силу своей неочевидности, был принят не сразу и не всеми. В статье [4], а также в ряде последующих работ (например, [5]) Джейнс дает детальную «отповедь» своим оппонентам. Тем не менее библиография, посвященная критике ПМЭ, до сих пор остается достаточно обширной (см. [6–9]). Некоторые из работ (в частности, [7]) даже имеют названия, созвучные с «манифестом» Джейнса [4]. Кроме сомнений в справедливости самого принципа, ПМЭ обсуждается с точки зрения его назначения, области применимости и особенно часто его взаимосвязи с теоремой Байеса.

Однако, несмотря на достаточно противоречивое к нему отношение, ПМЭ в настоящее время широко используется в самых различных предметных областях. Так, в [10] приведена библиография из 144 работ, связанных с применением ПМЭ в биологии. Нас же будет интересовать роль ПМЭ в теории принятия решений (ТПР).

2. Четвертая информационная ситуация. В настоящее время научное направление, объединяемое общим названием ТПР, имеет два основных течения, которые условно назовем «объективное» и «субъективное». «Субъективным» будем именовать направление, которое стало предметом научного исследования с выходом в свет работы Дж. фон Неймана и О. Morgenштерна [11]. Оно исследует «рациональное поведение» человека в процессе принятия решения, прежде всего в экономической области. Развитием такого направления стали теория отношения к риску Л. Сэвиджа и М. Фридмана, теория перспектив А. Тверски и Д. Канемана и др.

В свою очередь, «объективным» направлением будем именовать подход к задаче принятия решения, существующий в исследовании операций [12, с. 120]. Здесь математическая модель принятия решения в самой общей форме имеет вид $U = f(x, y)$, где x обозначает управляемые переменные, y — неуправляемые, а U — показатель эффективности деятельности, т. е. ожидаемую ценность, полезность, степень достижения заданного состояния и т. д. Далее в целях общности изложения функцию U будем именовать функцией полезности. Кроме того, в модель могут входить ограничения $\varphi(x, y) \geq 0$. Очевидно, что в ситуации, когда случайные факторы имеют большое значение (в ситуации неопределенности), выразить U в виде простой функции от x и y сложно — в этом случае говорят о принятии решения в условиях неопределенности. Тем не менее «объективное» направление ТПР предполагает, что необходимая для принятия решения информация имеется или она может быть получена в объеме, достаточном для решения указанного уравнения, а математические методы, позволяющие это сделать, существуют. Далее, говоря о ТПР, будем иметь в виду только «объективное» направление, и только ту его часть, которая связана с ситуацией неопределенности, понимая при этом, что указанное деление достаточно условно.

В работе [13] Р. И. Трухаев предпринял попытку формализовать процесс принятия решения органом управления (ОУ). Совокупность факторов, влияющих на решение ОУ, именуется здесь «состоянием среды», совокупность возможных состояний среды представляет собой вектор $C = \{c_1, \dots, c_m\}$. В свою очередь, $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ — это множество возможных решений ОУ, а $F = \{f_{ij}\}$ — матрица оценочных функционалов, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, f_{ij} = f(c_i, d_j)$. Тогда, согласно [13, с. 13], проблема принятия решения $\{C, D, F\}$ состоит в выборе соответствующего решения d_j на основании принятого ОУ критерия. В свою очередь, данная проблема характеризуется основными факторами $\{I, K, R\}$, где I — информационная ситуация, K — множество критериев принятия решения, R — система правил принятия решений на основе критериев [13, с. 13]. Далее Р. И. Трухаев вводит классификацию информационных ситуаций (ИС) на основе информации, влияющей на выбор решения ОУ.

Он рассматривает шесть ИС: I_1, \dots, I_6 . Например, I_1 характеризуется заданным распределением априорных вероятностей на элементах c_i множества C , I_3 — заданной системой предпочтений на априорных вероятностях распределения элементов множества C и т. д. Нас здесь будет интересовать только ИС I_4 , которая характеризуется неизвестным распределением вероятностей на элементах множества C .

Для разрешения указанной неопределенности Р. И. Трухаев предлагает использовать формализм Э. Джейнса, согласно которому наиболее вероятным распределением вероятностей p_i состояния среды C будет распределение, при котором энтропия (1) имеет максимум с учетом всей имеющейся информации (ограничений). Далее он [13, с. 100–108] приводит примеры нахождения экстремальных распределений p_i для трех случаев. В первом случае о среде C не известно ничего (ограничения отсутствуют), ПМЭ предписывает назначить всем исходам равные вероятности, решением данной задачи будет равномерное распределение $p_i = \frac{1}{m}$. Во втором случае в качестве ограничения выступает величина математического ожидания оценочного функционала \bar{f}_k для каждого решения d_k (ограничение первого типа), а в третьем — величины \bar{f}_k и его дисперсии $\bar{\sigma}_k$ (ограничение второго типа).

В работах [14, 15] рассматривается использование ПМЭ для решения задачи поиска структуры эффективного инвестиционного портфеля. Так, в [14] вводится понятие «состояние экономической среды», каждое из которых характеризуется вероятностью реализации q_j , $\sum_{j=1}^n q_j = 1$, в котором n — число состояний. Тогда, если имеет место четвертая ИС, т. е. о поведении экономической среды нет никакой информации, согласно [14, с. 114], следует применить «энтропийный подход»: $H(q) = -\sum_{j=1}^n q_j \ln q_j \rightarrow \max$, что соответствует равенству значений $\hat{q}_j = \frac{1}{n}$. В этой работе [14, с. 115] определенные таким образом оценки состояния экономической среды \hat{q}_j могут применяться в формулах величин, характеризующих нормы прибыли активов: математического ожидания доходности m_i и дисперсии σ_i^2 i -го актива, где $m_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \hat{q}_j$, $\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 \hat{q}_j - m_i^2$, а r_{ij} — норма доходности i -го актива в j -м состоянии экономической среды. По мнению авторов [14], полученная таким образом структура инвестиционного портфеля обладает наименьшим уровнем риска.

В [15] исследуется целевой показатель портфеля $C(x) = \sum_{i=1}^n x_i C_i$, где x_i — доля i -го актива в инвестиционном портфеле, C_i — целевой показатель, значение которого характеризует степень достижения инвестором цели (например, доход) по i -му активу. Формирование портфеля осуществляется в условиях неопределенности по показателям C_i , имеющей вероятностную природу, при этом диапазоны $[C_i^d, C_i^h]$ изменения показателей C_i известны, а показатели для различных активов статистически независимы. Предполагается [15, с. 48], что в ситуации, когда относительно случайной величины известен лишь диапазон ее возможных значений, распределением с максимальной энтропией является равномерное распределение на заданном интервале. Исходя из этих предположений, исследуется функция полезности вида $U(x) = -e^{-sC(x)}$, где s — положительная величина, отражающая степень несклонности инвестора к риску. Решением является вектор x , максимизирующий целевую функцию $U(x)$ для заданных значений s и интервалов $[C_i^d, C_i^h]$.

В качестве предварительного вывода можно заключить, что ПМЭ в ТПР используется нечасто и преимущественно «по прямому назначению», т. е. для нахождения вероятностных распределений «состояния среды» в условиях неопределенности. При этом чаще всего он применяется в «урезанной версии», т. е. в «версии» принципа недостаточного основания Бернулли — Лапласа, что выражается в использовании равномерного распределения по причине полной неопределенности о «состоянии сре-

ды», а также отсутствия каких-либо ограничений или информации о них. Работы, в которых получен осязаемый практический результат (см. [15]), являются скорее исключением.

3. Принятие решения в условиях неопределенности как задача поиска. В [16, с. 114] рассматривается «система с максимальной полезностью», которую можно описать следующим образом.

Пусть x_1, \dots, x_n — количество товаров, покупаемых потребителем по ценам соответственно c_1, \dots, c_n , исходя из общего бюджета B . Потребитель максимизирует функцию полезности $U = U(x)$, $x = \{x_j \geq 0\}$, $j = 1, \dots, n$, $B = \sum_j x_j c_j$. Лагранжиан будет иметь вид

$$L = U(x) + \lambda(B - \sum_j x_j c_j), \quad (2)$$

где λ — множитель Лагранжа. Тогда количество товара x , максимизирующее функцию полезности U , является решением системы

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \lambda c_j. \quad (3)$$

С точки зрения количественной теории полезности (например, [17, с. 100]) выражение в левой части уравнения (3) представляет собой так называемую «предельную полезность» j -го товара, а само уравнение есть закон спроса А. Маршалла [17, с. 104], согласно которому предельная полезность блага пропорциональна его цене.

Доля j -го товара в общем бюджете B составляет $p_j = \frac{x_j c_j}{B}$, тогда функцию полезности можно представить в виде $u = u(p)$, $p = \{p_j \geq 0\}$, $j = 1, \dots, n$, $\sum_j p_j = 1$. Лагранжиан (2) примет вид

$$L = u(p) + \lambda(1 - \sum_j p_j) \quad (4)$$

и вектор p , максимизирующий функцию полезности u , есть решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial p_j} = \lambda. \quad (5)$$

Пусть на функцию полезности накладываются ограничения

$$f_k(p_j) = g_k, \quad (6)$$

где $k = 1, \dots, K$; K — количество ограничений; g_k — константы, например значения математического ожидания или дисперсии j -го элемента вектора u . Тогда функцию Лагранжа (4) запишем так:

$$L = u(p) + \lambda \left(1 - \sum_j p_j \right) + \sum_k \mu_k (g_k - f_k), \quad (7)$$

здесь μ_k — множитель Лагранжа, связанный с k -м ограничением. В этих условиях вектор p , максимизирующий функцию полезности u , является решением системы

$$\frac{\partial u}{\partial p_j} = \lambda + \sum_k \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial p_j}. \quad (8)$$

Предположим, что роль функции полезности u выполняет дисперсия некоторого «инвестиционного портфеля», которую необходимо минимизировать, $u = p^T S p$, где S — ковариационная матрица портфеля, элементы вектора p — доли «активов» в портфеле. Тогда ограничение имеет вид $c^T p = r$, здесь c — вектор стоимости активов, содержащихся в портфеле, r — вектор их заданной доходности. В этом случае решение системы (8) будет представлять собой решение классической задачи портфельной оптимизации по Г. Марковицу [18]. Отметим далее, что, если цена товара c_j не является константой, рассмотренная задача анализа «системы с максимальной полезностью» (далее для краткости будем именовать ее как «задача полезности») превращается в задачу ТПР в условиях неопределенности, поскольку вероятностное распределение p_j «состояния среды» становится неизвестным.

В работах [19, 20] рассмотрена задача поиска следующего вида. Предполагается [19, с. 28], что известно априорное дискретное распределение, показывающее степень нашей уверенности о местонахождении объекта поиска — вероятностное распределение на конечном множестве из n ячеек, именуемое «областью J ». Объект поиска (назовем его «целью») может находиться только в одной из ячеек j с вероятностью p_j , $j = 1, \dots, n$, $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Для каждой ячейки j существует функция обнаружения $b(z_j)$, представляющая собой условную вероятность обнаружения цели в ячейке j поисковыми усилиями объемом z_j при условии, что цель находится в ячейке j . Решением задачи поиска является план поиска — функция распределения поисковых усилий f , которая определяет количество поисковых усилий z_j , распределенных в ячейку j . Пусть F — это множество функций распределения поисковых усилий. Для функции распределения f можно вычислить вероятность обнаружения

$$P(f) = \sum_{j=1}^n p_j b(z_j) \quad (9)$$

и требуемое количество поисковых усилий, или ресурс поисковых усилий, $C(f) = \sum_{j=1}^n z_j$. Пусть $M > 0$ — это ограничение на ресурс поисковых усилий. Тогда поисковый план $f^* \in F$ оптимальный для ресурса M , если $C(f^*) \leq M$ и $P(f^*) \geq P(f)$ для всех $f \in F$ при условии $C(f) \leq M$. В [19, 20] предполагается, что поиск ведется не одновременно во всех n ячейках, а поэтапно, путем обследования m ячеек в ходе одного этапа, $1 \leq m \leq n$, при этом как предельное число этапов поиска $K \geq 1$, так и лимит поискового ресурса M могут быть не известны. Далее под задачей поиска будет подразумеваться только задача данного вида.

Сравнение задачи поиска с рассмотренной выше задачей полезности показывает, что они имеют много общего, а формально — практически идентичны. Покажем это на следующем примере. После поиска в ячейке j усилиями объемом z_j априорная вероятность p_j нахождения цели в ней уменьшится на величину $p_j b(z_j)$ и будет равна

$$q_j = p_j - p_j b(z_j). \quad (10)$$

Можно заметить (см. выражение (9)), что $p_j b(z_j)$ есть вероятность обнаружения цели в ячейке j усилиями z_j , обозначим ее $w_j = p_j b(z_j)$. Тогда апостериорная вероятность \dot{p}_j нахождения цели в ячейке j составит

$$\dot{p}_j = \frac{p_j - w_j}{1 - \sum_{j=1}^n w_j} = \frac{q_j}{1 - \sum_{j=1}^n w_j}, \quad (11)$$

где $\sum_{j=1}^n w_j$ — сумма вероятностей обнаружения цели во всех ячейках, где выполнялся поиск (далее — ячейки поиска).

Теперь предположим, что рассмотренное априорное распределение p_j («область J ») — это распределение долей (товаров, природных ресурсов, финансовых активов и др.) в некотором наборе (потребительской корзине, инвестиционном портфеле, бюджете и т. д.), здесь $p_j = \frac{x_j c_j}{B}$, x_j — количество компонентов j -го вида в наборе, c_j — их стоимость, B — совокупная стоимость всех компонентов набора. Указанный набор будем именовать далее как портфель или бюджет, а его компоненты — как активы, виды ресурсов, товары или по «традиции» — ячейки, имея в виду, что это не более чем условно.

Пусть $b(z_j)$ есть функция, представляющая собой условный прирост доли ресурса j -го вида за счет вложения ресурсов, или иначе, средств (например, финансовых) объемом z_j при условии, что исходная доля составляет p_j . Решением задачи является *план распределения* — функция распределения ресурсов f , которая определяет количество средств z_j , выделенных для приобретения ресурса j -го вида, или, по аналогии с поиском, «распределенных в ячейку j ». Пусть F — это множество функций распределения ресурсов. Для функции распределения f можно вычислить суммарный относительный прирост «стоимости» ресурсов

$$P(f) = \sum_{j=1}^n (1 - p_j) b(z_j) \quad (12)$$

и требуемое количество средств $C(f) = \sum_{j=1}^n z_j$. Пусть $M > 0$ — это ограничение на затраты. Тогда план распределения $f^* \in F$ является оптимальным для ограничения M , если $C(f^*) \leq M$ и $P(f^*) \geq P(f)$ для всех $f \in F$ при условии $C(f) \leq M$.

После вложения в ячейку j ресурса объемом z_j доля p_j увеличится на величину $(1 - p_j)b(z_j)$ и примет вид

$$q_j = p_j + (1 - p_j)b(z_j). \quad (13)$$

Можно заметить (см. (12)), что $(1 - p_j)b(z_j)$ есть относительный прирост доли ресурса j -го вида за счет вложения средств объемом z_j , обозначим ее как $-w_j = (1 - p_j)b(z_j)$. Знак «минус» перед w_j означает, что изменение w_j в ситуациях поиска и «пополнения бюджета» имеет противоположную направленность. Тогда апостериорная «вероятность» (в рассматриваемом случае доля) p'_j также будет определяться формулой (11), из чего следует, что обе задачи являются аналогичными задачами распределения ограниченных ресурсов.

С учетом сказанного, рассмотрим данные задачи как две взаимосвязанные операции. Поскольку в ходе первой операции p_j уменьшается, заменим слово «поиск» словом «расходование». При расходовании (продаже) ресурс (например, денежных средств) высвобождается, поэтому обозначим величину w_j в (11) как $w_j^+ = p_j b(z_j)$. В свою очередь, при пополнении (покупке) ресурс расходуется, поэтому величину w_j в выражении (11) обозначим как $w_j^- = -(1 - p_j)b(z_j)$. Предположим, что некоторая часть ресурсов нескольких видов продается и на вырученные средства покупаются ресурсы других видов. В обоих случаях апостериорная доля ресурса j -го вида может быть выражена формулой (11) при следующем условии: если ресурс j -го вида расходуется, то $w_j = w_j^+$, а если пополняется, то $w_j = w_j^-$.

Таким образом, рассмотренные задачи поиска и полезности являются аналогичными задачами ТПП в условиях неопределенности, различие между которыми состоит только в источнике указанной неопределенности. В задаче поиска вероятностное распределение — это плод нашей «фантазии», поскольку местонахождение цели неизвестно. В задаче полезности источником неопределенности служит волатильность.

4. Энтропия как функция полезности. Теперь вернемся к вопросу о функции полезности и определимся с понятиями. В рассмотренных выше задачах величина $P(f)$ (выражения (9), (12)) играет роль «общей» функции полезности, т. е. функции полезности всего набора («области J »). В свою очередь, в состав $P(f)$ входит величина «функции обнаружения» $b(z_j)$, которая представляет собой условный прирост доли j -го ресурса за счет вложения средств объемом z_j , т. е. является «частной» функцией полезности ресурса j -го вида.

В работе [19] показано, что $P(f)$ имеет максимум в том случае, когда в ячейках поиска «функция отклика» $\acute{b}(z_j)p_j$ принимает равные значения, здесь $\acute{b}(z_j)$ — производная от $b(z_j)$ по z . Данное решение «классическое» не только для теории поиска, оно имеет достаточно широкое распространение. Например, отражает второй закон Г. Госсена из области экономики, утверждающий, что максимум полезности потребляемых благ за ограниченный период времени достигается в том случае, если предельные полезности благ одинаковы [17, с. 101]. В работе [19] сделаны следующие выводы о влиянии вида функции $b(z_j)$ на решение задачи поиска. Одновременное достижение максимума вероятности обнаружения $P(f)$ и равенства «остаточной информации» (апостериорной вероятности (11)) в ячейках поиска возможно в единственном случае — если функция $b(z_j)$ является экспоненциальной. «Классическое» решение задачи поиска (а также аналогичных ей задач из других предметных областей, см. выше) возможно только в случае, когда $\acute{b}(z_j) < 0$. Если $\acute{b}(z_j) \geq 0$, то решение может удовлетворять критерию максимума $P(f)$, но при этом противоречить логике. Заметим, что в разных областях деятельности функции полезности могут быть самого различного вида (см. [17, с. 92; 22, с. 67]), т. е. условие $\acute{b}(z_j) < 0$ выполняется далеко не всегда.

С учетом сказанного рассмотрим в качестве функции полезности энтропию распределения p :

$$H = - \sum_{j=1}^n p_j \ln p_j. \quad (14)$$

В [19, с. 40] сделан вывод о том, что наиболее информативным является такой алгоритм поиска, при котором апостериорная энтропия \acute{H} после каждого очередного этапа поиска имеет максимум. В свою очередь, в [20, с. 354] доказано, что максимум энтропии достигается при условии равенства апостериорной вероятности (11) в ячейках поиска вне зависимости от вида функции $b(z_j)$.

В чем еще заключаются смысл и преимущества использования функции энтропии в качестве функции полезности? Рассмотрим некоторые из них.

1. Функция энтропии H монотонно возрастает от n и принимает наибольшее значение, если все p_j равны [19, с. 38]. Указанное свойство позволяет использовать функцию энтропии в тех областях, где имеет место рост полезности U при увеличении n . Например, диверсификация финансовых активов способствует снижению уровня инвестиционного риска. В работе [21, с. 29] приведен график зависимости общего финансового риска от числа видов ценных бумаг, включенных в инвестиционный портфель. Из него следует, что инвестиционный риск имеет тенденцию к экспоненциальному уменьшению по мере роста количества видов ценных бумаг в портфеле, а при их увеличении до 40–50 принимает постоянное значение, равное так называемой систематической составляющей риска.

2. Функция H допускает «оптимизацию по частям» — рост H в любой части распределения p_j ведет к увеличению H всего распределения [19, с. 38].

3. Задача максимизации энтропии H формально эквивалентна задаче максимизации функции полезности $u(p)$, а вектор p , максимизирующий функцию энтропии H , есть решение системы, аналогичной системе (8). Действительно, если на систему (8) накладываются те же ограничения (6), лагранжиан принимает вид

$$L = H + \lambda \left(1 - \sum_j p_j \right) + \sum_k \mu_k (g_k - f_k),$$

т. е. будет аналогичен выражению (7). Подставив в левую часть уравнения (8) выражение для энтропии (14), после незначительных преобразований получим, что

$$-\ln p_j - 1 = \lambda + \sum_k \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial p_j}. \quad (15)$$

4. В случае отсутствия ограничений (6) решение системы (15) не отличается от решения системы (5) для любой функции полезности u — им является равномерное распределение $p_j = \frac{1}{n}$.

5. Практическая задача. Величину w_j^+ будем называть «доходом», а w_j^- — «расходом». Поскольку доходная и расходная части w_j имеют разный знак, обозначим величину $P = \sum_{j=1}^n w_j$ как «прибыль», при этом, если $P < 0$, будем использовать традиционный термин «убыток». Изменения ресурса z_j будем именовать «затратами», соответственно положительными («продажа», «пополнение» (бюджета)) или отрицательными («покупка», «расходование» (средств)), суммарные затраты обозначим $C = \sum_{j=1}^n z_j$.

Задача. Имеется некоторое вероятностное распределение $p = \{p_j \geq 0\}$, $j = 1, \dots, n$, $\sum_j p_j = 1$. Необходимо перераспределить ресурсы z_j между ячейками так, чтобы энтропия (14) достигла максимума с учетом возможных ограничений:

- расходуются ресурсы $0 \leq m_1 \leq n$ видов, а пополняются — $0 \leq m_2 \leq n$ видов;
- суммарные затраты $C \leq M$, прибыль $P \geq g$, где M и g — некоторые константы;
- количество видов пополняемых ресурсов равно d , при этом $j = 1, \dots, n + d$, $p_{n+1} = \dots = p_{n+d} = 0$.

Словом «задача» будем обозначать именно эту задачу с указанием конкретных ограничений. Для лучшего понимания излагаемого рассмотрим простой пример.

Предположим, формируем инвестиционный портфель, в котором предполагается наличие активов четырех видов: акции, облигации, недвижимость и золото. Известно, что риск, который принимает на себя инвестор, определяется соотношением долей активов в портфеле (пример выбора такого соотношения для портфеля с указанным составом активов приведен в [23, с. 16]). Пусть общая стоимость портфеля инвестора составляет B , тогда доля активов j -го вида в портфеле $\dot{p}_j = \frac{x_j c_j}{B}$, где x_j — количество ценных бумаг актива j -го вида, c_j — их стоимость. Предположим, что инвестор, исходя из своего отношения к риску, выбрал следующие соотношения долей: акции $\dot{p}_1 = 0.1$, облигации $\dot{p}_2 = 0.2$, недвижимость $\dot{p}_3 = 0.3$ и золото $\dot{p}_4 = 0.4$. Введем коэффициент $k_j = \frac{\dot{p}_j \min}{\dot{p}_j}$, где в приведенном примере $\dot{p}_j \min = 0.1$, и представим преобразованную величину вероятности в виде $p_j = \frac{k_j \dot{p}_j}{\sum_j k_j \dot{p}_j}$. Здесь p_j примет равные значения $p_j = 0.25$, а энтропия такого распределения будет максимальна. Затем, по мере изменения цены активов c_j , в силу рыночных или иных причин, значения p_j будут изменяться, а энтропия распределения p_j уменьшаться. Исходные вероятности \dot{p}_j

также изменятся, их можно определить по формуле $\dot{p}_j = \frac{\frac{1}{k_j} p_j}{\sum_j \left(\frac{1}{k_j} p_j\right)}$. Коэффициенты k_j сохраняются неизменными в течение всего времени проведения операций с «портфелем» до тех пор, пока инвестор не изменит своего отношения к риску. Поскольку все величины, составляющие бюджет $B = \sum_j x_j c_j$, являются переменными, под B понимается его текущее значение.

Увеличить энтропию с целью приведения долей активов к исходному соотношению можно различными способами.

Пусть распределение p_j имеет вид, представленный на рис. 1, а: предполагается, что исходное распределение \dot{p}_j было преобразовано к виду p_j так, как указано выше, а затем претерпело изменения под воздействием каких-либо факторов. В работах [19, 20] рассматриваются функции обнаружения нескольких видов, их графики приведены в [19, с. 32]. В качестве частной функции полезности будем использовать одну «универсальную» функцию $b(z)$, график которой иллюстрирует рис. 1, б. Эта функция построена на основе показательной функции

$$b(z) = \begin{cases} 1 - \left(1 - k \frac{z - ak}{r}\right)^r, & z \geq ak, \\ - \left(1 - \left(1 - k \frac{|z - ak|}{r}\right)^r\right), & z < ak. \end{cases} \quad (16)$$

где параметры $0 < k \leq 1$ и a определяют соответственно масштаб и сдвиг функции по шкале z , а параметр r задает ее форму и степень кривизны. Если $r > 1$, то $b(z)$ является функцией, выпуклой вверх (кривая 1), если $0 < r < 1$ — выпуклой вниз (кривая 3), если $r = 1$ — линейной функцией (прямая 2).

Смысл функции $b(z)$ заключается в следующем. Если $k = 1$ и $r = 1$, то затрата ресурса в объеме $z_j = k$ означает, что доля j -го ресурса p_j израсходована (продана) полностью, доход составил $p_j B$. В свою очередь, пополнение ресурса в объеме $-z_j$ означает, что доля j -го ресурса увеличилась на $1 - p_j$, расход составил $(1 - p_j)B$. Поскольку при $r = 1$ функция $b(z)$ является линейной, то изменение дохода или расхода происходит пропорционально затратам z_j . Если же $b(z)$ выпукла вверх (вниз), то в данном процессе имеет место отставание (опережение). В свою очередь, параметр a определяет величину «издержек», например комиссию биржевого брокера.

Решение задачи основано на результатах, полученных в [20]. Согласно теореме 1 в [20], если при поиске в ячейке s априорная вероятность p_s уменьшится до значения $q_s = \gamma$ (см. [20, с. 350]), то апостериорная энтропия \dot{H} достигнет максимума. Согласно теореме 3 в [20], если в какой-либо из ячеек области S величина вероятности p_s не превышает значения γ , то поиск в данной ячейке не приводит к увеличению \dot{H} .

Однако следует заметить, что в работе [20] речь идет только о поиске объектов, поэтому приложение поисковых усилий z_j может приводить только к уменьшению вероятности p_j , но никак не к ее увеличению. В условиях же данной задачи «вероятность» может расти: как указано выше, после вложения в ячейку s ресурса объемом z_s доля p_s становится больше на величину $(1 - p_s)b(z_s)$ и примет значение q_s (формула (13)), т. е. имеет место соотношение $\dot{p}_s > p_s$. Тем не менее можно убедиться, что и в этих условиях увеличение p_s до значения $q_s = \gamma$ приводит апостериорную энтропию \dot{H} к максимуму. Дело здесь в том, что при доказательстве теоремы 1 (см. [20, с. 351]) знак величины $\Delta p_s = p_s - \dot{p}_s$ не оговаривался, поэтому полученные в [20] результаты справедливы, в том числе и для ситуации $\dot{p}_s > p_s$.

Согласно следствию 4 [20, с. 354], для достижения максимума энтропии условная вероятность $b(z_s)$ обнаружения цели в ячейке s области поиска S должна быть равна $b(z_s) = 1 - \frac{\gamma}{p_s}$. Получение аналогичного соотношения в ситуации $p_s < \gamma$ произведем

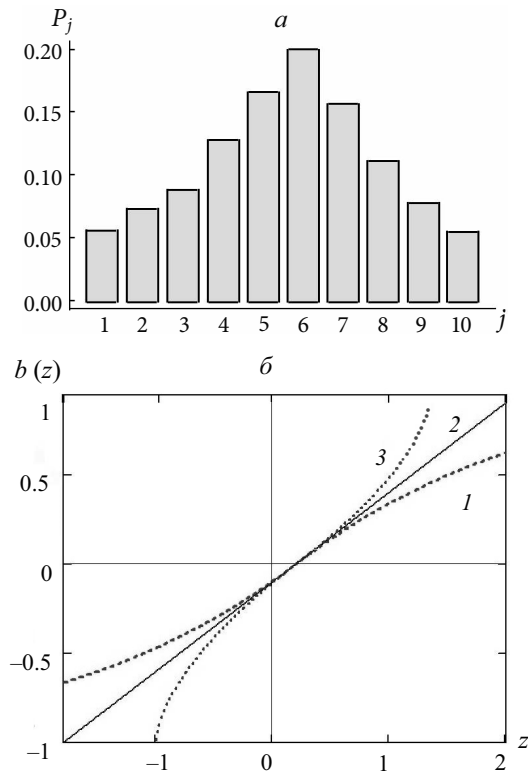


Рис. 1. Распределение априорной вероятности (а) и функции полезности (б)
Объяснение в тексте.

из условия $q_s = \gamma$, где q_s определяется выражением (13): $\gamma = p_s + (1 - p_s)b(z_s)$. Тогда вероятность $b(z_s)$ можно представить в виде

$$b(z_s) = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma}{p_s}, & p_s \geq \gamma, \\ -\frac{\gamma - p_s}{1 - p_s}, & p_s < \gamma. \end{cases}$$

Примеры решений, представленные на рис. 2–4, выполнены для следующих значений параметров: $k = 1$, $r = 0.3$ (функция $b(z)$ выпукла вниз), $a = 0.03$.

Варианты решения задачи при распределении ресурсов z_j без ограничений на количество ячеек иллюстрирует рис. 2. В отсутствие других ограничений задача имеет бесконечное число решений. Исходя из этого, на рис. 2, а приведено решение с ограничением на «прибыль» $P = 0$, суммарные затраты составляют $C = 0.577$. В свою очередь, на рис. 2, б дано решение с ограничением на суммарные затраты $C = 0$, в этом случае «убыток» составляет $P = -0.24$. Для функции $b(z)$, выпуклой вверх ($r = 3$), графики будут иметь похожий вид, но в случае $P = 0$ суммарные затраты составят $C = 1.138$, а при $C = 0$ «убыток» будет равен $P = -0.295$.

В обоих примерах энтропия \dot{H} достигает максимума $\dot{H}_{\max} = \ln n$, поскольку апостериорное распределение \dot{p}_j становится равномерным, $\dot{p}_j = \frac{1}{n}$. Решение при $P = 0$ определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Если после перераспределения ресурсов z_j между ячейками $j = 1, \dots, n$ вероятность p_j изменится до значения $q_j = \frac{1}{n}$, то $\dot{H} = \dot{H}_{\max} = \ln n$, а

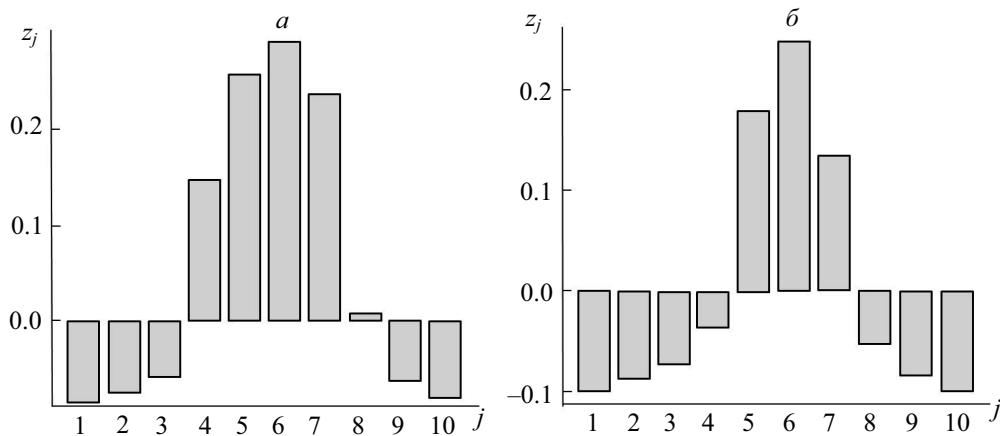


Рис. 2. Распределение ресурсов по критерию максимума энтропии без ограничения на число ячеек ($P = 0$ (а), $C = 0$ (б))

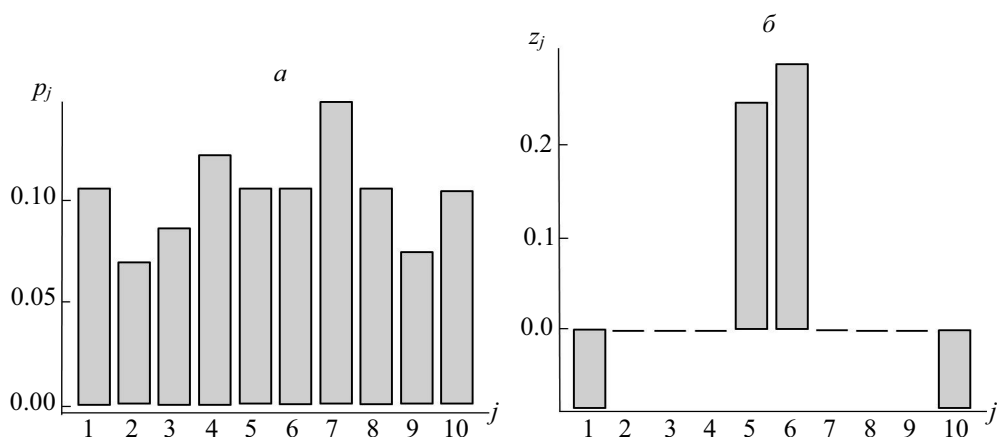


Рис. 3. Апостериорное распределение вероятности (а) и распределение ресурсов (б) по критерию максимума энтропии с ограничением на число ячеек

$P = 0$.

Доказательство. Величина P («прибыль») $P = \sum_{j=1}^n w_j$ есть сумма «доходов» $w_j^+ = p_j b(z_j)$ и «расходов» $w_j^- = -(1 - p_j) b(z_j)$, взятых со своими знаками. В свою очередь, (см. выражение (11)), $p_j = q_j + w_j$. Таким образом, можно записать, что $P = \sum_{j=1}^{n^+} w_j^+ + \sum_{j=1}^{n^-} w_j^-$, где n^+ — количество ячеек, для которых выполняется условие $p_j - q_j > 0$, $n^- = n - n^+$. Поскольку $q_j = q = \frac{1}{n}$, то q является математическим ожиданием распределения p_j , откуда следует, что $\sum_{j=1}^{n^+} w_j^+ = -\sum_{j=1}^{n^-} w_j^-$, т. е. $P = 0$. Ну и поскольку $q_j = \frac{1}{n}$, то в соответствии с (11) $\dot{p}_j = \frac{1}{n}$, т. е. $\dot{H} = \dot{H}_{\max} = \ln n$. \square

Аналитическое решение задачи с другими ограничениями на P или C , по нашему мнению, более сложное. Например, его можно получить путем введения указанных ограничений в функцию Лагранжа при доказательстве теоремы 1 (см. [20, с. 350]), однако такое решение может быть только для функции полезности конкретного вида. Решение, приведенное на рис. 2, б, найдено методом итераций путем подбора подхо-

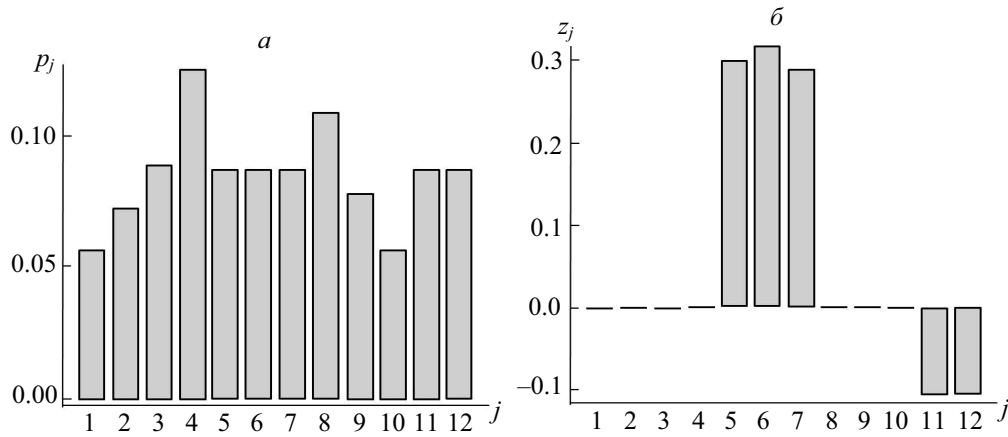


Рис. 4. Апостериорное распределение вероятности (а) и распределение ресурсов (б) по критерию максимума энтропии с вводом дополнительных ячеек

дящего значения $q_j = q$.

Исключение составляет лишь линейная функция $b(z)$, для которой решение может быть получено с использованием теоремы 9 (см. [20, с. 365]). Как и в работе [20], под ячейками s области S далее понимаются ячейки $j = 1, \dots, s, \dots, m$, между которыми выполняется перераспределение ресурсов, $m = m_1 + m_2$. С учетом особенностей данной задачи (возможность не только расходования, но и пополнения содержимого ячеек), если из некоторой ячейки s ресурс z_s расходуется, то будем именовать ее ячейкой s^+ области S^+ , а также использовать обозначения p_s^+ и z_s^+ . Если, напротив, содержимое ячейки s пополняется, будем именовать ее ячейкой s^- области S^- , а также использовать обозначения p_s^- и z_s^- .

Теорема 2. Пусть функция полезности $b(z)$ вида (16) является линейной ($r = 1$, $a = 0$), а суммарные затраты равны M . Тогда количество ресурсов z_s , которое необходимо распределить в ячейки s для достижения максимума апостериорной энтропии \hat{H}_J , определяется выражениями

$$z_s^+ = \frac{1}{x_s^+} \left(M_1 - \frac{m_1}{k} \right) + \frac{1}{k}, \quad z_s^- = \frac{1}{x_s^-} \left(M_2 - \frac{m_2}{k} \right) + \frac{1}{k},$$

где

$$x_s^+ = p_s^+ \sum_{j=1}^{m_1} \frac{1}{p_j^+}, \quad x_s^- = (1 - p_s^-) \sum_{j=1}^{m_2} \frac{1}{1 - p_j^-},$$

$$M_1 = M + M_2, \quad M_2 = \frac{A_2}{A_1},$$

$$A_1 = \frac{1}{x_s^+} + \frac{1}{x_s^-} \left(\frac{1 - p_s^-}{p_s^+} \right),$$

$$A_2 = - \left(\frac{1}{kp_s^+} \right) + \left(\frac{m_1}{kx_s^+} \right) - \left(\frac{M}{x_s^+} \right) + \left(\frac{1 - p_s^-}{p_s^+} \right) \left(\frac{m_2}{kx_s^-} \right).$$

Доказательство. Согласно лемме 1 (см. [19, с. 38]), рост энтропии в некоторой части области J ведет к ее увеличению во всей области J , при этом

максимум апостериорной энтропии \hat{H}_J имеет место при достижении равенства апостериорной вероятности \hat{p}_s в ячейках области S . В соответствии с теоремой 9 [20, с. 365] для линейной функции $b(z)$ количество поисковых усилий, которое необходимо приложить в ячейке s для достижения равенства апостериорной вероятности \hat{p}_s в ячейках области S , определяется выражением $z_s = \frac{1}{x_s} (M - \frac{m}{k}) + \frac{1}{k}$, в котором $x_s = \sum_{j=1}^m (\frac{p_s}{p_j})$, $j = 1, \dots, s, \dots, m$, m — количество ячеек поиска, $M = \sum_{j=1}^m z_s$ — поисковый ресурс. С учетом особенностей данной задачи (возможность пополнения содержимого ячеек) запишем, что $M = M_1 - M_2$, а $M_1 = \sum_{j=1}^{m_1} z_s^+$, $M_2 = \sum_{j=1}^{m_2} z_s^-$. Тогда $z_s^+ = \frac{1}{x_s^+} (M_1 - \frac{m_1}{k}) + \frac{1}{k}$, $z_s^- = \frac{1}{x_s^-} (M_2 - \frac{m_2}{k}) + \frac{1}{k}$, где $x_s^+ = \sum_{j=1}^{m_1} (\frac{p_s^+}{p_j^+})$, $x_s^- = \sum_{j=1}^{m_2} (\frac{1-p_s^-}{1-p_j^-})$.

Следует заметить, что условие $s \in S^+$ выполняется в том случае, если $p_s \geq \gamma$, в котором γ определяется теоремой 1 (см. [20, с. 350]), в противном случае $s \in S^-$. Поскольку M_1 и M_2 являются искомыми величинами, то уравнение $M = M_1 - M_2$ имеет бесконечное число решений. Для нахождения значений M_1 и M_2 , при которых выполняется условие $q_s^+ = q_s^-$, приравняем q_s^+ (см. формулу (10)) и q_s^- (формула (13)), подразумевая в них под p_s любое из значений, соответственно p_s^+ и p_s^- :

$$p_s^+ - p_s^+ b(z_s^+) = p_s^- + (1 - p_s^-) b(z_s^-),$$

здесь $b(z_s)$ определяется выражением (16) для условий данной теоремы ($r = 1$, $a = 0$). В результате алгебраических преобразований получим приведенные выше выражения для M_1 и M_2 . \square

Выше указывалось, что решение, приведенное на рис. 2, б, получено методом итераций путем подбора подходящей величины $q_j = q$. Уточним, что суть метода заключалась в подборе значений M_1 и M_2 для функции полезности выбранного вида, удовлетворяющих условию $q_s^+ = q_s^-$ с учетом заданных ограничений на величины M и P .

Рассмотрим решение задачи с ограничением на количество ресурсов: пусть количество видов расходуемых m_1 и пополняемых m_2 ресурсов равно, например, $m_1 = m_2 = 2$. Для выбора ячеек, перераспределение ресурса между которыми дает максимальный прирост энтропии $\Delta H = \hat{H}_J - H_J$, воспользуемся теоремой 5 (см. [20, стр. 359]), утверждающей, что максимум ΔH достигается при поиске в той ячейке области J , в которой p_j максимальна. Тогда с учетом рассмотренных выше отличий данной задачи от задачи поиска расход ресурса должен производиться из ячеек 5 и 6, а пополнение — в ячейки 1 и 10. Такое решение можно представить, например, как продажу части активов 5 и 6 с последующим использованием вырученных средств для пополнения активов 1 и 2.

На рис. 3 приведено решение данной задачи с ограничением только на число ячеек: графики апостериорного распределения вероятности \hat{p}_j (а) и распределения ресурсов z_j (б) по критерию максимума энтропии.

При ограничении только на число ячеек (рис. 3) максимум энтропии достигается при $P = 0.035$ и $C = 0.389$, а его значение выше, чем максимумов энтропии, получаемых в условиях дополнительных ограничений. При наличии указанных ограничений графики будут иметь внешнее сходство, но при ограничении на «прибыль» $P = 0$ суммарные затраты составят $C = 0.335$, а при ограничении на ресурс $C = 0$ будет иметь место «убыток» $P = -0.15$.

Следует заметить, что для функции $b(z)$ любого другого вида графики апостериорного распределения вероятности будут идентичны представленным на рис. 3, а,

отличия имеют место только в распределении ресурсов (см. рис. 3, б). Например, для функции $b(z)$, выпуклой вверх ($r = 3$), при ограничении $P = 0$ суммарные затраты будут равны $C = 0.665$, а при $C = 0$ «убыток» составит $P = -0.158$.

Наконец, рассмотрим решение задачи при наличии всех ограничений, указанных в условии. Предположим, что $m_1 = 3$, $d = 2$, т. е. появляются два новых вида ресурсов, их формирование (покупка) производится за счет трех ресурсов из числа имеющихся. Тогда исходное априорное распределение p будет содержать уже 12 ячеек, где $p_{11} = p_{12} = 0$. За исключением этого данная задача ничем не отличается от рассмотренной выше, для ее решения также воспользуемся теоремой 5 (см. [20, с. 359]). На рис. 4 приведено решение такой задачи с ограничением только на число ячеек. В этом случае максимум энтропии принимает наибольшее значение и достигается при $P = 0.074$ и $C = 0.686$. При ограничении на «прибыль» $P = 0$ суммарные затраты составят $C = 0.55$, а при ограничении на ресурс $C = 0$ будет иметь место «убыток» $P = -0.23$.

Как указывалось выше, для функции $b(z)$ любого другого вида графики апостериорного распределения (рис. 4, а) будут идентичными, но распределение ресурсов (рис. 4, б) будет отличаться. Например, для функции $b(z)$, выпуклой вверх ($r = 3$), при ограничении $P = 0$ суммарные затраты составят $C = 1.17$, а при $C = 0$ «убыток» будет равен $P = -0.235$.

6. Заключение. Настоящая статья является логическим продолжением работ [19, 20]. Э. Джейнс утверждал, что теория информации должна иметь точную, аналитически демонстрируемую всеобъемлющую связь не только с теорией поиска, но и с оптимальным планированием в любой области, поскольку любая оптимальная стратегия — это только процедура, использующая априорную информацию для достижения поставленной цели настолько эффективно, насколько это возможно [24, с. 17]. Цель представленной статьи — очередное подтверждение данной идеи и дальнейшее установление этой «аналитически демонстрируемой связи».

Литература

1. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics // Physical Review. 1957. Series II. N 4. P. 620–630. <https://dx.doi.org/10.1103%2FPhysRev.106.620>
2. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics. II // Physical Review. 1957. Series II. N 2. P. 171–190. <https://dx.doi.org/10.1103%2FPhysRev.108.171>
3. Shannon C. E. A mathematical theory of communication // Bell System Techn. Journal. 1948. Vol. 27. N 4. P. 623–656.
4. Jaynes E. T. Where do we stand on maximum entropy? // Maximum Entropy Formalism. Cambridge, USA: MIT Press, 1978. P. 15–118.
5. Jaynes E. T. The relation of Bayesian and maximum entropy methods // Maximum entropy and Bayesian methods in science and engineering. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publ. 1988. Vol. 1. P. 25–29.
6. Dias P. M., Shimony A. A critique of Jaynes' maximum entropy principle // Advances in Applied Mathematics. 1981. Vol. 2. P. 172–211.
7. Mohammad-Djafari A. Maximum entropy and Bayesian inference: where do we stand and where do we go? // Bayesian inference and maximum entropy methods in science and engineering. 2006. Vol. 872. Iss. 11. P. 3–14.
8. Grendar M. jr., Grendar M. Maximum entropy: clearing up mysteries // Entropy. 2001. Vol. 3. Iss. 2. P. 58–63. <https://doi.org/10.3390/e3020058>
9. Neapolitan R. E., Jiang X. A note of caution on maximizing entropy // Entropy. 2014. Vol. 16 (7). P. 4004–4014. <https://doi.org/10.3390/e16074004>
10. De Martino A., De Martino D. An introduction to the maximum entropy approach and its application to inference problems in biology // Heliyon. 2018. Vol. 4 (4). P. 314–344. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2018.e00596>

11. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / пер. с англ.; под ред. и с доб. Н. Н. Воробьева. М.: Наука, 2014. 708 с.
12. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций / пер. с англ.; под ред. И. А. Ушакова. М.: Мир, 1971. 533 с.
13. Трухачев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 257 с.
14. Королев О. Л., Кусый М. Ю., Сигал А. В. Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений в экономике. Симферополь: Изд-во «ОДЖАКЪ», 2013. 148 с.
15. Мизно В. Н. Модель максимальной энтропии для формирования инвестиционного портфеля // Вестник Тверского государственного университета. Прикладная математика. 2017. № 1. С. 45–55.
16. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем / пер. с англ. Ю. А. Дубова; под ред. Ю. С. Попкова. М.: Наука, 1978. 246 с.
17. Герасюкин М. И. Математическая экономика: учебник. Самара: Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета, 2011. 176 с.
18. Markowitz H. M. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7 (1). P. 77–91. <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1413077>
19. Прокаев А. Н. Принцип максимума энтропии в теории поиска // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 27–42. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.103>
20. Прокаев А. Н. Теоретические основы решения задач поиска методом максимума энтропии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 348–368. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.304>
21. Лисица М. И. Оценка доходности и риска финансовых инвестиций: учебник. СПб.: Изд-во Университета при Межпарламентской Ассамблее ЕврАзЭС, 2018. 226 с.
22. Добрина М. В. Функции полезности и их применение в моделировании портфельных решений // Современная экономика: проблемы и решения. 2017. Вып. 8 (92). С. 64–76. <https://doi.org/10.17308/merc.2017.8/1748>
23. Бакулин А. Г. Индексное инвестирование. 2021. 82 с.
URL: <https://artem-bakulin.github.io/latex/papers/index-investing/> (дата обращения: 19 января 2024 г.).
24. Jaynes E. T. Entropy and search theory // Maximum-entropy and Bayesian methods in inverse problems. Fundamental theories of physics. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1985. Vol. 14. P. 1–18.

Статья поступила в редакцию 3 февраля 2024 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Прокаев Александр Николаевич — д-р техн. наук, доц.; prokaev@bk.ru

The maximum entropy principle in decision theory

A. N. Prokaev

St. Petersburg federal Research Center of the Russian Academy of Sciences — Hi Tech Research and Development, Office Ltd, 39, 14th line of Vasilyevsky Island, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Prokaev A. N. The maximum entropy principle in decision theory. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 153–169. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.203> (In Russian)

Traditionally, the principle of maximum entropy is used to find unknown distribution of random variables. In decision theory, this principle is used primarily in situations of uncertainty regarding the probability distribution of hypotheses about the “state of the environment,” where the environment is understood as a set of parameters that influence the result of the decision made. This paper considers the use of the principle of maximum entropy for a different purpose, namely for the purpose of optimal distribution of resources of various types. A proof of theorems is given that make it possible to create algorithms for solving

various problems of resource allocation based on the principle of maximum entropy, as well as examples of solving demonstrative problems.

Keywords: information theory, decision theory, search theory, expected utility theory, utility function, maximum entropy principle.

References

1. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 1957, Series II, no. 4, pp. 620–630. <https://dx.doi.org/10.1103%2FPhysRev.106.620>
2. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics. II. *Physical Review*, 1957, Series II, no. 2, pp. 171–190. <https://dx.doi.org/10.1103%2FPhysRev.108.171>
3. Shannon C. E. A mathematical theory of communication. *Bell System Techn. Journal*, 1948, vol. 27, no. 4, pp. 623–656.
4. Jaynes E. T. Where do we stand on maximum entropy? *Maximum entropy formalism*. Cambridge, USA, MIT Press, 1978, pp. 15–118.
5. Jaynes E. T. The relation of Bayesian and maximum entropy methods. *Maximum entropy and Bayesian methods in science and engineering*. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publ., 1988, vol. 1, pp. 25–29.
6. Dias P. M., Shimony A. A critique of Jaynes' maximum entropy principle. *Advances in Applied Mathematics*, 1981, vol. 2, pp. 172–211.
7. Mohammad-Djafari A. Maximum entropy and Bayesian inference: where do we stand and where do we go? *Bayesian inference and maximum entropy methods in science and engineering*, 2006, vol. 872, iss. 11, pp. 3–14.
8. Grendar M. jr., Grendar M. Maximum entropy: clearing up mysteries. *Entropy*, 2001, vol. 3, iss. 2, pp. 58–63. <https://doi.org/10.3390/e3020058>
9. Neapolitan R. E., Jiang X. A note of caution on maximizing entropy. *Entropy*, 2014, vol. 16 (7), pp. 4004–4014. <https://doi.org/10.3390/e16074004>
10. De Martino A., De Martino D. An introduction to the maximum entropy approach and its application to inference problems in biology. *Heliyon*, 2018, vol. 4 (4), pp. 314–344. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2018.e00596>
11. Neumann J. von, Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior*. Princeton, Princeton University Press, 1953, 707 p. (Rus. ed.: Neumann J. von, Morgenshtern O. *Teoriya igr i ekonomicheskoe povedenie*. Moscow, Nauka Publ., 2014, 708 p.)
12. Ackoff R. L., Sasieni M. W. *Fundamentals of operations research*. New York, John Wiley & Sons, Inc. Publ., 1967, 455 p. (Rus. ed.: Ackoff R. L., Sasieni M. W. *Osnovi issledovaniya operatsiy*. Moscow, Mir Publ., 1971, 533 p.)
13. Trukhaev R. I. *Modeli priniatiya resheniy v usloviyakh neopredelionnosti [Models of decision making in conditions of uncertainty]*. Moscow, Nauka Publ., 1981, 257 p. (In Russian)
14. Koroliov O. L., Kussiy M. Y., Sigal A. V. *Primenenie entropii pri modelirovani protsessov priniatiya resheniy v ekonomike [Application of entropy in modeling decision-making processes in economics]*. Simferopol, ODSHAK Publ., 2013, 148 p. (In Russian)
15. Mikhno V. N. Model maksimalnoy entropii dlia formirovaniya investitsionnogo portfelia [Maximum entropy model for forming an investment portfolio]. *Vestnik of Tver State University. Applied Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 45–55. (In Russian)
16. Wilson A. G. *Entropy in urban and regional modelling*. London, Pion Ltd., 1978, 248 p. (Rus. ed.: Wilson A. G. *Entropiynie metodi modelirovaniya slozhnikh sistem*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 246 p.)
17. Geraskin M. I. *Matematicheskaya ekonomika [Mathematical economics]*. Textbook. Samara, Samara State Aerospace University Publ., 2011, 176 p. (In Russian)
18. Markowitz H. M. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952, vol. 7 (1), pp. 77–91. <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1413077>
19. Prokaev A. N. Printsip maksimuma entropii v teorii poiska [The maximum entropy principle in search theory]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 27–42. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.103> (In Russian)
20. Prokaev A. N. Teoreticheskie osnovi resheniya zadach poiska metodom maksimuma entropii [Theoretical fundamentals for search problems solving using maximum entropy method]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 348–368. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.304> (In Russian)
21. Lisitsa M. I. *Otsenka dohodnosti i riska finansobikh investitsiy [Assessing the profitability and risk of financial investments]*. Textbook. St. Petersburg, University of Interparliamentary Assembly of

EurAsES Publ., 2018, 226 p. (In Russian)

22. Dobrina M. V. Funktsii poleznosti i ih primeneniye v modelirovaniy portfelnykh resheniy [Utility functions and their application in modeling portfolio decisions]. *Sovremennaya ekonomika: problemi i resheniya* [Modern economy: problems and solutions], 2017, iss. 8 (92), pp. 64–76.

<https://doi.org/10.17308/meps.2017.8/1748> (In Russian)

23. Bakulin A. G. *Indeksnoe investirovaniye*. [Index investing]. 2021, 82 p. Available at: <https://artem-bakulin.github.io/latex/papers/index-investing/> (accessed: January 19, 2024).

24. Jaynes E. T. Entropy and search theory. *Maximum-entropy and Bayesian methods in inverse problems. Fundamental theories of physics*. Dordrecht, Netherland, Springer Publ., 1985, vol. 14, pp. 1–18.

Received: February 3, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Author's information:

Aleksandr N. Prokaev — Dr. Sci. in Technics, Associate Professor; prokaev@bk.ru

Analysis of consensus time and winning rate in two-layer networks with hypocrisy of different structures*

Ch. Zhao, E. M Parilina

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zhao Ch., Parilina E. M. Analysis of consensus time and winning rate in two-layer networks with hypocrisy of different structures. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 170–192. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.204>

We have developed a microscopic version of general concealed voter model (GCVM). Original GCVM uses only statistical-physical methods, while our new approach starts with a real network. A microscopic model is suitable for any two-layer network (with internal and external layers) satisfying the definition given in the paper. We conduct a series of simulations with different network structures and found that a cyclic external structure prolongs consensus time in comparison with a complete external structure. Moreover, a cyclic external structure has a positive impact on a winning rate, and this result is different from the one obtained in the macroscopic version of GCVM. The possible reasons for this difference are discussed in the paper. Additionally, we propose and validate the hypothesis that there exists a strong linear relationship between a consensus time and pairwise average shortest paths d in the network structure. We performed a controlled variable approach to validate the impact of each individual parameter on key performance indicators (KPIs) including a consensus time and winning rate. Furthermore, we assess the influence of parameter combinations on KPIs by analyzing the results using the K -means algorithm. We conclude that certain parameter combinations can have a significant impact on the consensus time.

Keywords: opinion dynamics, voter model, concealed voter model, general concealed voter model, winning rate.

1. Introduction. Opinion dynamics models can be divided into two main groups: macroscopic and microscopic. Macroscopic models examine social networks using statistical-physical methods and applying probability theory and statistical methods to analyze the evolution of opinion distribution, e.g., the Ising model [1], voter model [2], concealed voter model (CVM) [3, 4], and a macroscopic version of the general concealed voter model (GCVM) [5]. The Ising model has a long history in statistical physics [6]. The Sznajd model [7] is one of the well-known modifications of the Ising model. In each round of the Sznajd model, a pair of agents a_i and a_{i+1} is selected for interaction to influence the nearest neighbors, i.e. agents a_{i-1} and a_{i+2} . In a voter model [2], a random agent a_i is chosen, then her random neighbor is chosen, and this neighbor adopts a_i 's opinion. In CVM [3, 4], it is supposed that the social network is divided into external and internal layers, and the individuals conceal or publicly express their opinions. The external layer in CVM is a complete network, and each node in the external layer is linked with her prototype node in the internal layer. Moreover, there are no connections between nodes in the internal layer. Therefore, no internal interaction between agents is assumed in CVM.

* The work of the second author was supported by Russian Science Foundation grant N 22-11-00051, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00051/>

© St. Petersburg State University, 2024

In paper [5] GCVM is introduced, where it is supposed that the individuals can interact in the internal layer, which is motivated by the wish of individuals to share their real opinions with their close friends.

Microscopic models directly describe how individuals' opinions evolve social individuals' perspectives, e.g., see the DeGroot model [8], the Friedkin—Johnsen (F-J) model [9], and bounded confidence models [10, 11].

