

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН
КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2023)**

**МАТЕРИАЛЫ
XXII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
4–9 декабря 2023 г.**

Часть 2

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2024

УДК 519

ББК 22.17

И74

Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (4–9 декабря 2023 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2024. — Часть 2. — 102 с.

ISBN 978–5–907572–40–9

Сборник содержит избранные материалы XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, интеллектуальные системы и робототехника, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование технологических процессов.

Материалы подготовлены при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Р е д к о л л е г и я:

С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор

Д.В. Семенова, кандидат физико-математических наук, доцент

С.В. Шидловский, доктор технических наук

Е.А. Фёдорова, кандидат физико-математических наук

Д.В. Шашев, кандидат технических наук

О.Д. Лизюра

ISBN 978–5–907572–40–9

© Авторы. Текст, 2024

© Томский государственный университет. Оформление.
Дизайн, 2024

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA
V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL
SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
KARSHI STATE UNIVERSITY

**INFORMATIONAL TECHNOLOGIES
AND MATHEMATICAL MODELLING
(ITMM-2023)**

**PROCEEDINGS
of the 22th International Conference
named after A. F. Terpugov
2023 December, 4–9**

Part 2

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2024

UDC 519
LBC 22.17
I60

Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2023):
Proceedings of the 22th International Conference named after A. F.
Terpugov (2023 December, 4–9). — Tomsk: Tomsk State University
Publishing, 2024. — Part 2. — 102 p.

ISBN 978–5–907572–40–9

This volume presents selected papers from the 22th International
Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new
results in the following areas: queuing theory and its applications, intelligent
systems and robotics, information technology and software engineering,
mathematical and computer modeling of technological processes.

The proceedings was published by supporting of the Tomsk State
University Development Programme (Priority-2030).

UDC 519
LBC 22.17

E d i t o r s:

S.P. Moiseeva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor.

D.V. Semenova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor.

S.V. Shidlovsky, Doctor of Technical Sciences.

E.A. Fedorova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

D.V. Shashev, Candidate of Technical Sciences.

O.D. Lizyura.

ISBN 978–5–907572–40–9

© Authors. Text, 2024
© Tomsk State University
Publishing. Design, 2024

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. М. Маркович

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Россия*

Статья представляет основные положения пленарного доклада на X-й международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем" в Томском государственном университете, 26–29 мая 2023 г. Томск. В работе дан обзор результатов и областей применения теории экстремальных величин, сравнительно нового и быстро развивающегося раздела теории вероятностей и статистики. **Ключевые слова:** случайный граф, сообщества, хвостовой индекс, экстремальный индекс.

Введение

Актуальность теории экстремальных величин подтверждается большим числом монографий, например, [1], [3], [4], [4], [17], и статей. Среди ее базовых теорем следует упомянуть теорему Фишера-Типшета-Гнеденко и теорему Пикандса [1], [4], [6]. Указанная теория имеет широкое применение в случайных графах, исследовании климата, экологии, геологии, финансов и страхования, телекоммуникаций, социально-информационных и энергетических систем, эпидемиологии, астрофизики и др. Среди новых направлений - машинное обучение и распознавание нетипичных аномальных наблюдений, эволюция случайных графов и сетей, перколяция, графические модели для исследования многомерных случайных процессов. Известно, что в реальных Веб графах характеристики влиятельности узлов такие, как число входящих в узел связей, Пейджранги узлов имеют распределения с тяжелыми хвостами.

Важной практической задачей является идентификация тяжелых хвостов в данных. Среди статистических методов такого распознавания можно назвать непараметрические методы оценивания индекса экстремальной величины, функции среднего превышения уровня, графики отношения максимумов к суммам, графики квантиль-квантиль [6].

Среди новых направлений и задач теории экстремальных величин нужно отметить такие, как изучение кластеров превышения уровня для

случайных последовательностей (временных рядов), исследование случайных сетей и моделирующих их случайных графов, моделирование их эволюции, распространение информации в сетях, выявление лидирующих сообществ, влияние стратегии эволюционирования, удаления узлов и связей в ходе эволюции на распределения мер влиятельности узлов [4], [11], [6], [15], [23], машинное обучение для разбиения на сообщества, распознавания аномальных наблюдений (Machine learning for anomaly detection) [18], [21], анализ рисков в климатологии, гидрологии, финансах, страховании, медицине и др.

Среди новых результатов автора следует отметить следующие:

- 1) распределения размеров кластеров и межкластеров превышения достаточно высокого уровня случайной последовательностью, распределения продолжительности кластеров и интервалов возврата [7], [8], [9];
- 2) получение хвостовых и экстремальных индексов сумм и максимумов случайных последовательностей случайной длины [10], [12];
- 3) выделение лидирующих узлов в сообществах случайных графов для быстрого распространения информации [11];
- 4) оценивание хвостового индекса Пейджрангов узлов случайных графов, как меры их влиятельности [13];
- 5) классификация случайных графов, прогноз изменения хвостовых и экстремальных индексов характеристик влиятельности узлов графов в ходе эволюции в работе [6] с использованием результатов работ [10], [12].

Обсудим более подробно применение теории экстремальных величин в случайных графах и отметим некоторые открытые проблемы.

1. Разбиение на сообществ случайных графов

Разбиение на сообщества является одной из наиболее важных задач в анализе случайных графов. Сообществом (community) называется подграф случайного графа, где узлы связаны друг с другом большим числом связей, и мало связаны с другими сообществами.

Важным предположением для прогноза и оценивания хвостового и экстремального индексов мер влиятельности вновь присоединенных узлов, как следует из работы [6], является задача тестирования стационарности и зависимости сообществ. Методы тестирования стационарности распределений сообществ и их зависимости при различных методах разбиения на сообщества пока недостаточно разработаны.

Одним из подходов для тестирования сообществ на стационарность распределения может быть сведение к тестированию случайных после-

довательностей, возникающих на случайных графах. Для этого могут быть использованы случайные блуждания для сбора информации о характеристиках влиятельности (например, числа входящих связей узла (node in-degree) или Пейджерангов (PageRank)) узлов сообщества, которые определяют соответствующие случайные последовательности. Еще один подход - это разбиение сообщества на более мелкие подграфы, рассматривая их как блоки данных. В каждом блоке можно оценить индекс экстремальной величины или его обратную величину, хвостовой индекс, и понять, насколько сильно меняется его величина. Может быть применен тест на изменение хвостового индекса, основанный на модифицированной статистике Филлипса и Лоретана (Phillips & Loretan), представленной в работе [19], см. также [15], секцию 4.2.

Для тестирования взаимной зависимости элементов из двух сообществ могут быть использованы коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена, а также корреляция расстояний (distance correlation), которая является обобщением коэффициента Пирсона для линейных и нелинейных зависимостей, см. работу [20]. Может быть использован метод, основанный на трансформации экзаменуемых случайных векторов к полярным координатам и проверке значений эмпирической функции распределения для полярных углов, см. [22]. Поскольку нумерация узлов в сообществах не определена, то необходимо предложить (или использовать готовый) перестановочный тест, который может отталкиваться от результатов работы [20]. Указанные методы тестирования зависимости могут применяться и к случайным векторам характеристик узлов, зависимость которых неочевидна.

2. Классификация эволюционирующих случайных графов

Важным направлением изучения эволюционирующих случайных графов является классификация их узлов. Одна из задач состоит в предложении нового метода разбиения случайного графа на сообщества с использованием алгоритма детекции аномальных наблюдений, основанного на фундаментальной для теории экстремальных величин теореме Фишера-Типпета-Гнеденко. В ходе эволюции к случайному графу могут присоединяться новые узлы и возникать новые связи между ними и существующими узлами графа. Пусть эволюция начинается с некоторого начального графа, который каким-то методом разбит на сообщества, которые не обязательно стационарно распределены.

Оценим Пейджеранг каждого узла. Известно, что Пейджеранг имеет распределение с тяжелым правильно меняющимся хвостом распределения (regularly varying tail): $P\{X_i > x\} = \ell(x)x^{-\alpha}$, где α - хвостовой индекс, $\ell(x)$ - медленно меняющаяся функция. По полученным значени-

ям Пейджрангов оценим индекс экстремальной величины $\gamma = 1/\alpha$ (или α) одним или несколькими непараметрическими оценками, см. например монографию [6]. Заметим, что в сообществе могут находиться узлы с различными распределениями, хотя и с одним α (за счет различных функций $\ell(x)$).

Новые узлы, присоединяющиеся к сети в ходе эволюции, могут присоединяться связями к различным сообществам. В работе [6] доказано, что Пейджранги новых узлов имеют распределение с хвостовым индексом сообщества с наименьшим хвостовым индексом, к которому есть хотя бы одна связь у нового узла.

Но к какому сообществу следует отнести новый узел, будет ли он образовывать новое сообщество с распределением, которое еще не наблюдается в сети? Для решения этой задачи можно воспользоваться методами машинного обучения, основанными на результатах теории экстремальных величин: EVM (the extreme value machine), предложенным в [18] и методом GPDC (the generalized Pareto distribution classifier), предложенным в [21].

Алгоритмы детекции аномальных наблюдений методами EVM и GPDC можно использовать для разбиения сети на случайное число сообществ. Обычно число сообществ задается фиксированным изначально. Для применения EVM и GPDC к новой задаче, необходимо определить расстояния (в простейшем случае евклидовы) между новым узлом и всеми узлами обучающей выборки графа.

3. Оценивание скорости передачи информации в случайных сетях

Следующая важная задача - оценивание скорости передачи информации в случайных сетях от узлов, ею обладающих, к узлам без информации.

Задача быстрой передачи информации в сети имеет важное значение, например, для распределенных вычислений в компьютерных сетях и в социальных сетях. Для распространения сообщения в направленном графе необходимо получить предельное математическое ожидание числа узлов, получивших сообщение за заданное время в ходе эволюции направленного графа методом линейного предпочтительного присоединения с равномерным удалением узлов на каждом шаге, и оценить вероятность потери сообщения в сети из-за удаления узлов.

Основной подход может опираться на работу [16], где предложен алгоритм SPREAD для передачи сообщений между узлами в ненаправленных графах. Открытым вопросом является исследование распространения сообщения в направленном графе при эволюции с помощью схем

alpha, beta, gamma метода линейного предпочтительного присоединения, предложенного в [2] и развитого в [23]. В отличие от работы [16], где множество узлов фиксированное, в этой задаче число узлов постоянное в виду удаления одного узла при прибавлении одного нового, но состав узлов разный. Еще отличие в том, что теперь сообщение может не передаваться между узлами. К примеру, любая из схем предпочтительного присоединения добавляет в граф с определённой вероятностью одну новую связь на каждом шаге эволюции: alpha- и gamma-схемы создадут связь между существующим узлом и новым добавленным, beta-схема – между существующими узлами. Таким образом, чтобы сообщение передавалось дальше, нужно чтобы была создана связь от узла без сообщения к узлу с сообщением, и этому удовлетворяют alpha- и beta-схемы. Однако возможна ситуация, что beta-схема создаст связь между двумя узлами с сообщением или без него, что не приведёт к росту числа узлов с сообщением и замедлит распространение. Необходимо исследовать влияние удаления узлов и связей на распространение сообщения в виду появления изолированных узлов, на пропорцию узлов, которым передается сообщение, и потерю сообщения из сети. Предстоит получить: (а) вероятность потери сообщения в сети и минимальное число шагов, когда это может случиться; (б) предельное математическое ожидание числа узлов, получивших сообщение; (в) максимальное число узлов, получивших сообщение в течение заданного времени.

Заключение

Данная статья представляет собой краткое изложение пленарного доклада на X-й международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем", проводимой Томским государственным университетом 26–29 мая 2023 г. Более подробно с материалами доклада можно ознакомиться на сайте <https://itmmconf.tsu.ru/МРОИЕС2023>

Работа проводилась при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00177 «Моделирование, прогноз и оценивание экстремальных характеристик динамических случайных графов с применением к информационно-телекоммуникационным сетям» <https://www.rscf.ru/project/22-21-00177/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beirlant J., Goegebeur, Y., Teugels, J., Segers, J.* Statistics of Extremes: Theory and Applications. Chichester, West Sussex: Wiley, 2004.

2. *Bollobas B., Borgs C., Chayes J., Riordan O.* Directed Scale-Free Graphs, 2003, Society for Industrial and Applied Mathematics. USA, SODA '03, pp. 132–139. <https://dl.acm.org/doi/10.5555/644108.644133>
3. *Embrechts P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, New York, 1997.
4. *Van der Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2017.
5. *Leadbetter M.R., Lingren G., Rootz én, H.* Extremes and Related Properties of Random Sequence and Processes; ch.3, Springer: New York, 1983.
6. *Markovich N.M.* Nonparametric Analysis of Univariate Heavy-Tailed data: Research and Practice. Chichester, West Sussex: Wiley, 2007.
7. *Markovich N.M.* Modeling clusters of extreme values. *Extremes*, 17(1), 97–125, 2014.
8. *Markovich N.M.* Erratum to: modeling clusters of extreme values. *Extremes*, 19(1), 139–142, 2016.
9. *Markovich N.M.* Clusters of extremes: modeling and examples. *Extremes*, 20, 519–538, 2017.
10. *Markovich N.M., Rodionov I.V.* Maxima and sums of non-stationary random length sequences. *Extremes*, 23(3), 451–464, 2020.
11. *Markovich, N.M., Ryzhov, M.S.* Leader Nodes in Communities for Information Spreading. In Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12563; Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D., Eds.; Springer: Cham, 2020; pp. 475–484.
12. *Markovich N.M.* Weighted maxima and sums of non-stationary random length sequences in heavy-tailed models. arXiv: 2209.08485v [math.ST] 18 Sep 2022
13. *Markovich N.M., Ryzhov M.S., Vaičiulis M.* Tail Index Estimation of PageRanks in Evolving Random Graphs. *Mathematics*. 2022/ 10(16). 3026.
14. *Markovich N.M.* Extremal properties of evolving networks: local dependence and heavy tails. *Annals of Operation Research (Q1)* DOI: 10.1007/s10479-023-05175-y
15. *Markovich N.M., Vaičiulis M.* Extreme Value Statistics for Evolving Random Networks. *Mathematics*. 2023. 11(9). 2171. <https://doi.org/10.3390/math11092171>
16. *Mosk-Aoyama D., Shah D.* Computing separable functions via gossip. In Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Principles of distributed computing (PODC '06). 2006, pp. 113–122. ACM. New York, USA.
17. *Resnick S.I.* Heavy-Tail Phenomena. Springer New York, NY 2010.

18. Rudd, E.M., Jain, L.P., Scheiner, W.J., Boulton, T.E. The extreme value machine. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 2018/. 40(3).
19. Quintos, C., Fan Z., Phillips, P. C. B. Structural Change Tests in Tail Behaviour and the Asian Crisis. *The Review of Economic Studies* 2001.68. 633–663 pp.
20. Shen, C., Priebe, C. E., Vogelstein, J.T. From Distance Correlation to Multiscale Graph Correlation. *Journal of the American Statistical Association* 2020. 115(529), 280–291.
21. Vignotto E., Engelke S. Extreme value theory for anomaly detection - the GPD classifier. *Extremes*. 2020. V. 23. 501–520pp.
22. Volkovich Y., Litvak N., Zwart B. Measuring extremal dependencies in Web graphs. In *WWW '08: Proceedings of the 17th international conference on World Wide Web* April. 2008. pp. 1113–1114.
23. Wan, P., Wang, T., Davis, R. A., Resnick, S.I. Are extreme value estimation methods useful for network data. *Extremes*. 2020.V 23. 171–195pp.

Маркович Наталья Михайловна — доктор физико-математических наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия . E-mail: nat.markovich@gmail.com, markovic@ipu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Я. А. Тюленина, Е. А. Фёдорова

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе предлагается математическая модель гибридной энергосистемы (совмещающей два источника электроэнергии) в виде бесконечнолинейной системы массового обслуживания с переключением. Будем рассматривать системы $M/M/\infty$ с двумя блоками обслуживающих приборов и случайным временем работы каждого блока. В произвольный момент времени может работать только один из блоков, при переключении все обрабатываемые заявки переходят на работающий блок. Получено распределение вероятностей числа заявок в системе. Проведен численный анализ показателей системы, в том числе функции затрат, при различных параметрах модели. **Ключевые слова:** гибридная энергосистема, математическое моделирование, теория массового обслуживания

Введение

В современном мире все больше стран и компаний обращаются к альтернативным источникам энергии. К альтернативным источникам относят ту энергию, которую можно взять из возобновляемых природных ресурсов, таких как солнце, ветер [1]. Такая энергетика бережно относится к экологии, однако имеет ряд недостатков: малая единичная мощность и большие затраты на постройку и содержание оборудования. Становится очевидным необходимость использования гибридных систем энергоснабжения, сочетающих альтернативные источники энергии (например, солнечные батареи) и традиционные (центральное энергоснабжение) [2, 3].

Работ, посвященных теоретическим исследованиям эффективности гибридных энергосистем, не так много. Моделирование с помощью математической физики и технической стороны описано в работах [4, 5]. Мы предлагаем применить теорию массового обслуживания для моделирования гибридных энергосистем. В работе предлагается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с

переключением $M/M/\infty$. Электроприборы, подключаемые в сеть электропитания образуют входящий поток заявок. В системе имеется два блока с бесконечным числом обслуживающих приборов (количество устройств, одновременно подключенных к сети неограничено). Предполагаем, что включение первого блока характеризует использование городской энергоснабжения, а второго - использование альтернативной электроэнергии. Данные блоки работают попеременно: при включении блока, использующего альтернативную энергию, блок, использующий городскую сеть выключается, а когда накопленная альтернативная энергия заканчивается, использующий её блок выключается и вновь используется городская электрическая сеть. Описанная модель СМО может быть также интерпретирована как СМО с переменной интенсивностью обслуживания или СМО, функционирующее в случайной среде [6, 7].

1. Описание модели

Как упоминалось выше, в качестве математической модели системы предлагается бесконечнолинейная система массового обслуживания $M/M/\infty$ с переключением. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . системе имеется два блока с бесконечным числом обслуживающих приборов. Время работы блоков распределено по экспоненциальному закону с параметром γ_1 для первого блока и γ_0 для второго. В произвольный момент времени может работать только один из блоков, при переключении все обрабатываемые заявки переходят на работающий блок. При поступлении заявки в систему, заявка начинает обслуживание на работающем блоке. Время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_1 на первом блоке и с параметром μ_2 на втором. Схема функционирования системы представлена на рисунке 1.

Введем процессы $i(t)$ — число заявок в системе, $i = \overline{0, \infty}$, $k(t)$ — состояние блока обслуживания, $k = 1, 2$. Обозначим:

- $P(1, i, t)$ — вероятность того, что в момент времени t в системе работает первый блок и находится i заявок,
- $P(2, i, t)$ — вероятность того, что в момент времени t в системе работает второй блок и находится i заявок.

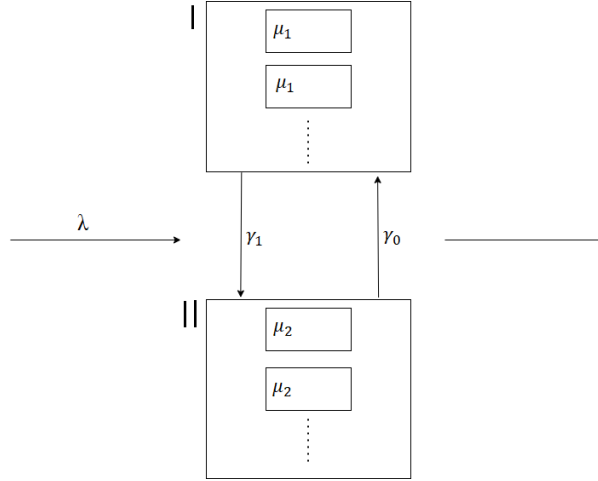


Рис. 1. Бесконечнолинейная СМО с переключением

Двумерный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является марковским. Запишем систему уравнений дифференциальных Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} = -P(1, i, t)(\lambda + i\mu_1 + \gamma_1) + P(2, i, t)\gamma_0 + \\ + P(1, i-1, t)\lambda + P(1, i+1, t)(i+1)\mu_1, \\ \frac{\partial P(2, i, t)}{\partial t} = -P(2, i, t)(\lambda + i\mu_2 + \gamma_0) + P(1, i, t)\gamma_1 + \\ + P(2, i-1, t)\lambda + P(2, i+1, t)(i+1)\mu_2. \end{cases} \quad (1)$$

Перейдем к стационарным уравнениям:

$$\begin{cases} -P(1, i)(\lambda + i\mu_1 + \gamma_1) + P(2, i)\gamma_0 + P(1, i-1)\lambda + \\ + P(1, i+1)(i+1)\mu_1 = 0, \\ -P(2, i)(\lambda + i\mu_2 + \gamma_0) + P(1, i)\gamma_1 + P(2, i-1)\lambda + \\ + P(2, i+1)(i+1)\mu_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Искомые вероятности $P(k, i)$ удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (P(1, i) + P(2, i)) = 1. \quad (3)$$

2. Матричный метод

Для решения данной задачи запишем уравнений Колмогорова в матричном виде. Пусть \mathbf{P} вектор вероятностей $P(k, i)$, \mathbf{A} – матрица коэффициентов системы уравнений (2)–(3), \mathbf{V} – вектор свободных членов,

состоящий из последнего единичного элемента и остальных нулевых. Тогда система (2)–(3) может быть записана матричным уравнением:

$$\mathbf{P} * \mathbf{A} = \mathbf{V}.$$

Вектор-строка \mathbf{P} может быть найдена с помощью обратной матрицы:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} * \mathbf{A}^T * (\mathbf{A} * \mathbf{A}^T)^{-1}.$$

Вообще говоря, введенные матрицы бесконечной размерности ($i = 0, \dots, \infty$). Для того, чтобы получить числовые характеристики, необходимо ограничить $i \leq N$, при этом выберем N достаточно большим, таким, что $P(k, N) < 10^{-14}$. При этом краевые уравнения для $i = N$ будут отличаться:

$$\begin{cases} -P(1, N)(N\mu_1 + \gamma_1) + P(2, N)\gamma_0 + P(1, N - 1)\lambda = 0, \\ -P(2, N)(N\mu_2 + \gamma_0) + P(1, N)\gamma_1 + P(2, N - 1)\lambda = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько численных примеров. Пусть $\lambda = 10$; $\mu_1 = 2$; $\mu_2 = 1$; $\gamma_0 = 0.5$; $\gamma_1 = 1$. На рисунке 2 представлено полученное с помощью описанного метода распределение вероятностей числа заявок в системе при указанных параметрах. Среднее число заявок в системе $M\{i(t)\} = 7.917$. Стационарные вероятности нахождения блока обслуживания в первом и втором состоянии равны: $R_1 = 0.333$, $R_2 = 0.667$.

