

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/380889696>

BIFURCATIONS IN A CONSERVATIVE SYSTEM WITH THREE EQUILIBRIUM POINTS IN THE UNPERTURBED PART

Conference Paper · March 2024

CITATIONS

0

READS

15

3 authors, including:



V. V. Basov

Saint Petersburg State University

75 PUBLICATIONS 190 CITATIONS

SEE PROFILE



Vasily Gorelov

Saint Petersburg State University

1 PUBLICATION 0 CITATIONS

SEE PROFILE



1797

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**LXXVII Герценовские чтения
Международная научная конференция**

Сборник научных трудов

**Санкт-Петербург
2024**

Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

LXXVII Герценовские чтения
Международная научная конференция

Сборник научных трудов

Санкт-Петербург
Издательство РГПУ им. А.И. Герцена
2024

ББК 74.262.21 +74.48

С 56

Рецензенты:

Н. А. Широков, доктор физико-математических наук,
профессор, Высшая школа экономики

И. А. Иванов, доктор педагогических наук,
доцент, РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина

Научные редакторы: **В. В. Орлов**, доктор педагогических наук, профессор

М. Я. Якубсон, кандидат физико-математических наук, доцент

С 56

Современные проблемы математики и математического образования: LXXVII Герценовские чтения: международная научная конференция: сборник научных трудов / под науч. ред. В. В. Орлова, М. Я. Якубсона. — Санкт-Петербург: Издательство РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. — 364 с.

ISBN 978-5-8064-3483-9

В сборник включены результаты исследований, раскрывающие возможные пути решения актуальных теоретических и практических проблем методики обучения математике в средней и высшей школе, различные направления модернизации отечественного математического образования и описывающие ряд актуальных результатов, полученных в различных областях математики.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей средней и высшей школы, докторантов и аспирантов.

ББК 74.262.21 +74.48

ISBN 978-5-8064-3483-9

© Коллектив авторов, 2024

© РГПУ им. А. И. Герцена, 2024

БИФУРКАЦИИ В КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПОКОЯ В НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТИ

В. В. Басов, канд. физ.-мат. наук, доцент, В. С. Горелов
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Россия
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, vasylyigorelov@gmail.com

Аннотация. Исследуется консервативная система $\dot{x} = -xy^2 + x + y$, $\dot{y} = -x - y + x^2y$ (*). Все ее траектории помимо трех особых точек и двух ветвей гиперболы являются циклами. В первой части работы в правую часть системы (*) добавлены линейные по параметру $\varepsilon > 0$ и кубические по x, y слагаемые такие, что полученная возмущенная система остается консервативной и в ней при любом малом значении параметра $\varepsilon > 0$ происходит бифуркация рождения из бесконечности кругового сложного цикла. Он пересекает гиперболу в четырех седловых точках и внутри него сохраняются три особые точки и все циклы. При этом возмущенная система при $\varepsilon = 1/3$ становится гамильтоновой, и в первой и третьей четвертях плоскости происходит слияние трех особых точек в одну: точку касания сложного цикла и ветви гиперболы. Во второй части работы найдено общее решение системы (*), представляющее самостоятельный интерес.

Ключевые слова. Бифуркация, цикл, консервативная система.

BIFURCATIONS IN A CONSERVATIVE SYSTEM WITH THREE EQUILIBRIUM POINTS IN THE UNPERTURBED PART

V. V. Basov, PhD in Maths, Ass. Prof., V. S. Gorelov
Saint Petersburg State University
Saint Petersburg, Russia

Abstract. A conservative system $\dot{x} = -xy^2 + x + y$, $\dot{y} = -x - y + x^2y$ (*) is investigated. Apart from three singular points and two branches of a hyperbola, all its trajectories are cycles. In the first part of the work, terms (linear with respect to the parameter $\varepsilon > 0$ and cubic with respect to x, y) are added to the right-hand side of system (*) in such a way that the perturbed system remains conservative one. In this system, for any small value of $\varepsilon > 0$, a bifurcation occurs leading to the birth of a complex circular cycle from infinity. When $\varepsilon = 1/3$, the perturbed system becomes hamiltonian one, and in the first and third quadrants of the plane, a merging of three singular points into one occurs in the contact point of the complex cycle and the branch of the hyperbola. In the second part of the study, a general solution for system (*) is found.

Keywords. Bifurcation, cycle, conservative system.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерную автономную систему с пара-

метром

$$\dot{x} = -xy^2 + x + y + \varepsilon X(x, y), \quad \dot{y} = -x - y + x^2y + \varepsilon Y(x, y) \quad (\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]), \quad (1_\varepsilon)$$

в которой X, Y — вещественно-аналитические функции в окрестности точки $x = y = 0$.

Системой, невозмущенной по отношению к системе (1_ε) , будем называть систему

$$\dot{x} = -xy^2 + x + y, \quad \dot{y} = -x - y + x^2y \quad (1_0)$$

с особыми точками $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ и первым интегралом

$$(xy - 1)e^{-(x^2+y^2)/2} = C, \quad C \in [-1, e^{-2}]. \quad (2_0)$$

Опишем фазовые траектории системы (1_0) (см. рисунок 1):

- 1) при $C = -1$ имеем особую точку $(0, 0)$, при $C = e^{-2}$ — особые точки $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$;
- 2) для любого $C \in (-1, 0)$ имеем цикл расположенный в области $xy < 1$ и охватывающий особую точку $(0, 0)$;
- 3) при $C = 0$ имеем две гиперболические траектории, заданные гиперболой $xy = 1$;
- 4) для любого $C \in (0, e^{-2})$ имеем два симметричных цикла в первой и третьей четвертях, охватывающих особые точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ соответственно.