In the DeGroot model, each individual updates his opinion based both on his own and his neighbors' opinions. The F-J model is an extension of the DeGroot model in which stubborn agents are considered. In the F-J model, actors can also take into account their initial prejudices in every iteration of opinion [12]. The possibility to control the agents' opinions by nonmembers of network is considered in [13, 14]. The upgraded F-J model with passive and active agents is introduced in [15]. A bounded confidence model (BCM) is a model, in which agents ignore the opinions that are very far from their own ones [6]. The BCM includes two essential models: the Deffuant—Weisbuch model (D-W) proposed in paper [11], and the Hegselman—Krause (H-K) model introduced in the work [10]. In the D-W model, two individuals a_i, a_j are randomly chosen, and they determine whether to interact according to the bounded confidence [16]. The comprehensive survey [17] examines various models in the bounded confidence opinion dynamics domain, highlighting key mechanisms leading to consensus emergence, polarization, and fragmentation within groups.

According to [18], opinion dynamics models are usually composed of a few essential elements: (i) opinion expression formats defining how to represent opinion mathematically, (ii) fusion rule determining how individuals interact with each other, and (iii) opinion dynamics environments, that is, a structure of such a social network.

In a social network, individuals neither fully accept nor completely ignore the opinions of other individuals. To a certain extent, they consider these opinions in forming their new opinions in a process defined by a fusion rule. Through a group interaction, individuals continuously update and integrate their opinions on the same issue. Eventually, there are three varieties of stabilized fusion results: consensus, polarization, fragmentation, and one unstable fusion result, that is oscillation [10].

The GCVM [5] belongs to the group of macroscopic models, we start with a network structure and use statistical-physical methods and probability theory to formulate and simulate the opinion dynamics process (i.e. in the simulations, we do not create a real network and simulate this model based on formulas).

In this paper, we examine several real networks and simulate the opinion dynamics on these networks. First, for the given internal and external structures, we create the corresponding networks. Then, we initialize the initial opinion for each individual/agent based on some parameters. Like in a macroscopic version of GCVM, we allow players to exchange their opinions with players from internal layer.

The difference between macro and micro versions of GCVM is that in a micro version model we do not need to adjust the simulation program according to a different network structure. As long as a network structure is given, the program will automatically produce simulations. Therefore, it will be convenient to use this program to simulate a real network structure. But in a macro version, for different network structures, we should adjust the corresponding state transition formulae.

The primary conclusion drawn from this research indicates that a cyclic external structure invariably increases consensus time and positively impact a winning rate. Furthermore, it has been observed that when a circle in the external layer is extended to a

complete graph, it significantly impacts the consensus time due to the reduction of the average shortest path between every pair of nodes in the external layer (see formula (2)). While each parameter individually influences consensus time, none of them impact the winning rate.

The rest of this paper is organized as follows. Section 2 introduces a model. In Section 3 we present the experiments and results. The conclusions are given in Section 4.

2. Model. A two-layer network with N individuals/agents is defined by

- N : number of individuals/agents in the network;
- $a_i = (a_i^E, a_i^I)$: individual/agent i , where $i = 1, \dots, N$, a_i^E (a_i^I) is a representation of agent i in the external (internal) layer (i.e. a set of individuals/agents is the same for both layers);
- $G_E(\mathcal{V}_E, \mathcal{E}_E)$: predefined external network, where $\mathcal{V}_E = \{a_i^E\}$, $i = 1, \dots, N$, represents a set of individuals and \mathcal{E}_E — a set of social relations between individuals in the external layer;
- $G_I(\mathcal{V}_I, \mathcal{E}_I)$: predefined internal network, where $\mathcal{V}_I = \{a_i^I\}$, $i = 1, \dots, N$, represents a set of individuals and \mathcal{E}_I — a set of social relations between individuals in the internal layer;
- $\mathcal{E}_C = \{(a_i^E, a_i^I) | i = 1, \dots, N\}$: set of edges connecting individuals in external and internal layers.

We define a two-layer network with N individuals/agents as

$$G(\mathcal{V}, \mathcal{E}), \tag{1}$$

where $\mathcal{V} = \mathcal{V}_E \cup \mathcal{V}_I$, $|\mathcal{V}_E| = |\mathcal{V}_I| = N$, and $\mathcal{E} = \mathcal{E}_E \cup \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_C$. This definition is independent of a specific network structure, i.e. external/internal networks can be different.

2.1. The general concealed voter model (macro version). Zhao and Parilina [5] proposed GCVM based on CVM introduced in [3]. These papers use simulations to represent opinion transmission processes in two-layer networks. In the following section, we introduce GCVM in a micro version.

2.2. The general concealed voter model (micro version). In the GCVM, we use R, B (r, b) to represent individuals' external (internal) red and blue opinions respectively. There is a list of notations:

- $S = \{Rr, Rb, Br, Bb\}$: set of all possible states of an individual;
- $\omega(a_i, t) \in S$: opinion of individual a_i at time t , where $i = 1, \dots, N$, and $t = 0, 1, \dots$;
- ρ_{r_e} : ratio of individuals having red opinion in external layer;
- ρ_{r_i} : ratio of individuals having red opinion in internal layer;
- ρ_r : ratio of individuals having red opinion in both internal and external layers;
- r_e : number of individuals having red opinion in external layer;
- r_i : number of individuals having red opinion in internal layer;
- r : number of individuals having red opinion in both internal and external layers;
- π_{c_e} : external copy rate, that is a probability of an individual to copy opinion of his/her external neighbor;
- π_{c_i} : internal copy rate, that is a probability of an individual to copy opinion of his/her internal neighbor;
- π_e : externalization rate, that is a probability of hypocrisy* choosing to publicly express his/her internal opinion;

* By hypocrisy we mean a node having different opinions in external and internal layers, i.e., the nodes in states Rb and Br .

- π_i : internalization rate, that is a probability of hypocrisy accepting his/her external opinion.

In Sections 2.2.1–2.2.3, we describe GCVM of opinion dynamics in a two-layer network. The description is organized so that to understand how numerical simulations presented in Section 3 are done. In the following section, we introduce GCVM in a micro version.

2.2.1. Two-layer network structure initialization. We start by setting two networks G_E and G_I (we read these networks from the file, and an example of such a file representing external cycle and internal star structures is shown in Listing. Then we add the edges between external and internal representations of individuals).

Listing. Example of graph file with external cycle and internal star structure

```

>>>external
E0 E1
E1 E2
E2 E3
E3 E0
<<<external end
>>>internal
I00 I1
I00 I2
I00 I3
<<<internal end

```

This results in a two-layer network G we store as an adjacency list.

2.2.2. Initialization of individuals' initial states. Denote a number of individuals in state $s \in S$ by $\#s$. We have the following relations:

$$\begin{aligned}
 N &= \#Rr + \#Rb + \#Br + \#Bb, \\
 r_e &= \#Rr + \#Rb, \\
 r_i &= \#Rr + \#Br, \\
 r &= \#Rr, \\
 \#Bb &= N - r_e - r_i + r, \\
 \#Rb &= r_e - r, \\
 \#Br &= r_i - r.
 \end{aligned}$$

Assuming a uniform distribution for each agent to belong to any state $s \in S$ at the initial time, we adopt the following rule of setting the initial state $\omega(a_i, 0)$ for any agent a_i at time $t = 0$:

$$\omega(a_i, 0) := f(x) = \begin{cases} Rr, & 0 \leq x < \rho_r, \\ Rb, & \rho_r \leq x < \rho_{r_e}, \\ Br, & \rho_{r_e} \leq x < \rho_{r_e} + \rho_{r_i} - \rho_r, \\ Bb, & \rho_{r_e} + \rho_{r_i} - \rho_r \leq x \leq 1, \end{cases}$$

where $x \sim U(0, 1)$.

2.2.3. Opinion transmission process. We can divide individuals into hypocrites and nonhypocrites based on the consistency of their external and internal opinions. Hypocrites are individuals who have different opinions in the internal and external layers, while non-hypocrites have the same opinions in both layers.

We focus on two measurements to analyze GCVM:

- *consensus time*: T_{cons} is consensus time in (G)CVM, that is, the time required for all individuals to form the same opinion in internal and external layers (i.e., $\rho_{r_e} = \rho_{r_i} = \rho_r = 0$ or 1 for T_{cons});

- *winning rate*: ρ is a winning rate of red opinion in a series of simulations. For the opinion, to win means that there is no other opinion that agents have in the whole network (i.e. in a series of simulations, the number of simulations, in which red opinion wins blue opinion divided by the number of simulations).

Before presenting an algorithm of GCVM, we briefly define the actions available for a randomly chosen individual a_i :

- *picking up a_i 's neighbor*: randomly choose a neighbor among all a_i 's neighbors. Let it be individual a_j (this is a prerequisite action for external/internal copying);

- *external copying*: a_i copies a_j 's external opinion with probability π_{c_e} ;

- *internal copying*: a_i copies a_j 's internal opinion with probability π_{c_i} ;

- *externalization*: a_i expresses his/her internal opinion with probability π_e (this action is available only for hypocrite);

- *internalization*: a_i accepts his/her external opinion with probability π_i (this action is available only for hypocrite).

Externalization and internalization are meaningless for non-hypocrites, so they have only two possible actions (external and internal copies).

Algorithm of GCVM:

Step 1. Initialize $t = 0$.

Step 2. Choose an individual a_i , uniformly random from N individuals in two-layer network G .

Step 3. Check all valid actions of individual a_i (depending on his/her state) and randomly choose one of the valid actions with equal probabilities:

I) a_i is a hypocrite, then he/she has four possible actions: (i) external copying, (ii) internal copying, (iii) externalization, and (iv) internalization. Any action is chosen with a probability of 0.25;

II) a_i is a nonhypocrite, then he/she can perform only external or internal copying. Any action is chosen with a probability of 0.5.

Step 4. Generate random number $x \sim U(0, 1)$. Perform the action chosen in Step 3:

a) if external copying is chosen in Step 3 and $x < \pi_{c_e}$, then a_i copies a_j 's external opinion;

b) if internal copying is chosen in Step 3 and $x < \pi_{c_i}$, then a_i copies a_j 's internal opinion;

c) if externalization is chosen in Step 3 and $x < \pi_e$, then a_i expresses his/her internal opinion;

d) if internalization is chosen in Step 3 and $x < \pi_i$, then a_i accepts his/her external opinion.

Step 5. Increase t by 1. If consensus is reached*, stop iteration. Otherwise, go back to Step 2.

3. Experiments and results.

3.1. General description. The experiment focuses on observing the effect of an external network structure on a winning rate of opinion and consensus time.

* The algorithm will be stopped when all individuals in both layers hold the same opinion, i. e. consensus is reached.

We consider two types of external structures: cycle and complete, and seven internal structures: cycle, complete, star, two-star (odd and even cases), and two-clique (odd and even cases). This gives us 14 different combinations of external-internal structures, i. e. 14 two-layer networks.

Figure 1 is an example of a two-layer network with an external cycle and internal two-clique layers. For other structures, we need to modify the corresponding layer accordingly, which we do not present here to save the space.

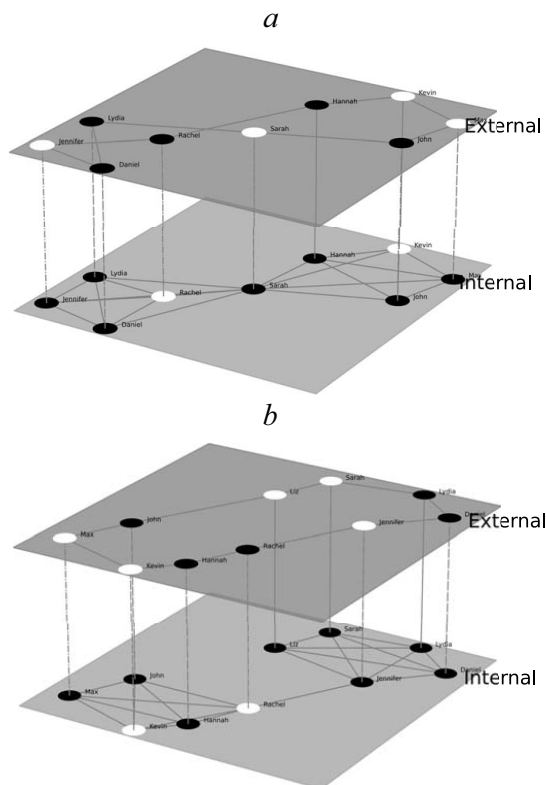


Figure 1. Representation of external cycle with internal two-clique network
 Black represents red opinion, and white represents blue opinion.
a — odd number of nodes; *b* — even number of nodes.

For our experiments, we fix the following parameters: $\rho_{r_e} = 0.75$, $\rho_{r_i} = 0.25$, $\rho_r = 0.2$, $\pi_{c_i} = \pi_{c_e} = 1$, $\pi_e = 0.01$, $\pi_i = 0.5$, $N = 100$. Then we observe the effect of external structure on the winning rate of opinion and consensus time (number of iterations) for the given internal structure. We conduct 100 simulations for each model and obtain the following statistical results. The models presented in Figure 2, *a* and *b* below are named as “external layer — internal layer — # of individuals”.

As shown* in Figure 2, *a*, we conclude that cyclic external structures prolong consensus time in comparison with complete external structure (the similar result is obtained in [5]). This conclusion is true for all internal structures we examine in the experiment.

* The number in the model name represents the number of individuals. e.g. 50 represents an even case, and 51 is an odd case.

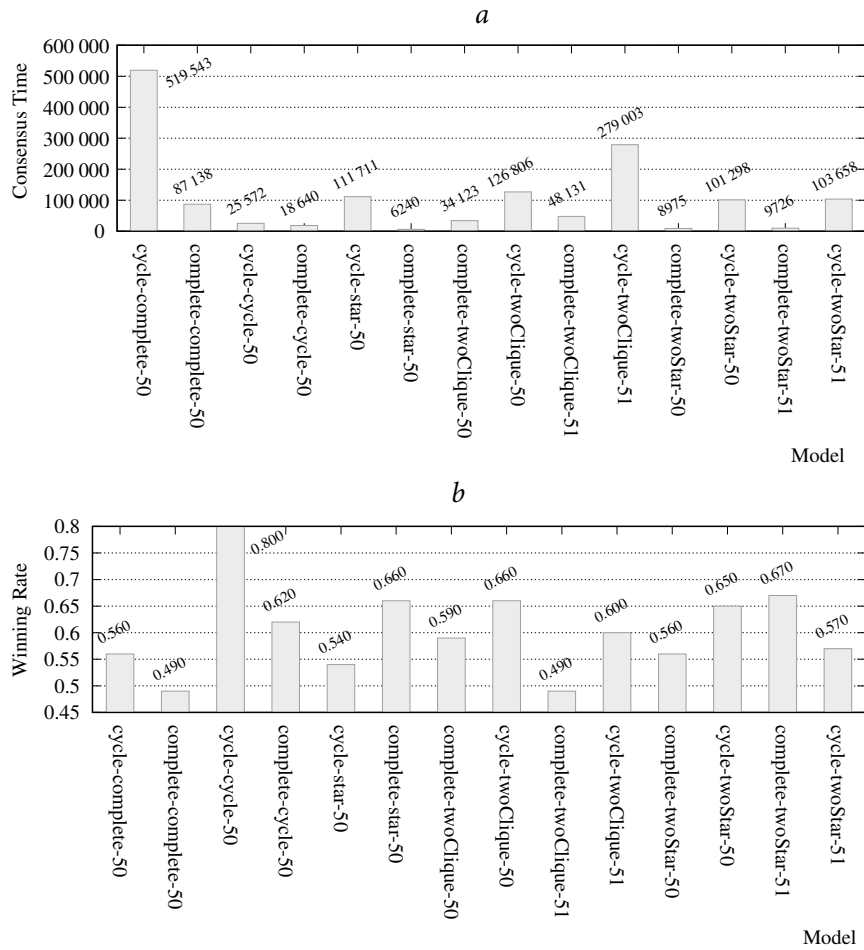


Figure 2. Observed consensus time (a) and winning rate (b) for models with different two-layer network structures

Additionally, we observe that the internal structure also has an impact on consensus time. For instance, consensus time for a two-star internal structure is less than that of a two-clique internal structure.

However, the observation results for the winning rate are quite different than in our previous work [5], as shown in Figure 2, b. We can notice that except internal structures “twoStar-51” and “star-50”, a cyclic external layer decreases the winning rate. For all other models, a cyclic external structure has a positive impact on the winning rate. The possible reason is in specification of a microscopic model, i.e. actions that an individual/agent can take are related only to his current state*. In a macroscopic version of GVM, the probability of each possible action is related to the overall state of the system represented by a triple $(\rho_{r_e}, \rho_{r_i}, \rho_r)$ (see [5]).

* For nonhypocrites, an individual has two possible actions, and for hypocrites, an individual has four possible actions. The probability for each possible action of an individual/agent at the present moment is fixed.

3.2. Main results and observations. Based on the findings from Section 3.1 indicating that a cyclic structure has a positive impact on consensus time, we have formulated the following research questions. A series of experiments were designed and conducted in order to address these research questions:

1. How does an external structure influence KPIs, i.e. are there any features of a network that significantly affect KPIs? To address these question we do the following:
 - a) extend a cyclic structure to a complete one in different ways*,
 - b) reduce a cyclic structure to a line, and observe the KPIs,
 - c) conduct statistical tests to determine if there are significant differences in the distribution of KPIs for different ways of constructing a complete graph (see Item a),
 - d) check the correlation between network features and KPIs.
2. How do externalization and internalization rates influence KPIs?
 - a) vary π_e from 0.1 to 1.0 with a step of 0.1,
 - b) vary π_i from 0.3 to 1.0 with a step of 0.1 (note: when $\pi_i = 0.1$ or $\pi_i = 0.2$, consensus cannot be reached in some models).
3. How does a copying rate influence KPIs?
 - a) vary π_c from 0.1 to 1.0 for both layers with a step of 0.1.
4. How does a combination of parameters influence KPIs (i.e. which combinations maximize or minimize consensus time and winning rate)?
 - a) use a combination of parameters $(\pi_i, \pi_e, \pi_{c_i}, \pi_{c_e})$, where we vary $\pi_i \in [0.3, 1]$ and $\pi_e, \pi_{c_i}, \pi_{c_e} \in [0.1, 1]$ with a step of 0.1.

We start by extending a cyclic structure in the following three different ways:

- *normal*: find a set of edges presented in a complete graph but not in a cyclic graph, and add them sequentially to a cyclic graph until finally obtain a complete graph;
- *random*: find a set of edges presented in a complete graph but not in a cyclic graph, and add them randomly to a cyclic graph;
- *shortest*: find a set of edges presented in a complete graph but not in a cyclic graph, and add the edges from the list that minimizes d , where d is the average of the shortest paths among all pairs of nodes in external layer. Here d is calculated as follows:

$$d = \sum_{s,t \in \mathcal{V}_E} \frac{d(s,t)}{n_E(n_E - 1)}, \quad (2)$$

where $d(s,t)$ is the length of the shortest path between s and t , \mathcal{V}_E is a set of nodes in external layer, $n = |\mathcal{V}_E|$ is the number of nodes in external layer.

Obviously, for an undirected graph with N nodes, a cyclic structure has only N edges, and a complete structure has $N \times (N - 1)/2$ edges. Therefore, a cyclic graph can become a complete graph by adding $N \times (N - 3)/2$ edges. If we remove one edge from a cyclic structure, it will degenerate to a line.

In our experiments, we extended a network structure from ‘cycle-complete-50’ to ‘complete-complete-50’, defined ‘cycle+ δ -complete-50’ as an intermediate network structure, where $\delta \in \mathbb{Z}$ means the number of edges which we have added to a cyclic structure by an iteration. Here $\delta \in [-1, 1175]$, and the value $\delta = -1$ corresponds to the case when we deleted an edge from a cycle degenerating this cycle into a line. When $\delta = 1175$, the cycle becomes a complete graph, i.e. the maximal number of edges that can be added into a cycle with 50 nodes is equal to 1175. In our experiments we examined the dynamics of consensus time and d when δ is increasing.

* A cycle graph can be transformed into a complete graph by adding several nonexistent edges, or degenerate into a line by deleting an existing edge.

The results of simulations are shown in Figure 3. In particular, Figure 3, *a* shows how d (δ) influences winning rate for different ways of extending a cyclic structure to a complete one. The right figure is an increase of the first 150 points from the left graph, we did the same in Figures 3, *b* and 4. Looking at Figure 3, *a*, we can notice that winning rate is almost white noise with changes of δ^* .

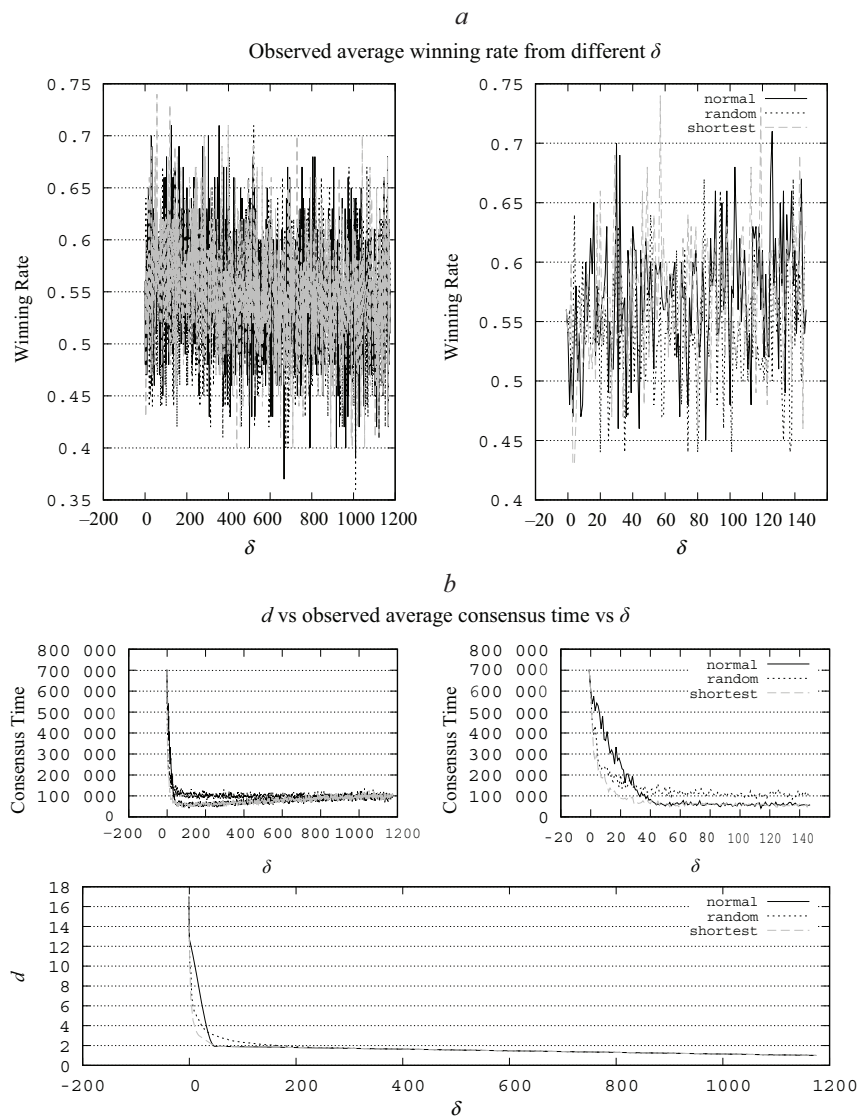


Figure 3. Winning rate (*a*) and consensus time (*b*) for the models with different extension ways

Figure 3, *b* shows a trend of consensus time when δ is changing, and it is easy to recognize that the black solid and gray dashed lines have almost the same trend. At

* The winning rate is white noise for “random” with lag 1–10, for “shortest” with lag 1–3, but the winning rate for “normal” extending way is not white noise which is confirmed by Ljung – Box test.

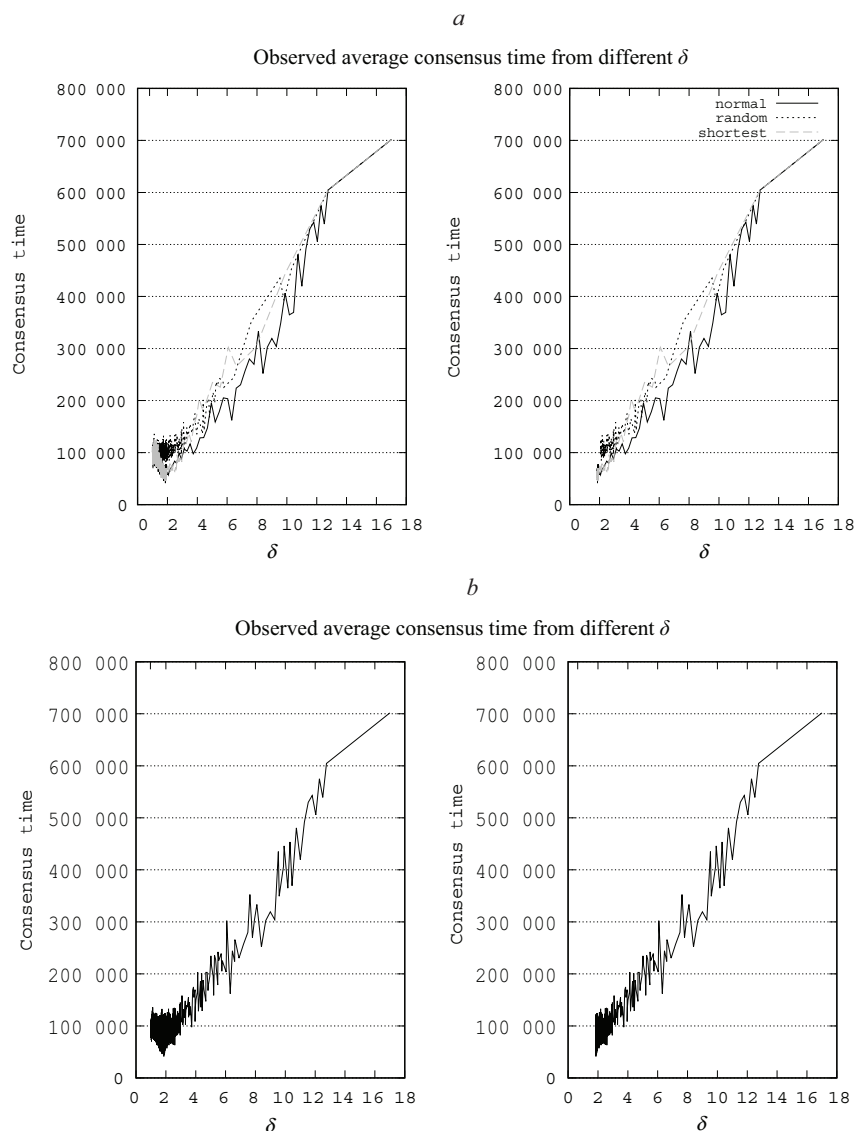


Figure 4. Consensus time vs d
a — for different extending ways, *b* — aggregated data

the beginning, with an increase of the number of added edges, consensus time significantly decreases. After reaching a certain level, the increase in the number of edges has no significant impact on consensus time. First points in Figure 3, *b* correspond to a network structure “cycle+1-complete-50” having an external line structure. It is obvious that $d_{\text{line}} > d_{\text{cycle}} > d_{\text{complete}}$. Therefore, we formulate Hypothesis 1.

Hypothesis 1. *There is a significant correlation between consensus time and d .*

In order to verify Hypothesis 1, we should find d for each graph in Figure 3, *b*. After calculating d for each graph, we construct the third subfigure in Figure 3, *b*. Obviously, the first and third subfigures have a similar trend.

We represent the relation between d and consensus time in Figure 4. The difference between Figure 4, *a* and *b* is that in Figure 4, *a* we group the data by extending way first, and then draw the trend, while in Figure 4, *b*, we do not specify the way of extending the graph, but only make an analysis based on different d and consensus time.

We can observe an approximately linear relationship in Figure 4. We can further use statistical methods for correlation analysis [19, 20]. The results of examining the Pearson correlation coefficient (PCC) [21] are shown in Figure 5. We make the following conclusions:

- the correlation between d and consensus time is significantly strong, and PCC is 0.78;
- for other pairs of KPIs, the correlation is not significant, and the absolute values of PCC are less than 0.15.

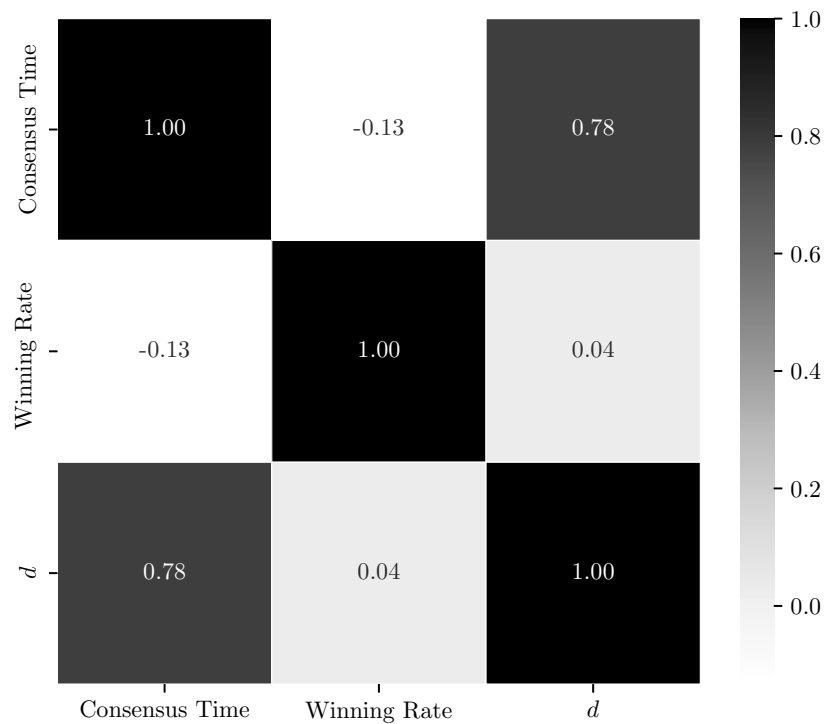


Figure 5. Pearson correlation coefficients

Hypothesis 2. *There are significant differences in KPI distributions for different ways of constructing a complete graph.*

We are interested in how a different extending way influences the distribution of KPIs. We show empirical distributions of KPIs in Figure 6. We should notice that their distributions are significantly different for different ways of extending the graph from a circle to a complete one. But for ‘normal’ and ‘shortest’ extending ways, KPIs distributions are very similar. We use the Kolmogorov — Smirnov test for further analysis [22, 23]. The results are shown in Table 1. From Table 1 we can see that p -values for all KPIs when we compare normal and shortest extending ways are larger than 0.05. We make the following conclusion: we should accept the null hypothesis that the distributions of KPIs for normal and shortest extending ways are identical.

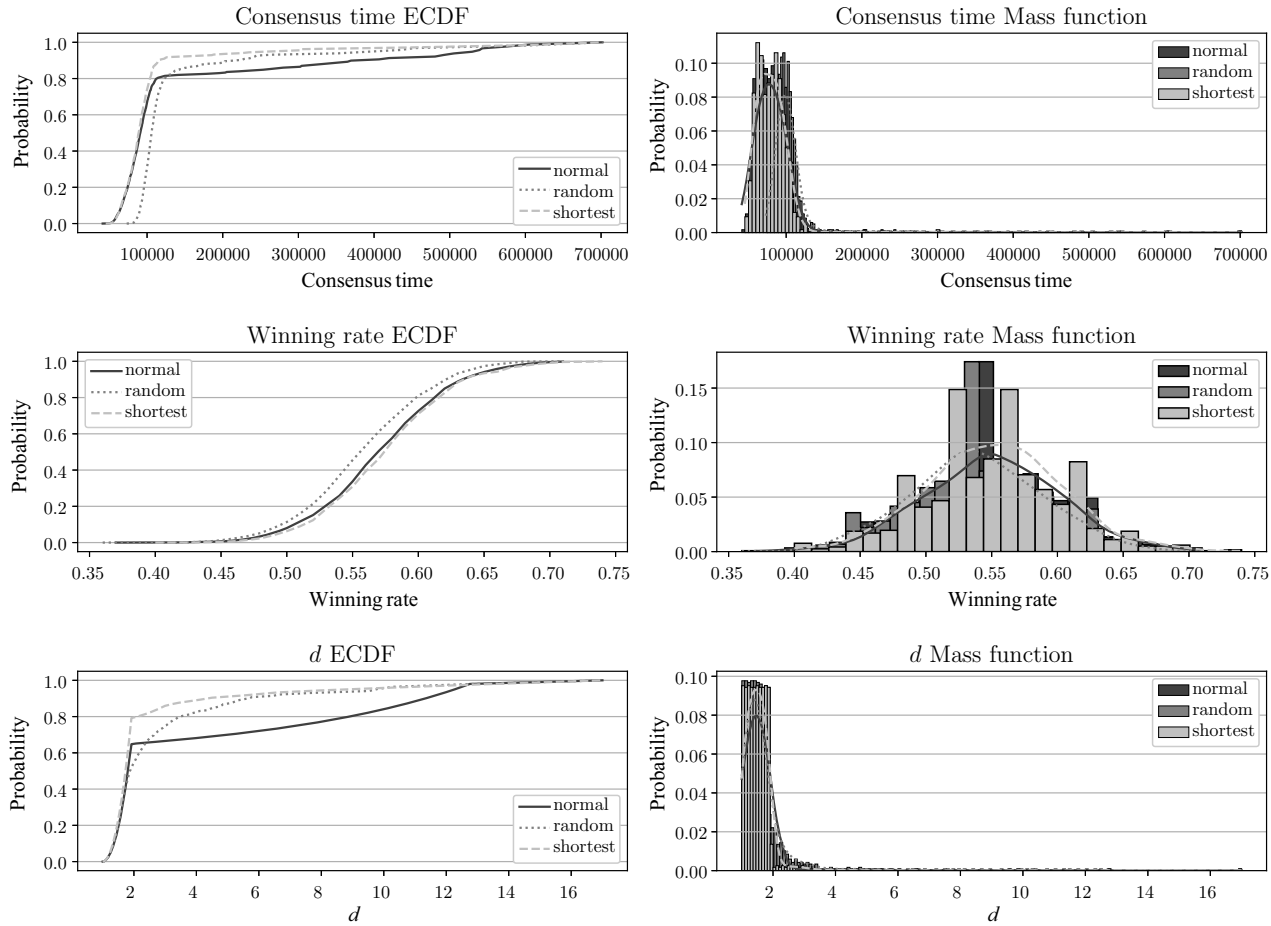


Figure 6. Frequency mass function and empirical cumulative distribution function (ECDF) for different KPIs

Table 1. Results of Kolmogorov — Smirnov tests

Pair	Statistics	<i>p</i> -values
<i>Consensus time</i>		
normal vs random	0.557	0.0
normal vs shortest	0.031	0.641
random vs shortest	0.574	0.0
<i>Winning rate</i>		
normal vs random	0.114	0.0
normal vs shortest	0.02	0.967
random vs shortest	0.121	0.0
<i>d</i>		
normal vs random	0.121	0.0
normal vs shortest	0.02	0.978
random vs shortest	0.12	0.0

For now we find out that some ways of extending a circle to a complete graph have an impact on KPI distributions. But how significant is this impact? How are mean and variance affected? Therefore, we formulate next hypothesis.

Hypothesis 3. Means and variances of KPIs are the same for different ways of extending a circle to a complete graph.

We use some statistical tests to verify equity of variances and equity of means. Before doing this, we first run normality tests [24, 25] since some statistical tests are parametric, i.e. they assume normality of the data. The results of normality tests are shown in Table 2, where we can see that the *p*-value for all KPIs are smaller than 0.05. Then we should reject the null hypothesis that any KPI is normally distributed.

Table 2. Results of normality tests

KPIs		Statistics	<i>p</i> -values
<i>Normality testing overall</i>			
Consensus time		0.5	0.0
Winning rate		0.996	0.0
<i>d</i>		0.396	0.0
Mode	KPIs	Statistics	<i>p</i> -values
<i>Normality testing grouped via mode</i>			
normal	Consensus time	0.379	0.0
normal	Winning rate	0.996	0.003
normal	<i>d</i>	0.32	0.0
random	Consensus time	0.347	0.0
random	Winning rate	0.996	0.003
random	<i>d</i>	0.469	0.0
shortest	Consensus time	0.442	0.0
shortest	Winning rate	0.995	0.001
shortest	<i>d</i>	0.369	0.0

In Tables 3 and 4, we have two group of results, ‘ev/em test for all’ corresponds to whether the variances/means of three extension ways are all equal. The ‘pairwise ev/em test’ corresponds to two-sample equity test of variances/means. As none of KPIs is normally distributed, we use the Levene test for variance equity [26–29].

We make the following conclusions from Table 3:

- the variance of winning rate is the same for all extension ways (all *p*-values in the Levene tests are greater than 0.05);
- we reject the null hypothesis that the variances of the consensus time are equal for all extension ways (all *p*-values in the Levene tests are less than 0.05);

Table 3. Results of variance equity tests

Test	Description	KPIs	Statistics	<i>p</i> -values
<i>EV test for all</i>				
Fligner test	Distribution free when populations are identical	Consensus time	195.249	0.0
		Winning rate	1.206	0.547
		<i>d</i>	23.341	0.0
Levene test	More robust for significantly non-normal population	Consensus time	12.533	0.0
		Winning rate	1.074	0.342
		<i>d</i>	5.441	0.004
Bartlett test	More depends on normal population	Consensus time	320.877	0.0
		Winning rate	3.584	0.167
		<i>d</i>	351.795	0.0
<i>Pairwise EV test</i>				
Levene test for pairs	normal vs random	Consensus time	20.967	0.0
	normal vs shortest	Consensus time	6.579	0.01
	random vs shortest	Consensus time	7.651	0.006
	normal vs random	Winning rate	1.572	0.21
	normal vs shortest	Winning rate	0.003	0.959
	random vs shortest	Winning rate	1.71	0.191
	normal vs random	<i>d</i>	0.187	0.665
	normal vs shortest	<i>d</i>	8.533	0.004
	random vs shortest	<i>d</i>	10.099	0.002

- variances of *d* are equal for normal and random extension ways.

Since none of KPIs is normally distributed, and not all KPIs are homoscedastic, to verify equity of means we use the Kruskal test [30–33]. The results of the tests are given in Table 4 and we conclude the following:

- the means of *d* are equal for all extension ways, i.e. a way of extending a circle to a complete graph does not affect the mean of *d* (all *p*-values in the Kruskal tests are greater than 0.05). For consensus time and winning rate, the means are not all equal, i.e. they differ by extension ways;
- we accept the null hypothesis that the means of consensus time (and winning rate) are equal for normal and shortest extension ways (all *p*-values in KruskalResult are greater than 0.05).

Figures 7 and 8 show how parameters (π_{c_e} and π_{c_i} in Figure 7, and π_e and π_i in Figure 8) influence winning rate. We can see that winning rate fluctuates within a certain range, but not too much. Therefore, we temporarily think that an impact of parameters on winning rate is limited.

Figures 9 and 10 show how consensus time varies with a change of parameters (π_{c_e} and π_{c_i} in Figure 9, and π_e and π_i in Figure 10). We make these interesting observations:

- an increase of external copying rate π_{c_e} has a negative effect on consensus time. The interpretation is as follows: when an individual in a society is more inclined to listen to the opinions of his/her external neighbors, it is helpful to reach consensus;
- with an increase of internal copying rate π_{c_i} , consensus time increases;
- with an increase of externalization rate π_e , consensus time first increases until it reaches the maximal value, and then decreases. The interpretation of this is as follows: expressing your true opinion to a certain extent is not effective to reach consensus within the whole system, but beyond this threshold, along with an increase of desire to express your opinion, for the system, it is easier to reach consensus;
- with an increase of internalization rate π_i , consensus time decreases. This can be interpreted as follows: when people are more willing to accept their own external opinion, it will accelerate consensus of the whole system.

Table 4. Results of mean equity tests

Test	Description	KPIs	Statistics	<i>p</i> -value
<i>EM test for all</i>				
f_oneway test	Independent sample; each sample is from a normally distributed population; homoscedasticity	Consensus time	99.143	0.0
		Winning rate	23.205	0.0
		<i>d</i>	4.795	0.008
Kruskal test	Sample size should > 5	Consensus time	1100.711	0.0
		Winning rate	46.919	0.0
Alexander Govern test	Independent sample; each sample is from a normally distributed population; heteroscedasticity	<i>d</i>	1.596	0.45
		Consensus time	261.282	0.0
		Winning rate	47.419	0.0
		<i>d</i>	12.243	0.002
<i>Pairwise EM test</i>				
Kruskal test for pairs	normal vs random	Consensus time	795.081	0.0
	normal vs shortest	Consensus time	0.775	0.379
	random vs shortest	Consensus time	854.985	0.0
	normal vs random	Winning rate	32.215	0.0
	normal vs shortest	Winning rate	0.229	0.632
	random vs shortest	Winning rate	37.928	0.0
	normal vs random	<i>d</i>	1.092	0.296
	normal vs shortest	<i>d</i>	0.001	0.972
	random vs shortest	<i>d</i>	1.301	0.254

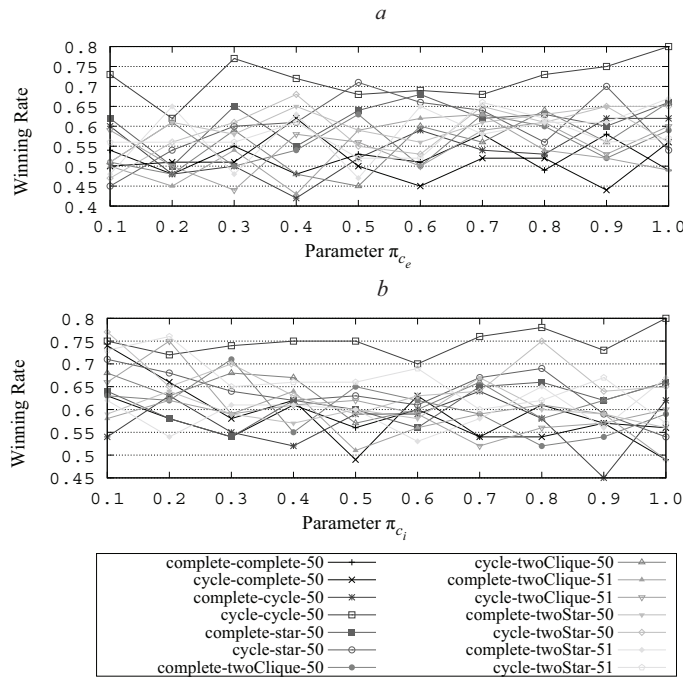
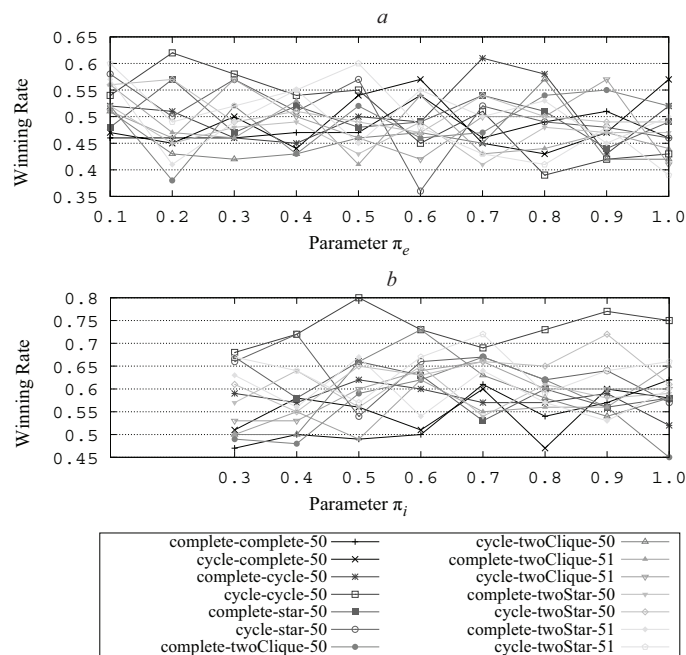


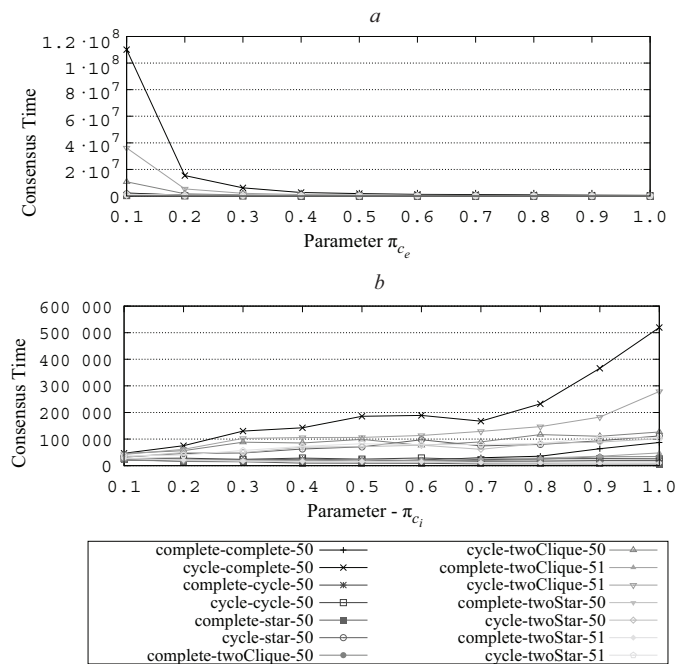
Fig. 7. Winning rate for different copying rates

a – varying external copying rate π_{c_e} , *b* – varying internal copying rate π_{c_i} .

In Tables 5 and 6, we show minimal/maximal consensus time and winning rate respectively for different combinations of parameters. If we compare the left and right parts in Tables 5 and 6, there is a large difference between maximum and minimum values.



Puc. 8. Winning rate for different externalization and internalization rates
a – varying externalization rate π_e , *b* – varying internalization rate π_i .



Puc. 9. Consensus time for different copying rates
a – Varying external copying rate π_{c_e} , *b* – varying internal copying rate π_{c_i} .

Table 5. Observed minimum and maximum consensus time

External	Internal	N	Max	π_{c_e}	π_{c_i}	π_e	π_i	Min	π_{c_e}	π_{c_i}	π_e	π_i
complete	complete	50	1185261644	0.1	1.0	0.1	0.3	28767	0.8	0.1	0.1	1.0
cycle	complete	50	1144248878	0.6	1.0	0.1	0.3	29387	0.9	0.1	0.3	1.0
complete	cycle	50	26467498	1.0	1.0	0.4	0.3	22850	1.0	0.1	0.1	1.0
cycle	cycle	50	474773	0.1	0.1	0.6	0.9	26842	1.0	0.9	0.1	1.0
complete	star	50	1602538	1.0	0.1	0.5	0.3	2018	0.1	1.0	1.0	0.3
cycle	star	50	275898	1.0	1.0	0.1	0.3	2021	0.1	1.0	1.0	0.3
complete	twoClique	50	492816970	0.2	1.0	0.1	0.3	28185	0.1	0.7	1.0	0.3
cycle	twoClique	50	151026217	0.7	1.0	0.1	0.3	20923	0.1	1.0	1.0	0.3
complete	twoClique	51	708728030	0.1	1.0	0.1	0.3	30628	0.9	0.1	0.1	1.0
cycle	twoClique	51	449651392	0.6	1.0	0.1	0.3	26250	0.1	1.0	1.0	0.3
complete	twoStar	50	2027297	1.0	0.1	0.5	0.3	3795	0.1	0.9	1.0	0.3
cycle	twoStar	50	317571	1.0	0.9	0.1	0.3	3743	0.2	1.0	1.0	0.4
complete	twoStar	51	2347437	1.0	0.1	0.5	0.3	4201	0.1	0.9	1.0	0.3
cycle	twoStar	51	349638	0.7	1.0	0.1	0.3	4527	0.2	1.0	1.0	0.3

Table 6. Observed minimum and maximum winning rate

External	Internal	N	Max	π_{c_e}	π_{c_i}	π_e	π_i	Min	π_{c_e}	π_{c_i}	π_e	π_i
complete	complete	50	0.7	0.1	0.1	0.2	1.0	0.31	0.2	0.6	1.0	0.5
cycle	complete	50	0.81	0.9	0.1	0.2	0.8	0.33	0.4	0.1	0.8	0.3
complete	cycle	50	0.71	0.2	0.1	0.4	1.0	0.29	0.7	1.0	0.6	0.3
cycle	cycle	50	0.82	0.1	0.6	0.1	0.6	0.25	0.2	0.9	1.0	0.6
complete	star	50	0.7	0.1	0.4	0.2	1.0	0.24	0.3	0.4	1.0	0.4
cycle	star	50	0.82	0.2	0.1	0.1	0.7	0.23	0.1	0.2	1.0	0.4
complete	twoClique	50	0.68	0.5	0.7	0.4	0.8	0.3	0.7	0.3	0.9	0.9
cycle	twoClique	50	0.76	0.9	0.1	0.1	1.0	0.28	0.2	0.8	0.6	0.5
complete	twoClique	51	0.73	0.1	0.1	0.1	0.9	0.32	0.4	0.8	0.7	0.4
cycle	twoClique	51	0.77	0.7	0.2	0.1	0.9	0.31	0.1	0.3	1.0	0.5
complete	twoStar	50	0.72	0.1	0.4	0.2	1.0	0.26	0.1	0.8	0.8	0.4
cycle	twoStar	50	0.77	0.8	0.2	0.2	0.9	0.25	0.3	0.3	1.0	0.3
complete	twoStar	51	0.72	0.1	0.1	0.1	0.7	0.27	0.1	0.8	0.9	0.3
cycle	twoStar	51	0.8	0.8	0.2	0.1	1.0	0.26	0.1	1.0	0.9	0.4

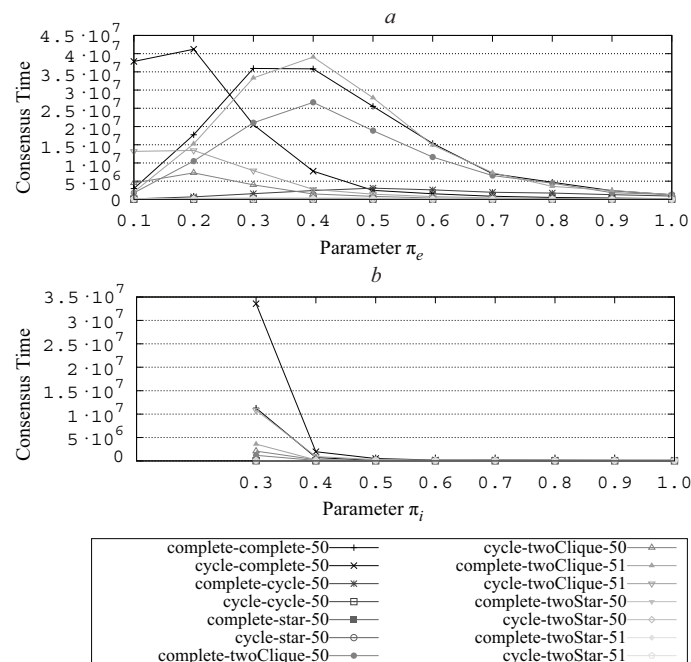


Рис. 10. Consensus time for different externalization and internalization rates
 a — varying externalization rate π_e , b — varying internalization rate π_i .

We performed a clustering procedure using K -means method with input variables being consensus time and winning rate separately [34, 35]. The resulting cluster labels are then added to the original data. Based on these cluster labels, we observed the distribution of the corresponding four parameters (π_{c_e} , π_{c_i} , π_e , and π_i).

Ideally, we prefer having two clusters since it allows us to determine which parameter combinations result in respectively large or small KPIs. In practice, we specify a range for the number of clusters k , from 1 to 20, and calculate the silhouette score [36]. In some sense an optimal value of k is the one maximizing the silhouette score.

Since the distributions of winning rates are very close to a normal distribution, based on clustering results of winning rate, we cannot observe any significant differences in descriptive statistics of clusters (see Table 7). Therefore, in our future analysis we only focus on performing a clustering analysis of consensus time.

Table 8 shows the number of elements in the clusters of consensus time, where we selected to have two clusters since it maximizes the silhouette score.

In Figure 11, *a*, the distributions of consensus time are almost consistent for different multi-layer models. At the same time, in Figure 11, *b*, we can clearly observe noticeable differences. This interesting result provides us with a valuable insight that the diverse parameter distributions can significantly prolong consensus time.

In the top right corner of Figure 11, *b*, we observe that when the internal structure is complete or twoClique, parameter π_{c_i} differs significantly consensus time for these models in comparison with other models. In the lower left corner, we can see when the internal structure is complete or twoClique, a value of π_e in cluster 1 is always equal to 0.1. For the figures in the top left and lower right corners, we can get similar conclusions by comparison.

Table 7. Descriptive statistics of clusters within winning rate (complete-complete-50)

Parameters	Cluster	Count	Mean	Std	Min	25 %	50 %	75 %	Max
π_{c_e}	0	169	0.484	0.282	0.1	0.3	0.4	0.7	1.0
	1	238	0.540	0.287	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0
	2	186	0.573	0.274	0.1	0.3	0.6	0.8	1.0
	3	291	0.543	0.289	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0
	:								
π_{c_i}	0	169	0.487	0.306	0.1	0.2	0.4	0.7	1.0
	1	238	0.591	0.293	0.1	0.3	0.6	0.9	1.0
	2	186	0.533	0.272	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0
	3	291	0.547	0.290	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0
	:								
π_e	0	169	0.509	0.290	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
	1	238	0.581	0.304	0.1	0.3	0.6	0.9	1.0
	2	186	0.525	0.292	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0
	3	291	0.587	0.282	0.1	0.4	0.6	0.8	1.0
	:								
π_i	0	169	0.698	0.233	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
	1	238	0.632	0.230	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0
	2	186	0.631	0.237	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0
	3	291	0.622	0.230	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0
	:								

Table 8. Consensus time cluster sizes for each model

Model	Cluster 0	Cluster 1
0 complete-complete-50	3267	20
1 cycle-complete-50	3241	19
2 complete-cycle-50	3319	105
3 cycle-cycle-50	3027	400
4 complete-star-50	3219	205
5 cycle-star-50	3124	312
6 complete-twoClique-50	3239	24
7 cycle-twoClique-50	3348	11
8 complete-twoClique-51	3904	14
9 cycle-twoClique-51	3831	17
10 complete-twoStar-50	3171	197
11 cycle-twoStar-50	3100	372
12 complete-twoStar-51	3598	225
13 cycle-twoStar-51	3634	362

4. Conclusions. The paper introduces a novel approach to simulate GCVM by creating a real network instead of using statistical-physical methods for its modeling. Therefore, our approach is suitable for any two-layer networks that are represented by (1). Additionally, we use different way to extend an external cyclic structure to a complete one. We highlight a hypothesis on how the way of extension of a circle to a complete graph influences consensus time and winning rate based on simulation results and use a statistical test to verify them. The main conclusions are as follows:

- cyclic external structure always increases consensus time;
- cyclic external structure has a positive impact on winning rate;
- cyclic external structure influences consensus time by an increase of d , i.e. there is a strong linear relationship between d and consensus time. The lower d is the higher is consensus time;

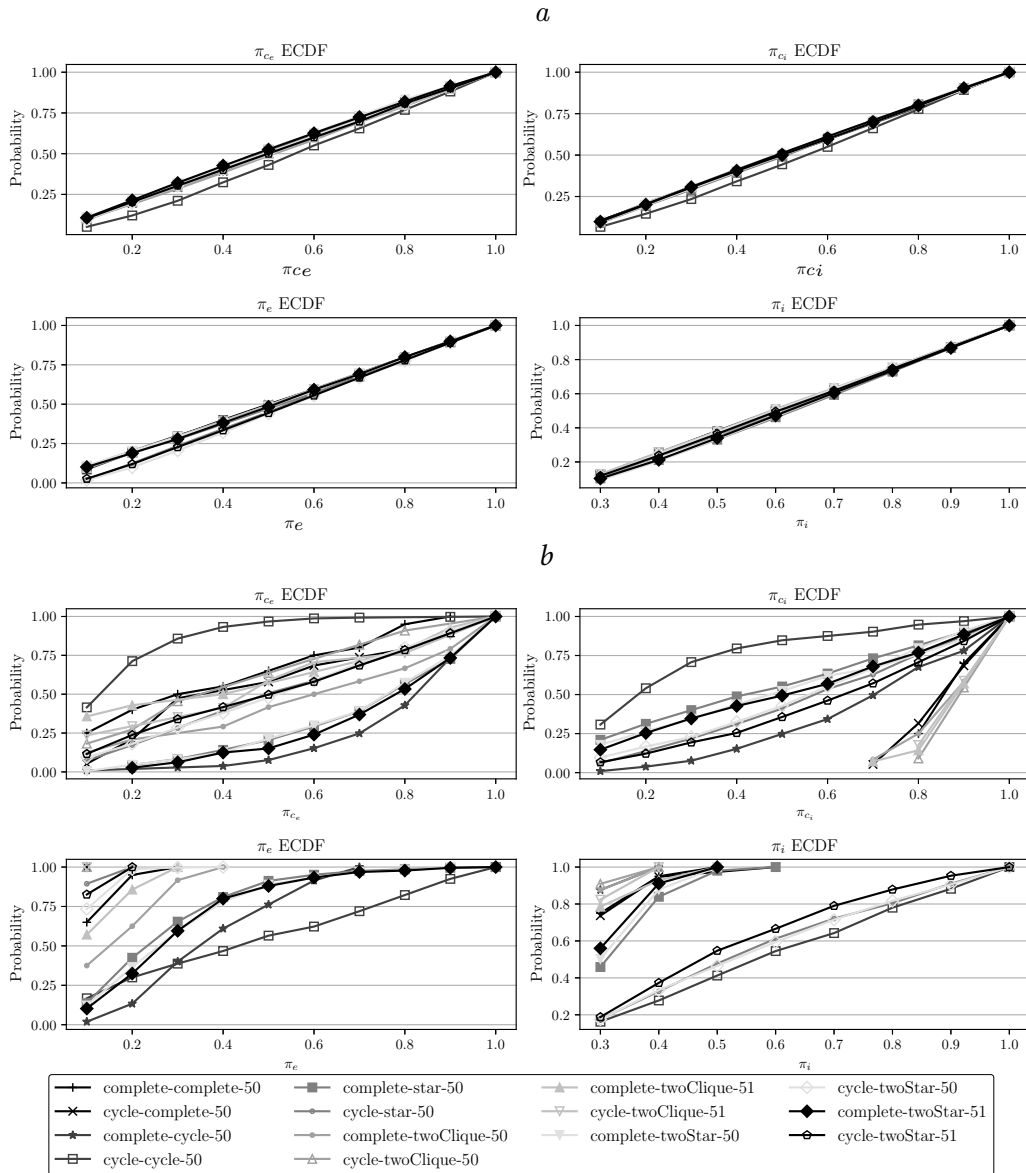


Рис. 11. Empirical cumulative distribution function of consensus time
with respect to parameters π_{c_e} , π_{c_i} , π_e , and π_i
(*a*) — cluster 0, (*b*) — cluster 1.

