

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

**Математический центр мирового уровня
«Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук»**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

Владимирский государственный университет

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ**

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ
СИСТЕМ»**

**Сборник тезисов докладов международной конференции
и международной школы молодых учёных**

Суздаль

28 июня – 3 июля 2024

Владимир 2024

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Математический центр мирового уровня
«Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук»

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ
СИСТЕМ»

Сборник тезисов докладов международной конференции
и международной школы молодых учёных

Суздаль

28 июня – 3 июля 2024

Электронное издание



Владимир 2024

ISBN 978-5-9984-1747-4

© ВлГУ, 2024

© Коллектив авторов, 2024

УДК 517.9(063)
ББК 22.161.6я431

Редакционная коллегия:

В. В. Козлов, доктор физико-математических наук, академик РАН (*ответственный редактор*)
Д. В. Трещев, доктор физико-математических наук, академик РАН (*член редколлегии*)
С. М. Асеев, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН (*член редколлегии*)
А. А. Давыдов, доктор физико-математических наук, профессор (*зам. отв. редактора*)

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. **Международная** школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» [Электронный ресурс] : сб. тез. докл. междунар. конф. и междунар. шк. молодых ученых. Суздаль, 28 июня – 3 июля 2024 г. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН ; Мат. центр мир. ур. «Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН» ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова [и др.]. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 298 с. – ISBN 978-5-9984-1747-4. – Электрон. дан. (16,4 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

В сборник включены тезисы докладов, представленных на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам и международной школе молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем».

Издание представляет интерес для научных работников, специалистов в теории дифференциальных уравнений и динамических систем, качественной теории уравнений с частными производными, математической теории управления, механике и приложениях, а также для аспирантов и студентов математических, технических и естественно-научных направлений.

Организаторы конференции и школы благодарны администрациям Владимирской области и города Суздаля за помощь в подготовке и проведении конференции.

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265) и Московского Центра фундаментальной и прикладной математики.



Программный комитет

- ◇ **В. В. Козлов** (председатель), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **А. А. Давыдов** (зам. председателя), Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- ◇ **Д. В. Трещев** (зам. председателя), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **А. А. Шкаликов** (зам. председателя), Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- ◇ **А. И. Аптекарев**, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
- ◇ **С. М. Асеев**, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **Н. Ю. Лукоянов**, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
- ◇ **Г. П. Панасенко**, Университет Жана Монне, Сен Этьен, Франция
- ◇ **А. Н. Печень**, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **О. В. Починка**, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, Россия
- ◇ **Г. А. Чечкин**, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- ◇ **А. П. Чупахин**, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
- ◇ **А. И. Шафаревич**, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Организационный комитет

- ◇ **А. А. Давыдов** (председатель), Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- ◇ **И. А. Петренко** (зам. председателя), Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия
- ◇ **Л. И. Родина** (зам. председателя), Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия
- ◇ **Е. В. Винников**, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва, Россия
- ◇ **С. О. Горчинский**, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **А. О. Иванов**, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- ◇ **В. Е. Подольский**, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- ◇ **С. А. Поликарпов**, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **В. А. Тимофеева**, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
- ◇ **А. В. Черникова**, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия
- ◇ **П. А. Яськов**, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

CONTENTS / СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Abrarov D. L. | 23 |
| ANALYTICAL LIOUVILLE-ARNOLD THEOREM | |
| Akhmet'ev P. M. | 23 |
| ASYMPTOTIC ERGODIC HIGHER INVARIANT OF MAGNETIC LINES | |
| Alzamili K., Shishkina E. L. | 24 |
| QUALITATIVE THEORY OF THE SINGULAR PARABOLIC EQUATION | |
| Astafyeva P. Yu., Kiselev O. M. | 25 |
| SUBRESONANCES IN A LINEAR OSCILLATOR | |
| Astashov E. A. | 27 |
| ON SIMPLE SINGULARITIES OF SYMMETRIC OR SKEW-SYMMETRIC MATRIX FAMILIES THAT ARE EVEN OR ODD IN THE TOTALITY OF PARAMETERS | |
| Astashova I. V., Astashov A. M. | 27 |
| ON ATYPICALITY OF ASYMPTOTICALLY POWER-LAW SOLUTIONS TO EMDEN-FOWLER TYPE EQUATIONS OF ORDER UP TO 100000 | |
| Bakiev T. N., Ilyashenko Yu. S. | 29 |
| CARTESIAN PRODUCTS OF BIFURCATIONS FOR FAMILIES OF VECTOR FIELDS ON THE TWO-DIMENSIONAL SPHERE | |
| Bobkov V. E., Kolonitskii S. B. | 30 |
| PAYNE NODAL SET CONJECTURE FOR THE RIESZ FRACTIONAL p -LAPLACIAN IN STEINER SYMMETRIC DOMAINS | |
| Bogaevskii I. A., Tolchennikov A. A. | 31 |
| A SEMI-CLASSICAL APPROXIMATION OF SOLUTION TO THE TWO-DIMENSIONAL DIRAC EQUATION WITH A LINEAR POTENTIAL AND LOCALIZED INITIAL CONDITION | |
| Bystrov D. V. | 31 |
| THE QUASILINEAR ROBIN PROBLEM WITH CRITICAL GROWTH OF THE RIGHT-HAND SIDE | |
| Chugainova A. P. | 32 |
| UNDERCOMPRESSIVE SHOCKS FOR NONSTRICTLY HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS | |
| Dudnikova T. V. | 32 |
| CARICATURE OF HYDRODYNAMICS FOR THE HAMILTONIAN "FIELD-CRYSTAL" SYSTEM | |
| Dymov A. V. | 33 |
| ENERGY DISSIPATION IN WEAKLY DAMPED HAMILTONIAN CHAINS | |
| Fateev I. S., Polezhaev A. A. | 34 |
| CHIMERA STATES IN A 2D SYSTEM OF NEURONS WITH SUPERDIFFUSION COUPLING | |
| Fedulov D. D. | 35 |
| NUMERICAL STUDY OF STABLE REGIMES AND BIFURCATIONS IN DYNAMICALLY SELF-ORGANIZING SYSTEMS | |
| Fomin D. O. | 36 |
| BIFURCATIONS OF POLAR FLOWS ON FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS | |
| Frolova E. V. | 36 |
| ON THE MAXIMAL $L_p - L_q$ REGULARITY THEOREM FOR THE LINEARIZED MAGNETIC FIELD EQUATIONS WITH INTERFACE CONDITIONS | |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ilyin A. A. | 37 |
| INEQUALITIES FOR ORTHONORMAL FAMILIES AND ATTRACTORS FOR DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS | |
| Ivanov A. V. | 37 |
| ON CONTINUED FRACTIONS AND DIFFERENCE RICCATI EQUATION | |
| Gaiko V. A. | 38 |
| GLOBAL BIFURCATIONS AND MULTISTABILITY OF LIMIT CYCLES IN A SPECIAL POLYNOMIAL LIENARD SYSTEM | |
| Golubyatnikov V. P. | 40 |
| NONUNIQUENESS OF CYCLES IN SOME GENE NETWORKS MODELS | |
| Gonchenko A. S. | 41 |
| DISCRETE LORENZ ATTRACTORS IN THREE-DIMENSIONAL MAPS WITH AXIAL SYMMETRY | |
| Grines V. Z., Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. | 41 |
| CLASSIFICATION OF AXIOM A DIFFEOMORPHISMS WITH ORIENTABLE CODIMENSION ONE BASIC SETS | |
| Gurevich E. Ya. | 42 |
| NEW OBSTRUCTION FOR MORSE-SMALE CASCADES TO EMBED IN TOPOLOGICAL FLOWS | |
| Gusev N. A. | 42 |
| ON THE CHAIN RULE PROPERTY FOR THE DIVERGENCE OPERATOR | |
| Katkov V. I., Kiselev O. M. | 43 |
| ANALYSIS OF THE ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION WITH THE SPATIAL FRACTIONAL DIFFERENTIAL RIESZ OPERATOR BY THE PERTURBATION METHOD | |
| Kirillov A. N. | 44 |
| REGULARIZATION OF PREDATOR-PREY DYNAMICAL SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE | |
| Klinshov V. V. | 44 |
| ON SYNCHRONIZATION IN KURAMOTO MODEL WITH DELAY | |
| Kon'kov A. A., Shishkov A. E. | 45 |
| ON THE BLOW-UP OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ELLIPTIC INEQUALITIES | |
| Koptev A. V. | 47 |
| EXACT SOLUTIONS OF 3D NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH FINITE LIFETIME | |
| Kudryavtseva E. A. | 48 |
| GENERIC BIFURCATIONS OF TORI IN 3D INTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS | |
| Lisnichenko M. O., Kiselev O. M. | 49 |
| QUANTUM PHASE ESTIMATION STABILITY | |
| Litvinov V. L., Litvinova K. V. | 50 |
| RESONANCE PROPERTIES OF A BEAM WITH A MOVING BOUNDARY LYING ON AN ELASTIC FOUNDATION | |
| Medvedev K. M. | 51 |
| THE HOLDER ESTIMATE FOR DIVERGENCE TYPE EQUATIONS ON STRATIFIED SETS | |
| Minenkov D. S. | 52 |
| WHISPERING GALLERY-TYPE ASYMPTOTICS IN A SOLID TORUS AND CORRESPONDING CLASSICAL BILLIARDS | |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Mironenko F. D. | 53 |
| THE ALEKSANDROV–BAKELMAN–KRYLOV MAXIMUM PRINCIPLE FOR PARABOLIC OPERATORS ON A BOOK-TYPE STRATIFIED SET | |
| Moshchanetskii M. L., Kiselev O. M. | 55 |
| SYNTHESIS OF MOTION ALGORITHM FOR UNDERACTUATED SYSTEM | |
| Mozokhina A. S. | 55 |
| MATHEMATICAL MODELING OF THE INFECTION PROGRESSION WITH INFLAMMATION | |
| Nazarov A. I. | 56 |
| HARDY-TYPE INEQUALITIES WITH MIXED (CYLINDRICAL-SPHERICAL) WEIGHTS | |
| Nguyen Ch. T., Finoshin A. V. | 56 |
| FINITE-TIME STABILITY OF CASCADE SYSTEMS WITH INTEGRAL VIRTUAL CONTROL | |
| Palshin G. P. | 57 |
| TOPOLOGY OF THE GENERALIZED CONSTRAINED THREE-VORTEX PROBLEM AT ZERO TOTAL VORTICAL MOMENT | |
| Pastukhova S. E. | 59 |
| IMPROVED RESOLVENT APPROXIMATIONS IN HOMOGENIZATION OF HIGHER ORDER OPERATORS | |
| Pechen A. N. | 61 |
| QUANTUM CONTROL BY THE ENVIRONMENT | |
| Petrosyan G. G, Soroka M. S. | 62 |
| TOPOLOGICAL PROPERTIES OF SOLUTION SETS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF AN ORDER $q \in (1,2)$ WITH AN ALMOST LOWER SEMICONTINUOUS MULTIMAP | |
| Petrov P. S., Sorokin M. A. | 62 |
| HORIZONTAL RAYS IN A DEEP SEA IN THE PRESENCE OF A SYNOPTIC EDDY | |
| Petruhanov V. N., Pechen A. V. | 63 |
| PHASE DIAGRAM FOR OPEN QUANTUM SYSTEMS DRIVEN BY COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS | |
| Podobryaev A. V. | 64 |
| SUB-LORENTZIAN EXTREMALS | |
| Rastegaev N. V. | 65 |
| KRUKOV-TYPE UNIQUENESS THEOREM FOR THE CHEMICAL FLOOD CONSERVATION LAW SYSTEM | |
| Ryzhikov V. V. | 66 |
| GAUSSIAN AND POISSON SUSPENSIONS OVER SIDON AUTOMORPHISMS, ENTROPY INVARIANTS, AND FACTORS WITH LEBESGUE SPECTRUM | |
| Saburova S. P. | 67 |
| FAST PERFORMANCE OF A GROUP OF CONTROLLED OBJECTS OF VARIABLE COMPOSITION | |
| Sachkov Yu. L. | 68 |
| SUB-LORENTZIAN STRUCTURES ON MARTINET FLAT DISTRIBUTION | |
| Salnikova T. V., Kugushev E. I. | 68 |
| LOCALIZED TRAJECTORIES IN VICINITY OF UNSTABLE EQUILIBRIUM POSITION | |
| Saraev I. A. | 69 |
| ON MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISMS ON SIMPLY CONNECTED MANIFOLDS | |
| Shcheglova A. P. | 70 |
| ON THE HENON PROBLEM FOR THE SPECTRAL FRACTIONAL LAPLACIAN | |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Shorokhov S. G. | 71 |
| DEEP WAVE EQUATION MODELING WITH QUASICLASSICAL VARIATIONAL PRINCIPLE | |
| Sivkin V. N. | 72 |
| APPROXIMATE LIPSCHITZ STABILITY FOR PHASELESS INVERSE SCATTERING WITH BACKGROUND INFORMATION | |
| Skubachevskii A. L. | 72 |
| GLOBAL CLASSICAL SOLUTIONS OF VLASOV–POISSON SYSTEM AND KINETICS OF HIGH TEMPERATURE | |
| Söderbacka G. | 73 |
| MULTIATTRACTORS IN SOME MODELS FOR COEXISTENCE OF PREDATORS | |
| Sukhov E. A. | 73 |
| NONLINEAR ORBITAL STABILITY ANALYSIS OF PERIODIC MOTIONS EMANATING FROM HYPERBOLOIDAL PRECESSION OF A SYMMETRIC SATELLITE | |
| Tolstonogov A. A. | 74 |
| EXISTENCE AND RELAXATION OF BV SOLUTIONS FOR A SWEEPING PROCESS WITH PROX-REGULAR SETS | |
| Ul'vacheva T. A. | 75 |
| ON THE SET OF SOLUTIONS TO A SYSTEM OF FRACTIONAL SEMILINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH HILLE-YOSIDA OPERATORS IN BANACH SPACES | |
| Ustinov N. S. | 76 |
| A GENERALIZATION OF THE HARDY INEQUALITY | |
| Volkov B. O. | 77 |
| TRAPPING BEHAVIOR IN QUANTUM CONTROL LANDSCAPES | |
| Woldeab M. S. | 78 |
| ESTIMATION OF THE AVERAGE TIME BENEFIT FROM RESOURCE EXTRACTION | |
| Абрамова Е. В., Унучек С. А. | 79 |
| ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ | |
| Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. | 81 |
| УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВОЗМУЩЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ | |
| Авдюшкин А. Н. | 82 |
| ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ | |
| Агапов С. В. | 83 |
| ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МАГНИТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ | |
| Агафонкин Г. А. | 84 |
| КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА В МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ИНВОЛЮЦИЕЙ | |
| Адхамова А. Ш. | 84 |
| ЗАДАЧА КРАСОВСКОГО ОБ УСПОКОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ТИПА | |
| Алексеев В. В., Преображенская М. М. | 86 |
| АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СХОДИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЭКИ–ГЛАССА К РЕШЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНОГО РЕЛЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ | |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Али А. З. | 87 |
| ФОРМАЛЬНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТИПИЧНЫХ ПЕРЕСТРОЕК ПОВЕРХНОСТИ В ТРЁХМЕРНОМ КОНТАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ | |
| Аллёнов С. В. | 88 |
| ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ВАСИЛЬЕВА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КЛАССА УЗЛОВ | |
| Аллилуева А. И. | 89 |
| КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД РЕЗКО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ | |
| Алхутов Ю. А., Чечкин Г. А. | 90 |
| РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА СО СНОСОМ И $L_{2+\delta}$ -ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ | |
| Ананьевский И. М. | 92 |
| НАИСКОРЕЙШАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ | |
| Ананьевский И. М. | 93 |
| СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ | |
| Андреева И. А., Кондратьева Н. В. | 93 |
| О ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ | |
| Аптекарев А. И. | 94 |
| АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ I И АНСАМБЛИ СЛУЧАЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ | |
| Апушкинская Д. Е. | 94 |
| СВОБОДНЫЕ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ | |
| Ардентов А. А. | 95 |
| УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ КОЛЕСНОГО РОБОТА С ДВУМЯ ПРИЦЕПАМИ | |
| Арзикулов З. О. | 96 |
| АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА | |
| Асеев С. М. | 97 |
| ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ | |
| Асхабов С. Н. | 98 |
| ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ТЕПЛИЦА-ГАНКЕЛЯ И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ | |
| Базулкина А. А. | 99 |
| ОЦЕНКА СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ ДЛЯ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ВИДОВ | |
| Баин Д. Д. | 101 |
| ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ ПРОСТОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ | |
| Байков А. Е., Майоров А. Ю. | 102 |
| О ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЯХ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ | |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Бардин Б. С. | 103 |
| О ВЫРОЖДЕНИИ ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ | |
| Бардин Б. С., Волков Е. В. | 104 |
| НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ ПРИ МАЛОЙ МАССЕ ОДНОГО ИЗ ПРИТЯГИВАЮЩИХ ТЕЛ | |
| Баринова М. К. | 105 |
| СТРУКТУРА БАССЕЙНОВ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ 3-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ | |
| Баринова М. К., Кольчурина О. А. | 106 |
| КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ Ω - УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ КОРАЗ- МЕРНОСТИ 1 | |
| Безродных С. И. | 107 |
| ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ | |
| Беляков А. О., Платов А. С. | 108 |
| ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА ИЗ ДВУХ УДАЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ ТРАНСПОРТНЫХ ИЗДЕРЖКАХ | |
| Богданов А. Н. | 111 |
| К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫХ ВОЗДЕЙ- СТВИЙ В ГАЗОВЫХ СРЕДАХ | |
| Болотин С. В., Трещев Д. В. | 111 |
| ЕЩЕ ОДНА БИЛЬЯРДНАЯ ЗАДАЧА | |
| Боревич Е. З. | 112 |
| УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕ- СКОГО ТИПА | |
| Борзунов С. В., Семенов М. Е., Канищева О. И., Соловьев А. М., Мелешенко П. А. | 113 |
| СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ КРЕПЛЕНИЯ | |
| Борисов Д. И., Поляков Д. М. | 114 |
| АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СО СДВИГОМ | |
| Бородин А. К., Фельдштейн В. А. | 115 |
| ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ КОДОВ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АЭРО- И ГИДРОУПРУГОСТИ | |
| Бортаковский А. С. | 116 |
| ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ | |
| Бровкин В. В. | 117 |
| О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ p -ЛАПЛАСИАНА НА МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИ- АЛЬНОГО ТИПА | |
| Буланов С. Г. | 118 |
| НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МУЛЬТИПЛИКАТИВ- НОЙ И АДДИТИВНОЙ ФОРМЕ | |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Булатов В. В., Владимиров И. Ю., Ильичева М. А. | 119 |
| Волны на границе льда и жидкости: точные решения и асимптотики | |
| Булатов Ю. Н. | 121 |
| Коммутаторы сингулярных \mathbb{K} -псевдодифференциальных операторов в \mathbb{R}_n | |
| Булатова Р. Р. | 122 |
| Температурный пограничный слой реологически сложной среды | |
| Буров А. А. | 123 |
| Особенности реализации голономных связей, задаваемых кусочно-дифференцируемыми функциями | |
| Буфетов А. И. | 124 |
| Скорость перемешивания для синус-процесса | |
| Бухштабер В. М. | 125 |
| Системы уравнений теплопроводности в неголономном репере | |
| Васильев В. Б., Гебресласи Х. Ф. | 125 |
| О разрешимости задачи Дирихле в многомерной области с разрезом | |
| Васильева Е. В. | 126 |
| Окрестности устойчивых периодических точек диффеоморфизма с гомоклинической точкой | |
| Вдовин А. Ю., Рублева С. С. | 127 |
| Об устойчивом восстановлении управления с закрепленным левым концом по неточной информации о порождаемом им движении квазилинейной динамической системы | |
| Веденин А. В. | 128 |
| Черновские аппроксимации на основе оператора сдвига, быстро сходящиеся к решению параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами | |
| Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечёткин В. М., Руссков А. А. | 129 |
| Об уравнениях типа Власова, космологических решениях и расширении Вселенной | |
| Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. | 130 |
| Математическое моделирование систем контроля за изменением давления в газожидкостных средах | |
| Ветохин А. Н. | 132 |
| О некоторых свойствах локальной энтропии автономных динамических систем | |
| Винников Е. В., Платов А. С. | 133 |
| Необходимое условие оптимальности для задачи управления популяцией на окружности | |
| Вирченко Ю. П., Жильцова В. В. | 134 |
| Асимптотические разложения решений одномерного уравнения теплопроводности с квадратичным источником | |
| Владимиров А. А., Карулина Е. С. | 136 |
| Об одной априорной мажоранте наименьших собственных значений задач Штурма-Лиувилля | |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Волков А. М., Авербух Ю. В. | 137 |
| УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ | |
| Вьюгин И. В. | 138 |
| УРАВНЕНИЕ МАРКОВА НАД ПОЛЕМ ВЫЧЕТОВ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ | |
| Гайфуллин А. М. | 139 |
| РОЛЬ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ СТРУЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ | |
| Галкин О. Е. | 140 |
| ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ | |
| Галкина С. Ю. | 141 |
| ФУНКЦИИ ЧЕРНОВА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ C_0 -ПОЛУГРУППЫ, СГЕНЕРИРОВАННОЙ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ | |
| Гаянов Н. В., Парусникова А. В. | 143 |
| О СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ q -РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ | |
| Гермидер О. В., Попов В. Н. | 143 |
| О РЕШЕНИИ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ | |
| Гомоюнов М. И. | 144 |
| ОБ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА | |
| Гонцов Р. Р. | 145 |
| ИЗОМОНОДРОМНОЕ СЕМЕЙСТВО ШЛЕЗИНЕГРА ФУКСОВЫХ СИСТЕМ И СЛИЯНИЕ ЕГО ОСОБЫХ ТОЧЕК | |
| Гонцов Р. Р., Горючкина И. В. | 146 |
| СХОДИМОСТЬ (ОБОБЩЕННЫХ) СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ МАЛЕРА | |
| Гонченко С. В. | 147 |
| О ДИСКРЕТНЫХ АТТРАКТОРАХ ЛОРЕНЦА | |
| Губайдуллин И. М., Язовцева О. С. | 147 |
| ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ НА ХИМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ | |
| Гусейн-Заде С. М. | 148 |
| ВЕЩЕСТВЕННАЯ ТОПОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КРИВЫХ И РЯДЫ ПУАНКАРЕ | |
| Давыдов А. А., Платов А. С., Туницкий Д. В. | 149 |
| СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В НЕЛОКАЛЬНОЙ КПП-МОДЕЛИ | |
| Даровская К. А. | 150 |
| ТОЖДЕСТВО ОШИБКИ ДЛЯ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ГЛАДКИМ ТЕНЗОРОМ | |
| Джабраилов А. Л. | 151 |
| РЕШЕНИЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИМ НУЛЁМ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ | |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Джамалов С. З., Сипатдинова Б. К. | 152 |
| ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕ- ЛЕПИПЕДЕ | |
| Джамалов С. З., Халходжаев Б. Б., Юсупов Ш. Б. | 154 |
| ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛУНЕ- ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА | |
| Доброславский А. В., Красильников П. С. | 155 |
| ОБ ЭВОЛЮЦИИ КЕПЛЕРОВСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ АСТЕРОИДА ВО ВНЕШНЕЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ | |
| Доброхотов С. Ю. | 156 |
| КЛАССИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕРЕГОВЫХ ВОЛН И ВЫРОЖДЕННЫЕ БИЛЬЯРДЫ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ | |
| Драгунов Т. Н., Морозов К. Е., Морозов А. Д. | 157 |
| О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСАХ И СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕ- СКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ | |
| Ермаков А. Д., Фортова С. В. | 158 |
| ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЦИКЛОНОВ В КУБИЧЕСКОЙ ЗАМКНУТОЙ ЯЧЕЙКЕ | |
| Ефременко Ю. Д. | 159 |
| О КЛАССЕ ЧЕРНА–ЛОСИКА СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 | |
| Ефремова Л. С. | 159 |
| О C^1 -ГЛАДКИХ Ω -УСТОЙЧИВЫХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ НА МНОГОМЕРНЫХ ТОРАХ | |
| Жиров А. Ю., Медведев А. А. | 160 |
| ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ТИПА И ОБРАЗУЮЩИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЛЕНТОЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ: НОВЫЙ АЛГОРИТМ | |
| Жуковская Т. В., Серова И. Д. | 160 |
| О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ | |
| Жуковский Е. С., Патрина А. С. | 161 |
| О ВЗАИМОСВЯЗИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ И РАЗРЫВ- НЫХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ГОЛОВНОГО МОЗГА | |
| Завьялова Т. В. | 162 |
| РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ И СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКАМИ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА | |
| Зайцева Н. В. | 164 |
| КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ | |
| Зайцева Ю. С., Фрадков А. Л. | 164 |
| ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ ПЕШЕХОДНОГО МОСТА | |
| Зверева Е. Л. | 165 |
| ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМ ОБЪЕКТОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ | |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Злобина Е. А., Киселев А. П. | 166 |
| РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ЛЕОНТОВИЧА—ФОКА ДЛЯ ДИФРАКЦИИ НА НЕГЛАДКИХ ПРЕПЯТСТВИЯХ | |
| Зеленова В. К., Преображенская М. М. | 167 |
| ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕЖИМА ЗАМИРАЮЩЕГО НЕЙРООСЦИЛЛЯТОРА | |
| Зиатдинов Н. Р. | 168 |
| ДИНАМИКА АСИММЕТРИЧНОГО ФЛЮГЕРА В РАЗРЕЖЕННОМ ПОТОКЕ | |
| Иванов А. О., Щербаков О. С. | 170 |
| МИНИМАЛЬНЫЕ ЗАПОЛНЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ | |
| Ильичев А. Т., Савин А. С. | 171 |
| ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СТРУКТУР В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ | |
| Ильяшенко Ю. С. | 172 |
| ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ | |
| Ильяшенко Ю. С., Филимонов Д. А. | 172 |
| ОСОБЫЕ ТОЧКИ В ТИПИЧНЫХ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА КОМПАКТНЫХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ | |
| Илюхин А. А., Клово А. Г. | 173 |
| НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА | |
| Казимиров Д. Д. | 175 |
| ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА | |
| Калинин А. В., Гюхтина А. А. | 176 |
| НЕИЗЛУЧАЮЩИЕ ИСТОЧНИКИ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО НАБЛЮДЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ | |
| Калитвин В. А. | 177 |
| О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ | |
| Канатников А. Н. | 178 |
| ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ И ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ | |
| Карачик В. В., Турметов Б. Х. | 180 |
| ЗАДАЧИ С ДВОЙНОЙ ИНВОЛУЦИЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА | |
| Касенов А. А., Горохова В. Ф., Титова Е. К. | 181 |
| ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ДО ОТКАЗА БЕЗОПАСНОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ КИБЕРАТАК | |
| Кашенко С. А., Толбей А. О. | 182 |
| ПОГРАНСЛОЙНЫЕ АСИМПТОТИКИ В БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЫСТРО И С МЕДЛЕННО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ | |
| Кибкало В. А. | 183 |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ БИЛЛИАРДАМИ ИНВАРИАНТОВ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ | |
| Кобенко В. С. | 184 |
| КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА | |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Козлов В. В. | 185 |
| ДИФFUЗИЯ И ФОРМАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ | |
| Коломийцев Г. В., Томашева А. М. | 186 |
| ПОЧЕМУ УСТОЙЧИВЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МОГУТ СХОДИТЬСЯ К РАЗНЫМ РЕШЕНИЯМ: АНАЛИЗ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХОПФА | |
| Конечная Н. Н., Мирзоев К. А. | 187 |
| ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА | |
| Корнеева О. А., Мастерков Ю. В. | 188 |
| УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ | |
| Косарев А. П. | 189 |
| АСИМПТОТИКИ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ ДЛЯ РЕШЕНИЙ $n \times n$ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ | |
| Костерин Д. С. | 190 |
| КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В НЕСКОЛЬКИХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ | |
| Костин Г. В. | 192 |
| ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПО ДЛИНЕ СИЛОЙ В СЕЧЕНИИ | |
| Костромина О. С. | 193 |
| О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ МАЯТНИКОВОГО ТИПА С НЕМОНОТОННЫМ ВРАЩЕНИЕМ | |
| Котюков А. М., Павлова Н. Г. | 193 |
| РАВНОВЕСИЕ В СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ КАК ТОЧКА СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ | |
| Красильников П. С., Исмагилов А. Р. | 194 |
| О ДВИЖЕНИЯХ ГАНТЕЛИ НА ИНВАРИАНТНОМ МНОГООБРАЗИИ «ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРОПЕЛЛЕР» В ОБОБЩЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА | |
| Крищенко А. П. | 195 |
| ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ: ОТ ИДЕИ ДО МЕТОДА | |
| Круглов Е. В. | 196 |
| О СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМАХ С ДВУМЕРНЫМ РАСТЯГИВАЮЩИМСЯ АТТРАКТОРОМ, ЗАДАННЫХ НА 3-МНОГООБРАЗИИ | |
| Кулешов А. С., Скрипкин А. Д. | 197 |
| ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ГЕССА | |
| Куликов А. Н., Куликов Д. А. | 198 |
| ДВУМЕРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА | |
| Кутузова А. А., Преображенская М. М. | 200 |
| ДИСКРЕТНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ЦЕПИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ТИПА ЦЕПОЧКИ ТОДЫ | |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Лексин В. П. | 201 |
| КЛАССИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И СИСТЕМЫ ЖОРДАНА-ПОХГАММЕРА | |
| Лукоянов Н. Ю. | 202 |
| ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ | |
| Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапшина М. Г. | 202 |
| ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА ПРИМЕНЕНИЕМ ДВОЙСТВЕННОГО К НЕМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ | |
| Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А. | 204 |
| ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ D_B^α -ОПЕРАТОРОВ БЕССЕЛЯ В ОБРАЗАХ \mathbb{J} -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕССЕЛЯ | |
| Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. | 205 |
| РАЗМЕРНОСТИ САМОПОДОБИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР, ПОРОЖДЕННЫХ СКРЫТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ | |
| Мажгихова М. Г. | 206 |
| ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА | |
| Максимов Б. А. | 207 |
| О ПОСТРОЕНИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМОЙ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ | |
| Максимова И. С., Осипенко К. Ю. | 208 |
| ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ | |
| Малкин М. И., Решетиллов Р. Н. | 210 |
| КРИТЕРИЙ ХАОТИЧНОСТИ ЛОРЕНЦЕВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕРМИНАХ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ | |
| Мамаев И. С., Бизяев И. А. | 211 |
| ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ | |
| Маркеев А. П. | 212 |
| О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ РЕЗОНАНСА | |
| Масаева О. Х. | 213 |
| О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПОЛОСЕ | |
| Маслов Д. А. | 213 |
| МЕТОД ГОЛОМОРФНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ | |
| Мастерков Ю. В. | 216 |
| О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ РАЗРЫВНЫХ ПО ВРЕМЕНИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ | |
| Маштаков А. П. | 217 |
| СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА НА ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ | |
| Микишанина Е. А., Платонов П. С. | 218 |
| О РЕАЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ КАК СЕРВОСВЯЗЕЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ | |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Минушкина Л. С. | 219 |
| О ЦИКЛАХ В МОДЕЛЯХ КОЛЬЦЕВЫХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕГРАДАЦИЕЙ КОМПОНЕНТ | |
| Миллер Б. М. | 220 |
| ОПТИЧЕСКИЙ ПОТОК В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ СРЕД- СТВАМИ | |
| Миронов А. Е. | 221 |
| КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАНГА ОДИН КАК ПРЕДЕЛ КОММУТИРУЮЩИХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ | |
| Нагуманова А. В. | 221 |
| ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО — ФАБРИЦИО | |
| Николаев В. Г. | 222 |
| ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ РАЗМЕРНОСТИ ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА | |
| Николаева Н. Г., Манакова Н. А. | 223 |
| ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА МАТЕМАТИЧЕ- СКОЙ МОДЕЛИ ХОФФА | |
| Овсянников В. М. | 224 |
| РАЗЛИЧИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СОХРАНЕНИЙ | |
| Осенков Е. М., Починка О. В. | 226 |
| РАЗЛОЖЕНИЕ В СВЯЗНУЮ СУММУ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУС- КАЮЩИХ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ МОРСА-СМЕЙЛА БЕЗ ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ КРИВЫХ | |
| Остапенко В. В., Петренко И. А., Шарифуллина Т. С., Черевко А. А. | 227 |
| МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОЗГОВЫХ СОСУДИСТЫХ ПАТОЛО- ГИЙ | |
| Панов А. В., Воронин С. М. | 228 |
| БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ | |
| Панов Е. Ю. | 228 |
| О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА-НЕЙМАНА НА ПОЛУПРЯМОЙ | |
| Переварюха А. Ю. | 230 |
| МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИЗИСА АГРЕССИВНЫХ ИНВАЗИЙ В УРАВНЕНИЯХ С ВОЗМУЩЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ | |
| Перепёлкин В. В., Румянцев Д. С. | 231 |
| ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА С ЧАСТОТОЙ ПРЕЦЕССИИ ЛУННОЙ ОРБИТЫ | |
| Перепёлкин В. В., Румянцев Д. С. | 232 |
| ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЛУННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИ- ЖЕНИИ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА | |
| Петросян А. С. | 233 |
| ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ | |
| Петухов В. С., Сачков Ю. Л. | 234 |
| ПОЧТИ ЛОРЕНЦЕВЫ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ ГРУШИНА | |
| Пискарев С. И. | 234 |
| ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ | |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Плотников С. А. | 235 |
| ДЕСИНХРОНИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЯХ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ В. А. ЯКУБОВИЧА | |
| Погребняк М. А. | 236 |
| МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА УЧАСТКАХ С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТНЫМИ РЕЖИМАМИ | |
| Постнов С. С. | 237 |
| ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФFUЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ | |
| Посудневская А. О., Долуденко А. Н. | 239 |
| МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА В КВАДРАТНОЙ ЯЧЕЙКЕ | |
| Починка О. В. | 239 |
| КЛАССИФИКАЦИЯ НЕОСОБЫХ 4-ПОТОКОВ С НЕСКРУЧЕННОЙ СЕДЛОВОЙ ОРБИТОЙ | |
| Починка О. В., Ягилев А. А. | 240 |
| О РАЗМЕРНОСТИ МИНКОВСКОГО НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ | |
| Прядиев В. Л. | 241 |
| ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ БЕЗ ГРАНИЧНЫХ ВЕРШИН | |
| Пулькина Л. С. | 242 |
| О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА | |
| Рабинович С., Малютин В. Б. | 242 |
| ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА | |
| Радкевич Е. В., Васильева О. А., Филипов Г. А. | 243 |
| О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БРОДВЕЛЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ | |
| Раецкая Е. В. | 244 |
| РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ | |
| Раутиан Н. А. | 245 |
| КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ | |
| Рачков А. А. | 246 |
| О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ ПО НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ | |
| Решмин С. А. | 247 |
| ОПТИМАЛЬНОЕ И СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМИ РОБОТИЗИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ПЛОСКОСТИ | |
| Родина Л. И. | 247 |
| ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК СБОРА РЕСУРСА | |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Романенков А. М. | 249 |
| УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ДВИЖУЩЕГОСЯ УПРУГОГО ПОЛОТНА | |
| Романова Д. И. | 250 |
| РАЗРАБОТКА ТУРБУЛЕНТНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА | |
| Ронжина М. И., Манита Л. А. | 250 |
| МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ФУЛЛЕРА С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА | |
| Рудаков И. А. | 251 |
| О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННЫМ И УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦАМИ | |
| Рудой Е. М., Саженов С. А. | 252 |
| ОСРЕДНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОГО ТЕЛА, АРМИРОВАННОГО ТОНКИМИ ВОЛОКНАМИ | |
| Рыбалко А. В., Фрадков А. Л. | 253 |
| ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ | |
| Сакбаев В. Ж. | 254 |
| ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПОТОКИ В БЕСКОНЕЧНО-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ | |
| Сакс Р. С. | 255 |
| СЕТЬ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА-ВЕЙЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ | |
| Сапармуратов А. С. | 256 |
| ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕСАМОСПРЯЖЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ | |
| Сахаров А. Н. | 257 |
| СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ | |
| Сачкова Е. Ф., Сачков Ю. Л. | 258 |
| ОБОБЩЕННАЯ ПОЧТИ РИМАНОВА ЗАДАЧА ГРУШИНА | |
| Седова Н. О. | 259 |
| О ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ | |
| Седых В. Д. | 260 |
| ТОПОЛОГИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ КАУСТИК | |
| Семенов М. Е., Канищева О. И., Соловьев А. М., Мелешенко П. А., Борзунов С. В. | 260 |
| АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОПЕРАТОРОМ ПРЕЙЗАХА | |
| Сергеев А. Г. | 262 |
| МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ | |
| Сивкова Е. О. | 262 |
| ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА СОБОЛЕВСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ | |
| Сидоренко В. В. | 263 |
| ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ С ПОМОЩЬЮ ОТОБРАЖЕНИЯ, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ФАЗОВЫЙ ПОТОК СИСТЕМЫ | |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Симаков С. С., Гамилов Т. М., Данилов А. А. | 265 |
| КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ГЕМОДИНАМИКИ ПРИ МНОГО- СОСУДИСТОЙ ИШЕМИЧЕСКОЙ БОЛЕЗНИ СЕРДЦА НА ФОНЕ НАРУШЕНИЯ ПЕРФУЗИИ МИОКАРДА | |
| Ситник С. М., Половинкина М. В., Половинкин И. П. | 266 |
| О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРО- ВОДНОСТИ | |
| Соколов В. Ф. | 267 |
| СУБОПТИМАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СМЕЩЕННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ И ОПЕРАТОРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НОРМАМИ | |
| Солонуха О. В. | 268 |
| О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕ- СКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО | |
| Субботина Н. Н., Крупенников Е. А. | 269 |
| О СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОН- СТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ | |
| Сурков П. Г. | 270 |
| О ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ | |
| Сурначёв М. Д. | 271 |
| ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСТАНДАРТ- НЫМИ УСЛОВИЯМИ РОСТА: НАСЛЕДИЕ В.В. ЖИКОВА И ДАЛЕЕ | |
| Сурначёв М. Д., Тихомиров Р. Н. | 272 |
| НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО (p, q) -ЛАПЛАСИАНА | |
| Тлеулинов М. К. | 274 |
| О ЯВЛЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ НЕСУЩИХ И УПРАВЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛА | |
| Трещев Д. В. | 274 |
| ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ФЛОКЕ | |
| Тулакова З. Р. | 275 |
| СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ | |
| Туманов С. Н. | 276 |
| О КРИТЕРИИ МОЛЧАНОВА КОМПАКТНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДЛЯ НЕСАМО- СОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ | |
| Филимонов А. М. | 277 |
| ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУ- ЛЯРНОСТЯМИ | |
| Фурцев А. И. | 278 |
| ЗАДАЧИ О ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛАХ С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ | |
| Хачатрян Х. А. | 279 |
| О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА- ВОЛЬТЕРРА | |
| Хлопин Д. В. | 279 |
| О ФОРМУЛЕ ТИПА КОШИ КАК УСЛОВИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ | |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Худайкулиев Б. А. | 280 |
| Задача Дирихле для эллиптического уравнения с сингулярным потенциалом в области с конической точкой | |
| Цветкова А. В. | 282 |
| О геометрическом подходе к построению глобальных асимптотик гауссовых пучков | |
| Черепанова Е. А. | 282 |
| О вырожденных особых точках вещественных бинарных уравнений | |
| Чечкин И. Г., Демьянко К. В., Нечепуренко Ю. М. | 283 |
| Численное решение задачи оптимального вдува-отсоса для течения Пуазейля в канале квадратного сечения | |
| Чечкина А. Г. | 284 |
| О повышенной суммируемости решений p -эллиптических уравнений | |
| Чилина Е. Е. | 285 |
| О гомеоморфизмах с псевдоаносовскими аттракторами и репеллерами | |
| Чупахин А. П., Паршин Д. В., Коптюг А. В., Бесов А. С. .. | 286 |
| Реология сложных сред в задачах механики: эксперимент и моделирование | |
| Шамолин М. В. | 287 |
| Инварианты динамических систем с диссипацией | |
| Шафаревич А. И. | 289 |
| Коротковолновые асимптотические решения строго гиперболических систем со скачкообразно меняющимися коэффициентами | |
| Шейнман О. К. | 289 |
| Об обращении отображения Абеля–Прима и его применении к интегрируемым системам | |
| Шейпак И. А. | 290 |
| Точные оценки производных в пространствах Соболева и задачи наилучшего приближения многочленами сплайнов специального вида | |
| Шкаликов А. А. | 292 |
| Новое в старой задаче о гироскопической стабилизации | |
| Щелчков К. А. | 292 |
| Об одной нелинейной задаче управления с помехой в терминах дифференциальной игры убежения | |
| Эглит М. Э., Дроздова Ю. А. | 293 |
| Исследование нестационарных течений неньютоновских жидкостей с пределом текучести в трубах | |
| Эглит М. Э., Якубенко Т. А. | 294 |
| Приближенные формулы для эффективных упругих модулей композитов и пористых материалов и оценки их погрешности | |
| Язовцева О. С., Губайдуллин И. М., Сухарев Л. А. | 295 |
| О гиперболизации нелинейной системы уравнений в частных производных | |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Якубив Ю. А. | 296 |
| СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕДЛЕННО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА | |
| Яськов П. А. | 297 |
| О задаче Дэвиса-Монро | |