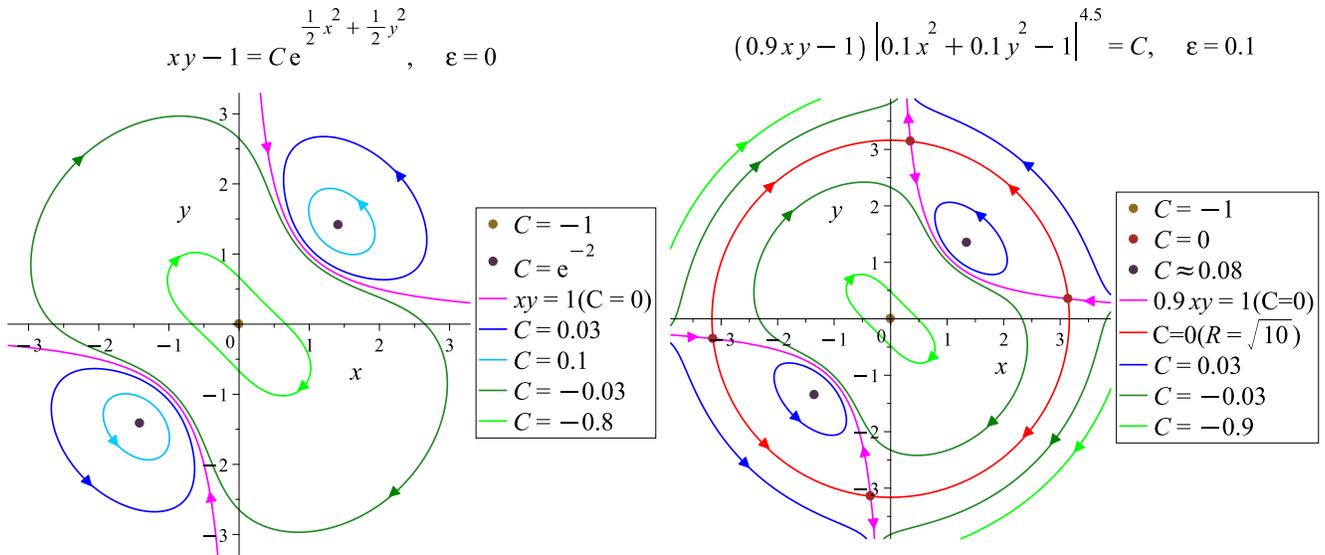


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1_0)

Рис. 2. Фазовый портрет системы $(\tilde{1}_\varepsilon)$

Система (1_0) консервативна (см. [1, глава 7, § 1]), поскольку после умножения ее на интегрирующий множитель $\mu = e^{-(x^2+y^2)/2}$ и замены времени $t = \mu(x, y)\tau$ она сводится к гамильтоновой системе $dx/d\tau = (-xy^2 + x + y)e^{-(x^2+y^2)/2}$, $dy/d\tau = (-x - y + x^2y)e^{-(x^2+y^2)/2}$ с гамильтонианом $H_0 = (1 - xy)e^{-(x^2+y^2)/2}$.

Одна из целей исследования, начатого в предлагаемой работе, заключается в поиске функций X, Y , при которых в системе (1_ε) для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ происходит

бифуркация рождения особых точек и либо система остается консервативной, либо в ней появляется конечное или счетное число предельных циклов.

В разделе 2 построена система $(\tilde{1}_\varepsilon)$, в которой при любых малых значениях параметра происходит бифуркация рождения из бесконечной особой точки сложного цикла — круга радиуса $\varepsilon^{-1/2}$ — с четырьмя седловыми особыми точками в местах его пересечения с гиперболой $xy = (1 - \varepsilon)^{-1}$. При этом внутри круга сохраняются все циклы и особые точки, имеющиеся в невозмущенной системе (1_0) .

Замечание 1. *Различные обобщения невозмущенной системы (1_0) и нахождение для системы (1_ε) с новой невозмущенной частью функций X, Y определенной степени, при которых рождается максимально большое, но конечное число предельных циклов, — это тема последующих исследований. Таким образом, предлагается решать ослабленную XVI проблему Гильберта или, как ее еще называют, локальную проблему Арнольда–Гильберта (см., напр., обзор [2]) по оценке снизу числа Гильберта. Кроме того, последнюю задачу предполагается обобщить, рассматривая периодические по времени возмущения системы (1_0) , при которых рождаются уже не предельные циклы, а инвариантные двумерные торы (см., напр., [3]).*

Другая цель исследования заключается в нахождении общего решения системы (1_0) , имеющейся в справочнике [4, система (9.6)], где приведен ее первый интеграл. При этом вторую интегрируемую комбинацию для нее до настоящего времени найти не удавалось.

В разделе 3 автономная система (1_0) проинтегрирована. С процессом интегрирования и получением решений различных задач Коши полезно ознакомиться студентам, интересующимся обыкновенными дифференциальными уравнениями.

2. Возмущенная система, имеющая континуум циклов. Наиболее распространенными возмущениями являются многочлены, степень которых по x, y не превосходит трех. Именно такие возмущения были выбраны в этой работе.

Теорема 1. *Возмущенная система*

$$\dot{x} = -xy^2 + x + y - \varepsilon x^3, \quad \dot{y} = -x - y + x^2y + \varepsilon y^3 \quad (\tilde{1}_\varepsilon)$$

при любом $\varepsilon \in (0, 1/3)$ имеет четыре особые точки $(\xi - \eta, \xi + \eta)$, $(\eta - \xi, -\xi - \eta)$, $(\xi + \eta, \xi - \eta)$, $(-\xi - \eta, \eta - \xi)$ с $\xi = 2^{-1}(\varepsilon^{-1} + 2(1 - \varepsilon)^{-1})^{1/2}$, $\eta = 2^{-1}(\varepsilon^{-1} - 2(1 - \varepsilon)^{-1})^{1/2}$, расположенные в местах пересечения гиперболы $xy = (1 - \varepsilon)^{-1}$ и сложного цикла $x^2 + y^2 = \varepsilon^{-1}$. Внутри этого цикла все траектории, кроме трех особых точек $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}(1 + \varepsilon)^{-1/2}, \pm\sqrt{2}(1 + \varepsilon)^{-1/2})$, являются циклами (см. рисунок 2).