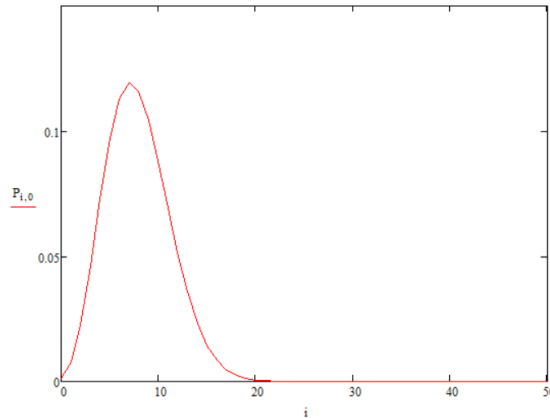


Рис. 2. Стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе $\lambda = 10$; $\mu_1 = 2$; $\mu_2 = 1$; $\gamma_0 = 0.5$; $\gamma_1 = 1$

Рассмотрим случай $\lambda = 50$; $\mu_1 = 2$; $\mu_2 = 1$; $\gamma_0 = 0.1$; $\gamma_1 = 0.1$. На рисунке 3 представлено распределение вероятностей числа заявок в системе при указанных параметрах. Как видим, наблюдается двумодальное распределение. Это можно объяснить тем, что частота переключения блоков достаточно мала, и две части распределения отражают распределения вероятностей числа заявок при интенсивностях обслуживания μ_1 и μ_2 соответственно. Стационарные вероятности нахождения блока обслуживания в первом и втором состоянии в данном случае равны: $R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.5$.

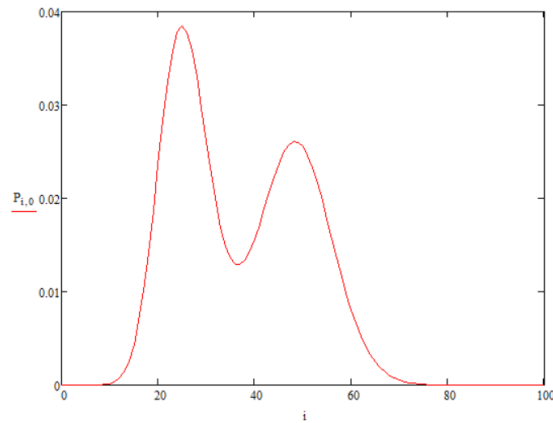


Рис. 3. Стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе $\lambda = 50$; $\mu_1 = 2$; $\mu_2 = 1$; $\gamma_0 = 0.1$; $\gamma_1 = 0.1$

3. Анализ эффективности использования гибридной системы

Для того, чтобы сделать вывод о том, сокращает ли расходы гибридная система энергоснабжения по сравнению с системой, использующей традиционную энергию, проведем численный анализ текущих затрат. Введем L_1 и L_2 — функции затрат для системы с переключением и без переключения блоков обслуживания соответственно. Будем предполагать, что единичная стоимость электроэнергии городской сети $c_1 = 1$, при использовании альтернативной энергии мы не несем расходы, но переключение между источниками тоже требует некоторых затрат $c_2 = 0.01$. Тогда L_1 и L_2 определяются следующим образом:

$$L_1 = c_1 \cdot R_1 M\{i(t)\} + c_2(\gamma_0 + \gamma_1),$$

$$L_2 = c_1 \cdot M^*\{i(t)\},$$

где $M^*\{i(t)\}$ – среднее число заявок для классической СМО $M/M/\infty$ (то есть при $\gamma_1 = 0$).

В таблице 1 представлено сравнение значений функций затрат при заданных параметрах ($\lambda = 10$, $\mu_2 = 1$, $\gamma_0 = 0.5$). Таким образом, целесообразность использования альтернативных источников энергии зависит от частоты переключения и их мощности.

Таблица 1
Значения функций затрат в зависимости от значений параметров μ_1 и γ_1

	$\mu_1 = 2,$ $\gamma_1 = 0.5$	$\mu_1 = 2,$ $\gamma_1 = 0.1$	$\mu_1 = 4,$ $\gamma_1 = 0.5$	$\mu_1 = 4,$ $\gamma_1 = 0.1$
L_1	3.581	4.755	2.702	2.875
L_2	5	5	2.5	2.5

Стоит отметить, что в проведенном анализе мы не учитывали инвестиции, потраченные на установку альтернативных источников энергии. Здесь мы приводим лишь модель и алгоритм анализа эффективности гибридных энергетических систем с помощью аппарата теории массового обслуживания. Более подробные исследования (в том числе численные расчеты на реальных данных) планируется провести в будущих работах.

Заключение

В работе предложена математическая модель гибридной энергосистемы в виде системы массового обслуживания $M/M/\infty$ с переключением. С помощью матричного метода записано распределение вероятностей числа заявок в системе. Приведены численные примеры, в которых сравнены значения функций затрат предложенной модели с классической СМО без переключения. Рассмотренная в работе модель является начальным этапом исследования, в будущем предполагается построение более точной математической модели (в частности, с ММРР входящим потоком) и провести численный анализ целесообразности использования альтернативных источников энергии на реальных экономических и статистических данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукутин Б.В., Муравлев И.О., Плотников И.А. Системы электросбережения с ветровыми и солнечными электростанциями: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. 128 с.

2. Новокрещенов О. В., Отмахов Г. С., Хуаде М. Ю. Комбинированные системы электроснабжения на возобновляемых источниках энергии // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2017. №132(08). С. 1–12.
3. Удалов С.Н., Захаров А.А. Гибридная система электроснабжения для автономного дома // Научно-практическая конференция «Энерго- и ресурсоэффективность малоэтажных жилых зданий». Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2013. С. 111–115.
4. Митрофанов С.В., Перепелкин К.А. Математическое моделирование гибридной ветро-солнечной станции для электроснабжения собственных нужд // Вестник ЮУрГУ. Серия: Энергетика. 2022. №3. С. 18–26.
5. Марченко О.В., Соломин С.В., Лебедев А. В. Математическое моделирование энергосистем с возобновляемыми источниками энергии // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2017. №2(6). С. 57–64.
6. Полин Е.П., Моисеева С.П., Рожкова С.В. Асимптотический анализ неоднородной системы массового обслуживания $M|M|\infty$ в марковской случайной среде // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. №47. С. 75–83.
7. Кортаев И. А. Системы массового обслуживания с переменными параметрами. Томск: Изд-во Том. ун-та им. В. В. Куйбышева, 1991. 166 с.

Тюленина Яна Андреевна — магистр Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: yanccch@gmail.com

Фёдорова Екатерина Александровна — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета. E-mail: moiskate@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С ОЖИДАНИЕМ ЗАЯВОК В БУНКЕРЕ И НА ОРБИТЕ

А. В. Подгайнов, А. А. Назаров

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В статье рассматривается RQ-система с ожиданием заявок в бункере и на орбите, простейшим входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания. Исследование данной математической модели проводится методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Была построена аппроксимация дискретного распределения состояний системы на основе полученных результатов асимптотического анализа. Определена точность асимптотической аппроксимации путем сравнения с результатами имитационного моделирования. **Ключевые слова:** RQ-система, бункер, орбита, метод асимптотического анализа.

Введение

Исследование систем с источником повторных вызовов (RQ-системы) [1] имеет большую ценность, так как при их помощи можно изучать процессы, протекающие в различных сферах: call-центры, системы сотовой связи и т.д. Исследование различных RQ-систем без использования бункера методом асимптотического анализа [2] рассмотрены в работах [3, 4, 5, 6]. В работе [7] рассматривается RQ-система с буфером, который используется для хранения одной заявки, которая не смогла закончить обслуживание по причине поломки обслуживающего устройства. В данной работе мы рассмотрим модель с конечным бункером, который будем использовать для ожидания заявок, поступающих из внешнего источника и с орбиты. В такой модели некоторое количество заявок не будет уходить на орбиту, а будет дожидаться своей очереди, тем самым тратя меньше времени на ожидание перед обслуживанием.

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему с очередью в конечном бункере и орбитой (Рисунок 1). На вход поступает простейший поток заявок с параметром λ . Время обслуживания заявки на приборе является экспоненциально

распределенной случайной величиной с параметром μ . Если заявка, поступившая в систему, застаёт прибор занятым, то она встает в бункер длины $N-1$. Если бункер заполнен полностью, то заявка уходит на орбиту, где ожидает время, распределенное экспоненциально с параметром σ , для повторного обращения к прибору. Если после ожидания на орбите заявка при обращении к прибору застаёт его занятым и в бункере отсутствуют свободные места, то она вновь уходит на орбиту и ожидает время, распределенное экспоненциально с параметром σ .

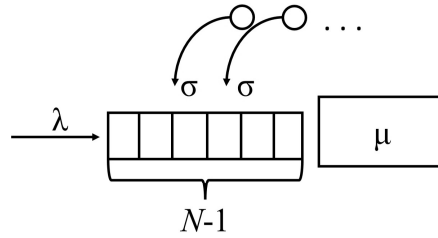


Рис. 1. RQ-система с бункером и орбитой

Пусть $n(t)$ - число заявок в системе без орбиты в момент времени t , $i(t)$ - число заявок на орбите в момент времени t . Обозначим $P(n, i, t)$ - вероятность того, что в момент времени t в бункере вместе с обслуживающим прибором находится n заявок и на орбите находится i заявок.

Ставится задача найти двумерное стационарное распределение вероятностей $P(n, i)$. Исследование системы проведено методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите, когда $\sigma \rightarrow 0$. Исследование данным методом представляется в двух этапах, асимптотика первого порядка и асимптотика второго порядка.

Составим систему уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(n, i, t)$ и перейдем к системе уравнений в стационарном виде

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P(0, i) + \mu P(1, i) = 0, \\ -(\lambda + i\sigma + \mu)P(n, i) + \lambda P(n-1, i) + \\ + (i+1)\sigma P(n-1, i+1) + \mu P(n+1, i) = 0, n = \overline{1, N-1}, \\ -(\lambda + \mu)P(N, i) + \lambda P(N-1, i) + \\ + (i+1)\sigma P(N-1, i+1) + \lambda P(N, i-1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2. Метод асимптотического анализа

Для решения системы (1) введем частичные характеристические функции:

$$H(n, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(n, i), n = \overline{0, N}, \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$. Систему уравнений (1) перепишем для частичных характеристических функций (2)

$$\begin{cases} -\lambda H(0, u) + \sigma j \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} + \mu H(1, u) = 0, \\ -(\lambda + \mu)H(n, u) + \sigma j \frac{\partial H(n, u)}{\partial u} + \lambda H(n-1, u) - \\ -\sigma j e^{-ju} \frac{\partial H(n-1, u)}{\partial u} + \mu H(n+1, u) = 0, n = \overline{1, N-1}, \\ -(\lambda + \mu)H(N, u) + \lambda H(N-1, u) - \\ -\sigma j e^{-ju} \frac{\partial H(N-1, u)}{\partial u} + \lambda e^{ju} H(N, u) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Суммируя все уравнения системы (3), получим согласованное уравнение вида

$$e^{-ju} \sigma j \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial H(n, u)}{\partial u} + \lambda H(N, u) = 0. \quad (4)$$

2.1 Асимптотика первого порядка

Теорема 1. При выполнении предельного условия $\sigma \rightarrow 0$, частичные характеристические функции можно аппроксимировать в виде

$$H(n, u) = R(n) e^{jw\kappa_1},$$

где $w = \frac{u}{\sigma}$, $n = \overline{0, N}$. Здесь κ_1 является корнем уравнения

$$-x \sum_{n=0}^{N-1} R(n, x) + \lambda R(N, x) = 0.$$

Формулы для $R(0, x)$ и $R(n, x)$ при $x = \kappa_1$ представлены в виде

$$R(0) = \left(\sum_{n=0}^N \left(\frac{\lambda + \kappa_1}{\mu} \right)^n \right)^{-1}, \quad R(n) = R(0) \left(\frac{\lambda + \kappa_1}{\mu} \right)^n, n = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Полученные результаты асимптотики первого порядка показывают, что аппроксимация среднего значения числа заявок на орбите в исследуемой RQ-системе с ожиданием заявок в бункере и на орбите является величиной равной $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$. Проведем асимптотику второго порядка для построения распределения вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите.

2.2 Асимптотика второго порядка

В системе (3) и согласованном уравнении (4) выполним следующую замену:

$$H(n, u) = e^{j \frac{u}{\sigma} \varkappa_1} H_2(n, u). \quad (6)$$

Теорема 2. При выполнении предельного условия $\sigma \rightarrow 0$, частичные характеристические функции вида (6) можно аппроксимировать в виде $H_2(n, u) = F_2(n, w)$, где $w = \frac{u}{\sigma}$ и $F_2(n, w)$ имеет следующий вид

$$F_2(n, w) = R(n) e^{\frac{(jw)^2}{2} \varkappa_2}.$$

Формула, определяющая $R(n)$, имеет вид (3). Выражение для \varkappa_2 имеет следующий вид:

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 \left(1 - \sum_{n=0}^N g(n) \right) - \varkappa_1 R(N) + (\lambda + \varkappa_1) g(N)}{\varkappa_1 \sum_{n=0}^N \varphi(n) + 1 - R(N) - (\lambda + \varkappa_1) \varphi(N)},$$

где $\varphi(n)$ определяется рекуррентной процедурой вида

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \quad \varphi(n) = \frac{(\lambda + \varkappa_1) \varphi(n-1) - R(n-1)}{\mu}, \\ \varphi(N) &= \frac{(\lambda + \varkappa_1) \varphi(N-1) - R(N-1) + \lambda R(N)}{\mu}, \end{aligned}$$

и $g(n)$ также определяется рекуррентной процедурой вида

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \quad g(1) = 0, \quad g(n) = \frac{(\lambda + \varkappa_1) g(n-1) + \varkappa_1 \sum_{\gamma=0}^{n-2} R(\gamma)}{\mu}, \\ g(N) &= \frac{\lambda R(N) - \varkappa_1 R(N-1) + (\lambda + \varkappa_1) g(N-1)}{\mu}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к частичным характеристическим функциям $H(n, u)$, выполним обратные замены вида (6) и $u = \sigma w$. Получим аппроксимацию $h(u) = \sum_{n=0}^N H(n, u)$ для характеристической функции числа заявок на орбите вида

$$h(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\sigma}\right\}.$$

Полученные результаты асимптотики второго порядка показывают, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе является гауссовским с асимптотическим средним $\frac{\kappa_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\kappa_2}{\sigma}$.

3. Аппроксимация дискретного распределения

Построим аппроксимацию дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе с ожиданием в бункере и на орбите. Для перехода от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, воспользуемся формулой

$$PG(i) = \frac{F(i + 0.5) - F(i - 0.5)}{1 - F(-0.5)}, \tag{7}$$

где $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами $\frac{\kappa_1}{\sigma}$ и $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$. Зададим следующие параметры системы: $N=3$, $\lambda=0.8$, $\mu=1$, $\sigma=0.1$. На Рисунке 2 представлен график распределения вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе.

4. Оценка точности асимптотических результатов

Для оценки точности полученных асимптотических результатов будем использовать расстояние Колмогорова вида

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{m=0}^i (P_{im}(m) - PG(m)) \right|,$$

где $P_{im}(m)$ – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное с помощью имитационного моделирования, $PG(m)$ – определяется формулой вида (7). На Рисунке 3 представлены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученные при помощи асимптотического анализа (красный график) и имитационного моделирования (синий график), при заданных параметрах системы: $N=3$, $\lambda=0.8$, $\mu=1$.

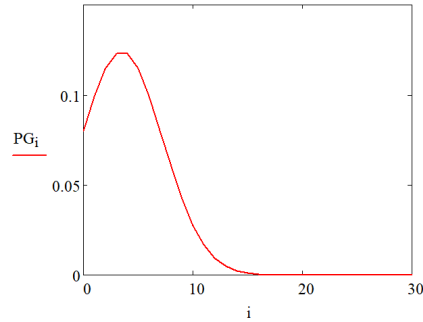
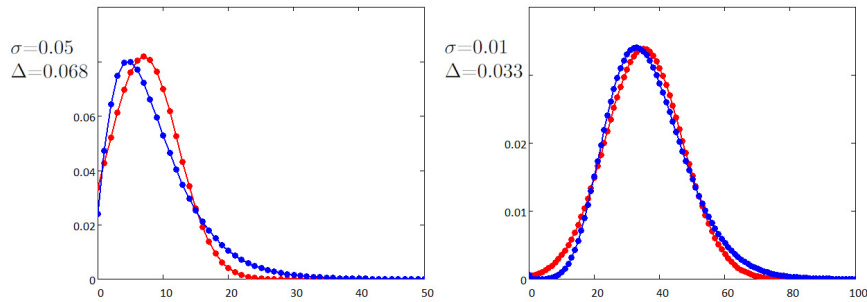


Рис. 2. Распределение вероятностей числа заявок на орбите

Рис. 3. Распределение вероятностей числа заявок на орбите для различных σ

Из полученных данных, можем сказать, что точность построенной аппроксимации растет с уменьшением параметра σ . При значении $\Delta < 0.05$ результаты будем считать приемлемыми.

Заключение

В работе представлены результаты исследования RQ-системы с ожиданием заявок в бункере и на орбите методом асимптотического анализа. Была построена аппроксимация дискретного распределения вероятностей на основе полученных асимптотических результатов и проведена оценка точности асимптотических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach Berlin: Springer-Verlag, 2008. 267 p.

2. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
3. Мелешникова Н. П., Федорова Е. А. Асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с отрицательными заявками в условии большой задержки // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование. 2022. Т. 1. С. 219–227.
4. Моисеев А. Н. Асимптотический анализ системы массового обслуживания $MAR|GI|_{\infty}$ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3(32). С. 56–65.
5. Данилюк Е. Ю., Моисеева С. П., Федорова Е. А. Асимптотический анализ RQ-системы $M|M|1$ с конфликтами и нетерпеливыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 44–56.
6. Полховская А. В., Моисеева С. П. Асимптотический анализ RQ-системы $M|M|1$ с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022): Материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Томск, 2023. С. 136–142.
7. Федорова Е. А., Фархадов М. П. Характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе $M/M/1$ с отрицательными заявками и буфером // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022): Материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Ч.2. 2022. С. 277–280.

Подгайнов Артем Владимирович — магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: artem.podgaynov1414@gmail.com

Назаров Анатолий Андреевич — доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

ТАНДЕМНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ДЕГРАДАЦИЕЙ СКОРОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Н. В. Слюсаренко, С. В. Пауль

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В представоенной ниже статье будет рассматриваться тандемная гибридная СМО (система массового обслуживания) без ожидания и деградацией скорости обслуживания заявок на первой фазе, орбитой на второй фазе. Вновь поступившая заявка в систему будет проходить последовательно обслуживание на двух фазах. Первая фаза системы — N обслуживающих приборов с деградацией скорости обслуживания заявок. Вторая фаза — система с повторными вызовами заявок. В основной части статьи показан процесс нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите на второй фазе методом асимптотического анализа. Условие рассмотренное для нахождения распределения — большая задержка заявок на орбите на второй фазе. **Ключевые слова:** *RQ-система, система массового обслуживания, тандемная система, система с повторными вызовами, гибридная система, асимптотический анализ, деградация скорости обслуживания.*

Введение

В данном исследовании предствалена тандемная СМО [1, 2] без возможности ожидания и деградацией скорости обслуживания заявок на первой фазе и орбитой на второй фазе. Дисциплины ожидания на первой и второй фазе различные, поэтому система называется гибридной. Ранее в работе [3] была рассмотрена СМО с повторными вызовами [4, 5], в работе [6] система с конечным бункером и двумя приборами на первой фазе. Мы продолжаем исследовать вторую фазу предложенной ранее системы, изменяя характеристики первой фазы. Это необходимо нам в дальнейшей работе для исследования изменения характеристик в зависимости от разных составляющих первой фазы. Поэтому на первой фазе системы было принято решение не реализовывать бункер для ожидания обслуживания, так как в современном ритме жизни абонентам неудобно ждать обслуживания. Но в связи с тем, что утрата заявок

не представляет собой оптимального решения, будем рассматривать систему с N обслуживающими приборами на первой фазе предложенной системы. В данной модели будем учитывать влияние состояния системы на время обслуживания заявок на первой фазе и, следовательно, влияние на загрузку орбиты.

1. Математическая модель

Заявки поступают в систему в согласно пуассоновскому распределению с параметром интенсивности λ и проходят двухфазное обслуживание последовательно. Первая стадия обслуживания включает в себя N

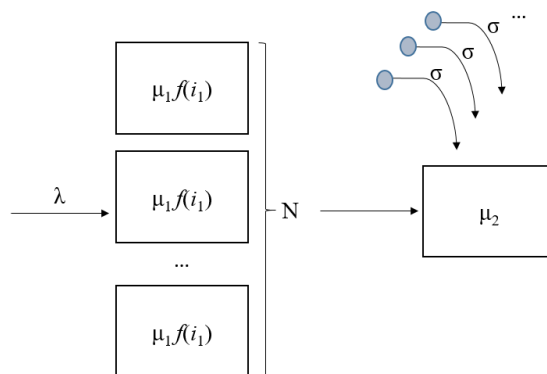


Рис. 1. Тандемная СМО с деградацией скорости обслуживания заявок на первой фазе и повторными вызовами на второй

обслуживающих приборов. Во второй стадии присутствует обслуживающий прибор с возможностью повторных вызовов и орбитой неограниченной емкости.

В момент поступления заявки на первую фазу, она занимает один из N доступных приборов на обслуживание. Число заявок на первой фазе влияет на параметр распределения времени обслуживания. Поэтому интенсивность обслуживания можно записать как $\mu_1 f(i_1)$, где μ_1 – интенсивность обслуживания единственной заявки в системе (без конкуренции), а $f(i_1)$ – функция деградации, значения которой являются безразмерным коэффициентом снижения интенсивности обслуживания в зависимости от числа заявок i_1 в системе, при этом $f(0) = f(1) = 1$. Чем больше заявок одновременно находится в системе на первой фазе представленной системы, тем ниже интенсивность обслуживания за-

явок на первой фазе. Закончив обслуживание первой фазы, заявка направляется на вторую. Допустим, что прибор второй фазы свободен, заявка может занять его для обслуживания на время, которое будет распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_2 . Если же заявка, в момент поступления на вторую фазу, застаёт прибор второй фазы занятым, она переходит на орбиту для осуществления случайной задержки. Длительность задержки распределена по экспоненциальному закону с параметром σ . Совершив случайную задержку, заявка вновь обращается к прибору второй фазы и пытается начать обслуживание. Если прибор оказывается свободным, заявка занимает его на случайное время для обслуживания. Если прибор оказывается занятым, заявка отправляется на орбиту для очередной задержки случайной продолжительности. Заявка покидает систему по завершении обслуживания на второй фазе.

Введем следующие обозначения процессов:

- $i_1(t)$ — число заявок на первой фазе, не более N ,
- $i_2(t)$ — число заявок на орбите неограниченной емкости,
- $k(t)$ — состояние прибора второй фазы: 0 — свободен, 1 — занят.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Займемся нахождением стационарного распределения числа заявок $i_2(t)$ на орбите предложенной системы.

Для этого запишем трехмерный марковский процесс $\{i_1(t), i_2(t), k(t)\}$.