ANALYTICAL LIOUVILLE-ARNOLD THEOREM

Abrarov D. L. (Russia, Moscow)
Gubkin University
abrarov@yandex.ru

The classical Liouville-Arnold theorem for Hamiltonian systems ([1]) with an analytic smoothness class is considered. The analyticity of dynamics plays a key role in theoretical issues and is important for applications. The case of three degrees of freedom is considered as the base case. It turns out that classical data such as Liouville tori with rectilinear windings, Liouville foliations, action-angle variables in this case are corrected as a result of an a priori existing analytical continuation at $t \mapsto \infty$. These data take the form of data that canonically describe the derivative flow of great circles on the three-dimensional sphere \mathbb{S}^3 .

In this case of three degrees of freedom, a one-to-one correspondence between classical data and analytical continuation data arises. Analytical continuation data has a completely constructive form ([2]). In particular, the analyzed phase space has the structure of a canonical global Hopf bundle for the sphere \mathbb{S}^3 with a canonical explicit symplectic structure and canonical coordinates in the form of Lie duality for the simple exceptional algebra e_8 ([3]). The phase flow has a canonical complete set of integrals and has the structure of an analytic complete intersection with the Galois group action structure; its trajectory potential has a special zeta-functional form.

The case of an arbitrary number of degrees of freedom is obtained from the case of three degrees of freedom by an inductive procedure. The continuous analogue of the Liouville-Arnold theorem, corresponding to the continuous continuation of classical phase trajectories in $t \mapsto \infty$, is discussed separately.

The mechanical and physical meaning of all these globally emerging analytical structures is discussed.

The relationship between KAM-theory and its equivariant analytical continuation is analyzed in the context of the Diophantine geometry of small denominators.

References

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1974. 432 с.
- [2] Abrarov D. L. Exact solvability of the Euler-Poisson equations: global dynamics and zeta-functions. М.: Scientific world, 2021, 614 p.
- [3] Abrarov D. L. Integrability of the general Euler-Poisson equations as the canonical simply connected analytic Liouville-Arnold theorem // Intellectual Archive, natural science, mathematics, 24 p.

ASYMPTOTIC ERGODIC HIGHER INVARIANT OF MAGNETIC LINES

Akhmet'ev P. M. (Russia, Moscow)
IZMIRAN
pmakmet@mail.ru

Assume we have a divergent-free vector fields without critical points inside a compact domain Ω , which is tangent to the boundary surface (a magnetic field in a magnetic tube). Such a configuration relates with dynamics and is completely determined by the Poincaré section diffeomorphism. We consider all ordered 5-uple points, the initial points of trajectories of the field, and present an ergodic asymptotic integral, analogously with the construction [1], Ch III, 4.3, by the average of the corresponding explicit density function over arbitrary initial point configurations.

Theorem 1. 1. *With the assumption above an asymptotic ergodic integral exists and has the dimension $\frac{Gs^{20}}{cm^{14}}$.*

2. *The integral is defined by the integration of a density function (an integrable function in $L^1(\Omega^5)$) for ordered 5-uple initial points of trajectories, the density function is an invariant with respect to uncompressible diffeomorphisms of the domain.*

3. The symmetrization of the invariant is well defined as a function on Ω^3 /sim of the configuration space of all non-ordered triples.

4. In the case all trajectories in a 5-uple are closed, the density function for the corresponding partition is defined using two-variable Conway polynomial of 5-component link, is determined by the collection of lines. The symmetrization of the density function is defined using one-variable Conway polynomial of 3-component links, which are proper sublinks for the 5-component link.

The theorem has an application in MHD: the condition (1) is agree with the magnetic flow for Kolmogorov MHD spectrum [2]. The condition (2),(3) shows that the density function for small-scale magnetic fields gives an invariant for MHD-turbulence.

In my talk I will prove the statement (2). The proof is based on the individual Birkhoff's theorem and on the Arnold short paths construction (with a minor addition).

References

- [1] Arnold V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics // Applied Mathematical Sciences (AMS, volume 125) (1998).
- [2] Akhmet'ev P.M. Topological meaning of the slope of the Kolmogorov spectrum of magnetic turbulence // TMF, 209:2 (2021), 351–366; Theoret. and Math. Phys., 209:2 (2021), 1620–1632.

QUALITATIVE THEORY OF THE SINGULAR PARABOLIC EQUATION

Alzamili K. (Russia, Belgorod)

Belgorod State National Research University
alzamili.khitam@mail.ru

Shishkina E. L. (Russia, Voronezh)

Voronezh State University
Belgorod State National Research University
ilina_dico@mail.ru

Many physical, geometric, and probabilistic problems use parabolic partial differential equations. New problems in information propagation and processes with memory require considering parabolic type equations with various operators acting on spatial variables. This talk presents mean value theorems for a singular parabolic equation. The singularity arises due to the presence of the Laplace-Bessel operator.

We consider a maximum and minimum principle for a solution to the singular parabolic equation of the form

$$u_t = a^2 \Delta_\gamma u, \quad u = u(x, t), \quad (1)$$

where $\Delta_\gamma = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}$ is the Laplace-Bessel operator $(B_{\gamma_k})_{x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ is the Bessel operator and $k = 1, \dots, n$. For problems with Bessel operator we will consider the orthant $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ (see [1]).

Let $t \in [0, T]$, $x \in \Omega^+$, where Ω^+ is a bounded simply connected domain in \mathbb{R}_+^n , $S^+ = \partial\Omega^+$. We deal with a cylinder C_T^+ in the space $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} = \{(x, t) : x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}, t \geq 0\}$ of the form $C_T^+ = \{(x, t) : x \in \Omega^+, 0 < t < T\}$.

The part of the boundary of the cylinder C_T^+ , consisting of its lower base where $t = 0$ and surface, will be denoted by Γ^+ .

Theorem 1. *The function $u = u(x, t)$ that satisfies equation (1) in the cylinder C_T^+ and is continuous up to its boundary takes the maximal and minimal values on Γ^+ .*

From Theorem 1 is immediately follows that the solution to the problem

$$\begin{cases} u_t = a^2 (\Delta_\gamma)_x u, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} |_{x_i=0} = 0, & i = 1, \dots, n, \\ u |_{S^+} = \psi(x, t), & x \in S^+ \end{cases}$$

is unique.

The domain $G^+ \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$ is called **Green-suitable** if G^+ is a union of domains G_1^+, \dots, G_m^+ without common interior points. Each domain $G_j^+ \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$ be such that each line perpendicular to the plane $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, either does not intersect G_j^+ or has only one common segment with G_j^+ (possibly degenerating into a point) of the form

$$\alpha_i^j(x') \leq x_i \leq \beta_i^j(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

where α_i, β_i are smooth for $i=1, \dots, n$.

Theorem 2. Let $D^+ \subset \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ be Green-suitable domain. A function $u=u(x, t)$ such that $u \in C^2(D^+)$, $u_{x_i}|_{x_i=0} = 0$, $i = 1, \dots, n$, be a solution of the equation

$$(\Delta_\gamma)_x u - u_t = 0$$

if and only if the equality

$$\int_{\partial D^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial \vec{v}'} + u \nu_{n+1} \right) x^\gamma dS = 0$$

holds. Here $\vec{v} = (\vec{v}', \nu_{n+1})$ is the exterior unit normal to ∂D^+ , $\vec{v}' = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ is vector consisting of the first n components of \vec{v} , $\frac{\partial u}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \nu_n$.

Theorem 3. Let $u = u(x, t) \in C^2(D^+)$ $u_{x_i}|_{x_i=0} = 0$, $i = 1, \dots, n$, be a solution to the equation

$$(\Delta_\gamma)_x u - u_t = 0$$

in a Green-suitable domain $D^+ \subset \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$. Then for $(x^0, t_0) \in D^+$ and for almost every sufficiently small r the next formula is valid

$$u(x^0, t_0) = - \int_{\Gamma_\gamma(x^0, t_0, r)} u \frac{\partial k_\gamma(x^0, x, t_0, t)}{\partial \vec{v}'} x^\gamma dS.$$

dS is the n -dimensional measure on surface $\Gamma_\gamma(x^0, t_0, r)$, $\vec{v} = (\vec{v}', \nu_{n+1})$ is the exterior unit normal to $\Gamma_\gamma(x^0, t_0, r)$, $\vec{v}' = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ is vector consisting of the first n components of \vec{v} , $\frac{\partial k_\gamma(x^0, x, t_0, t)}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial k_\gamma(x^0, x, t_0, t)}{\partial x_1} \nu_1 + \dots + \frac{\partial k_\gamma(x^0, x, t_0, t)}{\partial x_n} \nu_n$.

References

- [1] Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier: Amsterdam. 2020.

SUBRESONANCES IN A LINEAR OSCILLATOR

Astafyeva P. Yu. (Russia, Ufa)

Ufa State Petroleum Technological University

Institute of Mathematics with Computing Centre of UFRC RAS

astafyeva.polina2@gmail.com

Kiselev O. M. (Russia, Innopolis)

Innopolis University

o.kiselev@innopolis.ru

The focus of the article is on conducting a thorough examination of second-order linear equations with almost periodic coefficient. By utilizing an asymptotic method, the study derived a set of equations that describe the parametric subresonant growth of oscillation amplitudes. Additionally, the time of a turning point from the growing of the amplitude to the bounded oscillations in the slow variable was found.

We are investigating an equation with time-dependent almost periodic coefficient [1]:

$$u'' + (\omega^2 + \epsilon q(t))u = 0, \quad (1)$$

here $q(t)$ is almost periodic function and ϵ is a small positive parameter:

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \cos\left(\left(2 - \frac{1}{n^p}\right)t\right), \quad k > 1, p > 0, \quad (2).$$

The equation (2) provides a clear and simple representation of the effects observed in the subresonance case. The amplitude tends to zero, the frequency tends to resonant, and this is a typical case when subresonance solutions appear.

The parameter ω differs little from 1: $\omega = 1 + \delta$. Here δ is the parameter and defines the difference from the exact subresonant frequency. The goal is to identify the areas of stability of solutions of the equation depending on the parameters δ and ϵ . Let us construct an asymptotic solution in the form:

$$u \sim u_0 + \epsilon u_1, \quad (3)$$

By substituting expression (3) into equation (1) and combining terms with the same degree ϵ . Obtain the equation for the main term:

$$\frac{d^2}{dt^2}u_0 + \omega^2 u_0 = 0.$$

Let us look for its solution in the form of $u_0 = a(\tau) \cos(\omega t) + b(\tau) \sin(\omega t)$, using two scale method, where $\tau = \epsilon^\gamma t$ is slow time. We use a standard approach in the theory of two scale asymptotics: fast time is associated with oscillations, and slow time determines the change in amplitude.

The equation for the first correction:

$$\frac{d^2}{dt^2}u_1 + u_1 \omega^2 + q(t) (b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t)) - 2a_1 \omega \sin(\omega t) + 2b_1 \omega \cos(\omega t) = 0 \quad (4)$$

here $a_1 = \epsilon^{\gamma-1} a'$ and $b_1 = \epsilon^{\gamma-1} b'$, a stroke means a slow-time derivative τ .

The functions a, b, a_1, b_1 are considered as constants when they are differentiated, integrated over fast time. The task is to find the dependence on τ for a and b .

Let us introduce a replacement in the integrand function $\omega \tilde{t} \equiv \tilde{t} + \delta \tilde{t} = \tilde{t} + \kappa \tau$. $\kappa = \delta/\epsilon^\gamma$. We use the asymptotics calculated in [2],[3]. As a result, a system of equations is obtained:

$$\frac{d}{d\tau}w = \frac{Bw}{\tau^\alpha} + v \kappa, \quad \frac{d}{d\tau}v = -w \kappa - \frac{Bv}{\tau^\alpha}.$$

Asymptotic solution can be obtained by the WKB method:

$$w \sim C_1 \frac{\exp\left(\int_0^t \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} + \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}}} dt\right)}{\sqrt[4]{1 - \frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} + \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}}}.$$

So the turning point to change the growing character of the solution is located in a neighbourhood of the point

$$\theta_* \sim \lambda^{1/\alpha}.$$

References

- [1] Floquet, "Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques", Ann. de l'Ecole norm. sup., XII, pp. 47-88, 1883.
- [2] Astafyeva P. Y., Kiselev O. M. "Subresonant solutions of the linear oscillator equation", 2021 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics, Innopolis, Russia, pp 90-94.
- [3] Astafyeva P. Y., Kiselev O. M. "Formal Asymptotics of Parametric Subresonance", Rus. J. Nonlin. Dyn., 2022, Vol. 18, no. 5, pp. 927-937.