Доказательство заключается в нахождении и исследовании первого интеграла:

$$((1 - \varepsilon)xy - 1) \left| \varepsilon(x^2 + y^2) - 1 \right|^{(1-\varepsilon)/2\varepsilon} = C. \quad (\tilde{2}_\varepsilon)$$

В выбранной таким образом системе (\tilde{I}_ε) бифуркации имеют место не только при малых ε , но и при ε , близких к $1/3$. Поэтому в качестве невозмущенной можно рассмотреть систему (\tilde{I}_ε) с $\varepsilon = 1/3$:

$$\dot{x} = -xy^2 + x + y - x^3/3, \quad \dot{y} = -x - y + x^2y + y^3/3, \quad (1_{1/3})$$

которая является гамильтоновой с гамильтонианом $H_{1/3} = (x^2 + y^2 - 3)xy - (x^2 + y^2)/2$, имеет особые точки $(0, 0)$, $(\pm(3/2)^{1/2}, \pm(3/2)^{1/2})$ и первый интеграл

$$(2xy - 3)(3 - x^2 - y^2) = 9C. \quad (2_{1/3})$$

Понятно, что в качестве возмущенной для нее в первую очередь следует выбрать систему (\tilde{I}_ε) , в которой при любом $\varepsilon \in (1/3 - \varepsilon_*, 1/3)$ ($\varepsilon_* \in (0, 1/3)$) происходит бифуркация рождения тех же четырех седловых особых точек (см. рисунки 3, 4).

$$(2xy - 3)(x^2 + y^2 - 3) = C, \quad \varepsilon = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{23}{30}xy - 1 \right) \left| \frac{7}{30}x^2 + \frac{7}{30}y^2 - 1 \right|^{23/14} = C, \quad \varepsilon = \frac{7}{30}$$

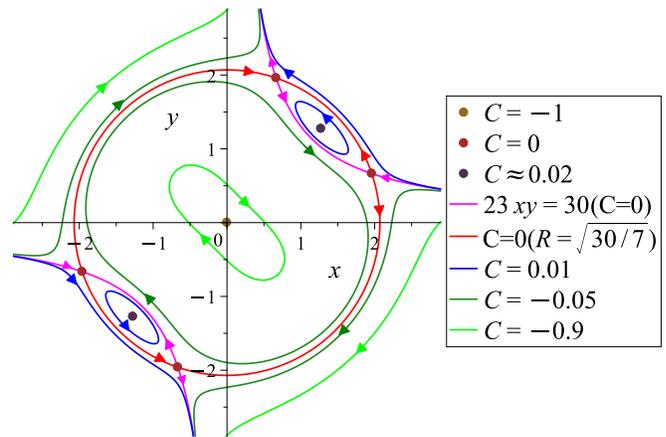
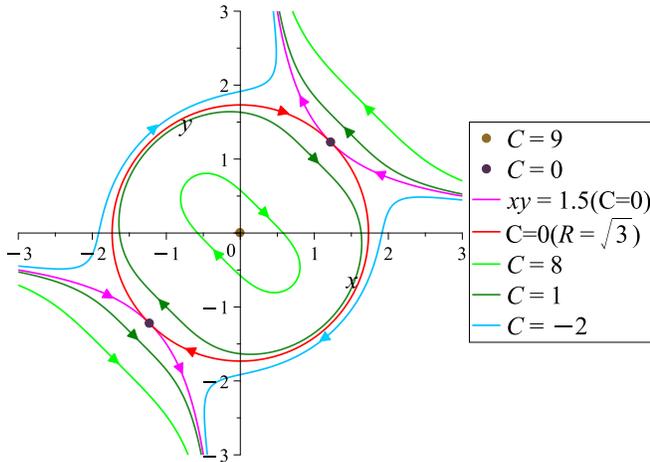


Рис. 3. Фазовый портрет системы $(1_{1/3})$

Рис. 4. Фазовый портрет системы (\tilde{I}_ε)

3. Интегрирование невозмущенной консервативной системы (1_0) . Будем искать решение задачи Коши системы (1_0) с начальными данными $t_0 = 0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^1$, используя обозначение $\text{ЗК}(x_0, y_0)$, а само решение обозначать

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t, x_0, y_0), \\ y(t) &= y(t, x_0, y_0). \end{aligned}$$

Поскольку система автономна, случай, когда $t_0 \neq 0$, сводится к рассматриваемому заменой времени $t = \tau + t_0$.

Очевидно, что при $x_0 y_0 = 1$ решение $\text{ЗК}(x_0, x_0^{-1})$ имеет вид

$$\begin{aligned} x(t, x_0, x_0^{-1}) &= x_0 e^t, \\ y(t, x_0, x_0^{-1}) &= (x_0 e^t)^{-1}. \end{aligned}$$

Всегда в дальнейшем будем предполагать, что

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &\in D_0, \quad D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}; \\ C &= C_0(x_0, y_0) = (x_0 y_0 - 1)e^{-(x_0^2 + y_0^2)/2} (\neq -1, 0, e^{-2}), \end{aligned} \quad (3)$$

т. е. решение ЗК(x_0, y_0) параметризует траекторию, не совпадающую с особыми точками и ветвями гиперболы.

В полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ система (1₀) и интеграл (2₀) имеют вид

$$\dot{r} = r \cos(2\varphi), \quad \dot{\varphi} = \sin(2\varphi)(r^2/2 - 1) - 1, \quad (4)$$

$$((r^2/2) \sin(2\varphi) - 1)e^{-r^2/2} = C (= C_0(x_0, y_0) \text{ из (3)}). \quad (5)$$

Пусть $r(t) = (x(t)^2 + y(t)^2)^{1/2}$, $\varphi(t) = \arctan 2(x(t), y(t))$ — решение ЗК(r_0, φ_0) системы (4) с $r_0 = r(0)$, $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Оценим границы изменения $r(t)$ в зависимости от значений константы C :

$$C_*(r) = (-r^2/2 - 1)e^{-r^2/2} \leq C \leq C^*(r) = (r^2/2 - 1)e^{-r^2/2}. \quad (6)$$

Положим $C_+^*(r) = C^*(r)$ при $r \in (0, 2)$ и $C_-^*(r) = C^*(r)$ при $r > 0$.

Функция $C_*(r)$ возрастает при $r > 0$, а $C_+^*(r)$ возрастает при $r \in (0, 2)$ и $C_-^*(r)$ убывает при $r > 2$ (см. рисунок 5).