Далее для распределения вероятностей $P_k(i_1, i_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, k(t) = t\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Эти уравнения описывают изменение состояния СМО со временем. Они используются для моделирования различных систем.

Затем введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$: $H_k(i_1, u) = \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_2} P_k(i_1, i_2)$, $k = 0, 1$. и получим систему для характеристических функций:

$$\mathbf{H}_k(u) = [H_k(0, u)H_k(1, u)\dots H_k(N, u)], \quad (1)$$

Получившуюся систему будем анализировать с помощью метода асимптотического анализа [7] при большой задержке на орбите: $\sigma \rightarrow 0$.

3. Асимптотика первого порядка

Сделаем замену: $\mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$, где $\sigma = \varepsilon$, $u = \varepsilon w$.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i_2(t)} = e^{jw\kappa_1}, \quad (2)$$

где \varkappa_1 — положительный корень уравнения:

$$\mu_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{D} \mathbf{e} - \mathbf{r}_0 \varkappa_1 \mathbf{I} \mathbf{e} = 0. \quad (3)$$

Вектора $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ определяются системой:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0[\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \varkappa_1 \mathbf{I}] + \mu_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{I} &= 0, \\ \mathbf{r}_1[\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{D}] + \mathbf{r}_0(\mu_1 \mathbf{D} + \varkappa_1 \mathbf{I}) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $\mathbf{r}_k, k = 0, 1$ - векторы с компонентами $r_{i_1 k}, i_1 = 0 \dots N$. $r_{i_1 k}$ — вероятность того, что на первой фазе находится i_1 заявок, а на второй фазе прибор находится в состоянии k : $(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1) \mathbf{e} = \mathbf{r} \mathbf{e} = 1$, также $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda + \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu_1 f(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu_1 f(N) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2f(2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & Nf(N) & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

4. Асимптотика второго порядка

В системе уравнений для функций $\mathbf{H}_k(u)$ проведем замену: $\mathbf{H}_k(u) = \mathbf{H}_k^{(2)}(u) e^{ju \frac{\varkappa_1}{\sigma}}$, где $\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon)$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw \sqrt{\sigma}(i_2(t) - \frac{\varkappa_1}{\sigma})} = e^{\frac{(jw)^2}{2} \varkappa_2}, \quad (7)$$

где \varkappa_2 находится из равенства:

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \varkappa_1 \varphi_0 \mathbf{e} + \mu_1 \mathbf{D} \varphi_1 \mathbf{e}}{\mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \varkappa_1 \psi_0 \mathbf{e} - \mu_1 \mathbf{D} \psi_1 \mathbf{e}}, \quad (8)$$

здесь вектора \mathbf{r}_k определены в первой асимптотике, вектора $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ находятся из систем:

$$\begin{aligned} \varphi_0[\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \varkappa_1 \mathbf{I}] + \mu_2 \varphi_1 \mathbf{I} &= 0, \\ \varphi_0[\mu_1 \mathbf{D} + \varkappa_1 \mathbf{I}] + \varphi_1[\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} + \mu_2 \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{D}] &= \varkappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{D}, \\ (\varphi_0 + \varphi_1) \mathbf{e} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_0[\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \varkappa_1 \mathbf{I}] + \mu_2 \psi_1 \mathbf{I} &= \mathbf{r}_0, \\ \psi_0[\mu_1 \mathbf{D} + \varkappa_1 \mathbf{I}] + \psi_1[\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{D}] &= -\mathbf{r}_0, \\ (\psi_0 + \psi_1) \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Возвращаясь к функции $\mathbf{H}_k(u)$, выполним обратный переход и получим аппроксимацию вида: $h(u) = \mathbf{H}_k(u)$ для составленной ранее характеристической функции:

$$h(u) = e^{\{ju \frac{\varkappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\varkappa_2}{\sigma^2}\}}. \quad (11)$$

5. Численный пример

Рассмотрим систему с входными параметрами $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \lambda = 0,6$, изменяя параметр σ , функция деградации имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (рисунок 2а). Также рассмотрим систему с входными параметрами $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \lambda = 0,6, \sigma = 0,1$, изменяя значения функции деградации (рисунок 2б).

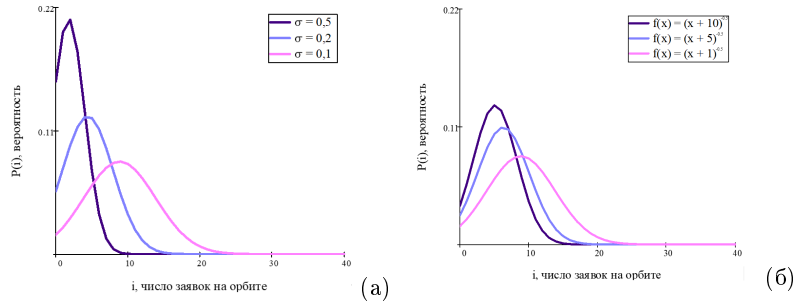


Рис. 2. Аппроксимация дискретного распределения

Заключение

С помощью использования метода асимптотического анализа при условии большой задержки на орбите, была получена гауссовская характеристическая функция со средним $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\varkappa_2}{\sigma^2}$ числа заявок на орбите представленной СМО.

Были построены дискретные распределения, которые аппроксимируют стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите второй фазы, для разных параметров системы. Можно сделать однозначный вывод присутствия зависимости числа заявок на орбите от вида

функции деградации. Чем больше время обслуживания заявок на первой фазе представленной системы или чем меньше коэффициент интенсивности обслуживания (деградации), тем большее количество заявок ожидает обслуживания на приборе второй фазы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balsamo S, Persone V. D. N, Inverardi P.* A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // *Performance Evaluation*. 2003. Vol. 51. P. 269–288.
2. *Perros H. G.* A bibliography of papers on queueing networks with finite capacity queues // *Performance Evaluation*. 1983. Vol. 10. P. 255–260.
3. *Петрива Н. В., Пауль С. В.* Гибридная система массового обслуживания с повторными вызовами // *Материалы VIII Международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем Томск, 2021.* Т. 306. С. 136–140.
4. *Paul S., Phung-Duc T.* Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks // *CCIS 2018*. Vol. 912. P. 213–214.
5. *Судыко Е. А., Назаров А. А.* Допредельные характеристики RQ-системы с конфликтами заявок // *Научное творчество молодежи: материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции, Томск, 2010.* Ч. 1. С. 97–100.
6. *Петрива Н. В., Пауль С. В.* Тандемная гибридная система массового обслуживания с повторными вызовами и вероятностным переходом // *Материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова "Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022) Томск, 2022.* С. 220–225.
7. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания // *Москва: Наука, 1980.* С. –382.
8. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания // *Москва: Наука, 2010.* С. –400.

Слюсаренко Наталья Владимировна — магистрантка II курса, ИП-МиКН. E-mail: nata0338@yandex.ru

Пауль Светлана Владимировна — д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры ТВиМС, ИПМиКН. E-mail: paulsv82@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ С ПРИОРИТЕТАМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ

Н. Г. Хаустова¹, С. П. Моисеева²

^{1,2} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Предлагается модель обработки информации с заявками различных приоритетов. Время обслуживания заявок случайное с экспоненциальным распределением вероятностей, параметры которого соответствуют типу заявки. Для каждого типа заявок предполагается свой бункер ограниченного объема. Информация, находящаяся в очереди, имеет срок жизни, после которого передавать ее нет смысла. Срок жизни является случайной величиной, также имеющей экспоненциальное распределение. Для указанной системы численно находится распределение вероятностей состояний системы. Получены характеристики показателя качества обслуживания заявок. Приведена интерпретация результатов приобретенных характеристик. **Ключевые слова:** *математическая модель обработки информации с приоритетами, разнотипные данные, распределение вероятностей системы, характеристики показателя качества обслуживания, срок жизни информации.*

Введение

Наличие заявок разных типов определяется таким понятием, как разнотипность данных [1]. Часто платформа или приложение стремится к одновременной передаче этих разнотипных данных: например, речь, звук, видеоизображение в веб-конференции [2]. Однако если число данных превышает возможности сети, могут возникать неполадки, связанные с ее перегрузкой. Для уменьшения нагрузок сети важно определить приоритетность заявок — тех, которые в первую очередь будут поступать на обслуживание прибору, что особенно касается тех систем, для которых объем бункеров ожидания ограничен [3]. Это ограничение определяет работу системы с потерями: часть заявок, для которых есть место, ожидает обслуживания прибором в очереди, часть — теряется. Рассматриваемая система работает с относительным приоритетом, при котором не допускается вытеснение неприоритетной заявки, уже находящейся на приборе, только что поступившей приоритетной.

Рассмотрение моделей с приоритетами, начало которому положено много лет назад как иностранными [4], так и отечественными [5] деятелями науки, на сегодняшний день все еще остается актуальной задачей. Однако блестящие результаты коллег со всего мира до сих пор не были дополнены четким численным алгоритмом нахождения распределения вероятностей системы. Именно это уникальное достижение представлено в настоящем материале. К тому же в отличие от постановки задачи в статье [6] в данной работе заявки, находящиеся в очереди, имеют ограничения на время ожидания. На практике это означает, что информация имеет срок жизни, после которого передавать ее нет смысла. Предполагается, что срок жизни является случайной величиной, также имеющей экспоненциальное распределение с параметрами, соответствующими типу распределения. В настоящей статье приводится подробное исследование для размеров бункеров $N_1 = N_2 = 2$.

1. Математическое моделирование системы с приоритетами и ограничениями на время ожидания

Прежде чем построить математическую модель, обратимся к моделированию функциональной. Общую схему рассматриваемой системы с двумя типами заявок, двумя бункерами и ограничениями на время ожидания рассмотрим на примере приемной кампании вуза (рисунок 1).

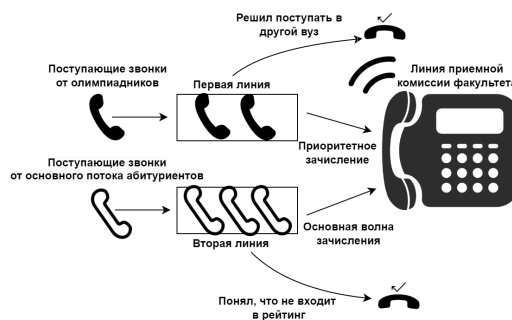


Рис. 1. Функциональная модель обработки информации с приоритетами и ограничениями на время ожидания

Рисунок иллюстрирует два потока звонков абитуриентов, разделенных по принципу различия их типов. Приоритетными являются звонки от олимпиадников. Они поступают на первую линию, звонки же основного потока абитуриентов – на вторую. «Прибором» в данном случае

является линия приемной комиссии факультета. В силу ограничения на время ожидания имеется вероятность прерывания звонка среди того или иного потока абитуриентов. Например, абитуриент решил поступать в другой вуз, или понял, что не проходит в рейтинговый список по баллам – в таком случае актуальность звонка просто теряется.

Построим математическую модель системы (рисунок 2).

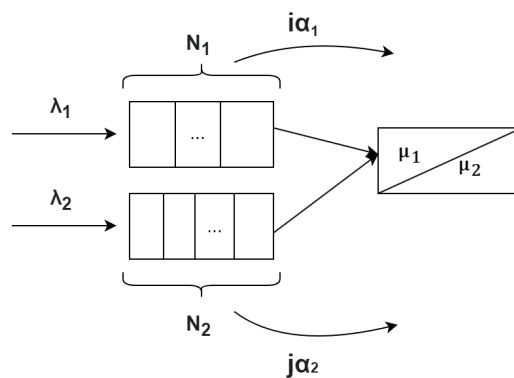


Рис. 2. Математическая модель обработки информации с приоритетами и ограничениями на время ожидания

Параметры системы имеют следующие обозначения: λ_i — интенсивности потоков, μ_i — интенсивности обслуживания, α_i — интенсивности выхода из бункеров, N_i — количество мест для ожидания в бункере, $i = 1, 2$.

Введем в рассмотрение следующие случайные процессы: $i(t)$ — число приоритетных заявок в бункере в момент времени t , $j(t)$ — число не приоритетных заявок в бункере, $k(t)$ — состояние прибора в момент времени t .

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей трехмерного марковского процесса $\{k(t), i(t), j(t)\}$: $P_k(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{k(t) = k, i(t) = i, j(t) = j\}$.

2. Исследование СМО с приоритетами и ограничениями на время ожидания с двухместным объемом бункеров

Так как размерность решаемой задачи нелинейно возрастает с увеличением мест для ожидания, то в настоящей статье для демонстрации влияния параметров на характеристики качества мы рассмотрим

частный случай системы, при котором в очередях будет по два места для заявок, ожидающих обслуживания. Данную систему в символике Кендалла-Башарина будем обозначать $\vec{M}_2 | M_1, M_2 | 1 | (2, 2)$. Математическая модель системы представлена на рисунке 3.

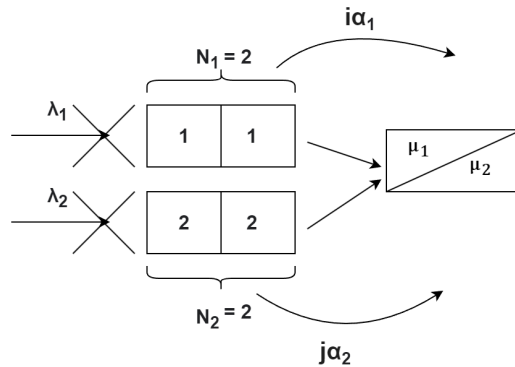


Рис. 3. Математическая модель СМО с двухместным объемом бункеров

Изобразим возможные состояния системы и интенсивность переходов из состояния в состояние при помощи графа (рисунок 4).

3. Численная реализация нахождения распределения вероятностей системы

Учитывая точки входа и выхода в то или иное состояние, составлена система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей исследуемого процесса.

Для нахождения распределения вероятностей был реализован численный алгоритм. Для этого вектор всех состояний был представлен как:

$$\pi^T = [\pi_0(0, 0), \pi_1(0, 0), \pi_2(0, 0), \pi_1(1, 0), \pi_2(1, 0), \pi_1(0, 1), \pi_2(0, 1), \pi_1(2, 0), \pi_2(2, 0), \pi_1(1, 1), \pi_2(1, 1), \pi_1(0, 2), \pi_2(0, 2), \pi_1(2, 1), \pi_2(2, 1), \pi_1(1, 2), \pi_2(1, 2), \pi_1(2, 2), \pi_2(2, 2)].$$

Тогда систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\pi \mathbf{A} = \mathbf{0}, \pi \mathbf{e} = 1.$$

Здесь \mathbf{A} — матрица коэффициентов, \mathbf{e} — единичный вектор соответствующей размерности.

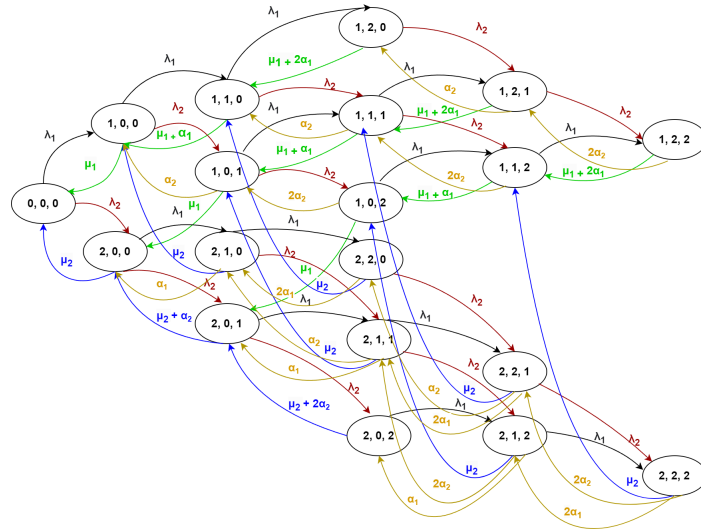


Рис. 4. Граф возможных состояний СМО с двухместным объемом бункеров

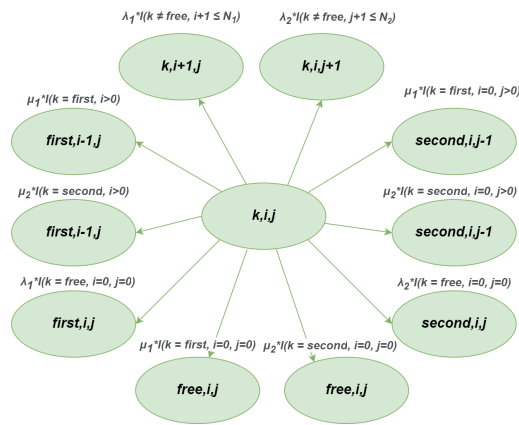


Рис. 5. Граф потока событий, выходящего из трехмерного марковского процесса с параметрами (k, i, j)

Итоговое распределение вероятностей вычисляем по формуле

$$\pi = (\mathbf{A}^T * \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{A}^T * \mathbf{b}.$$

Здесь \mathbf{b} — вектор-столбец размерности, состоящий из 19 нулей и единиц.

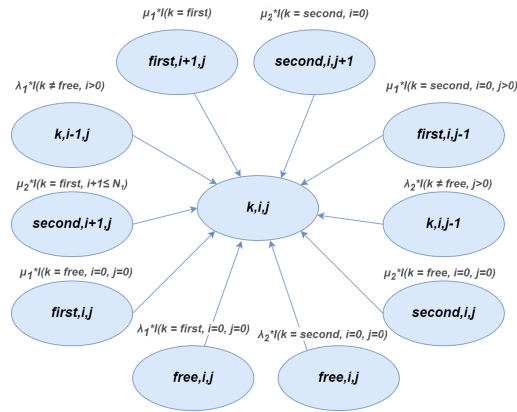


Рис. 6. Граф потока событий, входящего в трехмерный марковский процесс с параметрами (k, i, j)

На основе полученного распределения рассчитаем характеристики качества обслуживания системы (таблица 1).

Таблица 1

Характеристики показателя качества обслуживания

Характеристика системы	Формула расчета	Значение
Вероятность моментального обслуживания поступившей заявки	$P_0(0, 0)$	0.021
Вероятность отказа в обслуживании приоритетных заявок	$P_1(2, 0) + P_2(2, 0) + P_1(2, 1) + P_2(2, 1) + P_1(2, 2) + P_2(2, 2)$	0.253
Вероятность отказа в обслуживании неперитетных заявок	$P_1(0, 2) + P_2(0, 2) + P_1(1, 2) + P_2(1, 2) + P_1(2, 2) + P_2(2, 2)$	0.713
Вероятность того, что прибор занят обслуживанием приоритетной заявки	$P_1(0, 0) + P_1(1, 0) + P_1(0, 1) + P_1(2, 0) + P_1(1, 1) + P_1(0, 2) + P_1(2, 1) + P_1(1, 2) + P_1(2, 2)$	0.663
Вероятность того, что прибор занят обслуживанием неперитетной заявки	$P_2(0, 0) + P_2(1, 0) + P_2(0, 1) + P_2(2, 0) + P_2(1, 1) + P_2(0, 2) + P_2(2, 1) + P_2(1, 2) + P_2(2, 2)$	0.316

Заключение

В данной работе была рассмотрена модель обработки информации с приоритетами и ограничениями на время ожидания для бункера размерности, не

превышающей двух мест, для которой реализован численный алгоритм нахождения распределения вероятностей системы вида $\vec{M}_2|M_1, M_2|1|(2, 2)$. Полученные в результате исследования характеристики показателя качества обслуживания системы определяют систему с двухместным объемом бункеров как малоэффективную, что как раз и соотносится с малым числом мест в бункерах для ожидания заявок своей очереди, а это равным образом скажется на потерях заявок. В дальнейшем планируется реализовать алгоритм для построения матрицы коэффициентов произвольной размерности, что позволит решить задачу для произвольного числа мест ожидания, а также позволит определить оптимальные параметры системы для обеспечения заданного уровня качества обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. М.: Издательство научно-технической литературы, 2010. 225 с.
2. Рындин А. Н., Туренова И. А, Моисеева С. П., Пакулова Е. А. Математическая модель двухпоточковой системы передачи данных.// Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети : управление, вычисление, связь (DCCN-2022): материалы XXV Международной научной конференции. Москва: РУДН, 2022. 234-239 с.
3. Бронштейн О. И., Духовный И. М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. М.: Наука, 1976. 220 с.
4. Джейсуюл Н. К. Очереди с приоритетами./ Пер. с англ./ Пер. И.С. Нефедовой и В.С. Манусевича; Под ред. В.В. Калашникова. М.: Мир, 1973. 279 с.
5. Гнеденко Б. В., Даниэлян Э.А., Димитров Б.Н., Климов Г.П., Матвеев В.Ф. Приоритетные системы обслуживания. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. 447 с.
6. Moiseeva S. P., Pakulova E. A, Haustova N. G. Mathematical Model of Information Processing with Relative Priority and Different Service Intensity. //2023 IEEE 19 th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems (OPCS), 14-22 august 2023. 65-69 с.

Хаустова Наталья Глебовна — студент, Национальный исследовательский Томский государственный университет. E-mail: khaustovan@inbox.ru

Моисеева Светлана Петровна — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой, Томский государственный университет, Институт прикладной математики и компьютерных наук, кафедра теории вероятностей и математической статистики. E-mail: smoiseeva@mail.ru

ПРИНЦИПЫ ООП В ЯЗЫКЕ GO LANG

В. И. Фрейдин, Е. Д. Трофимова, Д. О. Змеев

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

Особенность Go Lang заключается в отсутствии классического подхода к ООП, вместо этого используются структуры и интерфейсы для определения свойств и поведения объектов. Авторы подробно разбирают такие аспекты, как отсутствие прямого указания на модификаторы доступа, использование композиции вместо наследования и возможности реализации полиморфизма через интерфейсы с неявной типизацией. Работа подчеркивает, что, несмотря на свои уникальные подходы к ООП, Go Lang позволяет эффективно реализовывать его ключевые принципы, открывая новые возможности для разработчиков современных программных решений. **Ключевые слова:** *объектно-ориентированное программирование, наследование, GoLang.*

Введение

Go Lang [1] является очень молодым языком, появившимся только в 2009 году. Но, несмотря на короткое время существования, он стал одним из самых популярных - согласно TIOBE Index Go Lang [2] стал самым популярным языком программирования в 2009 и 2016 годах. Большая часть подходов программной инженерии базируется на механизмах, заложенных в ООП (Объектно-ориентированное программирование). В связи с этим новые стеки и технологии должны уметь реализовывать те же механизмы ООП, или иметь их аналоги. Эти особенности могут оказаться критическими при проектировании архитектур сложных систем, в связи с чем необходимо проводить параллели и делать сравнительные анализы базовых механизмов ООП в разных языках. В статье [3], авторы затрагивают тему использования ООП в Go, предлагая инструменты для обнаружения так называемых "God Structures" что намекает на попытки интеграции ООП подходов. Однако, несмотря на обещания, статья не демонстрирует конкретных примеров или четкой методологии, как можно эффективно применять ООП парадигму в Go lang. Далее будут рассмотрены особенности реализации составляющих ООП на языке Go Lang.