- the way of extension of a circle to a complete graph has a significant impact on consensus time and winning rate;
- each parameter has a different impact on consensus time, but almost has no impact on winning rate;
- the combination of parameters has a significant impact on consensus time.

We find the following developments of our work interesting: (i) analysis of other measurements (e.g., centrality) of two-layer network structures and their impact on consensus;

(ii) verification of other hypotheses based on data obtained in experiments, whether these measurements are related to consensus time and winning rate; (iii) it would also be interesting to incorporate stubbornness and redefine the condition for consensus to observe an impact of stubbornness on KPIs.

References

1. McKeehan L. A contribution to the theory of ferromagnetism. *Physical Review*, 1925, vol. 26, no. 2, pp. 274–279.
2. Holley R. A., Liggett T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *The Annals of Probability*, 1975, pp. 643–663.
3. Gastner M. T., Oborny B., Guly'as M. Consensus time in a voter model with concealed and publicly expressed opinions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2018, vol. 2018, no. 6, art. no. 063401.
4. Gastner M. T., Tak'acs K., Guly'as M., Szvetelszky Z., Oborny B. The impact of hypocrisy on opinion formation: A dynamic model. *PloS One*, 2019, vol. 14, no. 6, art. no. e0218729.
5. Zhao C., Parilina E. Opinion dynamics in two-layer networks with hypocrisy. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2024, vol. 12, no. 1, pp. 109–132.
6. Noorazar H. Recent advances in opinion propagation dynamics: A 2020 survey. *The European Physical Journal Plus*, 2020, vol. 135, pp. 1–20.
7. Sznajd-Weron K., Sznajd J. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, 2000, vol. 11, no. 06, pp. 1157–1165.
8. DeGroot M. H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, vol. 69, no. 345, pp. 118–121.
9. Friedkin N. E., Johnsen E. C. Social influence and opinions. *Journal of Mathematical Sociology*, 1990, vol. 15, no. 3/4, pp. 193–206.
10. Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2002, vol. 5, iss. 3, pp. 1–33.
11. Deffuant G., Neau D., Amblard F., Weisbuch G. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, 2000, vol. 3, no. 01n04, pp. 87–98.
12. Parsegov S. E., Proskurnikov A. V., Tempo R., Friedkin N. E. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, vol. 62, no. 5, pp. 2270–2285.
13. Rogov M., Sedakov A. Coordinated influence on the opinions of social network members. *Autom Remote Control*, 2020, vol. 81, pp. 528–547.
14. Mazalov V., Parilina E. The Euler-equation approach in average-oriented opinion dynamics. *Mathematics*, 2020, vol. 8, art. no. 355.
15. Kareeva Y., Sedakov A., Zhen M. Influence in social networks with stubborn agents: From competition to bargaining. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, vol. 444, art. no. 127790.
16. Zha Q., Kou G., Zhang H., Liang H., Chen X., Li C.-C., Dong Y. Opinion dynamics in finance and business: a literature review and research opportunities. *Financial Innovation*, 2020, vol. 6, pp. 1–22.
17. Bernardo C., Altafini C., Proskurnikov A., Vasca F. Bounded confidence opinion dynamics: A survey. *Automatica*, 2024, vol. 159, art. no. 111302.
18. Dong Y., Zhan M., Kou G., Ding Z., Liang H. A survey on the fusion process in opinion dynamics. *Information Fusion*, 2018, vol. 43, pp. 57–65.
19. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E., Haberland M., Reddy T., Cournapeau D., Burovski E., Peterson P., Weckesser W., Bright J., van der Walt S. J., Brett M., Wilson J., Jarrod Millman K., Mayorov N., Nelson A. R. J., Jones E., Kern R., Larson E., Carey C. J., Polat I., Feng Y., Moore E. W., Vander Plas J., Laxalde D., Perktold J., Cimrman R., Henriksen I., Quintero E. A., Harris C.R., Archibald A. M., Ribeiro A. H., Pedregosa F., van Mulbregt P., SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 2020, vol. 17, pp. 261–272.
20. scipy.stats.pearsonr SciPy v1.12.0 Manual, 2024. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.pearsonr.html> (accessed: November 2, 2024).
21. Student. Probable error of a correlation coefficient. *Biometrika*, 1908, vol. 6, no. 2/3, pp. 302–310.
22. Simard R., L'Ecuyer P. Computing the two-sided Kolmogorov — Smirnov distribution. *Journal of Statistical Software*, 2011, vol. 39, pp. 1–18.
23. scipy.stats.kstest SciPy v1.12.0 Manual, 2024. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.kstest.html> (accessed: November 2, 2024).

24. Shapiro S. S., Wilk M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 1965, vol. 52, no. 3/4, pp. 591–611.
25. scipy.stats.normaltest SciPy v1.12.0 Manual, 2024. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.normaltest.html> (accessed: November 2, 2024).
26. Levene H. Robust tests for equality of variances. In: Contributions to probability and statistics: essays in honor of Harold Hotelling. Stanford, Stanford University Press, 1960, pp. 278–292.
27. Bartlett M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1937, vol. 160, no. 901, pp. 268–282.
28. Fligner M. A., Killeen T. J. Distribution-free two-sample tests for scale. *Journal of the American Statistical Association*, 1976, vol. 71, no. 353, pp. 210–213.
29. scipy.stats.levene SciPy v1.12.0 Manual, 2024. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.levene.html> (accessed: November 2, 2024).
30. Kruskal W. H., Wallis W. A. Use of ranks in one-criterion variance analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 1952, vol. 47, no. 260, pp. 583–621.
31. Heiman G. W. Understanding research methods and statistics: An integrated introduction for psychology. Boston, Houghton Mifflin Company Publ., 2001, 779 p.
32. Alexander R. A., Govern D. M. A new and simpler approximation for ANOVA under variance heterogeneity. *Journal of Educational Statistics*, 1994, vol. 19, no. 2, pp. 91–101.
33. scipy.stats.kruskal SciPy v1.12.0 Manual, 2024. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.kruskal.html> (accessed: November 2, 2024).
34. Gronlund A., Larsen K. G., Mathiasen A., Nielsen J. S., Schneider S., Song M. Fast exact k -Means, k -Medians and Bregman divergence clustering in 1D. arXiv: 1701.07204 [cs], 2018.
35. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau A., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E. Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 2011, vol. 12, pp. 2825–2830.
36. Rousseeuw P. J. Silhouettes: a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1987, vol. 20, pp. 53–65.

Received: February 11, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

C. Zhao — Postgraduate Student in Physics and Mathematics; st081292@student.spbu.ru

Elena M. Parilina — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; e.parilina@sbpu.ru

Анализ времени достижения консенсуса и коэффициента выигрыша в двухслойных сетях различных конфигураций в присутствии лицемерия

Ч. Чжао, Е. М. Париллина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Zhao Ch., Parilina E. M.* Analysis of consensus time and winning rate in two-layer networks with hypocrisy of different structures // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 170–192. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.204>

Предложена модель общего скрытого избирателя (GSVM) микроуровня, которая сформулирована для произвольной двухслойной сети (с внутренним и внешним слоями).

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00051, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00051/>

Проведена серия численных экспериментов с различными сетевыми структурами и обнаружено, что циклическая внешняя структура удлиняет время достижения консенсуса по сравнению с полной внешней структурой. Циклическая внешняя структура положительно влияет на процент выигрышей, и этот результат отличается от результата для макроскопической версии GCVМ. Возможные причины этого различия обсуждаются в статье. Кроме того, в ней подтверждена гипотеза о том, что существует сильная линейная зависимость между временем консенсуса и определенной мерой центральности в сетевой структуре. Проверено влияние каждого отдельного параметра на ключевые показатели эффективности (КРЕ), включая время достижения консенсуса и процент выигрышей. Оценивается влияние комбинаций параметров на ключевые показатели эффективности с использованием алгоритма K -средних. Сделан вывод, что определенные комбинации параметров могут оказать существенное влияние на время достижения консенсуса.

Ключевые слова: динамика мнений, модель избирателя, модель скрытого избирателя, обобщенная модель скрытого избирателя, частота выигрыша.

Контактная информация:

Чжао Чи — аспирант; st081292@sbpu.ru

Париллина Елена Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.parilina@sbpu.ru

Автоэмиссионные характеристики и структура углеродсодержащих катодных материалов

Д. М. Фунг, Е. П. Шешин

Московский физико-технический институт,
Российская Федерация, 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Для цитирования: *Фунг Д. М., Шешин Е. П.* Автоэмиссионные характеристики и структура углеродсодержащих катодных материалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 193–205. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.205>

Проведено сопоставление автоэмиссионных и структурных характеристик поверхностей ряда углеродсодержащих материалов, в том числе и наноструктурированных, перспективных для использования при создании автокатодов со стабильными эмиссионными характеристиками. Исследовались волокна из углеродных нанотрубок (УНТ-волокно), полиакрилонитрильные волокна, образцы пиролитического графита и мелкозернистого плотного графита (МПП-6). Структура поверхности образцов изучалась до и после их работы в качестве автокатада с помощью оптической микроскопии, растровой электронной микроскопии и спектроскопии комбинационного рассеяния. Результаты сопоставлялись с вольтамперными характеристиками соответствующих катодов. Оптическая и электронная микроскопия показала наличие крупномасштабных структурных перестроек катода и поверхности его материалов в процессе автоэмиссии, а анализ спектров комбинационного рассеяния (СКР) — мелкомасштабных. В спектральном диапазоне 1000–2000 см⁻¹ в СКР кроме стандартно наблюдаемых характерных для углеродсодержащих материалов линий с максимумами частот в диапазонах 1363–1374 см⁻¹ (линия D), 1581–1599 см⁻¹ (линия G), 1619–1626 см⁻¹ (линия D') обнаружена линия в интервале 1450–1480 см⁻¹ для пиролитического графита и УНТ-волокна до и после эксплуатации, а для МПП-6 — после эксплуатации этих материалов в качестве автокатодов. Обсуждены изменения в СКР относительной интегральной интенсивности линии D, которая увеличивается для пиролитического графита и УНТ-волокна и уменьшается для МПП-6 в процессе их эксплуатации как автокатодов. Величина относительной интегральной интенсивности линии D использована для оценок размеров кристаллитов и их изменений в ходе автоэмиссии, что обосновывает возможность применения СКР для контроля структуры поверхности углеродсодержащих материалов и анализа связи структуры поверхности и ее эмиссионных характеристик. Обсуждены перспективы улучшения автоэмиссионных характеристик углеродсодержащих катодов.

Ключевые слова: автоэмиссия, автоэмиссионный катод, ток автоэмиссии, вольтамперная характеристика, оптическая микроскопия, растровая (сканирующая) электронная микроскопия, спектры комбинационного рассеяния, углеродсодержащие материалы, наноструктурированные материалы, структура поверхности.

1. Введение. Разработка и применение новых электровакуумных приборов с использованием эффекта автоэмиссии, включая разные источники излучения, в частности, лазеры для ультрафиолетового (УФ) спектрального диапазона [1], катодолуминоесцентные лампы в инфракрасном (ИК), видимом и УФ спектральных диапазонах

[2], маломощные рентгеновские трубки [3] для разнообразных сфер деятельности, например, для дезинфекции или создания линейки эффективных источников рентгеновского излучения различного назначения, представляются чрезвычайно актуальными. При этом особенно интересны исследования разных углеродсодержащих, в том числе наноструктурированных, материалов для автоэмиссионных катодов, поскольку именно их электрофизические характеристики в значительной степени определяют возможность появления эффективных катодолуминесцентных источников излучения. В частности, долговечность и стабильность эмиссионных характеристик ряда углеродных материалов, зависящих и от режимов автоэмиссии, обуславливающих структурные изменения эмитирующей поверхности, могут обеспечить стабильность автоэмиссионных характеристик катодов. Поскольку от вида и параметров наноструктур эмитирующей электроны поверхности углеродных материалов зависят их автоэмиссионные характеристики, с их эволюцией в ходе процессов автоэмиссии связана динамика изменения тока автоэмиссии при приложении постоянного ускоряющего напряжения, а значит, и стабильность работы автоэмиссионных устройств, создаваемых на основе углеродсодержащих материалов. Это делает особо актуальными изучение изменений поверхности таких материалов в процессе автоэмиссии и выявление связей между структурой поверхности и автоэмиссионными характеристиками соответствующих углеродных материалов. Хорошо известно, что наряду с различными видами оптической и электронной микроскопии, ценную информацию о тонкой структуре поверхностей углеродных материалов может дать спектроскопия комбинационного рассеяния [4, 5]. Следует еще раз особо подчеркнуть, что параметры долговечности и стабильности автокатодов напрямую определяют конкурентоспособность новых электровакуумных приборов с использованием эффекта автоэмиссии, в частности для источников излучения в разных спектральных диапазонах. Ранее были получены выражения для эффективности соответствующих источников излучения различного типа [2, 6, 7].

Оценки показывают, что для обеспечения конкурентоспособности автоэмиссионных источников света общего назначения необходимо обеспечить срок непрерывной стабильной работы источника излучения T порядка нескольких десятков тысяч часов (желательно 50000 ч и более).

Это означает, что особое внимание должно быть уделено вопросам стабильной и длительной работы автокатодов и выявлению перспективных материалов и режимов их работы, поскольку, в частности, в углеродсодержащих материалах автокатодов в ходе работы при эмиссии электронов происходят изменение и постоянное обновление структуры их поверхности, а вместе с этим и эмиссионных свойств автокатаода [2, 6–8].

2. Материалы и методы.

2.1. Углеродные материалы для исследуемых автокатодов. В данной работе, как и в [6–8], были использованы волокна из углеродных нанотрубок (УНТ-нити) и полиакрилонитриловые волокна (ПАН-волокно), а также такие углеродные материалы как высокопрочный мелкозернистый плотный графит (МПП-6) и пиролитический графит.

2.2. Методика измерений. Методика подготовки катодов из изучаемых материалов была описана нами ранее [4, 7, 8]. Измерение автоэмиссионных характеристик проводилось по двухэлектродной схеме в вакуумной камере при давлении 10^{-6} Торр при расстоянии 1 см между катодом из исследуемого материала и анодом, представляющим из себя электрод с нанесенным на него катодолуминофором с диаметром

6.5 см, значительно превышающем размеры излучающей поверхности катода (для различных материалов — катоды с характерными линейными размерами излучающей поверхности от 1 до 6 мм).

При приложении положительного напряжения к аноду возникала электронная эмиссия с катода, измерялись вольтамперные характеристики (ВАХ) и зависимости тока от времени для разных катодов из углеродсодержащих материалов.

Микроструктура всех образцов наблюдалась с помощью растрового (сканирующего) электронного микроскопа (РЭМ) JEOL JSM 7001F при ускоряющем напряжении 30 кВ и фокальном расстоянии 8–10 мм до и после электрических измерений в вакуумной камере. По изображениям, полученным на РЭМ, визуально оценивался характер эволюции материала катода. Размер поля изображения РЭМ при достаточной четкости картинки может варьироваться в диапазоне от 1 мкм до нескольких сотен.

Спектроскопия — неразрушающий метод, широко используемый для определения структурных характеристик углеродных материалов. Настоящая статья использует ту же методику получения и анализа спектров комбинационного рассеяния (СКР) и ряд данных из [8], продолжая эту работу.

СКР регистрировались на спектрометре комбинационного рассеяния ЗИЛ ИНТЕГРА СПЕКТРА при возбуждении лазерным излучением с длиной волны 473 нм на дифракционной решетке 1800 штр./мм в спектральном диапазоне от 1000 до 2000 см^{-1} . Разложение зарегистрированных спектров на отдельные линии и определение их основных параметров, а именно частоты, ширины, относительной интегральной интенсивности, выполнялись в свободно распространяемой программе Fityk [4]. Каждая линия описывалась функцией Лоренца, определялись трижды параметры линий при разных уровнях фона, а также среднее значение и максимальное отклонение. Точность определения параметров была выше для линий с большей интенсивностью. Максимальное отклонение не превышало 10 %.

3. Результаты и обсуждение.

3.1. Структурные и автоэмиссионные характеристики углеродсодержащих материалов и катодов из них.

3.1.1. Характеристики мелкозернистого плотного графита (МПГ-6) и пиролитического графита. При регистрации ВАХ МПГ-6 и пиролитического графита было показано [8], что пороговая напряженность электрического поля автоэмиссии для различных образцов обоих типов материалов составляет близкую величину в диапазоне 3600–3800 В/см. В то же время уже при напряженности электрического поля порядка 4500 В/см плотность тока автоэмиссии с единицы излучающей поверхности катода для пиролитического графита в несколько раз выше для МПГ-6. Примеры ВАХ для образцов автокатодов из МПГ-6 и пиролитического графита с примерно одинаковыми площадями излучающих электроны поверхностей приведены на рис. 1.

Для микроскопического контроля и регистрации СКР для каждого из материалов выбирались несколько точек наблюдения. Пример выбора точек для регистрации СКР для различных образцов МПГ-6 представлены на рис. 2.

Заметим, что для разных точек регистрации как образцов МПГ-6, так и для образцов пиролитического графита, хотя и имеются некоторые различия изображений (оптических и электронных фотографий) поверхности, но ярко выраженных структурных перестроек до и после процессов эмиссии выявить не удастся, а для СКР такие различия, несомненно, наблюдаются, что может свидетельствовать о некоторой

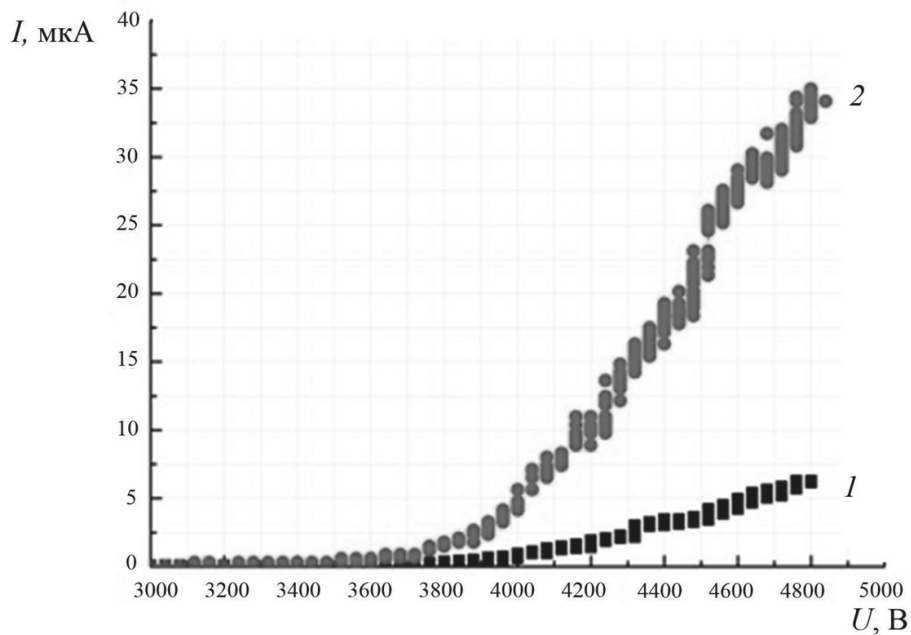


Рис. 1. ВАХ для катодов из массивов графита МПГ-6 (1) и пиролитического графита

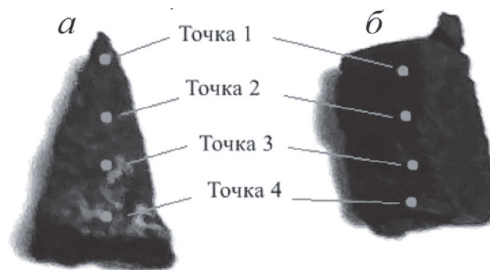


Рис. 2. Примеры различных образцов МПГ-6

Образец: *a* — использованный как автокатод; *b* — неиспользованный как автокатод.

неоднородности поверхности исходных материалов, с одной стороны, и о возможной неоднородности структур поверхностей материалов после их работы в качестве автокатодов, обусловленной не только различиями исходными, но и возможными (неоднородностями), образовавшимися в ходе структурных изменений поверхности материалов в процессе автоэмиссии электронов (отличия динамики структурных изменений для разных участков поверхности) — с другой. На рис. 3 представлены СКР для различных участков поверхности образцов МПГ-6 (рис. 3, А) и пиролитического графита (рис. 3, Б) как до использования в качестве автокатодов, так и после.

Изображения поверхностей мелкозернистого плотного и пиролитического графитов (рис. 3, Б), полученные с помощью растровой электронной микроскопии, также не продемонстрировали существенных различий для разных точек регистрации как до, так и после использования этих материалов как автокатодов. Типичный вид поверхностей этих материалов представлен на рис. 4 (см. также [6–8]).

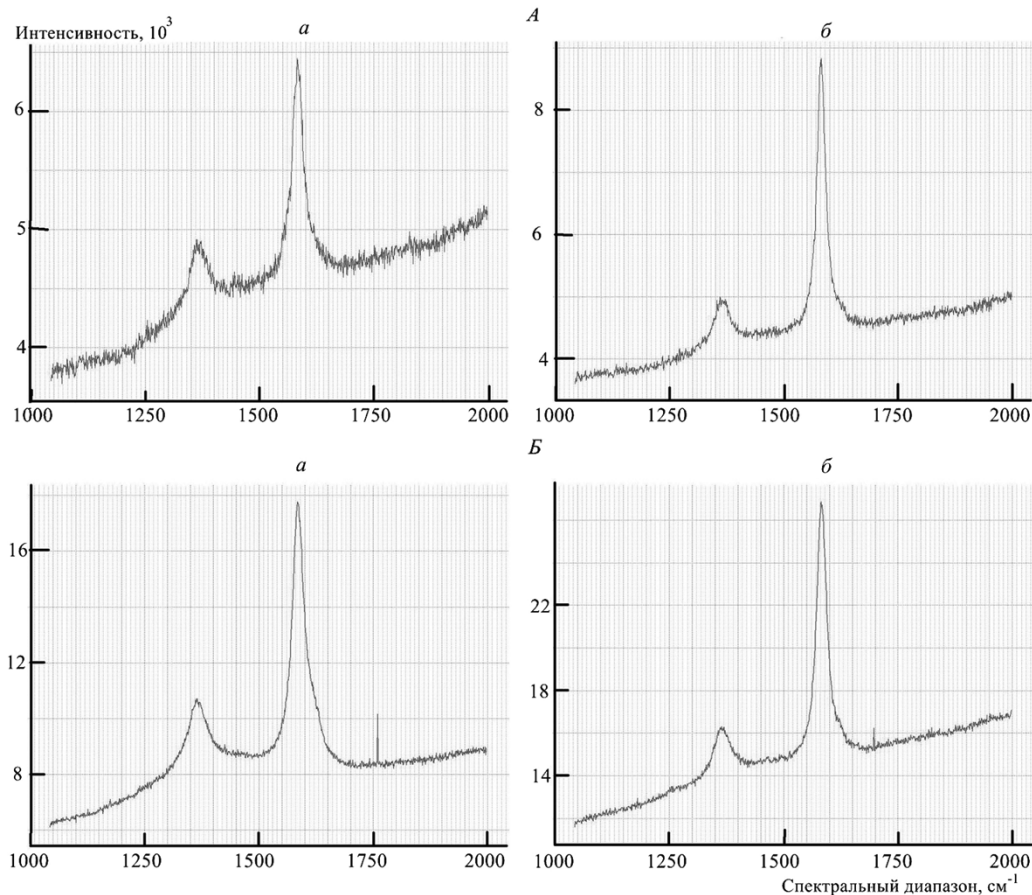


Рис. 3. СКР различных участков образцов МПГ-6 (А) и пиролитического графита (Б) до (а) и после (б) использования в качестве автокатода

3.1.2. Характеристики полиакрилонитрильных волокон и нитей из углеродных нанотрубок. Сравнение ВАХ исследованных катодов показывает, что минимальное поле возникновения автоэмиссионного тока для катода из УНТ-нити ниже примерно в 3 раза, чем для катода из ПАН-волокон, и примерно в 6 раз, чем для катодов из МПГ-6 и пиролитического графита.

Диапазон изменения ускоряющего напряжения для увеличения эмиссионного тока на порядок в случае УНТ-нити значительно ниже, чем для ПАН-волокна, МПГ-6 и пиролитического графита. При дальнейшем возрастании ускоряющего напряжения (постоянного напряжения около 1380 В для УНТ-нити и 2345 В для ПАН-волокна) наблюдается рост эмиссионного тока во времени с последующей стабилизацией тока для УНТ-нити, а для ПАН-волокна через некоторое время после увеличения тока эмиссии наблюдается его падение [7].

Были исследованы ВАК структурные характеристики катодов из наноуглеродных и полиакрилонитрильных волокон и описаны динамика изменения эмиссионного тока во времени при различных ускоряющих напряжениях в двухэлектродной схеме. По полученным ранее [6–8] и уточненным в настоящей работе данным показано, что пороговая напряженность электрического поля автоэмиссии для образцов из полиа-

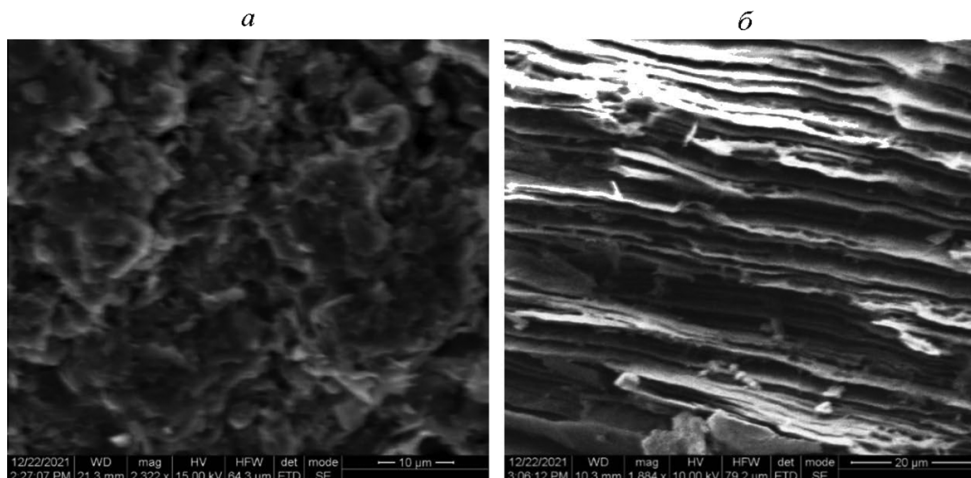


Рис. 4. Фотографии поверхностей катодов из массивов МПП-6 (а) и пиролитического графита (б), полученные с помощью РЭМ

крилонитрильных волокон составляет 1600–1850 В/см, а для нитей из углеродных нанотрубок — 500–600 В/см. При этом для катодов из углеродных нанотрубок ВАХ с ростом ускоряющих напряжений ток эмиссии увеличивается значительно быстрее, чем для полиакрилонитрильных волокон. Более того, для углеродных нанотрубок при постоянной ускоряющей напряженности поля порядка 1300–1400 В/см эмиссионный ток возрастает по сравнению с начальным значением в 2–2.5 раза в течение часа и остается стабильным в течение нескольких последующих часов. В отличие от этого для катодов из полиакрилонитрильных волокон при разных ускоряющих напряжениях выше пороговых значений наблюдается падение тока эмиссии во времени либо сразу, либо после некоторого возрастания (во временном интервале порядка часа) и относительной стабилизации в течение двух-трех последующих часов. Фотографии поверхностей соответствующих материалов электродов, полученных с помощью оптической микроскопии, и СКР таких материалов как углеродные нанотрубки и полиакрилонитрильные волокна до и после их работы в качестве автокатодов представлены соответственно на рис. 4, 5.

Полученные в [6–8] и настоящей статье результаты анализа изображений с помощью оптической и сканирующей (растровой) электронной микроскопии, катодов из углеродных нанотрубок и полиакрилонитрильного волокна показывают, что благодаря длительной автоэмиссии электронов, наблюдаемой при продолжительной работе катодов из данных материалов, происходит хорошо выявляемая структурная перестройка и катода в целом (см. рис. 4, 5), и отдельных волокон (рис. 6, 7, скомбинированы из данных [6–8]). На изображениях на основе оптической микроскопии и РЭМ видно, что в результате автоэмиссионных процессов полиакрилонитрильные волокна оплавляются, так как при длительной работе этих волокон в качестве автокатодов при достаточно высоких ускоряющих напряжениях они нагреваются, что и приводит к структурной деградации и ухудшению их автоэмиссионных свойств. Эти выводы полностью соответствуют описанным изменениям тока автоэмиссии во времени для автокатодов из данного материала.

Напротив, для катода на основе нитей из углеродных нанотрубок происходит улучшение эмиссионных свойств со временем, что хорошо коррелирует с разупоряд-

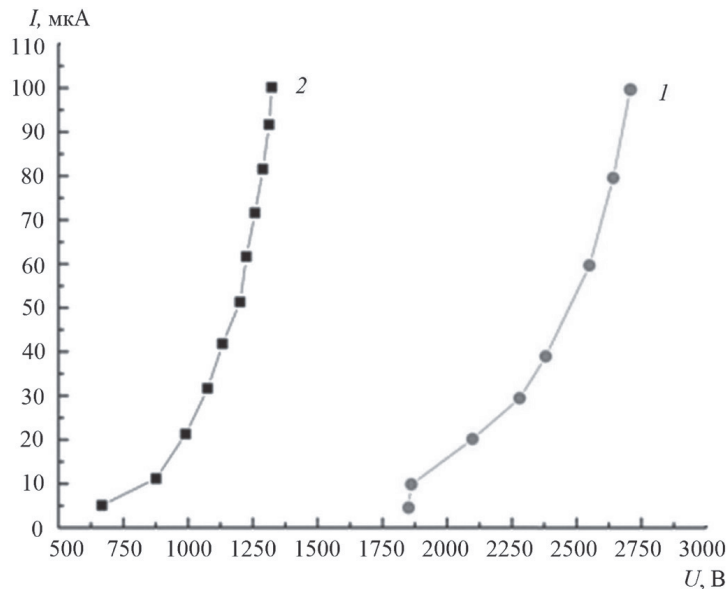


Рис. 5. ВАХ для катодов из наноструктурированных углеродных волокон: ПАН-волокно (1) и волокно из углеродных нанотрубок (УНТ-нить) (2)

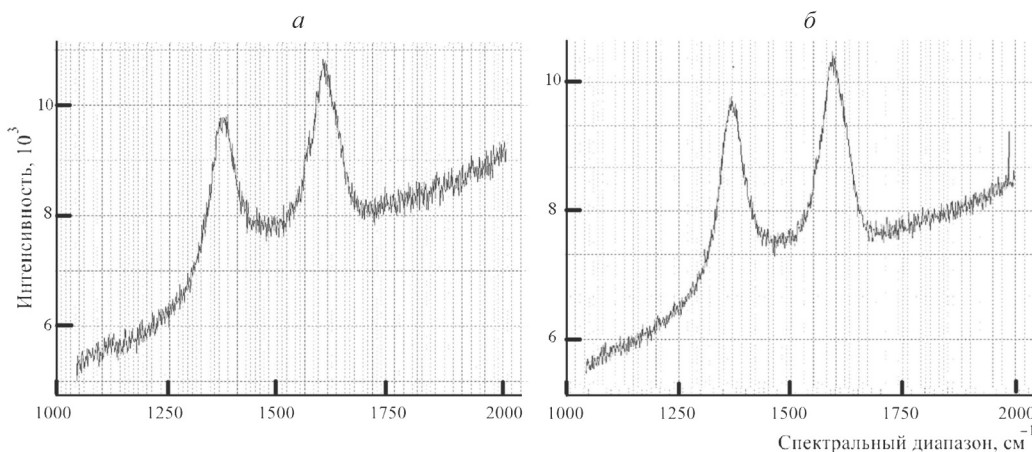


Рис. 6. Оптическая микроскопия (увеличение в 20 раз) катода из полиакрилонитрильного волокна и его СКР до (а) и после (б) использования в качестве автокатода

дочением структуры автокатода и разрушением углеродных нанотрубок при длительной автоэмиссии электронов из этого материала, поскольку при этих процессах, по-видимому, образуется большое число новых эффективных эмиссионных центров. Изменение структуры и самого катода, а также структурная перестройка отдельной углеродной нанотрубки очень хорошо наблюдаются на рис. 4 и 8, полученных с помощью оптической и растровой электронной микроскопии.

3.2. Обсуждение результатов измерений. Сопоставление автоэмиссионных характеристик исследованных углеродсодержащих материалов демонстрирует определенную противоречивость. С одной стороны, катоды из массивов МПГ-6 и пи-

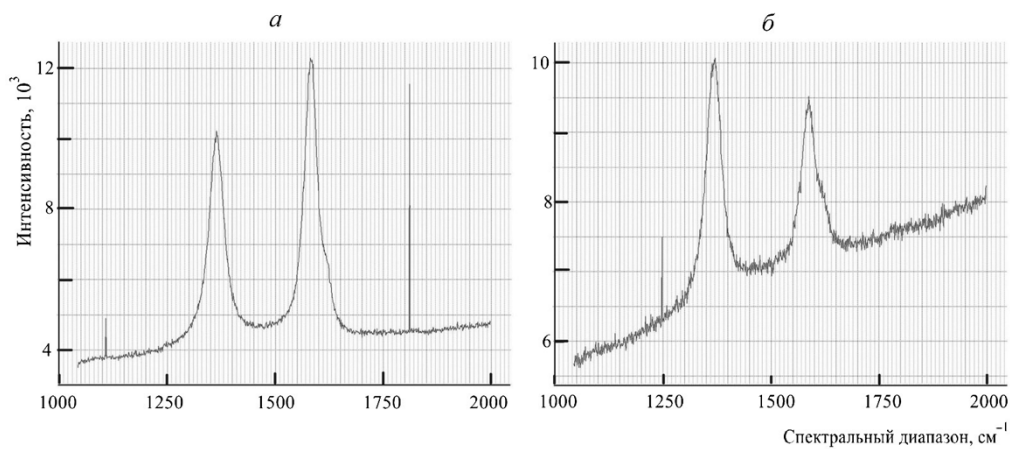


Рис. 7. Оптическая микроскопия (увеличение в 10 раз) катода из углеродных нанотрубок и СКР для них (УНТ-нити) до (а) и после (б) использования в качестве автокатаода

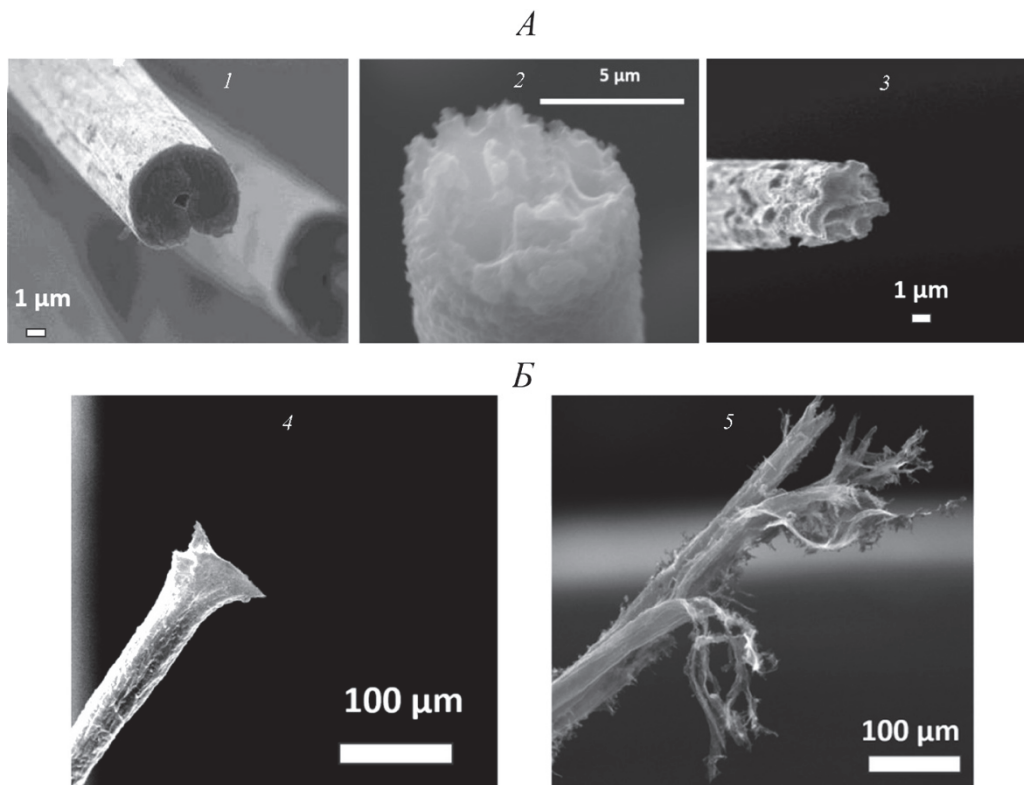


Рис. 8. Полученные с помощью растровой электронной микроскопии изображения полиакрилонитрильных волокон (А) и отдельных углеродных нанотрубок (Б) в процессе работы в составе автоэмиссионного катода
1, 4 — до работы; 2, 3, 5 — после работы при разной длительности эмиссионного процесса.

ролитического графита обладают порогом возникновения эмиссионного тока (минимальная напряженность электрического поля, обеспечивающая возникновение автоэмиссионного тока), немного более высоким, чем для катодов из наноструктурированных волокон, таких как полиакрилонитрильные волокна (отличие примерно в 3 раза) и особенно для нитей из углеродных нанотрубок (отличие примерно в 6 раз). С другой стороны, автоэмиссионные характеристики массивных катодов из углеродсодержащих материалов значительно стабильнее в широком диапазоне значений ускоряющих напряженностей поля, хотя увеличить автоэмиссионный ток для нитей из углеродных нанотрубок на порядок можно в значительно более узком диапазоне ускоряющих напряженностей электрического поля, чем даже для лучшего из массивных материалов автокатада пиролитического графита.

Также необходимо отметить, что, хотя для автокатодов из наноструктурированных волокон можно добиться более высоких плотностей автоэмиссионного тока, видно, что при таких плотностях тока происходят макроскопические нарушения структуры и самого катода из нановолокон, и отдельных волокон. Для полиакрилонитрильных волокон — это плавление и деградация их автоэмиссионных свойств. Для отдельных углеродных нанотрубок — это многочисленные разрывы, которые в интервале нескольких часов работы автокатада не только не ухудшают его исходные автоэмиссионные свойства, но даже могут их улучшить, что, впрочем, не гарантирует стабильность работы автокатада в течение десятков тысяч часов, требуемых для эффективной работы многих автоэмиссионных устройств [2, 3].

Наиболее интересным наблюдаемым эффектом по данным спектроскопии комбинационного рассеяния для исследованных материалов представляется изменение относительной интегральной интенсивности линии D по отношению к линии G. В работе [5] относительная интегральная интенсивность линии D для мелкозернистого графита связывается с размерами его кристаллитов. Результаты измерения относительной интегральной интенсивности линии D до и после длительной эмиссии электронов для всех образцов углеродсодержащих материалов, испытанных как материалы для автокатодов, представлены на рис. 9.

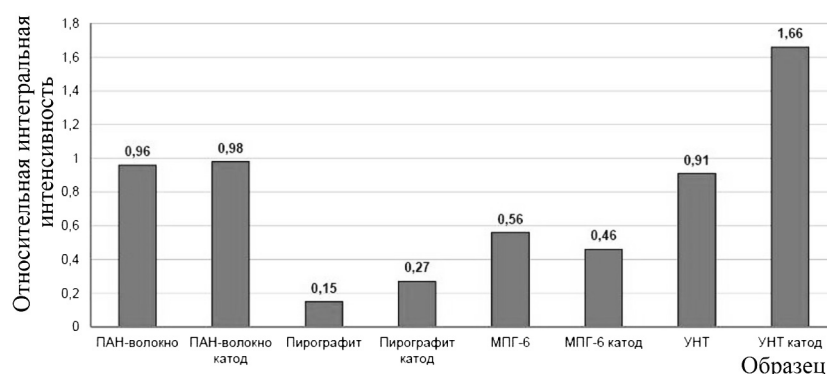


Рис. 9. Относительная интегральная интенсивность линии D до и после длительной эмиссии электронов для всех исследованных образцов углеродсодержащих материалов, испытанных как материалы для автокатодов

ВАХ и исследования эволюции тока во времени показывают, что в диапазоне использованных напряжений для пиролитического графита и МПГ-6 наблюдается

достаточно высокая стабильность тока, что подтверждает и относительная структурная макроскопическая стабильность по данным оптической и растровой электронной микроскопии. Тем не менее данные СКР показывают, что при работе этих материалов происходит определенная мелкомасштабная структурная перестройка, что, видимо, связано с изменением размеров кристаллитов.

Из рис. 8, А по методике, предложенной в [5] для МПГ-6, были оценены размеры средних кристаллитов в этом материале до работы в качестве автокатада (7.9 нм) и после (9.6 нм). Хотя интенсивность D линии в пирографите значительно ниже, чем в МПГ-6, можно предположить, что для этого материала размеры кристаллитов существенно меньше, что коррелирует и с более высокими значениями тока автоэмиссии при близких условиях, и с тем фактом, что пирографит сложен слоями толщиной порядка 1 м, а характерный размер частиц, из которых спрессован МПГ-6 составляет около 50 нм, хотя, как показывают наши оценки, характерные размеры кристаллитов для таких материалов значительно меньше. Более того увеличение относительной интегральной интенсивности линии D в результате длительной электронной эмиссии может свидетельствовать для пирографита об уменьшении размеров эмиссионных центров в процессе эксплуатации этого материала в качестве автокатада, хотя данный вопрос требует более детальной проработки и дополнительных исследований.

Остается открытым и вопрос об интерпретации существенного увеличения относительной интегральной интенсивности линии D в результате длительной электронной эмиссии для углеродных нанотрубок, поскольку правомерность применения понятия кристаллитов к нанотрубкам вызывает некоторые сомнения. Тем не менее для волокон структурный анализ показывает существенную как крупномасштабную, так мелкомасштабную перестройку катода и его поверхности. Причем, если для ПАН-волокна в ряде режимов наблюдается спекание волокна, то для УНТ-волокна свойственно сильное макроскопическое разупорядочение волокна, сопровождаемое разрывом нанотрубок и улучшением автоэмиссионных характеристик, по крайней мере во временном интервале в несколько часов.

4. Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о том, что для углеродсодержащих материалов при их использовании в качестве материалов автокатодов происходит и макроскопическая, и микроскопическая перестройка структуры поверхности и самих катодов, а также их поверхностей в зависимости от режимов их эксплуатации. Причем для каждого из исследованных материалов возможен подбор режимов эксплуатации и конструктивных решений (например, обеспечивающих эффективный теплоотвод для автокатодов из полиакрилонитрильных волокон, не допускающих перегрева и расплавления данного материала), которые позволяют их применять для создания эффективных автоэмиссионных приборов и устройств.

Особое значение при этом приобретает изучение их автоэмиссионных характеристик, динамики их изменения и связанных с этим структурных перестроек их поверхности при различных режимах эксплуатации материалов как автокатодов. Без знания таких характеристик невозможен подбор соответствующих режимов эксплуатации, обеспечивающих эффективность использования этих материалов в новых автоэмиссионных приборах и устройствах.

Получение данных об автоэмиссионных и структурных характеристиках поверхности углеродсодержащих материалов для автоэмиссионных катодов приводит к оптимизации работы автокатодов, создаваемых на основе различных углеродсодержащих материалов, в частности использование трехэлектродной схемы позволяет для различных материалов обеспечивать необходимый ток автоэмиссии, изменяя соот-

ветствующим образом напряжение и расстояние между катодом и сеткой. Отменяя форму, размер площади катода, режим возбуждения тока эмиссии можно обеспечивать необходимую плотность этого тока, которая позволяет избегать излишнего перегрева и возникновения недопустимых механических напряжений, вызывающих разрушение структур материалов катода.

Показано, что анализ СКР исследованных углеродсодержащих материалов дает возможность обнаружения мелкомасштабных перестроек поверхности в процессе их работы в качестве автокатодов. Перспективным методом является измерение относительной интегральной интенсивности линии D, позволяющей оценивать характер эмиссионных электронных центров, а в некоторых случаях и их размер.

Выявлена количественная связь между средними размерами кристаллитов и рядом характеристик СКР углеродных материалов и применен количественный метод оценки размеров углеродных кристаллитов.

С помощью указанного метода установлено, что для образцов МПГ-6 до и после его использования в качестве катода автоэмиссионного источника света средний размер кристаллитов отличается и по проведенным оценкам составляет примерно 8 и 10 нм соответственно. Полученные результаты обосновывают возможность применения предложенного метода анализа СКР для детального изучения изменения структуры поверхности углеродных материалов при их эксплуатации, в том числе при различных режимах их работы как катодов и автоэмиссионных источников излучения.

Литература

1. *Jmerik V., Kozlovsky V., Wang X.* Electron-beam-pumped UVC emitters based on an (Al,Ga)N material system // *Nanomaterials*. 2023. Vol. 13. P. 1–42. <https://doi.org/10.3390/nano13142080>
2. *Bugaev A. S., Kireev V. B., Sheshin E. P., Kolodyazhnyj A. Yu.* Cathodoluminescent light sources: status and prospects // *Physics-Uspexhi*. 2015. Vol. 58 (8). P. 792–818.
3. *Бугаев А. С., Ерошкин П. А., Романько В. А., Шешин Е. П.* Маломощные рентгеновские трубки: современное состояние // *Успехи физических наук*. 2013. Т. 183. № 7. С. 727–740.
4. *Белов К. Н., Бердников А. С., Киреев В. Б., Н Кундикова. Д., Просеков Д. Н., Фунг Д. М., Шешин Е. П.* Спектры комбинационного рассеяния углеродных материалов, используемых в качестве катодов автоэмиссионных источников излучения // *Вестник Южноуральского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Физика*. 2023. Т. 15. № 2. С. 41–47.
5. *Jawhari T., Roid A., Casado J.* Raman spectroscopic characterization of some commercially available carbon black materials // *Carbon*. 1995. Vol. 33. Iss. 11. P. 1561–1565.
6. *Киреев В. Б., Шешин Е. П.* Наноматериалы для эффективных автоэмиссионных катод олюминесцентных источников света, предназначенных для обеззараживания // *Наукофера*. 2022. № 4 (1). С. 1–12.
7. *Taikin A. Yu., Savichev I. A., Popov M. A., Anokhin E. M., Kireev V. B., Kosarev I. N., Sheshin E. P.* Comparison and analysis of field emission characteristics of carbon cathodes based on PAN fiber and CNT filaments // *Journal of Advanced Materials and Technologies*. 2022. Vol. 7. N 1. P. 1–12.
8. *Киреев В. Б., Шешин Е. П.* Автоэмиссионные катодолюминесцентные лампы. II. Наноструктурированные материалы для автоэмиссионных катодов // *Инженерные системы: Труды международной конференции*. Москва, 6–8 апреля 2022 г. / под ред. М. Ю. Мальковой. М.: РУДН, 2022. С. 56–66.

Статья поступила в редакцию 16 января 2024 г.
Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Шешин Евгений Павлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; sheshin.ep@mipt.ru

Фунг Дык Мань — аспирант; phungducmanh@phystech.edu

Field emission characteristics and structure of carbon-containing cathode

D. M. Phung, E. P. Sheshin

Moscow Institute of Physics and Technology, 9, Institutsky per., Dolgoprudny, 141701, Russian Federation

For citation: Phung D. M., Sheshin E. P. Field emission characteristics and structure of carbon-containing cathode materials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 193–205.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.205> (In Russian)

Field emission and structural characteristics of carbon nanotube fibers, polyacrylonitrile fibers, pyrolytic graphite and micrograined dense graphite were experimentally studied before and after their operation as a field cathode using registration of the current-voltage characteristics, optical microscopy, scanning electron microscopy and Raman spectroscopy in the spectral range from 1000 to 2000 cm^{-1} . The experiments carried out showed large and small structural rearrangements of carbon-containing cathodes and their surfaces in the process of field emission. In addition to the G, D and D' lines characteristic of carbon materials, a line was detected in the range of 1450–1480 cm^{-1} , which is observed in the starting materials of pyrolytic graphite, carbon nanotube fibers and persists after operation, and also appears in the micrograined dense graphite sample after operation in as a cathode. The relative integral intensity of line D in pyrolytic graphite, micrograined dense graphite, and carbon nanotube fibers undergoes the greatest change. In pyrolytic graphite and carbon nanotube fiber, its increase is observed, and in micrograined dense graphite its decrease is observed after operation as a cathode. This made it possible to use the relative integral intensity of the D-line to quantify the change in the surface properties of carbon materials as a result of field emission when using these materials as cathodes, in particular, to assess changes in crystallite sizes. Thus, the possibility of using Raman spectra to control the surface structure of carbon-containing materials has been demonstrated, which significantly facilitates the possibility of further analysis of the relationship between the surface structure and its emission characteristics. The prospects for improving the field emission characteristics of carbon-containing cathodes were discussed.

Keywords: field emission, field emission cathode, field emission current, volt-ampere characteristics, optical microscopy, raster (scanning) electron microscopy, Raman spectra, carbon-containing materials, nanostructured materials, surface structure.

References

1. Jmerik V., Kozlovsky V., Wang X. Electron-beam-pumped UVC emitters based on an (Al,Ga)N material system. *Nanomaterials*, 2023, vol. 13, pp. 1–42. <https://doi.org/10.3390/nano13142080>
2. Bugaev A. S., Kireev V. B., Sheshin E. P., Kolodyazhnyj A. J. Cathodoluminescent light sources: status and prospects. *Physics-Uspexhi*, 2015, vol. 58 (8), pp. 792–818
3. Bugaev A. S., Eroshkin P. A., Romanko V. A., Sheshin E. P. Malomoshchnyye rentgenovskie trubki: sovremennoye sostoyaniye [Low-power X-ray tubes: current state]. *Advances in Physical Sciences*, 2013, vol. 183, no. 7, pp. 727–740. (In Russian)
4. Belov K. N., Berdnikov A. S., Kireev V. B., Kundikova N. D., Prosekov D. N., Fung D. M., Sheshin E. P. Spektry kombinatsionnogo rasseyaniya uglerodnykh materialov, ispolzuyemykh v kachestve katodov avtoemissionnykh istochnikov izlucheniya [Raman spectra of carbon materials used as cathodes of field emission radiation sources]. *Vestnik of South Ural State University. Series Mathematics. Mechanics. Physics*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 41–47. (In Russian)
5. Jawhari T., Roid A., Casado J. Raman spectroscopic characterization of some commercially available carbon black materials. *Carbon*, 1995, vol. 33, iss. 11, pp. 1561–1565
6. Kireev V. B., Sheshin E. P. Nanomaterialy dlya effektivnykh avtoemissionnykh katodolyuminescentnykh istochnikov sveta, prednaznachennykh dlya obezzarazhivaniya [Nanomaterials for efficient field emission cathodoluminescent light sources intended for disinfection]. *Naukosfera*, 2022, no. 4 (1), pp. 1–12. (In Russian)

7. Taikin A. Yu., Savichev I. A., Popov M. A., Anokhin E. M., Kireev V. B., Kosarev I. N., Sheshin E. P. Comparison and analysis of field emission characteristics of carbon cathodes based on PAN fiber and CNT filaments. *Journal of Advanced Materials and Technologies*, 2022, vol. 7, no. 1, pp. 1–12.

8. Kireev V. B., Sheshin E. P. Avtoemissionnyye katodolyuminestsentnyye lampy. II. Nanostrukturirovannyye materialy dlya avtoemissionnykh katodov [Field emission cathodoluminescent lamps. II. Nanostructured materials for field emission cathodes]. *Engineering systems: Proceedings of the international conference*. Moscow, April 6–8, 2022. Moscow, RUDN University Publ., 2022, pp. 56–66. (In Russian)

Received: January 16, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Evgeniy P. Sheshin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; sheshin.ep@mipt.ru

Duc-Manh Phung — Postgraduate Student; phungducmanh@phystech.edu

Исследование методов прогнозирования временных рядов для предсказания качества воздуха: объяснительный сравнительный анализ

Д. Ци, В. М. Буре

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Ци Д., Буре В. М. Исследование методов прогнозирования временных рядов для предсказания качества воздуха: объяснительный сравнительный анализ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 206–219. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.206>

Анализируется эффективность моделей прогнозирования временных рядов для предсказания качества воздуха. Для этого используются наборы данных от сенсора Purple Air Dual Laser Air Quality Sensor и платформы Kaggle Online. Полученные данные содержат достоверную информацию, необходимую для охраны окружающей среды. В ходе исследования основное внимание уделяется определению подходящих моделей прогнозирования для анализа окружающей среды, включая популярные структуры алгоритмов, такие как нейронные сети и ансамблевые модели. Также применяется метод объяснительного искусственного интеллекта, который обеспечивает объяснения для моделей с высокой производительностью и повышает их доверие и прозрачность. Производительность моделей оценивалась с помощью метрик, средняя абсолютная ошибка (MAE), квадратный корень из средней квадратичной ошибки (RMSE) и R -квадрата. Результаты показывают, что нейронные сети и ансамблевые модели эффективны для прогнозирования временных рядов качества воздуха. Это исследование вносит вклад в развитие моделей прогнозирования временных рядов и предоставляет полезные рекомендации для будущих исследований в области прогнозирования качества воздуха.

Ключевые слова: качество воздуха, прогнозирование временных рядов, нейронные сети, ансамблевые модели, объяснительный искусственный интеллект.

1. Введение. Важность качества воздуха, особенно PM_{2.5}, и точное его прогнозирование — это ключевые темы в экологических исследованиях. PM_{2.5} относится к мелким аэрозольным частицам диаметром 2,5 мкм или меньше, которые могут оказывать негативное влияние на здоровье людей и окружающую среду. Точное прогнозирование качества воздуха, включая концентрацию PM_{2.5}, играет важную роль в оценке потенциальных рисков для здоровья, использовании эффективных мер по борьбе с загрязнением и разработке соответствующих стратегий управления окружающей средой. Своевременные и надежные прогнозы позволяют властям и отдельным лицам принимать проактивные меры, такие как предупреждения о здоровье, корректировка активностей на открытом воздухе или внедрение инициатив по сокращению загрязнений.

Линейная регрессия и ARIMA — это широко используемые методы прогнозирования временных рядов. Линейная регрессия имеет некоторые ограничения в моделировании нелинейных отношений и сложных закономерностей, а ARIMA может испытывать сложности при работе с нестационарными данными и сложными нелиней-

ными отношениями. Для преодоления этих ограничений все большую популярность набирают алгоритмы машинного обучения и глубокого обучения в прогнозировании временных рядов. Методы машинного обучения предлагают гибкость в моделировании сложных отношений и работы с нелинейностями. Применение методов машинного обучения и глубокого обучения в прогнозировании временных рядов положило начало новой эпохе в этой области и обеспечивает повышенную точность, гибкость и надежность по сравнению с традиционными методами. Работа [1] посвящена прогнозированию почасовой концентрации PM_{2.5} в Китае с использованием алгоритма XGBoost. В ней оценивается производительность XGBoost путем сравнения наблюдаемых и предсказанных концентраций PM_{2.5}, что подтверждает его превосходство по сравнению с другими методами машинного обучения. В статье [2] использовали модель нейронной сети для прогнозирования качества воздуха. LSTM модель рассмотрена в [3], а RNN модель — в [4].

Цель настоящего исследования — критическая оценка и выбор эффективной и интерпретируемой модели прогнозирования путем проведения всестороннего сравнительного анализа широко признанных моделей, применяемых в конкурсах по прогнозированию временных рядов. Для обеспечения практической значимости прогностических моделей будем использовать достоверные записи сенсоров в качестве наборов данных. Кроме того, сосредоточение на управлении окружающей средой гарантирует актуальность и применимость исследовательских результатов к реальным сценариям.

Идентификация факторов, таких как температура, давление, направление ветра и осадки, является ключевой для оптимизации систем прогнозирования качества воздуха. Эти факторы непосредственно воздействуют на формирование, рассеивание и концентрацию атмосферных загрязнителей. Понимание их влияния позволяет проводить целенаправленные мероприятия, такие как контроль выбросов и управление транспортом, для эффективного смягчения загрязнения. Оптимизация систем прогнозирования с применением этих факторов способствует принятию обоснованных решений и улучшает управление загрязнением. Действительно, при использовании нейронных сетей в большинстве случаев сложно объяснить, какой именно фактор влияет на зависимую переменную, и представить явную функциональную зависимость.

Внедрение технологии объяснительного искусственного интеллекта (XAI) предлагает новое видение оценки прогностических моделей. Будем использовать метод SHapley Additive exPlanations (SHAP) — широко применяемую технику XAI, которая позволяет оценить вклад каждого признака в конечный прогноз. Определяя наиболее влиятельные признаки в процессе принятия решений модели, получаем более глубокое понимание базовых данных, что может раскрыть потенциальные области для улучшения модели. Такой метод помогает понять, как каждая переменная вносит свой вклад в предсказание, несмотря на то, что он не дает явную функциональную зависимость.