Пусть $r_* = (C_+^*)^{-1}(C)$, $C \in (-1, e^{-2})$; $r^* = \begin{cases} (C_*)^{-1}(C), & C \in (-1, 0), \\ (C_-^*)^{-1}(C), & C \in (0, e^{-2}). \end{cases}$

Тогда $r(t) \in [r_*, r^*]$ (см. рисунок 6).

Поскольку решение любой ЗК(x_0, y_0) ограничено, оно определено на \mathbb{R} , в частности, функция $r(t)$ определена на \mathbb{R} .

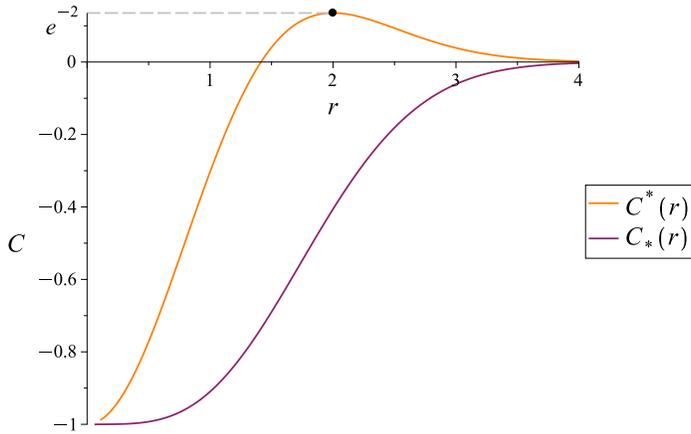


Рис. 5. Графики $C_*(r)$ и $C^*(r)$

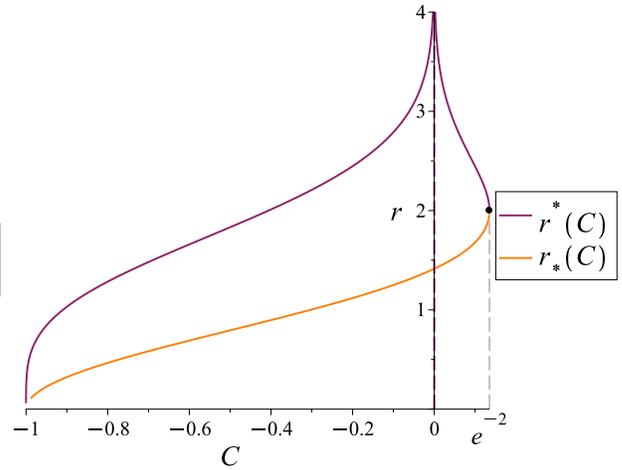


Рис. 6. Графики $r_*(C)$ и $r^*(C)$

Подставляя интеграл (5) в первое уравнение системы (4), получаем уравнения

$$\dot{r} = \pm(r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2)^{1/2}. \quad (7)$$

Найдём область определения функции $f(r) = (r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2)^{-1/2}$.

Разрешая относительно C неравенство $r^2 > 2|Ce^{r^2/2} + 1|$, вытекающее из неравенства $f(r) > 0$, получаем область, заключенную между кривыми, которые задаются функциями $C^*(r)$ и $C_*(r)$ из (6), а значит, $f(r)$ определена при любом $r \in (r_*, r^*)$.

Положим

$$t_{\pm}(r, r_0) = \pm \int_{r_0}^r f(\xi) d\xi; \quad I^*(r) = t_+(r^*, r), \quad I_*(r) = t_+(r, r^*). \quad (8)$$

Лемма 1. *Функции $t_{\pm}(r, r_0)$ непрерывны по r (см. рисунок 7) при любых $r, r_0 \in [r_*, r^*]$.*

Доказательство. Очевидно, что функции $t_{\pm}(r, r_0)$ непрерывны по r при любых $r, r_0 \in (r_*, r^*)$. Остается проверить сходятся ли интегралы из (8) при $r, r_0 \in \{r_*, r^*\}$, а точнее, установить сходимость интегралов $I^*(r_1), I_*(r_1)$ при $r_1 \in (r_*, r^*)$.

После преобразований получаем

$$I^*(r_1) = \frac{1}{2} \int_0^{r_*^2 - r_1^2} ((\xi - r_*^2)^2 - 4((\text{sgn}(C)r_*^2/2 - 1)e^{-\xi/2} + 1)^2)^{-1/2} d\xi,$$

$$I_*(r_1) = \frac{1}{2} \int_{r_*^2 - r_1^2}^0 ((\xi + r_*^2)^2 - 4((r_*^2/2 - 1)e^{\xi/2} + 1)^2)^{-1/2} d\xi.$$

Эти интегралы сходятся, поскольку существует конечный положительный предел отношения подинтегральных функций и функции $\xi^{-1/2}$ в точке нуля. ■

Поскольку из (8) следует, что функции $t = t_{\pm}(r, r_0)$ непрерывно дифференцируемы по r при $r \in (r_*, r^*)$, непрерывны на границе и монотонны, то решениями ЗК(0, r_0) уравнений (7) будут следующие обратные функции:

$$r_{\pm}(t) = r_{\pm}(t, r_0) = (t_{\pm}(r, r_0))^{-1}(t), \quad t \in K_{\pm} = [\tau_*^{\pm}, \tau_{\pm}^*],$$

где $\tau_+^* = I^*(r_0)$, $\tau_*^- = -\tau_+^*$; $\tau_*^+ = -I_*(r_0)$, $\tau_-^* = -\tau_*^+$ ($\tau_*^{\pm} < \tau_{\pm}^*$).