ON SIMPLE SINGULARITIES OF SYMMETRIC OR SKEW-SYMMETRIC MATRIX FAMILIES
THAT ARE EVEN OR ODD IN THE TOTALITY OF PARAMETERS

Astashov E. A. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
ast-ea@yandex.ru

There exists a number of papers devoted to the classification of smooth or analytic matrix families. Such families naturally appear in the study of binary differential equations, dependency sets of vector fields on manifolds, as well as in connection with other problems in differential geometry. It is natural to consider such families up to \mathcal{G} -equivalence, i. e., up to parameter-dependent linear base changes and parameter changes.

In [1] analytic families of square matrices, which can be viewed as linear maps between equidimensional spaces, are considered. In particular, normal forms of \mathcal{G} -simple mappings (i. e., those having a finite number of adjacencies) are obtained. An ideologically similar paper [2] is devoted to the study of analytic families of symmetric matrices. In [3] analytic families of skew-symmetric matrices are considered. In particular, a complete classification of two-parameter and a partial classification of three-parameter 4×4 simple skew-symmetric matrix families are obtained.

We obtain a necessary existence condition for \mathcal{G} -simple analytic symmetric and skew-symmetric matrix families that are even or odd in the totality of parameters in terms of number of parameters, matrix size and 1-jet rank. We also classify symmetric and skew-symmetric matrix families that are odd in the totality of parameters with 1-jet of corank zero. The work is generally inspired by aforementioned papers [1]–[3]. Some of the results presented can be found in [4].

The talk is based on our joint work with N. Abdrakhmanova and A. Terentiev.

References

- [1] Bruce J. W., Tari F. On Families of Square Matrices // *Cadernos de Mathematica*. 2002. Vol. 3. P. 217–242.
- [2] Bruce J. W. On Families of Symmetric Matrices // *Moscow mathematical journal*. 2003. Vol. 3. P. 335–360.
- [3] Haslinger G. J. Families of Skew-symmetric Matrices. Ph. D. thesis. University of Liverpool. 2001.
- [4] Abdrakhmanova N. T., Astashov E. A. Simple germs of skew-symmetric matrix families with oddness or evenness properties // *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, No. 5. P. 625–639.

ON ATYPICALITY OF ASYMPTOTICALLY POWER-LAW SOLUTIONS
TO EMDEN–FOWLER TYPE EQUATIONS OF ORDER UP TO 100000¹

Astashova I. V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
Plekhanov Russian University of Economics
ast.diffiety@gmail.com

Astashov A. M. (Russia, Moscow)
State Research Institute of Aviation Systems
asta.a.560405@gmail.com

For natural n and real $k > 1$ consider the Emden–Fowler type equation

$$y^{(n)} = |y|^k \operatorname{sgn} y. \tag{1}$$

We study an asymptotic behavior of blow-up solutions to this equation, that is, solutions tending at the end point x^* of its domain to infinity with their derivatives up to the n -th order.

Immediate calculations show the function $Y_{nk}(x) = C(-x)^{-\alpha}$ to be a solution to (1) whenever $\alpha = n/(k-1)$ and $C^{k-1} = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + j)$.

¹This work was partially supported by RSF, grant 20-11-20272.

For $n = 1$ the functions $y(x) = \pm Y_{nk}(x^* - x)$ with arbitrary $x^* \in \mathbb{R}$ are the only non-trivial solutions to (1). For $n = 2$ in [1, chapter V]) and for $n \in \{3, 4\}$ in [2, chapter 5.3], it was shown that any blow-up solution to (1) (and more general equations including (1)) has power-law asymptotic behaviour, namely, $y(x) \sim \pm C(x^* - x)^{-\alpha}$ as $x \rightarrow x^* - 0$ with the same constants α and C . As for $n > 4$, this statement was proven only for weak non-linearity in (1), i. e. for $1 < k < K_n$ with some constant $K_n > 1$ (see [3]).

For stronger non-linearity, the statement generally does not hold. In [4] for sufficiently great n and in [5] for any $n \geq 12$, the existence of other blow-up solutions to equation (1) was shown. Namely, for some $k > 1$ depending on n , equation (1) has an asymptotically non-power solution $y = (x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x))$ with a non-constant continuous positive periodic function h defined on \mathbb{R} . Moreover, for greater n the power-law asymptotic behaviour can become atypical. In [6] this was shown for any integer $n \in [12, 203]$ and sufficiently strong non-linearity. The result followed from

Theorem 1 [6, Corollary 1]. *If the equation*

$$\prod_{j=0}^{n-1} (\lambda + j) = \prod_{j=0}^{n-1} (j + 1) \quad (2)$$

has no pure imaginary root, but has at least one root with positive real part other than 1, then there exists $k_n > 1$ such that, for any $k > k_n$ and any point $x_0 \in \mathbb{R}$, the set of initial data of asymptotically power-law solutions to equation (1) has measure zero.

We study roots of the above polynomial equation by using the notation

$$P_n(\omega) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\omega^2 + j^2}{(1 + j)^2} \quad \text{and} \quad S_n(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \arg(j + \omega i)$$

with $\arg z \in [0, 2\pi)$ for all $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, as well as

Lemma. *If $P_N(\omega) > 1$ for some $\omega > 0$ and some $N \in \mathbb{N}$, then equation (2) with $n \leq N$ cannot have more than $\lfloor S_N(\omega)/2\pi \rfloor$ pairs of complex conjugate roots with nonnegative real parts. On the contrary, if $P_N(\omega) < 1$, then equation (2) with $n \geq N$ has at least $\lfloor S_N(\omega)/2\pi \rfloor$ pairs of complex conjugate roots with positive real parts.*

In [6], when using a similar lemma and computer calculations of the above product and sum, one met non-exact computer representation, in C-type programming languages, of fractional and sufficiently large integer numbers as well as rounding errors of operations, which made unsure any comparison of the results obtained even with 1 and especially with 2π . So, instead of exact calculations, some estimates were obtained with permanent comparison of intermediate results with a sufficiently large integer constant $9 \cdot 10^{15}$ having exact binary representation in the computer memory when using the 64-bit float format of the IEEE 754 standard. This succeeded for $n \leq 203$ only.

However, in the Python programming Language, it is possible to use long integer objects of arbitrary size. So, for $\omega \in \mathbb{Q}$, we can obtain $P_n(\omega)$ as a rational number with very long numerator and denominator and $S_n(\omega)$ as the sum of a multiple of $\pi/2$ and arctan s with some rational s .

Thus, for several $N \in \mathbb{N}$ and specially found values of $\omega_N \in \mathbb{Q}$, we have obtained estimates for $P_N(\omega_N)$ and $S_N(\omega_N)$ showing that equation (2) has no pure imaginary roots whenever $n \leq 100000$ while the number of its roots with positive real and imaginary parts equals 0 if $1 \leq n < 12$, 1 if $12 \leq n < 62$, 2 if $62 \leq n < 204$, 3 if $204 \leq n < 540$, 4 if $540 \leq n < 1250$, 5 if $1250 \leq n < 2645$, 6 if $2645 \leq n < 5230$, 7 if $5230 \leq n < 9815$, 8 if $9815 \leq n < 17663$, 9 if $17663 \leq n < 30702$, 10 if $30702 \leq n < 51826$, 11 if $51826 \leq n < 85309$, 12 if $85309 \leq n \leq 100000$.

By the way, some of integers used in the proof have more than 1500000 decimal digits. Nevertheless, we have

Theorem 2. *If $12 \leq n \leq 100000$, then there exists $k_n > 1$ such that at any point $x_0 \in \mathbb{R}$ the set of initial data of asymptotically power-law solutions to equation (1) has zero Lebesgue measure whenever $k > k_n$.*

References

- [1] Kiguradze I. T., Chanturia T. A. Asymptotic properties of solutions to nonautonomous ordinary differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1993.
- [2] Astashova I. V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations (in Russian), in: I. V. Astashova (ed.), Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, Moscow: UNITY-DANA. 2012. P. 22–290.
- [3] Astashova I. On Kiguradze’s problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations // Georgian Mathematical Journal. 2017. Vol. 24, no. 2. P. 185–191.
- [4] Kozlov V. A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. (1999), **37**:2, 305–322.
- [5] Astashova I. V., Vasilev M. Y. On nonpower-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden-Fowler type higher-order differential equations // Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019, S. Pinelas et al. (eds.). Vol. 333 of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer Cham: 2020. P. 361–372.
- [6] Astashova I. Atypicality of power-law solutions to Emden–Fowler type higher order equations // St. Petersburg Mathematical Journal. 2020. Vol. 31. P. 297–311.

CARTESIAN PRODUCTS OF BIFURCATIONS FOR FAMILIES OF VECTOR FIELDS ON THE TWO-DIMENSIONAL SPHERE

Bakiev T. N. (Russia, Moscow)
Higher School of Economics
tnbakiev@edu.hse.ru

Ilyashenko Yu. S. (Russia, Moscow)
Higher School of Economics
Independent University of Moscow
yulijis@gmail.com

A bifurcation that occurs in a multiparameter family is a Cartesian product if it splits into two factors in the sense that one bifurcation takes place in one part of the phase space, another one – in another part, and they are in a sense independent, do not interact with each other.

To understand how a family bifurcates, it is sufficient to study it in a neighborhood of the so-called large bifurcation support [1]. Given a family of vector fields on S^2 that unfolds a field v_0 , the respective large bifurcation support is a closed v_0 -invariant subset of the sphere indicating parts of the phase portrait affected by bifurcations. An intuitive approach to Cartesian products of bifurcations suggests that one should consider disconnected large bifurcation supports in order to obtain Cartesian products for sure.

The main goal of the talk is to formulate a sufficient condition when a family with disconnected large bifurcation support is equivalent to a Cartesian product of bifurcations.

References

- [1] Goncharuk N. B. and Ilyashenko Yu. S. Large bifurcation supports // Apr. 2018. arXiv: 1804.04596.

PAYNE NODAL SET CONJECTURE FOR THE RIESZ FRACTIONAL p -LAPLACIAN
IN STEINER SYMMETRIC DOMAINS

Bobkov V. E. (Russia, Ufa)

Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS

bobkov@matem.anrb.ru

Kolonitskii S. B. (Russia, Saint Petersburg)

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

sbkolonitskii@etu.ru

Let $p \in (1, +\infty)$, $s \in (0, 1)$ and let Ω be a bounded domain in \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. Consider the eigenvalue problem with Dirichlet boundary condition, i.e. the boundary value problem

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (D)$$

where $(-\Delta)_p^s$, $p > 1$, is the Riesz, or semi-restricted, fractional p -Laplacian defined for sufficiently regular functions as

$$(-\Delta)_p^s u(x) = \text{const} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{|u(y) - u(x)|^{p-2} (u(y) - u(x))}{|y - x|^{N+ps}} dy.$$

The second eigenfunction, defined per standard Lyusternik-Shnirelmann argument, is a sign-changing function. The Payne nodal set conjecture for Steiner symmetric domains asserts that the nodal set of any second eigenfunction intersects the boundary $\partial\Omega$. In the local settings with $s = 1$, the conjecture was proven in [3] and [2] in the linear case $p = 2$ and in [1] in the nonlinear case $p \in (1, +\infty)$. We extend and generalize these results to the nonlocal nonlinear case $s \in (0, 1)$ and $p \in (1, +\infty)$.

Theorem 1. *Assume that Ω is Steiner symmetric with respect to the hyperplane $H_0 := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 = 0\}$. Let u be a second eigenfunction of (D). Then*

$$\text{dist}(\text{supp } u^-, \partial\Omega) = 0 \quad \text{and} \quad \text{dist}(\text{supp } u^+, \partial\Omega) = 0.$$

A similar result is obtained for least energy nodal solutions of the equation $(-\Delta)_p^s u = f(u)$ under nonlocal Dirichlet boundary conditions, where the model case of f being a subcritical and superlinear nonlinearity, i.e. $f(u) = |u|^{q-2}u$ with $q \in (p, p_s^*)$.

The proof is based on properties of polarization specific to the nonlocal case $s \in (0, 1)$. Most importantly, in a strong contrast to the local case, the polarization strictly decreases certain strong functionals associated with the Slobodetski seminorm of a given function unless the polarized function coincides with either the original function or its reflection. Curiously, we do not require any assumptions on smoothness of $\partial\Omega$, and even connectedness and boundedness of Ω can be weakened.

References

- [1] Bobkov V., Kolonitskii S. On a property of the nodal set of least energy sign-changing solutions for quasilinear elliptic equations // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. (2019). 149(5), 1163-1173.
- [2] Damascelli L. On the nodal set of the second eigenfunction of the laplacian in symmetric domains in \mathbb{R}^N // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni. (2000). 11(3), 175-181.
- [3] Payne L. E. On two conjectures in the fixed membrane eigenvalue problem // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. (1973). 24(5), 721-729.

A SEMI-CLASSICAL APPROXIMATION OF SOLUTION TO THE TWO-DIMENSIONAL
DIRAC EQUATION WITH A LINEAR POTENTIAL AND LOCALIZED INITIAL CONDITION²

Bogaevskii I. A. (United Kingdom, Liverpool; Russia, Moscow)
The University of Liverpool
Scientific Research Institute for System Analysis of RAS
ibogaevsk@gmail.com

Tolchennikov A. A. (Russia, Moscow)
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS
tolchennikov.aa@gmail.com

We consider the Cauchy problem for the non-stationary two-dimensional Dirac equation with a linear potential $U = x_1$ and localized initial condition (h is a small parameter):

$$\begin{cases} ih \frac{\partial u}{\partial t} = x_1 u + \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_1} - h \frac{\partial}{\partial x_2} \right) v, \\ ih \frac{\partial v}{\partial t} = \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_1} + h \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u + x_1 v, \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = h^{-2} u^0 \left(\frac{x}{h} \right), \quad v|_{t=0} = h^{-2} v^0 \left(\frac{x}{h} \right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

The solution is localized in the disk $\{|x| \leq t\}$ at a fixed time $t \geq 0$. A WKB-approximation outside of the singular diameter $\{x_2 = 0, |x_1| \leq t\}$ has been constructed in [1]. We study the approximation in a neighborhood of this diameter. The leading term of the approximation contains logarithm of the small parameter. It is connected with the multiplicity change phenomenon of the Hamiltonians (i. e. of the eigenvalues of the matrix symbol of the differential operator from the right hand side of the equation).

References

- [1] Dobrokhotov S. Yu., Tolchennikov A. A. Solution of the Two-Dimensional Dirac Equation with a Linear Potential and a Localized Initial Condition // Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 26, No. 2, 2019, pp. 139–151.

THE QUASILINEAR ROBIN PROBLEM
WITH CRITICAL GROWTH OF THE RIGHT-HAND SIDE

Bystrov D. V. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
danil.bystrovv@gmail.com

We consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{p^*-1} & \text{in } \Omega, \\ |Du|^{p-2} \partial_{\mathbf{n}} u + \lambda u^{p-1} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

where Ω is a bounded smooth domain in \mathbb{R}^n , $p \in (1, n)$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$ is the p -Laplacian operator, $\lambda > 0$, and $p^* = \frac{np}{n-p}$ stands for the critical Sobolev exponent.

Since the embedding $W_p^1(\Omega) \rightarrow L_{p^*}(\Omega)$ is not compact, the standard variation method cannot be applied directly. For $p = 2$ some results on solvability of the problem (1) were obtained by X.-J. Wang in [1].

We use a variant of the concentration-compactness method by P.-L. Lions and give some sharp sufficient conditions for solvability of the problem (1).

The talk is based on a joint work with A. I. Nazarov.

²The work is supported by RSF (the grant 24-11-00213), INI, and LMS.

References

- [1] Wang X. J., Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *J. Differential Equations* 93 (1991), no. 2, 283-310.

UNDERCOMPRESSIVE SHOCKS FOR NONSTRICTLY HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS

Chugainova A. P. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of RAS

anna_ch@mi-ras.ru

Undercompressive shocks and their role in solving Riemann problem are studied. Solutions to a special system of two hyperbolic equations representing conservation laws are investigated. On the one hand, this system of equations makes it possible to demonstrate the non-standard solutions to the Riemann problem, on the other hand, this system of equations describes longitudinal-torsional waves in elastic rods. We use the traveling wave criterion for admissibility of shocks as the additional jump condition. If the dissipation parameters included in each of the equations of the system are different, then there are undercompressed waves.

CARICATURE OF HYDRODYNAMICS FOR THE HAMILTONIAN “FIELD–CRYSTAL” SYSTEM

Dudnikova T. V. (Russia, Moscow)

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

tdudnikov@mail.ru

One of the central problem of nonequilibrium statistical physics is the mathematically rigorous derivation of macroscopic evolution equations from the microscopic dynamics of a particle system. In the talk, we discuss this problem for the Hamiltonian system consisting of a real scalar Klein–Gordon field $\psi(x)$ and its momentum $\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, coupled to a harmonic crystal described by the deviations $u(k) \in \mathbb{R}^n$ of particles (atoms, molecules, ions, etc) from their equilibrium position and their velocities $v(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $d, n \geq 1$. The Hamiltonian functional of the coupled system reads

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\psi, u, \pi, v) := & \frac{1}{2} \int \left(|\nabla \psi(x)|^2 + m_0^2 |\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2 \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} u(k) \cdot V(k - k') u(k') + |v(k)|^2 \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int R(x - k) \cdot u(k) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

where the coupled function $R(x)$ is a \mathbb{R}^n -valued smooth function exponentially decaying at infinity, $m_0 > 0$, V is a real interaction matrix in the crystal, $V(k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. To derive the transport equation we introduce a small (scale) parameter ε and consider a family of the initial measures $\{\mu_0^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ satisfying some conditions. In particular, we assume that the measures μ_0^ε are locally spatially homogeneous (w.r.t. the translations in \mathbb{Z}^d) or “slowly vary” under order shifts less than ε^{-1} , and inhomogeneous under shifts of the order ε^{-1} . Given nonzero $\tau \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{R}^d$, we study the distribution $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, z/\varepsilon}^\varepsilon$ of the random solution close to the spatial point $[z/\varepsilon]$ and at time moments τ/ε^κ with an κ , $\kappa > 0$. In the case $\kappa < 1$, we prove that the measures $\mu_{\tau/\varepsilon^\kappa, z/\varepsilon}^\varepsilon$ converge to a limit measure as $\varepsilon \rightarrow 0$, which is Gaussian and its covariance matrix does not depend on τ . For $\kappa = 1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\tau/\varepsilon, z/\varepsilon}^\varepsilon = \mu_{\tau, z}$, where $\mu_{\tau, z}$ is a Gaussian measure. In particular, we derive the explicit formulas for the covariance matrix of the limit measure. These formulas allow us to conclude that in the Bloch–Floquet–Zak transform the limit covariance matrix evolves according to the following equation:

$$\partial_\tau f_{\tau, z}(\theta) = i C(\theta) \nabla \Omega(\theta) \cdot \nabla_z f_{\tau, z}(\theta), \quad C(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1}(\theta) \\ -\Omega(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where $z \in \mathbb{R}^d$, $\tau > 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]^d$, and, roughly, $\Omega(\theta)$ is the “dispersion relation” of our model. Eqn (1) can be considered as the analog of the Euler equation, see [1] for details. Furthermore, we derive the equation for “the next approximations” to the limiting Euler equation (2) (i.e., we obtain in (2) the additional terms of the order ε^κ , $\kappa = 1, 2, \dots$). To do it we study the asymptotic behavior as $\varepsilon \rightarrow 0$ of correlation functions of distributions of the solutions at times τ/ε^κ , $\kappa = 2, 3, \dots$, and at space points close to $[z/\varepsilon]$. After an appropriate change of variables in the limit expressions ($\tau \rightarrow t$: $\tau = \varepsilon^{\kappa-1}t$), we obtain the equation of a form

$$\partial_t f = iC(\theta) \left(\nabla \Omega(\theta) \cdot \nabla_z f + \frac{i\varepsilon}{2} \nabla^2 \Omega(\theta) \cdot \nabla_z^2 f + \dots + \frac{(i\varepsilon)^{\kappa-1}}{\kappa!} \nabla^\kappa \Omega(\theta) \cdot \nabla_z^\kappa f \right). \quad (3)$$

In particular, if $\kappa = 2$, then Eq. (3) can be considered as an equation of the Navier–Stokes type. For the harmonic crystals, Eqns (2), (3) were derived in [2], [3] in one-dimensional case and in [4] for multidimensional case.

References

- [1] Dudnikova T. V. Transport equation for the harmonic crystal coupled to a Klein–Gordon field // *Russ. J. Math. Phys.* 2023. Vol. 30. No 4. P. 501–521.
- [2] Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Suhov Yu. M., Triolo L. One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 43. P. 571–607.
- [3] Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Suhov Yu. M., Triolo L. One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics: Second approximation // *J. Stat. Phys.* 1988. Vol. 52. P. 423–439.
- [4] Dudnikova T. V., Spohn H. Local stationarity for lattice dynamics in the harmonic approximation // *Markov Processes and Related Fields*. 2006. Vol. 12. No 4. P. 645–678.

ENERGY DISSIPATION IN WEAKLY DAMPED HAMILTONIAN CHAINS

Dymov A. V. (Russia, Moscow)
 Steklov Mathematical Institute of RAS
 HSE University
dymov@mi-ras.ru

We consider a Hamiltonian chain of $N \geq 2$ rotators (in general nonlinear) in which the first rotator is damped. We are interested in the rate of total energy dissipation for high energies. This problem is motivated by nonequilibrium statistical mechanics of crystals for which a Hamiltonian chain of interacting particles, where the first and last particles are damped and driven by a stochastic perturbation, is a classical model. Controlling the energy decay for high energies, provided by the damping, is crucial for studying large time behaviour of such systems.

We show that the time derivative of energy H is bounded by $-H^{-2N-3}$ once H is sufficiently large. This upper bound coincides with that obtained in paper [1], in which the authors also give numerical evidence that this estimate is optimal, so the energy decay is very slow indeed. The method employed in [1] is based on a KAM-like procedure, is technically complicated, and the authors assume very special initial conditions. On the contrary, our proof is simple, short and holds for arbitrary initial conditions. We adopt completely different approach going back to Malisoff and Mazenec [2], relying on a method that allows under mild conditions to construct a strict Lyapunov function once a non-strict one is given (in our case the latter is the Hamiltonian).

This is a joint work with Lev Lokutsievskiy and Andrey Sarychev.

References

- [1] Cuneo N., Eckmann J.-P., Wayne C.E. Energy dissipation in Hamiltonian chains of rotators // *Nonlinearity* 2017. Vol. 30. R81.
- [2] Malisoff M., Mazenec F. Construction of strict Lyapunov functions. Springer-Verlag. 2009.

Fateev I. S. (Russia, Moscow)

P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
i.fateev@lebedev.ru

Polezhaev A. A. (Russia, Moscow)

P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
polezhaevaa@lebedev.ru

Chimera states are important dynamical phenomena that manifest themselves in ensembles of initially homogeneous dynamical oscillators by breaking their symmetry. The counterintuitive nature of this phenomenon lies in the coexistence of spatial coherence and incoherence, which are formed within the system under consideration. In terms of the many applications of chimera states, it is possible to highlight their relationship to the bump states observed in the cerebral cortex and many other cognitive processes. This fact provides the importance of applying mathematical methods of the theory of distributed dynamical systems to the problems of collective behavior of neurons [1].

As part of our study, we proposed a system that describes the dynamics of action potential propagation in a network of interacting neurons. To form a universal model based on one of the main non-equilibrium mechanisms found in nature, we chose the reaction-superdiffusion approach:

$$\begin{cases} \partial u/\partial t = -D_u(-\Delta_{x,y})^{\alpha_u/2}u + v - au^3 + bu^2 - m + I_{ext}, \\ \partial v/\partial t = -D_v(-\Delta_{x,y})^{\alpha_v/2}v + c - du^2 - v, \\ \partial m/\partial t = r(s(u - u_0) - m). \end{cases} \quad (1)$$

The kinetic part is based on the fractional Laplace operator $-(-\Delta_{x,y})^{\alpha_i/2}$, $i = \{u, v\}$. The discrete-difference approximation scheme of this operator forms a network with anisotropic properties. Moreover, this scheme naturally forms a system with both local diffusive type interaction for $(\alpha_u = 2, \alpha_v = 2)$ and non-local superdiffusive type for $(\alpha_u < 2, \alpha_v < 2)$. A set of nonlinear functions of the Hindmarsh-Rose neuron model is used as the basis of the distributed system and describes the activation dynamics of local elements.

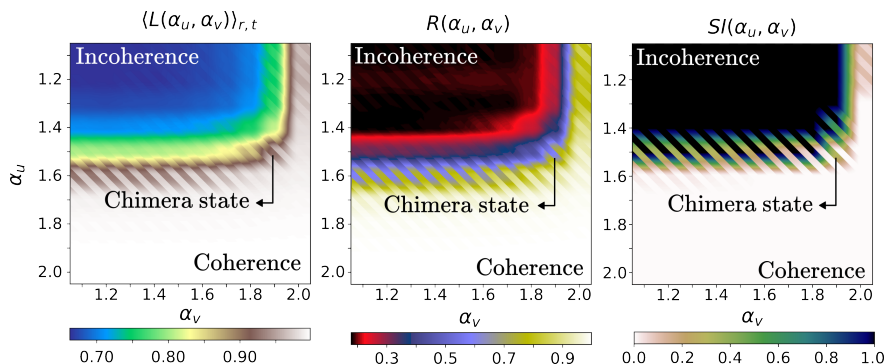


Fig. 1: Dynamical regimes observed in the parameter space of the fractional Laplace operator exponents for a sample of two different initial conditions uniformly distributed on the interval $(-1, 1)$ for two-component system. To demonstrate the unification of the synchronization transition, data are presented for three indicators (from left to right): the local order parameter averaged over the space-time domain $\langle L(\alpha_u, \alpha_v) \rangle_{r,t}$ the synchronization factor $R(\alpha_u, \alpha_v)$, and the strength of incoherence $SI(\alpha_u, \alpha_v)$.

We analyzed the synchronization transition for two-component system in the parameter space of the fractional Laplace operator (α_u, α_v) . Also, different kinds of chimera states for two-component and three-component systems caused by the target-wave process in the isolated region were found [2]. The study agrees and allows to extrapolate data obtained for a one-dimensional system [3], and can be useful for computational neuroscience tasks.

References

- [1] Parastesh F. et al. Chimeras // Physics Reports. 2021. Vol. 898. P. 1-114.
- [2] Fateev I., Polezhaev A. Chimera states in a lattice of superdiffusively coupled neurons // Chaos, Solitons and Fractals. 2024. Vol. 181. P. 114722.
- [3] Fateev I., Polezhaev A. Chimera states in a chain of superdiffusively coupled neurons // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2023. Vol. 33. No 10.