Уже опубликован ряд исследований, в которых применялись различные методы для прогнозирования индекса качества воздуха. Однако они требуют учета нескольких факторов, которые могут повлиять на их согласованность и надежность. Во-первых, отсутствует стандартизированный процесс применения этих методов, что приводит к несогласованным результатам. Во-вторых, не проводится достаточный анализ факторов, оказывающих влияние на качество воздуха. Направленное развитие будущих работ должно устранить эти проблемы и повысить качество и надежность подобных работ.

Основное внимание будем уделять следующим основным вкладам: предложение стандартного процесса использования методов машинного обучения для обеспечения справедливого сравнения производительности, введение интерпретируемых методов ХАИ для прогнозирования качества воздуха и комплексный анализ факторов, влияющих на качество воздуха.

2. Выбор данных. В сокращении набора данных Kaggle применяется комплексная коллекция экологических измерений, включая PM2.5, которая представляет собой аэрозольные частицы размером 2,5 мкм или меньше и оказывает значительное воздействие на качество воздуха [5]. В данном случае PM2.5 является зависимой переменной, а также присутствуют 16 независимых переменных, включая No (номер), year (год), month (месяц), day (день), hour (час), PM10, SO2, NO2, CO, O3, TEMP (температура), PRES (давление), DEWP (температура точки росы), rain (указывает на выпадение осадков), wd (направление ветра) и WSPM (скорость ветра).

Измерения PM2.5 имеют большое значение для здоровья человека, поскольку эти частицы могут проникать в легкие и вызывать отрицательные последствия для организма [6]. Существует корреляция между уровнем PM2.5, изменениями давления и содержанием загрязнителей, связанных с метеорологическими факторами. Эти факторы могут оказывать прямое влияние на распространение загрязнителей, химический состав и климатическую стабильность, что, в свою очередь, влияет на уровни качества воздуха [7].

Анализируя все различные параметры окружающей среды, можно получить более подробное представление о динамике качества воздуха, особенно в контексте температуры воздуха. Рассмотрение таких факторов дает возможность лучше понять взаимосвязи и влияние различных параметров на качество воздуха.

Анализ временных рядов имеет несколько преимуществ при оценке качества воздуха, делая его важным инструментом для исследователей и экологических менеджеров. Использование моделей временных рядов дает возможность обнаружить скрытые тренды, сезонные закономерности и циклическое поведение данных о качестве воздуха. С помощью этих моделей аналитики могут выявлять и интерпретировать повторяющиеся закономерности, возникающие со временем, а также понимать сложные взаимосвязи между различными загрязнителями воздуха. Таким образом, комплексное понимание такой временной динамики — ключевое для эффективного управления окружающей средой, разработки политики и применения целевых стратегий вмешательства для смягчения загрязнения воздуха.

Применение моделей позволяет интегрировать передовые техники машинного обучения и технологии ХАИ, улучшая интерпретируемость и прозрачность анализа качества воздуха. Включение методов, таких как SHAP, дает возможность исследователям определить наиболее влиятельные признаки в процессе принятия решений моделями, что приводит к лучшему пониманию базовых данных и взаимосвязей, которое способствует доверию к моделям со стороны заинтересованных сторон и позволяет принять данные ориентированных подходов в управлении окружающей средой. Более того, непрерывное развитие методов моделирования временных рядов способствует повышению точности и надежности прогнозов качества воздуха, дополнительно усиливая их применимость и ценность в данной области.

В рамках настоящего исследования конкретный момент времени служит границей между обучающим и тестовым наборами данных вместо произвольного случайного выбора. Такой подход более отвечает внутренней логике временных рядов. Примерно 70 % элементов выделены для обучающего набора данных. Учитывая раз-

личные пропорции отсутствующих значений для разных видов данных, можно обеспечить достаточное количество признаков при прогнозировании концентрации частиц PM2.5 в качестве целевой переменной для данного исследования (рис. 1). Установив разумную границу, пропорции обучающего набора данных, тестового и валидационного наборов данных определены как 70, 15 и 15 % соответственно.

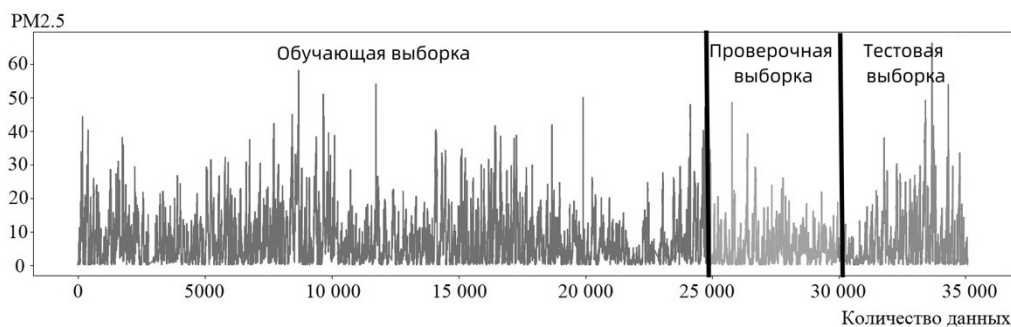


Рис. 1. Распределение данных

3. Модели прогнозирования в приложениях временных рядов.

3.1. Основные методы. В настоящее время структуры нейронных сетей и ансамблевых моделей широко применяются в различных приложениях. Поэтому важно выбрать представительные модели в этих структурах для всестороннего сравнительного анализа прогностических моделей. В качестве модели нейронной сети выбираем искусственные нейронные сети (ANN), рекуррентные нейронные сети (RNN), двунаправленные рекуррентные нейронные сети (Bi-RNN), двунаправленные долгосрочные нейронные сети с короткой памятью (Bi-LSTM) и двунаправленные блокирующие рекуррентные единицы (Bi-GRU). Ансамблевые модели включают алгоритмы бустинга и бэггинга; выбираем LightGBM, XGBoost и CatBoost.

Принципиально оба типа моделей — и ансамблевые, и нейронных сетей — решают проблемы путем последовательной декомпозиции, а не разбиения всего набора данных с помощью сложных границ, как в методе опорных векторов или логистической регрессии. Так как ясно, что алгоритмы на основе деревьев итеративно разделяют пространство признаков по различным признакам для оптимизации информационного выигрыша, нейронные сети работают аналогично, но менее очевидным образом. Каждый нейрон отслеживает конкретную область пространства признаков с некоторыми перекрытиями, активируя определенные нейроны при входе в эти области. Нейронные сети подходят к такому моделированию путем построения моделей с использованием метода вероятностной разбивки, тогда как в методах на основе деревьев применяется детерминированный подход. В любом случае производительность обоих типов моделей зависит от их глубины, поскольку их компоненты соответствуют различным сегментам пространства признаков. В настоящей работе в качестве объектов исследования выбраны LightGBM, ANN, RNN, Bi-RNN, Bi-LSTM и Bi-GRU. Напрямую используем версию LightGBM, победившую в соревнованиях M5, которая демонстрирует улучшенную адаптивность к сложным структурам признаков и значительно улучшенную предсказательную производительность по сравнению со стандартной версией.

3.2. Light GBM. Light Gradient Boosting Machine (LightGBM) — это усовершенствованная версия алгоритма градиентного бустинга на деревьях решений (GBDT),

характеризующаяся превосходным качеством работы в различных задачах машинного обучения, особенно с большими наборами данных и сложными пространствами признаков. В ней применяется метод на основе гистограмм для построения и разделения деревьев решений, что уменьшает использование памяти и вычислительную нагрузку путем дискретизации непрерывных значений признаков в дискретные блоки. В результате LightGBM эффективнее обрабатывает большие наборы данных по сравнению с традиционными реализациями GBDT.

Еще одна отличительная характеристика LightGBM — это стратегия Exclusive Feature Bundling (EFB), которая использует разреженные структуры данных для идентификации взаимоисключающих признаков и их объединения, что эффективно уменьшает размерность набора данных. Это позволяет избежать «проклятия размерности» и ускоряет процесс обучения без потери предсказательной способности модели.

LightGBM предлагает две инновационные стратегии роста деревьев: Leaf-wise и Depth-wise для улучшения производительности модели. Подход Leaf-wise разделяет узлы дерева с наибольшей дельтой функции потерь, в то время как метод Depth-wise способствует сбалансированному развитию дерева. Предоставление этих альтернативных подходов позволяет пользователям выбрать соответствующую стратегию роста в зависимости от конкретной задачи и вычислительных ограничений. Как исследователи, так и практики могут получить выгоду от преимуществ LightGBM, особенно при работе с обширными и высокоразмерными наборами данных. Версия M5 LightGBM относится к хорошо оптимизированной реализации, использующей тщательный подбор признаков для извлечения высококачественной информации из данных.

3.3. ANN. Artificial Neural Network (ANN) — это основная архитектура машинного обучения, которая моделирует сложные закономерности в данных, имитируя структуру и функцию биологических нейронов. ANN применяются в задачах распознавания образов, обработки естественного языка и кластеризации [8].

3.4. RNN, LSTM, GRU. Recurrent Neural Network (RNN) — это специализированная нейронная сеть, разработанная для работы с последовательными данными путем включения рекуррентных связей, что позволяет сохранять информацию на протяжении временных шагов [9]. RNN достигает значительной производительности в таких задачах, как обработка естественного языка, анализ временных рядов и распознавание речи.

Long Short-Term Memory (LSTM) — это продвинутая модификация RNN, которая использует механизмы гейтов для регулирования потока информации и устранения проблемы затухающего градиента, характерной для глубоких RNN. Внутренние вентили — входной, забывания и выходной — в LSTMs позволяют лучше понять долгосрочные зависимости и сложные шаблоны в последовательностях, что улучшает производительность в задачах машинного перевода и генерации текста.

Gated Recurrent Unit (GRU) — еще одно расширение RNN, упрощающее архитектуру LSTM с использованием вентилей обновления и сброса для регулирования потока информации [10]. Оно предлагает сбалансированный компромисс между выразительностью LSTM и простотой стандартных RNN, достигая конкурентоспособной производительности при сниженной вычислительной сложности в таких задачах как анализ тональности и моделирование последовательностей.

3.5. Bi-RNN, Bi-LSTM, Bi-GRU. Двухнаправленные рекуррентные нейронные сети (Bi-RNN), двухнаправленные долгосрочные нейронные сети с короткой памя-

тью (Bi-LSTM) и двунаправленные блокирующие рекуррентные единицы (Bi-GRU) являются передовыми архитектурами машинного обучения, которые расширяют возможности рекуррентных нейронных сетей (RNN) путем обработки последовательных данных в направлениях вперед и назад одновременно. Захватывая зависимости от предыдущих и будущих входов одновременно, данные модели достигают превосходной производительности в задачах обработки естественного языка, распознавания речи и анализа временных рядов.

Bi-RNN расширяют стандартные RNN с отдельным обратным слоем, который обрабатывает последовательности ввода в обратном порядке. Скрытые состояния прямого и обратного слоев объединяются на каждом временном шаге, обеспечивая комплексное представление последовательности ввода. Bi-LSTM и Bi-GRU – это варианты Bi-RNN, включающие специализированные ячейки памяти для решения проблемы затухающего градиента, часто возникающей при использовании глубоких RNN. LSTM использует механизмы управления, включая входные, забывающие и выходные вентили, для регулирования потока информации между временными шагами, тогда как GRU упрощает этот процесс с помощью вентиля обновления и сброса. В результате Bi-LSTM и Bi-GRU предлагают улучшенную способность к обучению долгосрочных зависимостей и сложных шаблонов в последовательностях, что в конечном итоге приводит к более точным и надежным моделям для различных задач машинного обучения.

3.6. XGBoost, CatBoost. XGBoost — оптимизированный алгоритм градиентного бустинга, который использует несколько классификаторов на основе деревьев решений последовательно для минимизации функций потерь. Он обладает отличной предсказательной способностью, масштабируемостью и возможностями параллелизации, что делает его подходящим для разных задач, включая классификацию и регрессию. CatBoost — еще один алгоритм градиентного бустинга, который обрабатывает категориальные переменные с помощью новаторского метода кодирования, основанного на статистике целевой переменной, это позволяет избежать переобучения и повысить производительность модели [11]. CatBoost имеет надежные значения гиперпараметров по умолчанию и демонстрирует исключительную эффективность в задачах с высокоразмерными категориальными признаками [12].

4. Результаты моделирования. При оценке моделей машинного обучения крайне важно учитывать вычислительную мощность используемого компьютера. Был выбран набор данных, содержащий 11 300 образцов, которые были разделены на три отдельных набора: обучающий, состоящий из 8000 образцов, тестовый с 1650 образцами и набор для проверки, также содержащий 1650 образцов. Такое разделение позволяет осуществить эффективное обучение, тестирование и оценку модели для обеспечения ее хорошей обобщающей способности. Для представления данных точно и при этом сохраняя вычислительную эффективность, 12 векторов признаков были тщательно выбраны на основе предметных знаний и предварительного анализа.

Кривая обучения всех рассматриваемых моделей показывает уменьшающуюся тенденцию, что указывает на улучшение производительности по мере обработки большего количества обучающих образцов. Это положительный признак того, что модели обучаются на данных и хорошо адаптируются к задаче.

Для обеспечения всестороннего сравнения различных моделей необходимо провести детальный анализ количественных метрик, который позволит исследователям выявить сильные и слабые стороны каждой модели в отношении конкретной проблемы. Более того, полезно оценить производительность моделей с учетом компромисса

между временем вычислений и предсказательной способностью с учетом доступных вычислительных ресурсов. Это поможет определить наиболее подходящую модель для развертывания, сбалансировав производительность и эффективность.

Тщательное изучение производительности моделей, измеряемой преимущественно по дисперсии, показывает, что они все обладают замечательной эффективностью (рис. 2 и таблица). Среди них сети ANN демонстрируют наиболее выдающуюся производительность. Тем не менее важно учитывать и другие факторы, например вычислительную эффективность, при выборе подходящей модели прогнозирования для решаемой задачи. В этом контексте XGBoost представляется весьма привлекательным выбором, благодаря значительно более низкому времени выполнения по сравнению с другими моделями. Такое снижение вычислительной нагрузки XGBoost приводит к достижению сравнимых уровней точности с другими моделями, но за гораздо меньшее время. В результате комплексного сравнения, учитывающего как точность предсказаний, так и скорость вычислений, XGBoost можно считать общей наилучшей моделью прогнозирования.

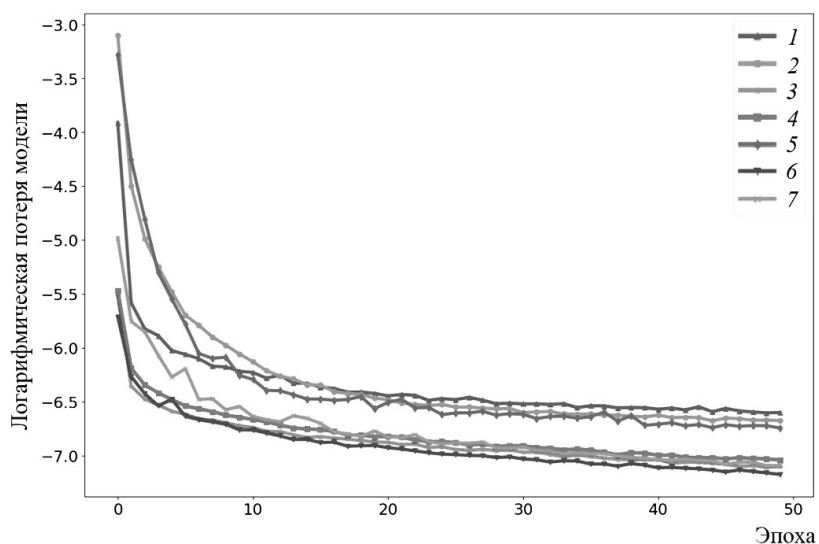


Рис. 2. Кривые обучения прогностических моделей

1 — ANN; 2 — RNN; 3 — LSTM; 4 — GRU; 5 — Bi-RNN; 6 — Bi-LSTM; 7 — Bi-GRU.

Таблица. Качество прогноза текущего PM2.5

Модель	R^2	MSE	Затраченное время, с
ANN	0.8535	6.7295	15
RNN	0.8226	6.6638	23.5
LSTM	0.8094	6.1287	41
GRU	0.7833	7.2667	38
Bi-RNN	0.7668	8.2554	20.8
Bi-LSTM	0.8227	6.9529	42.4
Bi-GRU	0.8481	5.9622	39.6
LightGBM	0.8239	6.9952	4.05
XgBoost	0.8268	6.9714	3.64
CatBoost	0.8351	6.0393	9.52

Выдающаяся производительность XGBoost объясняется его основным принципом — интегрированными алгоритмами обучения. Несмотря на кажущуюся простоту, эти алгоритмы часто дают впечатляющие результаты на практике. Комбинируя несколько слабых учеников в одну сильную модель, интегрированные алгоритмы обучения, такие как XGBoost, создают устойчивую и эффективную систему прогнозирования. Это позволяет модели адаптивно обучаться на данных, улучшая ее предсказательную способность и способность к обобщению (рис. 3).

В заключение, учитывая как точность предсказаний, так и вычислительную эффективность, XGBoost выделяется среди других альтернативных моделей в качестве лучшей модели прогнозирования. Его основание на интегрированных алгоритмах обучения не только обеспечивает высокую производительность на практике, но и подчеркивает значимость таких, казалось бы, простых концепций для достижения впечатляющих результатов.

5. Объяснение модели.

5.1. Объяснение искусственного интеллекта. Искусственный интеллект с объяснениями направлен на повышение прозрачности традиционно непрозрачных «черных ящиков» моделей путем использования различных методологий. Среди распространенных подходов можно выделить вычисление вклада признаков, где количественно оценивается значимость каждого признака в модели. Более высокий вклад указывает на большее влияние на конечный результат прогнозирования. Этот метод также позволяет представить взаимосвязи между признаками. Предоставление интуитивно понятных и логически последовательных вкладов признаков вместе с прогнозами может значительно улучшить доверие пользователей к «черным ящикам» моделей. Важно подчеркнуть, что основная цель искусственного интеллекта с объяснениями не заключается в раскрытии всех деталей и процессов внутри «черного ящика» модели. Он сконцентрирован на представлении ключевых аспектов процесса принятия решений модели таким образом, чтобы это было понятно и значимо для пользователя. Такой подход способствует созданию среды, где системы искусственного интеллекта могут быть более легко приняты, поняты и эффективно использованы в различных приложениях.

Искусственный интеллект с объяснениями может быть классифицирован на основе объема объяснения и основополагающих принципов. С точки зрения объема, объяснения могут быть локальными или глобальными. Локальные объяснения фокусируются на отдельных случаях, в то время как глобальные охватывают всю выборку данных. Например, с одной стороны, в задаче прогнозирования временных рядов локальное объяснение предоставляет информацию о вкладе признаков на каждом временном шаге, что дает возможность реальному времени контролировать данные. С другой стороны, глобальное объяснение оценивает среднее влияние каждого признака за определенный период, что дает возможность осуществить всеобъемлющую оценку «черного ящика» модели, которая может служить вспомогательной технологией для сравнения производительности моделей. С точки зрения принципов объяснения методы искусственного интеллекта с объяснениями делятся на встроенные и пост-хок. Встроенные методы относятся к врожденной объяснимости модели, таким как «белые ящики», например, линейная регрессия и деревья решений. Для «черных ящиков» встроенные подходы стремятся интегрировать возможности объяснения непосредственно в модель, что приводит к уникальным объяснениям, специфичным для этой модели или типа моделей. Пост-хок методы фокусируются на разработке модельно-агностических объяснений, применимых к любому «черному ящику» моде-

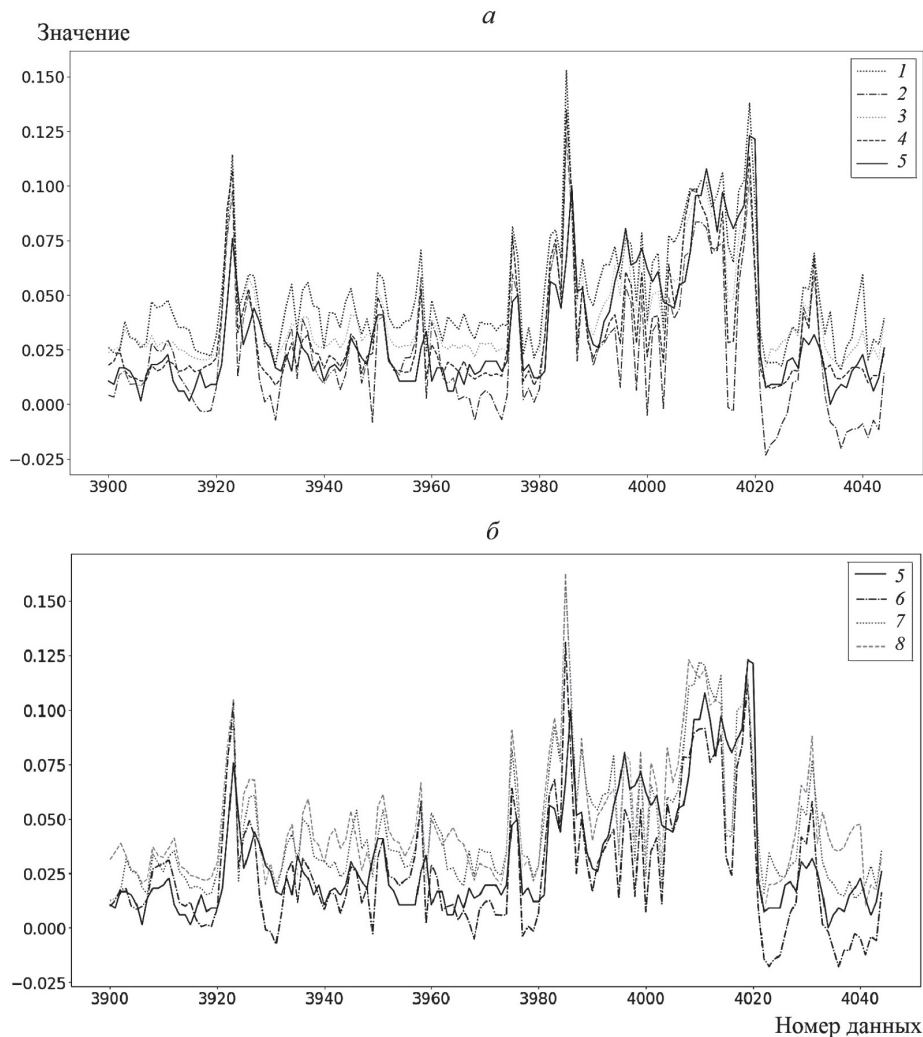


Рис. 3. Оригинальные данные против прогнозов разных моделей: 10-модельный сравнительный анализ
 1 — ANN; 2 — RNN; 3 — LSTM; 4 — GRU; 5 — Bi-RNN; 6 — Bi-LSTM; 7 — Bi-GRU.

ли. Обычно они включают изменение каждого признака в наборе данных и измерение соответствующих изменений в прогнозных результатах для вычисления вклада признаков, не принимая во внимание основную модель.

С учетом цели объяснения существующих прогностических моделей в качестве объяснительной основы использовался метод SHAP. Этот выбор обусловлен устойчивым теоретическим фундаментом, предоставляемым теорией кооперативных игр, а также наличием комплексных инструментов программирования, которые облегчают практическую реализацию.

5.2. Интерпретация результатов с учетом объяснений на основе SHAP. SHAP — это метод объяснения, разработанный на основе значений Шепли [13]. Он использует теорию кооперативных игр в качестве теоретической основы,

рассматривает черный ящик модели как «игру» и каждый признак как «игрока». Путем вычисления значения Шепли можно определить степень вклада каждого игрока (признака) в процесс игры (работу «черного ящика» модели), а затем узнать степень его вклада [14].

Можно создать информативную столбчатую диаграмму, которая дает возможность продемонстрировать общую важность признаков, конкретно отображая средний вклад каждого признака в результаты прогнозирования модели. Полученные графики-столбцы предоставляют краткий обзор важности признаков и помогают понять, как модель делает прогнозы на основе признаков, и, следовательно, руководят решениями, связанными с выбором и инженерией признаков. В конечном итоге эта техника применяется к отдельным значениям во всех наблюдениях. Определяются абсолютные значения этих вкладов, затем суммируются и усредняются, чтобы получить полное представление о ранжировке переменных (рис. 4). В целом признак PM10 демонстрирует доминирующую ранжировку вклада, за ним следуют CO и DEWP. Эти ранжировки указывают на ведущие признаки, влияющие на результаты прогнозирования модели.

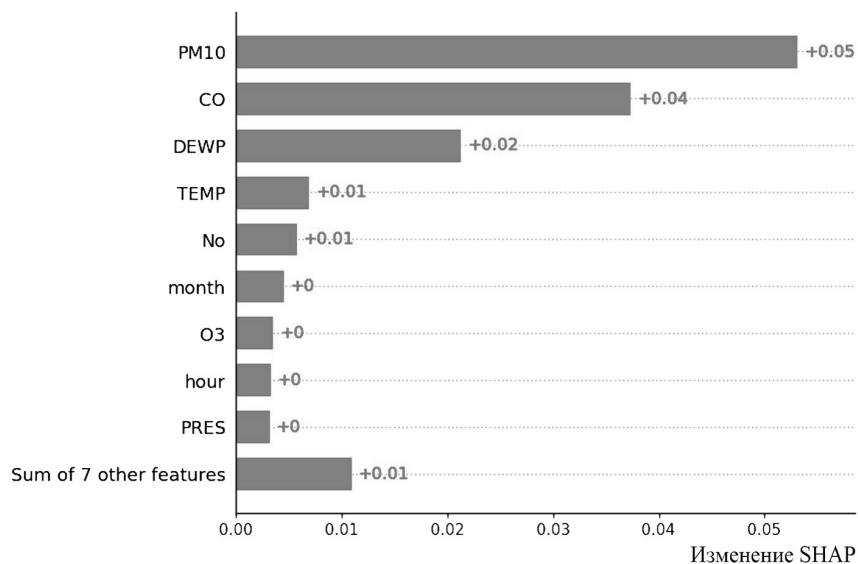


Рис. 4. Пример результатов глобального объяснения

Кроме того, возможно провести детальное исследование влияющих факторов, анализируя отдельные точки наблюдений. Это можно сделать путем создания водопадной диаграммы, которая ясно показывает влияние модели на прогнозируемые результаты для конкретной точки данных. Водопадная диаграмма визуально представляет величину вклада каждого признака в прогнозы модели.

Для иллюстрации этой методологии на рис. 5 показан пример наблюдения (2 октября 2016 г., 6:00), демонстрирующего локализованное рассмотрение переменных, от которых зависит прогностическая модель, в отличие от общего подхода, представленного на рис. 5. В данном случае прогностическая модель выдала постоянный вывод в размере 0.119 в 6:00. Отмечается, что PM10 оказала отрицательное воздействие в размере -0.05 на прогноз, CO — отрицательное воздействие в размере -0.04 и дру-

гие переменные следовали подобной тенденции. В результате окончательное предсказанное значение составило 0.005. Этот анализ подчеркивает ценность изучения отдельных точек данных, обогащая понимание функционирования модели и информируя последующие решения или корректировки в отношении конкретных значений признаков.

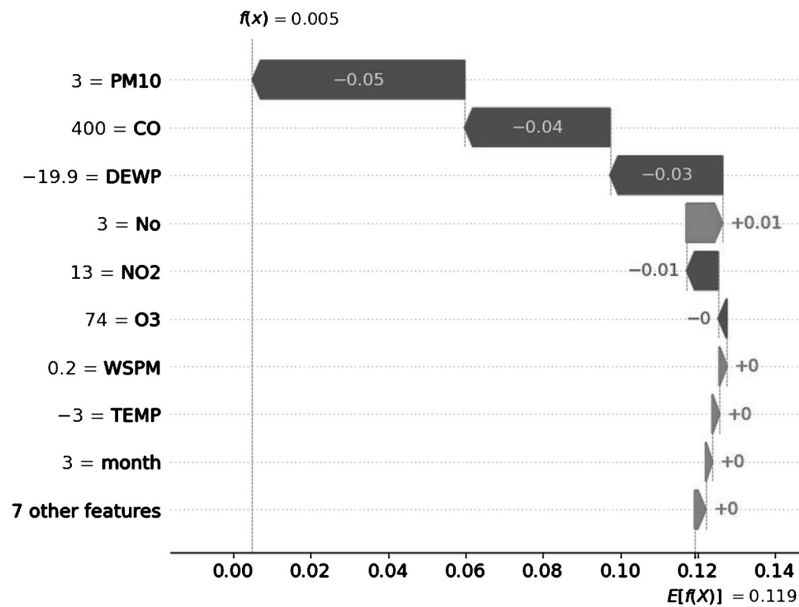


Рис. 5. Пример результатов локального объяснения

6. Заключение. Основной вклад настоящей работы выходит за рамки простого сравнения моделей прогнозирования временных рядов на различных данных. Мы также стремимся предложить понятные на уровне интерпретации идеи для повышения прозрачности «черных ящиков» прогностических моделей и помощи пользователям в определении достоверности изучаемых моделей признаков. На основе традиционных показателей производительности был сделан вывод, что XGBoost в настоящее время является превосходной прогностической моделью для задач прогнозирования временных рядов энергии [15, 16].

Результаты интерпретации, полученные с использованием SHAP, позволяют оценить вклад отдельных признаков при использовании XGBoost в конкретных контекстах. Это понимание помогает выделить важные признаки в определенных обстоятельствах.

В настоящем исследовании мы сосредоточились на глобальной интерпретации с целью анализа вклада признаков на протяжении продолжительного периода времени. В дальнейшем планируем уделить внимание локальной интерпретации для задач прогнозирования временных рядов, где результаты интерпретации генерируются для каждого момента времени. Такой подход будет способствовать реальному времени интерпретации и, возможно, выявлению проблем, таких как концептуальные изменения, которые могут негативно влиять на прогнозы временных рядов.

В работе не только сравниваются различные модели прогнозирования временных рядов, но и предоставлены понятные на уровне интерпретации идеи об их внутрен-

нем устройстве. Используя объяснения на основе SHAP, можно установить вклад отдельных признаков, это поможет настраивать модели для конкретных приложений. В будущем планируем исследовать реальное время и локальные интерпретации, чтобы справиться с потенциальными вызовами в задачах прогнозирования временных рядов.

Литература

1. Zhan D., Kwan Mei-Po, Zhang W., Yu X., Meng B., Liu Q. The driving factors of air quality index in China // *Journal of Cleaner Production*. 2018. Vol. 197. P. 1342–1351.
2. Saad M. Sh., Melvin A., Md Sh., Yeon A., Saad M., Rahman A., Kamarudin Yu. M. Classifying sources influencing indoor air quality (IAQ) using artificial neural network (ANN) // *Sensors*. 2015. Vol. 15. N 5. P. 11665–11684.
3. Navares R., Aznarte J. L. Predicting air quality with deep learning LSTM: Towards comprehensive models // *Ecological Informatics*. 2020. Vol. 55. P. 101019.
4. Athira V., Geetha P., Vinayakumar R., Soman K. P. Deepairnet: Applying recurrent networks for air quality prediction // *Procedia Computer Science*. 2018. Vol. 132. P. 1394–1403.
5. Di Q., Amini H., Shi L., Kloog I. An ensemble-based model of PM_{2.5} concentration across the contiguous United States with high spatiotemporal resolution // *Environment International*. 2019. Vol. 130. Iss. 0160–4120. P. 104909. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2019.104909>
6. Fann N., Risley D. The public health context for PM_{2.5} and ozone air quality trends // *Air Qual Atmos Health*. 2013. Vol. 6. P. 1–111. <https://doi.org/10.1007/s11869-010-0125-0>
7. Wang K., Yin H., Chen Y. The effect of environmental regulation on air quality: A study of new ambient air quality standards in China // *Journal of Cleaner Production*. 2019. Vol. 215. Iss. 0959–6526. P. 268–279. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.01.061>
8. Palani S., Liong Shie-Yui, Tkalic P. An ANN application for water quality forecasting // *Marine Pollution Bulletin*. 2008. Vol. 56. N 9. Iss. 0025–326X. P. 1586–1597. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2008.05.021>
9. Sherstinsky A. Fundamentals of recurrent neural network (RNN) and long short-term memory (LSTM) network // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2020. Vol. 404. Iss. 0167–2789. P. 132306. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132306>
10. Dey R. S., Fathi M. Gate-variants of Gated Recurrent Unit (GRU) neural networks // 2017 IEEE 60th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS). 2017. P. 1597–1600. <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2017.8053243>
11. Chen T., Guestrin C. Xgboost: A scalable tree boosting system // *Proceedings of the 22nd International Conference on knowledge discovery and data mining*. 2016. P. 785–794.
12. Essam Al. D. Comparison between XGBoost, LightGBM and CatBoost using a home credit dataset // *International Journal of Computer and Information Engineering*. 2019. Vol. 13. N 1. P. 6–10.
13. Meng Y., Yang N., Qian Z., Zhang G.. What makes an online review more helpful: an interpretation framework using XGBoost and SHAP values // *Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research*. 2020. Vol. 16. N 3. P. 466–490.
14. Merrick L. The explanation game: Explaining machine learning models using shapley values // *Machine Learning and Knowledge Extraction: 4th IFIP TC 5, TC 12, WG 8.4, WG 8.9, WG 12.9 International Cross-Domain Conference*. CD-MAKE 2020. Dublin; Ireland. August 25–28, 2020. Vol. 4. P. 17–38.
15. Якушев В. П., Буре В. М., Митрофанова О. А., Митрофон Е. П. Теоретические основы вероятностно-статистического прогнозирования неблагоприятных агрометеословий // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 174–182. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.207>
16. Егоров Н. В., Виноградова Е. М., Доронин Г. Г. Математическое моделирование полевого катода лезвийной формы с диэлектрическим покрытием // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 65–71. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.106>

Статья поступила в редакцию 9 января 2024 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Ци Дуифан — аспирант; st073409@student.spbu.ru

Explanatory comparative analysis of time series forecasting algorithms for air quality prediction

D. Qi, V. M. Bure

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Qi D., Bure V. M. Explanatory comparative analysis of time series forecasting algorithms for air quality prediction. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 206–219. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.206> (In Russian)

This study explores the effectiveness of time series forecasting models for predicting air quality using datasets from a Purple Air Dual Laser Air Quality Sensor and the Kaggle Online platform. These datasets contain reliable and real sensor records, ensuring the richness of information required for environmental protection. The research focuses on identifying suitable forecast models for environmental analysis, including popular algorithm structures such as neural network models and ensemble models. Moreover, the study introduces the Explainable artificial intellect (AI) method to provide explanations for models with excellent performance indicators, thereby enhancing their trust and transparency. The performance of the models was evaluated using metrics such as mean absolute error (MAE), root mean square error (RMSE), and coefficient of determination (R -squared). Results indicate that the neural network and ensemble models are effective in forecasting air quality time series. The study contributes to the body of knowledge on time series forecasting models and provides insights for future research in air quality prediction.

Keywords: air quality, time series forecasting, neural networks, ensemble models, explainable AI.

References

1. Zhan D., Kwan Mei-Po, Zhang W., Yu X., Meng B., Liu Q. The driving factors of air quality index in China. *Journal of Cleaner Production*, 2018, vol. 197, pp. 1342–1351.
2. Saad M. Sh., Melvin A., Md Sh., Yeon A., Saad M., Rahman A., Kamarudin Yu. M. Classifying sources influencing indoor air quality (IAQ) using artificial neural network (ANN). *Sensors*, 2015, vol. 15, no. 5, pp. 11665–11684.
3. Navares R., Aznarte J. L. Predicting air quality with deep learning LSTM: Towards comprehensive models. *Ecological Informatics*, 2020, vol. 55, pp. 101019.
4. Athira V., Geetha P., Vinayakumar R., Soman K. P. Deepairnet: Applying recurrent networks for air quality prediction. *Procedia Computer Science*, 2018, vol. 132, pp. 1394–1403.
5. Di Q., Amini H., Shi L., Kloog I. An ensemble-based model of PM_{2.5} concentration across the contiguous United States with high spatiotemporal resolution. *Environment International*, 2019, vol. 130, iss. 0160–4120, pp. 104909. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2019.104909>
6. Fann N., Risley D. The public health context for PM_{2.5} and ozone air quality trends. *Air Qual Atmos Health*, 2013, vol. 6, pp. 1–111. <https://doi.org/10.1007/s11869-010-0125-0>
7. Wang K., Yin H., Chen Y. The effect of environmental regulation on air quality: A study of new ambient air quality standards in China. *Journal of Cleaner Production*, 2019, vol. 215, iss. 0959–6526, pp. 268–279. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.01.061>
8. Palani S., Liong Shie-Yui, Tkalic P. An ANN application for water quality forecasting. *Marine Pollution Bulletin*, 2008, vol. 56, no. 9, iss. 0025–326X, pp. 1586–1597. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2008.05.021>
9. Sherstinsky A. Fundamentals of recurrent neural network (RNN) and long short-term memory (LSTM) network. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2020, vol. 404, iss. 0167–2789, pp. 132306. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132306>
10. Dey R. S., Fathi M. Gate-variants of Gated Recurrent Unit (GRU) neural networks. *2017*

IEEE 60th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), 2017, pp. 1597–1600. <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2017.8053243>

11. Chen T., Guestrin C. Xgboost: A scalable tree boosting system. *Proceedings of the 22nd International Conference on knowledge discovery and data mining*, 2016, pp. 785–794.

12. Essam Al. D. Comparison between XGBoost, LightGBM and CatBoost using a home credit dataset. *International Journal of Computer and Information Engineering*, 2019, vol. 13, no. 1, pp. 6–10.

13. Meng Y., Yang N., Qian Z., Zhang G.. What makes an online review more helpful: an interpretation framework using XGBoost and SHAP values. *Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research*, 2020, vol. 16, no. 3, pp. 466–490.

14. Merrick L. The explanation game: Explaining machine learning models using shapley values. *Machine Learning and Knowledge Extraction: 4th IFIP TC 5, TC 12, WG 8.4, WG 8.9, WG 12.9 International Cross-Domain Conference, CD-MAKE 2020*. Dublin, Ireland, August 25–28, 2020, vol. 4, pp. 17–38.

15. Iakushev V. P., Bure V. M., Mitrofanova O. A., Mitrofanov E. P. Theoretical foundations of probabilistic and statistical forecasting of agrometeorological risks. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 174–182. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.207>(In Russian)

16. Egorov N. V., Vinogradova E. M., Doronin G. G. Blade-like field cathode with a dielectric coating mathematical modeling *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 65–71. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.106> (In Russian)

Received: January 9, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

A u t h o r s' i n f o r m a t i o n:

Dongfang Qi — Postgraduate Student; st073409@student.spbu.ru

Vladimir M. Bure — Dr. Sci. in Technics, Professor; vlb310154@gmail.com

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.7

MSC 90B18

Выбор способа передачи данных при проведении исследования, направленного на повышение надежности и обеспечение безопасной эксплуатации изделий*А. А. Баевский, М. С. Аносов, А. Ю. Панов*Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
Российская Федерация, 603155, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

Для цитирования: *Баевский А. А., Аносов М. С., Панов А. Ю.* Выбор способа передачи данных при проведении исследования, направленного на повышение надежности и обеспечение безопасной эксплуатации изделий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 220–230. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.207>

Цель данной работы — выбрать оптимальный способ передачи данных для проведения исследования повышения надежности и обеспечения безопасной эксплуатации изделий, полученных методом 3D-печати и эксплуатируемых при пониженных температурах. Это очень важно, так как любая возникающая ошибка чревата дальнейшими неточностями, а впоследствии, возможно, и приведет к гибели человека. Описаны основные способы передачи данных, подходящие для изучаемого случая. Подробно разобраны их преимущества, недостатки. Проведено сравнение каждого способа путем присвоения оценок по требуемым группам показателей. По результатам сравнения сделаны выводы о наилучшем способе передачи данных, что может быть полезно для проведения дальнейших работ и схожих исследований в будущем.

Ключевые слова: передача данных, 3D-печать, Wi-Fi, RFID, Bluetooth.

1. Введение. При изучении повышения надежности и обеспечения безопасной эксплуатации изделий, полученных методом 3D-печати и эксплуатируемых при пониженных температурах, выявилось несколько проблем. Одна из них связана с научными основами для оперативной оценки хладостойкости металлов, выявленных методом 3D-печати в процессе их производства, а также с учетом эксплуатации на основе их связи с параметрами средств технической диагностики (ультразвука и акустической эмиссии) [1]; другая — с разработкой подходов и методов оценки механизмов разрушения металлов, полученных методом 3D-печати, основанных на использовании комбинированных методов неразрушающего контроля, применяющих подходы

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

цифровой обработки изображений и фрактального анализа фрактограмм, а также искусственного интеллекта в режиме реального времени.

2. Методика проведения испытаний. Для проведения низкотемпературных испытаний в рамках настоящего исследования был разработан специализированный стенд с криокамерой (рис. 1), поддерживающей стабильную температуру образцов в диапазоне от -80 до $+20$ °С. Испытания проводили с учетом требований ГОСТ 25.502-79*. Частота упругопластического циклического деформирования устанавливалась с использованием частотного преобразователя, равной 8.3 Гц (500 циклов/мин). Амплитуду деформаций в процессе испытаний контролировали с помощью лазерного датчика перемещений с погрешностью 0.001 мм. Температуру в зоне максимальных напряжений контролировали датчиками температуры «pt100». Погрешность измерения температуры ± 1 °С [2].



Рис. 1. Стенд для усталостных испытаний металлов в широком диапазоне температур

В процессе испытаний регистрировали число циклов N и амплитуду напряжений в цикле σ_{max} . Напряжение в исследуемой области дополнительно контролировали, используя тензометрический датчик с термокомпенсацией для стали (рис. 2).

Кривую усталости анализировали по методике, описанной в ГОСТ 25.502-79 и литературе на основе оценки тангенса угла наклона этой кривой в логарифмических координатах и предела выносливости.

Металлографические исследования образцов осуществляли в зоне наиболее вероятного разрушения образца, определяемого как расчетным путем, так и путем моделирования в среде Autodesk Inventor Nastran 2022 (рис. 2) по методу Multi-Axial Fatigue Analysis (анализ многоосной усталости с основным критерием по эквивалентным напряжениям фон Мизеса) [1, 2].

Все показания с датчиков передаются в компьютерную систему вручную. Это занимает большое количество времени, имеет высокую трудоемкость, возникает вероятность ошибки или неточности при передаче, что недопустимо при исследовании. Потому нужно проанализировать и выбрать метод передачи данных на компьютер,

* ГОСТ 25.502-79. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. М.: Стандартинформ, 1979 г., 25 с.

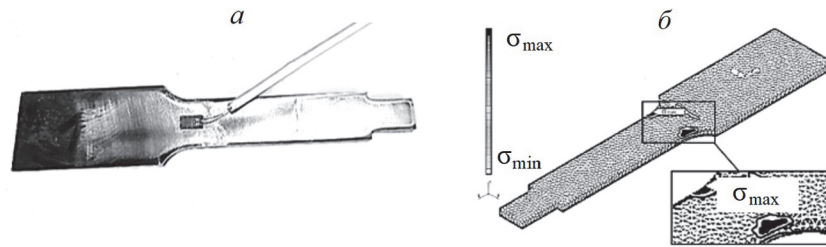


Рис. 2. Место установки тензометрических датчиков (а) и наибольших расчетных напряжений (б) на образце

который позволит убрать эти недостатки и, возможно, дополнит всю систему какими-либо преимуществами.

3. Описание способов передачи данных. Существуют несколько вариантов передачи данных, подходящих для переноса показаний приборов на компьютер, где происходит обработка результатов (рис. 3, а–д): ручной, передача по проводу, несколько вариантов беспроводной передачи данных (Wi-Fi, Bluetooth, RFID). У каждого метода есть свои преимущества и недостатки, порой весьма критичные для получения достоверных результатов исследования. Сравним эти виды передачи данных для оптимизации процесса проведения исследования и снижения рисков ошибки.

Ручной способ предполагает, как ясно из названия, перенос показаний и параметров вручную оператором, следящим за показаниями при работе экспериментальной установки. Причем оператор может быть один или несколько, что может как повысить надежность, так и увеличить шанс ошибки. Схема передачи данных представлена на рис. 3, а.

Недостатки:

1. Человеческая ошибка. Люди более подвержены ошибкам, чем компьютеры. Хотя компьютерная система иногда дает сбой, она обычно записывает данные и организует их более точно, чем люди, с меньшей потребностью в проверке ошибок. Ручная обработка данных требует гораздо больше глаз для проверки и двойной проверки данных на точность.

2. Скорость. Ввод данных вручную занимает много времени. Машины и компьютеры, как правило, работают быстрее, чем люди, что позволяет сотрудникам сосредоточиться на других вещах.

3. Трудозатраты. Платить людям за ввод данных вручную стоит больших денег. Работа многих может быть выполнена одним человеком, а это означает, что нужно меньше сотрудников, занимающихся вводом данных, или можно использовать сотрудников в областях, которые лучше используют их способности для ускорения роста компании.

Преимущества:

1. Системные затраты. Ручной ввод данных не требует дорогих систем, машин и программ. Система ручной обработки позволяет начать, не вкладывая много драгоценного капитала в компьютеры, машины и методы компьютерной обработки.

2. Легкость для небольших экспериментов. Не требуется покупать недешевую технику, ее настраивать на начальном этапе, когда может быть неизвестно, насколько сложная система может понадобиться, что может привести к первоначальным переплатам за слишком мощную систему или же к потребности в докупке оборудования со всеми вытекающими проблемами.



Рис. 3. Схема поступления информации при способах передачи данных: ручном (*а*), по проводу (*б*), с помощью Bluetooth (*в*), Wi-Fi (*г*) и RFID-технологии (*д*)

3. Усиленный надзор. Когда ведутся записи вручную, можно контролировать, в какие категории помещается каждый отдельный номер.

Ручной перенос данных был исторически первым. Далее появилась передача данных по проводу — телеграф, телефон и др. Схема передачи информации при таком способе передачи данных представлена на рис. 3, б [3].

Это дало неоспоримые преимущества, но появились и свои недостатки. Основное достоинство проводной сети — стабильность и надежность работы. Рассмотрим *преимущества* подробнее:

1. Высокая скорость и стабильность работы. Итак, возьмем распространенную конфигурацию сети со скоростью работы 1 Гбит/с, которая доступна для каждого клиента в сети и не делится между ними, плюс это скорость в каждую сторону, т. е. суммарная пропускная способность может достигать 2000 Мбит/с (в соответствии со стандартом беспроводной передачи данных IEEE 802.3ab). Кроме того, есть поддержка больших пакетов (Jumbo Frame, это пакеты по 9 и 16 кб), что дает возможность увеличить скорость при передаче больших объемов данных за счет сокращения передачи служебной информации, а также снизить нагрузку на процессор. Еще одним способом, повышающим пропускную способность сети, является агрегация каналов (используемая в стандарте IEEE 802.3ad), которая позволяет получить пропускную способность выше 1 Гбит/с. Наконец, витая пара эффективно работает при длине провода до 100 м без ухудшения стабильности и скорости соединения [4].

2. Оборудование. Гигабитный контроллер проводной сети сегодня интегрирован в любую продающуюся материнскую плату, т. е. по факту является бесплатным для пользователя. Кабели тоже относительно дешевы, кроме того их можно нарезать самостоятельно до нужной длины. Сетевое оборудование на рынке есть на любой вкус и кошелек, всегда можно найти недорогие и при этом эффективные решения.

3. Безопасность. Один из существенных плюсов проводной сети — безопасность. В первую очередь физическая, так как, чтобы подключиться к сети, злоумышленнику нужен физический доступ в помещение к розетке.

Но есть и *недостатки* у такой сети, а именно:

1. Как и с любым кабелем, основной минус — это необходимость прокладки кабелей до каждого рабочего места, а в дальнейшем привязка к нему работника. Разводка, как правило, осуществляется изначально, поэтому при любых изменениях в расстановке сетевую инфраструктуру тоже, скорее всего, придется перекладывать. В результате поменять раскладку сотрудников, добавить рабочие места или сетевое оборудование, изменить расположение станков или другого оборудования — нетривиальная задача, для которой может потребоваться перепрокладка кабелей или разного рода дополнительные ухищрения.

2. К одному проводу возможно подключение только одного устройства, а некоторые устройства к проводной сети вообще не подключишь.

Теперь необходимо рассмотреть беспроводную передачу данных. Существует несколько основных ее видов. Это Bluetooth, Wi-Fi, RFID. Разберем преимущества и недостатки каждого для более подробного и углубленного сравнения данных видов передачи данных.

Создание радиомодуля Bluetooth было ознаменовано возможностью беспроводного соединения различных устройств, исключив из обихода неудобные кабели. А сегодня — это мировой стандарт, доступный во всех уголках планеты, с рабочей частотой 2.4 ГГц [5]. Доступность его обуславливается и отсутствием обязательного лицензирования, что дает возможность использовать всеми желающими. Схема прохождения информации при организации сети с помощью данной технологии представлена на рис. 3, в [6].

Преимущества:

1. Возможность быстрого обмена данными между устройствами без участия кабеля.
2. Ввиду доступности устройства модуля наличие Bluetooth не существенно влияет на стоимость устройства [7].
3. Использование модуля не требует особых навыков и не вызывает сложностей.
4. По сравнению с Wi-Fi модуль Bluetooth более экономичен в отношении энергопотребления [8].

Недостатки:

1. Относительная универсальность. Она является как преимуществом, так и недостатком Bluetooth. Во-первых, не все адаптеры поддерживают все профили (именно по этой причине универсальность Bluetooth относительная). Во-вторых, в некоторых ситуациях эта универсальность может оказаться излишней (например, могут возникнуть трудности при нахождении устройства в сети с большим числом подключений) [9].

2. К главным недостаткам сетей Bluetooth относится обеспечиваемый уровень безопасности. Слабости защиты Bluetooth, в частности, вызваны тем, что эта технология делает сильный упор на опознание устройств для безопасного обслуживания, а также на контроль, которым обладает пользователь над устройствами Bluetooth и их конфигурацией. Современная Bluetooth-технология не предлагает никакого средства опознания пользователя, что делает Bluetooth-устройства особенно уязвимыми к так называемым spoofing-нападениям (радиодезинформации) и неправильному применению опознавательных устройств. Особенно слабый аспект Bluetooth — процесс «спаривания» (pairing) устройств, при котором происходит обмен ключами в незакодированных каналах. Если нападающий перехватит передачу процесса спаривания, то он сможет получить ключ инициализации путем калькуляции этих ключей для любого возможного варианта пароля и сравнения результатов с перехваченной передачей. Ключ инициализации используется для расчета ключа связи. Рассчитанный хакером ключ связи сравнивается с перехваченной передачей с целью узнать, верен он или нет. Также причиной уязвимости является возможность применения коротких, а также заурядных или распространенных паролей (ситуация аналогична использованию простых паролей системными администраторами компьютерных сетей). Такие пароли значительно упрощают инициализацию. Именно это делает ключи связи очень простыми для извлечения из перехваченных спаринговых передач [10].

3. Относительно низкая скорость передачи данных.

Теперь рассмотрим следующий вид беспроводной передачи данных — Wi-Fi. Трудно себе представить современные сети без этой технологии. Принцип действия технологии Wi-Fi достаточно прост. Для организации сети необходимо иметь специальное оборудование, а именно точку доступа, т. е. роутер, подключенный к проводной сети Интернет и устройство, которое нужно подключить к беспроводной Wi-Fi сети, оснащенное радиомодулем [11]. Роутер оборудован таким же радиомодулем, который выполняет функции приема и передачи беспроводного сигнала. Эти модули могут быть от разных производителей и отличаться между собой конструкцией чипа, но, благодаря единому стандарту Wi-Fi, обеспечивается полная их совместимость, что означает возможность подключения различных устройств к сети Wi-Fi [12]. Схема прохождения данных представлена на рис. 3, а.

Преимущества:

1. Организация, использование и расширение сети без применения кабеля.

2. Возможность предоставления доступа к сети мобильным устройствам.
3. Большой выбор на рынке Wi-Fi устройств и их совместимость, благодаря обязательной сертификации оборудования Wi-Fi Alliance [13].
4. Мобильность клиентов и возможность пользования Интернетом в любой обстановке.
5. Возможность пользования одной точкой доступа несколькими пользователями.

Недостатки:

1. Помехи в использовании сети, так как частотный диапазон 2.4 Гц доступен многим другим устройствам, поддерживающим Bluetooth [14].
2. Ограничения частотных диапазонов.
3. Обязательная регистрация точки беспроводного доступа и адаптера Wi-Fi с мощностью излучения, превышающей 100 мВт в РФ.
4. Информационная безопасность, т. е. алгоритм шифрования может быть взломан [15].

И, наконец, последний вариант беспроводного соединения, который можно применить в данном случае — технология, основанная на RFID. Схема организации сети похожа на предыдущую. Только вместо Wi-Fi-оборудования используются пары метка-считыватель метки [16]. Причем последний только называется просто считывателем, он позволяет считывать и записывать информацию на метку. Схема прохождения данных по сети, организованной с помощью такой технологии, представлена на рис. 3, д [17].

Преимущества:

1. Бесконтактная работа — RFID-метка может быть прочитана без какого-либо физического контакта между меткой и ридером.
2. Перезапись данных — данные RFID-метки с перезаписью (RW-метки) могут быть перезаписаны большое число раз [18].
3. Работа вне прямой видимости — чтобы RFID-метка была прочитана RFID-ридером, в общем случае не требуется ее нахождения в зоне прямой видимости ридера.
4. Разнообразие диапазонов чтения — диапазон чтения RFID-метки может составлять от нескольких сантиметров до 30 м и более [19].
5. Широкие возможности хранения данных — RFID-метка может хранить информацию объемом от нескольких байтов до практически неограниченного количества данных.
6. Поддержка чтения нескольких меток — RFID-ридер может автоматически читать несколько RFID-меток в своей зоне чтения за очень короткий период времени.
7. Прочность — RFID-метки могут в значительной мере противостоять жестким условиям окружающей среды.
8. Выполнение интеллектуальных задач — кроме хранения и передачи данных, RFID-метка может предназначаться для выполнения других задач (например, для измерения условий окружающей среды).
9. Высокая точность чтения — RFID является точной на 100 %.

Недостатки:

1. Невысокие рабочие характеристики в присутствии радионепрозрачных и радиопоглощающих объектов. Такое поведение зависит от частоты. Технология в современном ее состоянии плохо работает с такими материалами, а в некоторых случаях отказывает полностью.

2. Воздействие факторов окружающей среды. Условия окружающей среды могут оказывать негативное влияние на RFID-решения.

3. Ограниченное число читаемых меток. Существует ограничение на количество меток, которые можно прочитать за определенное время.

4. Воздействие помех от аппаратуры. На RFID-решение может отрицательно влиять неправильная установка аппаратуры (например, расположение и ориентация антенны) [20].

4. Выбор способа передачи данных. При выборе способа передачи данных были проанализированы его преимущества и недостатки, а также их критичность для исследования. Они были классифицированы на 4 группы: скорость передачи данных, затраты, удобство развертывания системы и вероятность ошибки (в том числе вызываемыми помехами). Параметр «Скорость передачи данных» позволяет оценить, насколько быстро данные от датчиков будут доставлены до конечного устройства, учитывая промежуточные станции, по типу Wi-Fi-роутера и пр. Параметр «Затраты» предполагает суммарную стоимость развертывания всей системы передачи данных. Параметр «Удобство развертывания системы» показывает, насколько быстро, легко, без дополнительных ремонтных работ, организации дополнительных рабочих мест можно собрать данную систему. Параметр «Вероятность ошибки» позволяет оценить надежность сети с точки зрения отсутствия искажений данных и потери их при передаче. Расставим числовые коэффициенты от 1 до 5 (1 — наихудший показатель, 5 — наилучший) для каждого способа передачи данных для таких групп и выясним, какой способ наиболее подходит в случае проведения этого эксперимента (таблица). Столбец «Итого» получен путем сложения числовых коэффициентов и дает возможность оценить суммарный показатель способа передачи данных, если его применять в условиях экспериментальной установки подобного типа, как описано в п. 2.

Таблица. Сравнение способов передачи данных в рамках эксперимента

Способ	Скорость передачи данных	Затраты	Удобство развертывания системы	Вероятность ошибки	Итого
Ручной	1	1	2	1	5
Провод	5	2	1	5	13
Bluetooth	2	5	4	2	13
Wi-Fi	3	3	3	3	12
RFID	4	4	5	4	17

Как видно из таблицы, лучшим результатом является показатель 17 у RFID-технологии ввиду не критичности всех недостатков, присущих данному способу, в рамках условий, в которых проводилось исследование. Именно она была выбрана для передачи данных при изучении рассматриваемого вопроса.

Выбранный метод был опробован при проведении эксперимента и показал хорошие результаты, что позволило сделать вывод о необходимости расширения исследования такого способа передачи данных, в том числе в условиях производства.

5. Заключение. В статье описаны основные способы передачи данных. Подробно рассмотрены их преимущества и недостатки. Способы сравнивали путем присвоения оценок по требуемым группам показателей. Сделаны выводы о наилучшем способе передачи данных, что может быть полезно для проведения работ.

