Оценка альтернатив на основе парных сравнений в задаче об определении лидера группы

Филатова А.А., студентка 4-го курса бакалавриата СПбГУ
rii.filatova@gmail.com,
Кривулин Н.К., д.ф.-м.н. профессор кафедры статистического моделирования
СПбГУ nkk@math.spbu.ru

Аннотация

Рассматривается многокритериальная задача оценки альтернатив на основе парных сравнений, которая возникает при определении лидера группы. Для ее решения применяются методы анализа иерархий, взвешенных геометрических средних и log-чебышевской аппроксимации. Полученные результаты сравниваются между собой.

Введение

Один из ключевых компонентов, который играет определяющую роль в достижении целей программного проекта и является залогом успешной командной работы – это правильный выбор лидера. При выборе руководителя следует учитывать несколько факторов, а значит принятие данного решения можно рассматривать как многокритериальную задачу оценки альтернатив на основе парных сравнений по нескольким неравноценным критериям.

В данной задаче n альтернатив сравниваются попарно по m критериям. Полученные результаты парных сравнений представляют в виде матрицы $\boldsymbol{A}_k$ размерности n, в соответствии с критерием $k = 1, \ldots, m$. Критерии также сравниваются попарно, и результаты этих сравнений образуют матрицу $\boldsymbol{C}$. Необходимо на основе матриц парных сравнений $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ и $\boldsymbol{C}$ определить степень предпочтения каждой альтернативы. Основная трудность при решении заключается в отсутствии единого решения, оптимального по всем критериям одновременно.

Есть целый ряд методов решения данных задач, как эвристических, (например, метод анализа иерархий Т. Саати [1]), так и аналитических (метод взвешенных геометрических средних [2], метод log-чебышевской аппроксимации [3]). Учитывая, что результаты, полученные одним методом, могут значительно отличаться от результатов другого метода [4], возникает необходимость в сравнении этих результатов для получения более разумного решения. Если результаты, полученные разными методами, практически совпадают, это свидетельствует о близости решений к оптимальному.

Постановка задачи определения лидера группы

Рассматривается задача выбора руководителя инженерной команды [5], в которой исследуются 4 кандидата (альтернативы) на должность лидера группы $((1),(2),(3),(4))$. Претенденты сравниваются попарно по 4 критериям: личные качества, академические достижения, опыт работы в команде, уровень компетентности разработчика (грейд).

Результаты парных сравнений альтернатив по каждому критерию описываются матрицами:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а результаты парных сравнений критериев — матрицей:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & 3 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/3 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x}$, который устанавливает порядок на множестве альтернатив. Решение находится тремя методами: методом анализа иерархий, методом взвешенных геометрических средних и методом log-чебышевской аппроксимации.

Метод анализа иерархий

Традиционный способ решения задачи оценки альтернатив на основе их парных сравнений – применение метода анализа иерархий Т. Саати. Он заключается в составлении взвешенной суммы нормированных главных собственных векторов матриц $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$, где в качестве весов выступают элементы нормированного главного собственного вектора матрицы $\boldsymbol{C}$.

Нормированный главный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{C}$ равен

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5476 & 0{,}1265 & 0{,}2700 & 0{,}0559 \end{pmatrix}^T.$$

Нормированные главные собственные векторы матриц $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}, \boldsymbol{A_4}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1} &\approx \begin{pmatrix} 0{,}4688 & 0{,}2684 & 0{,}0947 & 0{,}1681 \end{pmatrix}^T, \\
\boldsymbol{x_2} &\approx \begin{pmatrix} 0{,}4673 & 0{,}2772 & 0{,}1601 & 0{,}0954 \end{pmatrix}^T, \\
\boldsymbol{x_3} &\approx \begin{pmatrix} 0{,}4155 & 0{,}2926 & 0{,}1850 & 0{,}1069 \end{pmatrix}^T, \\
\boldsymbol{x_4} &\approx \begin{pmatrix} 0{,}4568 & 0{,}2799 & 0{,}1489 & 0{,}1144 \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Тогда вектор рейтингов:

$$\boldsymbol{x} = w_1\boldsymbol{x}_1 + w_2\boldsymbol{x}_2 + w_3\boldsymbol{x}_3 + w_4\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}45355 & 0{,}27669 & 0{,}13038 & 0{,}13938 \end{pmatrix}^T.$$