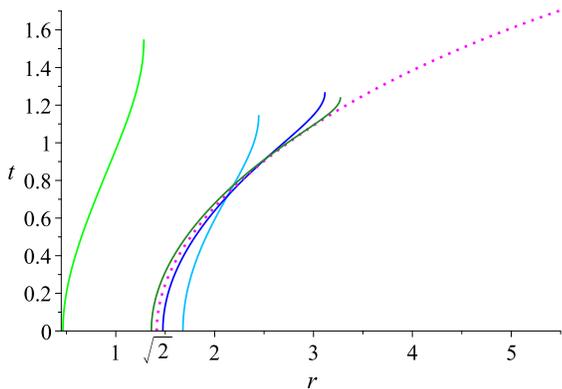


Рис. 7. Графики $t_+(r, r_*)$

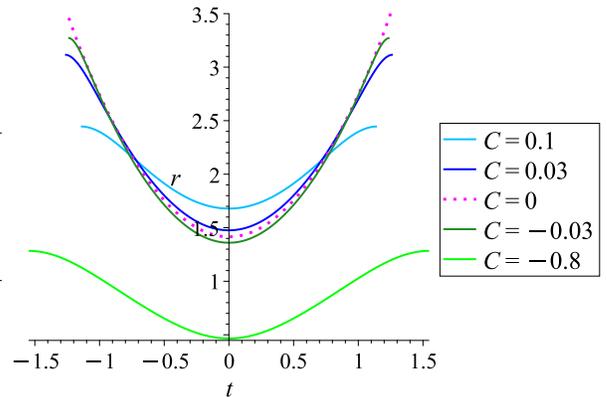


Рис. 8. Графики $r^{\omega}(t)$

Следующим шагом будет нахождение компоненты $r(t)$ полного решения ЗК(r_0, φ_0).

Из первого уравнения системы (4) вытекает, что $r(t)$ возрастает, когда $|x(t)| > |y(t)|$, и убывает, когда $|x(t)| < |y(t)|$. Следовательно, минимум r_* функции $r(t)$

достигается, когда $x(t) = y(t) = \pm 2^{-1/2}r_*$, а максимум r^* , — когда $x(t) = y(t) = \pm 2^{-1/2}r^*$, если $C > 0$, и $x(t) = -y(t) = \pm 2^{-1/2}r^*$, если $C < 0$.

Положим $G_+ = \{(\pm 2^{-1/2}r_*, \pm 2^{-1/2}r_*), \{(x, y) \in D_0: |x| > |y|\}\}$,
 $G_- = \{(\pm 2^{-1/2}r^*, \pm 2^{-1/2}r^*), (\pm 2^{-1/2}r^*, \mp 2^{-1/2}r^*), \{(x, y) \in D_0: |x| > |y|\}\}$.

При $(x_0, y_0) \in G_+$ функция $r(t)$ возрастает в окрестности точки нуль, а если при этом $(x_0, y_0) = (\pm 2^{-1/2}r_*, \pm 2^{-1/2}r_*)$, то в правой полуокрестности. Поэтому $r(t) \equiv r_+(t)$ на K_+ , так как $r_+(t)$ также возрастающее решение ЗК(0, r_0). Аналогично, $r(t) \equiv r_-(t)$ на K_- при $(x_0, y_0) \in G_-$.

Пусть

$$\omega = \tau_+^* - \tau_-^*; \quad r^\omega(t) = \{r_-(t + \tau_-^*) \text{ при } t \in (-\omega, 0], r_+(t + \tau_+^*) \text{ при } t \in (0, \omega]\};$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in ((k-1)\omega, (k+1)\omega]: \quad R(t) = r^\omega(t - 2k\omega); \quad (9)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad R_\pm(t) = \{R(t - \tau_+^*) \text{ при } (x_0, y_0) \in G_+, R(t - \tau_-^*) \text{ при } (x_0, y_0) \in G_-\},$$

т.е. $R(t)$ — 2ω -периодическое продолжение на \mathbb{R} функции $r^\omega(t)$ (см. рисунки 8,9).

Лемма 2. $r(t) = R_\pm(t)$ для всякого $t \in \mathbb{R}$ (см. рисунок 10).

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in G_+$. Очевидно, что $r(t) = r_+(t) = R_+(t)$ на K_+ . Пусть $\hat{r}_-(t)$ — полученное с помощью замены времени $t = \tau + \hat{t}_0$ решение ЗК(\hat{t}_0, \hat{r}_0), где $\hat{t}_0 = \tau_+^*$, $\hat{r}_0 = r(\hat{t}_0) = r^*$. С одной стороны, $\hat{r}(t)$ — полученное с помощью замены времени $t = \tau + \hat{t}_0$, решение ЗК($\hat{r}_0, \hat{\varphi}_0$), где $\hat{\varphi}_0 = \varphi(\hat{t}_0)$, совпадает с $r(t)$ на \mathbb{R} , поскольку их интегральные кривые имеют общую точку $(\hat{t}_0, \hat{r}_0, \hat{\varphi}_0)$ и $\hat{r}(t) = \hat{r}_-(t)$ на $\hat{K}_- = [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + I_*(r^*)] = [\tau_+^*, \tau_+^* + \omega]$. С другой стороны, $R_+(t) = \hat{r}_-(t)$ на \hat{K}_- . Имеем: $r(t) = R_+(t)$ на \hat{K}_- . И так далее.

В результате $r(t) = R_+(t)$ на \mathbb{R} . Аналогично для случая, когда $(x_0, y_0) \in G_-$. ■