Классы и объекты

Если рассматривать классические объектно-ориентированные языки [4], то можно заметить, что программа представляется в виде совокупности взаимодействующих объектов, каждый из которых является экземпляром определённого класса.

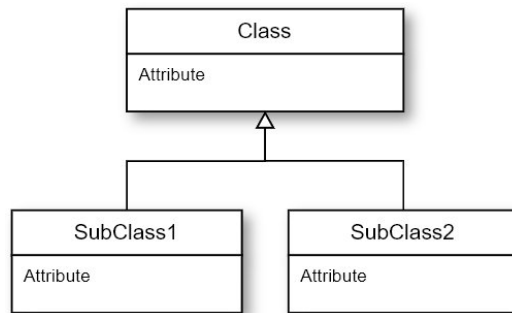


Рис. 1. Представление ООП

В классе прописываются свойства объекта (поля) и паттерны его поведения (методы). Поля и методы могут быть приватными, что означает доступность только внутри класса, защищенными – доступность для класса и его потомков и публичными – доступность для всего проекта. Это обозначается ключевыми словами `private`, `protected` и `public` соответственно.

В Go Lang классов нет, но вместо них можно использовать структуры.

```

1 type Person struct {
2     firstName string
3     lastName  string
4     age       int
5     email     string
6 }
7
8 func (p *Person) Talk() {
9     fmt.Println(fmt.Sprintf("Hi, my full name is
10    %s %s", p.firstName, p.lastName))
}
  
```

В них описываются свойства объекта. Внутри структуры описываются поля, также определяющие свойства объекта, а за её пределами

методы, которые представляют собой функции, определенные для конкретного типа. Для того, чтобы привязать функцию к структуре, необходимо написать имя структуры между ключевым словом `func` и именем самой функции. Благодаря этому появляется возможность обращаться к полям структуры и вызывать другие её методы. Как и в других языках, в Go существуют зоны видимости, но определяется она с помощью регистра первой буквы имени. Если буква заглавная, то это поле `public`, если строчная - `private`.

Наследование

Прежде, чем говорить об особенностях наследования в Go lang, стоит дать определение классическому наследованию. Классическое наследование — механизм, позволяющий создавать новые классы на основе уже существующих, расширяя их функциональность. В классических языках, поддерживающих ООП, можно создать новый класс, который будет наследовать все поля и методы родительского класса.

```
1 public class Person
2 {
3     private string firstName { get; set; }
4     private string lastName{ get; set; }
5     private int age { get; set; }
6     private string email{ get; set; }
7 }
8
9 public class Worker: Person
10 {
11     private string place { get; set; }
12 }
```

Например, в языке C# [5] в конструкторе класса-потомка через двоеточие указывается имя класса-родителя. Таким образом, класс-потомок наследует все те же свойства, методы, поля, которые есть в классе-родителе. Единственное, что не передается при наследовании, это конструкторы базового класса с параметрами. Благодаря этому наследование реализует отношение is-a (является).

В Go используется принцип композиции вместо наследования, реализованный с помощью встраивания это означает, что существует возможность включения одной структуры в другую, тем самым расширяя её возможности, копируя поля и методы родительской структуры.

```
1 type Person struct {
2     firstName string
3     lastName  string
4     age       int
5     email     string
6 }
7
8 type Worker struct {
9     Person
10    place string
11 }
```

Именно благодаря композиции в Go обеспечивается возможность имитации множественного наследования, так как можно встроить любое количество структур друг в друга.

Интерфейсы и полиморфизм

Интерфейс — это совокупность средств, методов и правил взаимодействия (управления, контроля и т. д.) между элементами системы. В программировании при проектировании классов, разработка интерфейса тождественна разработке спецификации (множества методов, которые каждый класс, использующий интерфейс, должен реализовывать). Например, в языке C# это реализуется следующим образом:

```
1 public interface ISpeaker
2 {
3     abstract void Talk();
4 }
5
6 public class Person: ISpeaker
7 {
8     protected string firstName { get; set; }
9     protected string lastName{ get; set; }
10    protected int age { get; set; }
11    protected string email{ get; set; }
12 }
```

Как можно заметить, класс Person явно реализует интерфейс ISpeaker - это указывается после наименования класса. Поэтому к класса Person имеется метод Talk, ведь его наличие указывается в теле интерфейса. В примерах выше было указано, что класс Worker является наследником класса Person, следовательно, теперь класс Worker также реализует интерфейс ISpeaker и имеет метод Talk().

```
1 public class Worker: Person
2 {
3     private string place { get; set; }
4
5     public override void Talk()
6     {
7         Console.WriteLine($"Hi, i worker, my full
8             name is {firstName} {lastName}");
9     }
}
```

Интерфейсы в Go не требуют явной реализации. Они определяют набор методов, а структуры, которые реализуют все эти методы, реализуют интерфейс. Это происходит благодаря механизму неявной типизации, которая имеется у Golang в отношении интерфейсов.

```
1 type Speaker interface {
2     Talk()
3 }
4
5 type Person struct {
6     firstName string
7     lastName  string
8     age       int
9     email     string
10 }
11
12 func (p *Person) Talk() {
13     fmt.Println(fmt.Sprintf("Hi, my full name is
14         %s %s", p.firstName, p.lastName))
}
```

Например, любая структура, реализующая метод `Talk`, будет автоматически реализовывать интерфейс `Speaker`. В Go также возможна реализация множества интерфейсов. Таким образом в Go также присутствует полиморфизм - свойство, которое позволяет одно и то же имя использовать для решения более схожих, но технически разных задач.

Заключение

Исходя из рассмотренных выше примеров, можно заключить, что, хотя язык Go не является ООП языком первоначально, фундаментальные принципы объектно ориентированного подхода для него актуальны и успешно применяются, однако существуют отличия в терминологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <https://opensource.googleblog.com/2009/11/hey-ho-lets-go.html> — Google Open Source Blog. 2024
2. <https://www.tiobe.com/tiobe-index/> — TIOBE Index for January 2024. 2024
3. https://www.researchgate.net/publication/335935256_GodExpo_An_Automated_God_Structure_Detection_Tool_for_Golang — GodExpo: An Automated God Structure Detection Tool for Golang
4. <https://goo.su/vFc9Hi> — Top 10 Object-Oriented Programming Languages in 2023
5. <https://learn.microsoft.com/ru-ru/dotnet/csharp/> — C# documentation 2024

Фрейдin Валерий Игоревич — бакалавр, лаборант, НОЦ «Высшая ИТ Школа» ТГУ. E-mail: valera.freidin@mail.tsu.ru

Трофимова Екатерина Дмитриевна — бакалавр, лаборант, НОЦ «Высшая ИТ Школа» ТГУ. E-mail: rina.trofimova@mail.tsu.ru

Змеев Денис Олегович — кандидат технических наук, доцент, НОЦ «Высшая ИТ Школа» ТГУ. E-mail: denis.zmeev@accounts.tsu.ru

РЕСУРСНЫЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕКУРРЕНТНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

И. А. Тихомиров, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

Рассматривается ресурсная бесконечнолинейная сеть массового обслуживания. Решается задача нахождения распределения вероятностей суммарного объема требований на каждом узле сети при рекуррентном входящем потоке требований случайного объема. Для исследования такой сети применяется метод многомерного динамического просеянного потока, составляется система дифференциальных уравнений Колмогорова, осуществляется переход к характеристическим функциям. Задача рассматривается в асимптотическом условии высокой интенсивности входящего потока, что позволяет найти многомерную гауссовскую аппроксимацию исследуемого процесса. **Ключевые слова:** *ресурсные сети массового обслуживания, асимптотический анализ, метод динамического просеивания.*

Введение

На данный момент достаточно хорошо исследованы ресурсные системы массового обслуживания [1], а также имеется общая теория, описывающая поведение нересурсных сетей массового обслуживания [1, 7]. Логичным обобщением двух данных направлений теории массового обслуживания является рассматриваемая в данной работе модель ресурсной сети массового обслуживания, которая может быть применима для описания различных реальных систем и решения широкого спектра задач из областей телефонной сотовой связи, телекоммуникационных сетей, распределенных вычислений и обработки информации, систем управления транспортными потоками и т.п. Для описания подобных моделей при составлении системы дифференциальных уравнений Колмогорова используется метод многомерного динамического просеивания, после чего к полученной системе применяется метод характеристических функций. В силу сложности решения уравнений, подобных полученному, оно рассматривается в асимптотике высокой интенсивности входящего потока [6].

Целью работы является исследование суммарных объемов занимаемых ресурсов на узлах рассматриваемой ресурсной сети массового обслуживания (РСМО).

1. Постановка задачи

Сети массового обслуживания (СМО) удобно представлять в виде комплекса связанных между собой отдельных систем массового обслуживания (СМО), которые называют узлами сети.

Рассмотрим отдельно произвольный узел k . Он представляет собой ресурсную бесконечнолинейную (с неограниченным числом приборов) СМО с произвольной функцией распределения времени обслуживания $B_k(x)$. Каждая заявка при поступлении на обслуживание «захватывает» случайный объем ресурса $v > 0$ данного узла (суммарный объем ресурса узла не ограничен). Функция распределения объема необходимого заявке ресурса $G_k(y) = P\{v < y\}$ произвольна, но $B_k(x)$ и $G_k(y)$ постоянны для всех приборов данного узла. После окончания обслуживания заявка покидает данный узел и «возвращает» занимаемый объем ресурса. Обозначим $i_k(t)$ — число заявок, находящихся на обслуживании на узле k в момент времени t , $W_k(t)$ — полная сумма объемов занятого ресурса на этом узле.

При объединении таких СМО в сеть необходимо определить порядок передачи заявок от одного узла к другому с помощью дисциплины маршрутизации. В исследуемом типе сетей она является марковской и описывается матрицей маршрутизации \mathbf{M} [1].

Входящий в сеть поток заявок является рекуррентным и задается функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между последовательными моментами наступления событий в потоке.

Ставится задача нахождения характеристик многомерного случайного процесса $\{\mathbf{i}(t), \mathbf{W}(t)\}$, где $\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), i_2(t), \dots, i_k(t)\}$, $\mathbf{W}(t) = \{W_1(t), W_2(t), \dots, W_k(t)\}$.

2. Метод просеянного потока

Нужно заметить, что процесс $\{\mathbf{i}(t), \mathbf{W}(t)\}$ не является Марковским. Поэтому для его исследования применяется метод многомерного динамического просеивания [6]. Для этого зафиксируем некоторый произвольный момент времени T и для заявки, поступившей в систему в момент времени $t < T$ введем вероятности $S_k(t)$ того, что к моменту времени T заявка окажется обслуживаемой на узле k ($k = \overline{1, K}$). Вероятность $S_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^K S_k(t)$ будет соответствовать случаю, когда

заявка к моменту времени T закончила обслуживание и вышла из системы. $S_k(t)$ называются вероятностями просеивания входящей заявки в k -й поток, а $S_0(t)$ — вероятность того, что заявка останется в исходном потоке. Формулы для данных вероятностей в случае СеМО получены в [1].

Обозначим теперь вектор $\mathbf{n}(t) = \{n_1(t), n_2(t), \dots, n_k(t)\}$ — число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t (число событий, наступивших на k -й оси просеянного потока) и $\mathbf{V}(t) = \{V_1(t), V_2(t), \dots, V_k(t)\}$ — суммарный объем занятого ресурса «просеянными» на k -ю ось заявками. Таким образом, если в начальный момент времени система была свободна, то для любых неотрицательных значений \mathbf{m} справедлива основная формула просеянного потока:

$$P\{\mathbf{i}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{W}(T) < v\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{V}(T) < v\}.$$

3. Дифференциальное уравнение Колмогорова

Введем распределение вероятностей многомерного Марковского процесса $P(\mathbf{n}, \mathbf{V}, z, t) = P\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, \mathbf{V}(t) < \mathbf{V}, z(t) < z\}$, где $z(t)$ — остаточное время от момента t до момента поступления следующей заявки из входящего рекуррентного потока. Для этого распределения справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{n}, \mathbf{V}, z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial P(\mathbf{n}, \mathbf{V}, z, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial P(\mathbf{n}, \mathbf{V}, 0, t)}{\partial t} \left[A(z) - 1 - A(z) \sum_{k=1}^K S_k(t) \right] + \\ &+ A(z) \sum_{k=1}^K \int_0^{V_k} \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, \mathbf{V} - y\mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} S_k(t) dG_k(y), \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_k — вектор, все элементы которого равны 0, за исключением k -го, который равен 1.

Введем теперь частичную характеристическую функцию вида

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{jw_1 V_1 + \dots + jw_K V_K} dV_1 \dots dV_K P(\mathbf{n}, \mathbf{V}, z, t). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_k\}^T$, $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_k\}^T$, j – мнимая единица. Выполнив необходимые преобразования, получим уравнение для характеристических функций:

$$\frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K S_k(t) (e^{ju_k} G_k^*(w_k) - 1) \right], \quad (1)$$

где $G_k^*(w_k) = \int_0^{\infty} e^{jw_k y} dG_k(y)$.

Зададим также начальное условие для этого уравнения в виде $H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t_0) = R(z)$, где $R(z) = \lambda \int_0^z [1 - A(x)] dx$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$, $\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx}$.

4. Асимптотический анализ

В силу сложности решения подобного вида уравнений дальнейший анализ производится в асимптотике неограниченно растущей интенсивности входящего потока. Введем величину N , называемую параметром высокой интенсивности потока и запишем функцию распределения длин интервалов времени между последовательным наступлением событий входящего потока в виде $A(Nz)$. Тогда уравнение (1) переписется в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K S_k(t) (e^{ju_k} G_k^*(w_k) - 1) \right],$$

с начальным условием $H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t_0) = R(z)$.

Проведя асимптотический анализ первого порядка, получим следующий вид характеристической функции:

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t) = R(z) \exp \left\{ N \lambda \sum_{k=1}^K j(u_k + w_k a_k) \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\},$$

где $a_k = \int_0^{\infty} y dG_k(y)$ – математическое ожидание случайной величины, определяемой законом распределения $G_k(y)$.

Асимптотический анализ второго порядка даст

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{w}, z, t) = R(z) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K \left(\frac{(ju_k)^2}{2} + \frac{(jw_k)^2}{2} \dot{a}_k + ju_k jw_k a_k \right) \bar{b}_k + \right. \\ \left. + N\kappa \sum_{l=1}^K \sum_{k=1}^K \left(\frac{ju_k jw_l}{2} + \frac{jw_k jw_l}{2} a_k + \frac{ju_k jw_l}{2} a_l + \frac{jw_k jw_l}{2} a_k a_l \right) \bar{\beta}_{kl} + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K j(u_k + w_k a_k) \bar{b}_k \right\},$$

где \dot{a}_k — вторые начальные моменты случайной величины, определяемые функцией $G_k(y)$, $\kappa = \lambda^3 (\sigma^2 - M^2\{A(x)\})$, σ^2 и $M\{A(x)\}$ — дисперсия и математическое ожидание случайной величины, определяемой законом распределения $A(x)$, $\bar{b}_k = \int_{t_0}^t S_k(x) dx$, $\bar{\beta}_{kl} = \int_{t_0}^t S_k(x) S_l(x) dx$.

Выполнив теперь обратные замены и переходя к пределу $z \rightarrow \infty$, получим характеристическую функцию многомерного случайного процесса $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{V}(t)\}$. Затем, полагая $t = T$, $t_0 \rightarrow -\infty$, для характеристической функции процесса в стационарном режиме получим

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K j(u_k + w_k a_k) b_k + N \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} (\lambda b_k + \kappa \beta_k) + \right. \\ \left. + N \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} (\lambda \dot{a}_k b_k + \kappa a_k^2 \beta_k) + N \sum_{k=1}^K ju_k jw_k (\lambda a_k b_k + \frac{1}{2} \kappa a_k \beta_k) + \right. \\ \left. + N\kappa \sum_{l=1}^K \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^K \frac{ju_k jw_l}{2} (a_k \beta_{kl} + a_l \beta_{kl}) + N\kappa \sum_{l=1}^K \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^K \frac{ju_k jw_l}{2} \beta_{kl} + \right. \\ \left. + N\kappa \sum_{l=1}^K \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^K \frac{jw_k jw_l}{2} a_k a_l \beta_{kl} \right\}, \quad (2)$$

где $\beta_{kl} = \int_{-\infty}^T S_k(\tau) S_l(\tau) d\tau$, $\beta_k = \int_{-\infty}^T S_k(\tau) S_k(\tau) d\tau$, $b_k = \int_{-\infty}^T S_k(\tau) d\tau$.

Отсюда нетрудно получить характеристические функции для многомерных процессов числа занятых приборов на каждом узле, а также объема занимаемого ресурса на каждом узле. Таким образом, асимптотическое стационарное распределение вероятностей суммарного объема

занятого ресурса в узлах системы при условии растущей интенсивности входящего потока является многомерным гауссовским распределением вероятностей.

Заключение

В данной работе были исследованы суммарные объёмы занимаемых ресурсов на узлах бесконечнолинейной ресурсной сети массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком заявок. В частности, был проведен асимптотический анализ первого и второго порядков в условиях неограниченного возрастания интенсивности входящего потока и получен вид соответствующих характеристических функций.

Дальнейшие перспективы исследования определяются, прежде всего, рассмотрением подобных сетей массового обслуживания с точки зрения различных непуассоновских входящих потоков, в том числе МАР-потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев А. Н., Назаров А. А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.
2. *Галлилейская А. А., Лисовская Е. Ю.* Стационарное асимптотическое распределение вероятностей суммарного объёма занятых ресурсов в бесконечнолинейной ресурсной СМО с входящим ММРР-потоком // Труды Томского государственного университета. – Т. 304. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Международной молодежной науч. конф. Томск, 23-25 мая 2019 г. Томск: Изд. дом Том. гос. ун-та, 2019. С. 257–268.
3. *Галлилейская А. А., Лисовская Е. Ю.* Асимптотический анализ многофазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с входящим ММРР потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 13–21. DOI: 10.17223/19988605/45/2
4. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Тихомиров Илья Алексеевич — магистрант, Томский государственный университет. E-mail: tikhomirov_ilya@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической, Томский государственный университет. E-mail: smoiseeva@mail.ru

О ПЕРЕНОСЕ RATIONAL UNIFIED PROCESS ИЗ НОТАЦИИ UMA В НОТАЦИЮ ESSENCE

Д. О. Змеев, А. О. Гончар, О. В. Лазарев

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

Для сохранения и передачи информации о процессах разработки программного обеспечения могут использоваться различные модели описания. Одной из первых попыток создать такую модель являются SPEM и его расширение UMA, однако со временем их использование сошло на нет. Впоследствии идеи SPEM были расширены инициативой SEMAT, разработавшей язык и ядро Essence, также позволяющие описывать процессы разработки программного обеспечения. В данной работе рассмотрен процесс переноса описаний из нотации UMA в нотацию Essence на примере Rational Unified Process (RUP), а также предложен алгоритм, позволяющий автоматизировать большую часть этого процесса. **Ключевые слова:** *процессы разработки программного обеспечения, SPEM, SEMAT, Essence, RUP.*

Введение

Для сохранения и передачи информации об используемом компанией или отдельной командой процессе разработки программного обеспечения необходима модель для составления описаний этих процессов.

Одной из первых крупных попыток создания такой модели в 2001 году стал SPEM 1.0 [2], разработанный консорциумом компаний, включавшим Alcatel, Fujitsu и IBM. В 2002 году SPEM 1.0 был утверждён в качестве стандарта OMG. Согласно стандарту, это инструмент лишь для описания отдельных процессов разработки или групп связанных процессов разработки, но его использование для сопровождения применения процесса разработки не предполагалось.

В 2005 году было выпущено обновление стандарта SPEM 1.1 [2], ставший основой для разработанного IBM стандарта Unified Method Architecture (UMA) [1]. Для этого стандарта компанией Eclipse было разработано средство моделирования Eclipse Project Framework (EPF). В его комплект поставки вошли описания нескольких процессов разработки, в том числе OpenUP — сокращённая версия Rational Unified Process (RUP).

В то же время IBM выпустила коммерческое средство моделирования на UMA — IBM Method Composer [5]. Его комплект поставки включает описания значительно большего количества процессов разработки, в том числе «полновесного» RUP. Поскольку IBM Method Composer в действительности не является самостоятельным продуктом, а основан на ERF, существует возможность подключить его библиотеку к ERF и использовать описания процессов, разработанные IBM, в бесплатном инструменте.

В 2008 году был утверждён стандарт SPEM 2.0 [2], включивший в себя многие нововведения UMA. Отныне область применения стандарта была официально расширена на сопровождение процесса разработки по ходу проекта. Однако, интерес к SPEM к тому моменту угас, и версия ERF для SPEM 2.0, заявленная разработчиком, так и не была выпущена.

Идеи SPEM были дополнены и расширены инициативой SEMAT, разработавшей ядро и язык Essence [4] (утверждены в качестве стандарта OMG в 2014 году). Наиболее значительным дополнением со стороны SEMAT стала концепция альф и их состояний, позволяющая отслеживать прогресс проекта с помощью модели процесса разработки. Однако, количество процессов описаний разработки, описанных в нотации Essence, до сих пор существенно уступает SPEM (в лице UMA). В связи с этим представляет интерес автоматизация процесса переноса описаний, разработанных в нотации UMA, в нотацию Essence. Это позволит:

- сократить ручного труда при необходимости миграции процесса из одной нотации в другую;
- использовать более полные и обширные описания в исследовательских задачах, в том числе при разработке инструментов, использующих нотацию Essence.

1. Краткий обзор проблемы

Важность переноса описаний процессов разработки, выполненных в нотации SPEM, в нотацию Essence осознаётся даже разработчиками последней. Приложение C к стандарту ядра и языка Essence включает описание методики переноса описаний, созданных на SPEM 2.0. Однако предложенная методика имеет несколько недостатков:

- разработчики Essence настаивают на переносе лишь отдельных практик (элементов процесса), а не процессов целиком. Безусловно, возможно перенести по отдельности каждый элемент процесса, однако

- они могут использовать общие вспомогательные элементы, которые, таким образом, будут перенесены многократно;
- методика переноса, предложенная авторами Essence, предполагает практически целиком ручной перенос описаний;
 - между нотациями UMA и SPEM 2.0 существуют различия, которые хоть и не принципиальны, но не позволяют напрямую применить алгоритм переноса из SPEM 2.0 к описанию в UMA.

Решением задачи переноса описаний, созданных в EPF, в нотацию SPEM 2.0, в числе других задач занималась инициатива REMiCS (REuse and Migration of legacy applications to Interoperable Cloud Services) [3], прекратившая свою деятельность в 2018 году. Их предложение также предполагает перенос описаний вручную, однако значительная часть процесса переноса была формализована, что полезно для автоматизации данного процесса. Кроме того, участниками REMiCS был предложен ряд эвристик, позволяющий механистически осуществить перенос некоторых элементов описаний, для которых авторы Essence не предложили формального соответствия с элементами SPEM.