Литература

1. Кабалдин Ю. Г., Аносов М. С., Шатагин Д. А., Колчин П. В. Получение хладостойких металлов наномодифицированием при 3D-печати электродуговой наплавкой с использованием квантово-механического и нейросетевого моделирования // Вестник машиностроения. 2022. № 9. С. 75–80. <https://doi.org/10.36652/0042-4633-2022-9-75-80>
2. Кабалдин Ю. Г., Аносов М. С., Шатагин Д. А., Колчин П. В., Желонкин М. В., Рябов Д. А. Failure of metals produced by additive arc surfacing; neural network analysis // Russian Engineering Research. 2022. Vol. 42. N 11. P. 1164–1169. <https://doi.org/10.3103/S1068798X22110119>
3. Mannah M. A., Ginot N., Batard C. Effect of the power cable on data transmission over a pulse-width-modulated network // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2014. Vol. 61. N 8. P. 4238–4245. <https://doi.org/10.1109/TIE.2013.2288189>
4. Wu H., Jiao C., Cui X. Study on coupling of very fast transients to secondary cable via a test platform // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2018. Vol. 60. N 5. P. 1366–1375. <https://doi.org/10.1109/TEMC.2017.2761998>
5. Фаустов И. С., Токарев А. Б., Сладких В. А., Козьмин В. А., Крыжко И. Б. Радиоконтроль служебных параметров сигнала Bluetooth // Системы управления, связи и безопасности. 2021. № 3. С. 135–151. <https://doi.org/10.24412/2410-9916-2021-3-135-151>
6. Sakopoulos E., Ioannou Z.-M., Viennas E. Personalized data minimization assurance using Bluetooth low energy // Advanced Sciences and Technologies for Security Applications. 2020. P. 41–58. https://doi.org/10.1007/978-3-030-39489-9_3
7. Hasan M. M., Faruque M. R. I., Islam M. T. Dual band metamaterial antenna for LTE/Bluetooth/WiMAX system // Scientific Reports. 2018. N 8. P. 1240. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-19705-3>
8. Qazi R., Parker K. E., Kim C. Y., Rill R., Norris M. R., Chung J., Bilbily J., Kim J. R., Walicki M. C., Gereau G. B., Lim H., Xiong Y., Lee J. R., Tapia M. A., Kravitz A. V., Will M. J., Ha S., McCall J. G., Jeong J.-W. Scalable and modular wireless-network infrastructure for large-scale behavioural neuroscience // Natural Biomedical Engineering. 2022. N 6. P. 771–786. <https://doi.org/10.1038/s41551-021-00814-w>
9. Huang Z., Hao Y., Li Y. Three-dimensional integrated stretchable electronics // Natural Electronics. 2018. N 1. P. 473–480. <https://doi.org/10.1038/s41928-018-0116-y>
10. Albazraqoe W., Huang J., Xing G. A practical Bluetooth traffic sniffing system: design, implementation, and countermeasure // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2019. Vol. 27. N 1. P. 71–84. <https://doi.org/10.1109/TNET.2018.2880970>
11. Сушко А. Д., Фунтов Д. А., Матюшов Д. А., Аль-Ханани М. А., Родыгина И. В. Сравнительный анализ современных технологий передачи данных // Эксплуатация морского транспорта. 2019. № 2 (91). С. 114–119. <https://doi.org/10.34046/aumsuomt91/19>
12. Музаев М. М., Назаева М. И., Мурзаев Х. А. Принципы работы сети Wi-Fi // Вопросы устойчивого развития общества. 2020. № 7. С. 229–233. <https://doi.org/10.34755/IROK.2020.36.52.188>
13. Koелемей J. C. J., Dun H., Diouf C. E. V. A hybrid optical-wireless network for decimetre-level terrestrial positioning // Nature. 2022. N 611. P. 473–478. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-05315-7>
14. Jiang Z. Eliminating the barriers: demystifying Wi-Fi baseband design and introducing the picoscenes Wi-Fi sensing platform // IEEE Internet of Things Journal. 2022. Vol. 9. N 6. P. 4476–4496. <https://doi.org/10.1109/JIOT.2021.3104666>
15. Wang W., Chen Y., Wang L., Zhang Q. Sampleless Wi-Fi: bringing low power to Wi-Fi communications // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2017. Vol. 25. N 3. P. 1663–1672. <https://doi.org/10.1109/TNET.2016.2643160>
16. Zhang J., Lyu Y., Patton J., Periaswamy S. C. G., Roppel T. BFVP: a probabilistic UHF RFID tag localization algorithm using bayesian filter and a variable power RFID model // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2018. Vol. 65. N 10. P. 8250–8259. <https://doi.org/10.1109/TIE.2018.2803720>
17. Khadka G., Arefin M. S., Karmakar N. C. Using punctured convolution coding (PCC) for error correction in chipless RFID tag measurement // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. 2020. Vol. 30. N 7. P. 701–704. <https://doi.org/10.1109/LMWC.2020.2994189>
18. Barbot N., Rance O., Perret E. Classical RFID versus chipless RFID read range: is linearity a friend or a foe? // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2021. Vol. 69. N 9. P. 4199–4208. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2021.3077019>
19. Dobrykh D., Yusupov I., Ginzburg P. Self-aligning poly-poly RFID-tag // Scientific Reports. 2022. N 12. P. 2140. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-06061-6>
20. Zhu W., Cao J., Xu Y., Yang L., Kong J. Fault-tolerant RFID-reader localization based on passive RFID-tags // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2014. Vol. 25. N 8. P. 2065–2076. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2013.217>

Статья поступила в редакцию 8 августа 2023 г.
Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Баевский Анатолий Аркадьевич — ст. преподаватель; baevsky1990@gmail.com

Аносов Максим Сергеевич — канд. техн. наук, доц.; anosov-maksim@mail.ru

Панов Алексей Юрьевич — д-р техн. наук, проф.; panov@nntu.ru

The choice of the data transmission method during the study of improving the reliability and ensuring safe operation of products

A. A. Baevskiy, M. S. Anosov, A. Y. Panov

Nizhny Novgorod State Technical University, 24, Minina ul., Nizhny Novgorod, 603155, Russian Federation

For citation: Baevskiy A. A., Anosov M. S., Panov A. Y. The choice of the data transmission method during the study of improving the reliability and ensuring safe operation of products. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 220–230. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.207> (In Russian)

The purpose of this work is to choose the most optimal method of data transmission for conducting research on improving the reliability and ensuring safe operation of products obtained by 3D printing, operated at low temperatures. This is very important, since any error that occurs when transmitting the results of the study is fraught with further inaccuracies, and, subsequently, possibly human lives or environmental and economic disasters. The article describes the main methods of data transmission suitable for this case. Their advantages and disadvantages, possible problems when deploying networks in production or when scaling the experiment are analyzed in detail. Further, a comparison of each method is made by assigning estimates for the required groups of indicators. Based on the results of the comparison, conclusions were drawn about the best way to transfer data for this study, which may be useful in carrying out further work, as well as in similar studies in the future.

Keywords: data transmission, 3D-printing, Wi-Fi, RFID, Bluetooth.

References

1. Kabaldin Yu. G., Anosov M. S., Shatagin D. A., Kolchin P. V. Poluchenie hladostojkikh metallov nanomodifirovaniem pri 3D-pechati elektrodugovoj naplavkoj s ispol'zovaniem kvantovomekhanicheskogo i nejrosetevogo modelirovaniya [Production of gold-resistant metals by nanomodification in printing by electric arc welding using quantum mechanical and neural network modeling]. *Vestnik of Machine-building*, 2022, no. 9, pp. 75–80. <https://doi.org/10.36652/0042-4633-2022-9-75-80> (In Russian)
2. Kabaldin Yu. G., Anosov M. S., Shatagin D. A., Kolchin P. V., Zhelonkin M. V., Ryabov D. A. Failure of metals produced by additive arc surfacing: neural network analysis. *Russian Engineering Research*, 2022, vol. 42, no. 11, pp. 1164–1169. <https://doi.org/10.3103/S1068798X22110119>
3. Mannah M. A., Ginot N., Batard C. Effect of the power cable on data transmission over a pulsedwidth-modulated network. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, vol. 61, no. 8, pp. 4238–4245. <https://doi.org/10.1109/TIE.2013.2288189>
4. Wu H., Jiao C., Cui X. Study on coupling of very fast transients to secondary cable via a test platform. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2018, vol. 60, no. 5, pp. 1366–1375. <https://doi.org/10.1109/TEMC.2017.2761998>
5. Faustov I. S., Tokarev A. B., Sladkih V. A., Koz'min V. A., Kryzhko I. B. Radiokontrol' sluzhebnykh parametrov signala Bluetooth [Radio monitoring of Bluetooth signals service parameters]. *Systems of Control, Communication and Security*, 2021, no. 3, pp. 135–151. <https://doi.org/10.24412/2410-9916-2021-3-135-151> (In Russian)

6. Sakkopoulos E., Ioannou Z.-M., Viennas E. Personalized data minimization assurance using Bluetooth low energy. *Advanced Sciences and Technologies for Security Applications*, 2020, pp. 41–58. https://doi.org/10.1007/978-3-030-39489-9_3
7. Hasan M. M., Faruque M. R. I., Islam M. T. Dual band metamaterial antenna for LTE/Bluetooth/WiMAX system. *Scientific Reports*, 2018, no. 8, p. 1240. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-19705-3>
8. Qazi R., Parker K.E., Kim C.Y., Rill R., Norris M. R., Chung J., Bilbily J., Kim J. R., Walicki M. C., Gereau G. B., Lim H., Xiong Y., Lee J. R., Tapia M. A., Kravitz A. V., Will M. J., Ha S., McCall J. G., Jeong J.-W. Scalable and modular wireless-network infrastructure for large-scale behavioural neuroscience. *Nature Biomedical Engineering*, 2022, no. 6, pp. 771–786. <https://doi.org/10.1038/s41551-021-00814-w>
9. Huang Z., Hao Y., Li Y. Three-dimensional integrated stretchable electronics. *Nature Electronics*, 2018, no. 1, pp. 473–480. <https://doi.org/10.1038/s41928-018-0116-y>
10. Albazraqoe W., Huang J., Xing G. A practical Bluetooth traffic sniffing system: design, implementation, and countermeasure. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 71–84. <https://doi.org/10.1109/TNET.2018.2880970>
11. Sushko A. D., Funtov D. A., Matyushov D. A., Al'-Hanani M. A., Rodygina I. V. Sravnitel'nyy analiz sovremennykh tekhnologiy peredachi dannykh [Comparative analysis of modern data transmission technologies]. *Operation of Marine Transport*, 2019, no. 2 (91), pp. 114–119. <https://doi.org/10.34046/aumsuomt91/19> (In Russian)
12. Mizaev M. M., Nazaeva M. I., Murzaev H. A. Principy raboty seti Wi-Fi [How does Wi-Fi work]. *Issues of Sustainable Development of society*, 2020, no. 7, pp. 229–233. <https://doi.org/10.34755/IROK.2020.36.52.188> (In Russian)
13. Koелемей J. C. J., Dun H., Diouf C. E. V. A hybrid optical-wireless network for decimetre-level terrestrial positioning. *Nature*, 2022, no. 611, pp. 473–478. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-05315-7>
14. Jiang Z. Eliminating the barriers: demystifying Wi-Fi baseband design and introducing the picoscenes Wi-Fi sensing platform. *IEEE Internet of Things Journal*, 2022, vol. 9, no. 6, pp. 4476–4496. <https://doi.org/10.1109/JIOT.2021.3104666>
15. Wang W., Chen Y., Wang L., Zhang Q. Sampleless Wi-Fi: bringing low power to Wi-Fi communications. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2017, vol. 25, no. 3, pp. 1663–1672. <https://doi.org/10.1109/TNET.2016.2643160>
16. Zhang J., Lyu Y., Patton J., Periaswamy S. C. G., Roppel T. BFVP: a probabilistic UHF RFID tag localization algorithm using bayesian filter and a variable power RFID model. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, vol. 65, no. 10, pp. 8250–8259. <https://doi.org/10.1109/TIE.2018.2803720>
17. Khadka G., Arefin M. S., Karmakar N. C. Using punctured convolution coding (PCC) for error correction in chipless RFID tag measurement. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 2020, vol. 30, no. 7, pp. 701–704. <https://doi.org/10.1109/LMWC.2020.2994189>
18. Barbot N., Rance O., Perret E. Classical RFID versus chipless RFID read range: is linearity a friend or a foe? *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2021, vol. 69, no. 9, pp. 4199–4208. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2021.3077019>
19. Dobrykh D., Yusupov I., Ginzburg P. Self-aligning roly-poly RFID-tag. *Scientific Reports*, 2022, no. 12, p. 2140. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-06061-6>
20. Zhu W., Cao J., Xu Y., Yang L., Kong J. Fault-tolerant RFID-reader localization based on passive RFID-tags. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2014, vol. 25, no. 8, pp. 2065–2076. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2013.217>

Received: August 8, 2023.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Anatolij A. Baevskij — Senior Lecturer; baevsky1990@gmail.com

Maksim S. Anosov — PhD in Technics, Associate Professor; anosov-maksim@mail.ru

Aleksej Y. Panov — Dr. Sci. in Engineering, Professor; panov@nntu.ru

Мультимодальная ансамблевая нейросетевая система обнаружения рака кожи на основе анализа гетерогенных дерматологических данных*

У. А. Ляхова, П. А. Ляхов

Северо-Кавказский федеральный университет,
Российская Федерация, 355017, Ставрополь, Пушкина, 1

Для цитирования: Ляхова У. А., Ляхов П. А. Мультимодальная ансамблевая нейросетевая система обнаружения рака кожи на основе анализа гетерогенных дерматологических данных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 231–243.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.208>

В настоящее время рак кожи служит одной из ведущих причин смертности в мире. Его диагностика на ранних этапах имеет решающее значение для увеличения потенциальной выживаемости. Поэтому важна разработка высокоточных интеллектуальных систем вспомогательной диагностики для выявления рака кожи на ранних стадиях. Ансамблевое обучение — один из актуальных и перспективных методов повышения точности систем интеллектуальной классификации за счет уменьшения дисперсии и вариативности прогнозов отдельных составляющих общей системы. Представлена ансамблевая интеллектуальная система анализа гетерогенных дерматологических данных на основе мультимодальных нейронных сетей. Точность разработанной ансамблевой системы составила 85.92 %, что на 1.85 процентных пункта выше по сравнению со средней точностью отдельных мультимодальных архитектур для классификации гетерогенных дерматологических данных. Предложенная система может использоваться как высокоточный вспомогательный диагностический инструмент, помогающий принять медицинское решение, что позволит повысить шанс раннего выявления пигментных онкопатологий.

Ключевые слова: мультимодальная нейронная сеть, ансамблевая нейронная сеть, машинное обучение, гетерогенные данные, дерматологические изображения, пигментные новообразования кожи, рак кожи, меланома.

1. Введение. Согласно данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ), рак является ведущей причиной смертности в мире, а рак кожи занимает пятое место среди наиболее распространенных форм онкопатологий [1]. Ранняя диагностика рака кожи имеет решающее значение для увеличения потенциальной выживаемости, однако диагностика на ранних стадиях сложна и субъективна из-за схожих морфологических признаков злокачественных и доброкачественных пигментных новообразований. Средняя точность метода визуальной диагностики пигментных новообразований зависит от подготовки и квалификации врача-дерматолога и составляет 65–75 % [2]. Несмотря на то, что гистопатологический анализ считается «золотым стандартом» диагностики рака кожи, данный метод относится к инвазивным и может быть неубедительным в пограничных случаях, когда расхождения в диагнозе,

* Исследование в п. 2 выполнено в Северо-Кавказском центре математических исследований в рамках соглашения с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2023-938), п. 3 — за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10013 (<https://rscf.ru/project/23-71-10013/>). Авторы благодарят Северо-Кавказский федеральный университет за помощь в рамках проекта поддержки малых научных групп и отдельных ученых.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

поставленном разными патологоанатомами могут составлять до 25 % [3]. Поэтому в настоящее время актуальна разработка высокоточных интеллектуальных систем, которые могут использоваться в качестве вспомогательных диагностических инструментов для выявления рака кожи на ранних стадиях [4]. Ансамблевое обучение является одним из актуальных и перспективных методов повышения точности интеллектуальной классификации [5]. Он объединяет выходные сигналы нескольких классификаторов для получения общего решения путем голосования. Ансамблевые методы дают возможность уменьшать дисперсию и вариативность прогнозов, при этом значительно повышая точность нейросетевой классификации [6].

Цель исследования — разработка ансамблевой мультимодальной нейросетевой системы распознавания пигментных новообразований кожи за счет объединения мультимодальных архитектур анализа гетерогенных дерматологических данных в ансамблевую модель взвешенного голосования. Представленная система позволит уменьшить количество ошибочных классификаций и значительно повысить надежность, благодаря использованию как их разнообразных подходов к классификации данных, так и разнородных дерматологических данных и этапа предварительной очистки волосяных структур для подготовки визуальных данных к дальнейшему извлечению признаков. Новизна предлагаемой ансамблевой интеллектуальной системы заключается в одновременном применении метода предварительной очистки волосяных структур на дерматологических изображениях и ансамбля мультимодальных архитектур анализа гетерогенных данных.

2. Ансамблевая система распознавания пигментных новообразований кожи на основе мультимодальных нейронных сетей. Ансамблевое обучение искусственного интеллекта в области дерматологии представляет собой различные методы для создания надежной и точной комбинированной модели путем агрегирования базовых нейросетевых архитектур для классификации дерматологических данных [7]. Ансамблевые модели объединяют результаты отдельных систем искусственного интеллекта для повышения точности за счет использования их разнообразных подходов к классификации данных. Каждая отдельная интеллектуальная система имеет свои преимущества в методах извлечения признаков и при этом ограниченную способность фиксировать разброс выходных данных. Объединение нескольких интеллектуальных систем в ансамблевую модель может повысить надежность результатов классификации, а также уменьшить систематическую ошибку и дисперсию [8]. Наиболее распространенная стратегия в создании ансамблевых моделей — вычисление среднего значения прогнозов, сделанных каждой моделью на аналогичном наборе данных. Ансамбль усреднения в равной степени объединяет прогнозы нескольких обученных моделей и генерирует средние комбинированные прогнозы [9]. Однако для обеспечения более высокой производительности необходимо учитывать разнообразие применяемых в ансамбле нейросетевых моделей и точность каждого выбранного классификатора. К возможным методам реализации разнообразия интеллектуальных систем для ансамблевого обучения относится создание нейросетевых моделей с использованием различных наборов оптимизаторов [10].

Мультимодальное машинное обучение представляет собой интеллектуальный анализ информации из разных модальностей [11]. Оно позволяет извлекать признаки из гетерогенных данных для определения неочевидной взаимосвязи между обрабатываемыми данными и результатами классификации [12]. В области дерматологии наиболее распространенными типами данных являются изображения пигментных новообразований кожи и такие метаданные как пол, возраст, локализация пигмент-

ного поражения на теле пациента. В качестве основного метода диагностирования онкопатологий используется визуальное клиническое исследование кожи. При этом статистические метаданные пациентов также могут указывать на риск развития злокачественных форм пигментных новообразований кожи [13]. Всесторонний анализ разнородных данных позволяет повысить точность и надежность результатов первичной классификации за счет поиска дополнительных связей между визуальными объектами исследований и метаданными как у медиков и специалистов, так и у систем искусственного интеллекта. Наиболее оптимальной интеллектуальной архитектурой для анализа статистических метаданных пациентов является многослойный линейный перцептрон с прямой связью [14]. Для обработки дерматологических изображений наиболее подходящий тип нейронных сетей — сверточные нейронные сети (СНС) [15].

Предлагаемая мультимодальная интеллектуальная система (МИС) анализа гетерогенных дерматологических данных состоит из сверточных слоев предварительно обученной нейронной сети и линейного перцептрона, которые параллельно извлекают признаки из данных различных модальностей. В результате обработки визуальных многомерных данных при помощи СНС происходит создание карт извлеченных признаков следующим образом:

$$I_j^k = f \left(\sum_i^{m^{k-1}} I_i^{k-1} w_{ij}^k + p_j^i \right),$$

где m^{k-1} — количество карт объекта в слое $k-1$; I_i^{k-1} — выход слоя активации; w_{ij}^k — весовые коэффициенты фильтра маски; p_j^i — коэффициент смещения.

В линейном перцептроне нейроны выполняют суммирование полученного вектора входных метаданных \mathbf{m} и коэффициента смещения p , формируя выходной сигнал:

$$M^k = f \left(\sum_i^k m_i w_i + p \right),$$

здесь w_i — весовой коэффициент нейрона.

На слое конкатенации производится объединение построенной карты признаков I_j^k и выходного сигнала M^k :

$$C = \sum_i \sum_j \sum_n I_j^k w_{ijn}^{(1)} + \sum_{i=1}^n M^k w_{in}^{(2)},$$

где $w_{ijn}^{(1)}$ — весовой коэффициент для обработки карт признаков I_j^k дерматологических визуальных данных; $w_{in}^{(2)}$ — весовой коэффициент для обработки извлеченных признаков M^k входного вектора метаданных.

Активация последнего слоя мультимодальной нейросетевой системы производится при помощи функции *softmax*. Полученное выходное распределение вероятностей между диагностическими категориями сравнивается с истинным распределением при помощи функции кросс-энтропийных потерь, в результате которого происходят постепенное запоминание истинных векторов и минимизация потерь при обучении. Регулирование значений весовых коэффициентов линейного перцептрона и сверточных слоев производится при помощи выбранного метода оптимизации для более точной

сходимости функции потери в область глобального минимума. Стохастический градиентный спуск (SGD) и адаптивная оценка моментов (Adam) в настоящее время являются наиболее распространенными алгоритмами оптимизации. При этом Yogi и Diffgrad относятся к наиболее передовым методам оптимизации процесса обучения, которые позволяют достичь наибольшей точности классификации.

Все МИС, обученные с применением разных параметров, объединяются в ансамблевую модель с использованием выбранного правила комбинирования при помощи усреднения. Карта прогноза ансамблевой модели строится путем суммирования значений прогнозов отдельных моделей для каждого D случая в наборе данных. Прогноз категории N для каждого случая вычисляется по функции $\Delta(S_k^{(x)}, t^N)$, которая сопоставляет прогнозируемое значение каждой отдельной модели с соответствующей меткой категории следующим образом:

$$\Delta(S_k^{(x)}, t^N) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_k^{(x)} \in t^1, \\ 2, & \text{если } S_k^{(x)} \in t^2, \\ 3, & \text{если } S_k^{(x)} \in t^3, \\ 4, & \text{если } S_k^{(x)} \in t^4, \\ \dots & \\ N, & \text{если } S_k^{(x)} \in t^N. \end{cases}$$

Если $S_k^{(x)}$ — прогноз МИС, обученной с помощью оптимизатора k , то случай $D^{(x)}$ принадлежит категории N . Общее количество прогнозов, полученных от отдельных моделей для категории N , можно представить так:

$$A_n^{(x)} = \sum_{k=1}^n \Delta(S_k^{(x)}, t^n), \quad 1 \leq n \leq N.$$

Прогноз ансамблевой модели рассчитывается на основе правила взвешенного голосования:

$$A_n^{(ENS)} = \max A_n^{(x)}.$$

Таким образом, рассматриваемому случаю присваивается категория, получившая максимальное количество голосов от каждой нейросетевой модели. На рис. 1 представлена предлагаемая ансамблевая мультимодальная нейросетевая система анализа гетерогенных дерматологических данных на основе сверточной архитектуры Densenet_161. В результате предварительной обработки статистических метаданных формируется вектор входных признаков, включающий в себя 14 переменных, указанных в блоке «Дерматологические данные». Изображения также проходят этап предварительной обработки, в результате которого визуальные данные подаются на вход выбранной СНС. После получения карт признаков при помощи сверточных слоев формируется выходной сигнал, состоящий из распределения вероятностей по 10 распознаваемым категориям. Аналогичным образом формируется выходной сигнал из линейной нейросетевой архитектуры, состоящий также из 10 значений, соответствующих количеству распознаваемых категорий. На слое конкатенации производится объединение разномодальных сигналов. В результате классификации входных данных из вероятностного распределения выбирается максимальное значение, характерное диагностической категории. Все прогнозируемые категории каждой МИС суммируются,

и методом взвешенного голосования ансамблевой модели выбирается категория, которой было присвоено наибольшее количество голосов.

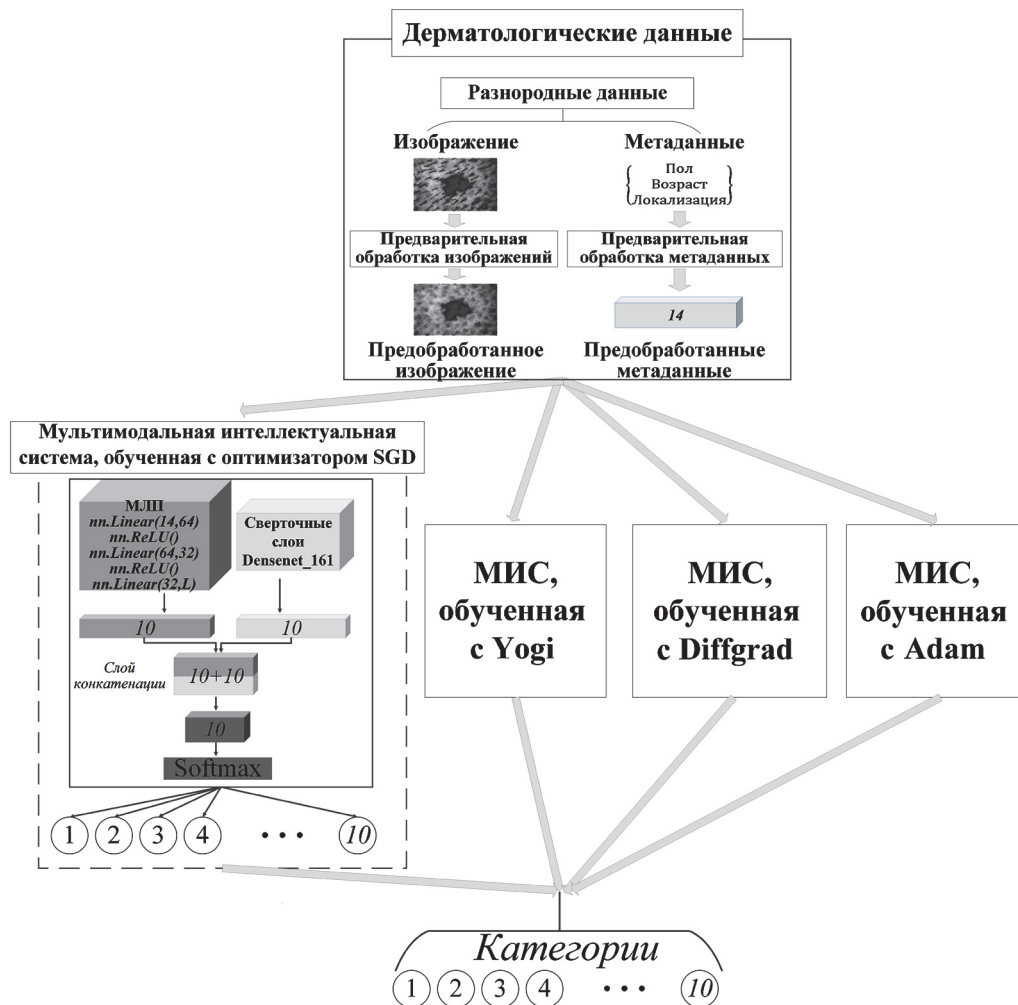


Рис. 1. Схема ансамблевой модели из мультимодальных интеллектуальных систем на основе архитектуры Densenet_161

3. Материалы и методы. Для практического моделирования использовались данные из открытого архива The International Skin Imaging Collaboration (ISIC). Отобранная база данных для обучения и тестирования состоит из 41 725 дерматологических изображений пигментных новообразований кожи, связанных с метадаанными пациентов и гистопатологически подтвержденными диагнозами. Все данные разделены на 10 диагностически значимых категорий. Распределение отобранных дерматологических данных по диагностически значимым категориям представлено на рис. 2. Выбранные дерматологические категории подразделяются на группы «злокачественные» и «доброкачественные» и располагаются в порядке возрастания риска и тяжести течения заболевания. Поскольку актинический кератоз является внутриэпителиаль-

ной дисплазией кератиноцитов и характеризуется как преинвазивный плоскоклеточный рак (рак кожи стадии 0), то данная категория относится к группе «злокачественных» пигментных поражений кожи [16].

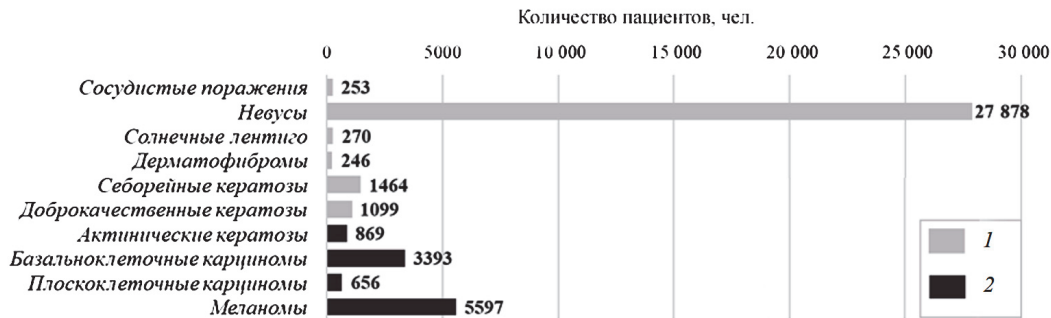


Рис. 2. График распределения отобранных дерматологических данных по диагностическим категориям: доброкачественным (1) и злокачественным (2)

Метаданные для каждого изображения представляют собой информацию о возрасте пациента, половой принадлежности и данные о локализации пигментного новообразования на теле. На этапе предварительной обработки метаданных фактор «Возраст» был разделен на четыре группы в соответствии с возрастной классификацией, принятой ВОЗ. Таким образом, варибельность параметра «Возраст» была снижена с 18 до 4 возможных значений. Распределение дерматологических данных по различным статистическим факторам представлено на рис. 3, а–в.

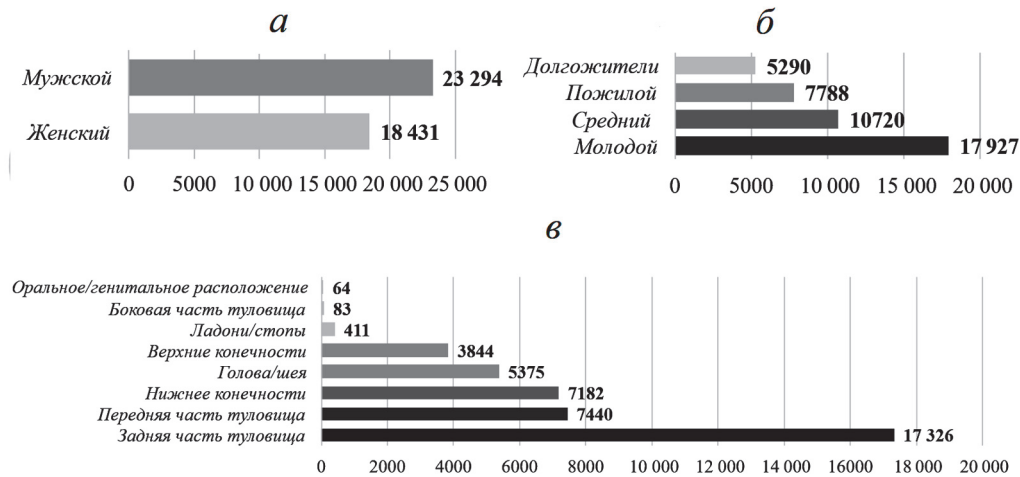


Рис. 3. Распределение отобранных дерматологических данных по статистическим факторам пациентов: по полу (а), по возрасту (б), по локализации пигментного образования на теле пациента (в)

Практическое моделирование проводилось на компьютере Intel(R) Core(TM) i5-8500 с частотой 3,00 ГГц с 16 Гб оперативной памяти и 64-битной операционной системой Windows 10 с использованием языка программирования высокого уровня

Python 3.11.0. Для обучения мультимодальных нейросетевых систем и моделирования ансамблевой системы применялся фреймворк машинного обучения Pytorch совместно с графическим процессором (GPU) на базе видеочипсета NVIDIA GeForce GTX 1050TI, для обработки статистических данных — библиотеки NumPy, Pandas и ScikitLearn, для визуализации данных — библиотека Matplotlib. Для моделирования всех мультимодальных интеллектуальных систем анализа дерматологических данных в качестве архитектуры для извлечения признаков из визуальных данных использовалась СНС Densenet_161. Выбранная сверточная архитектура была предварительно обучена на наборе естественных изображений ImageNet. В качестве методов для оптимизации процесса обучения были выбраны SGD, Adam, Yogi и Diffgrad.

Предварительная обработка визуальных данных состояла из преобразования дерматологических изображений до требуемого размера 224×224 пикселей и применении метода очистки от волосных структур, представленного в работе [17]. Предварительная обработка метаданных заключалась в преобразовании всех статистических факторов в вектор входных признаков при помощи метода one hot encoding. В соответствии с золотым стандартом машинного обучения для моделирования дерматологическая база данных была разделена на обучающие, валидационные и тестовые данные в процентном соотношении 60:20:20 (25 035 обучающих, 8345 валидационных и 8345 тестовых случаев). В табл. 1 представлено распределение дерматологических изображений по категориям в обучающей, валидационной и тестовой выборках.

Таблица 1. Распределение дерматологических изображений по категориям в обучающей, валидационной и тестовой выборках

Категория	Выборка		
	обучающая	валидационная	тестовая
Сосудистые поражения	151	51	51
Невусы	16 730	5574	5574
Солнечные лентиго	162	54	54
Дерматофибромы	146	50	50
Себорейные кератозы	878	293	293
Доброкачественные кератозы	659	220	220
Актинические кератозы	521	174	174
Базальноклеточные карциномы	2035	679	679
Плоскоклеточные карциномы	394	131	131
Меланомы	3359	1119	1119

Набор данных был разделен на обучающую, валидационную и тестовую выборки таким образом, чтобы соотношение визуальных данных в каждой категории было пропорциональным как для обучающего, так и для валидационного и тестового наборов. К обучающей выборке визуальных данных применялись аффинные преобразования, такие как отражение, вращение, перемещение, масштабирование и др., для минимизации риска возникновения переобучения моделей. Размер пакета входных данных составлял 8 примеров. Для всех оптимизаторов была выбрана одинаковая стандартная скорость обучения 0.001. На рис. 4 представлены графики точности при обучении и валидационной проверки МИС на основе СНС Densenet_161.

Предварительно обработанные дерматологические изображения из обучающей выборки подавались на вход архитектуры СНС Densenet_161, закодированный вектор признаков метаданных — на вход многослойной линейной нейросетевой архитектуры. На слое конкатенации производилось объединение разномодальных данных, полученных на выходных слоях Densenet_161 и линейной нейросетевой архитектуры. Объединенный сигнал подавался на вход слоя *softmax* для определения веро-

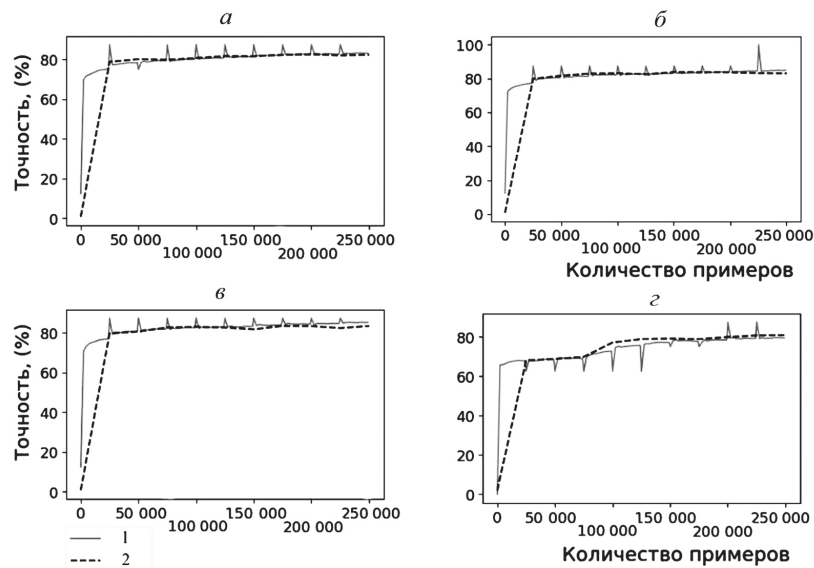


Рис. 4. Графики тренировочной (1) и валидационной (2) точности при проверке МИС на основе оптимизаторов: Adam (а), Diffgrad (б), Yogi (в), SGD (г)

отношения прогнозируемых меток и выбора максимального значения. В процессе обучения использовался алгоритм принудительной остановки, при котором прекращалось обучение МИС, если в течение нескольких эпох отсутствовало увеличение валидационной точности. Таким образом, каждая МИС обучалась в течение 10 эпох. При большом количестве эпох наблюдалось выраженное переобучение каждой из предложенных мультимодальных систем.

4. Результаты моделирования. Для получения результатов тестирования ансамблевой модели все прогнозируемые категории каждой МИС суммировались, и методом взвешенного голосования для каждого случая выбиралась категория, которой было присвоено наибольшее количество голосов. На рис. 5 показаны примеры карт значимости для предлагаемых МИС.

В табл. 2 представлены результаты оценки при тестировании всех обученных МИС на основе архитектуры Densenet_161 для классификации пигментных новообразований кожи. В качестве количественных методов тестовой статистической оценки моделей были выбраны специфичность (Sp), коэффициент корреляции Мэтьюса (MCC — Matthews correlation coefficient [18]), частота ложноотрицательных результатов (FNR — false negative rate), частота ложноположительных результатов (FPR — false positive rate).

Таблица 2. Результаты статистической оценки при тестировании каждой МИС на основе архитектуры Densenet_161 и предложенной ансамблевой модели

Модель	Точность, %	Sp	MCC	FNR	FPR
МИС_Adam	83.70	0.9819	0.6828	0.1630	0.0181
МИС_Diffgrad	83.94	0.9822	0.6904	0.1606	0.0178
МИС_Yogi	84.10	0.9823	0.6917	0.1590	0.0177
МИС_SGD	84.52	0.9828	0.7032	0.1548	0.0172
Ансамбль_МИС	85.92	0.9844	0.7268	0.1408	0.0156

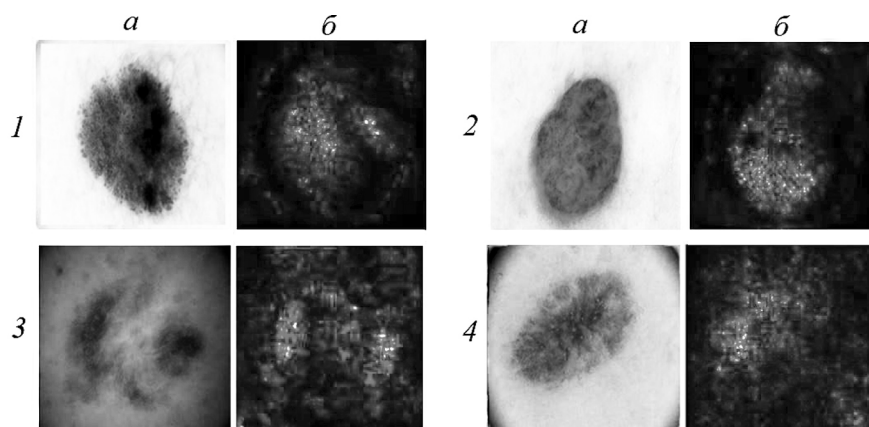


Рис. 5. Тестовые дерматологические изображения (а) и примеры карт значимости, полученные после тестирования МИС на основе архитектуры Densenet_161 в результате интеллектуального анализа (б) МИС, обученные при помощи оптимизаторов: 1 - Adam, 2 - Diffgrad, 3 - Yogi, 4 - SGD.

В результате тестирования наилучший показатель точности распознавания пигментных новообразований кожи составил 85.92 % и был получен при помощи разработанной ансамблевой модели взвешенных голосов на основе обученных мультимодальных систем. Предложенная ансамблевая модель на 1.40 процентных пункта точнее по сравнению с наилучшей по точности МИС, которая была обучена с использованием оптимизатора SGD, и на 1.85 процентных пункта точнее по сравнению со средней точностью всех обученных МИС (84.06 %). Наилучшие показатели Sp, MCC были получены при тестировании разработанной ансамблевой модели на основе различных МИС и составили 0.9844 и 0.7268 соответственно. Для таких мер статистической оценки разработанных интеллектуальных систем как FNR и FPR наилучшие показатели составили 0.1408 и 0.0156 и также были получены при тестировании разработанной ансамблевой модели взвешенных голосов на основе обученных мультимодальных систем. Приведенные результаты показывают, что объединение МИС в ансамблевую модель позволяет значительно повысить точность и надежность классификации пигментных новообразований кожи по сравнению с эффективностью каждой отдельной интеллектуальной системы.

5. Заключение. Представлена ансамблевая интеллектуальная система анализа гетерогенных дерматологических данных. Ее точность на основе мультимодальных архитектур со сверточными слоями Densenet_161 составила 85.92 %. Система состоит из нескольких мультимодальных архитектур, которые анализируют разнородные дерматологические данные, представленные изображениями пигментных новообразований кожи и статистическими метаданными пациентов. Объединение МИС в ансамблевую модель позволило минимизировать возможные ошибки и дисперсию при классификации у каждой отдельной нейросетевой архитектуры, а также значительно повысить надежность за счет использования их разнообразных подходов к классификации данных. Разработанная ансамблевая модель взвешенных голосов на основе мультимодальных архитектур позволила добиться более высокой точности по сравнению с результатами тестирования каждой отдельной мультимодальной системы, а также по сравнению с результатами точности аналогичных ансамблевых систем распознавания злокачественных новообразований кожи [19–21]. В работе [19] представ-

лена ансамблевая система на основе СНС AlexNet, VGGNet и GoogLeNet, тестовая точность которой составила 83.85 % для четырех диагностических категорий, что на 2.07 процентных пункта ниже по сравнению с точностью предложенной ансамблевой интеллектуальной системы анализа гетерогенных дерматологических данных на основе МИС. Авторы работы [20] предложили ансамблевую модель на основе сверточных архитектур Resnet-50, VGG-16, Densenet, Mobilenet, Inceptionv3 и Xception, тестовая точность которой равна 78.00 %, что на 7.92 процентных пункта ниже по сравнению с тестовой точностью предложенной взвешенной ансамблевой модели на основе мультимодальных архитектур. Авторы [21] предложили различные варианты ансамблевых моделей, состоящих из двух архитектур, обученных на одном оптимизаторе. Для ансамбля из СНС DenseNet-201 и MobileNet, обученных с оптимизатором Adam, точность составила 84.43 %, что на 1.49 процентный пункт ниже, чем у предложенной ансамблевой системы на основе МИС. Для архитектур DenseNet-201 и ResNet-50, обученных с использованием оптимизатора Adam, тестовая точность также составила 84.43 % для 25 эпох, что на 1.49 процентный пункт ниже по сравнению с разработанной взвешенной ансамблевой моделью анализа гетерогенных дерматологических данных.

Основным ограничением представленной ансамблевой нейросетевой системы на основе мультимодальных архитектур для анализа гетерогенных дерматологических данных является то, что медики и специалисты могут применять систему только как вспомогательный диагностический инструмент. Такая система не может быть использована в качестве самостоятельного метода диагностики из-за возможного риска возникновения ложноотрицательных ошибок. Однако ее можно считать высокоточным вспомогательным инструментом, помогающим принять медицинское решение, что позволит сократить потребление финансовых и трудовых ресурсов, задействованных в медицинской отрасли, а также повысит шанс раннего выявления пигментных онкопатологий.

Литература

1. *Apalla Z., Lallas A., Sotiriou E., Lazaridou E., Ioannides D.* Epidemiological trends in skin cancer // *Dermatol. Pract. Concept.* 1885. Vol. 7. Iss. 2. P. 1.
2. *Sinz C., Tschandl P., Rosendahl C., Akay B. N., Argenziano G., Blum A., Kittler H.* Accuracy of dermatoscopy for the diagnosis of nonpigmented cancers of the skin // *Journal of Acad. Dermatol.* 2017. Vol. 77. Iss. 6. P. 1100–1109.
3. *Lodha S., Sagar S., Celebi J. T., Silvers D. N.* Discordance in the histopathologic diagnosis of difficult melanocytic neoplasms in the clinical setting // *Journal of Cutan Pathol.* 2008. Vol. 35. Iss. 4. P. 349–352.
4. *Haggenmuller S., Maron R. C., Hekler A., Utikal J. S., Barata C., Barnhill R. L., Brinker T. J.* Skin cancer classification via convolutional neural networks: systematic review of studies involving human experts // *Eur. Journal of Cancer.* 2021. Vol. 156. P. 202–216.
5. *Polikar R., Zhang C., Ma Y.* Ensemble Learning // *Ensemble Machine Learning.* 2012. P. 1–34.
6. *Qureshi A. S., Roos T.* Transfer learning with ensembles of deep neural networks for skin cancer detection in imbalanced data sets // *Neural Process Lett.* 2023. Vol. 55. Iss. 4. P. 4461–4479.
7. *Raza R., Zulfiqar F., Tariq S., Anwar G. B., Sargano A. B., Habib Z.* Melanoma classification from dermoscopy images using ensemble of convolutional neural networks // *Mathematics.* 2021. Vol. 10. Iss. 1. P. 26–43.
8. *Kausar N., Hameed A., Sattar M., Ashraf R., Imran A. S., Abidin M. Z. U., Ali A.* Multiclass skin cancer classification using ensemble of fine-tuned deep learning models // *Applied Sciences.* 2021. Vol. 11. Iss. 22. P. 10593–10608.
9. *Lu Y., Zhang L., Wang B., Yang J.* Feature ensemble learning based on sparse autoencoders for image classification // *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks.* 2014. P. 1739–1745.

10. Tang E. K., Suganthan P. N., Yao X. An analysis of diversity measures // Machine Learning. 2006. Vol. 65. Iss. 1. P. 247–271.
11. Baltrušaitis T., Ahuja C., Morency L. P. Multimodal machine learning // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2019. Vol. 41. Iss. 2. P. 423–443.
12. Liu K., Li Y., Xu N., Natarajan P. Learn to combine modalities in multimodal deep learning // arXiv preprint. arXiv:1805.11730. 2018.
13. Kurtansky N. R., Dusza S. W., Halpern A. C., Hartman R. I., Geller A. C., Marghoob A. A., Marchetti M. A. An epidemiologic analysis of melanoma overdiagnosis in the United States, 1975–2017 // Journal of Investigative Dermatology. 2022. Vol. 142. Iss. 7. P. 1804–1811.
14. Hohn J., Hekler A., Krieghoff-Henning E., Kather J. N., Utikal J. S., Meier F., Brinker T. J. Integrating patient data into skin cancer classification using convolutional neural networks: systematic review // Journal of Medical Internet Research. 2021. Vol. 23. Iss. 7. P. 20708–20723.
15. Sriwong K., Bunrit S., Kerdpasop K., Kerdpasop N. Dermatological classification using deep learning of skin image and patient background knowledge // International Journal of Machine Learning and Computing. 2019. Vol. 9. Iss. 6. P. 862–867.
16. Siegel J. A., Korgavkar K., Weinstock M. A. Current perspective on actinic keratosis: a review // British Journal of Dermatology. 2017. Vol. 177. Iss. 2. P. 350–358.
17. Lyakhov P. A., Lyakhova U. A., Nagornov N. N. System for the recognizing of pigmented skin lesions with fusion and analysis of heterogeneous data based on a multimodal neural network // Cancers. 2022. Vol. 14. P. 1819–1836.
18. Chicco D., Jurman G. The advantages of the Matthews correlation coefficient (MCC) over F1 score and accuracy in binary classification evaluation // BMC Genomics. 2020. Vol. 21. Iss. 1. P. 1–13.
19. Harangi B., Baran A., Hajdu A. Classification of skin lesions using an ensemble of deep neural networks // Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. 2018. P. 2575–2578.
20. Akter M. S., Shahriar H., Sneha S., Cuzzocrea A. Multi-class skin cancer classification architecture based on deep convolutional neural network // 2022 IEEE International Conference on Big Data. Proceedings. 2022. P. 5404–5413.
21. Keerthana D., Venugopal V., Nath M. K., Mishra M. Hybrid convolutional neural networks with SVM classifier for classification of skin cancer // Biomedical Engineering Advances. 2023. Vol. 5. P. 100069–100103.

Статья поступила в редакцию 2 октября 2023 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Ляхова Ульяна Алексеевна — аспирант, мл. науч. сотр.; uljahovs@mail.ru

Ляхов Павел Алексеевич — канд. физ. мат. наук, доц.; ljahov@mail.ru

Multimodal ensemble neural network system for skin cancer detection on heterogeneous dermatological data *

U. A. Lyakhova, P. A. Lyakhov

North-Caucasus Federal University, 1, Pushkin ul., Stavropol, 355017, Russian Federation

For citation: Lyakhova U. A., Lyakhov P. A. Multimodal ensemble neural network system for skin cancer detection on heterogeneous dermatological data. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 231–243. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.208> (In Russian)

* The research in division 2 was supported in the North Caucasus Center for Mathematical Research under an agreement with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement N 075-02-2023-938), the research in division 3 was supported by the Russian Science Foundation, project N 23-71-10013 (<https://rscf.ru/project/23-71-10013/>). The authors thank the North Caucasus Federal University for assistance within the framework of the project to support small scientific groups and individual scientists.

Today, skin cancer is one of the leading causes of death in the world. Diagnosing skin cancer early is critical to increasing potential survival. Therefore, it is relevant to develop high-precision intelligent auxiliary diagnostic systems for detecting skin cancer in the early stages. Ensemble learning is one of the current and promising methods for increasing the accuracy of intelligent classification systems by reducing the dispersion and variability of predictions of individual components of the overall system. The work proposes an ensemble intelligent system for analyzing heterogeneous dermatological data based on multimodal neural networks. The accuracy of the developed ensemble system was 85.92 %, which is 1.85 percentage points higher than the average accuracy of individual multimodal architectures for classifying heterogeneous dermatological data. The developed system can be used as a high-precision auxiliary diagnostic tool to help make a medical decision, which will increase the chance of early detection of pigmented oncological pathologies.

Keywords: multimodal neural network, ensemble neural network, machine learning, heterogeneous data, dermatological images, pigmented skin lesions, skin cancer, melanoma.

References

1. Apalla Z., Lallas A., Sotiriou E., Lazaridou E., Ioannides D. Epidemiological trends in skin cancer. *Dermatol. Pract. Concept.*, 1885, vol. 7, iss. 2, pp. 1.
2. Sinz C., Tschandl P., Rosendahl C., Akay B. N., Argenziano G., Blum A., Kittler H. Accuracy of dermatoscopy for the diagnosis of nonpigmented cancers of the skin. *Journal of Acad. Dermatol.*, 2017, vol. 77, iss. 6, pp. 1100–1109.
3. Lodha S., Saggarr S., Celebi J. T., Silvers D. N. Discordance in the histopathologic diagnosis of difficult melanocytic neoplasms in the clinical setting. *Journal of Cutan Pathol.*, 2008, vol. 35, iss. 4, pp. 349–352.
4. Haggemuller S., Maron R. C., Hekler A., Utikal J. S., Barata C., Barnhill R. L., Brinker T. J. Skin cancer classification via convolutional neural networks: systematic review of studies involving human experts. *Eur. Journal of Cancer.*, 2021, vol. 156, pp. 202–216.
5. Polikar R., Zhang C., Ma Y. Ensemble Learning. *Ensemble Machine Learning*, 2012, pp. 1–34.
6. Qureshi A. S., Roos T. Transfer learning with ensembles of deep neural networks for skin cancer detection in imbalanced data sets. *Neural Process Lett.*, 2023, vol. 55, iss. 4, pp. 4461–4479.
7. Raza R., Zulfiqar F., Tariq S., Anwar G. B., Sargano A. B., Habib Z. Melanoma classification from dermoscopy images using ensemble of convolutional neural networks. *Mathematics*, 2021, vol. 10, iss. 1, pp. 26–43.
8. Kausar N., Hameed A., Sattar M., Ashraf R., Imran A. S., Abidin M. Z. U., Ali A. Multiclass skin cancer classification using ensemble of fine-tuned deep learning models. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, iss. 22, pp. 10593–10608.
9. Lu Y., Zhang L., Wang B., Yang J. Feature ensemble learning based on sparse autoencoders for image classification. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 2014, pp. 1739–1745.
10. Tang E. K., Suganthan P. N., Yao X. An analysis of diversity measures. *Machine Learning*, 2006, vol. 65, iss. 1, pp. 247–271.
11. Baltrušaitis T., Ahuja C., Morency L. P. Multimodal machine learning. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2019, vol. 41, iss. 2, pp. 423–443.
12. Liu K., Li Y., Xu N., Natarajan P. Learn to combine modalities in multimodal deep learning. *arXiv preprint. arXiv:1805.11730*, 2018.
13. Kurtansky N. R., Dusza S. W., Halpern A. C., Hartman R. I., Geller A. C., Marghoob A. A., Marchetti M. A. An epidemiologic analysis of melanoma overdiagnosis in the United States, 1975–2017. *Journal of Investigative Dermatology*, 2022, vol. 142, iss. 7, pp. 1804–1811.
14. Hohn J., Hekler A., Krieghoff-Henning E., Kather J. N., Utikal J. S., Meier F., Brinker T. J. Integrating patient data into skin cancer classification using convolutional neural networks: systematic review. *Journal of Medical Internet Research*, 2021, vol. 23, iss. 7, pp. 20708–20723.
15. Sriwong K., Bunrit S., Kerdprasop K., Kerdprasop N. Dermatological classification using deep learning of skin image and patient background knowledge. *International Journal of Machine Learning and Computing*, 2019, vol. 9, iss. 6, pp. 862–867.
16. Siegel J. A., Korgavkar K., Weinstock M. A. Current perspective on actinic keratosis: a review. *British Journal of Dermatology*, 2017, vol. 177, iss. 2, pp. 350–358.
17. Lyakhov P. A., Lyakhova U. A., Nagornov N. N. System for the recognizing of pigmented skin

lesions with fusion and analysis of heterogeneous data based on a multimodal neural network. *Cancers*, 2022, vol. 14, pp. 1819–1836.

18. Chicco D., Jurman G. The advantages of the Matthews correlation coefficient (MCC) over F1 score and accuracy in binary classification evaluation. *BMC Genomics*, 2020, vol. 21, iss. 1, pp. 1–13.

19. Harangi B., Baran A., Hajdu A. Classification of skin lesions using an ensemble of deep neural networks. *Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2018, pp. 2575–2578.

20. Akter M. S., Shahriar H., Sneha S., Cuzzocrea A. Multi-class skin cancer classification architecture based on deep convolutional neural network. *2022 IEEE International Conference on Big Data. Proceedings*, 2022, pp. 5404–5413.

21. Keerthana D., Venugopal V., Nath M. K., Mishra M. Hybrid convolutional neural networks with SVM classifier for classification of skin cancer. *Biomedical Engineering Advances*, 2023, vol. 5, pp. 100069–100103.

Received: October 2, 2023.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Ulyana A. Lyakhova — Postgraduate Student, Junior Researcher; uljahovs@mail.ru

Pavel A. Lyakhov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; ljahov@mail.ru

Triaxial electrodynamic stabilization of a satellite via PID controller*

A. Yu. Aleksandrov, S. B. Ruzin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu., Ruzin S. B. Triaxial electrodynamic stabilization of a satellite via PID controller. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 244–254.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.209>

A satellite moving on a circular equatorial orbit is considered. The satellite is equipped with a controlled magnetic moment and a controlled electrostatic charge. The problem of triaxial stabilization in the orbital frame is studied. The electrodynamic control system is proposed. In addition, to improve characteristics of transient processes, PID controller of a special form is used. With the aid of the Lyapunov direct method, asymptotic stability conditions of the program mode are obtained. The results of computer simulation are provided demonstrating the efficiency of the developed approach.

Keywords: satellite, electrodynamic control, triaxial stabilization, Lyapunov—Krasovskii functional, PID controller.

1. Introduction. The development of control systems for the attitude stabilization of satellites with respect to their centers of masses is one of the most actual and challenging problems of space dynamics [1–3]. There are various approaches to solving this problem, e.g., application of flywheels, power gyroscopes, reactive control systems, solar radiation pressure, etc. In last decades, magnetic control systems based on the interaction of their executive devices with the Earth magnetic field are widely used [4–9]. Such systems are especially effective for small satellites. Existing magnetic attitude control systems, their specific features, advantages and disadvantages are described, for instance, in [5, 10]. Moreover, it is worth noting that, to increase the efficiency of this approach, in [11], the electrodynamic method for the stabilization of satellites was proposed. This method is based on the simultaneous using the magnetic moment and the moment of Lorentz forces. In [12], the electrodynamic method was applied for the triaxial stabilization in the orbital frame for a satellite moving on a circular equatorial orbit. The problem of the satellite stabilization in the direct equilibrium position was solved.

However, it should be mentioned that, in many problems of satellite attitude control, it is necessary to ensure not only stabilization of program modes, but also sufficient smoothness of transient processes [13, 14]. An effective tool for damping undesirable oscillations of mechanical systems is the use of PID controllers and their modifications [15–19]. This method is widely applied in space dynamics (see, e.g., [20–22] and the bibliography cited therein). At the same time, in [17], it was noted that a general satisfactory theory and a general approach that can provide explicit design formulae for the PID parameters are still lacking.

The results of [12] were further extended in [23]. Firstly, instead of the direct equilibrium position, an arbitrary equilibrium position in the orbital frame was stabilized. Sec-

* The research was supported by the Russian Science Foundation, project № 24-21-00091,
<https://rscf.ru/en/project/24-21-00091/>.

© St. Petersburg State University, 2024

only, a development of the concept of the electrodynamic control was proposed providing compensation of disturbing torques. Thirdly, to improve the characteristics of transient processes, a modified PID controller was designed. The previously constructed control torque was supplemented by a term with distributed delay. Applying the Lyapunov direct method, conditions for the asymptotic stability of the program mode were derived. The effectiveness of the proposed control was confirmed by numerical modeling. It was shown that such an approach permits us not only to significantly smooth out transient processes, but also to increase the convergence rate to the program mode.

In the present contribution, we will propose another construction of a PID controller. It is worth mentioning that the controller designed in [23] is a special case of the new one. Conditions on the control parameters will be found under which the stabilization can be guaranteed. With the aid of numerical simulations, we will demonstrate that, via appropriate choice of these parameters, it is possible to improve the characteristics of transient processes compared with those obtained using the controller from [23].