NUMERICAL STUDY OF STABLE REGIMES AND BIFURCATIONS IN DYNAMICALLY SELF-ORGANIZING SYSTEMS³

Fedulov D. D. (Russia, Yaroslavl)
P. G. Demidov Yaroslavl State University
mr.fedulow@yandex.ru

The system under consideration is described by the following equations:

$$\frac{du_n}{dt} = -N(v_{n+1} - v_n) + \mu u_n - u_n^3, \quad \frac{dv_n}{dt} = -N(u_n - u_{n-1}), \quad (1)$$

$$u_0 = 0, \quad v_{N+1} = \beta \frac{du_N}{dt}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Of particular interest is the regime where $N \gg 1$, prompting the transition to a continuous model:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \mu u - u^3, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left(\beta \frac{\partial v}{\partial x} + v \right) \Big|_{x=1} = \beta(\mu u - u^3)|_{x=1}. \quad (4)$$

In this model, as $\mu \rightarrow 0$, a quasi-normal form is derived using conventional methods (see, for example, [1], [2]):

$$\dot{\eta}_l = \left[\delta_l - d_l \eta_l - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} d_{l,m} \eta_m \right] \eta_l, \quad l \geq 1. \quad (5)$$

The equilibrium states of system (5) are investigated through numerical methods. We conduct a series of experiments by integrating the system:

$$\dot{\eta}_l = \left[\delta_l - d_l \eta_l - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N d_{l,m} \eta_m \right] \eta_l, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

which is an approximation of system (5), for finite values of N and initial conditions featuring a fixed number of nonzero components.

The computations are carried out using a program written in the Python programming language and the `scipy` library for mathematical computations. Numerical integration employs the Runge-Kutta 8th order method.

The computational experiments revealed the existence of what are termed single-mode regimes in system (6), wherein all components, except the j -th, tend towards zero. However, the presence of other equilibrium states (multi-mode regimes) could not be demonstrated within the specified precision.

Let us examine the evolution of stable equilibrium states of the problem (1)-(2). To accomplish this, based on the stable regimes of system (6), we will construct initial conditions for the original problem and investigate the phase transitions of these regimes as the parameter μ increases from small values to values of the order of 1. It has been demonstrated that for system (1)-(2) at different values of the parameter μ , stable invariant tori and cycles exist.

³This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00209), <https://rscf.ru/en/project/22-11-00209/>

References

- [1] Glyzin S. D., Kolesov A. Yu. Self-oscillatory processes in a discrete RCL-line with a tunnel diode // Theoret. and Math. Phys. 2023. Vol. 215. No 2. P. 636–651.
- [2] Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Two-frequency self-oscillations in a FitzHugh-Nagumo neural network // Comput. Math. Math. Phys. 2017. Vol. 57. No 1. P. 106–121.

BIFURCATIONS OF POLAR FLOWS ON FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS

Fomin D. O. (Russia, Nizhny Novgorod)
HSE Nizhny Novgorod
dofomin@edu.hse.ru

In [1] a problem of topological classification in a class P of polar flows on closed four-dimensional manifolds in assumption that for any $f^t \in P$ the set of saddle equilibrium states consists only of points with two-dimensional stable and unstable manifolds is solved. It is shown that Kirby diagram, which is a framed link on a sphere intersecting the trajectories of the flow, is a complete topological invariant for flows in P . We use Kirby calculus on the set of framed links developed in [2] to describe all possible types of bifurcations of flows from P , that does not change a topology of the ambient manifold.

Acknowledgments: This work is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University). The author is grateful to E. Gurevich for setting the problem.

References

- [1] Gurevich E. Saraev I. Kirby diagram of polar flows on four-dimensional manifolds // Math. Zam. 2024. V. 116, to appear.
- [2] Kirby R. A calculus for framed links in S^3 // Invent Math. 1978. V. 45. P.5–56.

ON THE MAXIMAL $L_p - L_q$ REGULARITY THEOREM FOR THE LINEARIZED MAGNETIC FIELD EQUATIONS WITH INTERFACE CONDITIONS

Frolova E. V. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State Electrotechnical University
St. Petersburg State University
elenafr@mail.ru

We consider the two-phase conjugation problem for linearized electro-magnetic field equations. This problem arises when studying the free boundary problem of magnetohydrodynamics, which describes the motion of viscous incompressible liquid inside another viscous incompressible liquid under the action of magnetic field. As the interface between the liquids is unknown, we use Hanzawa coordinate transform to reduce the free boundary problem to a fixed domain problem. The linearized problem can be decomposed in two parts: hydrodynamic and magnetic, since the coupling terms are semi-linear. We prove the maximal $L_p - L_q$ regularity theorem for the magnetic part [1]. This result is obtained by applying the Weis Fourier multiplier theorem. The maximal $L_p - L_q$ regularity theorem for the hydrodynamic part has been proved by J. Pruess and G. Simonett, S. Maryani and H. Saito. Combination of these results yields local well-posedness for MHD problem in the case of two incompressible liquids separated by a closed interface [2].

The talk is based on the joint work with Yoshihiro Shibata (Waseda University, Japan).

References

- [1] Frolova E. V., Shibata Y. On the maximal $L_p - L_q$ regularity theorem of the linearized Electro-Magnetic field equations with interface condition // Zap. Nauchn. Sem. POMI. 2020. Vol. 489. P. 130-172.

- [2] Frolova E. V., Shibata Y. Local Well-Posedness for the Magnetohydrodynamics in the Different Two Liquids Case // Mathematics. 2022. Vol. 10, 4751.

INEQUALITIES FOR ORTHONORMAL FAMILIES
AND ATTRACTORS FOR DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

Ilyin A. A. (Russia, Moscow)
Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
ilyin@keldysh.ru

Estimates for the fractal dimension of the global attractors of dissipative evolution PDEs are traditionally related with the number of the degrees of freedom involved in the description of the long-time behaviour of the solutions. The dimension estimates, in turn, are based on the bounds for the N -traces of the linearized evolution operator. Therefore inequalities for systems that are orthonormal with respect to the underlying Hilbert phase space naturally come into play.

In the case of the 2D Navier–Stokes equations inequalities for the L_2 -orthonormal systems of vector functions (the celebrated Lieb–Thirring inequalities) play the essential role in finding good or even optimal estimates for the dimension of the global attractors. We review a few classical and new results for certain models in mathematical fluid mechanics both in 2D and 3D.

Another popular example of an equation served by the attractor theory is a weakly damped nonlinear hyperbolic system. Here the key role is played by the inequalities for systems with orthonormal gradients. Based on them, a sharp two sided estimate for the fractal dimension of the global attractor is obtained in the limit of a small damping coefficient.

Finally, as a by-product of the technique developed, first order L_p – L_2 – L_2 type interpolation inequalities with asymptotically sharp constants are obtained for the 2D torus and 2D sphere.

References

- [1] Ilyin A. A., Kostianko A. G., Zelik S. V. Applications of the Lieb–Thirring and other bounds for orthonormal systems in mathematical hydrodynamics. The Physics and Mathematics of Elliott Lieb. The 90th Anniversary. Volume I. Edited by R. L. Frank, A. Laptev, M. Lewin, R. Seiringer. EMS, Berlin, 2022. Chapter 24, pp. 582–608.
- [2] Ilyin A. A., Kostianko A. G., Zelik S. V. Sharp upper and lower bounds of the attractor dimension for 3D damped Euler–Bardina equations // Physica D 2022. Vol.432. 133156.
- [3] Zelik S. V., Ilyin A. A. On a class of interpolation inequalities on the 2D sphere // Sbornik: Mathematics. 2023. Vol. 214:3. P. 396–410.

ON CONTINUED FRACTIONS AND DIFFERENCE RICCATI EQUATION

Ivanov A. V. (Russia, Saint-Petersburg)
Saint-Petersburg State University
a.v.ivanov@spbu.ru

We study a difference Riccati equation

$$\Phi(x) + \rho(x) \frac{1}{\Phi(x - \omega)} = v(x), \quad (1)$$

where ρ and v are known smooth 1-periodic functions and $\omega \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ is irrational.

Such an equation is strongly related to a linear difference equation

$$\vec{\Psi}(x + \omega) = H(x)\vec{\Psi}(x), \quad \vec{\Psi}(x) \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

with a 1-periodic $SL(2, \mathbb{R})$ -valued functions H via a transformation $\Phi(x) = \frac{\Psi_1(x+\omega)}{\Psi_1(x)}$.

A formal solution of the equation (1) can be represented as a continued fraction

$$\Phi(x) = b_0(x) + \frac{1}{b_1(x) + \frac{1}{b_2(x) + \dots}} = b_0(x) + K_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_j(x)}, \quad (3)$$

where $b_0(x) = v(x)$ and $b_j(x) = -\frac{v(x - (j+1)\omega)}{\rho(x - j\omega)}$ for $j \in \mathbb{N}$.

If continued fraction (3) converges, it defines a true solution of (1). Unfortunately, theory of continued fractions provides not so many sufficient conditions, which can be applied in general case. One of such condition reads (see e.g. [1])

$$|b(x)| > 2, \quad \forall x \in \mathbb{T}^1$$

and seems to be very rough.

Denote by $\Phi_n(x) = b_0 + K_{j=1}^n \frac{1}{b_j(x)}$ a finite continued fraction and introduce a transformation $A_n : \mathbb{T}^1 \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ as

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} b_{n+1}(x) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

This transformation generates a cocycle

$$M_n(x) = A_1(x) \cdots A_n(x).$$

Then it is known (see e.g. [2]) that

$$\Phi_n(x) = b_0(x) + \frac{(M_n(x)\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(M_n(x)\vec{e}_1, \vec{e}_1)},$$

where $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ is the standard basis in \mathbb{R}^2 .

Using the critical set method ([3]) we study hyperbolic properties of the cocycle M and formulate sufficient conditions for the convergence of continued fraction (3). We apply these results to reconstruct solutions of (1).

References

- [1] Jones W. M., Thron W. J. Continued fractions. Analytic theory and applications // Addison-Wesley Publ. Co., MA, 1980.
- [2] Khinchin A. Ya., Continued fractions // The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1964.
- [3] Ivanov A. V. On $SL(2, \mathbb{R})$ -cocycles over irrational rotations with secondary collisions // Reg. & Chaotic Dyn. 2023. Vol. 28. No. 2. P. 207-226.

GLOBAL BIFURCATIONS AND MULTISTABILITY OF LIMIT CYCLES IN A SPECIAL POLYNOMIAL LIÉNARD SYSTEM

Gaiko V. A. (Belarus, Minsk)
National Academy of Sciences of Belarus
valery.gaiko@gmail.com

We consider a generalized Liénard equation

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x}^2 + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1)$$

and the corresponding dynamical system

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y - h(x)y^2. \quad (2)$$

There are many examples in the natural sciences and technology in which this and related systems are applied [1–6]. Such systems are often used to model either mechanical or electrical, or biomedical systems, and in the literature, many systems are transformed into Liénard type to aid in the investigations. They can be used, e. g., in certain mechanical systems, where $f(x)$ represents a coefficient of the damping force and $g(x)$ represents the restoring force or stiffness, when modeling wind rock phenomena and surge in jet engines. Such systems can be also used to model resistor-inductor-capacitor circuits with non-linear circuit elements. Recently, e. g., system (2) has been shown to describe the operation of an optoelectronics circuit that uses a resonant tunneling diode to drive a laser diode to make an optoelectronic oscillator. There are also some examples of using such systems in ecology and epidemiology.

We suppose that system (2), where $g(x)$, $h(x)$ and $f(x)$ are arbitrary polynomials, has an anti-saddle (a node or a focus, or a center) at the origin and write it in the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + a_1 x + \dots + a_{2l} x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{2k} x^{2k}) \\ &\quad + y^2(c_0 + c_1 x + \dots + c_{2n} x^{2n}). \end{aligned} \quad (3)$$

We suppose also that system (3) has at least three singular points in a finite part of the plane, which are symmetric with respect to the origin. Such a system can be used to simulate robotic dynamical systems that describe, in particular, the movement of humanoid robots that have a head with a torso, two legs with thighs, shins and feet, two arms with shoulders, forearms and hands (and, possibly, with other body parts). We will call this system a humanoid dynamical system.

Following [1–6], we carry out the global qualitative analysis and, first of all, study global bifurcations and multistability of limit cycles in this special polynomial Liénard system by means of a canonical system containing field rotation parameters.

Theorem 1. *The humanoid dynamical system with limit cycles can be reduced to the canonical form:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x \pm 1)(x \pm 2) \dots (x \pm l) \\ &\quad + y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \beta_{2k-1} x^{2k-1} + \alpha_{2k} x^{2k}) \\ &\quad + y^2(c_0 + c_1 x + \dots + c_{2n} x^{2n}), \end{aligned} \quad (4)$$

where $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ are field rotation parameters and $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ are semi-rotation parameters.

Theorem 2. *System (4) can have at most $k + l + 1$ limit cycles, $k + 1$ surrounding the origin and l surrounding one by one the other singularities of (4).*

References

- [1] Gaiko V. A. Global Bifurcation Theory and Hilbert’s Sixteenth Problem, Boston: Kluwer, 2003.
- [2] Gaiko V. A. On limit cycles surrounding a singular point // Differ. Equ. Dyn. Syst. – 2012. – Vol. 20. – P. 329–337.
- [3] Gaiko V. A. The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Letters. – 2012. – Vol. 25. – P. 2327–2331.
- [4] Gaiko V. A. Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. – 2015. – Vol. 10. – P. 177–188.
- [5] Gaiko V. A. Limit cycles of multi-parameter polynomial dynamical systems // J. Math. Sci. – 2022. – Vol. 260. – P. 662–677.
- [6] Gaiko V. A. Global bifurcation analysis of generalized Liénard polynomial dynamical system // J. Math. Sci. – 2023. – Vol. 270. – P. 674–682.

Golubyatnikov V. P. (Russia, Novosibirsk)
 Novosibirsk state university
Vladimir.Golubyatnikov1@fulbrightmail.org

We study periodic trajectories of 3D dynamical system

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3; \quad (1)$$

considered as a model of functioning of a simple gene network, cf. [1], [2]. Here L is a non-negative monotonically decreasing three-steps function

$$\begin{aligned} L(w) &= 2c \text{ for } 0 \leq w < c - \varepsilon; & L(w) &= c + \varepsilon \text{ for } c - \varepsilon \leq w < c; \\ L(w) &= c - \varepsilon \text{ for } c \leq w < c + \varepsilon; & L(w) &= 0 \text{ for } c + \varepsilon \leq w < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

which describes negative feedback in the gene network; the non-negative variables x_j denote concentrations of its components. Here and below, $c > \varepsilon > 0$, $j = 1, 2, 3$.

The cubes $Q^* = [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon]$ and $Q = [0, 2c] \times [0, 2c] \times [0, 2c]$ are positively invariant domains of the dynamical system (1), (2).

Following [3], [4], we decompose Q by the planes $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c$, and $x_j = c + \varepsilon$ to 64 blocks, and enumerate these blocks by four symbols $A, 0, 1, B$ multi-indices $\{s_1 s_2 s_3\}$:

$$s_j = A, \text{ if in this block } 0 \leq x_j < c - \varepsilon; \quad s_j = 0, \text{ if in this block } c - \varepsilon \leq x_j < c;$$

$$s_j = 1, \text{ if in this block } c \leq x_j < c + \varepsilon; \quad s_j = B \text{ if in this block } c + \varepsilon \leq x_j \leq 2c.$$

Let $W_1 \subset Q^*$ be the union of six blocks listed in a circular diagram

$$\dots \rightarrow \{001\} \rightarrow \{011\} \rightarrow \{010\} \rightarrow \{110\} \rightarrow \{100\} \rightarrow \{101\} \rightarrow \{001\} \rightarrow \dots \quad (3)$$

and $W_2 \subset (Q \setminus Q^*)$ be the union of 18 blocks listed in a similar circular diagram:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \{BBA\} \rightarrow \{B1A\} \rightarrow \{B0A\} \rightarrow \{BAA\} \rightarrow \{BA0\} \rightarrow \{BA1\} \rightarrow \{BAB\} \rightarrow \\ \rightarrow \{1AB\} \rightarrow \{0AB\} \rightarrow \{AAB\} \rightarrow \{A0B\} \rightarrow \{A1B\} \rightarrow \{ABB\} \rightarrow \\ \rightarrow \{AB1\} \rightarrow \{AB0\} \rightarrow \{ABA\} \rightarrow \{0BA\} \rightarrow \{1BA\} \rightarrow \{BBA\} \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Let $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{1}{3}$ be such that $1 - 3\gamma - \gamma^2 - \gamma^3 = 0$.

Theorem. *If $\varepsilon \leq \gamma c$ then the system (1), (2) has a cycle $C_1 \subset W_1$, and a cycle $C_2 \subset W_2$. These cycles travel from block to block according to the arrows of the diagrams (3) and (4), respectively.*

This theorem and results of [3] imply the following

Lemma. *The system (1), (2) does not have cycles which are not symmetric with respect to the cyclic permutations of the variables $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$. The domain W_1 is positively invariant and contains one cycle exactly.*

This cycle $C_1 \subset W_1$ is stable, it is an example of a Hidden Attractor, see [4], and the cycle $C_2 \subset W_2$ is an example of a nonlocal oscillation.

For the dynamical systems of the type (1) with one-step function L , considered in [1], [2], [3], non-uniqueness of cycles was observed in higher-dimensional cases only, see [5].

References

- [1] Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // Journal of Math. Biology. 1978. Vol. 6. P. 207–23.

⁴Supported by RSCF grant N 23-21-00019, <https://rscf.ru/project/23-21-00019/>

- [2] Computational Systems Biology. Eds: Kolchanov N. A., Goncharov S. S., Likhoshvai V. A., Ivanisenko V. A. Novosibirsk: SB RAS. 2008.
- [3] Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P. On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of a molecular repressilator // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014. Vol. 8. No 4. P. 153–157.
- [4] Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T. Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems // Physical Letters A. 2015. Vol. 379. No 40-41. P. 2591–2596.
- [5] Akinshin A. A., Golubyatnikov V. P. Geometric characteristics of cycles in some symmetric dynamical systems // Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. Vol. 12. No 2. P. 3–12.

DISCRETE LORENZ ATTRACTORS IN THREE-DIMENSIONAL MAPS
WITH AXIAL SYMMETRY⁵

Gonchenko A. S. (Russia, Nizhny Novgorod)
National Research University Higher School of Economics
agonchenko@mail.ru

We consider quadratic 3D maps with the axial symmetry and constant Jacobian. We show that such maps can have discrete Lorenz attractors, including those of new types in which one-dimensional unstable separatrices of a saddle fixed point are twisted. We also show that such attractors can be robustly chaotic (pseudohyperbolic).

CLASSIFICATION OF AXIOM A DIFFEOMORPHISMS
WITH ORIENTABLE CODIMENSION ONE BASIC SETS⁶

Grines V. Z. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics

Medvedev V. S. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
medvedev@unn.ac.ru

Zhuzhoma E. V. (Russia, Nizhny Novgorod)
Laboratory of Dynamical Systems and Applications
National Research University Higher School of Economics
zhuzhoma@mail.ru

Let $G_k^{cod1}(M^n)$, $k \geq 1$, be the set of axiom A diffeomorphisms such that the non-wandering set of any $f \in G_k^{cod1}(M^n)$ consists of k orientable connected codimension one expanding attractors and contracting repellers where M^n is a closed orientable n -manifold, $n \geq 3$. We classify the diffeomorphisms from $G_k^{cod1}(M^n)$ up to the global conjugacy on non-wandering sets. In addition, we show that any $f \in G_k^{cod1}(M^n)$ is Ω -stable and is not structurally stable. One describes the topological structure of supporting manifold M^n .

⁵This work was carried out in the framework of the Russian Science Foundation under Grant No. 23-71-30008.

⁶The authors are supported by the Russian Science Foundation under grant 22-11-00027. This work was done in Laboratory of Dynamical Systems and Applications of National Research University Higher School of Economics.

NEW OBSTRUCTION FOR MORSE-SMALE CASCADES
TO EMBED IN TOPOLOGICAL FLOWS⁷

Gurevich E. Ya. (Russia, Nizhny Novgorod)
National Research University Higher School of Economics
els93@yandex.ru

J. Palis found necessary conditions for a Morse-Smale diffeomorphism on a closed n -dimensional manifold M^n to embed into a topological flow and proved that these conditions are also sufficient for $n = 2$ (see [1]). For the case $n = 3$ a possibility of wild embedding of closures of separatrices of saddles is an additional obstacle for Morse-Smale cascades to embed into topological flows. A criterion for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-dimensional manifolds to embed into a topological flow is obtained in [2]. In [3] it is proved that if M^n is homeomorphic to sphere S^n of dimension $n \geq 4$ and a Morse-Smale diffeomorphism $f : M^n \rightarrow M^n$ have no heteroclinic intersections, then f embeds in a topological flow if and only if its non-wandering set consists of fixed points. In the report, we discuss new surprising obstructions to embedding in a flow, and solution of the problem, for Morse-Smale diffeomorphisms with locally flat closures of separatrices, given on manifolds of dimension $n \geq 4$.

References

- [1] Palis J. On Morse-Smale dynamical systems, *Topology*, 8:4 (1969), 385-404.
- [2] Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S., Pochinka O. V. On embedding a Morse-Smale diffeomorphism on a 3-manifold in a topological flow // *Sb. Math.*, 203:12 (2012), 1761-1784.
- [3] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. On Embedding of Multidimensional Morse-Smale Diffeomorphisms into Topological Flows // *Moscow Mathematical Journal*, 19-4 (2019), 739-760.

ON THE CHAIN RULE PROPERTY FOR THE DIVERGENCE OPERATOR⁸

Gusev N. A. (Russia, Moscow)
Moscow Institute of Physics and Technology
ngusev@phystech.edu

Let $p \geq 1$ and let $\mathbf{v} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ be a compactly supported vector field with $\mathbf{v} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ and $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (in the sense of distributions). The *divergence operator* $\mathbf{A}(\rho) := \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ is said to have the *chain rule property* if for any $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ the equality $\mathbf{A}(\rho) = 0$ implies that $\mathbf{A}(\beta \circ \rho) = 0$ for any $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ such that $\beta(0) = 0$ and β' is bounded. The chain rule property is important in the context of the continuity equation, where it allows one to deduce uniqueness of weak solutions (via the renormalization property).

It is well-known that for $d \geq 3$ the chain rule property may fail even when $p = \infty$. However in the two-dimensional setting the chain rule property holds for $p = \infty$, but it may fail for $p < 2$. We show that for $d = 2$ the chain rule property holds whenever $p \geq 2$. We also discuss uniqueness of weak solutions of the Cauchy problem for the continuity equation.

The talk is based on a joint work with M.V. Korobkov.

⁷This work is supported by Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE University).

⁸This work was supported by the RSF project 24-21-00315.

ANALYSIS OF THE ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION
WITH THE SPATIAL FRACTIONAL DIFFERENTIAL RIESZ OPERATOR
BY THE PERTURBATION METHOD

Katkov V. I. (Russia, Innopolis)
Innopolis University
v.katkov@innopolis.university

Kiselev O. M. (Russia, Innopolis)
Innopolis University
o.kiselev@innopolis.ru

The properties of the solution to the initial boundary value problem for the diffusion equation (1) with Riesz fractional derivative are studied[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}U(x, t). \quad (1)$$

$$U(0, t) = U(L, t) = 0. \quad (2)$$

$$U(x, 0) = g(x). \quad (3)$$

Riesz fractional differential operator for $n - 1 < \alpha \leq n$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, on a finite interval $0 \leq x \leq L$ is defined [2] as:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}U(x, t) = -\frac{1}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}({}_0D_x^\alpha + {}_xD_L^\alpha)U(x, t). \quad (4)$$

$${}_0D_x^\alpha U(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_0^x \frac{U(s, t)}{(x - s)^{\alpha+1-n}} ds. \quad (5)$$

$${}_xD_L^\alpha U(x, t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^L \frac{U(s, t)}{(s - x)^{\alpha+1-n}} ds. \quad (6)$$

Problems for the diffusion equation with fractional derivatives arise when studying mathematical models of a wide range of physical phenomena – from non-Brownian random walks [3] to nuclear magnetic resonance tomography of biological tissues [4]. The report is devoted to the study of the asymptotic properties of solutions to problem (1)-(3) with the order of the derivative α close to the second. Problems similar in formulation can be found, for example, in[5] . We study the behavior of the solution at large times using the method of many scales [6]. The obtained asymptotic solutions are used to verify the numerical method for solving the diffusion equation with a fractional derivative in a highly heterogeneous medium.

References

- [1] Yang Q., Liu F., Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives // Applied Mathematical Modelling. 2010. Vol. 34. No 1. P. 200-218.
- [2] Samko S. G. Fractional integrals and derivatives // Theory and applications. 1993.
- [3] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics reports. 2000. Vol. 339. No. 1. P. 1-77.
- [4] Ingo P. et al. On random walks and entropy in diffusion-weighted magnetic resonance imaging studies of neural tissue // Magnetic resonance in medicine. 2014. Vol. 71. No 2. P. 617-627.
- [5] Lukashchuk S. Yu. Approximation of ordinary fractional differential equations by differential equations with a small parameter // Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2017. Vol. 27. No. 4. P. 515-531.
- [6] Ilyin A. M. Matching of asymptotic expansions. M. Nauka, 1989.

REGULARIZATION OF PREDATOR-PREY DYNAMICAL SYSTEMS
WITH VARIABLE STRUCTURE⁹

Kirillov A. N. (Russia, Petrozavodsk)
Institute of Applied Mathematical Research
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
krllv1812@yandex.ru

The talk is devoted to the problem of regularization of variable structure dynamical systems. In particular, the following predator-prey hybrid system is considered

$$\dot{x} = x(a - b(x, y)y - cx), \quad \dot{y} = y(kb(x, y)x - m),$$

where

$$b(x, y) = \begin{cases} b, & \text{if } \frac{x}{y} > \lambda_1, \\ 0, & \text{if } \frac{x}{y} < \lambda_2, \end{cases}$$

where $x = x(t)$, $y = y(t)$ are prey and predator, respectively, state variables, a, b, c, m, k, λ_i are positive constants, $i = 1, 2$, $\lambda_1 < \lambda_2$. The above system describes switchings between two modes: interaction ($x > \lambda_1 y$) and refuge ($x < \lambda_2 y$). If one set $\lambda_1 = \lambda_2$, that is usually done while modeling population dynamical systems with variable structure, then a sliding regime occurs. The latter implies chattering impossible for ecological processes which are characterized by sufficiently large persistence. Thus, in order to avoid chattering, the regularization of the system by using two switching lines is provided. The main question is how the regularization procedure influences limit sets structure. Results concerning this problem are presented in the talk. Besides, other approaches to the regularization procedure are considered as well.

The talk is partially based on the joint research with A.M. Sazonov ([1], [2]).

References

- [1] Kirillov A.N., Sazonov A.M. A hybrid model of population dynamics with refuge-regime: regularization and self-organization // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki (in Russian). 2023. Vol. 33. No 3. P. 467–482.
- [2] Kirillov A.N., Sazonov A.M. The model of hybrid population dynamics with Refuge-regime: regularization and limit sets // Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki (in Russian). 2024. (Accepted).

ON SYNCHRONIZATION IN KURAMOTO MODEL WITH DELAY¹⁰

Klinshov V. V. (Russia, Nizhny Novgorod)
A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
vladimir.klinshov@ipfran.ru

We study synchronization in Kuramoto model with delay with a focus on the distribution of the oscillators' frequencies. We consider a heterogeneous assembly of N oscillators with delayed coupling

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j - \frac{K}{2i}(R(t - \tau)e^{-i\theta_j(t)} - R^*(t - \tau)e^{i\theta_j(t)}), \quad (1)$$

where $i = 1, \dots, N$ is the unit number, $\theta_i \in S^1$ are the phase variables, ω_i are the natural frequencies, K is the global coupling strength, τ is the coupling delay, and R is the Kuramoto complex order parameter characterizing the degree of synchrony in the population and defined as

$$R(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\theta_j(t)}. \quad (2)$$

⁹The study was funded by RSF, project number 23-21-00092.