2. Сравнение структур стандартов

Основой структуры данных SPEM и UMA является «треугольник» из основных элементов, составляющих процесс разработки. В SPEM они именуется активностями (Activity), рабочими продуктами (WorkProduct) и ролями (Role). UMA использует несколько иные термины: роли так же называются ролями (Role), активности названы задачами (Task), а рабочие продукты разделены на артефакты (Artifact) и нематериальные результаты (Outcome). Между основными элементами SPEM и UMA установлены следующие связи: роли выполняют задачи и отвечают за рабочие продукты, а рабочие продукты могут использоваться как входы для задач и являться их выходами.

IBM Composer и EPF внутри представляют процесс как набор XML-документов, описывающих каждый элемент процесса по отдельности. Встроенная в EPF опция экспорта позволяет получить определение всего процесса одним XML-документом, структура данных которого, однако, весьма своеобразна. Названия XML-тегов, содержащих элементы описания, не представляют никакой семантики. Вместо этого тип элемента отражён в значении атрибута `xsi:type` . Кроме того, у каждого элемента есть уникальный идентификатор, указанный в теге `id` . При этом семантика XML-тегов, отображающих связи между элементами описания, отражена именно в названиях тегов. Атрибутов у таких те-

гов нет; один конец связи представлен родительским тегом, а второй — элементом, id которого указан в теле тега.

Набор базовых элементов и взаимосвязей между ними в Essence частично соответствует предлагаемому в UMA. Например, сущности рабочих продуктов и задач (в Essence — активностей) практически идентичны. В то же время, некоторые элементы Essence и UMA не одинаковы. Например, в Essence отсутствует понятие роли, оно заменено отдельными компетенциями (Competency).

Кроме того, ключевой элемент Essence не имеет никакого аналога в UMA — это сущности ядра (Kernel), такие как альфы (Alpha) и пространства действий (Activity Spaces). Альфы — это аспекты проекта, по которым измеряется его прогресс, а пространства действий — это обобщённые группы действий, необходимые для завершения проекта. В контексте решения задачи переноса описаний из UMA в Essence важно отметить, что набор элементов ядра не меняется от одного процесса разработки к другому, напротив, он установлен стандартом Essence для всей программной инженерии. Таким образом, при переносе описаний не требуется создавать элементы ядра на основе каких-либо элементов UMA; задача ограничивается тем, чтобы установить связи между элементами ядра и другими элементами, перенесёнными из описания на UMA.

Таким образом, полная автоматизация переноса описаний из одной метамодели в другую ограничена следующими факторами:

- концептуальная разница метамodelей и разница их назначений, не позволяющая избежать экспертной оценки при переносе;
- особенности IBM Composer и EPF, например, формат хранения данных, ориентированный лишь на цели самих этих инструментов и не предполагающий удобства переноса данных.

3. Алгоритм переноса

Процесс переноса описания является двухступенчатым: сначала выполняется подготовка данных вручную, а затем автоматический перенос.

Ручная подготовка данных включает в себя следующие операции:

1. Выписать все задачи из выбранного процесса в нотации UMA.
2. Для каждой задачи: задать связь с ActivitySpace на основе экспертной оценки.
3. Для каждой задачи: задать связь с состоянием Alpha из ядра на основе экспертной оценки.

В результате будет получен список задач с соответствием каждой ActivitySpace. Это позволяет автоматически, на основе эвристик, получить отношение рабочих продуктов и практик, в которых они содержатся, к альфам ядра, а также их влияние на каждое состояние альфы.

Алгоритм автоматического переноса реализован на Python [6]. Для простоты реализации XML-документ, экспортированный из EPF, перед началом автоматического переноса конвертируется в формат JSON с помощью утилиты JSON Schema Generator (плагин для интегрированных сред разработки компании JetBrains). Алгоритм содержит следующие шаги:

1. Прочитать файл с описанием метода UMA;
2. Получить списки отдельных элементов с разными xsi:type;
3. Найти в файле элемент с xsi:type Process. Элемент такого типа описывает процесс разработки целиком;
4. Найти для каждого xsi:type наследуемые элементы и соединить их в один. У наследуемых элементов всегда определены только новые поля, совпадений нет, что позволяет использовать эвристику и объединить наследуемые в один элемент;
5. Создать две практики Essence - Lifecycle (жизненный цикл процесса) и Roles (основные роли);
6. Для каждого элемента с xsi:type=role создать Essence Pattern в практике Roles;
7. Для всех BreakdownElement внутри элемента с xsi:type=Process и всех дочерних BreakdownElement рекурсивно создать Essence Pattern. Таким способом задается жизненный цикл процесса и его шаги, что позволяет сохранить связь шагов процесса с задачами при переносе;
8. Для каждой практики в терминах UMA требуется: подсчитать принадлежность практики к определенному Activity Space, создать практику Essence. Каждая задача, принадлежащая практике UMA, уже имеет заданную ручную связь с определенным Activity Space. В свою очередь, отдельный Activity Space имеет связь с Area of Concern. Следовательно, для всех задач в практике и всех связей с Activity Space можно определить самый часто встречающийся Area of Concern.
9. Для каждого артефакта UMA: определить уровни детализации, как переходы между различными задачами. Каждая задача, где выбранный рабочий продукт является выходом, считается за определенный уровень детализации. К примеру, для рабочего продукта Use-Case Model, будет два уровня детализации: Identify and Outline Requirements done, Detail Use-Case Scenarios done;

10. Для каждого артефакта: Создать рабочий продукт Essence с определенными ранее уровнями детализации. Определить принадлежность продукта можно аналогичным способом, как и для практик, однако учитывается связь не с Activity Space, а с состояниями альф;

11. Для каждой задачи: Создать активность Essence (Activity), задав связи с рабочими продуктами такие же, как у задачи (в соответствии с описанным ранее совпадением элементов описаний метамodelей). Для каждой созданной Activity задать соответствие состояниям альф ядра, ранее указанных вручную для задачи.

Заключения

Описанный в разделе 3 алгоритм частично автоматического переноса описаний был реализован на языке Python. С использованием реализованного алгоритма был осуществлён перенос Rational Unified Process.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. projects.eclipse.org/projects/technology.epf — Eclipse Process Framework Project — Eclipse. 2007.
2. www.omg.org/spec/SPEM — Software & Systems Process Engineering Metamodel — OMG. 2008.
3. www.slideserve.com/chavi/experiences-with-migrating-from-spem-2-0-to-essence-1-0-for-the-remics-methodology — Experiences with Migrating from SPEM 2.0 to Essence 1.0 for the REMiCS Methodology. 2013.
4. www.omg.org/spec/Essence — Essence — OMG. 2018.
5. www.ibm.com/docs/en/engineering-lifecycle-management-suite/lifecycle-optimization-method-composer/7.6.1?topic=overview — Engineering Method Composer — IBM. 2022.
6. <https://github.com/AlekseyGonchar/essencescript> — essencescript — GitHub. 2023.
7. <https://plugins.jetbrains.com/plugin/22597-json-schema-generator> — JSON Schema Generator — JetBrains Marketplace. 2024.

Змеев Денис Олегович — канд. техн. наук, доцент, научно-образовательный центр «Высшая ИТ школа». E-mail: denis.zmeev@accounts.tsu.ru

Гончар Алексей Олегович — аспирант, физико-технический факультет. E-mail: aleksey.gonchar@stud.tsu.ru

Лазарев Олег Вадимович — аспирант, факультет инновационных технологий. E-mail: laoltomsk@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРОТОКОЛОМ МНОЖЕСТВЕННОГО СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

Я. Е. Измайлова, А. Т. Исаев

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

Авторами рассмотрена система с повторными вызовами (RQ-system) со специальным протоколом множественного случайного доступа. Под специальным протоколом множественного доступа подразумевается, что с заданной вероятностью заявки, заставшие прибор занятым, могут вытеснять обслуживаемые заявки или вступать с ними в конфликт. Был разработан и реализован (в пакете Mathcad) численный алгоритм для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите и состояний прибора. А также для заданных значений параметров системы были проведены численные эксперименты и построены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Ключевые слова: RQ-система, конфликт заявок, вытеснение заявок, численный алгоритм.

Введение

Все больше и больше бизнес-процессов связаны с большими данными. Поэтому разработка соответствующих математических моделей современных телекоммуникационных систем и модификация существующих очень актуальны. Подходящими моделями являются системы массового обслуживания с повторными вызовами (Retrial Queueing System). Проблему исследования RQ-систем можно внести в список наиболее актуальных задач теории массового обслуживания. Они характеризуются ситуациями повторных обращений заявок из ИПВ (источника повторных вызовов) к обслуживающему прибору.

Существует множество работ, посвященных исследованию систем массового обслуживания с ИПВ. Например такие системы были рассмотрены Wilkinson R.I. [1] и Cohen J. [2]. В работах Goshtoni G., Elldin A. рассмотрены подходы к описанию систем с ИПВ. Исследование различных процессов в RQ-системах можно изучить в работах Falin G.I. и Artolejo J.R. [3, 4].

В реальных системах очень часто наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок тре-

буют рассмотрения моделей, выходящих за рамки классических СМО (систем массового обслуживания). За счет чего интерес к рассмотрению таких, более реальных систем возрастает. В несинхронизированной системе связи с ограниченным количеством ресурсов, например, каналов связи, существует значительная вероятность коллизии запросов. В этом случае передача теряется, и прерванные запросы необходимо передать повторно; следовательно, производительность системы неоптимальна. Большое значение имеет разработка методов, процедур и протоколов, которые способны предотвратить конфликты системы с клиентами или хотя бы попытаться оптимизировать ее производительность. Некоторые недавние результаты в этом направлении можно найти в [5-12].

В данной работе рассмотрим RQ-систему со специальным протоколом множественного случайного доступа. Для исследования такой системы авторами предлагается допредельный метод, который позволяет получить распределение вероятностей состояний системы.

1. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим систему массового обслуживания с ИПВ (орбитой), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ .

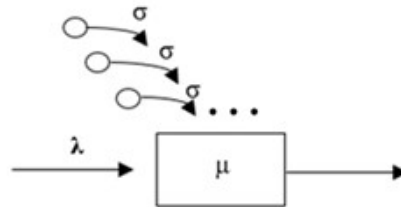


Рис. 1. RQ-система M|M|1

Считается, что требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ . Если прибор занят, то заявка, которая поступила, с вероятностью r_0 переходит в ИПВ. С вероятностью r_1 поступившая заявка вытесняет обслуживаемую заявку в приборе и сама занимает его для обслуживания, а обслуживаемая заявка переходит в ИПВ. С вероятностью r_2 возникает конфликт между

поступившей заявкой и исходной вследствие чего они обе переходят в ИПВ.

Заявки в ИПВ осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявки вновь обращаются к прибору с повторной попыткой его захвата. Дисциплина обращения заявок из ИПВ аналогична дисциплине обращения вновь прибывших заявок.

После успешного обслуживания заявка покидает систему.

Необходимо найти распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и состояний прибора.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим

$$P\{k(t), i(t)\} = P\{k(t) = k; i(t) = i\} = P(k, i, t)$$

как вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P(k, i, t)$, используя формулу полной вероятности, запишем допредельные равенства Δt -методом:

$$\begin{cases} P(0, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P(0, i, t)(1 - i\sigma\Delta t) + \mu\Delta tP(1, i, t) + \\ + r_2\lambda\Delta tP(1, i - 2, t) + r_2(i - 1)\sigma\Delta tP(1, i - 1, t) + o(\Delta t), \\ P(1, i, t + \Delta t) = \lambda\Delta tP(0, i, t) + (i + 1)\sigma\Delta tP(0, i + 1, t) + \\ + (1 - \lambda\Delta t)P(1, i, t)(1 - \mu\Delta t)(1 - i\sigma\Delta t) + \\ + r_0\lambda\Delta tP(1, i - 1, t) + r_0i\sigma\Delta tP(1, i, t) + \\ + r_1\lambda\Delta tP(1, i - 1, t) + r_1i\sigma\Delta tP(1, i, t) + o(\Delta t). \end{cases}$$

Переходим к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P(0, i, t) + \mu P(1, i, t) + \\ + r_2 \lambda P(1, i - 2, t) + r_2(i - 1)\sigma P(1, i - 1, t), \\ \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} = \lambda P(0, i, t) + (i + 1)\sigma P(0, i + 1, t) + \\ - (\lambda + \mu + i\sigma)P(1, i, t) + r_0 \lambda P(1, i - 1, t) + r_0 \lambda P(1, i - 1, t) + \\ + r_0 i \sigma P(1, i, t) + r_1 \lambda P(1, i - 1, t) + r_1 i \sigma P(1, i, t). \end{cases}$$

Обозначим $P(k, i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, i, t)$. Тогда в стационарном режиме наша система будет иметь вид:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P(0, i) + \mu P(1, i) + \\ + r_2 \lambda P(1, i - 2) + r_2(i - 1)\sigma P(1, i - 1) = 0, \\ \lambda P(0, i) + (i + 1)\sigma P(0, i + 1) + \\ - (\lambda + \mu + i\sigma)P(1, i) + r_0 \lambda P(1, i - 1) + r_0 \lambda P(1, i - 1) + \\ + r_0 i \sigma P(1, i) + r_1 \lambda P(1, i - 1) + r_1 i \sigma P(1, i) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Переходим к численному анализу.

3. Численный анализ

Чтобы получить распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов, следует рассмотреть систему (3) уравнений Колмогорова для стационарного распределения $P(k, i)$.

Найдем решение $V(k, i)$ системы (3) в виде алгоритма численной реализации.

1. Полагаем что $V(0, 0) = 1$.
2. Находим значение $V(1, 0)$:

$$V(1, 0) = \frac{\lambda V(0, 0)}{\mu}.$$

3. Выбираем достаточно большое целое N и полагаем, что $i = \overline{1, N}$, а $V(0, i)$ определяются рекуррентным соотношением:

$$V(0, i) = \frac{(\lambda + \mu + (i - 1)\sigma r_2)V(1, i - 1)}{i\sigma} - \frac{\lambda(V(0, i - 1) + (r_0 + r_1)V(1, i - 2))}{i\sigma}$$

4. Находим значения $V(1, i)$ для всех $i = \overline{1, N}$:

$$V(1, i) = \frac{(\lambda + i\sigma)V(0, i) - r_2\lambda V(1, i-2) - r_2(i-1)\sigma V(1, i-1)}{\mu}.$$

Определяем нормирующую величину:

$$d = \sum_{i=0}^N (V(0, i) + V(1, i)).$$

Двумерное распределение вероятностей полагаем равным:

$$P(k, i) = \frac{1}{d}V(k, i).$$

Величина N выбирается из условия, что нормированное значение вероятности $P(N)$ достаточно мало, например, равняется величине машинного нуля.

Далее одномерное распределение $P(i)$, можно определить равенством:

$$P(i) = P(0, i) + P(1, i)$$

которое численно решает поставленную задачу нахождения распределения вероятностей числа заявок в источник повторных вызовов.

Для заданных параметров, а именно $\mu = 1, \lambda = 0.7, N = 1000, r_0 = 0.8, r_1 = 0.1, r_2 = 1 - (r_0 + r_1)$ распределение вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ для $\sigma = \{0.1, 0.05\}$ имеет вид

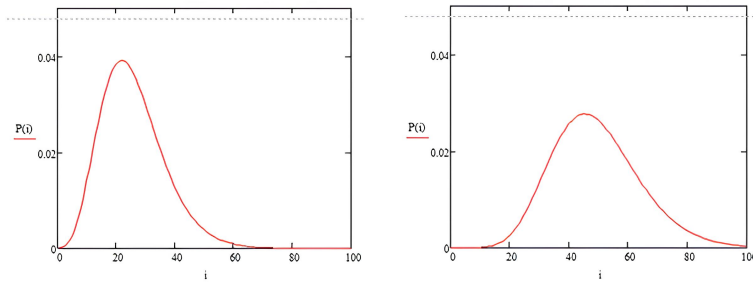


Рис. 2. Распределения вероятностей числа заявок в ИПВ для $\sigma = \{0.1, 0.05\}$

Заключение

В предложенной работе рассмотрена RQ-система (retrial queue) со специальным протоколом случайного множественного доступа. Найдено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Получен алгоритм численной реализации и построены графики распределения вероятностей числа заявок в ИПВ для заданных значений параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilkinson R. I.* Theories for toll traffic engineering in the USA. // The Bell System Technical Journal. 1956. № 2. P. 421-507.
2. *Эллдин А.* Подход к теоретическому описанию повторных попыток вызова. // Ericsson Technics 1967. № 3. P. 345-407.
3. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997.
4. *Artolejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems // A Computational Approach, Springer 2008. A.A. Ali and S. Wei, "Modeling of coupled collision and congestion in finite source wireless access systems," in: Wireless Communications and Networking Conference (WCNC) (2015), pp. 1113–1118.
5. *Balsamo S., Dei Rossi G. L., Marin A.* "Modelling retrial-upon-conflict systems with productform stochastic petri nets," in: International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications, Springer (2013), pp. 52–66
6. *Kim J. S.* "Retrial queueing system with collision and impatience," Commun. Korean Math. Soc., 25, No. 4, 647–653 (2010).
7. *Kim J., Kim B.* "A survey of retrial queueing systems," Ann. Oper. Res., 247, No. 1, 3–36 (2016).
8. *Kvach A., Nazarov A.* "Sojourn time analysis of finite source markov retrial queueing system with collision," Commun. Comput. Inform. Sci., 564, 64–72 (2015).
9. *Lyubina T. V., Nazarov A. A.* "Research of the non-Markov dynamic retrial queue system with collision," Herald Kemerovo State Univ., 1, No. 49, 38–44 (2012).
10. *Nazarov A., Kvach A., Yampolsky V.* "Asymptotic analysis of closed Markov retrial queueing system with collision," Commun. Comput. Inform. Sci., 487, 334–341 (2014).
11. *Назаров А. А., Измайлова Я. Е.* Исследование RQ-системы с вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 331-342.

-
12. Назаров А. А., Измайлова Я. Е. Асимптотический анализ системы с повторными вызовами, вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 29–34. DOI: 10.17223/19988605/49/4

Измайлова Яна Евгеньевна — кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории вероятностей и математической статистики. E-mail: *evgenyevna.92@mail.ru*

Исаев Актан Токтобекович — студент 3 курса; институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: *aktanisaev350@gmail.com*

КЛАССИФИКАЦИЯ И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИН ИНТЕРВАЛОВ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Д. Д. Салимзянова, Е. Ю. Лисовская

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе были сгенерированы дополнительные функции распределения длин интервалов для рекуррентного потока (гиперэкспоненциальное, логнормальное, равномерное, Вейбулла) и произведена их классификация и оценка параметров. Для реализации использовались алгоритмы из библиотеки `catboost`. Предсказательная способность оценивалась с помощью метрик `assigasu`, `AUC-ROC`, `MAE`, R^2 .

Ключевые слова: *классификация, оценка параметров, рекуррентный поток, сетевой трафик*

Введение

Идентификация интернет-трафика может помочь ученым-математикам и инженерам объединить свои силы в изучении коммуникационных сетей. С одной стороны, ученые активно исследуют сложные модели СМО, которые могут упростить работу инженеров. С другой стороны, инженеры, которые знают все особенности сетей связи и могут описать существующие стратегии обслуживания трафика, не могут проработать их досконально, поскольку проблема идентификации трафика еще не решена. Данная работа является продолжением исследования [1], в котором с помощью нейронных сетей была решена задача классификации трех потоков событий (стационарный пуассоновский, рекуррентный с гамма-распределением, ММРР). Ввиду того, что реальные системы сложны возникает необходимость в исследовании дополнительных видов потоков.

1. Описание исследуемых данных и используемых архитектур

При решении задачи классификации использовались моменты времени наступления событий t_i , также каждому наблюдению была присвоена метка о принадлежности к одному из видов исследуемых распределений (таблица 1) (количество наблюдений для каждого класса –

10000, количество моментов – 500). Для задачи регрессии (оценки параметров) использовались интервалы времени между моментами наступления событий ($\tau_i = t_i - t_{i-1}$) (количество наблюдений – 10000, количество интервалов – 3000). Данные были получены путем моделирования [2].

Таблица 1
Значения параметров распределений длин интервалов рекуррентного потока

Параметр	Значение параметра
Гамма	
Значение параметра α	$\alpha = exp(100)$
Значение параметра β	$\beta = unif(0, 100)$
Гиперэкспоненциальное	
Значение параметра λ_1	$\lambda_1 = unif(0, 10000)$
Значение параметра λ_2	$\lambda_2 = unif(0, 10000)$
Значение параметра p	$p = unif(0, 1)$
Логнормальное	
Значение параметра μ	$\mu = unif(-15, 0)$
Значение параметра σ	$\sigma = unif(0, 10)$
Равномерное	
Значение параметра a	$a = unif(0, 0.5)$
Значение параметра b	$b = unif(a, 0.5)$
Вейбулла	
Значение параметра a	$a = unif(0, 0.01)$
Значение параметра b	$b = unif(0, 100)$

Для решения задач был использован алгоритм классического машинного обучения, лес решающих деревьев (random forest). Для классификации, алгоритм был реализован с помощью CatBoostClassifier, для регрессии – CatBoostRegressor из библиотеки CatBoost [3].

2. Метрики оценки качества

В качестве метрик использовались следующие:

- Классификация: ассигасу (правильность), AUC-ROC;
- Регрессия: MAE (средняя абсолютная ошибка), R^2 (коэффициент детерминации).

3. Задача классификации

В качестве гиперпараметров для настройки классификатора CatBoostClassifier были выбраны следующие: depth, learning_rate (lr), l2_leaf_reg

(12). Модели были обучены с разными значениями гиперпараметров. В данной работе приведены значения гиперпараметров и метрик качества для моделей с худшей и лучшей предсказательной способностью, модель 1 и модель 2, соответственно (таблица 2).

Таблица 2

Значения метрик моделей в зависимости от значений гиперпараметров

№ модели	depth	lr	l2	Accuracy
1	6	0,001	10	0,815800
2	13	0,1	5	0,879800

Также для моделей с худшей и лучшей предсказательной способностью, были построены ROC-кривые для каждого класса (рисунок 1). Из графиков видно, что все типы распределений классифицируются моделью 2 с высокой точностью.