2. Problem formulation. Consider a satellite equipped with a controlled magnetic moment I and a controlled electrostatic charge distributed over certain volume. Assume that its center of mass C moves on a circular equatorial low-Earth orbit. We will study the rotational motion of the satellite with respect to its center of mass in the orbital frame. Let the axis $C\xi$ of this frame be directed tangent to the orbit in the direction of motion, the axis $C\eta$ be directed normal to the orbital plane, and the axis $C\zeta$ be directed along the radius vector of the satellite's center of mass relative to the center of the Earth. Denote by ξ_0, η_0, ζ_0 the unite vectors of this frame. The orbital coordinate system rotates with respect to the inertial one with an angular velocity ω_0 .

The system $Cxyz$ of principal central axes of inertia is rigidly connected with the satellite. In this system, the vectors ξ_0, η_0, ζ_0 are denoted by s_1, s_2, s_3 . Assume that a right triple of mutually orthogonal unite vectors r_1, r_2, r_3 is given in the system $Cxyz$. These vectors define the program orientation of the satellite.

Let the perturbed gravitational torque M_G act on the satellite. As the satellite moves relative to the geomagnetic field with magnetic induction B , the Lorentz moment M_Λ and magnetic moment M_M are excited, where $M_\Lambda = P \times T$, $M_M = I \times B$, $P = \rho_0 Q$, Q is the total charge, ρ_0 is the radius vector of the satellite's charge center with respect to its center of mass, $T = V_C \times B$, V_C is the speed of the point C relative to the geomagnetic field. Assume that the vector B coincides with its value at the center of mass. In this paper, as well as in [12, 23], we will use "direct magnetic dipole" as a model of the geomagnetic field. In this case, the vector B is constant in all points of the equatorial orbit.

The rotation motion of the satellite is modeled by the Euler dynamic equations

$$J \frac{d\omega}{dt} - \omega_0 J (\omega \times s_2) + (\omega + \omega_0 s_2) \times (J (\omega + \omega_0 s_2)) = M_\Lambda + M_M + M_G \quad (1)$$

and the Poisson kinematic equations

$$\frac{ds_j}{dt} = -\omega \times s_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

where ω is the angular velocity of the satellite with respect to the orbital frame; $J = \text{diag}\{A_1, A_2, A_3\}$ is the inertia tensor in the coordinate system $Cxyz$; $M_G = 3\omega_0^2 s_3 \times (J s_3)$.

Our objective is to design an electrodynamic control providing triaxial stabilization of the prescribed program orientation of the satellite. This means that we should choose laws of variation of vectors I and P under which the system (1), (2) admits asymptotically stable equilibrium position

$$\omega = 0, \quad s_j = r_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

3. Design of control torques. In [12], a special approach to solving the problem of a satellite triaxial stabilization in the direct equilibrium position was developed. Each of the vectors I and P was chosen as a sum of restoring and damping components. In [23], this approach was extended to the case of arbitrary equilibrium position in the orbital frame. Vectors I and P were supplemented by compensating components. The need for these additional terms is due to the fact that, under the action of disturbing forces, the considered system may not have the required program mode. As a result, the Euler equations were represented as follows:

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} - \omega_0 J(\omega \times s_2) + (\omega + \omega_0 s_2) \times (J\omega) + \omega_0 \omega \times (Js_2) = \\ = k_\Lambda r_3 \times s_3 + k_M r_2 \times s_2 - h_\Lambda (\omega - (\omega^\top s_3) s_3) - h_M (\omega - (\omega^\top s_2) s_2), \end{aligned} \quad (4)$$

here $k_\Lambda, k_M, h_\Lambda, h_M$ are constant positive coefficients.

Furthermore, to improve the characteristics of transient processes (in particular, damping undesirable satellite oscillations), a term with distributed delay of the form

$$M_{\text{dist}} = ak_\Lambda \int_{t-\tau}^t r_3 \times s_3(u) du + ak_M \int_{t-\tau}^t r_2 \times s_2(u) du \quad (5)$$

was added to the right-hand side of (4). Here a and τ are constants with $\tau > 0$. Thus, a modified PID controller (see [16]) was constructed.

With the aid of the Lyapunov direct method, it was proven that if

$$\tau|a| < 1, \quad (6)$$

then there exist values of parameters $k_\Lambda, k_M, h_\Lambda, h_M$ under which the proposed controller ensures the asymptotic stability of the program mode (3). Moreover, the results of numerical simulations demonstrated that its use not only significantly smooth out transient processes, but also increases the convergence rate of perturbed motions to the equilibrium position.

In this paper, another type of PID controller will be applied. Instead of the integral term (5), we will add to the right-hand side of (4) the torque

$$\hat{M} = bk_\Lambda \int_0^t f(t-u) r_3 \times s_3(u) du + bk_M \int_0^t f(t-u) r_2 \times s_2(u) du, \quad (7)$$

where b is a constant coefficient; $f(t)$ is a nonnegative and piecewise continuous for $t \geq 0$ function such that $\int_0^\infty f(u) du < \infty$. Then the equations (4) take the form

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} - \omega_0 J(\omega \times s_2) + (\omega + \omega_0 s_2) \times (J\omega) + \omega_0 \omega \times (Js_2) = k_\Lambda r_3 \times s_3 + \\ + k_M r_2 \times s_2 + bk_\Lambda \int_0^t f(t-u) r_3 \times s_3(u) du + bk_M \int_0^t f(t-u) r_2 \times s_2(u) du - \end{aligned}$$

$$-h_{\Lambda}(\omega - (\omega^{\top} s_3)s_3) - h_M(\omega - (\omega^{\top} s_2)s_2). \quad (8)$$

Remark 1. The torque (5) can be obtained as a special case of (7) if $f(t) = a/b$ for $t \in [0, \tau]$ and $f(t) = 0$ for $t > \tau$.

We will look for conditions under which new controller ensures the triaxial stabilization of the satellite.

4. Stability analysis. Let the following additional constraints be imposed on the function $f(t)$.

Assumption 1. There exists a number $\lambda > 0$ such that $\int_t^{\infty} f(u)du \leq \lambda f(t)$ for $t \in [0, \infty)$.

Assumption 2. The inequality

$$|b| \int_0^{\infty} f(u)du < 1 \quad (9)$$

holds.

Remark 2. The condition (9) is a counterpart of (6).

Remark 3. For instance, Assumption 1 is satisfied for the function $f(t) = \exp(-\delta t)$, where $\delta > 0$. It is worth noticing that PID controllers with exponential kernels are widely used in the contemporary control theory [24].

Denoting $h_{\Lambda} = h\hat{h}_{\Lambda}$, $h_M = h\hat{h}_M$, where $\hat{h}_{\Lambda}, \hat{h}_M$ are fixed positive constants and h is a positive parameter, we obtain

$$h_{\Lambda}(\omega - (\omega^{\top} s_3)s_3) + h_M(\omega - (\omega^{\top} s_2)s_2) = h\Xi\omega + hq(\omega, s_2, s_3),$$

here

$$\Xi = R \begin{pmatrix} \hat{h}_{\Lambda} + \hat{h}_M & 0 & 0 \\ 0 & \hat{h}_{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}_M \end{pmatrix} R^{\top},$$

the columns of the matrix R are vectors r_1, r_2, r_3 , the function $q(\omega, s_2, s_3)$ satisfies the estimate $\|q(\omega, s_2, s_3)\| \leq \hat{\beta}\|\omega\|(\|s_2 - r_2\| + \|s_3 - r_3\|)$, $\hat{\beta} = \text{const} > 0$, $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm of a vector. Thus, the matrix Ξ is positive definite.

Theorem. *Let Assumptions 1 and 2 be fulfilled. Then there exists a number $\hat{h} > 0$ such that the equilibrium position (3) of the system (2), (8) is asymptotically stable for all $h \geq \hat{h}$.*

P r o o f. Our analysis is based on the Lyapunov direct method and approaches to constructing Lyapunov functions and Lyapunov–Krasovskii functionals for mechanical systems developed in [25–28]. First, choose a Lyapunov function candidate as follows:

$$V(\omega, s_2, s_3) = \frac{1}{2}(k_{\Lambda}\|r_3 - s_3\|^2 + k_M\|r_2 - s_2\|^2) + \frac{1}{2}\mu\omega^{\top}J\omega - \frac{1}{h}\Phi^{\top}\Xi^{-1}J\omega.$$

Here $\Phi = k_{\Lambda}r_3 \times s_3 + k_M r_2 \times s_2$ and μ is a positive parameter to be selected later. Then

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(k_{\Lambda}\|r_3 - s_3\|^2 + k_M\|r_2 - s_2\|^2) + \mu\beta_1\|\omega\|^2 - \frac{1}{h}\beta_2\|\omega\|(\|r_3 - s_3\| + \|r_2 - s_2\|) &\leq \\ &\leq V(\omega, s_2, s_3) \leq \frac{1}{2}(k_{\Lambda}\|r_3 - s_3\|^2 + k_M\|r_2 - s_2\|^2) + \\ &+ \mu\beta_3\|\omega\|^2 + \frac{1}{h}\beta_2\|\omega\|(\|r_3 - s_3\| + \|r_2 - s_2\|), \end{aligned}$$

where $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ are positive coefficients.

Differentiating the function $V(\omega, s_2, s_3)$ with respect to the system (2), (8), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \mu\omega^\top(t) \left(\Phi(t) + b \int_0^t f(t-u)\Phi(u)du - h\Xi\omega(t) - hq(\omega(t), s_2(t), s_3(t)) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{h}(k_\Lambda r_3 \times (\omega(t) \times s_3(t)) + k_M r_2 \times (\omega(t) \times s_2(t)))^\top \Xi^{-1} J\omega(t) - \\ &\quad - \frac{1}{h} \Phi^\top \Xi^{-1} (\omega_0 J(\omega(t) \times s_2(t)) - (\omega(t) + \omega_0 s_2(t)) \times (J\omega(t)) - \omega_0 \omega(t) \times (J s_2(t)) + \\ &\quad + \Phi(t) + b \int_0^t f(t-u)\Phi(u)du - hq(\omega(t), s_2(t), s_3(t))) \leq \\ &\leq \mu\beta_4 \|\omega(t)\| (\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \mu|b| \|\omega(t)\| \int_0^t f(t-u) \|\Phi(u)\| du - \\ &\quad - h\mu\beta_5 \|\omega(t)\|^2 - \frac{1}{h} \Phi^\top \Xi^{-1} \left(\Phi(t) + b \int_0^t f(t-u)\Phi(u)du \right) + \\ &\quad + h\mu\beta_6 \|\omega(t)\|^2 (\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \\ &\quad + \frac{1}{h} \beta_7 \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{h} \beta_8 (\|\omega(t)\| + \|\omega(t)\|^2) (\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \\ &\quad + \beta_9 \|\omega(t)\| (\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|)^2, \end{aligned}$$

here $\beta_i > 0, i = 4, \dots, 9$.

Next, construct a Lyapunov – Krasovskii functional candidate in the form

$$W(t, \omega(t), s_{2t}, s_{3t}) = V(\omega(t), s_2(t), s_3(t)) + \frac{1}{h} \int_0^t \int_{t-u}^\infty f(\sigma) d\sigma \Phi^\top(u) \Gamma \Phi(u) du,$$

where Γ is a constant positive definite matrix, s_{2t}, s_{3t} denote the restrictions of the corresponding components of a solution, i.e., $s_{lt} : u \mapsto s_l(u)$ for $u \in [0, t], l = 2, 3$. Then

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (k_\Lambda \|r_3 - s_3(t)\|^2 + k_M \|r_2 - s_2(t)\|^2) - \frac{1}{h} \beta_2 \|\omega(t)\| (\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \\ &\quad + \mu\beta_{11} \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{h} \beta_{10} \int_0^t \int_{t-u}^\infty f(\sigma) d\sigma \|\Phi(u)\|^2 du \leq W(t, \omega(t), s_{2t}, s_{3t}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (k_\Lambda \|r_3 - s_3(t)\|^2 + k_M \|r_2 - s_2(t)\|^2) + \frac{1}{h} \beta_2 \|\omega(t)\| (\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \\ &\quad + \mu\beta_{11} \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{h} \beta_{11} \int_0^t \int_{t-u}^\infty f(\sigma) d\sigma \|\Phi(u)\|^2 du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \leq & \mu\beta_4\|\omega(t)\|(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \mu|b|\|\omega(t)\| \int_0^t f(t-u)\|\Phi(u)\|du - \\ & - h\mu\beta_5\|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{h}\beta_8(\|\omega(t)\| + \|\omega(t)\|^2)(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \\ & + h\mu\beta_6\|\omega(t)\|^2(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \frac{1}{h}\beta_7\|\omega(t)\|^2 + \\ & + \beta_9\|\omega(t)\|(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|)^2 - \frac{1}{h}\Omega(t), \end{aligned}$$

where β_{10}, β_{11} are positive constants and

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \Phi^\top \Xi^{-1} \left(\Phi(t) + b \int_0^t f(t-u)\Phi(u)du \right) - \int_0^\infty f(u)du\Phi^\top(t)\Gamma\Phi(t) + \\ & + \int_0^t f(t-u)\Phi^\top(u)\Gamma\Phi(u)du. \end{aligned}$$

Let $Z(t) = \Xi^{-1/2}\Phi(t)$, $\gamma = \int_0^\infty f(u)du$. Then

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \|Z(t)\|^2 + bZ^\top(t) \int_0^t f(t-u)Z(u)du - \gamma Z^\top(t)\Xi^{1/2}\Gamma\Xi^{1/2}Z(t) + \\ & + \int_0^t f(t-u)Z^\top(u)\Xi^{1/2}\Gamma\Xi^{1/2}Z(u)du. \end{aligned}$$

Choosing the matrix Γ in the form $\Gamma = \varepsilon\Xi^{-1}$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, we obtain

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & (1 - \varepsilon\gamma)\|Z(t)\|^2 + bZ^\top(t) \int_0^t f(t-u)Z(u)du + \varepsilon \int_0^t f(t-u)\|Z(u)\|^2du \geq \\ & \geq \left(1 - \varepsilon\gamma - \gamma\frac{|b|}{2v}\right)\|Z(t)\|^2 + \left(\varepsilon - \frac{|b|v}{2}\right) \int_0^t f(t-u)\|Z(u)\|^2du, \end{aligned}$$

where v is an arbitrary positive number.

Let

$$\varepsilon\gamma + \gamma\frac{|b|}{2v} < 1, \quad \varepsilon > \frac{|b|v}{2}. \quad (10)$$

For the existence of $v > 0$ for which the inequalities (10) hold, it is necessary and sufficient the fulfilment of the condition

$$\gamma b^2 < 4\varepsilon(1 - \gamma\varepsilon). \quad (11)$$

It is worth noticing that (11) imposes least conservative constraint on the parameter b in the case, where $\varepsilon = 1/(2\gamma)$. As a result, we arrive at the inequality (9).

For such a choice of parameters, the estimate of the derivative of $W(t, \omega(t), s_{2t}, s_{3t})$ takes the form

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \leq & \mu\beta_4\|\omega(t)\|(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \mu|b|\|\omega(t)\| \int_0^t f(t-u)\|\Phi(u)\|du - \\ & - h\mu\beta_5\|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{h}\beta_7\|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{h}\beta_8(\|\omega(t)\| + \|\omega(t)\|^2)(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \\ & + h\mu\beta_6\|\omega(t)\|^2(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|) + \beta_9\|\omega(t)\|(\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\|)^2 - \\ & - \frac{1}{h}\beta_{12}\|\Phi(t)\|^2 - \frac{1}{h}\beta_{13} \int_0^t f(t-u)\|\Phi(u)\|^2 du, \end{aligned}$$

where $\beta_{12} > 0, \beta_{13} > 0$.

In [29], it was proven the existence of a number $\Delta > 0$ such that

$$\|\Phi(t)\|^2 \geq \frac{1}{2}(k_M^2\|r_2 - s_2(t)\|^2 + k_\Lambda^2\|r_3 - s_3(t)\|^2) \quad (12)$$

for $\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\| < \Delta$. With the aid of the estimate (12) and the standard technique based on the application of Young's and Holder's inequalities (see [26, 27]), it is easy to verify that if values of μ and Δ are sufficiently small, then one can choose $\hat{h} > 0$ such that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(k_\Lambda\|r_3 - s_3(t)\|^2 + k_M\|r_2 - s_2(t)\|^2) + \frac{1}{2}\mu\beta_1\|\omega(t)\|^2 + \\ & + \frac{1}{h}\beta_{14} \int_0^t \int_{t-u}^\infty f(\sigma)d\sigma(\|r_3 - s_3(u)\|^2 + \|r_2 - s_2(u)\|^2)du \leq W(t, \omega(t), s_{2t}, s_{3t}) \leq \\ & \leq k_\Lambda\|r_3 - s_3(t)\|^2 + k_M\|r_2 - s_2(t)\|^2 + 2\mu\beta_3\|\omega(t)\|^2 + \\ & + \frac{1}{h}\beta_{15} \int_0^t \int_{t-u}^\infty f(\sigma)d\sigma(\|r_3 - s_3(u)\|^2 + \|r_2 - s_2(u)\|^2)du, \\ \frac{dW}{dt} \leq & -\frac{1}{2}h\mu\beta_5\|\omega(t)\| - \frac{1}{h}\beta_{16}(\|r_3 - s_3(t)\|^2 + \|r_2 - s_2(t)\|^2) - \\ & - \frac{1}{h}\beta_{17} \int_0^t f(t-u)(\|r_3 - s_3(u)\|^2 + \|r_2 - s_2(u)\|^2)du \end{aligned}$$

for $h \geq \hat{h}$, $\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\| < \Delta$, $\|\omega(t)\| < \Delta$. Here $\beta_{14}, \beta_{15}, \beta_{16}, \beta_{17}$ are positive constants. Hence, the differential inequality

$$\frac{dW}{dt} \leq -\bar{\beta}W(t, \omega(t), s_{2t}, s_{3t}), \quad \bar{\beta} = \text{const} > 0,$$

holds for $\|r_3 - s_3(t)\| + \|r_2 - s_2(t)\| < \Delta$, $\|\omega(t)\| < \Delta$. This implies the asymptotic stability of the equilibrium position (3). The proof is completed. \square

5. Results of the computer modeling. For simulation, we assume that $\omega_0 = 0.001$, $k_\Lambda = k_M = 1$, $h_\Lambda = h_M = 1$, $J = \text{diag}\{1000, 1300, 1700\}$ (all dimensional parameters are given in International System of Units). Consider stabilization of a satellite in the direct equilibrium position, i.e., $r_1 = (1, 0, 0)^\top$, $r_2 = (0, 1, 0)^\top$, $r_3 = (0, 0, 1)^\top$. In Figures 1 and 2 the dependence of the value $\psi = \|r_3 - s_3\| + \|r_2 - s_2\|$ on time is presented. The following initial conditions for solutions were chosen: $\omega(0) = 0$,

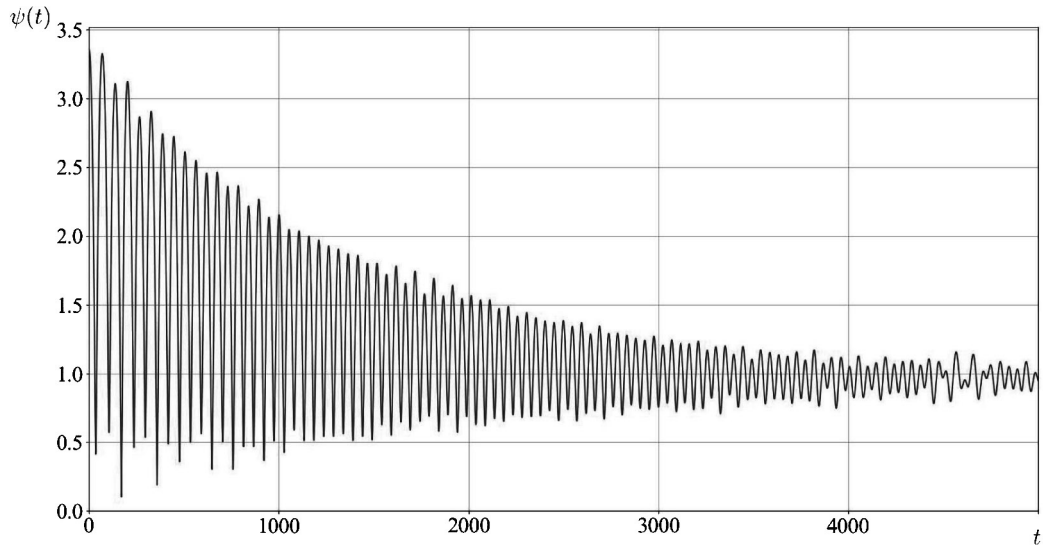


Рис. 1. Stabilization process under control with distributed delay

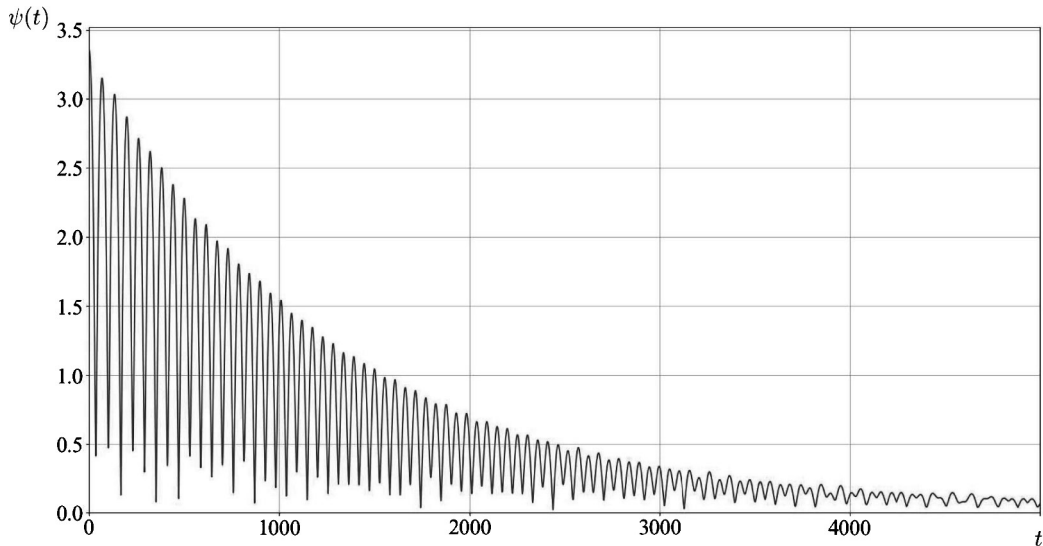


Рис. 2. Stabilization process under PID controller

$s_1(u) = (\cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi)^\top$, $s_2(u) = (\sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta \cos \varphi)^\top$, $s_3(u) = (0, \sin \theta, \cos \theta)^\top$ for $u \leq 0$, where $\varphi = 0.3$, $\theta = -2$. Figure 1 corresponds to the application of the control with distributed delay. The term of the form (5) was used with

the following values of parameters: $a = 1$, $\tau = 0.75$. In Figure 2, the result of application of PID controller is demonstrated. The integral term was defined by the formula (7) with $b = 3$, $f(t) = \exp(-4t)$. It is worth noticing that in this case $a\tau = b \int_0^\infty f(u)du = 0.75$.

From the comparison of Figures 1 and 2 it follows that, under the using new controller, transient processes become smoother and their time is significantly reduced.

6. Conclusion. In the present contribution, an electrodynamic control system ensuring triaxial stabilization of a satellite in the orbital frame is designed. The proposed controller includes an integral component that permits us to improve characteristics of transient processes. Using an original construction of Lyapunov—Krasovskii functional, conditions on control parameters are derived guaranteeing the asymptotic stability of the prescribed equilibrium position. It is worth noticing that these conditions contain some constraints on the differential and integral components of the controller, but do not impose any constraints on the proportional component. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by numerical simulation. It is shown that, in comparison with the previously constructed control, the new one permits us not only to significantly smooth out transient processes, but also to increase the convergence rate to the program mode. An important direction for further research is an extension of the obtained results to the case of more complex model of the magnetic field.

References

1. Schaub H., Junkins J. L. *Analytical mechanics of space systems*. Reston, Virginia, American Institute of Aeronautics & Astronautics Publ., 2009, 744 p.
2. Hughes P. C. *Spacecraft attitude dynamics*. New York, Wiley, 1986, 584 p.
3. Kane T. R., Likins P. W., Levinson D. A. *Spacecraft dynamics*. New York, McGraw-Hill Book Co. Publ., 1983, 454 p.
4. Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L., Zhong R. Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient. *Aerospace Science and Technology*, 2017, vol. 60, pp. 115–123. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.11.003>
5. Silani E., Lovera M. Magnetic spacecraft attitude control: A survey and some new results. *Control Engineering Practice*, 2005, vol. 13, no. 3, pp. 357–371. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2003.12.017>
6. Ignatov A. I., Sazonov V. V. Stabilization of the solar orientation mode of an artificial earth satellite by an electromagnetic control system. *Cosmic Research*, 2018, vol. 56, no. 5, pp. 388–399. <https://doi.org/10.1134/S0010952518050015>
7. Guelman M., Waller R., Shiryaev A., Psiaki M. Design and testing of magnetic controllers for satellite stabilization. *Acta Astronautica*, 2005, vol. 56, pp. 231–239. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.09.028>
8. Xia X., Guo C., Xie G. Investigation on magnetic-based attitude de-tumbling algorithm. *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 84, pp. 1106–1115. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.11.035>
9. Giri D. K., Sinha M., Kumar K. D. Fault-tolerant attitude control of magneto-Coulombic satellites. *Acta Astronautica*, 2015, vol. 116, pp. 254–270. doi:10.1016/j.actaastro.2015.06.020
10. Kovalenko A. P. *Magnitnye sistemy upravleniya kosmicheskimi letatel'nymi apparatami [Magnetic control systems for spacecraft]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 248 p. (In Russian)
11. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field. *Automation Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 8, pp. 1333–1345. doi:10.1134/S000511790708005X
12. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Electrodynamic stabilization of earth-orbiting satellites in equatorial orbits. *Cosmic Research*, 2012, vol. 50, no. 4, pp. 313–318.
13. Zhao C., Guo L. PID controller design for second order nonlinear uncertain systems. *Science China Information Science*, 2017, vol. 60, no. 2, art. no. 022201.
14. Tkhai V. N. Stabilization of oscillations of a controlled reversible mechanical system. *Automation Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 9, pp. 1404–1416. <https://doi.org/10.1134/S0005117922090053>
15. Anan'evskii I. M., Kolmanovskii V. B. On stabilization of some control systems with an after-effect. *Automation Remote Control*, 1989, no. 9, pp. 1174–1181.
16. Formal'sky A. M. On a modification of the PID controller. *Dynamics and Control*, 1997, vol. 7, no. 3, pp. 269–277. <https://doi.org/10.1023/A:1008202618580>

17. Zhao C., Guo L. Towards a theoretical foundation of PID control for uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2022, vol. 142, art. no. 110360.
18. Dong W., Zhao Y., Cong Y. Reduced-order observer-based controller design for quasi-one-sided Lipschitz nonlinear systems with time-delay. *International Journal Robust and Nonlinear Control*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 817–831. <https://doi.org/10.1002/rnc.5312>
19. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Sergeev S. M. Optimal control of the Navier — Stokes system with a space variable in a network-like domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 549–562. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.411>
20. Subbarao K. Nonlinear PID-like controllers for rigid-body attitude stabilization. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2004, vol. 52, no. 1–2, pp. 61–74.
21. Moradi M. Self-tuning PID controller to three-axis stabilization of a satellite with unknown parameters. *International Journal Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 49, pp. 50–56. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.09.002>
22. Li Y., Zhaowei S., Dong Y. Time efficient robust PID plus controller for satellite attitude stabilization control considering angular velocity and control torque constraint. *Journal Aerospace Engineering*, 2017, vol. 30, no. 5, art. no. 04017030. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000743](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000743)
23. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Electrodynamic control with distributed delay for AES stabilization in an equatorial orbit. *Cosmic Research*, 2022, vol. 60, no. 5, pp. 366–374. doi:10.1134/S0010952522040013
24. Fridman E. *Introduction to time-delay systems: analysis and control*. Basel, Birkhauser Publ., 2014, 362 p.
25. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y. Stability and stabilization of mechanical systems with switching. *Automation Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 6, pp. 1143–1154.
26. Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov — Krasovskii functionals. *International Journal Robust Nonlinear Control*, 2021, vol. 31, pp. 3730–3746. <https://doi.org/10.1002/rnc.5115>
27. Aleksandrov A., Efimov D., Fridman E. Stability of homogeneous systems with distributed delay and time-varying perturbations. *Automatica*, 2023, vol. 153, art. no. 111058. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111058>
28. Kalinina E. A., Kamachkin A. M., Stepenko N. A., Tamasyan G. Sh. K voprosu o konstruktivnom kriterii upravlyaemosti. Ch. I. Ciklicheskie invariantnye podprostranstva [On the question of a constructive controllability criterion. Pt I. Cyclic invariant subspaces]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 283–299. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.213> (In Russian)
29. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system. *Advances in Space Research*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 142–151.

Received: January 29, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Alexander Yu. Aleksandrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor;
a.u.aleksandrov@sbpu.ru

Sergey B. Ruzin — Postgraduate Student; serruz001@gmail.com

Трёхосная электродинамическая стабилизация спутника с использованием ПИД-регулятора*

А. Ю. Александров, С. Б. Рузин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00091,
<https://rscf.ru/project/24-21-00091/>

Для цитирования: *Aleksandrov A. Yu., Ruzin S. B.* Triaxial electrodynamic stabilization of a satellite via PID controller // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 244–254.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.209>

Рассматривается спутник, движущийся по круговой экваториальной орбите. Спутник оснащен управляемым магнитным моментом и управляемым электростатическим зарядом. Исследована задача трехосной стабилизации спутника в орбитальной системе координат. Предложена электродинамическая система управления. Кроме того, для улучшения характеристик переходных процессов используется ПИД-регулятор специальной формы. С помощью прямого метода Ляпунова получены условия асимптотической устойчивости программного режима. Приведены результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие эффективность разработанного подхода.

Ключевые слова: спутник, электродинамическое управление, трехосная стабилизация, функционал Ляпунова – Красовского, ПИД-регулятор.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Ружин Сергей Борисович — аспирант; serguz001@gmail.com

ИНФОРМАТИКА

УДК 517.977
MSC 49J20

Неклассическое условие оптимальности в гибридной задаче управления гиперболическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием*

А. В. Аргучинцев, В. П. Поплевко

Иркутский государственный университет,
Российская Федерация, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1

Для цитирования: *Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Неклассическое условие оптимальности в гибридной задаче управления гиперболическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 255–264. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.210>

Рассматривается задача оптимального управления линейной гиперболической системой первого порядка, в которой неоднородность в правой части определяется из управляемой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Матрица коэффициентов при фазовых переменных в системе обыкновенных дифференциальных уравнений зависит от функции управления. Целевой функционал линеен. На основе точной (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала задача сведена к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Результат сформулирован в виде неклассического условия оптимальности вариационного типа. Предлагаемая редукция задачи существенно сокращает объем вычислений при использовании численных методов оптимизации. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: гибридная задача, гиперболическая система, система с запаздыванием, точная формула приращения, вариационное условие оптимальности, редукция задачи.

1. Введение. История исследования задач управления дифференциальными уравнениями с частными производными и эффектом запаздывания главным образом повторяет и развивает полученные ранее результаты для задач управления системами с сосредоточенными параметрами. Можно выделить достижения в вопросах существования и единственности оптимальных управлений [1], получении условий

* Исследование А. В. Аргучинцева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, <https://rscf.ru/project/23-21-00296/>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

оптимальности типа классического принципа максимума [2], построении вычислительных методов [3], синтеза [4] и стабилизации [5–7].

В настоящей статье описывается задача оптимального управления линейной гиперболической системой первого порядка, в которой неоднородность в правой части определяется из управляемой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Задачи такого вида возникают, в частности, в моделях, описывающих динамику двух взаимодействующих популяций «растительный консумент — растения» [8, с. 218–219]. Структура растительной популяции животных определяется интегродифференциальным уравнением с гиперболическим дифференциальным оператором в левой части. Для этой популяции важно распределение ее членов по возрасту. В качестве независимых переменных выступают время, в течение которого изучается процесс, и возраст особей. Для моделирования же динамики популяции растения возраст часто не имеет существенного значения, а поэтому можно ограничиться классическим обыкновенным дифференциальным уравнением.

Особенностью рассматриваемой задачи является предположение о том, что матрица коэффициентов при фазовых переменных в системе обыкновенных дифференциальных уравнений зависит от функции управления. Поэтому, несмотря на линейность целевого функционала, классический принцип максимума Л. С. Понтрягина в данной задаче является только необходимым, но не достаточным условием оптимальности. Для решения подобных задач обычно применяются методы, разработанные для общих нелинейных проблем.

В статье впервые для задач с запаздыванием применена модифицированная методика [9], основанная на использовании точной (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала. Этот подход позволил свести исходную задачу оптимального управления к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Результат сформулирован в виде неклассического условия оптимальности вариационного типа. Доказанная теорема по существу определяет целое семейство необходимых и достаточных условий оптимальности. Редукция задачи дает возможность в значительной степени сократить объем вычислений. При реализации оптимизационных методов в подобного рода задачах основное время тратится на многократные интегрирования исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений в частных производных. Полученный в настоящей работе результат позволяет ограничиться максимум двумя процедурами достаточно трудоемкого решения начально-краевых задач для систем гиперболических уравнений: однократное интегрирование сопряженной системы и, если это необходимо, финальное решение для определения состояния процесса, соответствующего найденному оптимальному управлению. Приведенный в п. 5 пример иллюстрирует такой подход.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s, t) \frac{\partial x}{\partial s} = \Phi(s, t)x + \bar{f}(s, t) + C(t)y, \quad (1)$$

$$(s, t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1],$$

в которой $x(s, t)$, $y(t)$ — n - и m -мерные вектор-функции; $A(s, t)$ — диагональная матрица порядка $(n \times n)$; $C(t)$ и $\Phi(s, t)$ — матричные функции размера $(n \times m)$, $(n \times n)$

соответственно; $\bar{f}(s, t)$ — n -мерная вектор-функция. Дополнительно считаем, что диагональные элементы $a_i = a_i(s, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в Π :

$$\begin{aligned} a_i(s, t) &> 0, & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ a_i(s, t) &= 0, & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ a_i(s, t) &< 0, & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть матрица $A^+(s, t)$ порядка $(m_1 \times m_1)$ и матрица $A^-(s, t)$ порядка $(n - m_2) \times (n - m_2)$ — диагональные подматрицы, составленные из положительных и отрицательных элементов матрицы A . Рассмотрим подвекторы $x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})$ и $x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n)$, которые отвечают положительным и отрицательным элементам матрицы A .

Начально-краевые условия для системы (1) зададим в точках начала характеристик гиперболических уравнений:

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0, t) = \eta(t), \quad x^-(s_1, t) = \mu(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

с условиями согласования $\eta(t_0) = (x^0(s_0))^+$, $\mu(t_0) = (x^0(s_1))^-$.

Функция $y(t)$ определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy}{dt} = B(u(t), t)y(t - \alpha) + d(u(t), t), \quad t \in T, \quad (3)$$

$$y(t) = y^0(t), \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0],$$

где $B(u(t), t)$ — матричная функция размера $(m \times m)$; $d(u(t), t)$ — m -мерная вектор-функция; α — заданная положительная константа.

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T ; где r -мерных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничениям типа включения

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in T, \quad (4)$$

где U — компактное множество.

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу:

$$J(u) = \int_S \langle \beta(s), x(s, t_1) \rangle ds + \iint_{\Pi} \langle b_0(s, t), x(s, t) \rangle ds dt. \quad (5)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается классическое скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Задача оптимального управления (1)–(5) рассматривается при следующих предположениях:

- 1) диагональные элементы $a_i(s, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы A непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике Π ;
- 2) вектор-функции $x^0(s)$, $\mu(t)$ и $\eta(t)$ непрерывны на S и T соответственно;
- 3) матричные функции $\Phi(s, t)$, $B(u, t)$, $C(t)$, а также вектор-функции $\bar{f}(s, t)$, $d(u(t), t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов в областях их определения.

При указанных предположениях на параметры задачи для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1), (2) из класса непрерывных в Π функций, причем каждая компонента решения x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируема вдоль характеристик системы гиперболических уравнений [10].

3. Формула приращения функционала. Задача (1)–(5) является линейной, однако классический принцип максимума Л. С. Понтрягина не будет в ней достаточным условием оптимальности. Причина этого — зависимость от управления матрицы коэффициентов в (3). Обычно для решения подобных задач применяются те же методы, что и для общего нелинейного случая. В настоящей работе используется методика, ранее примененная в [9] для задач при отсутствии запаздывания.

Рассмотрим два произвольных различных допустимых процесса: $\{u, x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{x} = x + \Delta x\}$. Введем обозначение для дифференциального оператора в левой части (1): $D_A x = x_t + A(s, t)x_s$. Здесь $D_A x = (D_1 x_1, \dots, D_n x_n)$ — обобщенная производная, каждая компонента которой $D_i x_i$ непрерывна вдоль соответствующего i -го семейства характеристик. Уравнение в приращениях для исходной начально-краевой задачи примет следующий вид:

$$D_A \Delta x = \Phi(s, t) \Delta x + C(t) \Delta y,$$

$$\Delta x(s, t_0) = \Delta x^+(s_0, t) = \Delta x^-(s_1, t) = 0,$$

$$\Delta y_t = B(\tilde{u}(t), t) \tilde{y}(t - \alpha) - B(u(t), t) y(t - \alpha) + \Delta d(u(t), t), \quad \Delta y(t_0) = 0. \quad (6)$$

Здесь $\Delta d(u(t), t) = d(\tilde{u}(t), t) - d(u(t), t)$.

Перепишем правую часть (6) таким образом:

$$\begin{aligned} & B(\tilde{u}(t), t) \tilde{y}(t - \alpha) - B(u(t), t) y(t - \alpha) + \Delta d(u(t), t) = \\ & = \Delta B(u(t), t) \tilde{y}(t - \alpha) + B(u(t), t) \Delta y(t - \alpha) + \Delta d(u(t), t), \end{aligned}$$

где $\Delta B(u(t), t) = B(\tilde{u}(t), t) - B(u(t), t)$. Приращение функционала запишем так:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \int_S \langle \beta(s), \Delta x(s, t_1) \rangle ds + \iint_{\Pi} \langle b_0(s, t), \Delta x(s, t) \rangle ds dt. \quad (7)$$

В правую часть формулы (7) добавим нулевые слагаемые

$$\iint_{\Pi} \langle \psi(s, t), D_A \Delta x - \Phi(s, t) \Delta x \rangle ds dt$$

и

$$\int_T \langle p(t), \Delta y_t - \Delta_{\tilde{u}} B(u, t) \tilde{y}(t - \alpha) - B(u, t) \Delta y(t - \alpha) - \Delta d(u, t) \rangle dt,$$

где $\psi(s, t)$ и $p(t)$ — пока произвольные вектор-функции.

Применяя формулы интегрирования по частям, получим, что

$$\Delta J(u) = \int_S \langle \beta(s), \Delta x(s, t_1) \rangle ds + \iint_{\Pi} \langle b_0(s, t), \Delta x(s, t) \rangle ds dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_S \langle \psi(s, t_1), \Delta x(s, t_1) \rangle - \langle \psi(s, t_0), \Delta x(s, t_0) \rangle ds - \\
& - \int_T \langle \psi(s_0, t), A(s_0, t) \Delta x(s_0, t) \rangle - \langle \psi(s_1, t), A(s_1, t) \Delta x(s_1, t) \rangle dt - \\
& - \iint_{\Pi} \langle D_A \psi + A_s \psi + \Phi^T \psi, \Delta x \rangle ds dt - \iint_{\Pi} \langle \psi(s, t), C \Delta y \rangle ds dt + \\
& \quad + \langle p(t_1), \Delta y(t_1) \rangle - \int_T \langle p_t, \Delta y(t) \rangle dt - \\
& - \int_T \langle p(t), \Delta B(u(t), t) \tilde{y}(t - \alpha) + B(u(t), t) \Delta y(t - \alpha) + \Delta d(u, t) \rangle dt.
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
\int_T \langle p(t), B(u, t) \Delta y(t - \alpha) \rangle dt &= \left\{ \begin{array}{l} \tau = t - \alpha, \\ \tau \in [t_0 - \alpha, t_1 - \alpha] \end{array} \right\} = \\
&= \int_{t_0 - \alpha}^{t_0} \langle p(\tau + \alpha), B(u(\tau + \alpha), \tau + \alpha) \Delta y(\tau) \rangle d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1 - \alpha} \langle p(\tau + \alpha), B(u(\tau + \alpha), \tau + \alpha) \Delta y(\tau) \rangle d\tau.
\end{aligned} \tag{8}$$

Перейдем обратно к переменной t . С учетом того, что первое слагаемое (8) равно нулю, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
& \int_T \langle p(t), B(u, t) \Delta y(t - \alpha) \rangle dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1 - \alpha} \langle p(t + \alpha), B(u(t + \alpha), t + \alpha) \Delta y(t) \rangle dt.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\iint_{\Pi} \langle \psi(s, t), C \Delta y \rangle ds dt = - \iint_{\Pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \int_s^{s_1} \psi(\xi, t) d\xi, C \Delta y \right\rangle ds dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем, что

$$\iint_{\Pi} \langle \psi(s, t), C \Delta y \rangle ds dt = \int_T \left\langle \int_S \psi(s, t) ds, C \Delta y \right\rangle dt.$$

Потребуем, чтобы функции $\psi(s, t)$, $p(t)$ были решениями сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
 D_A \psi + A_s \psi &= -\Phi^T(s, t)\psi + b_0(s, t), \quad (s, t) \in \Pi, \\
 \psi(s, t_1) &= -\beta(s), \quad s \in S, \quad \psi(s_1, t) = 0, \\
 \psi^-(s_0, t) &= 0, \quad \psi^+(s_1, t) = 0, \quad t \in T, \\
 p_t &= \begin{cases} -B^T(u(t + \alpha), t + \alpha)p(t + \alpha) - \int_S C^T \psi(s, t) ds, & t \in [0; t_1 - \alpha), \\ -\int_S C^T \psi(s, t) ds, & t \in [t_1 - \alpha; t_1], \end{cases} \\
 p(t_1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда формула приращения функционала примет вид

$$\Delta J(u) = - \int_T \langle p(t), \Delta B(u, t)\tilde{y}(t - \alpha) + \Delta d(u, t) \rangle dt. \tag{11}$$

Формула (11) является точной (без остаточных членов) для любой пары допустимых процессов, при этом исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) интегрируется на возмущенном управлении.

4. Условие оптимальности. На основе полученной формулы приращения (11) можно осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления гиперболической системой к задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 I(v) &= - \int_T \langle p(t, u), (B(v(t), t) - B(u(t), t))y(t - \alpha, v) + \\
 &\quad + d(v(t), t) - d(u(t), t)) \rangle dt \rightarrow \min, \\
 y_t &= B(v(t), t)y(t - \alpha) + d(v(t), t), \quad t \in T, \\
 y(t) &= y^0(t), \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0], \\
 v(t) &\in U.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $y(t)$ — m -мерная функция состояния, $u(t)$ и $p(t, u)$ — фиксированные функции, $v(t)$ — управляющее воздействие, удовлетворяющее тем же ограничениям на управление, что и в исходной задаче. Тем самым доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема. Для оптимальности управления $u^*(t)$ в задаче (1)–(5) необходимо и достаточно, чтобы управление $v^* = u^*(t)$ было оптимальным в задаче (12), (13). При этом оптимальное значение функционала определяется формулой

$$J(v^*) = J(u) + I(v^*).$$

Полученный результат можно рассматривать и как вариационное условие оптимальности (в отличие от традиционных конечномерных условий оптимальности). Отметим, что теорема справедлива для любого допустимого управления $u(t)$.

Опишем схему решения исходной задачи.

1. Задается произвольное допустимое управление $u = u(t)$. Вычисляется соответствующее ему решение $p = p(t, u)$ сопряженной задачи (10). Для этого необходимо также найти решение задачи (9), которое не зависит от выбора допустимого управления.

2. Решается вспомогательная задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с линейным целевым функционалом (12).

Таким образом, для решения задачи (1)–(5) необходимо всего лишь два раза проинтегрировать систему дифференциальных уравнений с частными производными (поиск $\psi(s, t)$ и при необходимости $x^*(s, t, v^*)$).

5. Иллюстративный пример. Рассмотрим пример применения описанного алгоритма. В квадрате $S \times T = [0; 2] \times [0; 2]$ поставим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned}x_{1t} + x_{1s} &= x_2 - y, \\x_{2t} - x_{2s} &= (s + 2) \sin t, \\y_t &= u \cdot y(t - 0.15), \quad u(t) \in [0, 3], \\y(t) &= t, \quad t \in [-0.15; 0], \\x_1(0, t) &= 0, \quad x_1(s, 0) = s, \quad x_2(2, t) = 0, \quad x_2(s, 0) = 0.\end{aligned}$$

Поставим задачу на минимум целевого функционала

$$J(u) = \int_S [3x_1(s, 2) + 2x_2(s, 2)] ds, \quad u \in U.$$

В принятых обозначениях

$$\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(u, t) = u, \quad d(u, t) = 0.$$

Сопряженная задача принимает вид

$$\begin{aligned}\psi_{1t} + \psi_{1s} &= 0, \quad \psi_{2t} - \psi_{2s} = -\psi_1, \\ \psi_1(s, 2) &= -3, \quad \psi_2(s, 2) = -2, \\ \psi_1(2, t) &= 0, \quad \psi_2(0, t) = 0, \\ p_t &= \begin{cases} -p(t + 0.15) \cdot u(t + 0.15) + \int_S \psi_1 ds, & t \in [0; 1.85), \\ \int_S \psi_1 ds, & t \in [1.85; 2], \end{cases} \\ p(2) &= 0.\end{aligned}$$

Выберем допустимое управление $u(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, 2]$. Тогда решение сопряженной задачи можно записать так:

$$\begin{aligned}\psi_1(s, t) &= \begin{cases} 0, & t < s, \\ -3, & t \geq s, \end{cases} \\ p(t) &= -\frac{3}{2}t^2 + 6, \quad t \in [0; 2].\end{aligned}$$

Исходная задача может быть сведена к задаче оптимального управления

$$I(v) = \int_0^2 (1.5t^2 - 6) \cdot v(t) \cdot z(t - 0.15, v) dt \rightarrow \min,$$

$$z_t = v \cdot z(t - 0.15), \quad z(t) = t, \quad t \in [-0.15; 0],$$

$$v(t) \in [0; 3].$$

6. Заключение. Отметим, что редуцированная задача оптимального управления (12), (13) имеет специальную структуру. Это также задача с запаздыванием, в которой матрица коэффициентов при фазовых переменных зависит от состояния. Для решения данной задачи можно использовать широкий арсенал методов, разработанных для оптимизации систем с сосредоточенными параметрами. В частности, билинейность задачи позволяет эффективно применять алгоритмы, разработанные в [11]. В качестве дальнейшего направления работы можно предложить исследование случая квадратичного целевого функционала с помощью методики [12]. Однако случай квадратичного критерия качества требует применения формул приращения второго порядка и матричных импульсов Р. Ф. Габасова.

Литература

1. *Teo K.* Optimal control of systems governed by time-delayed, second-order, linear, parabolic partial differential equations with a first boundary condition // *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1979. Vol. 29. N 3. P. 437–481.
2. *Sadek I.* Optimal control of time-delay systems with distributed parameter // *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1990. Vol. 67. N 3. P. 567–585.
3. *Mai T., Nguyen H., Nguyen V., Vu V.* Applying Pade approximation model in optimal control problem for a distributed parameter system with time delay // *International Journal of Computing and Optimization.* 2017. Vol. 4. N 1. P. 19–30. <https://doi.org/10.12988/ijco.2017.61227>
4. *Провоторов В. В., Провоторова Е. Н.* Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 209–224. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.207>
5. *Liu D., Wang Q., Xu G.* Stabilization of distributed parameter systems with delays in the boundary based on predictors // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2021. Vol. 66. N 7. P. 3317–3324. <https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3035586>
6. *Гребенщиков Б. Г.* Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 81–96. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108>
7. *Furtat I., Orlov Yu.* Synchronization and state estimation of nonlinear systems with unknown time-delays: adaptive identification method // *Cybernetics and Physics.* 2020. Vol. 9. N 3. P. 136–143. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2020-9-3-136-143>
8. *Алексеев В. В., Крышев И. И., Сазыкина Т. Г.* Физическое и математическое моделирование экосистем. СПб: Гидрометеоздат, 1992. 368 с.
9. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. М.: Физматлит, 2007. 186 с.
10. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 592 с.
11. *Срочко В. А., Аксентюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами // *Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика.* 2019. Т. 30. С. 83–98. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83>
12. *Аргучинцев А. В.* Вариационное условие оптимальности в задаче минимизации нормы конечного состояния составной системой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика.*

Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 540–548.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.410>.

Статья поступила в редакцию 21 января 2024 г.
Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Аргучинцев Александр Валерьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна — канд. физ.-мат. наук, доц.; vasilisa@math.isu.ru

The non-classical optimality condition in the hybrid control problem of hyperbolic and ordinary differential equations with delay*

A. V. Arguchintsev, V. P. Poplevko

Irkutsk State University, 1, ul. K. Marksa, Irkutsk,
664003, Russian Federation

For citation: Arguchintsev A. V., Poplevko V. P. The non-classical optimality condition in the hybrid control problem of hyperbolic and ordinary differential equations with delay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 255–264. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.210> (In Russian)

In this paper, we consider an optimal control problem for a system of linear first-order hyperbolic equations in which the inhomogeneity in the right-hand side is determined from the controlled linear system of ordinary differential equations with constant delay. The coefficient matrix at phase variables in the system of ordinary differential equations depends on the control function. The cost functional is linear. On the basis of the exact increment formula (without remainder terms) of the cost functional, the problem is reduced to the optimal control problem of a system of ordinary differential equations. The result is formulated in the form of a non-classical variational optimality condition. The proposed problem reduction significantly reduces the amount of calculations when using numerical optimization methods. An illustrative example is given.

Keywords: hybrid problem, hyperbolic system, delayed system, exact increment formula, variational optimality condition, problem reduction.

References

1. Teo K. Optimal control of systems governed by time-delayed, second-order, linear, parabolic partial differential equations with a first boundary condition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1979, vol. 29, no. 3, pp. 437–481.
2. Sadek I. Optimal control of time-delay systems with distributed parameter. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1990, vol. 67, no. 3, pp. 567–585.
3. Mai T., Nguyen H., Nguyen V., Vu V. Applying Pade approximation model in optimal control problem for a distributed parameter system with time delay. *International Journal of Computing and Optimization*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 19–30. <https://doi.org/10.12988/ijco.2017.61227>
4. Provotorov V. V., Provotorova E. N. Sintez optimal'nogo granichnogo upravleniia parabolicheskoi sistem s zapazdyvaniem i raspredeennymi parametrami na grafe [Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 209–224. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.207> (In Russian)

* The research of A. V. Arguchintsev was supported by the Russian Science Foundation, project N 23-21-00296, <https://rscf.ru/project/23-21-00296/>

5. Liu D., Wang Q., Xu G. Stabilization of distributed parameter systems with delays in the boundary based on predictors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, vol. 66, no 7, pp. 3317–3324. <https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3035586>

6. Grebenshchikov B. G. Asimptoticheskie svoystva i stabilizaciya odnoi sistemy neitral'nogo tipa s postoyannym zapazdyvaniem [Asymptotic properties and stabilization of a neutral type system with constant delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 81–96. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108> (In Russian)

7. Furtat I., Orlov Y. Synchronization and state estimation of nonlinear systems with unknown time-delays: adaptive identification method. *Cybernetics and Physics*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 136–143. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2020-9-3-136-143>

8. Alekseev V. V., Kryshev I. I., Sazykina T. G. *Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie ehkositsem* [Physical and mathematical modeling of ecosystems]. St. Petersburg, Hydrometeoizdat Publ., 1992, 368 p. (In Russian)

9. Arguchintsev A. V. *Optimalnoe upravlenie giperbolicheskimi sistemami* [Optimal control of hyperbolic systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 186 p. (in Russian)

10. Rozhdestvenskiyi B. L., Yanenko N. N. *Sistemi kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p. (In Russian)

11. Srochko V. A., Aksenushkina E. V. Parametrizatsiya nekotorykh zadach upravleniya lineynymi sistemami [Parameterization of some linear systems control problems]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 30, pp. 83–98. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83> (In Russian)

12. Arguchintsev A. V. Variacionnoe uslovie optimalnosti v zadache minimizatsii normy konechnogo sostoyaniya sostavnoi sistemoi giperbolicheskikh i obyknovennykh differentsialnykh uravnenii [The variational optimality condition in the problem of minimizing the finite state norm by a composite system of hyperbolic and ordinary differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 540–548. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.410> (In Russian).

Received: January 21, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Alexander V. Arguchintsev — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; arguch@math.isu.ru

Vasilisa P. Poplevko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; vasilisa@math.isu.ru

Differential game with a “life line” under the Grönwall constraint on controls

*B. T. Samatov*¹, *A. Kh. Akbarov*²

¹ Namangan State University, 316, Uychi ul., Namangan, 116019, Uzbekistan

² Andijan State University, 129, Universitetskaya ul., Andijan, 170100, Uzbekistan

For citation: Samatov B. T., Akbarov A. Kh. Differential game with a “life line” under the Grönwall constraint on controls. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 265–280.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.211>

We study the pursuit-evasion and “life line” differential games of one pursuer and one evader, whose controls are subjected to constraints given by Grönwall type inequalities. It is said that an evader has been captured by a pursuer if the state of the pursuer coincides with the state of the evader. One of the main aims of this work is to formulate optimal strategies of players and define guaranteed capture time. Here a strategy of parallel convergence (briefly, Π -strategy) for the pursuer is suggested and proved that it is optimal for pursuit. To solve the “life line” problem we will investigate dynamics of the attainability domain of players by Petrosyan method, that is for the attainability domain, conditions of embedding in respect to time are given. This work grows and maintains the works of Isaacs, Petrosyan, Pshenichnyi, Azamov and other researchers.

Keywords: differential game, pursuer, evader, Grönwall constraint, strategy, parallel pursuit, attainability domain, “life line” game, the Apollonius sphere.

1. Introduction. In the theory of differential games, problems of pursuit-evasion occupy a special place due to a number of specific qualities. In the works [1, 2], this quality was clearly manifested in the construction of the fundamental theory of differential games and in a number of model problems. The book [3] contains specific game problems that were discussed in details and proposed for further study. One of these problems is the so-called “life line” problem that was initially formulated and studied for certain special cases in the book ([3], Problem 9.5.1). For the case when controls of both players are subject to geometric constraints, this game has been rather comprehensively studied by L. A. Petrosyan [4]. In the monograph [4], the notion of strategy of parallel pursuit (briefly, Π -strategy) was introduced and used to solve the quality problem for the game with a “life line”. This strategy proposed in a simple pursuit game with geometric constraints became the starting point for the development of the pursuit method in games with multiple pursuers (see e.g. [5–21]).

In the theory of differential games, control functions are mainly subjected to geometric, integral or mixed constraints (see [22–26]). However, differential type constraints on controls are also arisen in some applied problems such as ecological, technical problems [27, 28].

In the work [29], the concept of Gr-constraint on controls of players, which in a certain sense, generalizes geometric constraints, is introduced. The present work proposes Grönwall type constraints on controls of players for differential games of pursuit-evasion and for solution of the “life line” game by Petrosyan method. The main purpose of this work is to construct the Π -strategy of pursuer, and to find the attainability domain of players, and also to give analytical solution of the “life line” problem in this case.

2. Statement of problem. In the present paper, controls of the pursuer and evader are subjected to the following Grönwall constraints [29, 30]:

$$|u(t)| \leq \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t |u(s)| ds \text{ for almost every } t \geq 0, \quad (1)$$

$$|v(t)| \leq \sigma_0 + \sigma_1 t + k \int_0^t |v(s)| ds \text{ for almost every } t \geq 0, \quad (2)$$

respectively, where $\rho_0, \sigma_0, \rho_1, \sigma_1, k$ are given positive numbers.

Note that in (1) and (2) and in further constraints, as the norms of the control vectors u and v in the space \mathbb{R}^n , we will consider the usual Euclidean norm, i.e. $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$, here u_1, u_2, \dots, u_n are the coordinates of the vector u in the space \mathbb{R}^n , and $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$, here v_1, v_2, \dots, v_n are the coordinates of the vector v in the same space \mathbb{R}^n .

Remark. For the cases $\rho_1 = \sigma_1 = 0$, the pursuit-evasion and “life line” problems with Grönwall constraints on controls have been completely studied in the work [29].

Let motion equations of pursuer P and evader E be given by the followings:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad (4)$$

correspondingly, where $x, y, x_0, y_0, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \neq y_0$.

Definition 1. A function $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$ is called an admissible pursuer control in game (3), (4) if it satisfies condition (1). Similarly, a function $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_n(\cdot))$ is called an admissible control of the evader in game (3), (4) if it satisfies condition (2).

The set of all admissible controls of the pursuer and the evader is denoted by the symbols \mathbf{U}_{Gr} and \mathbf{V}_{Gr} , respectively. Then the pairs \mathbf{U}_{Gr} and \mathbf{V}_{Gr} form the motion trajectories

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds$$

of the pursuer and the evader, respectively.

Definition 2. A function $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is called a strategy of the pursuer if $\mathbf{u}(t, v)$ is a Lebesgue measurable function with respect to t for each fixed v and is a Borel measurable function with respect to v for each fixed t .

Definition 3. It is said that a strategy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, v)$ guarantees capture at time moment $T(\mathbf{u})$ if at some time $t^* \in [0, T(\mathbf{u})]$ an equality $x(t^*) = y(t^*)$ is satisfied for any control $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{Gr}$ of the evader, here $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problem

$$\dot{x} = \mathbf{u}(t, v(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = v(t), \quad y(0) = y_0,$$

where $t \geq 0$.