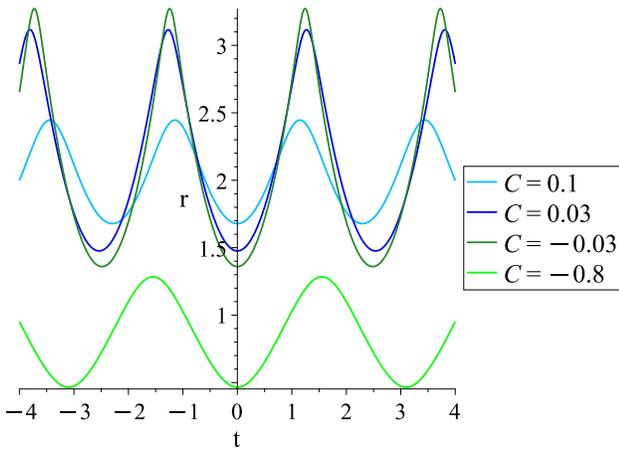


Рис. 9. Графики $R(t)$

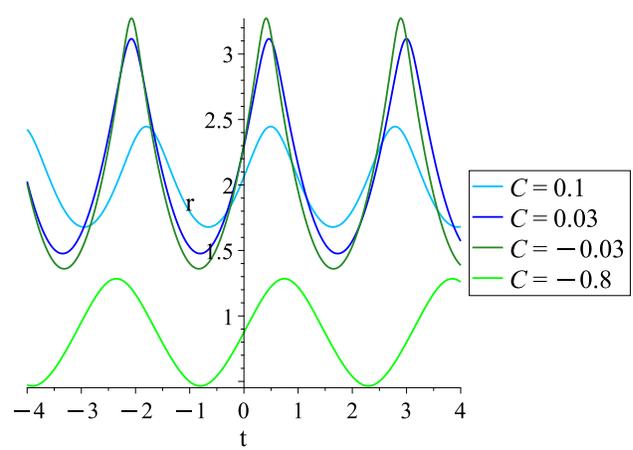


Рис. 10. Графики $R_+(t)$ при $r_0 = (r^* + r_*)/2$

Возвращаясь к уравнению (5), положим

$$h(r) = 2r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1); \quad r_\varphi = 2^{1/2} \ln^{1/2}(-C^{-1}), \text{ если } C < 0,$$

т. е. r_φ — это значение $r(t)$ в точках пересечений траектории и осей координат.

Пусть

$$1) \sin^+(t) = \begin{cases} 2^{-1/2}(1 + (1 - h(r^\omega(t))^2)^{1/2})^{1/2}, & t \in (-\omega, 0], \\ 2^{-1/2}(1 - (1 - h(r^\omega(t))^2)^{1/2})^{1/2}, & t \in (0, \omega], \end{cases} \quad \cos^+(t) = \sin^+(-t);$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in ((k-1)\omega, (k+1)\omega]: \quad \text{Sin}^+(t) = \sin^+(t - 2k\omega), \quad \text{Cos}^+(t) = \cos^+(t - 2k\omega);$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \text{Sin}_\pm^+(t) = \begin{cases} \text{Sin}^+(t - \tau_*^+), & (x_0, y_0) \in G_+, \\ \text{Sin}^+(t - \tau_*^-), & (x_0, y_0) \in G_-, \end{cases} \quad \text{Cos}_\pm^+(t) = \begin{cases} \text{Cos}^+(t - \tau_*^+), & (x_0, y_0) \in G_+, \\ \text{Cos}^+(t - \tau_*^-), & (x_0, y_0) \in G_-; \end{cases}$$

$$2) \sin^-(t) = \begin{cases} g_+(t + \omega), & t \in (-2\omega, 0], \\ -g_+(t - \omega), & t \in (0, 2\omega], \end{cases} \quad \cos^-(t) = \begin{cases} g_-(t + \omega), & t \in (-2\omega, 0], \\ -g_-(t - \omega), & t \in (0, 2\omega]; \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in (2(k-1)\omega, 2(k+1)\omega]: \quad \text{Sin}^-(t) = \sin^-(t - 4k\omega), \quad \text{Cos}^-(t) = \cos^-(t - 4k\omega);$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \text{Sin}_\pm^-(t) = \begin{cases} \text{Sin}^-(t + \tau_*^+), & (x_0, y_0) \in G_+, \\ \text{Sin}^-(t + \omega + \tau_*^-), & (x_0, y_0) \in G_-; \end{cases} \quad \text{Cos}_\pm^-(t) = \begin{cases} \text{Cos}^-(t + \tau_*^+), & (x_0, y_0) \in G_+, \\ \text{Cos}^-(t + \omega + \tau_*^-), & (x_0, y_0) \in G_-; \end{cases}$$

$$\text{где } g_+(t) = \begin{cases} 2^{-1/2}(1 + (1 - h(r^\omega(t))^2)^{1/2})^{1/2}, & t \in (-\omega, 0], \\ 2^{-1/2}(1 - (1 - h(r^\omega(t))^2)^{1/2})^{1/2}, & t \in (0, I_*(r_\varphi)], \\ -2^{-1/2}(1 - (1 - h(r^\omega(t))^2)^{1/2})^{1/2}, & t \in (I_*(r_\varphi), \omega]; \end{cases} \quad g_-(t) = g_+(-t).$$

В результате оказалось доказанным следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение $3K(x_0, y_0)$ при $(x_0, y_0) \in D_0$ из (3) с периодом $\Omega = \{2\omega, \text{ если } C > 0, 4\omega, \text{ если } C < 0\}$ имеет вид*

$$x(t) = R_\pm(t)\text{Cos}_\pm(t), \quad y(t) = R_\pm(t)\text{Sin}_\pm(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\text{Cos}_\pm(t) = \text{Cos}_\pm^+(t), \quad \text{Sin}_\pm(t) = \text{Sin}_\pm^+(t), \quad \text{если } C > 0 \text{ и } y_0 > -x_0;$$

$$\text{Cos}_\pm(t) = -\text{Cos}_\pm^+(t), \quad \text{Sin}_\pm(t) = -\text{Sin}_\pm^+(t), \quad \text{если } C > 0 \text{ и } y_0 \leq -x_0;$$

$$\text{Cos}_\pm(t) = \text{Cos}_\pm^-(t), \quad \text{Sin}_\pm(t) = \text{Sin}_\pm^-(t), \quad \text{если } C < 0 \text{ и } (y_0 > -x_0 \text{ или } y_0 = -x_0 \text{ при } x_0 < 0);$$

$$\text{Cos}_\pm(t) = -\text{Cos}_\pm^-(t), \quad \text{Sin}_\pm(t) = -\text{Sin}_\pm^-(t), \quad \text{если } C < 0 \text{ и } (y_0 < -x_0 \text{ или } y_0 = -x_0 \text{ при } x_0 > 0); \text{ где } R_\pm(t) \text{ из (9), } C = (x_0 y_0 - 1)e^{-(x_0^2 + y_0^2)/2} \text{ (см. рисунки 11, 12, 13).}$$