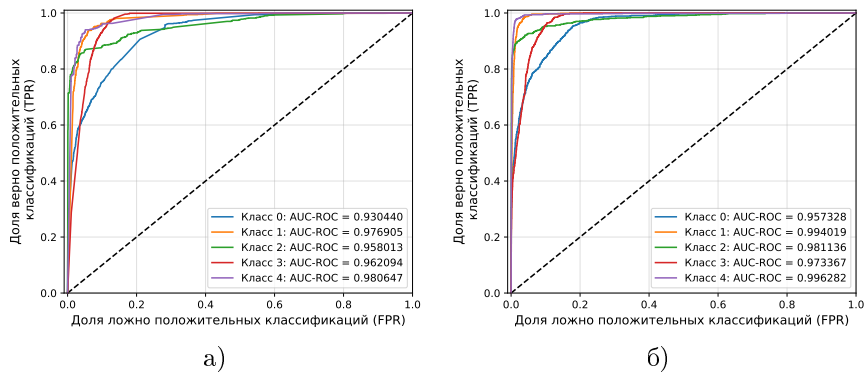


Рис. 1. ROC-кривые для каждого класса распределений длин интервалов рекуррентного потока: а) Модель 1, б) Модель 2

4. Задача регрессии

Гамма-распределение. Для гамма-распределения длин интервалов рекуррентного потока была построена гистограмма интенсивностей. Было установлено, что набор данных имеет некоторые выбросы, которые могут влиять на предсказательную способность (переобучение модели). Попробуем обучить модели на имеющихся данных и на данных без выбросов, которые были получены с помощью метода межквартильного размаха относительно величины $\lambda = \frac{1}{\alpha\beta}$.

Для оценки параметров с помощью CatBoostClassifier было обучено два регрессора для каждого параметра распределения, гиперпараметры модели были выбраны следующими: $depth = 6$, $lr = 0,03$, $l2 = 3$. Сравнение метрик качества моделей, обученных на данных с выбросами и без представлено в таблице 3.

Таблица 3
Сравнение метрик моделей catboost (данные с выбросами – модель 1, данные без выбросов – модель 2)

№ модели	MAE, α	R^2, α	MAE, β	R^2, β
1	0,000984	0,976388	18,107817	0,442301
2	0,001210	0,954812	16,386757	0,491701

Как видно удаление выбросов почти никак не повлияло на предсказательную способность моделей.

Гиперэкспоненциальное распределение. Гиперэкспоненциальное распределение длин интервалов рекуррентного потока имеет три параметра $(\lambda_1, \lambda_2, p)$. Результаты метрик оценки этих параметров представлены в таблице 4.

Таблица 4
Значения метрик для рекуррентного потока с гиперэкспоненциальным распределением длин интервалов

Параметр	MAE	R^2
λ_1	1797,863785	0,348130
λ_2	1797,539155	0,398231
p	0,252760	-0,017712

Как видно из таблицы 4 коэффициент детерминации для параметров λ_1 и λ_2 меньше 40%, что говорит о плохой предсказательной способности модели. В ситуации с параметром p можно сказать, что модель работает случайно, так как коэффициент детерминации близок к нулю.

Чтобы достичь положительных результатов на данном этапе, для смоделированной выборки была посчитана интенсивность наступления событий λ

$$\lambda = \left(\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2} \right)^{-1},$$

эта величина также была оценена с помощью модели CatBoostRegressor ($MAE = 434,737493$, $R^2 = 0,952255$).

Таким образом, на данном этапе для параметров гиперэкспоненциального распределения не удалось достичь желаемых значений метрик, но были получены высокие результаты метрик для величины λ , которой может быть достаточно для решения некоторых задач, например как в работе [4].

Логнормальное распределение. При оценке параметров логнормального распределения (μ , σ) модель достигла хорошей точности ($MAE_\mu = 0,432899$, $R_\mu^2 = 0,978102$, $MAE_\sigma = 0,398019$, $R_\sigma^2 = 0,969606$).

Равномерное распределение. Равномерное распределение задается двумя параметрами (a , b), для которых модель алгоритма CatBoostRegressor смогла достичь высокой предсказательной способности ($MAE_a = 0,011525$, $R_a^2 = 0,989165$, $MAE_b = 0,008264$, $R_b^2 = 0,989136$).

Распределение Вейбулла. Для оценивания параметров распределения Вейбулла так же как и в случае с гамма-распределением использовались два набора данных: с выбросами и без выбросов, относительно значения интенсивности λ .

$$\lambda = \left(a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right)^{-1}. \quad (1)$$

Дополнительно к оценке параметров распределения Вейбулла была оценена величина λ , для обоих наборов данных (таблица 5).

Таблица 5
Метрики оценки параметров на данных до и после удаления выбросов

Параметр	MAE	R ²
До удаления выбросов		
a	0,000100	0,991574
b	17,351006	0,517343
λ	829,408128	0,403601
После удаления выбросов		
a	0,000102	0,987254
b	15,932953	0,574132
λ	5,158726	0,990280

Как видно из таблицы 5 коэффициент детерминации параметра a больше 98% для обоих наборов данных. Метрики параметра b стано-

вятся лучше (MAE уменьшается, R^2 увеличивается) для набора данных без выбросов, но коэффициент детерминации не достигает 60%, что говорит о слабой предсказательной способности модели. Метрики величины λ также улучшаются, но в отличие от параметра b , в этом случае модель достигает отличной точности ($R^2 = 99\%$).

Заключение

Модель классификации, основанная на алгоритме CatBoostClassifier имеет хорошую предсказательную способность (AUC-ROC больше 0,95 для всех классов, $accuracy = 0,879800$). Для гамма-распределения была достигнута высокая точность оценки только для параметра α ($R^2 = 0,976388$). При оценке параметров гиперэкспоненциального распределения не удалось достичь высокой точности, но получилось оценить интенсивность наступления событий λ ($R^2 = 0,952255$), которой может быть достаточно при решении некоторых задач. Для логнормального, равномерного распределений и распределения Вейбулла была достигнута высокая предсказательная способность моделей CatBoostRegressor при оценке параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугакова Д. Д., Лисовская Е. Ю. Классификация потоков событий с помощью нейронных сетей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023), Томск: Томский государственный университет, 2023. С. 95–100.
2. Марголис Н. Ю. Имитационное моделирование. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. С. 129
3. <https://catboost.ai/en/docs/> — CatBoost.
4. Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П. Асимптотический анализ второго порядка для бесконечнолинейной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком требований случайного объема // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий, Ташкент, 2016. С. 205–208.

Салимзянова Дарья Дмитриевна — студент института прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: darya2001@inbox.ru

Лисовская Екатерина Юрьевна — к.ф.-м.н., доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики. E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

СУММЫ И МАКСИМУМЫ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СЛУЧАЙНЫХ СЕТЯХ

Н. М. Маркович

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова, г. Москва, Россия

Рассматриваются суммы и максимумы последовательностей нестационарных случайных величин, распределенных с тяжелыми правильно меняющимися хвостами, возникающие во многих приложениях. Последовательности предполагаются случайной длины, которая может иметь более легкий или более тяжелый хвост, чем слагаемые суммы. Каждая случайная величина последовательности предполагается имеющей некоторые хвостовой и экстремальный индексы. Решается задача определения хвостового и экстремального индексов сумм и максимумов последовательностей в двух постановках: когда существует единственное слагаемое с минимальным хвостовым индексом и когда таких слагаемых случайное число. Статья содержит краткий обзор работ автора по решению этой задачи. **Ключевые слова:** случайные суммы, случайные максимумы, распределения с правильно меняющимися хвостами, хвостовой индекс, экстремальный индекс.

Введение

Суммы и максимумы последовательностей случайной длины нестационарных случайных величин, распределенных с тяжелыми правильно меняющимися хвостами, рассматривались многими авторами в силу большого числа приложений, включая теорию очередей, ветвящихся процессов, финансовых рисков, случайных сетей. Рассматривается двумерный массив $\{Y_{n,i} : n, i \geq 1\}$ неотрицательных случайных величин (сл.в.), в котором индекс строки n соответствует времени, а индекс столбца i нумерует серии. На том же вероятностном пространстве предполагается, что существуют неотрицательные целочисленные сл.в. $\{N_n : n \geq 1\}$. Пусть $\{Y_{n,i} : n \geq 1\}$ стационарная в сильном смысле последовательность с экстремальным индексом (ЭИ) θ_i , распределенная

с правильно меняющимся хвостом

$$P\{Y_{n,i} > x\} = \ell_i(x)x^{-k_i} \quad (1)$$

с хвостовым индексом (ХИ) $k_i > 0$ и медленно меняющейся функцией $\ell_i(x)$ для любого $i \geq 1$. Структура зависимости по i произвольна.

Сильно стационарная последовательность $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ с функцией распределения $F(x)$ и максимумом $M_n = \bigvee_{j=1}^n Y_j = \max_j Y_j$ называется имеющей ЭИ $\theta \in [0, 1]$, если для любого $0 < \tau < \infty$ существует последовательность вещественных чисел $u_n = u_n(\tau)$ таких, что выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(u_n)) = \tau, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{M_n \leq u_n\} = e^{-\tau\theta}$$

([4], стр.63). Независимые одинаково распределенные сл.в. $\{Y_n\}$ имеют $\theta = 1$. Обратное может быть неверным. ЭИ, близкий к нулю означает какую-то локальную зависимость. В работе [5] рассматривались для положительных констант z_1, z_2, \dots суммы и максимумы

$$\begin{aligned} Y_n^*(z, N_n) &= \max(z_1 Y_{n,1}, \dots, z_{N_n} Y_{n,N_n}), \\ Y_n(z, N_n) &= z_1 Y_{n,1} + \dots + z_{N_n} Y_{n,N_n} \end{aligned} \quad (2)$$

распределенных с правильно меняющимся хвостом сл.в. $\{Y_{n,i} : n \geq 1\}$. Решается задача определения ХИ и ЭИ сумм и максимумов последовательностей в двух постановках: когда существует единственное слагаемое с минимальным ХИ и когда таких слагаемых случайное число. Статья содержит краткий обзор работ [5], [7].

Результаты

1. Единственная серия с минимальным хвостовым индексом
Теорема 1, относящаяся к суммам и максимумам (2), доказана в [5]. Предположено, что последовательности столбцов $\{Y_{n,i} : i \geq 1\}$ имеют стационарные хвостовые функции (1) по n с положительными ХИ $\{k_1, k_2, \dots\}$ и ЭИ $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ для каждого фиксированного i . $\{\ell_i(x)\}$ удовлетворяют условию по i : для любых констант $A > 1, \delta > 0$ существует $x_0(A, \delta)$ такое, что для всех $i \geq 1$ выполнено

$$\ell_i(x) \leq Ax^\delta, \quad x > x_0(A, \delta). \quad (3)$$

Распределение последовательности $\{N_n : n \geq 1\}$, как отмечено во многих работах, например, в [3], [8], [9], может быть представлено распределением с правильно меняющимся хвостом с ХИ $\alpha > 0$, т.е.

$$P(N_n > x) = x^{-\alpha} \tilde{\ell}_n(x). \quad (4)$$

Пусть k_1 - минимальный ХИ, $k := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{2 \leq i \leq l_n} k_i$,

$$l_n = [n^\chi], \quad (5)$$

и χ удовлетворяет неравенству

$$0 < \chi < \chi_0, \quad \chi_0 = \frac{k - k_1}{k_1(k + 1)}. \quad (6)$$

Допускается произвольная зависимость между $\{Y_{n,i}\}$ и $\{N_n\}$. Хвост N_n не доминирует хвост слагаемого $Y_{n,1}$, чье распределение имеет наиболее тяжелый хвост. Пусть $\ell(x)$ такое, что $\ell_1(x) = \ell^{-k_1}(x)$ и $\ell^\sharp(x)$ сопряжена про Бруйну к $\ell(x)$, см. [1]. Выберем уровень как

$$u_n = yn^{1/k_1} \ell_1^\sharp(n), \quad y > 0, \quad (7)$$

где обозначено $\ell_1^\sharp(x) = \ell^\sharp(x^{1/k_1})$, а положительные веса $\{z_i\}$ ограничены.

Теорема 1. [5] Пусть медленно меняющиеся функции $\{\tilde{\ell}_n(x)\}_{n \geq 1}$ в (4) и $\{\ell_i(x)\}_{i \geq 1}$ в (1) удовлетворяют условию (3). Предположим, что $k_1 < k$ и выполнено

$$P\{N_n > l_n\} = o(P\{Y_{n,1} > u_n\}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где последовательность l_n удовлетворяет (5) и (6). Тогда последовательности $Y_n^*(z, N_n)$ и $Y_n(z, N_n)$ имеют те же ХИ k_1 и ЭИ θ_1 .

2. Случайное число серий с минимальным хвостовым индексом
В работе [7] теорема 1 была расширена для случая, когда случайное число слагаемых в (2) (и соответствующие столбцы-серии) могут иметь минимальный ХИ. Такая постановка возникает при распределенных вычислениях, в случайных сетях и телекоммуникационных системах.

Для определения ХИ и ЭИ максимумов $Y_n^*(z, N_n)$ и сумм $Y_n(z, N_n)$ нужны дополнительные условия на эти столбцы. В [7] вводятся такие условия:

- (C1) Стационарные последовательности $\{Y_{n,i}\}_{n \geq 1}$, $i \in \{1, \dots, d\}$ взаимно независимы и независимы от последовательностей $\{Y_{n,i}\}_{n \geq 1}$, $i \in \{d + 1, \dots, l_n\}$.
- (C2) Предположим, что $\{Y_{n,i}\}_{n \geq 1}$, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ удовлетворяют следующим условиям при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{P\{Y_{n,i} > x\}}{x^{-k_1} \ell_1(x)} \rightarrow c_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, d\}, \quad (9)$$

для некоторых неотрицательных чисел c_i ,

$$\frac{P\{Y_{n,i} > x, Y_{n,j} > x\}}{x^{-k_1} \ell_1(x)} \rightarrow 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Из леммы 2.1 в работе [2] в условиях (C2) выполнено

$$\frac{P\{\sum_{i=1}^d Y_{n,i} > x\}}{x^{-k_1} \ell_1(x)} \rightarrow \sum_{i=1}^d c_i, \quad x \rightarrow \infty \quad (10)$$

при любом $n \geq 1$.

(C3) Предположим, что существует $i \in \{1, \dots, d\}$ такое, что выполнено

$$P\{\max_{1 \leq j \leq d, j \neq i} (z_j M_n^{(j)}) > u_n, z_i M_n^{(i)} \leq u_n\} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Пусть u_n в теоремах 2, 3 такое, как в (7).

Теорема 2. [7] Пусть (3) выполнено для всех $d+1 \leq i \leq l_n$, и удовлетворяются (5), (6). Если дополнительно (C1) или (10) выполняется, то $Y_n^*(z, l_n)$ и $Y_n(z, l_n)$ имеют ХИ k_1 .

1) Если (C1) выполнено, то $Y_n^*(z, l_n)$ и $Y_n(z, l_n)$ имеют один и тот же ЭИ

$$\theta(z) = \frac{\sum_{j=1}^d \theta_j z_j^{k_1}}{\sum_{j=1}^d z_j^{k_1}}. \quad (12)$$

2) Если (C3) выполнено, то $Y_n^*(z, l_n)$ имеет ЭИ θ_i . Если дополнительно к (C3) выполнено (10), то $Y_n(z, l_n)$ имеет ЭИ тот же, что и $Y_n^*(z, l_n)$.

Теорема 3. [7] Пусть множество медленно меняющихся функций $\{\ell_i(x)\}_{i \geq 1}$ в (1) и $\{\tilde{\ell}_n(x)\}_{n \geq 1}$ в (4) удовлетворяют условию (3) и выполнены (5), (6), (8). Предположим, что d и $\{Y_{n,i}\}$ независимы.

(i) Пусть d ограниченная дискретная сл.в. такая, что выполнено $1 < d < d_n = \min(C, l_n)$, $C > 1$.

(1) Если (C1) или (10) выполнено для любого $d \in \{2, 3, \dots, [d_n - 1]\}$, а N_n и $\{Y_{n,i}\}$ независимы, то $Y_n(z, N_n)$ и $Y_n^*(z, N_n)$ имеют ХИ k_1 .

(2) Если выполнено (C3), где в (11) d заменен на $[d_n - 1]$, то $Y_n^*(z, N_n)$ имеет ЭИ θ_i , $i \in \{1, 2, \dots, [d_n - 1]\}$. Если дополнительно выполнено (10) для любого $d \in \{2, 3, \dots, [d_n - 1]\}$, то $Y_n(z, N_n)$ имеет тот же ЭИ.

- (ii) Предположим, что $d > 1$ ограниченная дискретная сл.в., равная положительному целому почти наверное. Тогда все утверждения пункта (i) выполнены при тех же предположениях.

В теоремах 4, 5 рассматривается противоположное условие к (8):

$$P\{Y_{n,1} > u_n\} = o(P\{N_n > l_n\}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

В теореме 4 рассматривается случай единственного столбца-серии с минимальным ХИ, а в теореме 5 - случайного числа таких столбцов-серий.

Теорема 4. [7] Пусть условия теоремы 1 выполнены, кроме (8), и последовательность l_n удовлетворяет (5) и (6).

- (i) Предположим, что (13) и

$$\alpha\chi_0 > 1 + \frac{\alpha}{k_1}\delta^*$$

для $\delta^* > 0$ выполнены, где $\alpha > 0$ - ХИ для N_n . Тогда последовательности $Y_n^*(z, N_n)$ и $Y_n(z, N_n)$ имеют один и тот же ХИ k_1 и, если выполнено

$$\alpha\chi_0 > 1 + \frac{1}{2}(1 - \alpha\chi),$$

то и тот же ЭИ θ_1 .

- (ii) Предположим, что выполнено

$$P\{N_n > l_n\} = P\{z_1 Y_{n,1} > u_n\}(1 + o(1))$$

и N_n распределено с правильно меняющимся хвостом (4). Тогда $Y_n^*(z, N_n)$ и $Y_n(z, N_n)$ имеют один и тот же ХИ k_1 и ЭИ θ_1 .

Теорема 5. [7] Пусть условия теоремы 3 выполнены, но (8) заменено на (13) и (14). Тогда все утверждения теоремы 3 относительно ХИ и ЭИ выполняются.

Заключение

Получены ХИ и ЭИ максимумов и сумм взвешенных нестационарных последовательностей случайной длины сл.в., распределенных с правильно меняющимися хвостами. Рассматривается массив $\{Y_{n,i} : n, i \geq 1\}$. Теорема 1 из работы [5] предполагает, что единственный столбец в $\{Y_{n,i}\}$ имеет минимальный ХИ. В теоремах 2 и 3 из [7] случайное ограниченное число столбцов имеет минимальный ХИ. В теоремах 2 и 3 при этом предполагается, что распределение случайной длины последовательностей-строк $\{Y_{n,i} : n, i \geq 1\}$ имеет более легкий хвост,

чем слагаемые в сумме и веса положительные. В теоремах 4 и 5 напротив предполагается, что случайная длина строк имеет более тяжелый хвост, чем слагаемые. В теореме 4 предполагается, что имеется единственный столбец-серия с минимальным ХИ, а в теореме 5, что имеется случайное число таких столбцов. Применение таких постановок возникает, в частности, в случайных эволюционирующих сетях для прогноза ХИ и ЭИ ПейджРангов и Макс-линейных моделей узлов, используемых как меры влияния узлов [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge university press, 1987.
2. *Davis R. A., Resnick S. I.* Limit Theory for Bilinear Processes with Heavy-Tailed Noise // *Ann. Appl. Probab.* 1996. V. 6. № 4. P. 1191–1210.
3. *Jessen A. H., Mikosch T.* Regularly varying functions // *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*. 2006. V. 80. P. 171–192.
4. *Leadbetter M. R., Lingren G., Rootzén H.* Extremes and Related Properties of Random Sequence and Processes. New York: Springer, 1983. 336 p.
5. *Markovich N. M., Rodionov I. V.* Maxima and sums of non-stationary random length sequences // *Extremes*. 2020. V. 23. № 3. P. 451–464.
6. *Markovich N. M.* Extremal properties of evolving networks: local dependence and heavy tails // *Ann. Oper. Res.* 2023. DOI: 10.1007/s10479-023-05175-y
7. *Markovich N. M.* Weighted maxima and sums of non-stationary random length sequences in heavy-tailed models // Submitted. 2023. arXiv: 2209.08485v [math.ST]. 18 Sep 2022.
8. *Roberts G. O., Rosenthal J., Segers J., Sousa B.* Extremal indices, geometric ergodicity of Markov chains and MCMC // *Extremes*. 2006. V. 9. P. 213–229.
9. *Volkovich Y. V., Litvak N.* (2010). Asymptotic analysis for personalized web search. *Adv. Appl. Prob.* 2010. V. 42. № 2. P. 577–604.

Маркович Наталья Михайловна — д.физ.-мат.н., глав.н.с., ИПУ РАН.
E-mail: nat.markovich@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ЗАПРОСАМИ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА

Д. В. Парасотченко, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе рассматривается система массового обслуживания с неограниченным объемом, запрашиваемых ресурсов двух типов с входящим пуассоновским потоком. Размеры запрашиваемых ресурсов являются дискретными случайными величинами. Представлен вид двумерной производящей функции для стационарного распределения вероятностей суммарного занятого ресурса. **Ключевые слова:** *система массового обслуживания, двухресурсная СМО, метод производящей функции.*

Введение

С ростом мощностей вычислительной техники растут и возможности в моделировании многих процессов нашей жизни. Теория массового обслуживания (ТМО) также не обделена вниманием и позволяет проводить исследования сложных систем. В классической ТМО характеристики производительности сводятся к анализу случайного процесса — числа находящихся в системе заявок. Но для решения задачи анализа емкости буферного пространства узла сети связи, в том числе обеспечивающую наименьшие потери информации, предлагаются модели ресурсных систем массового обслуживания (РСМО) [1, 2, 3, 4]. Каждый узел СМО обладает некоторым набором ресурсов определенного объема, который может быть выделен для обработки поступающих запросов. Поступающий запрос занимает на время своего обслуживания случайный объем ресурсов обслуживающего узла, который освобождается в том же объеме после того, как запрос покидает систему.

В данной работе рассматривается система массового обслуживания, в которой поток будет состоять из заявок на два типа некоторых ресурсов. При этом, особенностью данной модели является дискретный объем запрашиваемых ресурсов. Подобные СМО предоставляют широкую возможность и интерес в современных исследованиях [7, 6].

1. Математическая модель двухресурсной СМО

Рассмотрим двухресурсную СМО, где каждая заявка, поступающая в систему, требует случайное количество ресурса двух типов. Заявки попадают в систему в соответствии с пуассоновским процессом с параметром λ . В момент возникновения события во входящем потоке каждая заявка формирует запрос на оба ресурса на некоторое случайное время с функцией распределения $B_i(x), i = 1, 2$, соответствующей типу ресурса. Объемы запрашиваемых ресурсов каждого типа являются случайными величинами ξ_1, ξ_2 с заданным рядом распределения вероятностей $P\{\xi_1 = i\} = p_i^{(1)}, P\{\xi_2 = i\} = p_i^{(2)}$. Будем считать, что функции $B_i(x)$ имеют конечные моменты первого и второго порядка. Такую систему будем обозначать с использованием символики Кендалла-Башарина $M^{(2, \xi_1, \xi_2)} | G_{(2)} | \infty$ (Рис. 1).