¹⁰The work is supported by the Russian Science Foundation, grant No. 19-72-10114.

In the limit $N \rightarrow \infty$, the macroscopic state of the system is described by the probability density function $f(\theta, \omega, t)$, which obeys the continuity equation. The Kuramoto parameter in this case equals

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} f(\theta, \omega, t) e^{i\theta} d\theta. \quad (3)$$

Following the theory of Ott and Antonsen [1], [2], the long-term solution of the continuity equation can be found in the form

$$f(\theta, \omega, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(z^*(\omega, t))^n e^{in\theta} + \text{c.c.} \right] \right), \quad (4)$$

where $g(\omega)$ is the probability density function of the natural frequencies and $z(\omega, t)$ is the local complex order parameter of the subpopulation with the natural frequency ω . We assume the following distributions $g(\omega)$:

$$g_n(\omega) = \frac{c_n}{(\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n}}, \quad (5)$$

where n is natural, Ω is the mean frequency, Δ is the distribution half-width, and $c_n = \frac{1}{\pi} n \sin \frac{\pi}{2n} \Delta^{2n-1}$ is the normalization constant. If function $z(\omega, t)$ is analytically extended to complex ω , the integration contour in Eq. (3) can be closed by an infinitely large arc in the upper complex half-plane, which allows to estimate the integral using the residue theorem.

Then the continuity equation can be transformed into the following closed set of n delay differential equations for complex variables

$$\dot{z}_k = i(\Omega + \Delta e^{i\alpha_k}) z_k + \frac{a}{2} (1 - z_k^2) + \frac{K}{2} (R_\tau - R_\tau^* z_k^2), \quad (6a)$$

$$R = -i \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n e^{i\alpha_k} z_k, \quad (6b)$$

where $k = \overline{1, n}$ and $\alpha_k = \pi(k - 0.5)/n$. This set of DDEs governs the collective dynamics of the population in the thermodynamic limit $N \rightarrow \infty$.

We performed the bifurcation analysis of Eqs. (6) and calculated the critical coupling K_c at which the oscillators start to synchronize and Andronov-Hopf bifurcation takes place in system (6). The most important results is that the dependency $K_c(\tau)$ looks very different for $n = 1$ (Lorentzian distribution) and $n > 1$. For $n = 1$ the delay $\tau > 0$ always increases the critical coupling with respect to the delayless case, while for $n > 1$ some values of delay can reduce the critical coupling and thus promote synchronization.

References

- [1] Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos. 2008. Vol. 18. No. 3. P. 037113.
- [2] Ott E., Antonsen T. M. Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. 2009. Vol. 19. No. 2. P. 023117.

ON THE BLOW-UP OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ELLIPTIC INEQUALITIES

Kon'kov A. A. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
konkov@mech.math.msu.su

Shishkov A. E. (Russia, Moscow)
RUDN University
aeshkv@yahoo.com

We study non-negative solutions of the inequality

$$-\operatorname{div} A(x, \nabla u) \geq f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where $n \geq 2$ and A is a Caratheodory function such that

$$C_1|\xi|^p \leq \xi A(x, \xi), \quad |A(x, \xi)| \leq C_2|\xi|^{p-1}, \quad C_1, C_2 > 0, \quad p > 1,$$

for almost all $x \in \mathbb{R}^n$ and for all $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a nondecreasing function on the interval $[0, \varepsilon]$ for some real number $\varepsilon > 0$.

We say that $u \in W_{p,loc}^1(\mathbb{R}^n)$ is a solution of (1) if $f(u) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x, \nabla u) \nabla \varphi \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \varphi \, dx$$

for any non-negative function $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A partial case of (1) is the inequality

$$-\Delta_p u \geq f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

where $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ is the p -Laplace operator.

Without loss of generality, one can assume that solutions of (1) satisfy the relation

$$\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^n} u = 0; \quad (3)$$

otherwise we replace u by $u - \alpha$, where

$$\alpha = \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^n} u.$$

In so doing, the left-hand side of (1) does not change and the right-hand side transforms to $f(u + \alpha)$.

We obtain exact conditions for any non-negative solution of (1), (3) to be identically zero. Let us note that the only relevant case is $n > p$. Really, if $n \leq p$, then any non-negative solution of the inequality

$$-\operatorname{div} A(x, \nabla u) \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

is a constant [1]. For $n > p$, in papers [2-4], it was shown that (2) has no positive solutions if

$$\liminf_{\zeta \rightarrow +0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n(p-1)/(n-p)}} > 0.$$

We manage to strengthen this result (see Theorems 1 and 2).

Theorem 1. *Let $n > p$ and*

$$\int_0^\varepsilon \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{\zeta^{1+n(p-1)/(n-p)}} = \infty.$$

Then any non-negative solution of (1), (3) is identically zero.

Theorem 2. *Let $n > p$ and*

$$\int_0^\varepsilon \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{\zeta^{1+n(p-1)/(n-p)}} < \infty.$$

Then problem (2), (3) has a positive solution.

References

- [1] Mitidieri E., Pohozaev S. I. A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities // Proc. V. A. Steklov Inst. Math. 2001. Vol. 234. P. 3–383.
- [2] D’Ambrosio L., Mitidieri E. A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities // Adv. Math. 2010. Vol. 224. P. 967–1020.
- [3] Armstrong S., Sirakov B. Nonexistence of positive supersolutions of elliptic equations via the maximum principle // Commun. Partial Diff. Eq. 2011. Vol. 36. P. 2011–2047.
- [4] Armstrong S., Sirakov B. A new approach to Liouville theorems for elliptic inequalities // Progress in Variational Problems, Jun 2011, Kyoto, Japan 1740, pp. 64–73, 2011.

EXACT SOLUTIONS OF 3D NAVIER–STOKES EQUATIONS
WITH FINITE LIFETIME

Koptev A. V. (Russia, Saint-Petersburg)

Admiral Makarov state university of maritime and inland shipping

Alex.Koptev@mail.ru

We consider 3D Navier – Stokes equations for motion of incompressible medium

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta w, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Where u, v, w, p denote main unknowns; Φ is the potential of external force; Re is nonnegative parameter caled Reynolds number.

We consider equations (1-4) in relation to movement in deep water when the influence of limiting surfaces can be neglected and the role of external force is played by gravity. So the potential of external force can be given as $\Phi = gz$.

For this case, it is proposed to consider solutions with asymptotic boundary conditions at depth

$$u \rightarrow u_0, \quad v \rightarrow v_0, \quad w \rightarrow w_0, \quad (5)$$

when

$$x = \frac{c_x}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y = \frac{c_y}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad z = \frac{c_z}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (6)$$

Where u_0, v_0, w_0 are given limit values of velocities at infinity, c_x, c_y, c_z are given coefficients.

As a result of applying the method described in works [1-2] an exact solution was obtained in the form

$$u = -\frac{A_1 sh\left(\frac{Re\theta_1}{2}\right) - B_1 sin\left(\frac{Re\lambda_1}{2}\right)}{2(\cos^2\left(\frac{Re\lambda_1}{4}\right) + sh^2\left(\frac{Re\theta_1}{4}\right))} + \frac{B_3 sh\left(\frac{Re\theta_3}{2}\right) + A_3 sin\left(\frac{Re\lambda_3}{2}\right)}{2(\cos^2\left(\frac{Re\lambda_3}{4}\right) + sh^2\left(\frac{Re\theta_3}{4}\right))},$$

$$v = -\frac{A_2 sh\left(\frac{Re\theta_2}{2}\right) - B_2 sin\left(\frac{Re\lambda_2}{2}\right)}{2(\cos^2\left(\frac{Re\lambda_2}{4}\right) + sh^2\left(\frac{Re\theta_2}{4}\right))} + \frac{B_1 sh\left(\frac{Re\theta_1}{2}\right) + A_1 sin\left(\frac{Re\lambda_1}{2}\right)}{2(\cos^2\left(\frac{Re\lambda_1}{4}\right) + sh^2\left(\frac{Re\theta_1}{4}\right))}, \quad (7)$$

$$w = -\frac{A_3 sh\left(\frac{Re\theta_3}{2}\right) - B_3 sin\left(\frac{Re\lambda_3}{2}\right)}{2(\cos^2\left(\frac{Re\lambda_3}{4}\right) + sh^2\left(\frac{Re\theta_3}{4}\right))} + \frac{B_2 sh\left(\frac{Re\theta_2}{2}\right) + A_2 sin\left(\frac{Re\lambda_2}{2}\right)}{2(\cos^2\left(\frac{Re\lambda_2}{4}\right) + sh^2\left(\frac{Re\theta_2}{4}\right))},$$

$$p - p_0 = -gz - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (8)$$

Where notation is used

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{Re} \ln\left(\cos^2\frac{Re\lambda_k}{4} + sh^2\frac{Re\theta_k}{4}\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\theta_1 = A_1(x - x_0) - B_1(y - y_0), \quad \lambda_1 = B_1(x - x_0) + A_1(y - y_0).$$

$$\theta_2 = A_2(y - y_0) - B_2(z - z_0), \quad \lambda_2 = B_2(y - y_0) + A_2(z - z_0), \quad (9)$$

$$\theta_3 = A_3(z - z_0) - B_3(x - x_0), \quad \lambda_3 = B_3(z - z_0) + A_3(x - x_0).$$

Whereas $A_1(t), B_1(t)$ are arbitrary functions of time and $A_2(t), B_2(t), A_3(t), B_3(t)$ are expressed through them according to the equalities

$$A_2(t) = -v_0 + B_1(t), \quad B_2(t) = \frac{v_0^2 - u_0^2 + w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0},$$

$$A_3(t) = \frac{v_0^2 - u_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \quad B_3(t) = u_0 + A_1(t). \quad (10)$$

The solution given by formulas (7-10) has interesting properties. In particular if

$$c_x = 1, \quad c_y = 2, \quad c_z = -3, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 4, \quad A_1(t) = 0, \quad B_1(t) = t,$$

then the indicated solution exists only when $0 < t < t_*$, when $t_* = 3$. So for this solution the lifetime is 3.

References

- [1] Koptev A. V. Method for solving the Navier-Stokes and Euler equations of motion for incompressible media // J. Mathematical Sciences, V. 250(1), New York: Springer. 2020, P. 254-265.
- [2] Коптев А. В. Точное решение 3D уравнений Навье-Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Вып. 227. // М.: ВИНТИ РАН, 2023, С. 41-50.

GENERIC BIFURCATIONS OF TORI IN 3D INTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS

Kudryavtseva E. A. (Russia, Moscow)

Moscow State University
eakudr@mech.math.msu.su

We study singularities of the Lagrangian fibration given by a completely integrable Hamiltonian system with 3 degrees of freedom (d.o.f.). We discuss several approaches to the study (and subsequent classification) of generic singularities of integrable systems.

The first approach is to study bifurcations of equilibria of the reduced system (obtained by reduction w.r.t. a first integral). Using it, Lerman and Umanskii [1] introduced the so-called parabolic singular periodic orbits in 2 d.o.f. integrable systems and proved their structural stability under (small enough) integrable perturbations of the system.

Another approach is to consider integrable systems with “toric” symmetries, in which some first integrals generate a Hamiltonian torus action. By combining these two approaches, Duistermaat [2] and van der Meer [3] studied the Hamiltonian Hopf bifurcation and its generalization to higher order resonances. They proved persistence of such bifurcations of equilibria in generic families of S^1 -symmetric 2 d.o.f. integrable systems.

A third approach is to study bifurcations of periodic orbits instead of bifurcations of equilibria (thus multiplicities of the periodic orbit can be different from 1, allowing a “twist” of the orbit). By combining this approach with the previous one (concerning the presence of S^1 -symmetry), Kalashnikov [4] introduced an infinite series of the so-called parabolic singular periodic orbits with resonances in 2 d.o.f. integrable systems, and proved their structural stability under small S^1 -symmetry preserving perturbations.

The existence of a toric symmetry near a compact orbit was proved by Zung [5],[6] under (very mild) assumptions, thereby showing that the Kalashnikov assumption about the existence of S^1 -symmetry near the periodic orbit can often be omitted. We extended [7] this result to so-called “hidden” toric symmetries. Such a symmetry is a Hamiltonian torus action generated by first integrals, some of which are multiplied with $\sqrt{-1}$. We proved the persistence of such a “hidden” toric symmetry under small real-analytic integrable perturbations of the system, thereby showing that the Duistermaat, van der Meer and Kalashnikov assumptions on the perturbed system to be symmetry-preserving can be omitted. We classified [7] such toric symmetries up to symplectomorphisms.

Using “hidden” toric symmetries and the third approach (about a “twist” of the orbit), we extend the Duistermaat series of bifurcations of equilibria to periodic orbits with nontrivial multiplicities in 3 d.o.f. integrable systems. We introduce hyperbolic and focus-focus analogues of these singularities forming 2 new series. We described [7],[8] a series of corank-1 singularities of 3 d.o.f. integrable systems that are bifurcations of the Kalashnikov parabolic orbits with resonances. We prove structural stability of all these singularities under (small) integrable perturbations of the system.

The talk is based on a joint work with L. Lerman.

References

- [1] Lerman L. M., Umanskii Ya. L. The structure of a Poisson action of \mathbb{R}^2 on a four-dimensional symplectic manifolds // *Selecta Math. Sov.* (transl. from Russian preprint of 1981), 1987. Vol. 6. P.365–396.
- [2] Duistermaat J. J. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of hamiltonian systems. In L. Salvadori, editor, *Bifurcation theory and applications*, Montecatini 1983, *Lecture Notes in Mathematics* 1057. New York: Springer. 1984.
- [3] van der Meer J.-C. The Hamiltonian Hopf bifurcation. Volume 1160 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer. 1985.
- [4] Kalashnikov V. V. Typical integrable Hamiltonian systems on a four-dimensional symplectic manifold // *Izvestiya: Mathematics*. 1998. Vol. 62. No 2. P.261–285.
- [5] Bau T., Zung N. T. Singularities of integrable and near integrable Hamiltonian systems // *J. Nonlinear Science*. 1997. Vol. 7. No 1. P.1–7.
- [6] Zung N. T. Actions toriques et groupes d’automorphismes de singularités de systèmes dynamiques intégrables // *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*. 2003. Vol. 336. No 12. P.1015–1020.
- [7] Kudryavtseva E. A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // *European J. Math*. 2022. Vol. 8. P.1487–1549.
- [8] Kudryavtseva E. A., Onufrienko M. V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // *Russ. J. Math. Phys*. 2023. Vol. 30. No 1. P.76–94.

QUANTUM PHASE ESTIMATION STABILITY

Lisnichenko M. O. (Russia, Innopolis)

Innopolis University

m.lisnichenko@innopolis.university

Kiselev O. M. (Russia, Innopolis)

Innopolis University

ok@ufanet.ru

QPE is an algorithm to estimate a phase of a given unitary matrix U with a given eigenvector Ψ [1]. An equation for the eigenvalues and eigenvectors is the following:

$$U\Psi = \Psi\Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(e^{2i\pi\omega_1}, e^{2i\pi\omega_2}, \dots, e^{2i\pi\omega_n}), \quad \omega_k \in [0, 1). \quad (1)$$

If to multiply a given vector $|x\rangle$ by the unitary matrix U :

$$U^t|x\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{11}e^{2\pi i\omega_1 t}\mathbf{x}_1 + \psi_{12}e^{2\pi i\omega_2 t}\mathbf{x}_2 + \dots + \psi_{1n}e^{2\pi i\omega_n t}\mathbf{x}_n \\ \dots \\ \psi_{n1}e^{2\pi i\omega_1 t}\mathbf{x}_1 + \psi_{n2}e^{2\pi i\omega_2 t}\mathbf{x}_2 + \dots + \psi_{nn}e^{2\pi i\omega_n t}\mathbf{x}_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

This transformation appears as a value series of the vector $U^t|x\rangle$ along the parameter t . The expression bellow represents frequencies of the Fourier series:

$$\phi_j = 2\pi \sum_{s=1}^k 2^{-s} j_s, \quad j = 0.j_1j_2 \dots j_k, \quad j_s \in \{0, 1\}. \quad (3)$$

Let H be the initial Hermitian matrix for which QPE finds the eigenvalues. This matrix splits into matrix H_0 and its perturbation $\epsilon H_1 = H'$, such that $H = H_0 + \epsilon H_1 = H_0 + H'$, $0 < \epsilon \ll 1$. The same idea comes for the eigenvalues and eigenvectors respectively:

$$E_n = E_n^0 + \epsilon E_n^1 |\psi_n\rangle = |\psi_n^0\rangle + \epsilon |\psi_n^1\rangle. \quad (4)$$

Where n is the index of an eigenvalue and eigenvector respectively.

The expressions below describes the result of computations above as a single perturbed eigenvalue and eigenvector respectively:

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H_1 | \psi_n^0 \rangle |\psi_n^1\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H_1 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^0\rangle. \quad (5)$$

Different sights for QPE error analysis was considered in [2, 3]. According to the QPE – mainly the step of phase setting, one should consider the exponent

$$U^{2^k} = e^{i(H_0 + \epsilon H_1)2^k}, \quad k \in 0, \dots, n. \quad (6)$$

For n qubits, the largest number that can be encoded equals $2^n - 1$. Therefore, the largest perturbation term must be less than the order $\mathcal{O}(1)$ to keep the difference between the perturbed and original phases small: $\epsilon 2^n \ll 1$.

Theorem 1. *The more precision in the output eigenvalues leads to less precisely known digits of this eigenvalue:*

$$n \ll -\log(\epsilon). \quad (7)$$

If the eigenvalues are uniformly distributed and m is a distance between two neighborhood eigenvalues, then the relation between eigenvalue estimation precision and this distance is the following: $2^n < m$.

Theorem 2. *If the perturbation component exceeds the phase resolution, the phases in the neighborhood become imperceptible.*

Here the phase resolution is a distance between two phases caused by two neighboring uniformly distributed eigenvalues.

Corollary 1. *The set size of imperceptible phases is limited by the amplitude of the perturbation component.*

References

- [1] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang. Quantum computation and quantum information. Phys. Today, 54(2):60, 2001.6
- [2] Kitaev A. Yu. Quantum computations: algorithms and error correction. Russian Mathematical Surveys 52.6 (1997): 1191.
- [3] Li, Xiantao. Some error analysis for the quantum phase estimation algorithms. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 55.32 (2022): 325303.

RESONANCE PROPERTIES OF A BEAM WITH A MOVING BOUNDARY LYING ON AN ELASTIC FOUNDATION

Litvinov V. L. (Russia, Samara)
Samara State Technical University
vladlitvinov@rambler.ru

Litvinova K. V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
kristinalitvinova900@rambler.ru

The approximate Kantorovich–Galerkin method is considered in relation to solving a problem describing the oscillations of a beam with a moving boundary lying on an elastic foundation. The

mathematical formulation of the problem includes a partial differential equation with respect to the desired displacement function and inhomogeneous boundary conditions. The Kantorovich–Galerkin method [4] allows one to take into account the initial conditions, but they do not affect the resonant properties of linear systems, so they are not taken into account in this case. The solution is made in dimensionless variables up to second-order values of smallness relative to small parameters characterizing the speed of motion of the boundary. The results obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the n th dynamic mode are presented, which makes it possible to use the results obtained to analyze the oscillations of technical objects with moving boundaries.

One-dimensional systems, the boundaries of which move, are widespread in technology: ropes of lifting installations, flexible gear links, solid fuel rods, drill strings [1, 2], etc. The presence of moving boundaries causes significant difficulties in describing such systems. Of the analytical methods, the most effective is the method that consists in selecting new variables that stop the boundaries and leave the wave equation invariant. However, exact solution methods are limited to the wave equation and relatively simple boundary conditions, so in the case of moving boundaries, approximate solution methods are mainly used.

Thus, the application of the Kantorovich–Galerkin method allows one to obtain a relatively simple expression for the amplitude of forced vibrations of a rod of variable length, which allows the results obtained to be used to analyze the vibrations of technical objects with moving boundaries.

References

- [1] Savin G. N., Goroshko O. A. Dynamics of a thread of variable length // Nauk.dumka, Kyiv, 1962, P. 332.
- [2] Vesnitsky A. I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, M., 2001, P. 320.
- [3] Litvinov V. L., Anisimov V. N. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2018. No. 2. P. 70-77.

THE HÖLDER ESTIMATE FOR DIVERGENCE TYPE EQUATIONS ON STRATIFIED SETS

Medvedev K. M. (Russia, St. Petersburg)
 St. Petersburg State University
medvedev13k@gmail.com

We consider divergence type elliptic equations on “3-floored” stratified sets (all strata have dimension n , $n - 1$ or $n - 2$) under the 2-connectedness assumption (each pair of strata can be connected by a connected chain of strata in which the dimensions of neighboring strata differ by exactly one).

We limit ourselves to linear homogeneous equations of the simplest form. This means that the operator on the stratum of maximum dimension does not contain lower-order terms, and the operators on the other strata include conormal derivatives from adjacent “upper floors”.

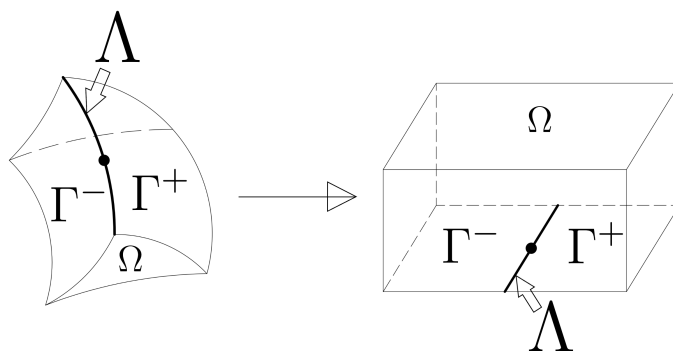


Fig. 1

We establish a local estimate of the Hölder norm in a vicinity of an internal point of the stratum of dimension $n - 2$ (denote it by Λ), adjacent to strata of larger dimensions. The main model case here is one n -dimensional stratum (Ω) and two $(n - 1)$ -dimensional strata (Γ^+ and Γ^-), the angle between which at all points of the stratum Λ is separated from zero (see Fig. 1 left). Due to the locality of the Hölder property, we consider the following equation in straightened coordinates (see Fig. 1 right):

$$\begin{aligned} -D_i(\mathbf{a}_{ij}D_j u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ -D_\mu(a_{\mu\tau}^\pm D_\tau u) - \mathbf{a}_{nj}D_j u &= 0 && \text{in } \Gamma^\pm, \\ -D_l(\alpha_{lm}D_m u) - a_{n-1,\tau}^+ D_\tau^+ u + a_{n-1,\tau}^- D_\tau^- u &= 0 && \text{in } \Lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

Here indices i, j vary from 1 to n , μ, τ – from 1 to $n - 1$, l, m – from 1 to $n - 2$, and the summation on the repeated indicies is assumed. $D_\tau^\pm u$ are the limiting values on Λ of the derivatives $D_\tau u$ from the side of Γ^\pm .

Theorem 1. *If a function $u \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\Gamma) \cap W_2^1(\Lambda)$ is a generalized solution of the problem (1) then it satisfies the Hölder condition on any subset $\bar{\Omega}$ separated from $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Moreover, the Hölder exponent depends only on ν and n .*

The talk is based on the joint paper with A.I. Nazarov, see [1].

References

- [1] Medvedev K. M., Nazarov A. I. The Hölder estimate for divergence type equations on stratified sets // Algebra and Analysis 36:1 (2024), 170–194 (in Russian).

WHISPERING GALLERY-TYPE ASYMPTOTICS IN A SOLID TORUS AND CORRESPONDING CLASSICAL BILLIARDS¹¹

Minenkov D. S. (Russia, Moscow)

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

Lomonosov Moscow State University

minenkov.ds@gmail.com

The eigenproblem for the Laplacian inside a three-dimensional domain of revolution Ω is considered. The domain Ω is diffeomorphic to a solid torus and the Dirichlet conditions on the boundary are set. A series $\{E_k, u_k\}_{k=k_0}^\infty$ of asymptotic eigenvalues and eigenfunctions (quasimodes) of the whispering gallery-type is constructed (see [1]):

$$\|\Delta u_k - E_k u_k\|_{L^2(\Omega)} = O(k^{2/3}), \quad \|u_k\|_{L^2(\Omega)} \sim 1, \quad E_k \asymp k^2, \quad E_{k+1} - E_k \asymp k, \quad k \rightarrow \infty.$$

Namely, the short-wave asymptotic eigenfunctions that are localized near the boundary (or a part of the boundary) are of interest. Reduction of the initial problem to one-dimensional ones is done using the adiabatic approximation in the form of operator separation of variables (that was described in [2]). The relationship between quasimodes and almost integrable classical billiards is also discussed (see Fig. 1).

¹¹The work was done together with S.A. Sergeev in Lomonosov MSU with support by RSF grant 22-71-10106.

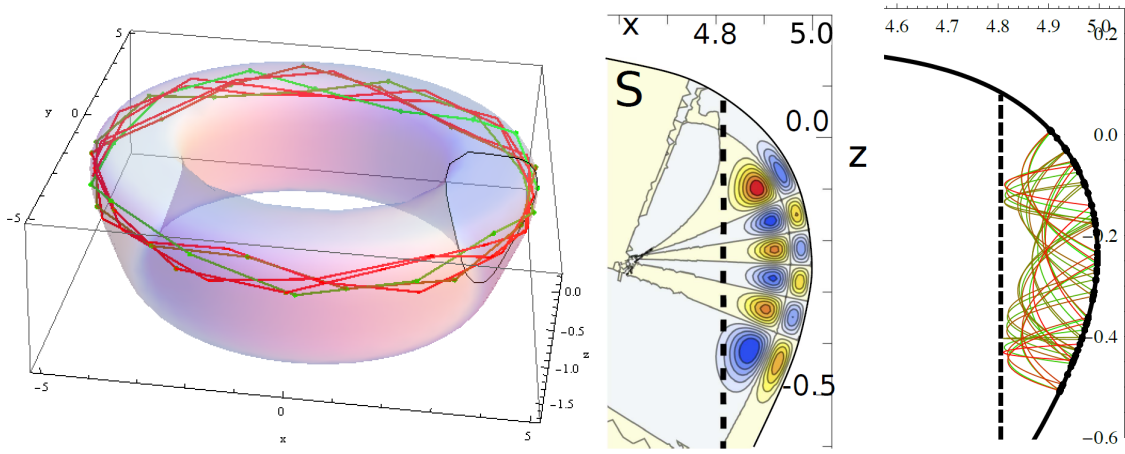


Fig. 1: The domain Ω with classical billiard in it (left), projection of the asymptotic eigenfunction and projection of billiard trajectories onto cross-section S (right).

References

- [1] Minenkov D., Sergeev S. Asymptotics of the Whispering Gallery-Type in the Eigenproblem for the Laplacian in a Domain of Revolution Diffeomorphic To a Solid Torus // Russ. J. Math. Phys. 2023. Vlo. 30. No 4. P.599–620.
- [2] Dobrokhotov S.Yu. Maslov's Methods in the Linearized Theory of Gravitational Waves on a Liquid Surface // Sov. Phys. Dokl. 1983. Vol. 28. P.229–231. (translation in English: Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1983. Vol. 269. No 1. P.76–80.)