Definition 4. A function $\mathbf{v} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ is called a strategy of evader if $\mathbf{v}(t)$ is a Lebesgue measurable function with respect to t .

Definition 5. We say that a strategy $\mathbf{v}(t)$ is called winning for evader in the Gr-game of evasion on $[0, +\infty)$ if for any control of pursuer $u(t) \in \mathbf{U}_{\text{Gr}}$ the condition $x(t) \neq y(t)$ holds for all $t \geq 0$, here $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = \mathbf{v}(t), \quad y(0) = y_0.$$

We use the following statement.

Lemma (see [31]). If $|\omega(t)| \leq \alpha + \int_0^t (\beta + \gamma|\omega(s)|)ds$, then $|\omega(t)| \leq \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1) + \alpha e^{\gamma t}$, where $\omega(t)$, $t \geq 0$, is a measurable function, and α, β are given non-negative numbers and γ is a given positive number.

By this Lemma, if $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{\text{Gr}}$ and $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$, then

$$|u(t)| \leq \varphi(t), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$|v(t)| \leq \psi(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

where

$$\varphi(t) = \frac{\rho_1}{k}(e^{kt} - 1) + \rho_0 e^{kt}, \quad \varphi(0) = \rho_0, \tag{7}$$

$$\psi(t) = \frac{\sigma_1}{k}(e^{kt} - 1) + \sigma_0 e^{kt}, \quad \psi(0) = \sigma_0. \tag{8}$$

It can be easily checked that the converse is not true, that is, the inequalities (5) and (6) do not imply (1) and (2). To define the notions of optimal strategies of players and optimal pursuit time, we consider two games.

The goal of the pursuer P is to capture evader E , i.e. achievement of the equality $x(t) = y(t)$ (Pursuit problem) and the evader E strives to avoid an encounter (Evasion problem), i.e., to achieve the inequality $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, and in the opposite case, to postpone the instant of encounter as long as possible.

This paper is devoted to solving the following problems for Grönwall type constraints on controls.

Problem 1. Solve Pursuit problem in the game (3), (4) with the Grönwall type constraints (1) and (2) (briefly, Gr-game of Pursuit).

Problem 2. Solve Evasion problem in the game (3), (4) with the Grönwall type constraints (1) and (2) (briefly, Gr-game of Evasion).

Problem 3. Solve the differential game of “life line”.

3. A solution of the pursuit problem. In this section, we construct the optimal strategy for pursuer and give a solve of the pursuit problem.

To construct a strategy for pursuer, first we assume that pursuer knows $t, v(t)$ at the current time t .

Definition 6. If $\delta_0 \geq 0, \delta_1 \geq 0$, then the function

$$\mathbf{u}_{\text{Gr}}(t, v) = v - r(t, v)\xi_0 \tag{9}$$

is called a Π_{Gr} -strategy of the pursuer in the Gr-game of pursuit, where $r(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \varphi^2(t) - |v|^2}$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$, $\delta_0 = \rho_0 - \sigma_0$, $\delta_1 = \rho_1 - \sigma_1$, $z_0 = x_0 - y_0$, $\langle v, \xi_0 \rangle$ is the scalar product of the vectors v and ξ_0 in the Euclidean space R^n .

Note that

$$|\mathbf{u}_{\text{Gr}}(t, v)| = \varphi(t). \tag{10}$$

Indeed, if we square equalities (9) on both sides, then we get

$$|\mathbf{u}_{\text{Gr}}(t, v)|^2 = |v|^2 + r(t, v)(r(t, v) - 2\langle v, \xi_0 \rangle).$$

From here and from the form of the scalar function $r(t, v)$, it is easy to calculate equality (10). Let us now check the admissibility of strategy (9) for every admissible function $v(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. From inequality (1) and from equalities (7) and (10) we have

$$\begin{aligned} \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t |\mathbf{u}_{\text{Gr}}(v(s), s)| ds &= \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t \varphi(s) ds = \\ &= \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t \left[\frac{\rho_1}{k} (e^{ks} - 1) + \rho_0 e^{ks} \right] ds = \varphi(t) = |\mathbf{u}_{\text{Gr}}(v(t), t)|, \end{aligned}$$

which proves the admissibility of strategy (9).

Proposition 1. *If $\delta_0 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$, then the function $r(t, v)$ is continuous and non-negative for all $(t, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.*

Proposition 2. *For every z_0 , $z_0 \neq 0$, and $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$, there exists a scalar function $R(t, v(\cdot))$ such that $z(t) = z_0 R(t, v(\cdot))$, where $z(t) = x(t) - y(t)$.*

Proposition 3. *Let $\Phi(t) = A(1 - e^{kt}) + Bt + 1$, where $A = \frac{\delta_1 + k\delta_0}{k^2|z_0|}$, $B = \frac{\delta_1}{k|z_0|}$. If $\delta_0 \geq 0$, $\delta_1 > 0$ or $\delta_0 > 0$, $\delta_1 \geq 0$ is valid, then the function $\Phi(t)$ is monotone decreasing in t , $t \geq 0$, and there exists unique positive root of the equation*

$$\Phi(t) = 0 \tag{11}$$

with respect to t . Here we call a guaranteed capture time the positive root of equation (11) and denote it by T_{Gr} .

We prove the statements.

Theorem 1. *If $\delta_0 \geq 0$, $\delta_1 > 0$ or $\delta_0 > 0$, $\delta_1 \geq 0$ is valid, then the Π_{Gr} -strategy guarantees capture in the Gr-game of pursuit on the time interval $[0, T_{\text{Gr}}]$.*

P r o o f. Let $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$ be an arbitrary control of the evader, and let the pursuer use the Π_{Gr} -strategy. Using the equations (3) and (4) we get the initial value problem

$$\dot{z} = \mathbf{u}_{\text{Gr}}(t, v(t)) - v(t) = -r(t, v(t))\xi_0, \quad z(0) = z_0.$$

From this, we can see that

$$z(t) = R(t, v(\cdot))z_0, \tag{12}$$

where

$$R(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t r(s, v(s)) ds.$$

Now we will study the behavior of the function $R(t, v(\cdot))$ of t . Using the definition of the function $r(t, v)$, we have

$$R(t, v(\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t [\sqrt{\langle v(s), \xi_0 \rangle^2 + \varphi^2(s) - |v(s)|^2} - |\langle v(s), \xi_0 \rangle|] ds.$$

Since the function $f(t, \varsigma) = \sqrt{\varsigma^2 + \varphi^2(t) - |v(t)|^2} - \varsigma$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, is monotone decreasing with respect to ς for every $t \geq 0$. Therefore, by the inequality $|\langle v(t), \xi_0 \rangle| \leq |v(t)| \leq \psi(t)$, and also from (7) and (8) we have

$$R(t, v(\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t [\varphi(s) - \psi(s)] ds = 1 - \frac{1}{|z_0|} \left[\left(\frac{\delta_1}{k^2} + \frac{\delta_0}{k} \right) (e^{kt} - 1) - \frac{\delta_1}{k} t \right] = \Phi(t)$$

or

$$R(t, v(\cdot)) \leq \Phi(t). \quad (13)$$

According to Proposition 3, there is some time T_{Gr} such that $\Phi(T_{Gr}) = 0$. Consequently, from (13) there exists time t^* , $0 \leq t^* \leq T_{Gr}$, that $R(t^*, v(\cdot)) = 0$, and hence $z(t^*) = 0$ by (12).

Next, we will prove the admissibility of the strategy (9) for all t , $t \geq 0$.

It is easy to check that the equality is valid

$$\dot{\varphi}(t) = k\varphi(t) + \rho_1.$$

Integrate both sides of this equality

$$\varphi(t) = \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Take into account of (10)

$$|\mathbf{u}_{Gr}(t, v(t))| = \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t |\mathbf{u}_{Gr}(s, v(s))| ds.$$

This finishes the proof of Theorem 1. \square

Theorem 2. *If conditions of the Theorem 1 hold, then for any control of the pursuer the strategy of the evader $\mathbf{v}(t) = -\psi(t)\xi_0$, $t \geq 0$, guarantees to keep the inequality $x(t) \neq y(t)$ on the time interval $[0, T_{Gr}]$.*

P r o o f. Let $0 \leq t < T_{Gr}$. Then

$$\begin{aligned} \langle x(t) - y(t), \xi_0 \rangle &= |y_0 - x_0| - \int_0^t \langle v(s), \xi_0 \rangle ds + \int_0^t \langle u(s), \xi_0 \rangle ds \geq \\ &\geq |y_0 - x_0| + \int_0^t \psi(s) ds - \int_0^t \varphi(s) ds > 0. \end{aligned}$$

Hence, $x(t) \neq y(t)$, $0 \leq t < T_{Gr}$. This completes the proof. \square

Theorems 1 and 2 allow us to conclude that T_{Gr} is the optimal pursuit time, the Π_{Gr} -strategy is an optimal strategy for pursuer and $\mathbf{v}(t) = -\psi(t)\xi_0$ is an optimal strategy for the evader E .

4. A solution of the evasion problem. In the present section, the evasion problem is considered as a control problem from the point of view of the evader E . To solve this problem we suggest a strategy for the evader E and give a definition of solution of evasion.

Definition 7. We call a strategy of the evader the following control function

$$\mathbf{v}_{\text{Gr}}(t) = -\psi(t)\xi_0, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

in the Gr-game of evasion.

We prove the following statement.

Theorem 3. If $\delta_0 \leq 0$, $\delta_1 \leq 0$, then the strategy (14) is winning for the evader in the Gr-game of evasion.

P r o o f. Let $\delta_0 \leq 0$, $\delta_1 \leq 0$, and $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{\text{Gr}}$. Suppose that the evader implements strategy (14) for all $t \geq 0$. Obviously, $\mathbf{v}_{\text{Gr}}(t) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$. Then for any $u(t)$ we obtain

$$|z(t)| \geq \left| z_0 - \int_0^t \mathbf{v}_{\text{Gr}}(s) ds \right| - \int_0^t |u(s)| ds = |z_0| + \int_0^t \psi(s) ds - \int_0^t |u(s)| ds.$$

Using the inequality $|u(t)| \leq \varphi(t)$ obtained

$$|z(t)| \geq \Psi(t),$$

where $\Psi(t) = |z_0| + ((\delta_1 + k\delta_0)/k^2)(1 - e^{kt}) + (\delta_1/k)t$.

If $\delta_0 \leq 0$, $\delta_1 \leq 0$, and $k > 0$, then

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{\delta_1}{k} - \left(\frac{\delta_1}{k} + \delta_0 \right) e^{kt} \geq 0$$

for all $t \geq 0$.

This implies that the function $\Psi(t)$ is monotone increasing on $[0, \infty)$. Hence it follows that $\Psi(t) \geq |z_0| > 0$. This completes the proof of Theorem 3. \square

5. The differential game with “life line”. Here we are going to study mainly the game with phase constraints for the evader being given by a subset M of \mathbb{R}^n which is called the “life line” (for the evader naturally). (Notice that in the case $M = \emptyset$ we have a simple game.)

In the the Differential Game with “life line” the pursuer P aims to catch the evader E , i.e. to realize the equality $x(t) = y(t)$ for some $t > 0$, while the evader E stays in the zone $\mathbb{R}^n \setminus M$. The aim of the evader E is to reach the zone M before being caught by the pursuer P or to keep the relation $x(t) \neq y(t)$ for all $t, t \geq 0$. Notice that M doesn't restrict motion of the pursuer P . Further we will assume initial positions x_0 and y_0 are given such that $x_0 \neq y_0$ and $y_0 \notin M$.

Definition 8. A strategy $\mathbf{u}_{\text{Gr}}(t, v)$ of the pursuer P is called winning on the time interval $[0, T_{\text{Gr}}]$ in the game of “life line” if for every $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$ there exists some moment $t^* \in [0, T_{\text{Gr}}]$ that $x(t^*) = y(t^*)$ and $y(t) \notin M$ while $t \in [0, t^*]$.

Definition 9. A control function $v^*(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$ of the evader E is called winning in the game of “life line” if for every $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{\text{Gr}}$: there exists some moment \bar{t} , $\bar{t} > 0$, such that $y(\bar{t}) \in M$ and $x(t) \neq y(t)$ while $t \in [0, \bar{t})$, or $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$.

5.1. Dynamics of the attainability domain. Suppose that $\delta_0 > 0$, $\delta_1 \geq 0$. In consequence, a set of capture points may consist of some finite set. We will construct the attainability domain under these conditions.

Assume that the evader E chooses any control function $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{Gr}}$ and the pursuer P applies the strategy (9). Define for each control the following trajectories of the evader

E and pursuer P :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad x(t) = x_0 + \int_0^t \mathbf{u}_{Gr}(s, v(s))ds$$

on interval $t \in [0, \tau]$ respectively, where τ is a pursuit time.

Now we generate the sets

$$B_P(t) = B_P(x(t), y(t)) = \{p : |p - x(t)| \geq h(t)|p - y(t)|\}, \quad (15)$$

$$B_P(0) = B_P(x_0, y_0) = \{p : |p - x_0| \geq h(0)|p - y_0|\} \quad (16)$$

for the pair $(x(t), y(t))$, where

$$h(t) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\frac{\rho_1}{k}(e^{kt} - 1) + \rho_0 e^{kt}}{\frac{\sigma_1}{k}(e^{kt} - 1) + \sigma_0 e^{kt}}, \quad h(0) = \frac{\rho_0}{\sigma_0}.$$

Here it is obvious that the relation $y(t) \in B_P(t)$ holds for each $t \in [0, \tau]$.

Proposition 4. *If $\delta_0 > 0$, $\delta_1 \geq 0$, then for the scalar function $h(t)$ the relation $h(t) > 1$ holds on the time interval $[0, \tau]$.*

Theorem 4. *The set (15) is equivalent to*

$$B_P(t) = x(t) + R(t, v(\cdot))[a(t, z_0)S + c(t, z_0)] \quad (17)$$

for all $t \in [0, \tau]$, here S is the unit ball whose center is on zero point in \mathbb{R}^n and

$$a(t, z_0) = \frac{h(t)|z_0|}{h^2(t) - 1}, \quad c(t, z_0) = -\frac{h^2(t)z_0}{h^2(t) - 1}.$$

P r o o f. From (15) we get

$$B_P(t) = x(t) + B_P^*(t), \quad (18)$$

here $B_P^*(t) = \{p : |p| \geq h(t)|p + z(t)|\}$. Now we will present that $B_P^*(t)$ is a ball. For this purpose, square both sides of the inequality

$$|p| \geq h(t)|p + z(t)|,$$

and after that simplify the last result, i.e.

$$|p|^2 \geq h^2(t) (|p|^2 + 2\langle p, z(t) \rangle + |z(t)|^2)$$

or

$$(h^2(t) - 1)|p|^2 + 2h^2(t)\langle p, z(t) \rangle + h^2(t)|z(t)|^2 \leq 0. \quad (19)$$

Divide both sides of (19) by the expression $h^2(t) - 1$

$$|p|^2 + \frac{2h^2(t)\langle p, z(t) \rangle}{h^2(t) - 1} + \frac{h^2(t)|z(t)|^2}{h^2(t) - 1} \leq 0. \quad (20)$$

Add the expression $\left(\frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1}\right)^2$ to both sides of (20), and write it down as

$$|p|^2 + 2 \left\langle p, \frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1} \right\rangle + \left(\frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1} \right)^2 \leq \left(\frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1} \right)^2 - \frac{h^2(t)|z(t)|^2}{h^2(t)-1}.$$

After some simplification we can generate the result

$$\left| p + \frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1} \right| \leq \frac{h(t)|z(t)|}{h^2(t)-1}.$$

Hence we have set

$$B_P^*(t) = \{p : |p - c(t, z(t))| \leq a(t, z(t))\} = c(t, z(t)) + a(t, z(t))S,$$

where $B_P^*(t)$ is the ball whose center is on the point $c(t, z(t)) = -\frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1}$ and whose radius equals $a(t, z(t)) = \frac{h(t)|z(t)|}{h^2(t)-1}$. Then from formula (12) we obtain

$$c(t, z(t)) = -\frac{h^2(t)z(t)}{h^2(t)-1} = -R(t, v(\cdot)) \frac{h^2(t)z_0}{h^2(t)-1},$$

$$a(t, z(t)) = \frac{h(t)|z(t)|}{h^2(t)-1} = R(t, v(\cdot)) \frac{h(t)|z_0|}{h^2(t)-1}.$$

In consequence, the (18) can be written in the form

$$B_P(t) = x(t) + R(t, v(\cdot)) \left[\frac{h(t)|z_0|}{h^2(t)-1} S - \frac{h^2(t)z_0}{h^2(t)-1} \right]$$

or in the form (17) which finishes the proof. \square

Now we are going to show monotony of the set $B_P(t)$.

Theorem 5 (Petrosyan type theorem [10]). *Let: a) $\rho_0 > \sigma_0$, $\rho_1 > \sigma_1$, and b) $\rho_1\sigma_0 \geq \rho_0\sigma_1$. Then the set $B_P(t)$ is monotone in relation to the inclusion while $t \in [0, \tau]$, i.e. $B_P(t_1) \supset B_P(t_2)$ for $0 \leq t_1 \leq t_2$.*

P r o o f. First, by (17) we determine the derivative of the support function (see [32]) $F(B_P(t), \mu)$ of the set $B_P(t)$ for any $\mu \in \mathbb{R}^n$ and $|\mu| = 1$, that is,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(B_P(t), \mu) &= \frac{d}{dt} F(x(t) + R(t, v(\cdot))[a(t, z_0)S + c(t, z_0)], \mu) = \\ &= \frac{d}{dt} [\langle x(t), \mu \rangle + R(t, v(\cdot))[a(t, z_0)F(S, \mu) + \langle c(t, z_0), \mu \rangle]] = \\ &= \langle \dot{x}(t), \mu \rangle + \dot{R}(t, v(\cdot))[a(t, z_0) + \langle c(t, z_0), \mu \rangle] + \\ &+ R(t, v(\cdot))[\dot{a}(t, z_0) + \langle \dot{c}(t, z_0), \mu \rangle] = \Phi_1(t, \mu) + \Phi_2(t, \mu), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \mu) &= \langle \dot{x}(t), \mu \rangle + \dot{R}(t, v(\cdot))[a(t, z_0) + \langle c(t, z_0), \mu \rangle], \\ \Phi_2(t, \mu) &= R(t, v(\cdot))[\dot{a}(t, z_0) + \langle \dot{c}(t, z_0), \mu \rangle]. \end{aligned}$$

Now we prove that the inequality

$$\frac{d}{dt} F(B_P(t), \mu) = \Phi_1(t, \mu) + \Phi_2(t, \mu) \leq 0$$

is true on $t \in (0, \tau]$.

To do this, we first show that $\Phi_1(t, \mu) \leq 0$. Square the inequality $|v(t)| \leq \psi(t)$ and multiply both sides of the result by the expression $\frac{h^2(t)}{h^2(t)-1}$

$$\frac{|v(t)|^2 h^2(t)}{h^2(t) - 1} \leq \frac{\varphi^2(t)}{h^2(t) - 1}.$$

Make some simplification

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 \left(1 + \frac{1}{h^2(t) - 1}\right) &\leq \frac{\varphi^2(t)}{h^2(t) - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow |v(t)|^2 &\leq \frac{(\varphi^2(t) - |v(t)|^2)}{h^2(t) - 1}. \end{aligned} \quad (21)$$

According to definition of the function $r(t, v(t))$ (see Definition 6) we can express the equality $\varphi^2(t) - |v(t)|^2 = r(t, v(t))[r(t, v(t)) - 2\langle v(t), \xi_0 \rangle]$, and make some substitutions in (21)

$$|v(t)|^2 \leq \frac{r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} [r(t, v(t)) - 2\langle v(t), \xi_0 \rangle]$$

or

$$|v(t)|^2 + 2r(t, v(t)) \frac{\langle v(t), \xi_0 \rangle}{h^2(t) - 1} \leq \frac{r^2(t, v(t))}{h^2(t) - 1}. \quad (22)$$

Add the expression $\frac{r^2(t, v(t))}{(h^2(t)-1)^2}$ to both sides of (22), and rewrite it again

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 + 2r(t, v(t)) \frac{1}{h^2(t) - 1} \langle v(t), \xi_0 \rangle + \frac{r^2(t, v(t))}{(h^2(t) - 1)^2} &\leq \\ &\leq \frac{r^2(t, v(t))}{(h^2(t) - 1)^2} + \frac{r^2(t, v(t))}{h^2(t) - 1}. \end{aligned} \quad (23)$$

The fact that the left-hand side of (23) consists of quadratic standard form of the sum of two vectors, and as a consequence of simplifying the right-hand side of (23) we obtain

$$\left| v(t) + \frac{r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \xi_0 \right| \leq \frac{h(t)r(t, v(t))}{h^2(t) - 1}. \quad (24)$$

It is obvious that for any vector $\mu \in \mathbb{R}^n$, $|\mu| = 1$ the inequality

$$\left\langle v(t) + \frac{r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \xi_0, \mu \right\rangle \leq \left| v(t) + \frac{r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \xi_0 \right|$$

is valid.

According to this and from (24), we have

$$\begin{aligned} \left\langle v(t) + \frac{r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \xi_0, \mu \right\rangle &\leq \frac{h(t)r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle v(t), \mu \rangle - r(t, v(t)) \left(1 - \frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1}\right) \langle \xi_0, \mu \rangle &\leq \frac{h(t)r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle v(t) - r(t, v(t))\xi_0, \mu \rangle + \frac{h^2(t)r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \langle \xi_0, \mu \rangle &\leq \frac{h(t)r(t, v(t))}{h^2(t) - 1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle \dot{x}(t), \mu \rangle - \frac{r(t, v(t))}{|z_0|} \left(-\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \langle z_0, \mu \rangle + \frac{h(t)}{h^2(t) - 1} |z_0| \right) \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \dot{x}(t), \mu \rangle + \dot{R}(t, v(\cdot)) [a(t, z_0) + \langle c(t, z_0), \mu \rangle] \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Formula (25) means that $\Phi_1(t, \mu) \leq 0$.

Now we are going to present that the inequality $\Phi_2(t, \mu) \leq 0$ holds. Because of $R(t, v(\cdot)) \geq 0$ on $t \in (0, \tau]$, it is enough to prove that

$$\dot{a}(t, z_0) + \langle \dot{c}(t, z_0), \mu \rangle = \left(\frac{h(t)}{h^2(t) - 1} \right)' |z_0| - \left\langle \left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' z_0, \mu \right\rangle \leq 0. \quad (26)$$

First, compute the first derivative on the right-hand side of (26)

$$\left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' = \frac{-2h(t)h'(t)}{(h^2(t) - 1)^2}.$$

On the other hand, using (7), (8) and based on the condition b) of Theorem 5 we have the following:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\varphi'(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)} = \frac{(\rho_1\sigma_0 - \rho_0\sigma_1)e^{kt}}{\psi^2(t)} \geq 0. \quad (27)$$

Consequently, this inequality $\left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' \leq 0$ is satisfied in the interval $(0, \tau]$.

Now multiply both sides of the inequality $\langle \xi_0, \mu \rangle \leq 1$ (for any $\mu \in R^n$, $|\mu| = 1$) by the expression $-\left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)'$

$$-\left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' \langle \xi_0, \mu \rangle \leq -\left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)'. \quad (28)$$

Add $\left(\frac{h(t)}{h^2(t) - 1} \right)'$ to both sides of (28), and obtain

$$\left(\frac{h(t)}{h^2(t) - 1} \right)' - \left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' \langle \xi_0, \mu \rangle \leq \left(\frac{h(t)}{h^2(t) - 1} \right)' - \left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)'. \quad (29)$$

Compute the right-hand side of (29) and in relation to (27) we obtain this result

$$\left(\frac{h(t)}{h^2(t) - 1} \right)' - \left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' = -\frac{h'(t)}{(h(t) + 1)^2} \leq 0.$$

From this, we generate the following relation for the left-hand side of (29):

$$\left(\frac{h(t)}{h^2(t) - 1} \right)' - \left(\frac{h^2(t)}{h^2(t) - 1} \right)' \langle \xi_0, \mu \rangle \leq 0. \quad (30)$$

Multiply both sides of (30) by $|z_0|$ and we get (26). Hence it follows that $\Phi_2(t, \mu) \leq 0$. This completes the proof. \square

5.2. A solution of the game with "life line". It has been noted above that Isaacs' game with "life line" was comprehensively solved by L. A. Petrosyan using the method of approximating measurable controls by piecewise constant.

Theorem 6. *If Theorem 5 is valid and $M \cap B_P(0) = \emptyset$, then the Π_{Gr} -strategy (9) is winning in the game (1)–(4) with “life line”.*

P r o o f. The proof directly follows from Theorem 5. □

Now we define a set in the form

$$B_E(t) = \{p : |p - x_0| \geq \chi(t)|p - y_0|\}$$

for all $t \in (0, T_{Gr}]$, where

$$\chi(t) = \frac{\int_0^t \varphi(s) ds}{\int_0^t \psi(s) ds} = \frac{(\rho_1 + k\rho_0)(e^{kt} - 1) - k\rho_1 t}{(\sigma_1 + k\sigma_0)(e^{kt} - 1) - k\sigma_1 t}$$

and T_{Gr} is the first positive root of the equation (11). It's obvious that $\lim_{t \rightarrow 0} \chi(t) = \frac{\rho_0}{\sigma_0}$.

Theorem 7. *Let the conditions $\rho_0 > \sigma_0$, $\rho_1 > \sigma_1$ and $\rho_1\sigma_0 \geq \rho_0\sigma_1$. Then $\chi(t)$ is increasing on interval $t \in (0, T_{Gr}]$ and the set $B_E(t)$ is decreasing with respect to $t \in (0, T_{Gr}]$, i.e., an inclusion $B_E(t_1) \supset B_E(t_2)$ holds for any $t_1, t_2 \in (0, T_{Gr}]$ and $0 < t_1 \leq t_2$.*

P r o o f. First of all, we will prove that $\chi(t)$ is increasing, i.e. $\chi'(t) \geq 0$ under the conditions of Theorem 7. For this purpose, calculate the derivative of $\chi(t)$

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{k^2(\rho_0\sigma_1 - \rho_1\sigma_0)(e^{kt} - 1 - ke^{kt}t)}{[(\sigma_1 + k\sigma_0)(e^{kt} - 1) - k\sigma_1 t]^2}.$$

Now, analyze a sign of expression $l(t) = e^{kt} - 1 - ke^{kt}t$ for every $t \in (0, T_{Gr}]$, i.e.: a) $\lim_{t \rightarrow 0} l(t) = 0$; b) $\frac{dl(t)}{dt} = -k^2e^{kt}t \leq 0$. So, $l(t) \leq 0$ on interval $t \in (0, T_{Gr}]$.

Therefore, $\chi'(t) \geq 0$ is true if $\rho_1\sigma_0 \geq \rho_0\sigma_1$. Since $\chi(t)$ is increasing on $t \in (0, T_{Gr}]$, we can write a relation $\chi(t) > 1$ on that interval.

From (15), (16), we have

$$B_E(t) = x_0 - \frac{\chi^2(t)}{\chi^2(t) - 1}z_0 + \frac{\chi(t)}{\chi^2(t) - 1}|z_0|S. \quad (31)$$

Then we determine the character of the derivative of support function $F(B_E(t), \mu)$, when $|\mu| = 1$ and $t \in (0, T_{Gr}]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(B_E(t), \mu) &= -\left(\frac{\chi^2(t)}{\chi^2(t) - 1}\right)' \langle z_0, \mu \rangle + \left(\frac{\chi(t)}{\chi^2(t) - 1}\right)' |z_0| = \\ &= \frac{2\chi(t)}{(\chi^2(t) - 1)^2} \chi'(t) \langle z_0, \mu \rangle - \frac{\chi^2(t) + 1}{(\chi^2(t) - 1)^2} \chi'(t) |z_0| = \\ &= (2\chi(t) \langle \xi_0, \mu \rangle - \chi^2(t) - 1) \frac{\chi'(t) |z_0|}{(\chi^2(t) - 1)^2} = \\ &= -|\xi_0 \chi(t) - \mu|^2 \frac{\chi'(t) |z_0|}{(\chi^2(t) - 1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

□

Theorem 8. *Let $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\rho_1\sigma_0 \geq \rho_0\sigma_1$ and $M \cap B_E(T_{Gr}) \neq \emptyset$. Then for evader E there exists some control which is winning in the game (1)–(4) with “life line”.*

P r o o f. Let $p \in M \cap B_E(T_{Gr})$ and the evader E implements the control $v^*(t) = \psi(t)\nu$, $v^*(\cdot) \in \mathbf{V}_{Gr}$, where $\nu = (p - y_0)/|p - y_0|$. Since $|v^*(t)| = \psi(t)$ for all $t \geq 0$, then substituting this into inequality (2) we get formula

$$\begin{aligned} \sigma_0 + \sigma_1 t + k \int_0^t |v^*(s)| ds &= \sigma_0 + \sigma_1 t + k \int_0^t \psi(s) ds = \\ &= \sigma_0 + \sigma_1 t + k \int_0^t \left[\frac{\sigma_1}{k} (e^{ks} - 1) + \sigma_0 e^{ks} \right] ds = \psi(t) = |v^*(t)|, \end{aligned}$$

which proves the admissibility of the control $v^*(t)$ for all $t \geq 0$. Then time of the achievement of the point p is $\bar{\eta}$ for evader and we have

$$\int_0^{\bar{\eta}} |v^*(s)| ds = \int_0^{\bar{\eta}} \psi(s) ds = |p - y_0|, \quad (32)$$

and from of Theorems 1 and 7, it follows, that $\bar{\eta} \leq T_{Gr}$. We suppose that for the pursuer exists a certain control function $u^*(\cdot) \in \mathbf{U}_{Gr}$ that $x(\bar{t}) = y(\bar{t})$ holds and $\bar{t} < \bar{\eta}$. If $z(t) = x(t) - y(t)$ and $z(0) = z_0$, then from $\dot{z}(t) = u^*(t) - v^*(t)$ we have

$$z(\bar{t}) = z_0 + \int_0^{\bar{t}} (u^*(s) - v^*(s)) ds = 0.$$

From this, it follows that

$$\begin{aligned} \left| z_0 - \int_0^{\bar{t}} v^*(s) ds \right| &\leq \int_0^{\bar{t}} |u^*(s)| ds \leq \int_0^{\bar{t}} \varphi(s) ds \Rightarrow \\ \Rightarrow |z_0|^2 - 2 \int_0^{\bar{t}} \psi(s) ds \langle z_0, \nu \rangle + \left(\int_0^{\bar{t}} \psi(s) ds \right)^2 &\leq \left(\int_0^{\bar{t}} \varphi(s) ds \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\int_0^{\bar{t}} \psi(s) ds \right)^2 (\chi^2(\bar{t}) - 1) + 2 \int_0^{\bar{t}} \psi(s) ds \langle z_0, \nu \rangle - |z_0|^2 &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\bar{t}} \psi(s) ds \geq f(\bar{t}) := \frac{1}{\chi^2(\bar{t}) - 1} [\sqrt{\langle z_0, \nu \rangle^2 + |z_0|^2 (\chi^2(\bar{t}) - 1)} - \langle z_0, \nu \rangle]. \end{aligned} \quad (33)$$

If $\chi(t)$ is increasing for $t \in (0, T_{Gr}]$, then it is easy to check that $f(t)$ is decreasing function on $(0, T_{Gr}]$. Consequently from $\bar{t} < \bar{\eta}$, it follows that $f(\bar{\eta}) \leq f(\bar{t})$.

Since $p \in B_E(T_{Gr})$ and $\bar{\eta} \leq T_{Gr}$, then from Theorem 7 we have $p \in B_E(T_{Gr}) \subset B_E(\bar{\eta})$. Hence we obtain

$$\begin{aligned} |p - x_0| &\geq \chi(\bar{\eta}) |p - y_0| \Rightarrow \\ \Rightarrow |z_0 - (p - y_0)|^2 &\geq \chi^2(\bar{\eta}) |p - y_0|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |z_0|^2 - 2\langle z_0, p - y_0 \rangle + |p - y_0|^2 \geq \chi^2(\bar{\eta})|p - y_0|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \geq (\chi^2(\bar{\eta}) - 1)|p - y_0|^2 + 2|p - y_0|\langle z_0, \nu \rangle - |z_0|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |p - y_0| \leq f(\bar{\eta}) \leq f(\bar{t}). \end{aligned}$$

Then from the last inequality and from (32), (33), we have $\int_0^{\bar{t}} \psi(s) ds \geq \int_0^{\bar{\eta}} \psi(s) ds$ or $\bar{t} \geq \bar{\eta}$, though this contradicts our supposition. \square

Theorem 9. *Let $\delta_0 \leq 0$, $\delta_1 \leq 0$. Then for the evader E there exists some control which is winning in the game (1)–(4) with “life line”.*

P r o o f. Let the evader use the control (14), and let the pursuer choose an arbitrary control $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{Gr}$. Then, similar to the proof of Theorem 3, under the conditions of the current theorem we again derive $|z(t)| \geq \Psi(t) \geq |z_0| > 0$ for any $t \in [0, +\infty)$, from which we infer $z(t) \neq 0$, i.e. $x(t) \neq y(t)$ (see Proposition 2). Therefore, by virtue of Definition 9 in the game (1)–(4) with a “life line” the evader E is also considered to be winning. The proof is complete. \square

6. Example. Assume that the game (1)–(4) is described as (see Figures 1 and 2)

$$\dot{x} = u, \quad x_0 = (0, 0), \quad |u(t)| \leq 2 + 2\sqrt{2}t + \int_0^t |u(s)| ds, \quad t \geq 0, \quad (34)$$

$$\dot{y} = v, \quad y_0 = (0, -1), \quad |v(t)| \leq \sqrt{3} + 2t + \int_0^t |v(s)| ds, \quad t \geq 0. \quad (35)$$

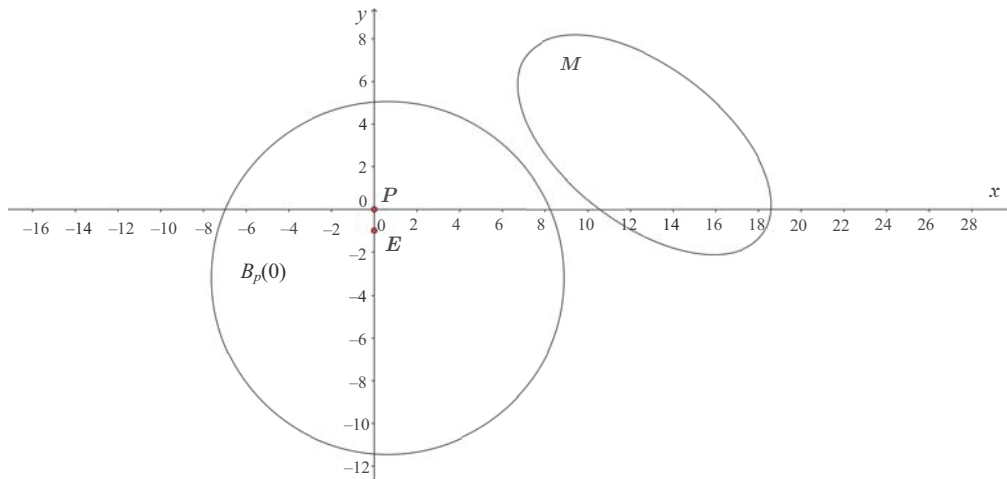


Figure 1. The representation which the Π_{Gr} -strategy is winning in the game (34), (35) with “life line”

Then based on Theorem 1, we can obtain $T_{Gr} = 0.37$. In accordance with Theorem 4, we generate the set $B_P(0) = \{p : |p - c| \leq a, c = (0, -4), a = 4 + 2\sqrt{3}\}$. A set of points $p = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ on a boundary of $B_P(0)$ consists of the circle

$$\partial B_P(0) = \{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1^2 + (\tilde{p}_2 + 4)^2 = 28 + 16\sqrt{3}\}.$$

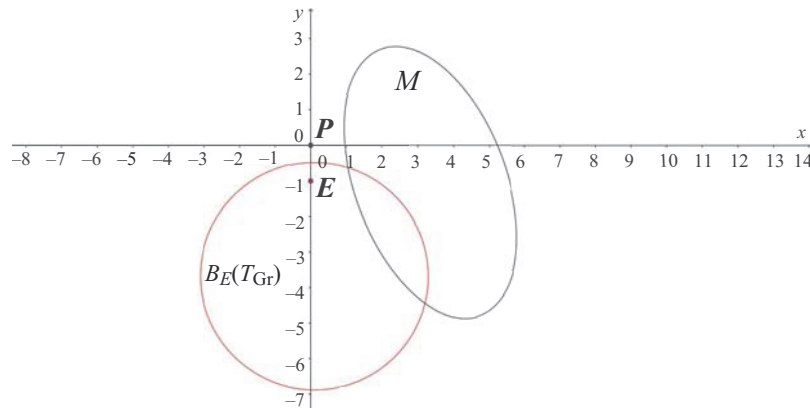


Figure 2. The representation which the evader wins in the game (34), (35) with “life line”

Using (31) and Theorem 7, the set $B_E(T_{Gr}) = \{p : |p - c| \leq a, c = (0, -3.323), a = 2.779\}$ is constructed. A set of points $p = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ on a boundary of $B_E(T_{Gr})$ consists of the following circle:

$$\partial B_E(T_{Gr}) = \{(\hat{p}_1, \hat{p}_2) : \hat{p}_1^2 + (\hat{p}_2 + 3.323)^2 = (2.779)^2\}.$$

We wish to thank professors A. A. Azamov and G. I. Ibragimov for discussing this paper and for providing some useful comments.

References

1. Pontryagin L. S. *Izbrannye trudy [Selected works]*. Moscow, MAKS Press, 2004, 551 p. (In Russian)
2. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*. New York, Springer, 2011, 517 p.
3. Isaacs R. *Differential games*. New York, John Wiley and Sons, 1965, 385 p.
4. Petrosyan L. A. *Differential games of pursuit*. Singapore, World Scientific Publ., Series on optimization, 1993, 326 p.
5. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects. *Cybernetics and System Analysis*, 1976, vol. 12, no. 5, pp. 484–485.
6. Pshenichnyi B. N., Chikrii A. A., Rappoport J. S. Effektivnyj metod resheniya differencial'nyh igr so mnogimi presledovatelyami [An effective method for solving differential games with many pursuers]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1981, vol. 256, no. 3, pp. 530–535. (In Russian)
7. Azamov A. O zadache kachestva dlya igr prostogo presledovaniya s ogranicheniem [On the quality problem for simple pursuit games with constraint]. *Serdica Bulgariacae Math.*, Sofia, 1986, vol. 12, no. 1, pp. 38–43. (In Russian)
8. Azamov A. A., Samatov B. T. The II-strategy: analogies and applications. *The Fourth International Conference Game Theory and Management*. St. Petersburg, 2010, vol. 4, pp. 33–47.
9. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodejstvie grupp upravlyaemyh ob'ektov [Conflict interaction of groups of controlled objects]*. Izhevsk, Udmurt State University Press, 2009, 266 p. (In Russian)
10. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*. Dordrecht, Kluwer Publ., 1997, 403 p.
11. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami [Mathematical methods of control for several dynamic processes]*. Moscow, Moscow State University Press, 1990, 198 p. (In Russian)
12. Petrosyan L. A. Ob odnom semejstve differencial'nyh igr na vyzhivanie v prostranstve \mathbb{R}^n [About some of the family differential games at a survival in the space \mathbb{R}^n]. *Papers of Academy sciences of USSR*, 1965, vol. 161, no. 1, pp. 52–54. (In Russian)
13. Petrosyan L. A. Iгры presledovaniya s “liniey zhizni” [Pursuit games with “a Survival Zone”]. *Vestnik of Leningrad State University*, 1967, vol. 3, no. 13, pp. 76–85. (In Russian)

14. Petrosyan L. A., Dutkevich V. G. Igrы s “liniej zhizni”, Sluchaj l -zahvata [Games with “a Survival Zone”, Occation l -catch]. *Vestnik of Leningrad State University*, 1969, vol. 3, no. 13, pp. 31–38. (In Russian)
15. Petrosyan L. A., Rikhsiev B. B. *Presledovanie na ploskosti [Pursuit on the plane]*. Moscow, Nauka Publ., 1991, 96 p. (In Russian)
16. Petrosyan L. A., Mazalov V. V. *Game theory and applications. II*. New York, Nova Sci., 1996, 219 p.
17. Samatov B. T. On a pursuit-evasion problem under a linear change of the pursuer resource. *Siberian Advances in Mathematics*, 2013, vol. 23, no. 10, pp. 294–302.
18. Samatov B. T. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 7, pp. 1072–1081.
19. Samatov B. T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. I. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2013, vol. 49, no. 5, pp. 756–767.
20. Samatov B. T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. II. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 907–921.
21. Samatov B. T. The II-strategy in a differential game with linear control constraints. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 3, pp. 258–263.
22. Dar'in A. N., Kurzhanskii A. B. Control under indeterminacy and double constraints. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1554–1567.
23. Kornev D. V., Lukoyanov N. Yu. On a minimax control problem for a positional functional under geometric and integral constraints on control actions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, pp. 85–100.
24. Satimov N. Yu. *Metody resheniya zadachi presledovaniya v teorii differencial'nyh igr [Methods of solving of pursuit problem in differential games]*. Tashkent, National University of Uzbekistan Press, 2003, 00 p. (In Russian)
25. Ibragimov G. I. A game of optimal pursuit of one object by several. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 187–192.
26. Ibragimov G. I. Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 627–635.
27. Aubin J. P., Cellina A. *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1984, XIII, 342 p.
28. Pang J. S., Stewart D. E. Differential variational inequalities. *Mathematical Programming. Series A*, 2008, vol. 113, no. 2, pp. 345–424.
29. Samatov B. T., Ibragimov G. I., Hodjibayeva I. V. Pursuit-evasion differential games with the Gronwall type constraints on controls. *Ural Mathematical Journal*, 2020, vol. 6, no. 2, pp. 95–107.
30. Samatov B. T., Akbarov A. Kh., Zhuraev B. I. Pursuit-evasion differential games with Gr-constraints on controls. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 59, pp. 67–84.
31. Grönwall T. H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Annals of Mathematics Second Series*, 1919, vol. 20, no. 4, pp. 292–296.
32. Blagodatikh V. I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie [Introduction to optimal control]*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 239 p. (In Russian)

Received: January 7, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Bahrom T. Samatov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; samatov57@inbox.ru

Adakhambek Kh. Akbarov — PhD in Physics and Mathematics; akbarov.adhambek@bk.ru

Дифференциальная игра с «линией жизни» при ограничениях Гронуолла на управления

*Б. Т. Саматов*¹, *А. Х. Акбаров*²

¹ Наманганский государственный университет,
Наманган, ул. Уйчи, 316116019, Узбекистан,

² Андижанский государственный университет,
170100, Узбекистан, Андижан, Университетская ул., 129

Для цитирования: *Samatov B. T., Akbarov A. Kh.* Differential game with a “life line” under the Grönwall constraint on controls // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 265–280.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.211>

Изучается дифференциальная игра с «линией жизни» для одного преследователя и одного убегающего при управлениях удовлетворяющих неравенств типа Грануолла. Убегающий считается пойманным со стороны преследователя, если состояние убегающего совпадает с состоянием преследователя. Одна из основных целей настоящей работы — построение оптимальных стратегий для игроков и определение оптимального времени поимки. Для преследователя предлагается стратегия параллельного сближения (корооче, П-стратегия) и доказывается ее оптимальность. Для решения задачи с «линией жизни» исследуется динамика области достижимости игроков методом Петросяна, т. е. найдены условия монотонности по включению относительно времени этой области достижимости. Отметим, что работа продолжает исследования Айзекса, Петросяна, Пшеничного, Азамова и др.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследование, убежание, ограничение Грануолла, стратегия, параллельное преследование, область достижимости, игра с «линией жизни», сфера Аполлония.

Контактная информация:

Саматов Бахром Таджиахматович – д-р физ.-мат. наук, проф.; samatov57@inbox.ru

Акбаров Адахамбек Хасанбаевич – канд. физ.-мат. наук; akbarov.adhambek@bk.ru

Схема обратной связи в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето

А. В. Сачков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Сачков А. В. Схема обратной связи в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 281–288. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.212>

Предложена схема обратной связи для решения задач выбора в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето. Приведены необходимые сведения об аксиоматическом подходе, изучен пример. Схема обратной связи раскрыта в контексте задачи о возможности заключения договора страхования. Рассмотрены возникающие в процессе построения схемы сопутствующие вопросы: о выделении критериев, об автоматическом сборе квантов на основе данных о действиях пользователя и др. Схема модифицирована, приведен алгоритм решения. Раскрыты направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: выбор, множество Парето, обратная связь.

1. Введение. Статья фокусируется на применении аксиоматического подхода к сужению множества Парето в различных задачах. С выбором мы сталкиваемся постоянно, и задачи выбора решались с древних времен в самых разных контекстах. В настоящее время развитие вычислительной техники способствует автоматизации процесса нахождения решения во многих сценариях, рассматриваемый случай — не исключение. Данной тематике посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2]). Часто при решении подобных задач предлагаемые варианты оцениваются согласно своим свойствам — критериям. Абстрактная природа объектов диктует необходимость их перевода в числовую форму для дальнейших с ними действий. Классический подход заключается в составлении так называемой взвешенной суммы критериев — каждому из них приписывается вес (число от 0 до 1, сумма весов равна 1), соответствующий важности критерия, значения критериев умножаются на веса и складываются. В зависимости от постановки задачи выбирается вариант с наибольшей или наименьшей суммой. Такой подход интуитивно понятен, но в то же время не опирается на строгий математический фундамент. Аксиоматический подход к сужению множества Парето предлагает один из вариантов строгого обоснования действий при решении задач выбора. На основе этой теории предлагается схема «обратной связи», позволяющая учитывать предпочтения клиента.

Подробное описание аксиоматического подхода к сужению множества Парето приводится в работе [3]. В ней последовательно рассмотрены не только базовые концепции, но и более продвинутые темы. Статья [4] содержит более краткое описание такого подхода.

Искусственный интеллект (ИИ) крайне широко распространен [5], используем его для оптимизации предлагаемой схемы в смысле выбора пары решений, наиболее сокращающей множество всех вариантов.

2. Постановка задачи. Опишем основные элементы аксиоматического подхода в теории выбора. Подробности о нем содержатся в [3, 4].

Пусть существует множество решений (альтернатив, вариантов) X произвольной природы (автомобили, квартиры, мобильные телефоны, телевизоры и пр.). Необходимо сделать выбор из элементов X , т. е. подобрать лучшее в некотором смысле решение или множество решений.

Сравнивать решения будем с помощью численных оценок их качеств — критериев. В дальнейшем положим, что критерий — векторная функция

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где n — количество выделенных параметров решения, каждому из которых отвечает вещественное число. По умолчанию критерий предполагается максимизировать, если же по смыслу требуется обратное, то соответствующий критерий берется с противоположным знаком.

Теперь введем отношение предпочтения \succ_X на X , являющееся воплощением предпочтений лица, принимающего решения (ЛПР). Таким образом, если для ЛПР решение $x_1 \in X$ предпочтительнее решения $x_2 \in X$, то верно $x_1 \succ_X x_2$.

С учетом вышесказанного сформулируем постановку задачи многокритериального выбора:

Задача 1. Построить $C(X)$ — множество выбираемых решений, когда есть тройка (X, f, \succ_X) .

Здесь $C(X)$ — решение задачи, содержащее альтернативы, выбранные на основе предпочтений ЛПР. Сложность работы непосредственно с элементами множества X заключается в произвольности их природы. Для борьбы с этим обстоятельством введем множество возможных векторов $Y = f(X)$, содержащее векторы значений критериев всех решений, и отношение предпочтения на $Y \succ_Y$, удовлетворяющее соотношению

$$f(x_1) = y_1 \succ_Y y_2 = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \succ_X x_2.$$

Введенные понятия дают возможность сформулировать задачу многокритериального выбора так.

Задача 2. Построить $C(Y)$, когда есть пара (Y, \succ_Y) .

Рассмотрим аксиомы, лежащие в основе аксиоматического подхода к сужению множества Парето; они основаны на реальном поведении людей при решении задач выбора и накладывают ограничения на \succ_Y . При этом будем предполагать, что существует продолжение отношения \succ_Y с множества Y на множество \mathbb{R}^n . Их всего 4 [3]:

Аксиома 1. $y_1 \succ_Y y_2 \Leftrightarrow y_2 \notin C(Y)$.

Аксиома 2. \succ_Y транзитивно.

Аксиома 3. \succ_Y согласовано с каждым из критериев f_1, \dots, f_n ; это означает, что $\forall i$, если y_1 и y_2 отличаются только в i -й компоненте, и $y_1^i > y_2^i$, тогда $y_1 \succ_Y y_2$.

Аксиома 4. \succ_Y линейно и однородно.

Понятие «элементарный квант информации об отношении предпочтения ЛПР» (или же просто «квант») лежит в основе аксиоматического подхода к сужению множества Парето и имеет смысл при выполнении вышеописанных аксиом. Приведем определение его упрощенной формы (в [3] содержится подробный вывод).

Определение 1. Пусть $i, j \in 1 : n$. Говорят, что задан элементарный квант информации об отношении предпочтения ЛПР (квант) $w_i, w_j > 0$, если $y \in \mathbb{R}^n$ вида $y^i = w_i, y^j = -w_j, y^k = 0, k \neq i, j$ удовлетворяет выражению $y \succ_Y (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Смысл формального определения можно интерпретировать следующим образом: ЛПР готово расстаться с w_j количеством единиц критерия f_j , при этом получив взамен w_i единиц критерия f_i .

Как можно использовать полученный квант? Это делается так: пересчитываем старый критерий f и получаем новый f_1 , где $f_1^j = f^i \times w_j + f^j \times w_i$, $f_1^k = f^k$, $k \neq j$. Используем f_1 для пересчета всех $y \in Y$, после чего отбрасываем те решения, которые попадают под действие первой аксиомы, и в зависимости от ситуации продолжаем процесс сбора квантов или заканчиваем его, оглашая решение.

Приведем пример использования элементарного кванта для принятия решения в области страхования: пусть имеется случайный риск X , который оценен экспертно с математическим ожиданием $\mathbf{E}(X)$, страхователь (того, кого страхуют) обладает капиталом ω , p есть премия — гарантированный убыток. Тогда страхователю предлагаем на сравнение решения вида $(0, \mathbf{E}(X))$ и $(p, \mathbf{E}(X) + L)$, где L — общая сумма страховых выплат (может быть единовременной или растянутой во времени, условной и безусловной в зависимости от типа договора (полиса)). Может показаться, что такое сравнение довольно бессмысленно, однако это не так, ибо, исходя из решения, принятого страхователем, можно делать рекомендации в подобных ситуациях в будущем.

Рассмотрим также числовой пример, чтобы лучше понять механизм работы с квантами: пусть требуется выбрать полис на основе двух критериев. Первый — выгода. В качестве второго возьмем репутацию страховщика — естественно, что более известные и стабильные компании выглядят в глазах клиентов более привлекательными. Имеются варианты:

- 1) $L = 1000, R = -10$,
- 2) $L = 500, R = -1$,
- 3) $L = 700, R = -5$,

в которых R — рейтинг страховщика, R отрицателен в силу того, что чем он меньше, тем лучше; вообще разные знаки значений критериев символизируют разность их сущности.

Пусть ЛПР сделал выбор между 1 и 2: $2 \succ_Y 1$. Из этого извлекаем квант: $w_1 = 500$, $w_2 = 9$. Пересчитываем критерий: $f_1 = (9 \times f^1 + 500 \times f^2, f^2)$ и варианты:

- 1) $L = 4000, R = -10$,
- 2) $L = 4000, R = -1$,
- 3) $L = 3800, R = -5$.

Таким образом, второй полис признается лучшим — он по второму критерию лучше остальных, а по первому не хуже двух других.

Можно заметить, что понятие элементарного кванта сильно ограничивает его область применимости, ведь в подавляющем большинстве случаев число критериев ≥ 3 . Следовательно, логично было бы ввести понятие общего кванта информации (об отношении предпочтения ЛПР), которое уже совместимо с любым числом критериев.

Пусть n обозначает число критериев, $I = \{1, \dots, n\}$ — множество номеров критериев.

Определение 2. Пусть $A, B \in I$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Говорят, что задан (общий) квант информации об отношении предпочтения ЛПР (квант) для групп критериев A, B вместе с наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для вектора $y' \in \mathbb{R}^n$ вида

$$\begin{aligned} y'_i &= w_i^* \text{ для всех } i \in A, \\ y'_j &= -w_j^* \text{ для всех } j \in B, \\ y'_s &= 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{A \cup B\} \end{aligned}$$

выполняется $y' \succ_Y (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Как можно видеть, пару индексов здесь мы заменили на пару подмножеств множества индексов, которые представляют собой группы критериев, сравнительную важность которых показывает квант.

Смысл понятия похож на таковое для элементарного кванта: ЛПР готово пожертвовать w_j^* количеством единиц критериев f_j для всех $j \in B$, при этом получив взамен w_i^* единиц критерия f_i для всех $i \in A$. Такое определение предоставляет гораздо большую гибкость при выборе спектра решаемых задач.

Формула для пересчета критериев здесь несколько меняется, при этом также происходит повышение размерности самого критерия до $p = n - |B| + |A| \times |B|$.

Итак, нужно построить $C(X)$ — множество выбираемых решений на основе квантов об отношении предпочтения ЛПР. Раскроем суть решения этой задачи через схему обратной связи.

3. Схема обратной связи. Приведем краткое ее описание на примере задачи возможности заключения договора страхования [6]. В страховании две стороны — клиент (страхователь) и фирма (страховщик), у каждой стороны свои задачи. Задачами клиента являются следующие:

- 1) принять решение о страховании вообще;
- 2) выбрать страховщика;
- 3) избрать конкретный продукт.

Для фирмы же стоят такие вопросы:

- 1) принятие внутренних решений;
- 2) сбор информации (квантов) от клиентов;
- 3) подбор параметров продуктов. Для решения этих задач предлагается следующее: через мобильное приложение фирма собирает от клиентов кванты, при этом последние получают продукт с подобранными оптимальными параметрами по своим предпочтениям, а первая лучше понимает рынок и подбирает параметры.

Представим теперь компоненты программы, автоматизирующей сбор квантов и предоставление рекомендаций ЛПР на основе их предпочтений. Распространение мобильных устройств по всему миру подсказывает разумность использования именно такой программы. Она состоит из:

- 1) удаленного сервера, занимающегося основными вычислениями, агрегацией входных данных путем исследования сайтов-каталогов, их накоплением, хранением и обработкой;
- 2) графической оболочки (так называемый GUI — Graphical user interface, графический пользовательский интерфейс), позволяющей пользователю легко получать нужные рекомендации;
- 3) вычислительно-технический блок на устройстве пользователя, приводящий к получению рекомендации даже при отсутствии доступа к сети Интернет;
- 4) прочие службы. Именно тот факт, что вычисления предполагаются к проведению как на удаленном сервере, так и на устройстве пользователя, разница в производительности между которыми может быть десятки тысяч раз, указывает на необходимость оптимизации соответствующих вычислений.

Встает также резонный вопрос — что если информация от квантов противоречива? Справиться с этим поможет критерий непротиворечивости [3].

Итак, краткое описание схемы следующее: ЛПР дает сравнение, извлекаем квант, сужаем множество решений, вновь идем к ЛПР. В рамках этой схемы возникает ряд сопутствующих задач. Рассмотрим некоторые из них.

4. Сопутствующие задачи. Основная задача, заслуживающая внимания, следующая: каждый квант сокращает множество решений минимум на одно, согласно первой аксиоме — если ЛПР не выбрал одно из предоставленных решений, оно не может войти в окончательное множество. В связи с этим возникает вопрос: как на каждом шаге алгоритма подбирать такую пару решений, которая будет при любом выборе ЛПР давать максимальное сокращение финального множества?

Дать ответ на вопрос потенциально может ИИ: в теории достаточно натренировать его на большом количестве размеченных данных, и модель сможет предлагать оптимальную в вышеописанном смысле пару решений.

Другой сопутствующий вопрос можно охарактеризовать следующим образом: возможен ли сбор квантов об отношении предпочтения ЛПР без непосредственного его опроса? В настоящее время обезличенные данные о действиях пользователей в сети Интернет собираются и обрабатываются самым широким кругом компаний, что открывает возможности для их применения в рассматриваемой схеме.

Примером данных, подходящих для решаемых целей, будут данные о переходах пользователя по веб-страницам. Например, ЛПР хочет выбрать смартфон, пользуется сайтом-агрегатором. Примерные действия в таком случае следующие: извлекаем отмеченные через фильтры параметры (размер экрана, батареи, камеры и пр.), их запоминаем; также изучаем переходы пользователя на страницы конкретных моделей и их запоминаем. Если при этом прослеживается предпочтение какой-то марки, то это также учитываем. На основе полученной информации из сравниваемых пар решений выбирается наиболее соответствующее предпочтениям ЛПР.

Немаловажно также отметить проблему выделения значимых критериев. Очевидно, что для каждой отдельной категории предметов возможно выделить сотни различных критериев, что неразумно. Выбор из них наиболее значимых существенно облегчит решение. Другой аспект того же толка — перевод не имеющих явных численных аналогов критериев в числовой формат (например, цвет).

Важен также вопрос об оптимальной точке останова алгоритма с участием квантов — в какой момент мы перестаем их собирать? Иначе говоря, в какой момент вычисления, необходимые для очередного шага алгоритма, становятся непропорционально сложными получаемой от них выгоде (сокращению множества решений)?

Последний заслуживающий внимания вопрос — рост размерности перемножаемых в рамках алгоритма матриц, он перекликается с предыдущим в смысле рациональности вычислений. Умножение матриц — достаточно трудоемкая операция в смысле количества затрачиваемых вычислительных ресурсов. Лучшая вычислительная сложность алгоритма умножения матриц, достигнутая на данный момент, составляет приблизительно $O(n^{2.37})$ [7], при этом значения сложности ниже $O(n^2)$ не могут быть достигнуты, и требует внимания структура возникающих матриц с целью оптимизации. Невозможность применения алгоритмов для, например, разреженных матриц вместе с особенностями предлагаемой программы диктуют необходимость снижения нагрузки на участвующую в вычислениях аппаратуру.