Вектор рейтингов, нормированный относительно максимального элемента, равен

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{AHP}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6101 & 0{,}2875 & 0{,}3073 \end{pmatrix}^T.$$

Метод взвешенных геометрических средних

Прямой способ решения многокритериальной задачи оценки альтернатив заключается в аппроксимации матриц парных сравнений по всем критериям общей согласованной матрицей. Применение логарифмической шкалы для аппроксимации позволяет получить аналитическое решение задачи непосредственно в явной форме. В случае решения задачи с помощью log-евклидовой аппроксимации полученный вектор $\boldsymbol{x}$ называют решением многокритериальной задачи методом взвешенных геометрических средних.

Для нахождения решения нужно вычислить нормированный относительно суммы элементов вектор геометрических средних $\boldsymbol{w} = (w_i)$ матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев. Далее необходимо определить векторы $\boldsymbol{x}_i$ геометрических средних матриц $\boldsymbol{A}_i$ парных сравнений альтернатив. Заметим, что геометрическое среднее вычисляется по строкам матриц.

Элементы каждого вектора $\boldsymbol{x}_i = (x_{j,i})$ возводятся в степень w_i, а затем результат перемножения элементов этих векторов, соответствующих индексу j, берется в качестве элемента вектора рейтингов $\boldsymbol{x}$.

Нормированный вектор геометрических средних матрицы $\boldsymbol{C}$ выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5462 & 0{,}1276 & 0{,}2698 & 0{,}0564 \end{pmatrix}^T.$$

Векторы геометрических средних для матриц $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}, \boldsymbol{A_4}$ парных сравнений:

$$\boldsymbol{x_1} \approx \begin{pmatrix} 2{,}2134 & 1{,}3161 & 0{,}4387 & 0{,}7825 \end{pmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{x_2} \approx \begin{pmatrix} 2{,}2134 & 1{,}3161 & 0{,}7598 & 0{,}4518 \end{pmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{x_3} \approx \begin{pmatrix} 1{,}8612 & 1{,}3161 & 0{,}8409 & 0{,}4855 \end{pmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{x_4} \approx \begin{pmatrix} 2{,}0598 & 1{,}2779 & 0{,}7071 & 0{,}5373 \end{pmatrix}^T.$$

Получим вектор рейтингов:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{1,1}^{w_1} \cdot x_{1,2}^{w_2} \cdot x_{1,3}^{w_3} \cdot x_{1,4}^{w_4} \\ x_{2,1}^{w_1} \cdot x_{2,2}^{w_2} \cdot x_{2,3}^{w_3} \cdot x_{2,4}^{w_4} \\ x_{3,1}^{w_1} \cdot x_{3,2}^{w_2} \cdot x_{3,3}^{w_3} \cdot x_{3,4}^{w_4} \\ x_{4,1}^{w_1} \cdot x_{4,2}^{w_2} \cdot x_{4,3}^{w_3} \cdot x_{4,4}^{w_4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}1037 & 1{,}3139 & 0{,}5762 & 0{,}6279 \end{pmatrix}^T.$$

После нормирования относительно максимального элемента его можно записать как

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{WGM}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6245 & 0{,}2739 & 0{,}2985 \end{pmatrix}^T.$$

Метод log-чебышевской аппроксимации

Еще один метод решения, основанный на аппроксимации матриц парных сравнений, – это метод log-чебышевской аппроксимации с использованием тропической оптимизации.

Элементы тропической математики

Тропическая (идемпотентная) математика изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями [6]. При применении такой операции к одному и тому же аргументу результатом является тот же самый аргумент.