THE ALEKSANDROV–BAKELMAN–KRYLOV MAXIMUM PRINCIPLE FOR PARABOLIC OPERATORS ON A BOOK-TYPE STRATIFIED SET

Mironenko F. D. (Russia, Saint-Petersburg)
Saint-Petersburg State University
mironenko.foma@gmail.com

Let $n \geq 2$. A book-type stratified set is a union of K copies of n -dimensional half-plane $\mathbb{R}^n \cap \{x_n \geq 0\}$ embedded into \mathbb{R}^{n+1} and intersecting by $\mathbb{R}^{n-1} \times \{(0, 0)\}$. We denote this set by \mathbb{R}_+^{\otimes} and assume first $n - 1$ coordinates be common for all K half-planes, and $x_n^{[k]} \geq 0$ be the n -th coordinate on k -th half-plane. We consider the stratified ball $\mathbb{B}_+ = \{x \in \mathbb{R}_+^{\otimes} \mid |x| < R\}$ (see Fig.1) and the stratified cylinder $\mathbb{Q}_+ = (0, T) \times \mathbb{B}_+$. Denote by $\partial' \mathbb{Q}_+ = (0, T) \times \partial \mathbb{B}_+ \cup \{0\} \times \overline{\mathbb{B}_+}$ the parabolic boundary of \mathbb{Q}_+ . We set $Q_0 = \mathbb{Q}_+ \cap \{x_n = 0\}$. Then $\mathbb{Q}_+ \setminus Q_0$ is a disjoint union of K half-cylinders which we denote by $Q_+^{[k]}$.

Consider K uniformly parabolic operators $\mathcal{L}^{[k]}$ defined in $Q_+^{[k]}$ respectively:

$$\mathcal{L}^{[k]}u = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{[k]} D_i D_j u + \sum_{i=1}^n b_i^{[k]} D_i u,$$

$$a_{ij}^{[k]} \in L_\infty(Q_+^{[k]}), \quad (a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^n \geq \nu I_n, \quad b^{[k]} = (b_i^{[k]})_{i=1}^n \in L_{n+1}(Q_+^{[k]}),$$

and a uniformly parabolic tangential operator \mathcal{B} in Q_0 :

$$\mathcal{B}u = \partial_t u - \sum_{l,m=1}^{n-1} \alpha_{l,m} D_l D_m u + \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l D_l u + \mathcal{J}u,$$

$$\alpha_{lm} \in L_\infty(Q_0), \quad (\alpha_{lm})_{l,m=1}^{n-1} \geq \nu I_{n-1}, \quad \beta' = (\beta_l)_{l=1}^{n-1} \in L_n(Q_0),$$

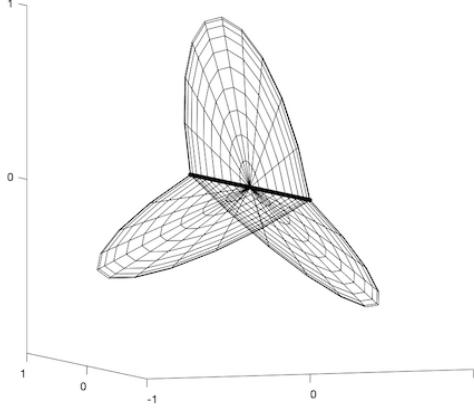


Fig. 1: Stratified ball \mathbb{B}_+ with $n = 2, K = 3$

where \mathcal{J} is an operator of conjugation:

$$\mathcal{J}u = \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]}(x') \lim_{x_n^{[k]} \rightarrow 0+} D_n u(x', x_n^{[k]}), \quad \beta_n^{[k]} \leq 0.$$

For a domain Q , by $\|f\|_{n,Q}$ we denote the norm of function f in the space $L_n(Q)$, $f_+ := \max\{0, f\}$, and Q_u is the set $Q \cap \{u > 0\}$.

Now we can formulate the main result, which was obtained in [1].

Theorem. For any $u \in \bigcap_k C_{t,x}^{1,2}(\overline{Q_+^{[k]}}) \cap C(\overline{\mathbb{Q}_+})$ s.t. $u|_{\partial\mathbb{Q}_+} < 0$:

$$\max_{\mathbb{Q}_+} u_+ \leq N_1 \cdot \sum_{k=1}^K \left\| \frac{(\mathcal{L}^{[k]}u)_+}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|_{n+1, (Q_+^{[k]})_u} + N_2 \cdot \left\| \frac{(\mathcal{B}u)_+}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|_{n, (Q_0)_u}$$

where

$$N_1 = N_0(n) \cdot \left(R^{\frac{n}{n+1}} + \sum_{k=1}^K \left\| \frac{|b^{[k]}|}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|_{n+1, (Q_+^{[k]})_u}^n + \left\| \frac{|\beta'|}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|_{n, (Q_0)_u}^{\frac{n^2}{n+1}} \right),$$

$$N_2 = N_0(n) \cdot \left(R^{\frac{n-1}{n}} + \sum_{k=1}^K \left\| \frac{|b^{[k]}|}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|_{n+1, (Q_+^{[k]})_u}^{\frac{n^2-1}{n}} + \left\| \frac{|\beta'|}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|_{n, (Q_0)_u}^{n-1} \right)$$

and $N_0(n)$ is some positive constant depending only on n .

For $K = 2$ the stratified ball \mathbb{B}_+ can be embedded into \mathbb{R}^n and the maximum principle was proven in [2]. The general case is more complicated and needs additional constructions.

References

- [1] Mironenko F. D. Maximum estimates for solutions to elliptic and parabolic equations on a book-type stratified set // Siberian Math. J. 2023, Vol. 64. No. 6. P.1385–1398.
- [2] Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Linear two-phase Venttsel problems // Arkiv for matematik 2001, Vol. 39. No. 2. P.201–222.

Moshchanetskii M. L. (Russia, Innopolis)

Innopolis University

m.moshchanetskii@innopolis.university

Kiselev O. M. (Russia, Innopolis)

Innopolis University

o.kiselev@innopolis.ru

The report considers problem of uncertain underactuated system control. The system is represented by pendulum on wheel structure. The system model is designed in accordance to [1].

To reveal the problem of underactuated system control, the system is moved from initial point to final along straight line. During the system motion, the pendulum has to be stabilized around its upper equilibrium position. The desired trajectory describing the desired system motion is designed as a piecewise trajectory considering applied limitations as local optimization problems.

For provision of the system motion along the desired trajectory modal controller is chosen. The controller is designed and tuned on theoretical basis of [2] and [3].

Finally, the controller performance is considered and analyzed for the cases of no uncertainty in the system model, uncertainty in the pendulum length parameter, and uncertainty in the pendulum mass parameter.

References

- [1] Formalskii A. Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects (De Gruyter Studies in Mathematical Physics). Berlin: De Gruyter. 2015.
- [2] Voronin A. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Osnovy postroeniya i analiza sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Theory of automatic control. Fundamentals of construction and analysis of automatic control systems]. Tomsk: TPU. 2013.
- [3] Kim D. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya, t. 2. [The theory of automatic control. vol. 2]. Moscow: Fizmatlit. 2004.

MATHEMATICAL MODELING OF THE INFECTION PROGRESSION WITH INFLAMMATION¹²

Mozokhina A. S. (Russia, Moscow)

RUDN University

mozokhina-as@rudn.ru

Propagation of the virus infection in the tissue or cell culture can be described with a reaction-diffusion wave [1]. In this work, we propose an extended model of such propagation for investigating the role of inflammation in resolving the virus infection. The model is based on non-local reaction-diffusion equations. We investigate both dynamic and reaction-diffusion systems. In the dynamic system, we found the stationary points and determined the conditions of their stability with the first method of Lyapunov. In the reaction-diffusion system, we determine the basic physiology-meaningful characteristics of the system, namely, the total viral load, which is the integral of the virus concentration, and the estimate of the speed of the infection wave propagation. The dependence of these characteristics on the inflammation parameters as well as their asymptotic behavior and connection with the previous results are investigated [2].

References

- [1] Ait Mahiout L., Bessonov N., Kazmierczak B., Sadaka G., Volpert V. Infection spreading in cell culture as a reaction-diffusion wave // ESAIM: M2AN. 2022. Vol. 56. P. 791–814.
- [2] Mozokhina A., Ait Mahiout L., Volpert V. Modeling of viral Infection with inflammation // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 4095.

¹²This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (megagrant agreement No. 075-15-2022-1115).

Nazarov A. I. (Russia, St. Petersburg)
 PDMI RAS
 St. Petersburg State University
al.il.nazarov@gmail.com

We discuss the best constant $m_{p,a,b}(\mathcal{C})$ in inequalities of the type

$$m_{p,a,b}(\mathcal{C}) \int_{\mathcal{C}} |y|^a |z|^{-b-p} |u|^p dz \leq \int_{\mathcal{C}} |y|^a |z|^{-b} |\nabla u|^p dz, \quad u \in C_c^\infty(\mathcal{C}),$$

where $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ is a cone, $p > 1$, and $a, b \in \mathbb{R}$. Here $z = (x, y)$ is the variable in $\mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^{d-k} \times \mathbb{R}^k$.

The talk is based on the joint work with G. Cora and R. Musina (Italy).

References

- [1] Cora G., Musina R., Nazarov A. I. Hardy type inequalities with mixed weights in cones // Preprint available at <https://arxiv.org/abs/2305.05034>.

FINITE-TIME STABILITY OF CASCADE SYSTEMS WITH INTEGRAL VIRTUAL CONTROL

Nguyen Ch. T. (Vietnam, Ha Noi)
 Le Quy Don Technical University
chithanh@lqdtu.edu.vn

Finoshin A. V. (Russia, Kaluga)
 Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch
earlov@gmail.com

Consider the linear cascade control plant

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}(\xi) \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}(\xi) x_2, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{a}_{21}^\top(\xi) \mathbf{x}_1 + a_{22}(\xi) x_2 + b(\xi) u, \tag{2}$$

where $\mathbf{x}_1 = (x_{11} \ \cdots \ x_{1n})^\top \in R^n$ is the state space of the output subsystem, without loss of generality suppose $x_2 \in R^1$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^\top \ x_2)^\top$, $u \in R^1$ is a control, $\mathbf{A}_{11}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{I}_{n-1} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_{12}(\xi) = (0 \ \cdots \ a_n)^\top$, $\mathbf{a}_{21}(\xi)$ is a row $(1 \times n)$, $a_{22}(\xi)$, $b(\xi)$ are scalars, $\xi \in \Xi$ is a vector of unknown parameters, Ξ is a set of admitted values of ξ . Control plant is controllable for $\forall \xi \in \Xi$, and sign $b(\xi)$, sign $a_n(\xi)$ are known.

Control objectives are the boundedness of all trajectories, and the achievement of the objective inequality $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ as $t \rightarrow \infty$, where $\mathbf{e} = (e_1 \ \cdots \ e_n)^\top = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*$ is tracing error, $\mathbf{x}_1^* = (x_{11}^* \ \cdots \ x_{1n}^*)^\top \in R^n$ is the desired output subsystem trajectory specified by a reference model either in state space

$$\dot{\mathbf{x}}_1^* = \mathbf{A}_* \mathbf{x}_1^* + \mathbf{b}_* r, \tag{3}$$

or input-output operator equation $g(p) x_{11}^* = g_0 r$, where r is continuous and bounded with its derivative function, $\mathbf{b}_* = (0 \ \cdots \ g_0)^\top$, $p = d/dt$, $g(p) = p^n + g_{n-1} p^{n-1} + \cdots + g_0$, $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{I}_{n-1} \\ -g_0 & \cdots & -g_{n-1} \end{pmatrix}$ is Hurwitz matrix.

Introduce a virtual control $x_{2\text{virt}}$ that is the desired input of the output subsystem. Consider the extended output subsystem with virtual control and new input v

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}(\xi) \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}(\xi) x_{2\text{virt}},$$

$$\dot{x}_{2\text{virt}} = v. \quad (4)$$

Propose the following control law

$$y = x_2 - \bar{x}_{2\text{virt}}, \quad (5)$$

$$u = -\gamma \cdot \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(y), \quad (6)$$

$$v = -\gamma \text{sign}(y) + \gamma_m \text{sgn}(\sigma), \quad (7)$$

$$\sigma = x_2 - x_{2\text{virt}}, \quad (8)$$

$$\bar{x}_{2\text{virt}} = -\theta_1^T \mathbf{x}_1 + \theta_{n+1} r. \quad (9)$$

$$\dot{\theta}_1 = \sum_{i=1}^n e_i h_{in} \Gamma_{1e} \mathbf{x}_1, \dot{\theta}_{n+1} = -\sum_{i=1}^n e_i h_{in} \tilde{\gamma}_{e(n+1)} r, \quad (10)$$

where $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$ is a solution of Lyapunov equation $\mathbf{H}\mathbf{A}_* + \mathbf{A}_*^T \mathbf{H} = -\mathbf{G}$,

$\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0$, $\Gamma_{e1} = \text{diag}\{\gamma_{e1}, \dots, \gamma_{en}\} > 0$, $\tilde{\gamma}_{ei} = \text{sign}(a_n(\xi)) \gamma_{ei}$, $\gamma_{ei} > 0$.

Theorem 1. Consider system consisting of a plant (1), (2), a reference model (3), deviation from manifold (8), information output (5), desired virtual control (9), new input (7), a control (6), adaptation law (10), and integrator (4). For any initial conditions, there exist $\gamma_m^* > 0$ and $\gamma^* > 0$ so that for $\gamma_m > \gamma_m^*$, $\gamma > \gamma^*$, all of the trajectories are bounded, and control objective $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ as $t \rightarrow \infty$ is achieved, and there exist t_* , t^* so that $\sigma \equiv 0$ for $t \geq t^*$, and $y \equiv 0$ for $t \geq t_*$, and there exists a Lyapunov function

$$V(\mathbf{e}, y, \sigma, \theta) = Q_y(y) + R(\sigma) + Q_e(\mathbf{e}) + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T \Gamma_e^{-1} (\theta - \theta^*),$$

where $\Gamma_e = \text{diag}\{\gamma_{e1}, \dots, \gamma_{e(n+1)}\} > 0$, $\theta = \text{diag}\{\theta_1, \theta_{n+1}\}$.

References

- [1] Myshlyaev Y. I., Finoshin A. V., Nguyen Ch. T. Energy-Based Adaptive Oscillation Control of the Electromechanical Systems. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2020;21(7):412-419. (In Russ.)
- [2] Myshlyaev Yu. I., Nguen Ti Tkhan, Finoshin A. V. Indirect adaptive control of cascade systems with integral virtual algorithm. *Automation. Modern Technologies*. 2018. Vol. 72. No 9. P.921-927. (In Russ.)

TOPOLOGY OF THE GENERALIZED CONSTRAINED THREE-VORTEX PROBLEM AT ZERO TOTAL VORTICAL MOMENT

Palshin G. P. (Russia, Moscow)

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)

gleb.palshin@yandex.ru

Consider the system of three magnetic vortices with a constraint imposed on one of the vortices (see [1],[2]). For equal polarities, the system describes the motion of two free vortex filaments in a perfect fluid in the field of a topographic vortex (see, e.g., [3]). The generalized equations of

motion for free vortices $\alpha = 1, 2$, with relative intensities Γ_α and relative polarities λ_α at positions $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ have the following form:

$$H = \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \ln |r_1| + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln |r_2| + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2} \ln |r_1 - r_2|, \quad \Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}. \quad (1)$$

The system has an additional first integral $F = \Gamma_1 |r_1|^2 + \Gamma_2 |r_2|^2$, which makes it completely Liouville-integrable with two degrees of freedom. The *total vortical moment*

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \Gamma_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2), \quad M = -\frac{\Gamma_1}{\lambda_1} - \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (2)$$

for system (1) was derived in [2]. With this work, we aim to investigate the topology of the Liouville foliation of (1) at zero total vortical moment (2), that is, at $M = 0$.

For topological analysis, we use an *augmented bifurcation diagram* Σ , a set of points over which the *integral map* $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}), H(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2)$, is not locally trivial. The set of critical values $\Sigma' = \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \mid \text{rank } d\mathcal{F}(\mathbf{x}) < 2\}$, is always included in Σ but does not always coincide with it.

Let $k_i = k_i(\Gamma_1, \Gamma_2, \lambda_1, \lambda_2)$ be the i^{th} real root of

$$\lambda_2 k^3 + (\Gamma_2 + \lambda_2) k^2 - (\Gamma_1 + \lambda_1) k - \lambda_1 = 0 \quad (3)$$

for $k_i \neq -1$. Let \mathcal{D} be the discriminant of (3), and

$$m_i = \Gamma_2 k_i^2 + \Gamma_1, \quad \eta_i = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2} \ln(k_i + 1)^2 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln k_i^2 + M \ln |m_i|.$$

Then, for $M = 0$, there is always a root $k_1^0 = -\Gamma_2 \lambda_2 - 1$. The type of Σ' depends on $\text{sgn } \mathcal{D}$ (Fig. 1): if $\mathcal{D} < 0$, then $\Sigma' = \Sigma'_1$, where

$$\Sigma'_1 = \left\{ (f, h) \mid f \text{sgn } m_1 > 0, h = \frac{\eta_1}{2} \right\},$$

which is an open horizontal interval on the plane of the first integrals $\mathbb{R}^2(f, h)$; if $\mathcal{D} > 0$, then $\Sigma' = \Sigma'_1 \cup \Sigma'_2 \cup \Sigma'_3$, where

$$\Sigma'_2 = \left(0, \frac{\eta_2}{2} \right), \quad \Sigma'_3 = \left(0, \frac{\eta_3}{2} \right);$$

if $\mathcal{D} = 0$, then $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 2\lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, and Σ' consists of one isolated point

$$\Sigma' = (0, \ln 16).$$

Consider an *isoenergy surface* $Q_h^3 = \{\mathbf{x} \mid H(\mathbf{x}) = h\}$. For $h_1 = \eta_1/2$, the isoenergy surface $Q_{h_1}^3$ is *singular*, that is, at some of its points $dH = 0$. Moreover, at level h_1 the isoenergy surface undergoes a saddle-type bifurcation of the form

$$\mathbb{S}^1 \times \text{Cyl}^2 \rightarrow (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \times \text{Cyl}^2 \rightarrow 2\mathbb{S}^1 \times \text{Cyl}^2.$$

Such surfaces admit both compact and noncompact fibers of the Liouville foliation.

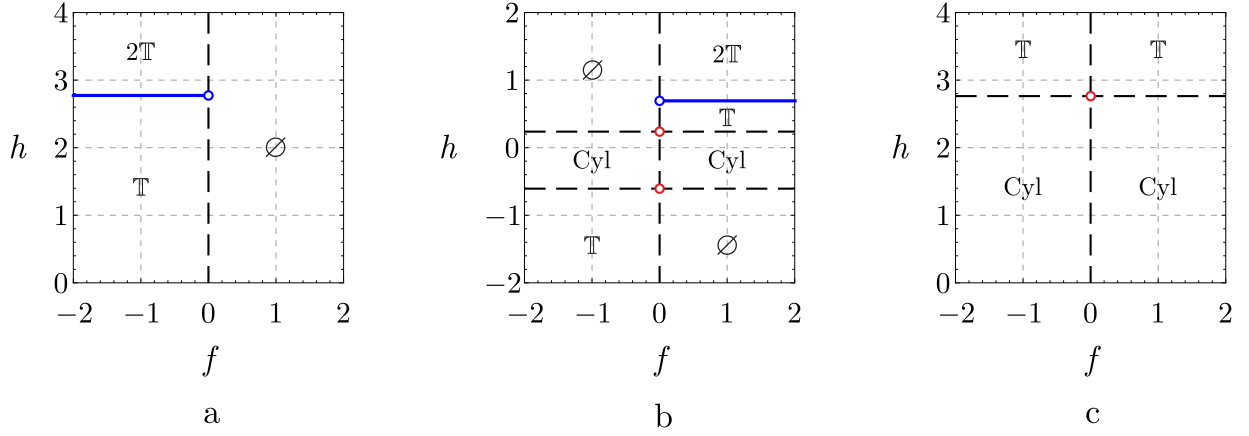


Fig. 1: Examples of augmented bifurcation diagrams Σ for zero total vortical moment M and $\mathcal{D} < 0$ (a), $\mathcal{D} > 0$ (b), $\mathcal{D} = 0$ (c).

References

- [1] Palshin G. P. On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics // Theor. Math. Phys. 2022. Vol. 212. No 1. P. 972–983.
- [2] Palshin G. P. Topology of the Liouville foliation in the generalized constrained three-vortex problem // Mat. Sb. 2024. Vol. 215. No 5 (in press).
- [3] Ryzhov E. A., Koshel K. V. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex // EPL. 2013. Vol. 102. No 4. P. 44004.

IMPROVED RESOLVENT APPROXIMATIONS IN HOMOGENIZATION OF HIGHER ORDER OPERATORS

Pastukhova S. E. (Russia, Moscow)
MIREA – Russian Technological University
pas-se@yandex.ru

In \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, consider differential operators L_ε of even order $2m \geq 4$ with ε -periodic coefficients, $\varepsilon \in (0, 1)$, formally acting on functions $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($d \geq 2$, $n \geq 1$) as follows:

$$(L_\varepsilon u)_j = (-1)^m \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (A_{\alpha\beta}^{jk}(x/\varepsilon) D^\beta u_k), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Here, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ is a multiindex of length $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$; $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; the coefficients $\mathbf{A} = \{A_{\alpha\beta}^{jk}(y)\}$ are measurable 1-periodic complex-valued functions for integers $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ and multiindices α, β , $|\alpha| = |\beta| = m$. Let $A_{\alpha\beta} = \{A_{\alpha\beta}^{jk}\}_{j,k=1}^n$ be $(n \times n)$ -matrices for fixed α and β . Then (1) can be written shorter:

$$L_\varepsilon u = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x/\varepsilon) D^\beta u).$$

The coefficients in (1) satisfy the following conditions: $\|\mathbf{A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda_1$ and

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (D^\alpha \varphi, A_{\alpha\beta} D^\beta \varphi) \geq \lambda_0 \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$$

for some positive constants λ_1 and λ_0 . The simplified notation $(F, G) = (F, G)_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)}$, $\|F\| = \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} = (F, F)^{1/2}$ is used here. Consider the equation

$$u^\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^d), \quad L_\varepsilon u^\varepsilon + u^\varepsilon = f, \quad (2)$$

where $f \in L^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ and $H^m(\mathbb{R}^d) = H^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ is a Sobolev space of order m .

Our goal is to find an approximation of the resolvent $(L_\varepsilon + I)^{-1}$ in the energy operator norm, that is $(L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d))$ -norm, with an error of the order ε^2 . To this end, we firstly construct a two-scale approximation w^ε for the solution u^ε of (2). This is

$$w^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x) + \varepsilon^m U_m^\varepsilon(x) + \varepsilon^{m+1} U_{m+1}^\varepsilon(x), \quad (3)$$

where the first term is $u^\varepsilon(x) = \Theta^\varepsilon(u(x) + \varepsilon u^1(x))$ with the suitable smoothing operator Θ^ε and the functions $u, u^1 \in H^m(\mathbb{R}^d)$ being the solutions of the homogenized equations

$$\hat{L}u + u = f, \quad \hat{L} = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha \hat{A}_{\alpha\beta} D^\beta,$$

$$\hat{L}u^1 + u^1 = -Bu, \quad Bu = (-1)^m \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|=m, |\delta|=m+1} D^\alpha b_{\alpha\delta}^k D^\delta u_k.$$

The $(n \times n)$ -matrices of constant coefficients $\hat{A}_{\alpha\beta}$ and the constant n -vectors $b_{\alpha\delta}^k$, for all specified multiindices α, β and integers k , are defined with the help of solutions to auxiliary problems on the periodicity cell $Y = [-1/2, 1/2]^d$. Other terms in (3) are

$$U_m^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{|\gamma|=m} N_\gamma^k(x/\varepsilon) D^\gamma u_k^\varepsilon(x), \quad U_{m+1}^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{|\delta|=m+1} N_\delta^k(x/\varepsilon) D^\delta u_k^\varepsilon(x).$$

Here 1-periodic vector functions $N_\gamma^k(y)$ and $N_\delta^k(y)$ are solutions of the aforementioned cell problems. In the approximation (3), we can take $\Theta^\varepsilon = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ with the iteration of the Steklov smoothing operator. We remind its definition: $(S^\varepsilon \varphi)(x) = \int_Y \varphi(x - \varepsilon \omega) d\omega$.

Theorem. The function w^ε defined in (3) approximates the solution of the problem (2) with the estimate $\|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, where $C = \text{const}(d, n, \lambda_0, \lambda_1)$.

By the properties of the operator Θ^ε , we can simplify the approximation w^ε in the above estimate and then rewrite it in the operator terms as follows:

$$\|(L_\varepsilon + I)^{-1} - \mathcal{U}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2, \quad (4)$$

where

$$\mathcal{U}_\varepsilon = (\hat{L} + I)^{-1} - \varepsilon(\hat{L} + I)^{-1} B (\hat{L} + I)^{-1} + \varepsilon^m \mathcal{K}_m(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \mathcal{K}_{m+1}(\varepsilon),$$

$$\mathcal{K}_m(\varepsilon)f = \sum_{k=1}^n \sum_{|\gamma|=m} (N_\gamma^k)^\varepsilon D^\gamma \Theta^\varepsilon u_k,$$

$$\mathcal{K}_{m+1}(\varepsilon)f = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{|\delta|=m+1} (N_\delta^k)^\varepsilon D^\delta \Theta^\varepsilon u_k + \sum_{|\gamma|=m} (N_\gamma^k)^\varepsilon D^\gamma \Theta^\varepsilon u_k^1 \right)$$

with the solutions $u = (\hat{L} + I)^{-1} f$ and $u^1 = -(\hat{L} + I)^{-1} B (\hat{L} + I)^{-1} f$ of the homogenized equations.

Estimate (4) extends the result of [1], where the case of scalar (i.e., $n=1$ in (1)) selfadjoint operators L_ε with real coefficients was studied.

References

- [1] Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvent in homogenization of higher order operators. Selfadjoint case // J. Math. Sciences 2022. Vol. 262. No 3. P. 312–328.

Pechen A. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
 Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences
 University of Science and Technology MISIS
apechen@gmail.com

Quantum control studies the abilities to manipulate quantum systems such as atoms, molecules, etc. It attracts high interest of researchers for fundamental reasons related with determination of the fundamental limits on the abilities to manipulate quantum systems and due to various practical applications in quantum technologies [1]. Often controlled systems are interacting with the environment, so that they should be considered as open quantum systems. Moreover, in some circumstances the environment can be exploited as a useful resource to manipulate the system. In this talk, we overview several topics and results in such environment- or measurement-assisted quantum control of open systems, namely, Turing uncomputability of discretized quantum control [2], applications of incoherent control by the environment, either inducing time-dependent decoherence rates [3] or using quantum measurements [4], such as, e.g., control of quantum gate generation [5], determining structure of optimal controls for a qubit interacting with the environment [6], controlling systems with dynamical symmetry [7], incoherent GRAPE (inGRAPE) approach, etc.