Суммарным объемом занятого ресурса в системе будем называть общий объем (сумму) занимаемых всеми заявками ресурсов каждого типа. Построим двумерный случайный процесс $\{V_1(t), V_2(t)\}$ – суммарный объем занятого ресурса каждого типа в системе в момент времени t , где $V_j = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(j)}, j = 1, 2$. Решается задача исследования двумерного случайного процесса – суммарного занятого ресурса

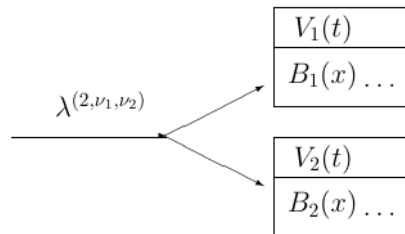


Рис. 1. Ресурсная СМО со случайными требованиями на дискретные ресурсы

2. Метод динамического просеивания

Основная идея метода динамического просеивания заключается в следующем: обозначим через $V_i(T)$ объем ресурсов, занимаемых заявками, обслуживаемых в системе в момент времени T , а через $W_i(t)$ объем ресурсов, занимаемых заявками просеянного потока, наступивших до момента времени T [2]. Изобразим три параллельные оси времени. Пронумеруем их от 0 до 2-х. Оси системы под номерами 1 и 2 отражают объемы ресурсов соответствующих типов, находящихся в системе к моменту времени T , а ось с номером 0 используется для отображения

событий входящего потока. Событиями будем считать точки на оси, которые соответствуют моментам поступления требований в систему. Зафиксируем некоторый момент времени T в будущем. Обозначим $S_i(t)$ (при $T \geq t_0$) – вероятность того, что ресурс i -го типа, запрошенный заявкой входящего потока и поступивший в систему в момент времени t , в момент T не освободится и останется в системе. Тогда $1 - S_i(t)$ – вероятность того, что ресурс i -го типа, запрошенный заявкой входящего потока и поступивший в систему в момент времени t , в момент T покинет систему.

Обозначим через $S_0(t)$ вероятность того, что до момента T заявка завершила свое обслуживание и покинула систему. Такие заявки (типа $S_0(t)$) исключаются из рассмотрения. Вероятности $S_i(t)$, $i = 1, 2$ будем называть вероятностями просеивания входящего потока на i -ю ось (Рис. 2).

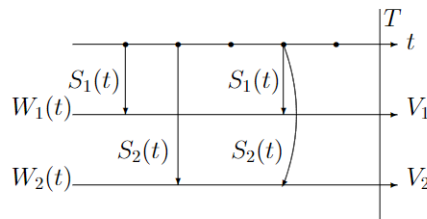


Рис. 2. Просеивание объемов требований входящего потока

Суммарные объемы ресурсов, занятых просеянными заявками в интервал времени $[t_0, t)$, обозначим как $W_i(t)$, $i = 1, 2$. Совокупность событий, порожденную таким просеиванием на осях времени 1 и 2, будем называть двумерным просеянным потоком $W_1(t), W_2(t)$. В момент времени $t = T$ вероятностные распределения случайных процессов $V_1(t), V_2(t)$ и $W_1(t), W_2(t)$ совпадают, то есть выполняется равенство: $P(V_1(T) < \omega_1, V_2(T) < \omega_2) = P(W_1(T) < \omega_1, W_2(T) < \omega_2)$.

3. Уравнение Колмогорова

Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{W_1(t), W_2(t)\}$, для распределения вероятностей которого $P(\omega_1, \omega_2, t) = P\{W_1(t) = \omega_1, W_2(t) =$

ω_2 запишем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\omega_1, \omega_2, t)}{\partial t} = & -\lambda(S_1(t) + S_2(t) - S_1(t)S_2(t))P(\omega_1, \omega_2, t) + \\ & + \lambda S_1(t)(1 - S_2(t)) \sum_{i=0}^{\omega_1} P(\omega_1 - i, \omega_2, t) p_i^{(1)} + \\ & + \lambda(1 - S_1(t))S_2(t) \sum_{j=0}^{\omega_2} P(\omega_1, \omega_2 - j, t) p_j^{(2)} + \\ & + \lambda S_1(t)S_2(t) \sum_{i=0}^{\omega_1} \sum_{j=0}^{\omega_2} P(\omega_1 - i, \omega_2 - j, t) p_i^{(1)} p_j^{(2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P(\omega_1, \omega_2, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_1 = \omega_2 = 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\omega_i > 0, i = 1, 2$.

4. Дифференциальные уравнения для производящей функции

Введем двумерную производящую функцию:

$$F(z_1, z_2, t) = \sum_{\omega_1=0}^{\infty} \sum_{\omega_2=0}^{\infty} z_1^{\omega_1} z_2^{\omega_2} P(\omega_1, \omega_2, t).$$

Тогда систему (1) мы можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z_1, z_2, t)}{\partial t} = & -\lambda(S_1(t) + S_2(t) - S_1(t)S_2(t))F(z_1, z_2, t) + \\ & + \lambda S_1(t)(1 - S_2(t))F(z_1, z_2, t)Q_1(z_1) + \\ & + \lambda(1 - S_1(t))S_2(t)F(z_1, z_2, t)Q_2(z_2) + \\ & + \lambda S_1(t)S_2(t)F(z_1, z_2, t)Q_1(z_1)Q_2(z_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$Q_j(z_j) = \sum_{i=0}^{\infty} z_j^i p_i^{(j)}, j = 1, 2.$$

Решение (2) имеет вид:

$$F(z_1, z_2, t) = C \cdot \exp \left\{ \lambda \int_{t_0}^t [(Q_1(z_1) - 1)S_1(\tau) + (Q_2(z_2) - 1)S_2(\tau) + (Q_1(z_1) - 1)(Q_2(z_2) - 1)S_1(\tau)S_2(\tau)] d\tau \right\}. \quad (3)$$

Из начального условия следует, что константа $C = 1$. Далее в полученном решении примем $t = T$, выполним предельный переход при $t_0 \rightarrow -\infty$. Также произведем замену переменных $s = T - \tau$ и обозначим:

1) среднее время обслуживания на первом и втором блоках для $i = 1, 2$

$$b_i = \int_{-\infty}^T (1 - B_i(T - \tau)) d\tau = \int_0^{\infty} (1 - B_i(s)) ds, \quad (4)$$

2) математическое ожидание минимума двух случайных величин

$$b_{12} = E\{\min(\tau_1, \tau_2)\} = \int_0^{\infty} (1 - B_1(s))(1 - B_2(s)) ds. \quad (5)$$

Здесь и далее символ E обозначает математическое ожидание.

С учетом введенных обозначений получаем выражение для стационарной производящей функции исследуемого двумерного процесса

$$F(z_1, z_2) = \exp \left\{ \lambda [(Q_1(z_1) - 1)b_1 + (Q_2(z_2) - 1)b_2 + (Q_1(z_1) - 1)(Q_2(z_2) - 1)b_{12}] \right\}. \quad (6)$$

Тогда нетрудно найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции для суммарных объемов занимаемых ресурсов. Они будут равны соответственно:

$$E\{V_i\} = \left. \frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_i} \right|_{z_1=z_2=1} = \lambda a_i^{(1)} b_i, \quad i = 1, 2.$$

$$Var\{V_i\} = E\{V_i^2\} - E\{V_i\}^2 = \lambda a_i^{(2)} b_i + \lambda a_i^{(1)} b_i, \quad i = 1, 2.$$

$$r = \frac{E\{V_1 V_2\} - E\{V_1\}E\{V_2\}}{\sqrt{\text{Var}\{V_1\}}\sqrt{\text{Var}\{V_2\}}} = \frac{a_1^{(1)} a_2^{(1)} b_{12}}{\sqrt{(a_1^{(2)} + a_1^{(1)})(a_2^{(2)} + a_2^{(1)})} b_1 b_2}.$$

где

$$a_j^{(1)} = Q'_j(1) = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i^{(j)}, \quad a_j^{(2)} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) p_i^{(j)} \quad j = 1, 2.$$

Заключение

В данной работе была исследована математическая модель двухресурсной СМО с дискретными запросами случайного объема. Для указанных систем модифицирован метод динамического просеивания, а именно, определены динамические вероятности того, что к некоторому фиксированному моменту запросы на ресурсы еще актуальны. Применение метода позволяет построить марковский процесс, исследование которого проводится методом характеристических функций. Получен вид двумерной характеристической функции для всех рассматриваемых моделей, что позволило определить вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсию) занимаемых ресурсов каждого типа в системе при стационарном режиме функционирования рассматриваемой СМО, а также коэффициент корреляции, который отражает зависимость между компонентами многомерного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунова А. В. Гайдамака Ю. В. Наумов В. А. Самуйлов К. Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и ее применение. 2018 Т. 12. № 3. С. 48–55.
2. Tikhonenko M. Ziolkowski Ю. В. Kempa W. M. Queueing Systems with Random Volume Customers and a Sectorized Unlimited Memory Buffer // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2021, V. 31. No. 3. P. 471–486.
3. Tikhonenko M. Ziolkowski Ю. В. Queueing Systems with Random Volume Customers and their Performance Characteristics // JIOS. 2021. V. 45. No. 1. P. 21–38
4. Наумов В. А. Самуйлов К. Е. Анализ сетей ресурсных систем массового обслуживания // А и Т. 2018. № 5. С. 59–68; Analysis of Networks of the Resource Queueing Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 822–829.
5. Моисеева С. П. Бушкова Т. В. Панкратова Е. В. Фархадов М. П. Имомов А. А. Асимптотический анализ ресурсной гетерогенной СМО при

- условии эквивалентно растущего времени обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2022, 8, 81–99
6. *Галилейская А. А., Лисовская Е. Ю.* Асимптотический анализ многофазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с входящим ММРР потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 13–21. DOI: 10.17223/19988605/45/2
 7. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Парасотченко Данил Владимирович — бакалавр 4 года обучения, Томский государственный университет. E-mail: *parasotdaniil@gmail.com*

Моисеева Светлана Петровна — д. физ.-мат. наук., заведующий кафедрой теории вероятности и математической статистики, Томский государственный университет. E-mail: *smoiseeva@mail.ru*

СИСТЕМА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С НЕСКОЛЬКИМИ КАНАЛАМИ РАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

С. М. Чижикова, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В данной работе рассматривается гетерогенная многолинейная система массового обслуживания с ожиданием, особенность которой заключается в том, что для обработки и передачи данных предоставлены несколько гетерогенных ресурсов разной интенсивности обслуживания и предоставляется возможность переключения на более быстрый канал, при наличии там свободных единиц канального ресурса. Построена система линейных уравнений для стационарных вероятностей состояний системы и проведен анализ характеристик качества обслуживания.

Ключевые слова: *гетерогенная СМО с ожиданием, переключение приборов.*

Введение

В теории телетрафика модели с ожиданием составляют особое семейство, предназначенное для анализа процессов обслуживания заявок на передачу данных с возможностью задержки в узлах коммутации. В подобных системах пересылаемая информация представляет собой дискретный поток сообщений (пакетов), которые обрабатываются в узлах с целью дальнейшей транспортировки по сети. В силу относительной простоты процесс обработки сообщений в узле часто описывается с использованием одного обслуживающего устройства. Это упрощает анализ модели и в некоторых ситуациях даёт возможность найти аналитические выражения для оценки разнообразных характеристик качества обслуживания сообщений, в частности функцию распределения времени ожидания начала обслуживания. Для однородных систем массового обслуживания (СМО), то есть когда все приборы в системе идентичны, получено достаточно результатов, в том числе, учитывающих различные аспекты обслуживания сообщений из очереди (групповое прибытие, групповое обслуживание, нетерпеливость заявок), более подробно о таких моделях можно посмотреть в монографиях [1, 2, 3]. Менее изученными являются модели с неоднородными (гетерогенными) каналами, то есть отличающиеся интенсивностью обслуживания. Здесь можно

отметить некоторые результаты по бесконечнолинейным системам [4], а также задачи оптимального размещения требований между неоднородными приборами в работах Рыкова В.В., Ефросинина Д.В. [5, 6]. В настоящей работе предлагается модель с подключением дополнительных каналов разной интенсивности и разной емкости (различное количество единиц канального ресурса). При этом каждый последующий имеет более низкую производительность, но если в более быстром освобождается место, то заявки перераспределяются. Если все каналы заняты, то заявка становится на ожидание. Данная работа обобщает результаты, ранее полученные для двух типов каналов.

1. Постановка задачи

В качестве математической модели рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с C блоками обслуживания различной интенсивности обслуживания и содержащим N_k единиц канального ресурса $k = 1, 2, \dots, C$. На вход системы поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания каждого сообщения является неотрицательной случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметрами $\mu_1 \dots \mu_C$ соответственно. Если свободных ресурсов нет, то заявка поступает в очередь. Дисциплина обслуживания FIFO (First In – First Out). Будем считать, что ограничений на очередь нет.

Таким образом, можно говорить об организации C -канальной системы передачи данных, так как информация пользователя может быть передана по C интерфейсам связи. Ставится задача определения характеристик качества обслуживания.

2. Математическая модель с переключением на более быстрый канал

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с C блоками обслуживания различной интенсивности обслуживания на вход которой поступает пуассоновский поток пакетов с интенсивностью λ . Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если имеется достаточное количество свободных единиц канального ресурса у первого канала, то пакет обслуживается в течение случайного времени, имеющего экспоненциальное распределение вероятностей с параметром μ_1 . Если первый канал занят, то пакет поступает на второй канал и обслуживается там в течение случайного времени, имеющего экспоненциальное распределение вероятностей с параметром μ_2 , если второй канал занят, то заявка поступает на третий канал и так далее. Если же все C -каналы заняты, то в противном случае сообщение попадает в очередь.

Для интенсивностей обслуживания выполняется следующее соотношение $1/\mu_1 < 1/\mu_2 \dots < 1/\mu_C$. В случае если освободился более быстрый прибор, заявки перераспределяются. В терминах символики Кендалла-Башарина такую систему будем обозначать **C**-канальная система вида $M|M^{N_1, \dots, N_C}|C|\infty$ с переключением каналов. Схематическое изображение математической модели представлено на рис. 1.

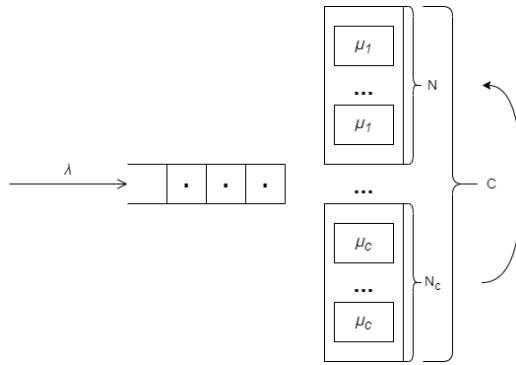


Рис. 1. СМО **C**-канальная система вида $M|M^{N_1, \dots, N_C}|C|\infty$

Состояние системы определим случайным марковским процессом $i(t)$, где $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t (рис. 2).

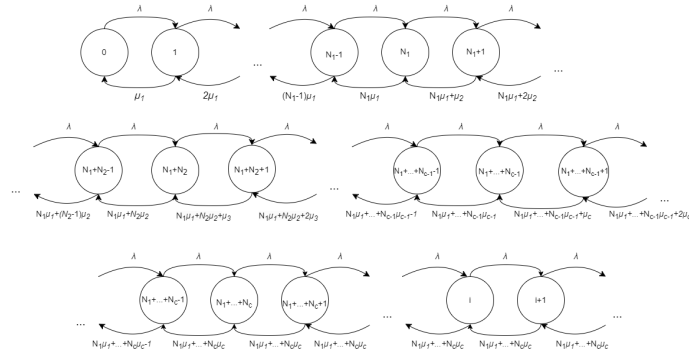


Рис. 2. Граф вероятностей системы для $M|M^{N_1, \dots, N_C}|C|\infty$

3. Система уравнений Колмогорова

Для стационарных вероятностей числа пакетов в системе имеем систему линейных уравнений следующего вида:

$$0 = -\lambda\Pi_0 + \mu_1\Pi_1,$$

$$0 = \lambda\Pi_0 - (\lambda + \mu_1)\Pi_1 + 2\mu_1\Pi_2.$$

Для $1 \leq i \leq N_1$

$$0 = -(\lambda + i\mu_1)\Pi_i + \lambda\Pi_{i-1} + (i+1)\mu_1\Pi_{i+1}.$$

Для $N_1 \leq i < N_2$

$$0 = -(\lambda + N_1\mu_1 + (i - N_1)\mu_2)\Pi_i + \lambda\Pi_{i-1} + (N_1\mu_1 + (i+1 - N_1)\mu_2)\Pi_{i+1}.$$

Для $N_{C-1} \leq i < N_C$

$$0 = -\left(\lambda + \sum_{k=1}^{C-1} N_k\mu_k + \left(i - \sum_{k=1}^{C-1} N_k\right)\mu_C\right)\Pi_i + \lambda\Pi_{i-1} + \left(\sum_{k=1}^{C-1} N_k\mu_k + \left(i+1 - \sum_{k=1}^{C-1} N_k\right)\mu_C\right)\Pi_{i+1}.$$

Для $i \geq \sum_{k=1}^C N_k$

$$0 = -\left(\lambda + \sum_{k=1}^C N_k\mu_k\right)\Pi_i + \lambda\Pi_{i-1} + \left(\sum_{k=1}^C N_k\mu_k\right)\Pi_{i+1}.$$

Так как сумма слагаемых, начиная с $\Pi_{N_1+\dots+N_C}$ представляет собой геометрическую прогрессию, то ряд сходится при условии

$$\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^C N_k\mu_k} < 1 \Rightarrow \lambda < \sum_{k=1}^C N_k\mu_k.$$

Данное условие является условием существования стационарного режима в рассматриваемой системе. Полученные уравнения являются основой для рекуррентного алгоритма, который реализован в системе MathCad [7]. На основе полученного распределения можно посчитать характеристики качества обслуживания системы. В таблицах 1 – 2 представлены значения основных вероятностных характеристик для различных параметров.

Таблица 1

Характеристики показателя качества обслуживания для
 $C = 3, \lambda = 10, N_1 = 3, N_2 = 2, N_3 = 3, \mu_1 = 3, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0,5$

Характеристика системы	Значение
Вероятность встать в очередь	0,31
Среднее количество заявок в системе	6,38
Средняя длина очереди	1,23
Дисперсия числа заявок в системе	22,64

Таблица 2

Характеристики показателя качества обслуживания для
 $C = 5, \lambda = 10, N_1 = 3, N_2 = 2, N_3 = 3, N_4 = 4, N_5 = 6,$
 $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0,5, \mu_4 = 1, \mu_5 = 0,5.$

Характеристика системы	Значение
Вероятность встать в очередь	0,162
Среднее количество заявок в системе	12,35
Средняя длина очереди	0,72
Дисперсия числа заявок в системе	34,82

Заключение

В настоящей статье представлена математическая модель системы передачи данных в виде гетерогенной системы массового обслуживания с несколькими блоками различной интенсивности обслуживания с ожиданием и нетерпеливыми заявками. С помощью разработанного рекуррентного алгоритма получено распределение вероятностей (числа занятых приборов в каждом блоке и числа заявок, находящихся в очереди), позволяющее найти технические характеристики системы, имеющие практическое значение для проектирования реальных информационных и телекоммуникационных систем. В дальнейших работах также планируется обобщение результатов для сети массового обслуживания, учитывающей возможные переходы из блоков для повторного обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов С. Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия Телеком. 2015. 868 с.

2. Горбунова А. В., Гайдамака Ю. В., Наумов В. А., Самуйлов К. Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и ее применение. 2018. Т. 12. № 3. С. 48–55.
3. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей Москва: Техносфера. 2003. 512с.
4. Моисеева С. П., Бушкова Т. В., Панкратова Е. В., Фархадов М. П., Имомов А. А. Асимптотический анализ ресурсной гетерогенной СМО при условии эквивалентно растущего времени обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2022. №8. С.81–99.
5. Rykov V. V. Monotone Control of Queueing Systems with Heterogeneous Servers // QUESTA. 2001. V. 37. P. 391–403.
6. Ефросинин Д. В., Рыков В. В. К анализу характеристик производительности СМО с неоднородными приборами // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С.64–82.
7. Моисеева С. П., Чижикова С. М., Хамраева Р. Д. Свидетельство № 2023686235. Программа вычисления характеристик качества в гетерогенной системе передачи данных с очередью и переключением каналов и ограничением на время ожидания 05.11.2023

Чижикова Светлана Михайловна — магистрант, Томский государственный университет, Институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: lana.cheese23@gmail.com

Моисеева Светлана Петровна — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой, Томский государственный университет, Институт прикладной математики и компьютерных наук, кафедра теории вероятностей и математической статистики. E-mail: smoiseeva@mail.ru

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ШОКОВ НА БЛАГОСОСТОЯНИЕ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ

А. А. Давидюк

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе были построены две регрессионные модели, с помощью которых было оценено влияние макроэкономических шоков таких факторов, как уровень безработицы, инфляция, цена на нефть марки Brent, ключевая ставка и доход на благосостояние домашних хозяйств. Показано, что наиболее сильное негативное влияние на потребление домашних хозяйств оказывает уровень безработицы. **Ключевые слова:** *Домохозяйства, макроэкономические шоки, благосостояние домохозяйств, регрессионная модель.*

Введение

Благосостояние домашних хозяйств является важным показателем экономического развития страны и может быть использовано для анализа социальных и экономических проблем, таких как неравенство, бедность, безработица, миграция. В широком смысле благосостояние домашних хозяйств включает в себя доходы, расходы, сбережения, доступ к образованию и социальным услугам.

В работе в качестве благосостояния рассматривалось потребление домашних хозяйств. Изучение потребления домашних хозяйств является важным экономическим и социальным вопросом, потому что потребление домохозяйств является основным двигателем экономики. Изучение потребительского поведения позволит понимать, как люди принимают решения о потреблении товаров и услуг и определить, какие факторы влияют на их выбор.

Макроэкономические шоки, такие как резкий рост инфляции, увеличение уровня безработицы, рост процентных ставок, изменение валютного курса оказывают негативное влияние на благосостояние домашних хозяйств. Это влияние проявляется в виде снижения доходов домашних хозяйств; увеличения расходов, из-за растущей инфляции домашним хозяйствам приходится сокращать свое потребление; ухудшения кредитоспособности населения, что в совокупности будет приводить к ухудшению финансовой стабильности в экономике.

Изучение механизмов влияния макроэкономической нестабильности на уровень благосостояния домохозяйств, может помочь в разработке мер регулирования и адаптации к различным шокам. Органы государственной власти на основе анализа поведения домашних хозяйств могут разрабатывать государственную социальную и экономическую политику, корректировать денежно-кредитную политику, обеспечивать финансовую стабильность и развитие финансового рынка.

1. Общие положения

Согласно Росстату, под домохозяйством понимается «Совокупность лиц, проживающих в одном жилом помещении, совместно обеспечивающих себя пищей и всем необходимым для жизни, то есть полностью или частично объединяющих и расходующих свои средства». Можно выделить следующие функции домохозяйств: потребительская; сберегательная; производственная; воспроизводственная [6].

Благосостояние домохозяйств – это понятие, используемое для описания уровня жизни домашних хозяйств. Под данным определением понимается разница между стоимостью активов домохозяйства и стоимостью его обязательств [5].