Решение задачи парных сравнений будем рассматривать в терминах $\max$–алгебры $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_+, \max, \times, 0, 1)$, где $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, умножение определено как обычно, а сложение является идемпотентной операцией и определено как максимум (обозначается знаком $\oplus$).

В векторных и матричных операциях используются обычные правила, но с заменой арифметического сложения на операцию максимума.

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ размерности $n \times n$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

Спектральный радиус $\boldsymbol{A}$ – скаляр, определяемый формулой

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n} (\boldsymbol{A}^n).$$

Если $\lambda \leqslant 1$, то для $\boldsymbol{A}$ можно построить матрицу Клини

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Решение задачи

Найдем решение с помощью процедуры, предложенной в [7].

Определим спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{C}$, который равняется

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{C} \oplus \operatorname{tr}^{1/2} \left(\boldsymbol{C}^2\right) \oplus \operatorname{tr}^{1/3} \left(\boldsymbol{C}^3\right) \oplus \operatorname{tr}^{1/4} \left(\boldsymbol{C}^4\right) = 27^{1/4}/7^{1/4}.$$

Найдем матрицу Клини, определяющую рейтинг весов критериев:

$$\left(\lambda^{-1}\boldsymbol{C}\right)^* = \boldsymbol{I} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C} \oplus \lambda^{-2}\boldsymbol{C}^2 \oplus \lambda^{-3}\boldsymbol{C}^3 =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3^{1/2} \cdot 7^{1/2} & 3^{1/4} \cdot 7^{1/4} & 3^{3/4} \cdot 7^{3/4} \\ 3^{-1/2} \cdot 7^{-1/2} & 1 & 3^{-1/4} \cdot 7^{-1/4} & 3^{1/4} \cdot 7^{1/4} \\ 3^{-1/4} \cdot 7^{-1/4} & 3^{1/4} \cdot 7^{1/4} & 1 & 3^{1/2} \cdot 7^{1/2} \\ 3^{-3/4} \cdot 7^{-3/4} & 3^{-1/4} \cdot 7^{-1/4} & 3^{-1/2} \cdot 7^{-1/2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы Клини коллинеарны — в качестве вектора весов можно взять любой, например,

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{-1/2} \cdot 7^{-1/2} & 3^{-1/4} \cdot 7^{-1/4} & 3^{-3/4} \cdot 7^{-3/4} \end{pmatrix}^T.$$

Для нахождения рейтингов альтернатив составим взвешенную тропическую сумму матриц $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$ в виде

$$\boldsymbol{B} = w_1\boldsymbol{A}_1 \oplus w_2\boldsymbol{A}_2 \oplus w_3\boldsymbol{A}_3 \oplus w_4\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 2 \cdot 3^{-1/4} \cdot 7^{-1/4} \\ 1/4 & 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}$ равен

$$\mu = \operatorname{tr} \boldsymbol{B} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}\left(\boldsymbol{B}^2\right) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}\left(\boldsymbol{B}^3\right) \oplus \operatorname{tr}^{1/4}\left(\boldsymbol{B}^4\right) = 2^{1/2} \cdot 3^{3/8} \cdot 7^{-1/8}.$$

Найдем матрицу Клини:

$$\boldsymbol{B}^* = \left(\mu^{-1}\boldsymbol{B}\right)^* = \boldsymbol{I} \oplus \mu^{-1}B \oplus \mu^{-2}B^2 \oplus \mu^{-3}B^3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^{1/2} \cdot 7^{1/8} \cdot 3^{-3/8} & 2 \cdot 3^{1/4} \cdot 7^{1/4} & 8^{1/2} \cdot 7^{1/8} \cdot 3^{-3/8} \\ 7^{3/8} \cdot 2^{-1/2} \cdot 3^{-9/8} & 1 & 3^{1/4} \cdot 7^{1/4} & 2^{1/2} \cdot 7^{1/8} \cdot 3^{-3/8} \\ 7^{1/8} \cdot 2^{-1/2} \cdot 3^{-11/8} & 7^{1/4} \cdot 3^{-7/4} & 1 & 2^{1/2} \cdot 3^{-5/8} \cdot 7^{-1/8} \\ 7^{1/4} \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3/4} & 7^{3/8} \cdot 2^{-1/2} \cdot 3^{-9/8} & 3^{5/8} \cdot 7^{1/8} \cdot 2^{-1/2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Не все столбцы $\boldsymbol{B}^*$ коллинеарны, следовательно, необходимо вычислить наилучший и наихудший дифференцирующие векторы. Наилучшим считается столбец данной матрицы, для которого отношение максимального и минимального элементов является наибольшим. Соответственно наихудший – тот столбец, где это отношение наименьшее.