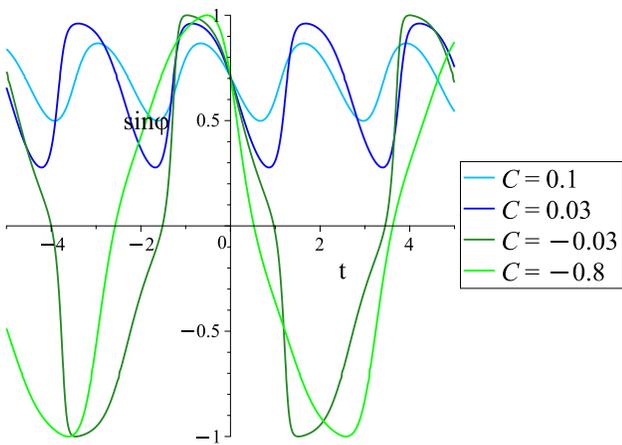


Рис. 11. Графики $Sin_{+}^{\pm}(t)$ при $r_0 = r_*(C)$

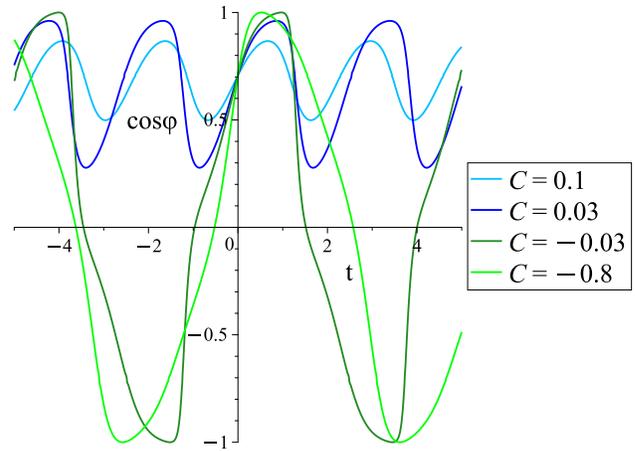


Рис. 12. Графики $Cos_{+}^{\pm}(t)$ при $r_0 = r_*(C)$

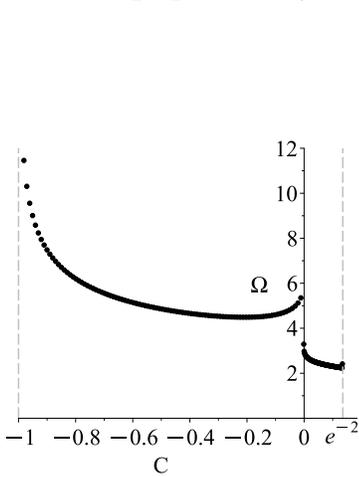


Рис. 13. График $\Omega(C)$

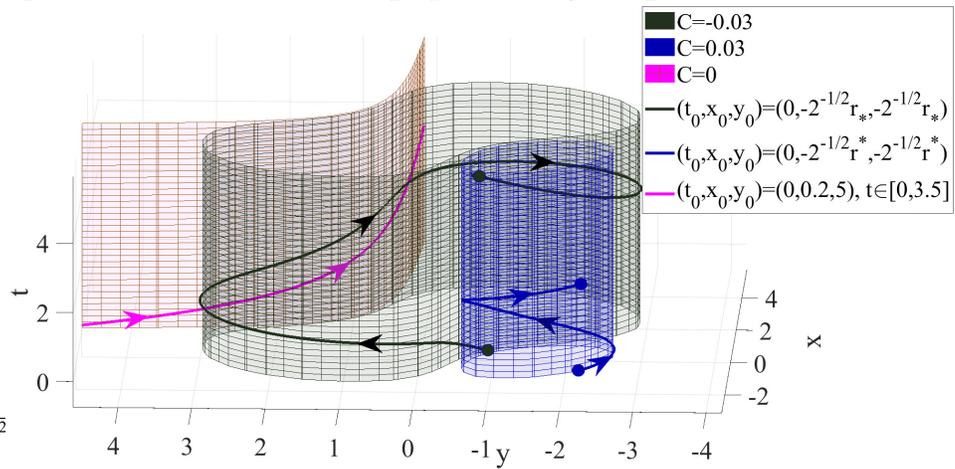


Рис. 14. Интегральные кривые $(t, x(t), y(t))$, $t \in [0, \Omega]$

В заключение, ориентируясь в большей степени на студенческую аудиторию, продемонстрируем, как инвариантная цилиндрическая поверхность, порожденная выбранным циклом и заполненная интегральными кривыми периодических решений с различными t_0 (решение при $t_0 = 0$ найдено), в результате факторизации по периоду Ω может быть «свернута» в двумерный инвариантный тор, заполненный теперь уже замкнутыми интегральными кривыми.

Пусть сначала $C > 0$, $\alpha(t) = 2\pi t/\Omega$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ повернем точку $(x(t), y(t), 0)$, где $(x(t), y(t))$ — решение ЗК (x_0, y_0) , относительно прямой $y = -x$ на угол $\alpha(t)$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{t}(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} r(t) \cos \alpha(t) \\ r(t) \sin \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x(t) - y(t))/2 \\ (y(t) - x(t))/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r(t) = 2^{-1/2}|x(t) + y(t)|, \quad R = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 0 & -2^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получаем решение ЗК (\bar{x}_0, \bar{y}_0) в координатах $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ с $\bar{t}_0 = 0$, $\bar{x}_0 =$

$x_0, \bar{y}_0 = y_0$, лежащее на двумерном инвариантном торе (см. рисунок 15).