Для решения вопроса предлагаются два подхода. Первый предполагает дробление множества альтернатив на куски и применение алгоритма с выбором наилучших

альтернатив для каждого из них по отдельности, после чего получившиеся решения объединяются, и для них алгоритм запускается вновь. Несмотря на очевидные плюсы в плане понижения размерности матриц, возникающих в процессе применения алгоритма, появляются и дополнительные вопросы, в частности будет ли сохраняться соответствие аксиомам, другими словами — корректность. При малой размерности X целесообразность подхода в целом вызывает сомнения.

Второй подход состоит в оптимизации процесса получения у ЛПР квантов, уже освещенный выше. Помимо подготовки для этой цели модели ИИ представляется разумным рассмотреть следующие эвристические идеи: будем предлагать для сравнения решения y', y'' с максимальной абсолютной суммарной разницей по всем критериям:

$$\max_{y', y''} \rightarrow \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i|$$

или же только по какому-либо одному критерию:

$$\max_{y', y''} \rightarrow |y'_i - y''_i| \text{ для какого-либо } i \in I.$$

5. Модифицированная схема обратной связи. С учетом вышесказанного получаем следующий общий алгоритм построения множества $C(X)$:

- 1) зная множество решений X , построить множество векторов, составленных из значений их критериев Y , выделяя при этом лишь значимые и преобразовывая абстрактные в числовые значения;
- 2) определить оптимальные пары решений с учетом модели ИИ;
- 3) получить кванты на основе обезличенных данных, в смысле отсутствия в них указания на реальную персону, взамен имеется лишь уникальный идентификатор;
- 4) сузить множество решений на базе полученных квантов;
- 5) повторить до достижения избранной точки останова.

На основе постоянно поступающих новых данных фрагменты алгоритма корректируются, тем самым олицетворяя обратную связь.

6. Заключение. В статье рассмотрена схема обратной связи для решения задач выбора в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето. Кратко раскрыта суть появляющихся сопутствующих задач. Все это позволяет разработать программный комплекс, автоматизирующий необходимые вычисления с дальнейшей оптимизацией UI и самого процесса вычислений. Также планируется провести сравнение с актуальными рекомендательными системами, так как обе сущности преследуют одну цель. Еще одним направлением исследований является внедрение элементов теории выбора и ИИ в системы управления сложными техническими комплексами [8, 9].

Литература

1. Hamel A. H., Kostner D. Multi-weight ranking for multi-criteria decision making // arXiv: 2312.03006. URL: <https://arxiv.org/abs/2312.03006> (дата обращения: 2 декабря 2023 г.).
2. Bednarczuk E. M., Miroforidis Ja., Przemyslaw Pz. A multi-criteria approach to approximate solution of multiple-choice knapsack problem // arXiv: 1712.06723. URL: <https://arxiv.org/abs/1712.06723> (дата обращения: 2 декабря 2023 г.).
3. Ногин В. Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход. М.: Физматлит, 2018. 272 с.
4. Басков О. В. Алгоритм последовательного учета информации об относительной важности критериев в задаче многокритериального выбора // Процессы управления и устойчивость: Труды

41-й междунар. конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. ун-та, 2010. С. 553–558.

5. Erdil E., Besiroglu T. Explosive growth from AI automation: A review of the arguments // arXiv: 2309.11690. URL: <https://arxiv.org/abs/2309.11690> (дата обращения: 2 декабря 2023 г.).

6. Сачков А. В. Исследование возможности заключения договора страхования с учетом функции полезности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 369–373. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.305>

7. Duan R., Wu H., Zhou R. Faster matrix multiplication via asymmetric hashing // arXiv: 2210.10173. URL: <https://arxiv.org/abs/2210.10173> (дата обращения: 2 декабря 2023 г.).

8. Ilyushina A. N., Pershin I. M., Trushnikov V. E., Novozhilov I. M., Pervukhin D. A., Tukeyev D. L. Design of a software complex for control of induction equipment of metallurgical manufacture using systems theory // 2023 V International Conference on Control in Technical Systems (CTS), St. Petersburg, Russian Federation: LETI Publ. House, 2023. P. 83–87.

9. Novozhilov I. M., Sidorenko A. A., Tukeyev D. L., Podkina M. E., Pervukhin D. A., Trushnikov V. E. Design of software and hardware complex of temperature field diagnostics using the theory of distributed parameter systems // 2023 V International Conference on Control in Technical Systems (CTS). St. Petersburg, Russian Federation: LETI Publ. House, 2023. P. 88–91.

Статья поступила в редакцию 4 января 2024 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Сачков Александр Валерьевич — аспирант; st031354@student.spbu.ru

Feedback loop scheme as related to axiomatic approach to Pareto set reduction

A. V. Sachkov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Sachkov A. V. Feedback loop scheme as related to axiomatic approach to Pareto set reduction. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 281–288. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.212> (In Russian)

A feedback loop scheme is proposed as related to axiomatic approach to Pareto set reduction. Necessary information on axiomatic approach is presented and an example is studied. The feedback loop scheme is explored as related to a problem of potential insurance contract conclusion. Problems arising with such approach are discussed, such as criteria selection, automatic quanta collection based on user behavior data and others. The scheme is then modified and an approximate solution algorithm is presented. Future research directions are outlined.

Keywords: choice, Pareto set, feedback loop.

References

1. Hamel A. H., Kostner D. *Multi-weight ranking for multi-criteria decision making*. arXiv: 2312.03006. Available at: <https://arxiv.org/abs/2312.03006> (accessed: February 2, 2023).

2. Bednarczuk E. M., Miroforidis Ja., Przemyslaw Pz. *A multi-criteria approach to approximate solution of multiple-choice knapsack problem*. arXiv: 1712.06723. Available at: <https://arxiv.org/abs/1712.06723> (accessed: February 2, 2023).

3. Noghin V. D. *Reduction of the Pareto set: an axiomatic approach*. Cham, Switzerland, Springer, 2014, XIX, 232 p. (Russ. ed.: Noghin V. D. *Suzhenie mnozhestva Pareto: aksiomaticheskii podkhod*. Moscow: Physmatlit Publ., 2018. 272 p.)

4. Baskov O. V. Algoritm posledovatel'nogo ucheta informatsii ob otnositel'noi vazhnosti kriteriev v zadache mnogokriterial'nogo vybora // Protsessy upravleniia i ustoiчивost' [Algorithm for sequential accounting of information on the relative criteria importance in the multicriteria choice problem. *The XLI annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'10)*. St. Petersburg, Publishing House of St. Petersburg State University, 2010, pp. 553–558. (In Russian)
5. Erdil E., Besiroglu T. *Explosive growth from AI automation: A review of the arguments*. arXiv: 2309.11690. Available at: <https://arxiv.org/abs/2309.11690> (accessed: February 2, 2023).
6. Sachkov A. V. Issledovanie vozmozhnosti zakliucheniia dogovora strakhovaniia s uchedom funktsii poleznosti [Examining the possibility of insurance contract conclusion based on utility function]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 369–373. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.305> (In Russian)
7. Duan R., Wu H., Zhou R. *Faster matrix multiplication via asymmetric hashing*. arXiv: 2210.10173. Available at: <https://arxiv.org/abs/2210.10173> (accessed: February 2, 2023).
8. Ilyushina A. N., Pershin I. M., Trushnikov V. E., Novozhilov I. M., Pervukhin D. A., Tukeyev D. L. Design of a software complex for control of induction equipment of metallurgical manufacture using systems theory. *2023 V International Conference on Control in Technical Systems (CTS)*. St. Petersburg, Russian Federation. LETI Publ. House, 2023, pp. 83–87.
9. Novozhilov I. M., Sidorenko A. A., Tukeyev D. L., Podkina M. E., Pervukhin D. A., Trushnikov V. E. Design of software and hardware complex of temperature field diagnostics using the theory of distributed parameter systems. *2023 V International Conference on Control in Technical Systems (CTS)*. St. Petersburg, Russian Federation. LETI Publ. House, 2023, pp. 88–91.

Received: January 4, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Author's information:

Alexander V. Sachkov — Postgraduate Student; st031354@student.spbu.ru

Dynamic decision-making under uncertainty: Bayesian learning in environmental game theory*

J. Zhou¹, O. L. Petrosian^{1,2}, H. Gao²

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Qingdao University, 308, Ningxia Road, Qingdao, 266071, China

For citation: Zhou J., Petrosian O. L., Gao H. Dynamic decision-making under uncertainty: Bayesian learning in environmental game theory. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 289–297.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.213>

This paper investigates the issue of pollution control dynamic games defined over a finite time horizon, with a particular focus on parameter uncertainty within the ecosystem. We employ a dynamic Bayesian learning method to estimate uncertain parameters in the dynamic equation, differing from traditional single-instance Bayesian learning which does not involve continuous signal reception and belief updating. Our study validates the effectiveness of the dynamic Bayesian learning approach, demonstrating that, over time, the beliefs of the players progressively converge towards the true values of the unknown parameters. Through numerical simulations, we illustrate the convergence process of beliefs and compare optimal control strategies under different scenarios. The findings of this paper offer a new perspective for understanding and addressing the uncertainties in pollution control problems.

Keywords: HIDS, dynamic Bayesian learning, pollution control games, ecological uncertainty, optimal control strategy.

1. Introduction. The corpus of literature on dynamic game models with unknown parameters, specifically within the realm of pollution control games, has expanded considerably. At the beginning of the nineties, several papers formulated a deterministic growth of pollution stocks [1–4]. The introduction of uncertainty into these models was pioneered by [5–8], which examined a dynamic game of international pollution control under ecological uncertainty and integrated a learning mechanism for the players. This approach allowed for the characterization and comparison of non-cooperative emission strategies in response to incomplete knowledge about the distribution of ecological uncertainty.

Paper [9] delved into learning within the context of a resource extraction and investment game, acknowledging that agents grapple with uncertainties in both the dynamics of the environment and their payoff functions. While most of the literature has focused on scenarios where parties have incomplete knowledge of others' private information, the work [10] considered the strategic implications of a player's partial knowledge of the truth. This body of work collectively enhances our understanding of strategic behavior in the face of uncertainty in dynamic environmental games.

Bayesian updating is a pivotal method for addressing uncertainties regarding unknown parameters within dynamic systems. This method has been previously utilized to investigate decision-making processes involving binary choices. Specifically, the Continuous

* This research was supported by Saint Petersburg State University (ID project: N 94062114).

© St. Petersburg State University, 2024

Opinions and Discrete Actions (CODA) model, introduced by Martins, provides a framework where each choice is linked to a continuous probability, bridging the gap between continuous beliefs and discrete actions [11, 12]. In this model, agents maintain continuous opinions and base their decisions on the discrete actions observed from their peers.

Further expanding on this concept [13–15], explored the dynamics of agents' opinions concerning an unknown parameter. Agents would form and adjust their opinions continuously, while also considering the likelihood of different values, which could follow a distribution that combines Gaussian and uniform characteristics. This dual-distribution approach encapsulates the possibility of agents operating under partial ignorance during interactions.

Building upon the foundational work in Bayesian updating and its applications in dynamic systems, our research explores new dimensions in environmental economics and game theory. We focus on how players form and adjust their beliefs in the face of ecological uncertainties, and how these beliefs, in turn, guide their strategies in a dynamic setting. We extend our inquiry to the long-term effects of belief-driven strategies on the stability of the system and the achievement of optimal outcomes. The research questions whether a belief-centric approach leads to more efficient decision-making or whether it potentially limits adaptability and innovation in response to environmental challenges. Through a blend of theoretical exploration and empirical analysis, our paper aims to deepen the understanding of the role of beliefs in shaping strategies within dynamic, uncertain environments.

2. Description of the problem. We focus on tracking the cumulative net emissions in the environment, represented as a function of time $S(t)$. The dynamics of this stock variable are crucial for understanding the environmental impact and are formulated as follows [5]:

$$S(t+1) = \tilde{\eta} \left(\sum_{i=1}^N u_i(t) + \delta S(t) \right), \quad S(t_0) = S_0, \quad (1)$$

where $0 < \delta < 1$ indicates that $1 - \delta$ is the natural decay rate of pollution. The variable $\tilde{\eta}$ introduces ecological uncertainty into our model, accounting for various factors that significantly influence the environmental dynamics.

A pivotal aspect of our model is the incorporation of uncertainty, represented by $\tilde{\eta}$ in the dynamic equation. This uncertainty factor is integral to the environmental model, capturing the unpredictable elements that typically affect ecological systems. The variable $\tilde{\eta}$ is not just a mathematical construct but a reflection of real-world phenomena like climatic variations, unanticipated ecological responses, and other environmental stochasticities. It serves to model the often erratic and non-linear impact of emissions on the environment, thereby adding a layer of realism to the simulation. Understanding and quantifying this uncertainty is crucial for accurate modeling and effective decision-making in environmental management.

The realization of the random variable $\tilde{\eta}$, denoted by x , follows a probability distribution $\varphi(x|\theta)$. Here, θ in the parameter space $\Theta \subset \mathbb{R}^l$ defines the vector of sufficient parameters for the probability density function (p.d.f.) φ .

Players form their beliefs about the unknown parameter $\xi(\theta)$, particularly crucial in contexts laden with uncertainty, like environmental issues. This uncertainty may represent factors such as the rate at which nature absorbs pollutants.

The optimization problem for player $i = 1, 2, \dots, N$, assuming a behavior of welfare maximization over a finite horizon, is given by

$$\max_{u_i(t)} \sum_{t=0}^T [u_i(t)(a_i - u_i(t)) - b_i S(t)], \quad (2)$$

subject to the pollution dynamics described in Equation (1). In formula (2), a_i , $i = 1, 2, \dots, N$, are constants, and b_i for each, $i = 1, 2, \dots, N$, denotes the positive marginal cost of the pollution stock.

3. Dynamic Bayesian learning method. In this chapter, we delve into the strategies players employ for updating their beliefs in the face of uncertainty within the state equation. Such uncertainty might stem from variables like unknown parameters or erratic environmental factors. Grasping the nuances of belief revision in response to new information and observations is pivotal.

We initiate our discussion by outlining the conditional expectation method, which is used to predict the realization of a random variable at time t , denoted as x_t . We will then explore how players incorporate fresh signals into their decision-making, thereby enhancing the accuracy of their estimations.

In this Section, we analyze how the planner employs Bayesian methods to interpret and learn from the signal x_t observed at each time t . To streamline our model, we standardize the initial beliefs of all players. The following assumptions are made for simplicity and clarity: at the beginning of each stage, players collectively adopt a prior belief $\xi_t(\theta)$, which is recognized as common knowledge among them. Players make their decisions without the knowledge of the current period's signal; the signal is observed only post-decision. This information is then utilized to update their beliefs about θ . In each stage, players use mathematical expectation to estimate the unknown parameter θ . The estimated value at stage t , denoted as $\bar{\theta}_t$.

Formally, given the prior belief $\xi_t(\theta)$ and the signal x_t at time t , the posterior belief $\hat{\xi}_t(\theta|x_t)$ is defined by the following equation:

$$\hat{\xi}_t(\theta|x_t) = \frac{\varphi(x_t|\theta)\xi_t(\theta)}{\int_{\Theta} \varphi(x_t|y)\xi_t(y)dy} \quad (3)$$

for $\theta \in \Theta$. This formulation, based on Bayes' inference, describes the learning process through the continual updating of beliefs in light of the insights derived from each observed signal x_t . Significantly, Equation (3) functions independently of the control vector.

In the context of sequential decision-making, dynamic games of incomplete information are characterized by the uncertainty and evolving nature of the environment in which players operate. Players are required to make strategic decisions based on limited information, aiming to maximize their expected payoffs over time. The fundamental principles governing their behavior and decision-making process can be described as follows:

a) at each time $t = 0, 1, 2, \dots, T$, players do not know x_t, x_{t+1}, \dots, x_T , when choosing their strategies $u_i(t)$;

b) they aim to maximize their payoff from time t to T , which depends on future states;

c) players use their prior beliefs $\xi_t(\theta)$ about unknown parameters based on information available up to time t , which are based on the information accessible up to time t (i.e., x_0, \dots, x_{t-1}), in order to estimate the unknown parameters. They then apply this estimation as the actual value of $\tilde{\eta}$ starting from time t ;

d) upon receiving the signal x_t , players update their belief to the posterior belief $\hat{\xi}_t(\theta|x_t)$, which is assigned as the prior belief at time $t + 1$.

Proposition. At any stage t , the posterior belief about an unknown parameter θ aligns with the prior distribution for the next stage $t + 1$. This proposition underscores the

consistency and progression in belief formation, ensuring a seamless transfer of knowledge from one stage to the next.

At the outset of each stage, players establish a prior belief regarding the unknown parameters. This belief, coupled with the current state, guides them in selecting an optimal strategy. Following this decision, players are presented with signals that provide insights into these parameters. Utilizing the information from these signals, they update their initial belief to a posterior belief. This updated belief then serves as the new prior for the subsequent stage, setting the stage for the next cycle of decision-making. This process repeats itself, creating a dynamic, iterative game, where Bayesian learning plays a central role in strategy adaptation and decision-making.

4. Theoretical analysis. At the start of each stage, players assign prior beliefs to the unknown parameters θ . These beliefs are based on normal-gamma conjugate priors and are represented as follows:

$$\xi_t(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}\left(\mu \mid \mu_t, (k_t \lambda)^{-1}\right) \mathcal{G}\left(\lambda \mid \alpha_t, \text{rate} = \beta_t\right),$$

where \mathcal{G} denotes the gamma distribution, \mathcal{N} is the normal distribution.

Using Equation (3) of Bayes' inference, the posterior distribution of unknown parameters θ can be updated as

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_t(\theta|x_t) &\propto \varphi(x_t|\mu, \lambda) \xi_t(\theta) \propto \\ &\propto \mathcal{N}\left(\mu \mid \frac{k_t \mu_t + x_t}{k_t + 1}, ((k_t + 1)\lambda)^{-1}\right) \times \mathcal{G}\left(\lambda \mid \alpha_t + \frac{1}{2}, \beta_t + \frac{k_t (x_t - \mu_t)^2}{2(k_t + 1)}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Applying Proposition and exploit the property that the distribution is conjugate, we get the following formula:

$$\begin{aligned} \mu_{t+1} &= \frac{k_t \mu_t + x_t}{k_t + 1}, \\ k_{t+1} &= k_t + 1, \\ \alpha_{t+1} &= \alpha_t + \frac{1}{2}, \\ \beta_{t+1} &= \beta_t + \frac{k_t (x_t - \mu_t)^2}{2(k_t + 1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

here $t \in \{0, 1, 2, \dots, T-1\}$, given the initial beliefs μ_0, k_0, α_0 , and β_0 . The left-hand side of Equation (5) represents the players' initial beliefs for stage $t+1$, whereas the right-hand side of Equation (5) is linked to Equation (4) based on Proposition.

As we delve deeper into the implications of our Bayesian learning model, it becomes essential to establish the theoretical underpinnings that guarantee its effectiveness over time. A key aspect of this is the convergence of the Bayesian estimator, which we address in the following theorem. This theorem demonstrates that the iterative Bayesian learning process leads to a convergence of the estimated mean towards the true mean as the number of stages increases indefinitely.

Theorem. *As the number of stages progresses to infinity, the expected value of the Bayesian estimator for the unknown mean converges to the true value of the parameter. Formally,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(M_n) = \mu,$$

where M_n is a random variable representing the Bayesian estimate of the unknown mean μ at stage n .

P r o o f. In our model, the sequence X_0, X_1, \dots represents an infinite series of independent and identically distributed (i.i.d.) Lebesgue integrable random variables. Each variable in this sequence has an expected value denoted as $E(X_i) = \mu$, which is constant across the series.

Considering the Bayesian estimator M_n for the unknown mean at stage n , we have

$$E(M_n) = \frac{k_0\mu_0}{k_0+n} + \frac{1}{k_0+n} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i) = \frac{k_0\mu_0}{k_0+n} + \frac{n\mu}{k_0+n} = \frac{\frac{k_0\mu_0}{n} + \mu}{\frac{k_0}{n} + 1}. \quad (6)$$

Taking the limit of Equation (6) as n approaches infinity, we find

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(M_n) = \frac{0 + \mu}{0 + 1} = \mu.$$

This result demonstrates that the expected value of the Bayesian estimator M_n converges to the true mean μ as n becomes infinitely large. Therefore, the theorem is proved. \square

The aforementioned theorem has profound implications for our dynamic game model. It validates the approach of using Bayesian learning mechanisms with evolving uncertainties. The convergence of the Bayesian estimator to the true parameter value as the number of stages increases provides a solid foundation for decision-making in uncertain environments. This theoretical assurance of convergence is not just mathematically significant; it also instills confidence in the practical application of our model, especially in complex, real-world scenarios where long-term strategy and adaptability are crucial.

Having estimated the unknown parameters in our dynamic game of pollution control, we now turn our attention to identifying the Nash equilibrium of the model. This equilibrium represents a state, where no player can benefit by changing their strategy while others keep theirs unchanged. To find this equilibrium, we employ the Hamilton—Jacobi—Bellman method, a powerful tool in dynamic optimization.

The Hamilton—Jacobi—Bellman equation for each player in our pollution control model is central to identifying the Nash equilibrium strategies. We denote the value function of player i as $V_i(t, S, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t)$, which represents the player's maximum expected utility at a given state. This equation for this value function is expressed as

$$V_i(t, S, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t) = \max_{u_i(t)} \{ (u_i(t)(a_i - u_i(t)) - b_i S) + \\ + V_i(t+1, \hat{\eta}_t(\sum_{i=1}^N u_i(t) + \delta S), \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t) \},$$

where $\hat{\eta}_t = E(\tilde{\eta} | \mu_t, \alpha_t / \beta_t)$.

Assuming a linear-state structure for our model, the value function is hypothesized to be linear and is formulated as

$$V_i(t, S, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t) = A_i(t, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t)S + B_i(t, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t), \\ i = 1, 2, \dots, N.$$

To derive the coefficients of the value function, we equate the coefficients in terms of S :

$$A_i(t, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t) = -b_i + A_i(t, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t)\hat{\eta}_t\delta,$$

$$A_i(T + 1, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t) = 0$$

for $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

We then define the Nash equilibrium strategies with dynamic Bayesian learning for each player $i = 1, 2, \dots, N$ in the subgame:

$$\tilde{u}_i^*(t, \mu_t, k_t, \alpha_t, \beta_t) = \frac{a_i}{2} - \frac{\hat{\eta}_t}{2(1 - \hat{\eta}_t\delta)} b_i(1 - (\hat{\eta}_t\delta)^{T-t}),$$

where $a = \sum_{i=1}^N a_i$; $b = \sum_{i=1}^N b_i$; $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.

5. Numerical simulation and results analysis. We present the results of our numerical simulations designed to demonstrate the effectiveness of our dynamic Bayesian learning approach in the context of ecological uncertainty. The signals we generate follow a normal distribution with a mean of 0.5 and a variance of 1, thus the true value of the unknown parameter regarding the mean of the random variable is 0.5. The parameters of the model are set as $a = 8$, $b = 3$, $N = 5$, and $\delta = 0.6$. The time interval considered is $T = 70$.

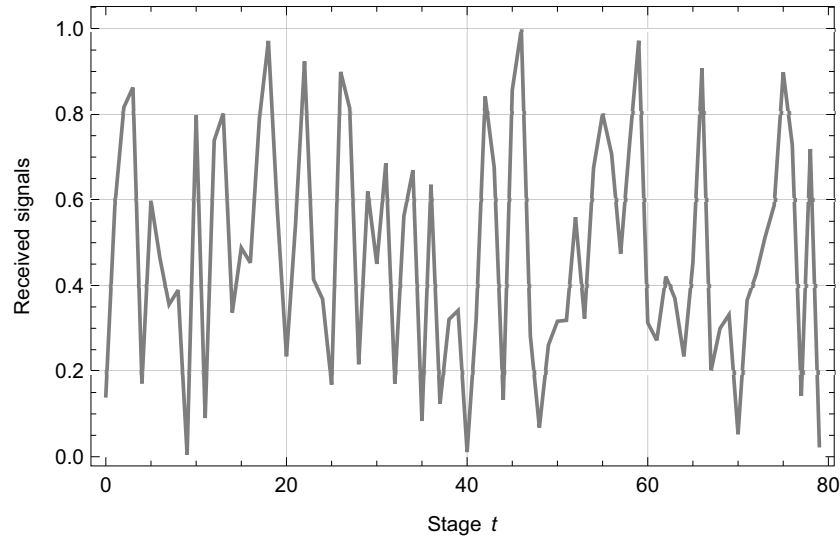


Figure 1. Received signals in estimating ecological uncertainty

Figure 1 illustrates the dynamic nature of signal reception in the context of ecological uncertainty estimation. It highlights how varying data inputs, represented through different signal types, contribute to the evolving understanding of ecological systems.

Upon analyzing Figure 2, we observe a significant trend: as time progresses, the players' estimates of the unknown parameter increasingly converge to the true value, which in this case is 0.5. This convergence is a clear indication of the effectiveness of dynamic Bayesian learning in reducing uncertainty and enhancing the accuracy of parameter estimation. The simulation thus validates our model's capability to adaptively learn and

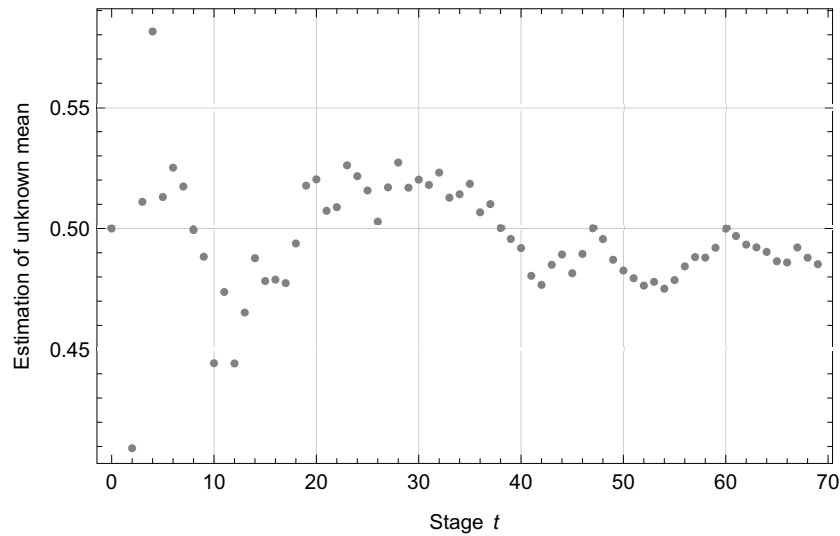


Figure 2. Dynamic Bayesian estimation of unknown parameters over time

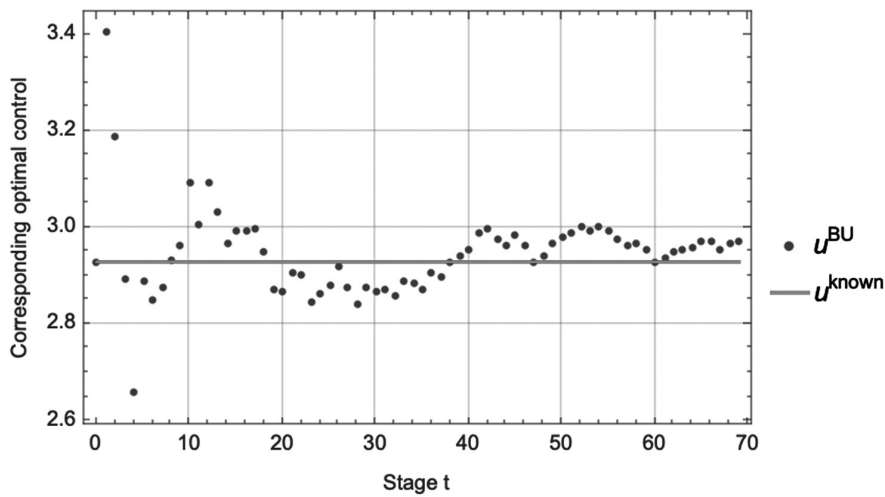


Figure 3. Comparison of optimal control strategies with and without ecological uncertainty

refine estimates, ultimately leading to more informed and precise decision-making in the face of ecological uncertainty.

Figure 3 presents a comparison between the optimal control strategies adopted by players under different conditions of ecological uncertainty. When ecological uncertainty is absent, the control strategy adopted by players is markedly more stable. This line represents the benchmark control action, assuming the players have complete knowledge of the ecological parameters. On the other hand, the blue dots depict the control strategy under ecological uncertainty, where players must continuously adapt their actions based on the signals they receive. The scattered nature of these points highlights the variability and dynamism in the players' control strategies as they attempt to estimate and account for ecological uncertainty.

6. Conclusion. This study has provided a comprehensive examination of dynamic Bayesian learning in the context of ecological uncertainty within pollution control games. Through a series of detailed numerical simulations, we have demonstrated the significant impact of uncertainty on players' decision-making processes. Our results show that as players receive signals over time, their estimates of unknown ecological parameters converge to the true values, allowing for more informed and optimal control strategies.

The simulation analysis reveals that the presence of ecological uncertainty necessitates a dynamic approach to control. Players must adapt their strategies in real-time, based on the evolving signals they receive, which capture the uncertain state of the ecological system. This adaptability is crucial for managing environmental challenges effectively, especially when long-term outcomes are uncertain.

References

1. Van der Ploeg F., De Zeeuw A. A differential game of international pollution control. *Systems & Control Letters*, 1991, vol. 17, iss. 6, pp. 409–414.
2. Long N. V. Pollution control: A differential game approach. *Annals of Operations Research*, 1992, vol. 37, iss. 1, pp. 283–296.
3. Hoel M. Emission taxes in a dynamic international game of CO₂ emissions. *Conflicts and Cooperation in Managing Environmental Resources*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1992, pp. 39–70.
4. Veijo K., Matti P., Tahvonen O. Transboundary air pollution and soil acidification: A dynamic analysis of an acid rain game between Finland and the USSR. *Environmental and Resource Economics*, 1992, vol. 2, pp. 161–181.
5. Masoudi N., Santugini M., Zaccour G. A dynamic game of emissions pollution with uncertainty and learning. *Environmental and Resource Economics*, 2016, vol. 64, iss. 3, pp. 349–372.
6. Ulph A., Maddison D. Uncertainty, learning and international environmental policy coordination. *Environmental Resource Economics*, 1997, vol. 9, iss. 4, pp. 451–466.
7. Arrow K. J., Fisher A. C. Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility. *Quarterly Journal of Economics*, 1974, vol. 88, iss. 2, pp. 312–319.
8. De Zeeuw A., Zemel A. Regime shifts and uncertainty in pollution control. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2012, vol. 36, iss. 7, pp. 939–950.
9. Mirman L. J., Santugini M. Learning and technological progress in dynamic games. *Dynamic Games and Applications*, 2014, vol. 4, pp. 58–72.
10. Liu Z. Games with incomplete information when players are partially aware of others' signals. *Journal of Mathematical Economics*, 2016, vol. 65, pp. 58–70.
11. Martins A. C. Continuous opinions and discrete actions in opinion dynamics problems. *International Journal of Modern Physics C*, 2008, vol. 19, iss. 4, pp. 617–624.
12. Martins A. C. Mobility and social network effects on extremist opinions. *Physical Review E*, 2008, vol. 78, iss. 3, art. no. 036104.
13. Martins A. C. Bayesian updating rules in continuous opinion dynamics models. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009, no. 02, art. no. P02017.
14. Lorenz J. Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey. *International Journal of Modern Physics C*, 2007, vol. 18, iss. 12, pp. 1819–1838.
15. Sirbu A., Loreto V., Servedio V. D. P., Tria F. Opinion dynamics: models, extensions and external effects. *Participatory Sensing, Opinions and Collective Awareness*, 2017, pp. 363–401.

Received: January 21, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Jiangjing Zhou — Postgraduate Student; 17854230890@163.com

Ovanes L. Petrosian — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; petrosian.ovanes@yandex.ru

Hongwei Gao — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; gaohongwei@qdu.edu.cn

Динамическое принятие решений в условиях неопределенности: байесовское обучение в теории экологических игр*

Ц. Чжоу¹, О.Л. Петросян^{1,2}, Х. Гао²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Университет Циндао,
Китайская Народная республика, 266071, Циндао, Дорога в Нинся, 308

Для цитирования: Zhou J., Petrosian O.L., Gao H. Dynamic decision-making under uncertainty: Bayesian learning in environmental game theory // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 289–297. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.213>

Исследуется проблема динамических игр по борьбе с загрязнением, определенных на конечном временном горизонте, с особым акцентом на неопределенность параметров внутри экосистемы. Используется динамический байесовский метод обучения для оценки неопределенных параметров в динамическом уравнении, отличающийся от традиционного байесовского обучения на единичных примерах, которое не предполагает непрерывного приема сигнала и обновления представлений. Проведенное исследование подтверждает эффективность динамического байесовского подхода к обучению, демонстрируя, что со временем убеждения игроков постепенно приближаются к истинным значениям неизвестных параметров. С помощью численного моделирования иллюстрируется процесс конвергенции убеждений, сравниваются стратегии оптимального управления в различных сценариях и анализируем влияние сигналов на управленческие решения участников. Результаты статьи открывают новую перспективу для понимания и устранения неопределенностей в задачах борьбы с загрязнением.

Ключевые слова: динамическое байесовское обучение, игры по борьбе с загрязнением окружающей среды, экологическая неопределенность, стратегия оптимального управления.

Контактная информация:

Цзянцзин Чжоу — аспирант; 17854230890@163.com

Ованес Леонович Петросян — д-р физ.-мат. наук, проф.; o.petrosian@spbu.ru

Хунвэй Гао — д-р физ.-мат. наук, проф.; gaohongwei@qdu.edu.cn

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект ID: 94062114).

Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса*

А. С. Шмыров, В. А. Шмыров, Д. В. Шиманчук

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Шмыров А. С., Шмыров В. А., Шиманчук Д. В. Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. Вып. 2. С. 298–306. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.214>

Рассматривается стратегия удержания космического аппарата в окрестности неустойчивой точки Лагранжа (точки либрации) системы Солнце—Земля. Эта стратегия подразумевает использование специального управления, действующего коллинеарно линии Солнце—Земля и обеспечивающего устойчивость по Ляпунову орбитального движения. Реализация такого управления предлагается с помощью солнечного паруса. Обсуждаются преимущества и трудности данной стратегии.

Ключевые слова: задача трех тел, точка либрации, солнечный парус, управление, удержание.

1. Введение. Несколько последних десятилетий исследователи в области небесной механики и управления активно разрабатывают проекты, связанные с коллинеарными точками либрации (точками Лагранжа) системы Солнце—Земля и системы Земля—Луна. Список таких проектов, как реализованных, так и планируемых, весьма внушителен. Первый проект ISEE-3 был запущен NASA в 1978 г. В 1994 г. запущена станция наблюдения Солнца SOHO (NASA, ESA). В рамках проекта Genesis (2005 г.) реализовано интересное маневрирование между окрестностями точек либрации L_1 и L_2 . Космический аппарат Чанъэ-2 CNSA в 2011 г. совершил маневры в окрестности точки L_2 . Проект Спектр-РГ Роскосмоса и DLR был реализован в 2019 г. и посвящен построению схемы карты Вселенной в рентгеновском диапазоне.

В последние годы имеются практические достижения космической навигации, применяющие солнечный парус. Исследования космических полетов с солнечным парусом ведутся давно. Можно сказать, что разработана фундаментальная теоретическая база для полетов. Настоящие трудности обусловлены технической реализацией размещения солнечного паруса в космическом пространстве и управления им для маневрирования. Также к актуальным проблемам для современных полетов такого рода относится разработка подходящих систем управления, которые, с одной стороны, будут эффективно работать, а с другой, — просты и естественны. Потому следует отметить монографии [1, 2], содержащие фундаментальные исследования в этой области. Полетам с солнечным парусом, связанным с точками либрации, посвящено

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект № 95438429).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

немало работ. В [3] проведены исследования в рамках линеаризованных уравнений круговой ограниченной задачи трех тел. В [4] предлагается с помощью сил светового давления управлять взаимным расстоянием группировки космических аппаратов в окрестности точки либрации L_2 . В [5] изучена задача изменения площади паруса и его ориентации для удержания в окрестности условно-периодической орбиты в окрестности точки либрации. В 2020–2023 гг. авторами настоящей работы были опубликованы статьи [6–8], посвященные решению задачи управления солнечным парусом в окрестности точки либрации, спецификой которой является использование специальной функции фазовых переменных, где рост модуля свидетельствует об уходе из окрестности точки либрации.

Коллинеарные точки неустойчивые [9], и, таким образом, задача управления нужна не только для маневрирования, но и для удержания космического аппарата (КА) в этих областях пространства.

В представленной работе изучается орбитальное движение в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце—Земля. Здесь оказывается удобно применить специальную нелинейную аппроксимацию ограниченной круговой задачи трех тел, так называемую модель Хилла. Точки Лагранжа, или точки либрации, являются модельными понятиями круговой ограниченной задачи трех тел и ее частными решениями (рис. 1). При этом подразумевается, что система трех тел, т. е. КА и два массивных небесных тела, сохраняют свою геометрическую конфигурацию в течение времени. Будем рассматривать коллинеарную точку Лагранжа L_1 системы Солнце—Земля. Эта точка является неустойчивой, и для длительного пребывания в ее окрестности требуется решать задачу управления. Окрестность L_1 — притягательное место для реализации многих космических проектов.

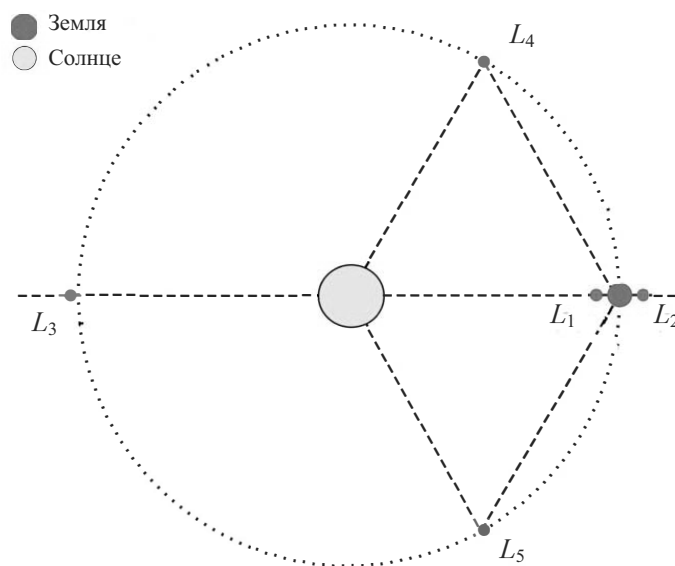


Рис. 1. Положения точек либрации

Опубликовано много научных работ, посвященных движению в окрестности точек либрации, в частности, обзор [10]. Обычно стратегия полета в окрестность точки либрации заключается в полете с околоземной орбиты на заранее просчитанную орби-

ту около точки либрации, так называемую гало-орбиту. На таких орбитах КА может находиться в неуправляемом режиме несколько месяцев с последующей коррекцией орбиты в виде малых импульсов. В этой статье рассматривается другая задача, когда подразумевается реализация непрерывного управления для удержания КА.

Перспективно использовать солнечный парус для решения такой задачи [1, 2]. Ранее нами была опубликована серия работ, посвященная применению солнечного паруса в задаче орбитального маневрирования в окрестности L_1 за счет изменения ориентации паруса [6–8].

В настоящей работе предполагается, что управляющим параметром является отражательная способность солнечного паруса. Решение дается в виде синтеза, причем управление зависит только от одной фазовой переменной.

2. Математическая модель движения КА. Уравнения неуправляемого движения КА в геоцентрических координатах в рамках круговой задачи трех тел можно записать в виде [9]

$$\ddot{\tilde{x}} = -\frac{\gamma m_1 \tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^3} + \gamma m_2 \left(\frac{Rl(t) - \tilde{x}}{\|Rl(t) - \tilde{x}\|^3} - \frac{1}{R^2} l(t) \right), \quad (1)$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ — геоцентрические координаты КА; γ — гравитационная постоянная; m_1, m_2 — массы Земли и Солнца; R — расстояние между Землей и Солнцем (1 а.е.); $l(t)$ — единичный вектор, направленный по линии Земля — Солнце.

Если положить $\tilde{y} = \dot{\tilde{x}}$, то уравнение (1) приводится к гамильтоновой системе с гамильтонианом

$$H_1(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \frac{1}{2} \tilde{y} \tilde{y} - \frac{\gamma m_1}{\|\tilde{x}\|} - \frac{\gamma m_2}{R} \left(\frac{1}{\|l(t) - \frac{\tilde{x}}{R}\|} - \frac{l(t) \tilde{x}}{R} \right).$$

Далее, как показано в работе [11], раскладывая, следуя Хиллу [12], солнечный потенциал по величинам $\frac{\tilde{x}}{R}$ (которые малы в окрестности первой точки либрации), вводя специальную систему единиц и переходя во вращающуюся систему координат с помощью канонической замены переменных с производящей функции поворота

$$S(\tilde{x}, y, t) = y_1(\tilde{x}_1 \cos \omega t + \tilde{x}_2 \sin \omega t) + y_2(-\tilde{x}_1 \sin \omega t + \tilde{x}_2 \cos \omega t),$$

получаем аппроксимированные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в виде, который принято называть хилловским приближением или уравнениями модели Хилла [10, 11]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2, & \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1, & \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1, \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты КА во вращающейся системе координат, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — импульсы. Расстояние между центром масс Земли и точкой либрации (примерно 0.01 а.е.) берется в качестве единицы расстояния. Единица времени берется из соображения, что время обращения Земли вокруг Солнца (1 год) равно 2π единиц времени ($\omega = 1$). В этом случае единица скорости составляет 303.14 м/с, а единица ускорения — $5.93 \cdot 10^{-5}$ м/с².

Точка либрации L_1 в системе (2) является стационарной с координатами

$$x^* = (1, 0, 0), \quad y^* = (0, 1, 0).$$

Система (2) имеет гамильтонов вид с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{\|x\|^2}{2} + x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Уравнения управляемого движения записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2, & \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1, & \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3 + u_3. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [10] был предложен закон управления

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= a(x_1 - 1), \quad a < -9, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) видно, что управляющее воздействие реализуется по линии Солнце—Земля. Таким образом, управление в системе (3) будет входить только при \dot{y}_1 . В работах [11, 13] показано, что управлением $u_1(x) = a(x_1 - 1)$ при $a < -9$ обеспечивается устойчивость по Ляпунову стационарного решения (x^*, y^*) системы (2). Действительно, система (3) с управлением (4) имеет гамильтонову форму. Гамильтониан записывается следующим образом:

$$H^*(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{\|x\|^2}{2} + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{a}{2} (x_1 - 1)^2.$$

В линеаризованном случае гамильтониан $H^*(x, y)$ будет иметь вид

$$H_{\text{lin}}^*(x, y) = \frac{1}{2} (y_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} (y_1 + x_2)^2 + \frac{3}{2} x_2^2 - \left(\frac{9+a}{2}\right) (x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} y_3^2 + 2x_3^2,$$

откуда видно, что при $a < -9$ квадратичная форма $H_{\text{lin}}^*(x, y)$ положительно определена. Полная производная от гамильтониана $H^*(x, y)$ равна нулю, и из положительной определенности квадратичной формы $H_{\text{lin}}^*(x, y)$ следует, что гамильтониан $H^*(x, y)$ будет функцией Ляпунова системы (3), (4) в некоторой окрестности точки либрации в фазовом пространстве. Таким образом, управление $u_1(x_1)$ обеспечивает устойчивость по Ляпунову стационарного решения (x^*, y^*) управляемой системы (3), (4).

Приведем уравнения движения в случае, когда управление реализуется с помощью солнечного паруса [6–8]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2, & \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 - 2k \frac{pS}{m} \cos^3 \varphi - (1 - k) \frac{pS}{m} \cos \varphi, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1, & \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1 - 2k \frac{pS}{m} \cos^3 \varphi \sin \varphi, \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{aligned}$$

где m — масса паруса; S — его площадь; p — солнечное давление; k — коэффициент отражательной способности, $k \in [0, 1]$; φ — угол ориентации паруса (рис. 2). При $k = 1$ парус имеет идеальную отражательную поверхность, при $k = 0$ обладает абсолютно черной поверхностью.

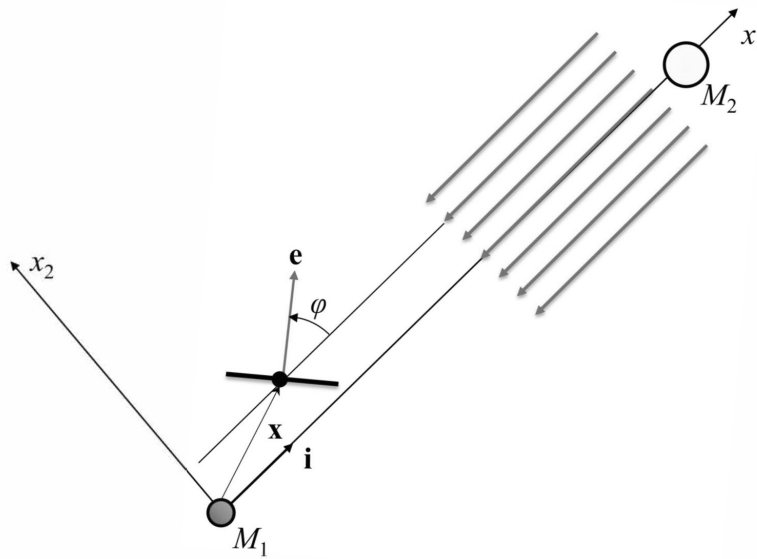


Рис. 2. Модель солнечного паруса

Управляемое движение с солнечным парусом в случае, когда поверхность паруса перпендикулярна солнечным лучам (угол $\varphi = 0$), описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2, & \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 - k\frac{pS}{m} - \frac{pS}{m}, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1, & \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1, \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

в соответствии с законом управления (4). Коэффициент отражательной способности k будем рассматривать как элемент управления. Далее управление, с помощью которого обеспечивается устойчивость по Ляпунову, реализуется через давление солнечных лучей. Далее, будем считать, что отражательная способность паруса — это управление, реализующее закон $u_1(x) = a(x_1 - 1)$ при $a < -9$. В связи с тем, что давление солнечных лучей направлено от Солнца, стационарная точка смещается, и, согласно уравнениям (3)–(5), закон управления запишется так:

$$\tilde{u}_1(x) = a(x_1 - 1 - \delta) = -k\frac{pS}{m} - \frac{pS}{m}, \quad (6)$$

где константа $\delta > 0$ связана с фотогравитационной точкой либрации при коэффициенте отражения $k = 0.5$.

3. Численное моделирование. Рассмотрим движение КА с солнечным парусом с массой $m = 5$ кг и площадью паруса $S = 32$ м². Приведем начальные данные для траектории движения КА, представленной на рис. 3:

$$x(0) = (1.093, 0.001, 0), \quad y(0) = (0, 1.089, 0).$$

Движение происходит в плоскости эклиптики. Рисунок 3 иллюстрирует управляемое движение КА в окрестности фотогравитационной точки либрации, на рисунке

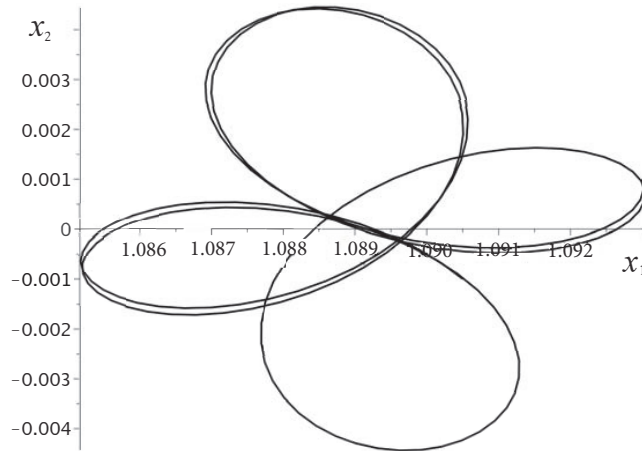


Рис. 3. Траектория управляемого движения солнечного паруса

показана явная картина устойчивости по Ляпунову, временной интервал представленного графика — порядка 20 месяцев, а коэффициент в управлении $a = -12$. Управление (6) обеспечивает устойчивость по Ляпунову движения КА в окрестности фотогравитационной точки либрации. При определении фотогравитационной точки либрации коэффициент $k = 0.5$, тогда для представленного примера параметр $\delta = 0.089116540$. Координаты фотогравитационной точки либрации для этого примера имеют вид

$$x^* = (1.089116540, 0, 0), \quad y^* = (0, 1.089116540, 0).$$

На рис. 4, а приведен график функции управления на временном промежутке порядка 20 месяцев.

На рис. 4, б показана зависимость коэффициента отражения k от времени. Значения коэффициента отражения в представленном моделировании не выходят за границы отрезка $[0, 1]$. Однако при других начальных данных, более удаленных от точки либрации, чем на несколько тысяч километров, уже наблюдается выход величины коэффициента отражения из отрезка $[0, 1]$. Таким образом, возникает задача управляемости или построения окрестности L_1 в фазовом пространстве, в которой задача удержания КА решается с помощью солнечного паруса с изменяющейся отражательной способностью и заданной парусностью.

4. Заключение. В настоящей работе рассмотрена возможность стабилизации орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце—Земля с помощью сил светового давления. При этом отказались от управления пространственной ориентацией солнечного паруса, поскольку на практике реализация такого управления технически весьма сложна. В описываемой постановке поверхность солнечного паруса расположена перпендикулярна направлению солнечных лучей, а управлением является отражающая способность солнечного паруса.

Основной вывод из численного моделирования следующий: КА с парусностью $64 \text{ см}^2/\text{г}$ можно удерживать, изменяя отражательную способность, в окрестности фотогравитационной точки либрации на расстоянии несколько тысяч километров от этой точки. Положение самой фотогравитационной точки определяется параметром δ , задающим ее отклонение от точки либрации L_1 .

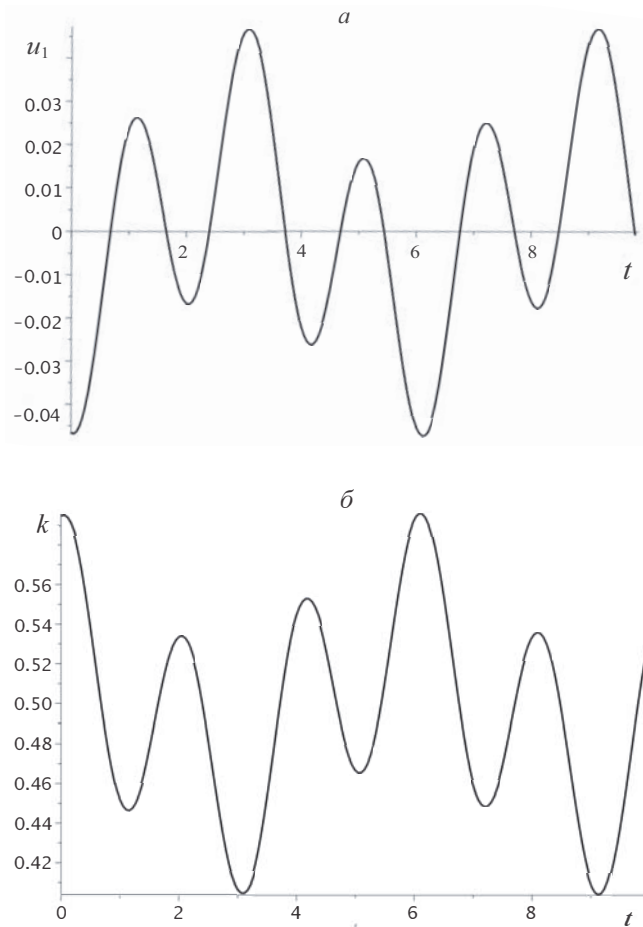


Рис. 4. Графики управления (а) и управляющего параметра (б)

Литература

1. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 320 с.
2. McInnes C. R. Solar sailing // Technology, dynamics and mission applications. Berlin; London: Springer, 1999. 296 p. (Springer-Praxis Series in Space Science and Technology).
3. Лукьянов С. С. Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации круговой задачи трех тел с помощью сил светового давления // Космические исследования. 1981. Т. 19. № 4. С. 518–527.
4. Назиров Р. Р., Эйсмонт Н. А., Чумаченко Е. Н., Данлэм Д. У., Логашина И. В., Федоренко А. Н. Управление группировкой космических аппаратов в окрестности солнечно-земных коллинеарных точек либрации с помощью солнечного паруса // Вестник машиностроения. 2013. № 2. С. 43–46
5. Bookless J., McInnes C. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion // Acta Astronautica. 2008. Vol. 62. P. 159–176.
6. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Controlled motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point // Astronomy Letters. 2020. Vol. 46. N 3. P. 185–192.
7. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Orbital maneuvering in the vicinity of collinear libration points using light pressure forces // Astronomy Letters. 2021. Vol. 47. N 10. P. 710–719.
8. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Stabilization of the orbital motion of a solar

sail in the vicinity of a collinear libration point through a change in reflectivity // *Astronomy Letters*. 2022. Vol. 48. N 8. P. 469–477.

9. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

10. Gomez G., Llibre J., Martinez R., Simo C. Dynamics and mission design near libration points. Vol. 1. Fundamentals: The case of collinear libration points. Singapore: World Scientific Publ., 2001. 462 p.

11. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L^1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Сер. 10. 2005. Вып. 1–2. С. 192–198.

12. Hill G. W. Researches in the lunar theory // *American Journal of Mathematics*. 1878. Vol. 1. P. 5–26.

13. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. On controllability region of orbital motion near L^1 // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 9. P. 7229–7236.

Статья поступила в редакцию 27 января 2024 г.

Статья принята к печати 12 марта 2024 г.

Контактная информация:

Шмыров Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.shmyrov@sbpu.ru

Шмыров Василий Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.shmyrov@sbpu.ru

Шиманчук Дмитрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.shimanchuk@sbpu.ru

Controlling the orbital motion of the spacecraft near the libration point by changing the solar sail reflectivity*

A. S. Shmyrov, V. A. Shmyrov, D. V. Shymanchuk

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Shmyrov A. S., Shmyrov V. A., Shymanchuk D. V. Controlling the orbital motion of the spacecraft near the libration point by changing the solar sail reflectivity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 298–306. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.214> (In Russian)

The article considers the strategy of keeping the spacecraft in the vicinity of the unstable Lagrange point (libration point) of the Sun–Earth system. This strategy involves the use of special management. This control acts collinearly to the Sun–Earth line and ensures Lyapunov stability of the orbital motion. The implementation of such control is proposed using a solar sail. The advantages and difficulties of such a strategy are discussed.

Keywords: three bodies problem, libration point, solar sail, control, keeping.

References

1. Polyakhova E. N. *Kosmicheskii polet s solnechnym parusom [Space flight with solar sail]*. Moscow, Book house “LIBROKOM”, 2011, 320 p. (In Russian)

2. McInnes C. R. *Solar sailing / Technology, dynamics and mission applications*. Berlin, London, Springer, 1999, 296 p. (Springer-Praxis Series in Space Science and Technology).

3. Lukyanov S. S. Upravleniye dvizheniyem kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearной toчки libratsii krugovoy zadachi trekh tel s pomoshch'yu sil svetovogo davleniya [Control of the motion of a spacecraft in the vicinity of the collinear libration point of a circular three-body problem using light pressure forces]. *Space Research*, 1981, vol. 19, no. 4, pp. 518–527. (In Russian)

* This Research was supported by Saint Petersburg State University project N 95438429.

4. Nazirov R. R., Eismont N. A., Chumachenko E. N., Danhem D. U., Logashina I. V., Fedorenko A. N. Upravleniye gruppировkoy kosmicheskikh apparatov v okrestnosti solnechno-zemnykh kollinearnykh toчек libratsii s pomoshch'yu solnechnogo parusa [Control of a grouping of spacecraft in the vicinity of the solar-terrestrial collinear libration points using a solar sail]. *Vestnik of Mechanical Engineering*, 2013, no. 2, pp. 43–46. (In Russian)
5. Bookless J., McInnes C. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion. *Acta Astronautica*, 2008, vol. 62, pp. 159–176.
6. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Controlled motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point. *Astronomy Letters*, 2020, vol. 46, no. 3, pp. 185–192.
7. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Orbital maneuvering in the vicinity of collinear libration points using light pressure forces. *Astronomy Letters*, 2021, vol. 47, no. 10, pp. 710–719.
8. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Stabilization of the orbital motion of a solar sail in the vicinity of a collinear libration point through a change in reflectivity. *Astronomy Letters*, 2022, vol. 48, no. 8, pp. 469–477.
9. Markeev A. P. *Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike* [The libration points in celestial mechanics and space dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 312 p. (In Russian)
10. Gomez G., Llibre J., Martinez R., Simo C. *Dynamics and mission design near libration points*. Vol. 1. *Fundamentals: The case of collinear libration points*. Singapore, World Scientific Publ., 2001, 462 p.
11. Shmyrov V. A. Stabilizatsiya upravlyayemogo orbital'nogo dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnoy toчки libratsii L^1 [Stabilization of the controlled orbital motion of a spacecraft in the vicinity of the collinear libration point L^1]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Series 10*, 2005, iss. 1–2, pp. 192–198. (In Russian)
12. Hill G. W. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, 1878, vol. 1, pp. 5–26.
13. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. On controllability region of orbital motion near L^1 . *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, pp. 7229–7236.

Received: January 25, 2024.

Accepted: March 12, 2024.

Authors' information:

Alexander S. Shmyrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.shmyrov@spbu.ru

Vasiliy A. Shmyrov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor;
v.shmyrov@spbu.ru

Dmitry V. Shymanchuk — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor;
d.shymanchuk@spbu.ru