Благосостояние домашних хозяйств имеет важное значение для экономики страны, поскольку оно влияет на потребление, инвестиции и экономический рост. Высокий уровень благосостояния может стимулировать экономический рост, поскольку люди будут тратить больше денег на товары и услуги, что приведет к увеличению спроса на продукцию и услуги. В связи с этим, необходимо мониторить финансовое состояние домашних хозяйств, чтобы понимать их текущие проблемы и разрабатывать соответствующие меры поддержки населения.

Изучению поведения домашних хозяйств посвящено множество трудов различных экономистов и социологов, а также их исследованием занимаются: Росстат, Банк России, ВШЭ. Так, в работе Кодоловой И.А., Юсуповой Л.М. и др. на основе статистических данных за 2014-2021 гг. было выяснено, что у среднестатистического домохозяйства растут расходы и снижаются доходы. При этом основная доля доходов домашних хозяйств состоит из оплаты труда наемных рабочих. При возникновении кризиса большая часть домашних хозяйств будет находиться в затруднительном материальном положении [4].

Многие ученые пытались разработать модель, объясняющую потребительское поведение домашних хозяйств. Особое место в экономической науке занимают следующие теории финансового поведения домохозяйств: кейнсианская модель сбережений, неоклассические теории

сберегательного поведения домохозяйств и теории портфельного выбора.

В работе А.Д. Петайкиной на основе данных RLMS HSE отдельных домашних хозяйств за период 2006-2019 год проводился анализ влияния положительных и отрицательных шоков доходов на потребление домашних хозяйств в рамках проверки причин невыполнения классических теорий потребления. В качестве факторов ограничения ликвидности были взяты процентная ставка по кредитам, спред ставок (между потребительскими кредитами и депозитами), уровень безработицы. В результате исследования выяснилось, что значительное влияние на потребление оказывают процентные ставки, а уровень безработицы не так хорошо объясняет потребительское поведение [3].

Также в работе Е.В. Богомоллова на основе статистических данных, трудов экономистов и социологов было доказано, что в условиях мировой экономической нестабильности теория постоянного дохода не позволяет предвидеть потребление и сбережение домохозяйств в долгосрочном периоде [2].

В работе было оценено влияние макроэкономических шоков на благосостояние домашних хозяйств. На основе данных Росстата о располагаемых ресурсах и расходах домашних хозяйств были построены две регрессионные модели, с помощью которых была произведена оценка влияния таких факторов как уровень безработицы, инфляция, цена на нефть марки Brent, ключевая ставка и доход на изменение потребления домашними хозяйствами.

Данные были взяты за период с 1998 по 2022 гг. в целом по России. В качестве зависимой переменной рассматривались расходы на потребление домашними хозяйствами, а в качестве объясняющих переменных использовались данные о располагаемых ресурсах домашних хозяйств и макроэкономические показатели, которые выступают шоками, влияющими на потребление домашних хозяйств.

Поскольку данные о доходах, расходах домашних хозяйств представлены в годовом выражении, то у нас имеется всего 25 наблюдений. Была произведена линейная интерполяция данных по месяцам. С целью проверки наличия ограничений ликвидности были выделены следующие факторы – ключевая ставка, уровень безработицы.

Уравнение регрессии первой модели:

$$\ln(\text{Consumption}) = \alpha + \beta_1 \ln(\text{USD}) + \beta_2 \ln(\text{brent}) + \beta_3 \ln(\text{Income}) + \beta_4 \text{Unemployment_rate} + \beta_5 \text{key_rate} + \varepsilon,$$

где $\ln(\textit{Consumption})$ — натуральный логарифм расходов на потребление домашних хозяйств; $\ln(\textit{USD})$ — натуральный логарифм курса доллара США; $\ln(\textit{brent})$ — натуральный логарифм среднегодовой цены на нефть марки Brent; $\ln(\textit{Income})$ — натуральный логарифм располагаемых ресурсов домашних хозяйств; $\textit{Unemployment_rate}$ — уровень безработицы; $\textit{key_rate}$ — ключевая ставка.

Коэффициент детерминации для первой модели составляет 0,99 . Статистика Дарбина-Уотсона 2,1 , эксцесс составляет 7,51 , а мера асимметрии (skew) - 1,93 .

Для первой модели получаем следующую интерпретацию коэффициентов: увеличение курса доллара США на 1 % приводит к снижению расходов на потребление на 0,0489 , увеличение цены на нефть марки Brent приводит к снижению расходов на потребление на 0,0528 %, увеличение доходов на 1 % приводит к увеличению расходов на 0,92 %, увеличение ключевой ставки на 1 процентный пункт (п. п.) приводит к сокращению потребления на 0,17 % и увеличение уровня безработицы на 1 п. п. приводит к снижению потребления на 0,94 %.

Самым сильным негативным фактором оказался уровень безработицы. Так как основным источником существования домашних хозяйств является заработная плата, то утрата работы заставляет домашние хозяйства сокращать свое потребление, к тому же из-за отсутствия подтвержденного дохода банк откажет в выдаче кредита (поскольку большой риск невозврата), у домашнего хозяйства нет возможности взять кредит.

Уравнение регрессии второй модели:

$$\ln(\textit{Consumption}) = \alpha + \beta_1 \textit{Inflation} + \beta_2 \ln(\textit{Income}) + \beta_3 \textit{Unemployment_rate} + \beta_4 \textit{key_rate} + \varepsilon,$$

где $\ln(\textit{Consumption})$ — натуральный логарифм расходов на потребление домашних хозяйств; $\textit{Inflation}$ — уровень инфляции; $\ln(\textit{Income})$ — натуральный логарифм располагаемых ресурсов домашних хозяйств; $\textit{Unemployment_rate}$ — уровень безработицы; $\textit{key_rate}$ — ключевая ставка.

Отличие второй модели от первой заключается в том, что объясняющие переменные сдвинуты на один период вперед (то есть лаг = 1) Это означает, что в определенный период времени происходит шок в экономике, и потребители не сразу же подстраиваются под новые условия, а только спустя период, в данной модели смещение происходило на один месяц.

Коэффициент детерминации для второй модели также составляет 0,99 . Статистика Дарбина-Уотсона 2,11 , эксцесс составляет 3,98 , а мера асимметрии (skew) - 0,59 .

Для второй модели получаем следующую интерпретацию коэффициентов: увеличение инфляции на 1 п. п. приводит к снижению расходов на потребление на 0,5 %, увеличение доходов на 1 % приводит к увеличению расходов на 0,88 %, увеличение ключевой ставки на 1 процентный пункт (п. п.) приводит к сокращению потребления на 0,12 % и увеличение уровня безработицы на 1 п. п. приводит к снижению потребления на 0,96 %.

В данной модели аналогично наиболее негативным фактором, оказывающим самое сильное влияние на потребление домашних хозяйств, является утрата работы.

Можно выделить, что обе модели довольно хорошо объясняют изменение потребления в ответ на различные макроэкономические шоки, для каждой модели коэффициент детерминации 0,99 . Следует отметить, что обе модели требуют доработки и дальнейшего исследования.

Заключение

В результате обе регрессионные модели показали наличие существования ограничений ликвидности, что говорит о том, что домашние хозяйства не могут сглаживать свое потребление в период кризиса и им приходится в ответ на макроэкономические шоки сокращать свое потребление. Причем негативные шоки в виде уровня безработицы способны оказывать влияние гораздо сильнее на потребление домашних хозяйств, чем положительные шоки в виде роста дохода.

Самым сильным негативным фактором оказался уровень безработицы. Так как основным источником существования домашних хозяйств является заработная плата, то утрата работы заставляет домашние хозяйства сокращать свое потребление, к тому же из-за отсутствия подтвержденного дохода банк откажет в выдаче кредита (поскольку большой риск невозврата), у домашнего хозяйства нет возможности взять кредит.

Определение негативных макроэкономических шоков позволит органам государственной власти оценить возможное влияние на домохозяйства и их уровень благосостояния. В результате чего государство сможет минимизировать негативное влияние кризиса на население и оказать необходимую социальную поддержку, а также снизить расслоение общества, что позволит предотвратить сильный спад в экономике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матвеева Т. Ю.* Макроэкономика: учебник для вузов: в 2 ч. М: Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. 439 с.
2. *Богомолов Е. В.* Особенности финансового поведения российских домохозяйств // Экономика. Налоги. Право. 2020. № 1. С. 49–59.
3. *Петайкина А. Д.* Анализ влияния положительных и отрицательных шоков дохода на потребление домашних хозяйств // Экономическое развитие России. 2023. № 1. С. 39–45.
4. Специфика функционирования домашних хозяйств в Российской Федерации // Международный научно-исследовательский журнал. 2023. № 1. С. 1–10.
5. <https://rosstat.gov.ru/compendium/document/13271> — Росстат. 2022.
6. <https://tmsk.gks.ru>— Томкстат. 2020.

Давидюк Анастасия Анатольевна — студент, 3 курс, ИЭМ. E-mail: davidyuk-anastasiya@mail.ru

ИНФЛЯЦИОННОЕ ТАРГЕТИРОВАНИЕ. МЕЖСТРАНОВОЙ АНАЛИЗ

Д. А. Дернин

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе проводится эконометрическое моделирование влияния групп факторов на успешность инфляционного таргетирования. Мы исследуем воздействие фискальной дисциплины, прозрачности монетарной политики и институционального устройства государства. Моделирование проводится на основе панельных данных для стран, декларирующих режим инфляционного таргетирования. Рассматриваемые страны предварительно разделяются на развитые и развивающиеся в соответствии с классификацией МВФ. **Ключевые слова:** *инфляционное таргетирование, монетарная политика, фискальная дисциплина.*

Введение

Сегодня большинство стран признают достижение ценовой стабильности главной целью монетарной политики. Наиболее популярным и, как представляется, эффективным, способом достижения этой цели является режим таргетирования инфляции, т.е. денежно-кредитная политика, при которой центральный банк следует конкретному инфляционному ориентиру на среднесрочную перспективу и публично объявляет этот целевой ориентир.

Исследованию факторов, влияющих на уровень инфляции и успешность инфляционного таргетирования, посвящено большое количество работ. М. Пэлдам в исследовании инфляции в странах Латинской Америки [5] приходит к выводу, что большие темпы роста цен в странах со слабым правительством связаны со спросом населения на увеличение государственных расходов, которому неустойчивое руководство страны не может противостоять. А. Цукерман, С. Эдвардс и Г. Табеллини [3] доказывают, что страны с более поляризованной и нестабильной политической системой сильнее полагаются на сеньораж, как источник финансирования своих расходов, что приводит к увеличению инфляции. Данные исследования рассматривают качество государственных институтов как фактор, воздействующий на уровень инфляции. Мы дополняем группу институциональных факторов и проводим эконометрическое моделирование их воздействия.

Связь между фискальной дисциплиной и инфляцией экономисты Т. Сарджент и Т. Уоллес [6] объясняют через гипотезу фискальной доминанции, т.е. ситуации, в которой фискальные власти независимо устанавливают свои бюджеты, объявляют текущие и будущие дефициты или профициты, тем самым определяя размер дохода от выпуска государственных облигаций и сеньоража. Так как доход от государственных облигаций ограничен спросом на них, монетарные власти в ситуации доминирующего положения фискальной политики и устойчивого бюджетного дефицита будут рано или поздно вынуждены прибегнуть к эмиссии для финансирования этого дефицита.

На успешность инфляционного таргетирования также оказывает воздействие прозрачность политики центрального банка. Предоставляя понятную и детализированную информацию о своих решениях, центральный банк укрепляет доверие домохозяйств и фирм к долгосрочной инфляционной цели. Д. Кристелис и др. [2] приводят доказательства отрицательной связи доверия к центральному банку и инфляционных ожиданий.

В данной работе мы проводим комплексное моделирование влияния институциональных факторов, фискальной дисциплины и прозрачности монетарной политики на эффективность инфляционного таргетирования

1. Методология эконометрического моделирования и данные

Эффективность инфляционного таргетирования мы оцениваем, как соответствие целевому ориентиру: для стран, использующих ориентир в виде коридора, достижением цели будем считать попадание в него. Успехом в странах, использующих точечный ориентир, будем считать отклонение целевого уровня не более, чем на 1 п.п. Данные о целевых ориентирах взяты с сайта Central Bank News[7], а также из отчётов центральных банков исследуемых стран и из новостных сообщений. Объёмы выборки различаются в зависимости от исследуемого фактора и варьируются от 107 до 720 наблюдений. Данные не являются сбалансированными из-за разного момента перехода к инфляционному таргетированию

Для определения эффективности инфляционного таргетирования мы используем панельную логистическую регрессию, где зависимая бинарная переменная принимает значение 1, если инфляционная цель достигнута. В общем виде модель выглядит следующим образом:

$$P(Y_{i,t} = 1|X_{i,t}) = \frac{1}{1 + e^{-X_{i,t}}},$$

где вектор $X_{i,t}$ - набор факторов, влияющих на достижение инфляционной цели.

В качестве контрольных переменных мы используем ширину целевого коридора, так как более широкий размах облегчает задачу центральному банку, лаг инфляции, учитывающий инерционность, отношение частных кредитов к ВВП, фактический уровень инфляции, отношение суммы импорта и экспорта к ВВП, как меру открытости экономики, темп прироста реального ВВП на душу населения, темп прироста среднего обменного курса для учёта влияния внешних шоков. Источниками данных являются Международный банк и Международный валютный фонд. Исследуемые страны мы разделяем на развитые и развивающиеся в соответствии с классификацией МВФ.

Влияние институциональных факторов мы оцениваем на основании индексов Worldwide governance indicators [8] (Международных индикаторов управления), рассчитанных Всемирным Банком:

- степень контроля коррупции (Control of corruption);
- верховенство права (Rule of law);
- качество регулирования (Regulatory quality);
- эффективность правительства (Government effectiveness);
- политическая стабильность (Political stability);
- свобода слова и подотчётность (Voice and accountability);

Эффект от прозрачности центрального банка мы анализируем на основании индекса прозрачности центрального банка (СВТ -Central bank transparency), разработанного экономистами Б. Айхенгрином, О. Динцером и П. Джератс и принимающем значения от 0 до 15, где 15 – максимальный уровень прозрачности. В основе индекса лежат пять категорий прозрачности, выделенных экономисткой П. Джератс [4]: политическая, экономическая, операционная, стратегическая и процедурная. Каждая из них подразделяется на 3 подкатегории, за каждую из которых центральный банк получает либо 1, либо 0 баллов.

Фискальную дисциплину государства мы оцениваем с помощью двух переменных: отношения государственного долга к ВВП (General government gross debt, % of GDP) и первичного баланса бюджета, то есть разницы между общим доходом государства и его непроцентными расходами (исключая платежи по облигациям), в процентах от ВВП (Primary balance, % of GDP).

2. Результаты моделирования

Результаты моделирования влияния институциональных факторов представлены в таблице 1. Анализ проведен для 40 стран. Для разви-

тых стран все индексы являются незначимыми. Для развивающихся стран значимое влияние на вероятность успеха инфляционного таргетирования оказывает фактор "Политическая стабильность". При рассмотрении всех стран результат моделирования аналогичен. При росте политической стабильности на 1 п.п. шанс достижения инфляционного ориентира увеличивается в 5 раза для развивающихся стран, для всех стран – в 3,74 раза.

Таблица 1
Результаты моделирования влияния институциональных факторов

Переменная	Все страны	Развивающиеся	Развитые
Эффективность правительства	-1.59 (0.037)	-3.44 (0.002)	-2.74 (0.157)
Верховенство права	-1.49 (0.127)	-2.74 (0.030)	2.78 (0.405)
Политическая стабильность	1.32 (0.002)	1.61 (0.004)	-0.16 (0.906)
Качество регулирования	0.57 (0.505)	0.99 (0.847)	2.89 (0.103)
Контроль коррупции	0.201 (0.752)	0.18 (0.752)	2.67 (0.169)
Свобода слова и подотчётность	0.32 (0.725)	0.94 (0.290)	-0.64 (0.842)
Число наблюдений	689	446	243

При оценке влияния прозрачности монетарной политики мы добавляем в вектор контрольных переменных индекс политической стабильности. Результат моделирования представлен в таблице 2. Прозрачность оказывает значимое влияние на успешность инфляционного таргетирования только в развитых странах при уровне значимости 0,05. Для развитой страны повышение прозрачности монетарной политики на 1 балл повышает шанс достигнуть инфляционной цели в 1,27 раза, или на 27%. При учёте всех стран или только развивающихся стран, а также при 99-процентной достоверности, индекс прозрачности оказывается незначимым.

Подобный результат возможен по причине того, что развивающиеся страны сталкиваются с большим количеством препятствий и мак-

Таблица 2

Результаты моделирования влияния прозрачности монетарной политики

Переменная	Все страны	Развивающиеся	Развитые
Прозрачность	-0.033(0.6)	-0.2353 (0.04)	-0.242 (0.16)
Количество наблюдений	551	221	330

роэкономических факторов, осложняющих достижение инфляционной цели. Увеличение прозрачности в подобных условиях значимого эффекта на вероятность успеха инфляционного таргетирования не оказывает, так как влияние других факторов гораздо значительнее. В то же время, развитые страны испытывают меньшее давление внешних обстоятельств, поэтому увеличение прозрачности оказывает гораздо более значительный эффект. Наш результат не совпадает с выводами, к которым приходят Ф. Картаев и Е. Леденёва[1]. Авторы приводят устойчивые свидетельства в пользу того, что прозрачность оказывает влияние на вероятность достижения инфляционного ориентира.

Результат моделирования влияния фискальной дисциплины представлен в таблице 3.

Таблица 3

Результаты моделирования влияния фискальной дисциплины

Переменная	Все страны	Развивающиеся	Развитые
Валовый государственный долг (%ВВП)	-0.017 (0.07)	-0.026 (0.02)	-0.009 (0.6)
Дефицит бюджета (% ВВП)	-0.014 (0.79)	0.003 (0.96)	-0.187 (0.01)

Для развитых стран значимое воздействие на успешность инфляционного таргетирования оказывает величина государственного долга: при его увеличении на 1% от ВВП вероятность достижения инфляционного ориентира снижается на 2,52%. Дефицит бюджета, однако, не оказывает значимого влияния на успешность ИТ. Обратная ситуация наблюдается для развивающихся стран: увеличение доли дефицита бюд-

жета в ВВП на 1% делает вероятность успеха инфляционного таргетирования меньше на 17,08%. Такое воздействие возможно объяснить неэффективностью налоговой системы, что может быть свойственно развивающимся странам.

Заключение

В результате проведенного эконометрического моделирования мы нашли взаимосвязь между успешностью инфляционного таргетирования и степенью политической стабильности в развивающихся странах. Для развитых стран было определено влияние прозрачности монетарной политики на достижение инфляционного ориентира. Моделирование также показало, что воздействие фискальной дисциплины отличается в развитых и развивающихся странах: для первых была найдена связь эффективности таргетирования с размером государственного долга, для вторых - с дефицитом государственного бюджета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Картаев Ф., Леденёва Е.* Прозрачность монетарной политики и успешность инфляционного таргетирования // Экономическая политика. 2021 № 6. С. 8-33
2. *Christelis D., Georgarakos D., Jappelli T., van Rooij M.* Trust in the Central Bank and Inflation Expectation // ECB Working Paper Series. 2020. № 275. P. 1-37.
3. *Cukierman A., Edwards S., Tabellini G.* Seignorage and Political Instability // American Economic Review, American Economic Association. 1992. № 82(3). P. 537-555.
4. *Geraats P.M.* Central Bank Transparency // The Economic Journal. 2002. № 112. P. 532-565
5. *Paldam M.* Inflation and political instability in eight Latin American countries 1946-83 // Public Choice. 1987 № 52. P. 143-168.
6. *Sargent T., Wallace N.* Some Unpleasant Monetarist Arithmetic // Quarterly Review, Federal Reserve Bank of Minneapolis. 1981. № 5 (Fall) P. 15-41
7. <http://www.centralbanknews.info/p/inflation-targets.html> — Central Bank News. 2022.
8. <https://info.worldbank.org/governance/wgi/> — The Worldwide Governance Indicators (WGI)

Дернин Денис Андреевич — студент, 4 курс, Институт экономики и менеджмента. E-mail: dernin.des@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Маркович Н. М.</i> Краткое введение в теорию экстремальных величин и ее применение.....	5
<i>Тюленина Я. А., Фёдорова Е. А.</i> Математическая модель гибридной энергосистемы в виде бесконечнолинейной СМО с переключением.....	12
<i>Подгайнов А. В., Назаров А. А.</i> Асимптотический анализ RQ-системы с ожиданием заявок в бункере и на орбите.....	19
<i>Слюсаренко Н. В., Пауль С. В.</i> Тандемная система массового обслуживания с повторными вызовами и деградацией скорости обслуживания.....	26
<i>Хаустова Н. Г., Моисеева С. П.</i> Математическая модель обработки информации с приоритетами и ограничениями на время ожидания.....	32
<i>Фрейдлин В. И., Трофимова Е. Д., Змеев Д. О.</i> Принципы ООП в языке Go Lang.....	39
<i>Тихомиров И. А., Моисеева С. П.</i> Ресурсные бесконечнолинейные сети массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком....	45
<i>Змеев Д. О., Гончар А. О., Лазарев О. В.</i> О переносе Rational Unified Process из нотации UMA в нотацию Essence.....	51
<i>Измайлова Я. Е., Исаев А. Т.</i> Исследование RQ-системы M M 1 со специальным протоколом множественного случайного доступа.....	57
<i>Салимзянова Д. Д., Лисовская Е. Ю.</i> Классификация и оценка параметров распределений вероятностей длин интервалов рекуррентного потока.....	64
<i>Маркович Н. М.</i> Суммы и максимумы нестационарных последовательностей случайной длины и их применение в случайных сетях.....	70
<i>Парасотченко Д. В., Моисеева С. П.</i> Исследование системы массового обслуживания с дискретными запросами случайного объема.....	76
<i>Чижикова С., Моисеева С. П.</i> Система передачи данных с несколькими каналами разной интенсивности обслуживания.....	83
<i>Давидюк А. А.</i> Оценка влияния макроэкономических шоков на благосостояние домашних хозяйств.....	89
<i>Дернин Д. А.</i> Инфляционное таргетирование. Межстрановой анализ.....	95

Научное издание

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2023)**

**МАТЕРИАЛЫ
XXII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
4–9 декабря 2023 г.**

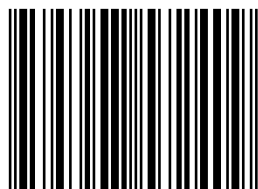
Часть 2

Редактор *В.Г. Лихачева*
Компьютерная верстка *О.Д. Лизюра*
Дизайн обложки *Л.Д. Кривцовой*

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: <http://publish.tsu.ru>
E-mail: rio.tsu@mail.ru

Подписано к печати 27.11.2023 г.
Формат 60 × 84¹/₁₆. Бумага для офисной техники. Гарнитура «Times».
Печ. л. 26. Усл. печ. л. 24.2. Тираж 500 экз. Заказ № 5462.

ISBN 978-5-907572-40-9



9 785907 572409 >