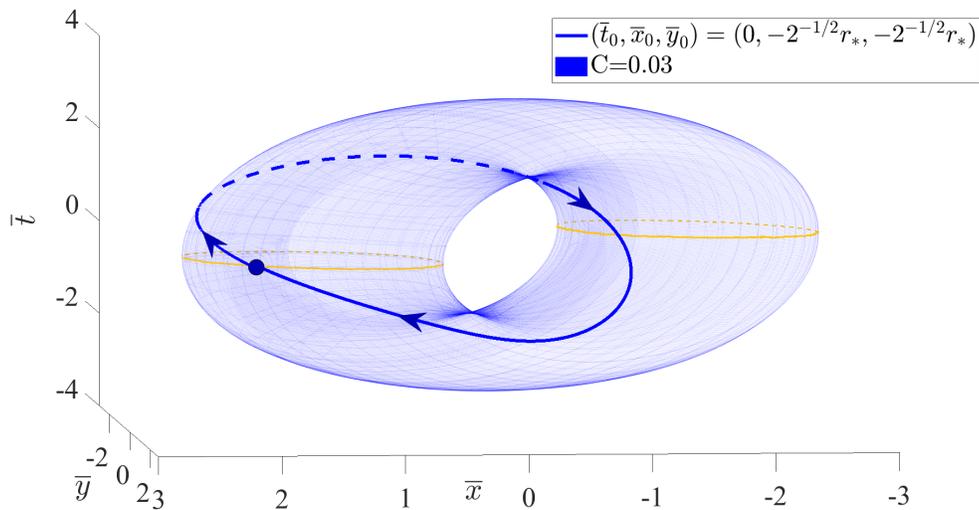


Рис. 15. Решение ЗК(\bar{x}_0, \bar{y}_0) при $C > 0$

Пусть теперь $C < 0$. Тогда применим те же рассуждения к решению ЗК(x_0, y_0), смещенному на вектор (a^2, a^2) , который подобран таким образом, что полученное после переноса решение не пересекается с прямой $y = -x$. После факторизации имеем решение ЗК(\bar{x}_0, \bar{y}_0), где $\bar{t}_0 = 0, \bar{x}_0 = x_0 + a^2, \bar{y}_0 = y_0 + a^2$, лежащее на торе (см. рисунок 16).

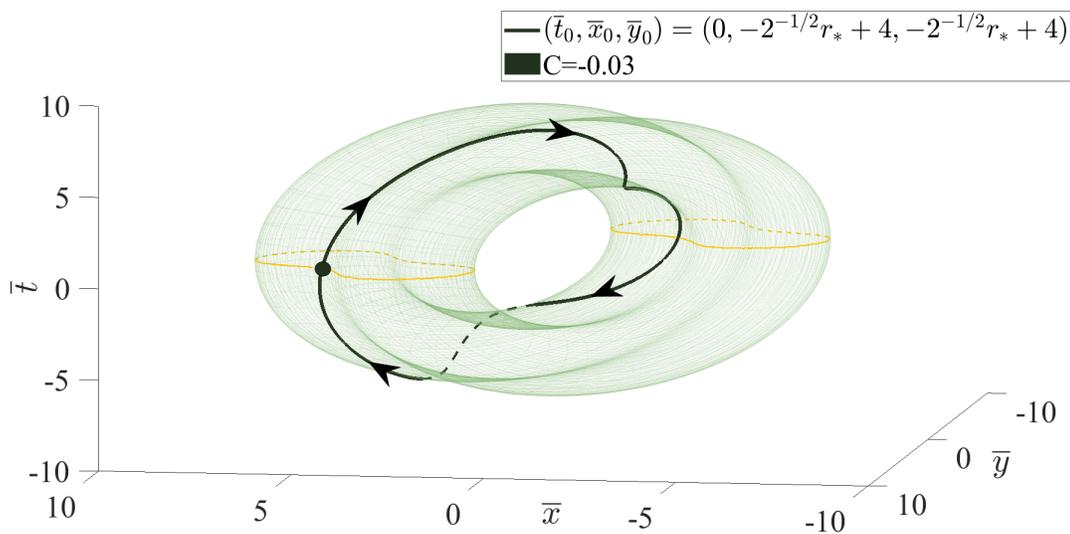


Рис. 16. Решение ЗК(\bar{x}_0, \bar{y}_0) при $C < 0$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1990. — 488 с.
- [2] Li J. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 13. No. 1 (2003). 47–106.

Соколова Г. Ю. Нейронные сети в обучении	193
Устинова И. Г., Беляускене Е. А., Рожкова С. В., Янушик О. В., Имас О. Н. Задания STACK как инструмент обучения высшей математике	195
Русина Л. Г., Агапова Е. А. Техника построения тестовых контрольно-измерительных материалов по математике	199

Раздел VI. Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

Алмохамед М. Об одной специальной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка	204
Андреев В. К. Априорные оценки решения краевой задачи, моделирующей движение двух жидкостей в трубе	209
Аристов А. И. Точные решения модельного нелинейного уравнения соболевского типа ..	214
Басов В. В., Горелов В. С. Бифуркации в консервативной системе с тремя точками покоя в невозмущенной части	217
Вахрамеев И. В. Решение краевой задачи, моделирующей движение двух несмешивающихся жидкостей в цилиндрической трубе	227
Линчук Л. В. Прямая задача группового анализа для альтернативных обобщенных операторов, допускаемых дифференциальными уравнениями с частными производными 1-го порядка	233
Лисина О. Ю., Лисин Д. А. Использование структурных атомарных функций при решении нестационарных краевых задач теплопроводности	238
Хакимова З. Н. Дискретные симметрии мультипликативного класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка	243
Чэн Ш., Коровина М. В. Исследование асимптотик решений дифференциальных уравнений 2-го порядка с мероморфными коэффициентами	247
Коровина М. В. Проблема Пуанкаре в аналитической теории дифференциальных уравнений и ресургентный анализ	253
Яковлева Ю. О. Матрица Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа высокого порядка	258

Раздел VII. Современные проблемы теории функций и функционального анализа

Андреев Ю. А. Допустимые разбиения в определении интеграла Хенстока-Курцвайля....	261
Галанова Н. Ю., Подкорытов М. В. О пределе функции по Коши и по Гейне в неархимедовых упорядоченных полях	266
Коточигов А. М. Векторные непрерывные дроби. Алгоритм разложения	270
Ловягин Ю. Н. Конечная арифметика и её расширения	276
Лукьянов В. Д. Интерполяционный определитель и обобщенное интерполирование	289
Мартынов О. М. Некоторые константы сильной единственности	298
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Об одном свойстве коэффициентов полиномов Бернштейна для степенных функций на симметрическом отрезке	305

Раздел VIII. Актуальные информационные системы и технологии моделирования