Вычислим их с помощью формул, приведенных в статье [3].

Для определения наилучшего дифференцирующего вектора найдем среди нормированных столбцов $\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{b}_j^*)$ следующие:

$$\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{b}_k^* \left\|\boldsymbol{b}_k^*\right\|^{-1}, \quad k = \arg\max_{1 \le j \le n} \left\|\boldsymbol{b}_j^*\right\| \left\|\left(\boldsymbol{b}_j^*\right)^-\right\|.$$

Последовательно вычислим:

$$\|\boldsymbol{b}_1^*\| \left\|(\boldsymbol{b}_1^*)^-\right\| = \|\boldsymbol{b}_2^*\| \left\|(\boldsymbol{b}_2^*)^-\right\| = 7^{-1/8} \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{11/8},$$

$$\|\boldsymbol{b}_3^*\| \left\|(\boldsymbol{b}_3^*)^-\right\| = \|\boldsymbol{b}_4^*\| \left\|(\boldsymbol{b}_4^*)^-\right\| = 2 \cdot 3^{1/4} \cdot 7^{1/4}.$$

Максимальное значение соответствует $k = 1$ и $k = 2$, получим, что

$$\boldsymbol{x_1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4262 & 0{,}1991 & 0{,}3568 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{x_2} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8371 & 0{,}1991 & 0{,}3568 \end{pmatrix}^T.$$

Наилучшим дифференцирующим вектором будет вектор с наименьшими координатами. В данном случае им является $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}'_{\mathrm{LCA}}$, так как он лучше различает первую и вторую альтернативы.

Наихудший вектор вычисляется с помощью следующей формулы и определяется однозначно:

$$\boldsymbol{x}''_{\mathrm{LCA}} = (\boldsymbol{1}^T \left(\mu^{-1}\boldsymbol{B}\right)^*)^- \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8370 & 0{,}2336 & 0{,}4185 \end{pmatrix}^T.$$

Заключение

В результате решения задачи об определении лидера группы на основе парных сравнений альтернатив (1), (2), (3), (4) по 4 критериям было получено 4 решения: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{AHD}}$ методом анализа иерархий, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{WGD}}$ методом взвешенных геометрических средних, наилучший $\boldsymbol{x}'_{\mathrm{LCA}}$ и наихудший $\boldsymbol{x}''_{\mathrm{LCA}}$ дифференцирующие векторы методом log-чебышевской аппроксимации. Решения задают одинаковый порядок альтернатив:

$$(1) \succ (2) \succ (4) \succ (3).$$

Таким образом, найденный вектор можно считать оптимальным.

Список литературы

[1] Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий // Пер. с англ. Вачнадзе Р. Г. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.

[2] Crawford G., Williams C. A note on the analysis of subjective judgment matrices // J. Math. Psych. 1985. Vol. 29, N 4. P. 387–405.

[3] Krivulin N. Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation // Int. J. Approx. Reason. 2024. Vol. 169, P. 109168.

[4] Tran N. M. Pairwise ranking: Choice of method can produce arbitrarily different rank order // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438, N 3. P. 1012–1024.

[5] Muhisn Z. A. A., Omar M., Ahmad M., Muhisn S. A. Team leader selection by using an Analytic Hierarchy Process (AHP) technique // J. Softw. 2015. Vol. 10, N 10. P. 1216–1227.

[6] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем // СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 255 с.

[7] Krivulin N., Sergeev S. Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31-51.