References

- [1] Koch C. P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S. J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F. K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe // EPJ Quantum Technol. 2022. Vol. 9. Art. No. 19.
- [2] Bondar D. I., Pechen A. N. Uncomputability and complexity of quantum control // Scientific Reports. 2020. Vol. 10. Art. No. 1195.
- [3] Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. Art. No. 062102.
- [4] Pechen A., Rabitz H. Quantum control by von Neumann measurements // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 74, Art. No. 052102.
- [5] Pechen A. N., Petruhanov V. N., Morzhin O. V., Volkov B. O. Control landscapes for high-fidelity generation of C-NOT and C-PHASE gates with coherent and environmental driving // Eur. Phys. J. Plus. 2024. Vol. 139. Art. No. 120402.
- [6] Lokutsievskiy L. V., Pechen A. N., Zelikin M. I. Time-optimal state transfer for an open qubit // arXiv:2401.10099 [quant-ph] (2024).
- [7] Elovenkova M., Pechen A. Control landscape of measurement-assisted transition probability for a three-level quantum system with dynamical symmetry // Quantum Reports. 2023. Vol. 5. P. 526–545.

¹³Partial support of RSF grant No. 22-11-00330, the federal academic leadership program "Priority 2030"(MISIS Strategic Project "Quantum Internet"), Ministry of Science and Education project 075-15-2024-529.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF SOLUTION
SETS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF AN ORDER $q \in (1, 2)$
WITH AN ALMOST LOWER SEMICONTINUOUS MULTIMAP¹⁴

Petrosyan G. G (Russia, Voronezh)
Voronezh State Pedagogical University
garikpetrosyan@yandex.ru

Soroka M. S. (Russia, Voronezh)
Voronezh State Pedagogical University
marya.afanasowa@yandex.ru

In recent decades the fractional calculus has become one of the most popular and important areas of contemporary mathematics. Interest to this topic has increased as the result of the fact that numerous modern problems of science and technology find a fairly adequate description in terms of fractional differential equations and inclusions (see, e.g., paper [4]).

We study topological properties of solution sets the Cauchy type problem for semilinear fractional differential inclusions in a separable Banach space E of the following form:

$${}^C D_0^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad (2)$$

where ${}^C D_0^q$, $1 < q < 2$, is the Gerasimov–Caputo fractional derivative, $F : [0, T] \times E \multimap E$ is an almost lower semicontinuous multivalued map with compact values, $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ is a closed linear (not necessarily bounded) operator in E and $x_0, x_1 \in E$. We prove that the solution set of Cauchy problem (1)-(2) possesses the classical Kneser connectedness property. To study the properties of solution sets we will use topological methods of nonlinear analysis (see, e.g., [1]-[3]).

References

- [1] Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2011. Vol. 23. P. 425–435.
- [2] Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // *Nonlinear Analysis*. 1993. Vol. 20. P. 781–792.
- [3] Kamenskii M. I., Nistri P., Zecca P., Obukhovskii V. V. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1994. Vol. 82. P. 503–517.
- [4] Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C. -F. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space // *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*. 2021. Vol. 5. № 1. P. 155–177.

HORIZONTAL RAYS IN A DEEP SEA IN THE PRESENCE OF A SYNOPTIC EDDY

Petrov P. S. (Russia, Vladivostok)
V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute
petrov@poi.dvo.ru

Sorokin M. A. (Russia, Vladivostok)
V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute
sorokin.ma@poi.dvo.ru

We consider the Helmholtz equation describing sound propagation in a deep sea in the presence of a synoptic eddy. The eddy is taken into account as a perturbation of the background sound speed profile. Under certain assumptions on its symmetry, the propagation of sound in this problem can be

¹⁴The work was supported by the Russian Science Foundation (project number 22-71-10008).

considered by semi-analytic formulae in the framework of normal modes theory. Three-dimensional acoustic field $p(x, y, z)$ is represented as an expansion over (local) normal modes $\phi_j(z, x, y)$

$$p(x, y, z) = \sum_{j=1}^N A_j(x, y)\phi_j,$$

where $A_j(x, y)$ are called mode amplitudes. In the adiabatic propagation regime, these amplitudes satisfy the so-called horizontal refraction equations

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} + k_j^2 A_j = -\phi_j(z_s)\delta(x - x_0)\delta(y),$$

where $k_j = k_j(x, y)$ is the horizontal wavenumber of the j -th mode, and the Dirac delta on the right-hand side of the equation represents the point source. Semi-analytical solution of this equation is obtained in terms of a series over cylindrical harmonics and analysed numerically.

The geometry of horizontal rays for different vertical modes within this problem formulation is also investigated, and the acoustic shadow zones that are not insonified by the point source due to the presence of an eddy are identified. The implications of the presence of an eddy for acoustic navigation systems are also discussed.

PHASE DIAGRAM FOR OPEN QUANTUM SYSTEMS DRIVEN
BY COHERENT AND INCOHERENT CONTROLS

Petruhanov V. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

University of Science and Technology MISIS

vadim.petruhanov@gmail.com

Pechen A. N. (Russia, Moscow)

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

University of Science and Technology MISIS

apechen@gmail.com

Quantum control which studies methods for manipulation of individual quantum systems is an important tool necessary for development of quantum technologies [1]. Often in experimental circumstances controlled systems can not be isolated from the environment, so that they are open quantum systems. Moreover, in some cases the environment can be used for actively controlling quantum systems, as for example in incoherent control [2,3]. While in some cases the solution for the optimal shape of the control can be obtained analytically, often it is not the case and various numerical optimization methods are needed. A large class of methods are gradient-based numerical optimization algorithms, one of which is Gradient Ascent Pulse Engineering (GRAPE) developed originally for design of NMR pulse sequences [4] and later applied to various problems, e.g. [5,6].

In this talk, we consider dynamics of an open two-level quantum system (qubit) whose evolution is governed by master equation with GKSL-type dissipative terms driven by coherent and incoherent controls [7,8]. General form of the GKSL master equation in the absence of controls was derived in particular in the weak coupling limit and in the stochastic limit of quantum theory. We consider the specific model of such master equation which includes coherent and incoherent controls. The state of the system is represented by a vector in the Bloch ball. We consider constant controls as a basic approach to studying the system dynamics. Due to low dimension of the system, the corresponding 3×3 evolution matrix exponentials can be analytically diagonalized. For that we compute eigenvalues of the right-hand side matrix of the system evolution equation. We find that in the case of constant coherent and incoherent controls $u \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{R}_+$, the half-plane $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (u, n)$ can be divided into two domains with different dynamics, similar to phase diagram. In suitable coordinates, the dividing these two domains curve is a plane cubic curve with a cusp. Different dynamic behaviour of the system in two domains was analyzed.

References

- [1] Koch C. P., Boscain U., Calarco T., Dirr G., Filipp S., Glaser S. J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F. K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe // EPJ Quant. Tech. 2022. Vol. 9. P. 19.
- [2] Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. P. 062102.
- [3] Pechen A. N. Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84. P. 042106.
- [4] Khaneja N., Reiss T., Kehlet C., Schulte-Herbrüggen T., Glaser S. J. Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithm // J. Magn. Res. 2011. Vol. 172. P. 296–305.
- [5] de Fouquieres P., Schirmer S. G., Glaser S. J., Kuprov, I. Second order gradient ascent pulse engineering // J. Magn. Res. 2011. Vol. 212. P. 412–417.
- [6] Pechen A. N., Tannor D. J. Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps // Isr. J. Chem. 2012. Vol. 52. P. 467–472.
- [7] Petruhanov V. N., Pechen A. N. GRAPE optimization for open quantum systems with time-dependent decoherence rates driven by coherent and incoherent controls // J. Phys. A. 2023. Vol. 56. No 30. P. 305303.
- [8] Petruhanov V. N., Pechen A. N. Quantum gate generation in two-level open quantum systems by coherent and incoherent photons found with gradient search // Photonics. 2023. Vol. 10. P. 220.

SUB-LORENTZIAN EXTREMALS¹⁵

Podobryaev A. V. (Russia, Pereslavl-Zalesskiy)
 A. K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS
alex@alex.botik.ru

We consider a left-invariant (sub-)Lorentzian structure on a Lie group. We assume that this structure is defined by a closed convex salient cone in the corresponding Lie algebra and a continuous antinorm [1] associated with this cone. We derive conditions for normal extremal trajectories that keep their causal type and consider some examples.

Let G be a real Lie group and \mathfrak{g} be the corresponding Lie algebra. Consider a closed convex salient cone $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}$ and a continuous antinorm α associated with the cone \mathcal{C} . Let us formulate the sub-Lorentzian problem as the following optimal control problem:

$$\begin{aligned} g \in \text{Lip}([0, t_1], G), \quad u \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C} \setminus 0), \quad \dot{g}(t) = L_{g(t)*}u(t), \\ g(0) = \text{id}, \quad g(t_1) = g_1, \quad \int_0^{t_1} \alpha(u(t)) dt \rightarrow \max, \end{aligned} \tag{1}$$

where the terminal time t_1 is free, and L_g denotes left-shift by an element $g \in G$.

This is generalization of Minkowski geometry in three natural directions. First, we consider an arbitrary Lie group instead of $\mathbb{R}^{1,n}$. Second, we replace the future cone defined by a non-degenerate quadratic form q of signature $(1, n)$ in Minkowski geometry by an arbitrary closed convex salient cone. Note, that this cone could be non-solid. Third, we replace the integral function $\sqrt{q(u(t))}$ of the quality functional by an arbitrary continuous antinorm $\alpha(u(t))$.

There are three *causal types* of tangent vectors of admissible curves: *spacelike*, *lightlike* and *timelike* depending to position of a tangent vector with respect to the left-shift of the cone \mathcal{C} — outside, on the relative boundary or in the relative interior, respectively.

¹⁵The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 22-11-00140 (<https://rscf.ru/en/project/22-11-00140/>) and performed in Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences.

The cone $C^\vee = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid p|_C \leq 0\} \subset \mathfrak{g}^*$ is called *the negative dual cone* for the cone C . An *antisphere* of radius r for an antinorm α is the set $S_r = \{v \in V \mid \alpha(v) = r\}$. The *dual function* for the antinorm α is the function $\alpha^\vee : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ such that

$$\alpha^\vee(p) = - \sup_{v \in S_1} \langle p, v \rangle, \quad p \in \mathfrak{g}^*.$$

The following theorem provides conditions for normal extremal trajectories of problem (1) that keep their causal type.

Theorem 1. *Consider optimal control problem (1) defined by a closed convex salient cone C and an associated continuous antinorm α . Assume that the dual function α^\vee is an antinorm associated with the dual cone C^\vee .*

- (1) *Then causal type of tangent vectors of a normal extremal trajectory is constant.*
- (2) *Tangent vectors of abnormal extremal trajectories are either light-like vectors or tangent vectors of sub-Riemannian abnormal trajectories determined by the distribution of subspaces $L_{\mathfrak{g}^*} \text{span} C \subset T_{\mathfrak{g}} G$. In particular, light-like arcs are not strictly abnormal.*

Corollary 1. (1) *In the Lorentzian case, i.e., $\text{span} C = \mathfrak{g}$, any abnormal extremal trajectory is light-like. In particular, any abnormal extremal trajectory is not strictly abnormal.*

(2) *If the distribution $L_{\mathfrak{g}^*} \text{span} C$ is contact [2], then all abnormal extremal trajectories of the sub-Lorentzian problem (1) are light-like and in particular not strictly abnormal.*

The following corollary allows us to use quadratic functional as in sub-Riemannian geometry [2] in the case when an antinorm is defined by a quadratic form.

Corollary 2. *Assume that the antinorm α is defined by a quadratic form q of signature $(1, r)$ on the Lie algebra \mathfrak{g} , i.e., $\alpha(u) = \sqrt{q(u)}$. Then normal extremal trajectories of problem (1) geometrically coincide with normal time-like and light-like extremal trajectories of the same control system with quadratic functional*

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} q(u) dt \rightarrow \max,$$

where the terminal time t_1 is fixed and $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{g} \setminus 0)$ is a control.

References

- [1] Protasov V. Yu. Antinorms on cones: duality and applications // Linear and Multilinear Algebra. 2021. Vol. 70, No. 22, P. 7387–7413.
- [2] Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge University Press. 2019.

KRUŽKOV-TYPE UNIQUENESS THEOREM FOR THE CHEMICAL FLOOD CONSERVATION LAW SYSTEM

Rastegaev N. V. (Russia, Saint-Petersburg)
St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics
of the Russian Academy of Sciences
rastmusician@gmail.com

We consider the system

$$\begin{cases} s_t + f(s, c)_x = 0, \\ (cs + a(c))_t + (cf(s, c))_x = 0, \end{cases}$$

most commonly used to describe the flood of the oil reservoir with a chemical solution. The flow function f is commonly assumed to be S-shaped in s . The adsorption function a is often concave and usually represented by the Langmuir adsorption isotherm. In our work, we limit ourselves to functions f monotone in c .

This system is neither strictly hyperbolic nor genuinely non-linear, therefore known results for strictly hyperbolic genuinely non-linear systems of conservation laws are not directly applicable.

The solutions for some boundary-initial problems for this system were explored, for example, in [1] (Riemann problem), [2] and [3] (slug injection). The last two papers use the Lagrange coordinate transformation to split the equations and the characteristics method to construct solutions. However, the question of the uniqueness of the constructed solutions is not covered.

We use the proposed coordinate change to prove a Kružkov-type uniqueness theorem for the Cauchy problem with several limitations on the initial data and the class of weak solutions under consideration. The vanishing viscosity method is utilized to determine admissible shocks.

This talk is based on the joint work with S. G. Matveenko.

References

- [1] Johansen T., Winther R. The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding // SIAM journal on mathematical analysis, 1988, 19(3), pp. 541–566.
- [2] Pires A. P., Bedrikovetsky P. G., Shapiro A. A. A splitting technique for analytical modelling of two-phase multicomponent flow in porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2006, 51(1-2), pp. 54–67.
- [3] Ribeiro P. M., Pires A. P. The displacement of oil by polymer slugs considering adsorption effects // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2008, September, pp. SPE-115272.

GAUSSIAN AND POISSON SUSPENSIONS OVER SIDON AUTOMORPHISMS, ENTROPY INVARIANTS, AND FACTORS WITH LEBESGUE SPECTRUM

Ryzhikov V. V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
vryzh@mail.ru

Among the Sidon transformations preserving the sigma-finite measure there is a large class of automorphisms T with singular spectrum whose convolution powers are Lebesgue [5]. The corresponding Gaussian automorphisms $G(T)$ and Poisson suspensions $P(T)$ (see [1]-[3]) have zero entropy, and their spectra contain singular and Lebesgue components. For the above T the properties of $G(T)$ and $P(T)$ can be very different: for example, Gaussian automorphisms are infinitely divisible, hence, $G(T)$ have large centralizers, while $P(T)$ have the trivial ones (this follows from [3],[4]). The even factors $G_{ev}(T)$ (see [2]) of such Gaussian automorphisms are spectrally isomorphic: their spectra are Lebesgue of infinite multiplicity. *What non-spectral invariants of these factors can distinguish them?* This question leads us to the entropy invariants.

Kirillov-Kushnirenko P-entropy. Let $P = \{P_j\}$ be a sequence of finite subsets in a countably infinite group G . For a measure-preserving action $S = \{S_g\}$ of the group G , we define

$$h_j(S, \xi) = \frac{1}{|P_j|} H \left(\bigvee_{p \in P_j} S_p \xi \right),$$

$$h_P(S, \xi) = \limsup_j h_j(S, \xi),$$

$$h_P(S) = \sup_{\xi} h_P(S, \xi),$$

where ξ denotes a finite measurable partition of the space X , and $H(\xi)$ is the entropy of the partition ξ :

$$H(\{C_1, C_2, \dots, C_n\}) = - \sum_{i=1}^n \mu(C_i) \ln \mu(C_i).$$

Consider the following particular case $G = Z$, when P_j are growing progressions: $P_j = \{j, 2j, \dots, L(j)j\}$, for some sequence $L(j) \rightarrow \infty$.

If $h_P(S, \xi) > 0$ for all non-trivial partitions ξ , then according [6] we say that S has *completely positive P -entropy*.

Theorem 1. *For any automorphism S of zero entropy for some sequence P of growing progressions $h_P(S) = 0$ and there is a Sidon automorphism T such that*

(i) *the Poisson suspension $P(T)$ has completely positive P -entropy, and its centralizer is trivial;*
(ii) *the corresponding Gaussian automorphisms $G(T)$ has no factors with singular spectrum, but spectrum of $G(T)$ has the singular component, the centralizer of $G(T)$ is large;*

(iii) *the even factor $G_{ev}(T)$ of $G(T)$ has completely positive P -entropy and Lebesgue spectrum;*

Corollary. *There is an uncountable family of Sidon automorphisms T such that the corresponding pairwise non-isomorphic even factors $G_{ev}(T)$ have the same spectrum and different entropy properties.*

References

- [1] Kornfeld I. P., Sinai Ya. G., Fomin S. V. Ergodic theory, Nauka, M., 1980.
- [2] Newton D., Parry W., On a factor automorphism of a normal dynamical system // Ann. Math. Stat. 37 (1966), 1528-1533.
- [3] Parreau F., Roy E. Prime Poisson suspensions // Ergodic Theory Dynam. Systems. 35:7 (2015), 2216-2230.
- [4] Ryzhikov V. V., Thouvenot J.-P. On the centralizer of an infinite mixing Rank-one transformation // Funct. Anal. Appl. 49:3 (2015), 230-233.
- [5] Ryzhikov V. V. Polynomial rigidity and spectrum of Sidon automorphisms, preprint, arXiv:2310.10370 (2023).
- [6] Ryzhikov V. V., Thouvenot J.-P. Quasi-similarity, entropy and disjointness of ergodic actions // Funktsional. Anal. i Prilozhen. 58:1 (2024), 117-124.

FAST PERFORMANCE OF A GROUP OF CONTROLLED OBJECTS OF VARIABLE COMPOSITION

Saburova S. P. (Russia, Moscow)

Moscow Aviation Institute (National Research University)

saburova.serafima.mai@gmail.com

The problem of fast performance of a group of controlled objects of variable composition is considered [1-3]. The motion is started by one composite control object (carrier). It moves rectilinearly with limited acceleration and velocity. At some moment of time several simple objects are separated from it and are directed to the specified terminal states (targets). The movement of each simple object is rectilinear with limited acceleration and velocity, and the maximum velocity of the simple object is less than the maximum velocity of the composite object. Rotations of control objects are performed at the moment of stopping, i.e. at zero linear velocity. The rotation time proportional to the angle value is taken into account in the minimised functional.

The optimal control of rectilinear motion is found using the maximum principle. The point of separation of objects is determined approximated as a result of numerical optimisation on densifying meshes in the state space.

The algorithm for solving the problem is developed for plane motion of a group of controlled objects. The programme implementing the proposed algorithm is written in Python language in PyCharm environment. It allows to obtain an approximate solution of the problem, to graphically represent optimal trajectories of the group movement, to calculate the time of goal achievement. The effectiveness of the programme is demonstrated on examples of multi-target fast performance of a group of moving objects. A graphical shell is developed with QtDesigner to simplify data entry for the task.

References

- [1] Kalyaev I. A., Gaiduk A. R., Kapustyan S. G. Models and algorithms of collective control in groups of robots. Moscow: Fizmatlit, 2009.

- [2] Kurzhansky A. B. The task of the group motion control. General relations // Dokl. RAS. 2009. Vol 426. № 1. P. 20-25.
- [3] Bortakovskiy, A.S. Fast performance of a group of controlled objects (in Russian) // Izv. RAS. TISU. 2023. № 5. P. 51-77.

SUB-LORENTZIAN STRUCTURES ON MARTINET FLAT DISTRIBUTION¹⁶

Sachkov Yu. L. (Russia, Pereslavl-Zalessky)
 Ailamazyan Program Systems Institute of RAS
yusachkov@gmail.com

Two sub-Lorentzian problems on the Martinet flat distribution are studied. For the first one, the attainable set has a nontrivial intersection with the Martinet plane, but for the second one it does not. Attainable sets, optimal trajectories, sub-Lorentzian distances and spheres are described.

References

- [1] Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I. Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1997, v.2, P. 377–448.
- [2] Grochowski M. Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 50 (2002).
- [3] Sachkov Yu. L., Sachkova E. F. Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group, Journal of Dynamical and Control Systems volume 29, pages 1129–1159 (2023).

LOCALIZED TRAJECTORIES IN VICINITY OF UNSTABLE EQUILIBRIUM POSITION

Salnikova T. V. (Russia, Moscow)
 Lomonosov Moscow State University
tatiana.salnikova@gmail.com

Kugushev E. I. (Russia, Moscow)
 Lomonosov Moscow State University
kugushevei@yandex.ru

In this research we consider the situation when a mechanical system with $n > 1$ degrees of freedom has a non-degenerate Lyapunov unstable equilibrium position, the degree of instability of which ν lies within $1 \leq \nu \leq n - 1$. We prove the existence of localized solutions in small vicinity of equilibrium position. We define as localized solutions those solutions that begin at the boundary of the region of possible motion, determined by the corresponding small positive initial value of the total energy of the system, and in further motion do not leave this vicinity. For natural systems with two degrees of freedom, localized motions are periodic, similar to the result of the corresponding theorem for Lyapunov systems. In the general case, our proof does not require the conditions of non-resonance of purely imaginary roots of the characteristic equation and the presence of an analytical first integral of the dynamical system. With addition of gyroscopic forces and of dissipative forces (with or without complete dissipation), and possibly time-dependent ones, the existence of localized motions is also proven. An example of a problem that falls into the class of systems considered in our study may be the movement of a point along the surface of a hyperbolic paraboloid in a gravity field. To prove the following theorem, the topological Ważewski method applying the concept of retract is used [1]. Let us present the theorem for the case of two degrees of freedom.

Theorem 1. *Consider mechanical system with generalized coordinates $q = (q_1, q_2)$. Let $q = 0$ – non-degenerate and Lyapunov unstable equilibrium position, its degree of instability $\nu = 1$. Let gyroscopic forces are small. Then for any sufficiently small $\varepsilon > 0$ il exist $h_0 > 0$, such that for any $h : 0 \leq h \leq h_0$ il exist solution $q(t)$, with initial energy h , which will be always in the area $q_1^2 + q_2^2 < \varepsilon$.*

¹⁶Work supported by Russian Scientific Foundation, grant 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>.

A discussion of localization time is given in the following theorem.

Theorem 2. *Let us fix the energy level h and consider the motions that begin on that part of the boundary of the region of possibility of motion that lies in the vicinity of unstable equilibrium position. If localized motion exists, then for any large time $T > 0$, in the vicinity of this motion there are the trajectories that do not leave the vicinity of equilibrium during the time T . The measure of such trajectories is different from zero.*

As an example of application of the presented theorems, consider the planar restricted circular three-body problem. On rotating orbital plane associated with two massive mutually gravitating bodies, three of the five relative equilibrium positions of a small-mass body – collinear libration points – have degree of instability 1. Numerical analysis of localized motions in the vicinity of these points illustrates the proven theorems.

References

- [1] Reissig D., Sansone G., Conti R. Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen. Roma: Edizioni Cremonese. 1963.

ON MORSE-SMALE DIFFEOMORPHISMS ON SIMPLY CONNECTED MANIFOLDS¹⁷

Saraev I. A. (Russian Federation, Nizhny Novgorod)
National Research University «Higher School of Economics»
ilasaraev34@gmail.com

We say that a Morse–Smale diffeomorphism $f : M^n \rightarrow M^n$ belongs to a class $G(M^n)$, if f has no any saddle periodic points with one-dimensional unstable manifolds, and for any periodic point σ of Morse index $(n - 1)$ its unstable manifolds do not intersect stable invariant manifolds of saddle periodic points different from σ .

Theorem 1. *Let M^n be a closed manifold, $n \geq 4$, and $f \in G(M^n)$. Then M^n is simply connected.*

Let us remark that for $n \in 2, 3$, the unique simply connected manifold is sphere S^3 . For $n \geq 4$, there are numerous simply connected manifolds not homeomorphic to sphere (for instance, $S^k \times S^l$, $k, l \geq 2, k + l = n$), but a complete classification of simply connected manifolds is known only for $n = 4$ due to non-trivial results of Rochlin, Freedman, Donaldson and Furuta (see a book [1]).

It follows from Morse inequalities that if $k_1 = 0$, then a one-dimensional homology group $H_1(M^n)$ of manifold M^n is trivial. However, it does not mean that the fundamental group $\pi_1(M^n)$ of M^n is trivial. To proof Theorem 1, we obtain the following topological version of well known smooth result that can be of independent interest:

Proposition. *Let Q^{n-1} , M^n be closed topological manifolds, Q^{n-1} is simply connected and locally flat in M^n . Then there exists an embedding $e : Q^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow M^n$ such that $e(Q^{n-1} \times \{0\}) = Q^{n-1}$.*

Aknowledgements. The author thanks E.Y. Gurevich for setting the problem and fruitful discussions.

References

- [1] Skorpan A. The Wild World of 4-Manifolds // American Mathematical Society. 2005.

¹⁷The work is an output of the research implemented as a part of the Program «Research Foundation of the National Research University Higher School of Economics (NRU HSE)» in 2024 (project No 23-00-028).

Shcheglova A. P. (Russia, Saint Petersburg)
 Saint Petersburg Electrotechnical University
 Saint Petersburg State University
apshcheglova@etu.ru

Let B be the unit ball in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), $q > 1$, $\alpha > 0$ and $s \in (0, 1)$. We consider the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + u = |x|^\alpha u^{q-1} & \text{in } B, \\ u > 0 & \text{in } B. \end{cases} \quad (1)$$

Here the spectral fractional Neumann Laplacian $(-\Delta)^s$ is the self-adjoint operator restored from the quadratic form

$$[u]_B^2 \equiv ((-\Delta)^s u, u)_B := \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j^s (u, \varphi_j)_B^2,$$

where μ_j and φ_j are, respectively, eigenvalues and orthonormal eigenfunctions of the Neumann Laplacian in B . It is known that for $s \in (0, 1)$ the domain of this quadratic form coincides with the Sobolev–Slobodetskii space $H^s(B)$.

A problem similar to (1) for the Hénon type equation driven by p -Laplacian operator was considered in [1].

We consider a functional

$$Q_{q,\alpha}(u) = \frac{[u]_B^2 + \|u\|_{L^2(B)}^2}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx\right)^{2/q}}$$

defined on $H^s(B)$. Its minimizer, under proper normalization, is a weak (generalized) solution of the problem (1).

We show that for $q \in \left[1; \frac{2(n+\alpha)}{n-2s}\right)$ the embedding of the subspace of radial functions in $H^s(B)$ into the weighted space $L^q(B, |x|^\alpha dx)$ is compact. So it means that the problem (1) has a positive radial solution.

Theorem 1. *Let $s > 1/2$, $q \in \left(\frac{2(n-1)}{n-2s}, \frac{2n}{n-2s}\right)$. There exists $\hat{\alpha}(s, q)$ such that for any $\alpha > \hat{\alpha}$ the minimizer of $Q_{q,\alpha}$ over the whole space $H^s(B)$ isn't a radial function. So, the problem (1) has a nonradial positive solution.*

Theorem 2. *Let $s > 1/2$. There exists $\tilde{q}(s) > 2$ such that for any $q \in (2, \tilde{q})$ positive radial solution of (1) is a local minimizer of $Q_{q,\alpha}$ for any α sufficiently large.*

Conjecture: the statement of Theorem 2 holds for all $q \in \left(2, \frac{2(n-1)}{n-2s}\right)$.

References

- [1] Shcheglova A. The Neumann problem for the generalized Hénon equation // J. Math. Sci. 2018. Vol. 235. No. 3. P.360-373.

DEEP WAVE EQUATION MODELING
WITH QUASICLASSICAL VARIATIONAL PRINCIPLE¹⁸

Shorokhov S. G. (Russia, Moscow)
RUDN University
shorokhov-sg@rudn.ru

In recent years, artificial neural networks demonstrated significant success in modeling solutions to boundary value problems for various partial differential equations. When training such neural networks, the residuals functional is usually used as a loss functional [1], however, quasiclassical functionals from variational formulations for nonpotential operators [2] can also be used for neural networks training, provided that the quasiclassical functional can be estimated using Monte Carlo integration.

We study the problem of constructing a loss functional based on the quasiclassical variational formulation of the boundary value problem for one-dimensional wave equation

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, (x, t) \in \Omega = [0, \pi] \times [0, \pi] \quad (1)$$

with boundary conditions

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=\pi} = \chi(t). \end{cases} \quad (2)$$

(complete statement of problem (1)-(2) indicating classes of the solution u and boundary functions φ, ψ, χ is given in [3]).

Quasiclassical variational formulation of the boundary value problem (1)-(2) can be obtained using the method of symmetrizing operator by V.M. Shalov [4], [5].

Based on the approach by V.M. Filippov [3], the following statement is proven.

Theorem. *The variational functional for the boundary value problem (1)-(2) can be written in the form*

$$D[u] = \int_{\Omega} (u^2(x, t) + (\Theta(x, t) - 2\Phi(x, t)) u(x, t)) dxdt, \quad (3)$$

$$\Theta(x, t) = \begin{cases} \Psi(x+t) - \Psi(x-t), & x \in (0, \pi), t > 0, t < x, t < \pi - x, \\ \Psi(2\pi - x - t) - \Psi(x-t), & t \in (0, \pi), x < \pi, x > t, x > \pi - t, \\ \Psi(2\pi - x - t) - \Psi(0), & x \in (0, \pi), t < \pi, t > x, t > \pi - x, \\ \Psi(x+t) - \Psi(0), & t \in (0, \pi), x > 0, x < t, x < \pi - t, \end{cases}$$

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \varphi(x+t), & x+t < \pi, \\ \chi(x+t-\pi), & x+t > \pi, \end{cases} \quad \Psi(\xi) = \varphi(\xi) - \int_0^{\xi} \psi(\lambda) d\lambda.$$

Functional (3) does not contain derivatives of unknown function $u(x, t)$, can be estimated using Monte Carlo integration method (with sampling from Ω) and can be used for training of a neural network that approximates the solution of the boundary value problem (1)-(2).

References

- [1] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P.686-707.
- [2] Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G. Variational principles for nonpotential operators // J. Math. Sci. 1994. Vol. 68. No 3. P.275-398.
- [3] Filippov V.M. A variational method for solving boundary value problems for the wave equation // Differ. Uravn. 1984. Vol. 20. No 11. P.1961-1968.

¹⁸This publication has been supported by the RUDN University named after Patrice Lumumba, project No 002092-0-000.

- [4] Shalov V. M. A generalization of the spaces of K. Friedrichs // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1963. Vol. 151. No 2. P.292-294.
- [5] Shalov V. M. Solution of nonselfadjoint equations by a variational method // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1963. Vol. 151. No 3. P.511-512.

APPROXIMATE LIPSCHITZ STABILITY FOR PHASELESS INVERSE SCATTERING
WITH BACKGROUND INFORMATION

Sivkin V. N. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
sivkin96@yandex.ru

The talk is devoted to approximate Lipschitz stability estimates for monochromatic phaseless inverse scattering with background information in dimension $d \geq 2$. Moreover, these stability estimates are given in terms of non-overdetermined and incomplete data.

Related results for reconstruction from phaseless Fourier transforms are also given. This talk is based on article [1]. Prototypes of these estimates for the phased case were given in [2].

References

- [1] Sivkin V. Approximate Lipschitz stability for phaseless inverse scattering with background information // Journal of Inverse and Ill-posed Problems 31.3 (2023): 441-454.
- [2] Novikov R. Approximate Lipschitz stability for non-overdetermined inverse scattering at fixed energy // Journal of Inverse and Ill-posed Problems 21.6 (2013): 813-823.

GLOBAL CLASSICAL SOLUTIONS OF VLASOV–POISSON SYSTEM
AND KINETICS OF HIGH TEMPERATURE PLASMA¹⁹

Skubachevskii A. L. (Russia, Moscow)
RUDN University
alskubachevskii@yandex.ru

We consider the second mixed problem for the Vlasov–Poisson system in a half-space. This problem models the kinetics of high temperature plasma in a fusion reactor. If plasma reaches a boundary of the domain, it can lead to the destruction of the reactor. Therefore we study solutions of the above mentioned mixed problem such that the supports of density distribution functions of charged particles are located strictly inside the domain. For this purpose we use an external magnetic field. It will be obtained sufficient conditions for external magnetic field, which provide existence of global classical solutions having supports of density distribution functions inside the domain [1].

References

- [1] Skubachevskii A. L. On the Existence of Global Solutions for the Vlasov–Poisson System in a Half-space and Plasma Confinement // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 2., pp. 280–292.

¹⁹Sponsored by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, No. 075-15-2022-1115).

Söderbacka G. (Finland, Turku)
 Åbo Akademi University
gsoderba@abo.fi

After a transform the model we consider is transformed into

$$x'_i = m_i \frac{s - \lambda_i}{s + a_i} x_i, \quad (1a)$$

$$s' = \left(1 - s - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s + a_i} \right) s, \quad (1b)$$

Here the new variables are normalized populations of predators x_i and the prey s and the parameters are positive. We mainly consider the case for two predators, that is $i = 1, 2$.

For this system there is no equilibrium at which predators coexist (except in some non-generic cases). Thus any coexistence is described by cyclic or more complicated trajectories and we study the system using Poincaré maps.

In some cases the behaviour can be well approximated by iterates of one-dimensional maps. We discuss some known properties of these approximations and formulate some open questions for different families of maps. Both the maps and the original system can have two attractors for small ranges of parameters.

We also discuss the case when Poincaré maps cannot be approximated by one-dimensional maps and give some examples, where we have more than two coexisting attractors. We formulate some open problems about the structure and bifurcations of these attractors.

Most of known properties of this system are presented in the reference and references therein, but we also present some news from latest time.

References

- [1] Söderbacka G. J. Model map and multistability for a two predator–one prey system // Differential Equations and Control Processes. 2023. N 1. pp 12-23.

NONLINEAR ORBITAL STABILITY ANALYSIS OF PERIODIC MOTIONS EMANATING FROM HYPERBOLOIDAL PRECESSION OF A SYMMETRIC SATELLITE

Sukhov E. A (Russia, Moscow)
 Moscow Aviation Institute (National Research University)
sukhov.george@gmail.com

This work is devoted to studying the attitude motion of a dynamically symmetric rigid-body satellite in a central Newtonian gravitational field with its center of mass O moving in a circular orbit about the gravitating center G_0 . The attitude motion is described by Euler angles ψ, θ, φ introduced between the satellite's principal axes $Oxyz$ and an orbital reference frame $OXYZ$ as shown on Fig. 1-a.

Due to dynamical symmetry the coordinate φ becomes cyclic and the satellite rotates at a constant rate about its figure axis Oz . In this case there exist three particular types of motions known as Regular precessions [1]. Regular precessions are characterized by the axis Oz remaining stationary in respect to the orbital frame $OXYZ$ and describing a cylinder, a cone or a hyperboloid, respectively, in the absolute space. The axis Oz can also wobble periodically about a Regular precession (Fig. 1-b). It can be shown using Lyapunov's theory [2] that in a small neighborhood of a stable Regular precession there exist at least two families of these periodic motions: short-periodic ones with period $T_S = \frac{2\pi}{\omega_S}$ and long-periodic ones with period $T_L = \frac{2\pi}{\omega_L}$ where ω_S and ω_L are

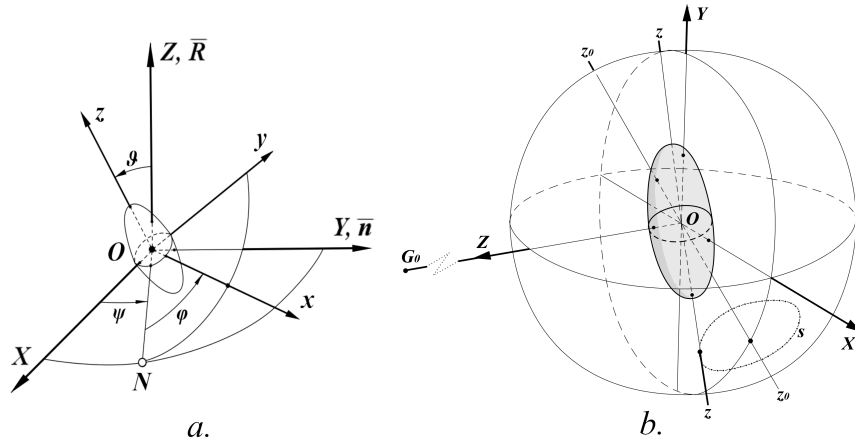


Fig. 1: Attitude coordinates ψ, θ, φ of the satellite (a) and its periodic motion in the neighborhood of a Regular precession (b). Here s is the trace of the figure axis Oz on the unit sphere and Oz_0 denotes the position of the figure axis in case of the precession.

frequencies of the linearized system. If the frequencies are in resonance there can exist additional families of long-periodic motions. Existence and linear orbital stability of these periodic motions was previously investigated in [3].

In this work the nonlinear orbital stability problem for periodic motions originating from the satellite's Hyperboloidal precession in case of third-order resonance is considered. The nonlinear analysis is conducted using the novel method proposed in [4]. This method is based on introducing local coordinates in the neighborhood of the periodic motion and reducing the initial 2DOF problem to a 1DOF one. This allows to draw conclusions on the orbital stability by analyzing the stability of a stationary point of the phase flow generated by the reduced system [5]. An algorithm implementing the method was proposed [6]. It is employed in this work to construct the orbital stability diagrams of the considered periodic motions in the problem's parameter space.

References

- [1] Beletskiy V. V. Motion of a satellite in relation to its center of mass in gravitational field, Moscow: MSU publishing, 1982 (in Russian).
- [2] Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion. London: Francis & Taylor, 1992.
- [3] Sukhov E. A. Bifurcation Analysis of Periodic Motions Originating from Regular Precessions of a Dynamically Symmetric Satellite // Russian J. of Nonlinear Dyn. 2019. Vol. 25. No 4. P.593–609.
- [4] Bardin B. S. Method of Introduction of Local Variables in a Neighborhood of Periodic Solution of a Hamiltonian system with Two Degrees of Freedom // Regul. Chaotic Dyn. 2023. Vol. 28. No 6. P.878–887.
- [5] Markeev A. P. Stability of Equilibrium States of Hamiltonian Systems: A Method of Investigation // Mech. Solids. 2004. Vol. 39. No 6. P.1–8.
- [6] Bardin B. S., Sukhov E. A., Volkov E. V. Nonlinear Orbital Stability of Periodic Motions in the Planar Restricted Four-Body Problem // Russian J. of Nonlinear Dyn. 2023. Vol. 19. No 4. P.545–557.

EXISTENCE AND RELAXATION OF BV SOLUTIONS FOR A SWEEPING PROCESS WITH PROX-REGULAR SETS

Tolstonogov A. A. (Russia, Irkutsk)

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
alexander.tolstonogov@gmail.com

We study a discontinuous sweeping process involving prox-regular sets and a multivalued perturbation in a separable Hilbert space. The variation of the moving set is controlled by a positive

(F4_i) there exist functions $\mu_i \in L^p_+$, $i = 1, \dots, n$ such that for each bounded set $\Omega \subset E$ we have $\mathcal{X}(F(t, \Omega)) \leq \mathcal{M}(t)\mathcal{X}(\Omega)$ a.e. $t \in (0, T)$, where $\mathcal{M}(t)$ has the form:

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n(t) \end{pmatrix}$$

We consider the problem on the existence of mild solutions $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ of system (1) satisfying initial conditions

$$x_1(0) = x_{01} \in E_{01}, \dots, x_n(0) = x_{0n} \in E_{0n}. \quad (2)$$

We can formulate now the following existence result for problem (1), (2).

Theorem 1. *Under conditions (A1_i), (A2_i), (F1_i), (F2_i), (F3_i), (F4_i) the set of all mild solutions of system (1)-(2) is nonempty and compact.*

Denote $\mathcal{C} = C([0, T]; E)$, $\mathcal{C}_i = C([0, T]; E_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Theorem 2. *Under conditions (A1_i), (A2_i), (F1_i), (F2_i), (F3_i), (F4_i) the set of all mild solutions of system (1)-(2) is an R_δ -subset of \mathcal{C} , i.e., it can be presented as the intersection of a decreasing sequence of compact, contractible sets.*

References

- [1] Obukhovskii V., Zecca P. On semilinear differential inclusions in Banach spaces with nondensely defined operators // J. Fixed Point Theory Appl. 2011. Vol. 9, No. 1. P. 85-100.

A GENERALIZATION OF THE HARDY INEQUALITY

Ustinov N. S. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
ustinnns@yandex.ru

Let $n, m \geq 1$, and let P and D be $(n \times n)$ -matrices with real entries, skew symmetric and symmetric respectively; $b \in \mathbb{R}$ is a parameter. We consider the Hardy-type functional

$$\mathcal{I}[u] := \int_{\mathbb{R}^m} [|x|^2 |\nabla u|^2 - 2b \langle Pu, \nabla u \cdot x \rangle + \langle Du, u \rangle] |x|^{2\gamma} dx. \quad (1)$$

In this talk we provide the criterion for nonnegativity of the functional (1):

Theorem 1. *Let $\gamma > -\frac{m}{2}$. The necessary and sufficient condition of nonnegativity of the functional $\mathcal{I}[u]$ on the set $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n)$ consists of two inequalities:*

$$D + \frac{(m+2\gamma)^2}{4} I \geq 0; \quad |b| \leq b_0 := \min_{y \in \mathbb{C}^n: \langle Py, y \rangle \neq 0} \frac{\sqrt{\langle (D + \frac{(m+2\gamma)^2}{4} I)y, y \rangle \langle y, y \rangle}}{|\langle Py, y \rangle|}. \quad (2)$$

In the case $b = 0$ the first inequality in (2) coincides with the condition for the classical Hardy inequality. For $n = 2$ the necessary and sufficient conditions (2) were given explicitly in [1].

The talk is based on the joint work with A.I. Nazarov [2].

References

- [1] Dmitruk A. V. Nonnegativity Criterion for a Degenerate Quadratic Form with Two-Dimensional Control // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 110 (2006), 49–75 (in Russian); J. Math. Sci., 121(2) (2004), 2137–2155 (in English).
- [2] Nazarov A. I., Ustinov N. S. A generalization of the Hardy inequality // Zap. Nauchn. Sem. POMI, 477 (2018), 112–118 (in Russian); J. Math. Sci., 244(6) (2020), 998–1002 (in English).

Volkov B. O. (Russia, Moscow)

Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies,
 Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
 Quantum Engineering Research and Education Center,
 National University of Science and Technology MISIS
borisvolkov1986@gmail.com

Quantum control is an important tool for quantum technologies development [1]. A typical quantum control problem can be often formulated as a problem maximizing the objective functional. This objective functional is determined by the state of the quantum system. A trap in a quantum control landscape is a point of local but not global optimum of the objective functional. In more general sense, traps are controls from which it is difficult to escape by local search optimization methods. Studying quantum landscapes for the presence or absence of traps is an important problem in the theory of quantum control [2]. It is known that there are no traps for case of the control of a one qubit [3,4]. Trapping behavior can arise in the quantum landscapes of problems of controlling of multi-level quantum systems [5]. The notion of the n -th order trap, defined by the Taylor expansion of the objective functional up to the n -th order, was introduced in [6,7]. In [6,7], it was shown that the constant zero control is the third order trap for the case of the control of the three-level Λ -atom system. We show that constant zero control is the trap of the order $(2N - 3)$ for the N -level controllable quantum systems with the "chained" interaction Hamiltonian [8]. We also show that that constant zero control is the trap of the seventh order for the case of the control of the three-level degenerate Ξ quantum system [9].

References

- [1] Koch C.P., Boscain U., Calarco T., Durr G., Filipp S., Glaser S.J., Kosloff R., Montangero S., Schulte-Herbrüggen T., Sugny D., Wilhelm F.K. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe // EPJ Quantum Technol. 2022. Vol. 9. P. 19.
- [2] Rabitz H. A., Hsieh M. M., Rosenthal C. M. Quantum optimally controlled transition landscapes // Science. 2004. Vol. 303. No 5666. P. 1998–2001.
- [3] Pechen A. N., Il'in N. B. Coherent control of a qubit is trap-free // Proc. Steklov Inst. Math. 2014 Vol. 285. No 1. P. 233–240.
- [4] Volkov B. O., Morzhin O. V., Pechen A. N., Quantum control landscape for ultrafast generation of single-qubit phase shift quantum gates // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54. No 21. P. 215303.
- [5] de Fouquieres P., Schirmer S. G., A closer look at quantum control landscapes and their implication for control optimization // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2013. Vol.16. No 3. P. 1350021.
- [6] Pechen A. N., Tannor D. J, Are there traps in quantum control landscapes? // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 120402.
- [7] Pechen A. N., Tannor D. J, Quantum control landscape for a Lambda-atom in the vicinity of second-order traps // Israel Journal of Chemistry. 2012. Vol. 52. P. 467–472.
- [8] Volkov, B.O., Pechen, A.N., Higher-order traps for some strongly degenerate quantum control systems // Russian Math. Surveys. 2023. Vol.78. No 2. P. 390–392.
- [9] Volkov B. O., Miachkova A. A., Pechen A. N., Degeneracy in Λ -type quantum systems leads to a stronger trapping behaviour (in preparation)

²⁰The work is partially supported by the project of the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00330 and "Priority 2030" federal leadership program.

Woldeab M. S. (Russia, Vladimir)

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
mebseb2018@gmail.com

A population dynamic in the absence of exploitation is given by a system of ordinary differential equations and at certain time of moment, part of the population, is extracted from resources. Conditions are obtained to estimate the upper bounds and the lower bounds of the average time benefit from resource extraction for some models. The result obtained here is illustrated with an example of competition model and could be applied to other various models of population dynamics ([1], [2]).

Let us consider a population model whose dynamics in the absence of exploitation is given by a system of differential equations

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

We assume that at time $\tau(k) = kd$, where $d > 0$, some share of a renewable resource

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

is extracted from the population, which leads to an instant decrease in its quantity. If $n = 1$, then the population is called homogeneous. For $n \geq 2$ the population is structured, that is, either it consists of individual species x_1, \dots, x_n , or divided into n age groups. Note that, $u_i(k)$ indicates the share of the resource i -th type removed from the population at the time kd .

Thus, we consider an exploited population whose dynamics is given by a controlled system with an impulse action

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \quad x_i(kd) = (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \quad (1)$$

where $x_i(kd - 0)$ and $x_i(kd)$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$ are the amount of resource of the i -th type before and after harvesting at time kd respectively. We assume that the solutions of the system $\dot{x} = f(x)$ are right continuous and the functions $f_1(x), \dots, f_n(x)$ are defined and continuously differentiable for all $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Let us denote by $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$ the solution of the system $\dot{x} = f(x)$ (without impulse influence) satisfying the initial condition $\varphi(0, x) = x$, where $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}_+^n$. We assume that the solution $\varphi(t, x)$ is non-negative for any non-negative initial conditions.

Let $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ be the amount of resource of the i -th type before harvesting at the time kd , $k = 1, 2, \dots$, $x(0)$ is the initial amount and $C_i \geq 0$ is the resource cost of the i -th type. Then the total cost of the harvested resource at the moment kd is given by $Y(k) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) u_i(k)$.

Definition 1. Let $\bar{u} \doteq (u(1), \dots, u(k), \dots) \in [0, 1]^\infty$. The average time benefit from resource extracting is given by the function H as follows.

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Consider a population whose dynamics is given by the system (1). Note that $X(1) = \varphi(d, x(0))$, therefore $X_i(1) = \varphi_i(d, x(0))$, $i = 1, \dots, n$.

Let us introduce the following functions: $D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$ and $L(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$.

Theorem 1 ([1]). We assume that the function $D(x)$ attains its maximum value at $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ and $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ for all $i = 1, \dots, n$. Then for any $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ such that $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, the maximum value of the function $H_*(\bar{u}, x(0))$ will be

$$H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*) = \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x^*) - x_i^*)$$

on the set U with the following exploiting mode:

$$u^*(1) = \left(1 - \frac{x_1^*}{X_1(1)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{X_n(1)}\right);$$

$$u^*(k) = \left(1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x^*)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{\varphi_n(d, x^*)}\right), \quad k \geq 2.$$

Lemma 1 ([1]). Let $d > 0$ be fixed. Then

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n} D(x) \leq d \cdot \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} L(x).$$

Example 1. Let's consider a model of competition of two species x_1 and x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c_1 - a_1x_1 - b_1x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c_2 - a_2x_2 - b_2x_1)x_2, \end{cases}$$

where $a > b$. By virtue of the theorem 1, the average time benefit for any $\bar{u} \in U$ is estimated from above

$$H(\bar{u}, x(0)) \leq H(\bar{u}^*, x(0)) \leq D(x^*) \leq c^2 d \cdot \max\left\{\frac{C_1 C_2 (C_1 + C_2)(a - b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}, \frac{C_1}{4a}, \frac{C_2}{4a}\right\}.$$

Moreover, by choosing a control $\bar{u} \in U$, it is possible to estimate the function H , for certain values $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ as follows,

$$H(\bar{u}, x(0)) \geq \max\left\{\frac{C_1}{a}, \frac{C_2}{a}, \frac{C_1 + C_2}{a + b}\right\} \frac{c(e^{cd/2} - 1)}{e^{cd/2} + 1}.$$

References

- [1] Woldeab M. S., Rodina L. I. About the methods of biological resource extraction, that provide the maximum average time benefit // Russian Mathematics. 2022. Vol. 66. No 1. P. 12–24.
- [2] Rodina L. I., Woldeab M. S. On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial conditions // Differential equations. 2023. Vol. 59. No. 8. P. 1025–1031.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Абрамова Е. В. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет "МЭИ"

AbramovaYV@mpei.ru

Унучек С. А. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет "МЭИ"

UnuchekSA@mpei.ru

Пусть $h > 0$ и $l_{2,h}(\mathbb{Z})$ – пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2}$. Операторы разделенных разностей определяются равенствами $\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1} - x_j}{h}\right\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\Delta_h^m x = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} x)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности k_1, k_2, \dots, k_n порядков ($0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$), то есть известны последовательности y_1, y_2, \dots, y_n такие, что $\|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k -той разделенной разности

$\Delta_h^k x$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$. Погрешностью метода назовем величину

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \bar{Y} \in (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x - \varphi(\bar{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\bar{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Погрешностью оптимального восстановления назовем значение экстремальной задачи

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}) = \inf_{\varphi: (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}, \varphi),$$

а метод $\hat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань – оптимальным методом.

Пусть $k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$, $\delta > 0$. Положим

$$M = co \{(k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \leq j \leq n\} + \left\{ \left(t, t \ln \frac{h}{2} \right) : t \geq 0 \right\},$$

где $co A$ обозначает выпуклую оболочку множества A . Пусть функция $\theta \cdot$ на промежутке $[0, +\infty)$ задана равенством $\theta(k) = \max\{x : (k, x) \in M\}$, где $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_r}$ – точки излома. Обозначим

$$\hat{\lambda}_{s_j L} = \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2 \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}, \hat{\lambda}_{s_j R} = \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2 \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}, t(\omega) = \left(\frac{2 \sin \frac{h\omega}{2}}{h} \right)^2.$$

Теорема 1. Для любого $k \geq 0$ погрешность оптимального восстановления равна $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}) = e^{-\theta(k)}$.

1. Если $k_1 > 0$, $0 \leq k < k_1$, то любой метод является оптимальным;
2. если $k = k_{s_j}$, $1 \leq j \leq r$, то метод $\hat{\varphi}$ такой, что $\hat{\varphi}(\bar{Y}) = y_{s_j}$, является оптимальным;
3. если $r \geq 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq r - 1$, то любой метод вида $\hat{\varphi}(\bar{Y}) = \beta_{s_{jL}} * y_{s_j} + \beta_{s_{jR}} * y_{s_{j+1}}$ является оптимальным, где $\beta_{s_{jL}}, \beta_{s_{jR}}$ – последовательности, преобразование Фурье которых удовлетворяет условиям:

$$\left| (F\beta_{s_{jL}})(\omega) - \frac{\hat{\lambda}_{s_{jL}} \left(\frac{e^{ih\omega} - 1}{h} \right)^{k - k_{s_j}}}{\hat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}(\omega) + \hat{\lambda}_{s_{jL}}} \right| \leq \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{s_{jL}} \hat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k - k_{s_{j+1}}}(\omega)}}{\hat{\lambda}_{s_{jR}} + \hat{\lambda}_{s_{jL}} t^{k_{s_j} - k_{s_{j+1}}}(\omega)} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_{s_{jL}} t^{k_{s_j} - k}(\omega) + \hat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k_{s_{j+1}} - k}(\omega) - 1},$$

$$(F\beta_{s_{jR}})(\omega) = \left(\frac{e^{ih\omega} - 1}{h} \right)^{k - k_{s_{j+1}}} - \left(\frac{e^{ih\omega} - 1}{h} \right)^{k_{s_j} - k_{s_{j+1}}} \alpha_{s_{jL}}(\omega).$$

4. если $k > k_{s_r}$, то метод $\hat{\varphi}$ такой, что $\hat{\varphi}(\bar{Y}) = \Delta_h^{k - k_{s_r}} y_{s_r}$, является оптимальным.

Литература

- [1] Абрамова Е. В., Унучек С. А. Некоторые задачи теории оптимального восстановления // Вестник МЭИ. 2024. В печати.
- [2] Унучек С. А. Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям // Математический форум (Итоги науки. Юг России), Владикавказ. 2016. Т. 10. №1. С. 215–225.

- [3] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сборник. 2009. Т. 200. № 5. С. 37–54.
- [4] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. 2012. Т. 92. №1. С. 59–67.
- [5] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений по неточным измерениям // Проблемы математического анализа. 2013. Т. 69. С. 47–54.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВОЗМУЩЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Аваков Е. Р. (Россия, Москва)

Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН

eramag@mail.ru

Магарил-Ильяев Г. Г. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

georgii.magaril@math.msu.ru

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$f(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad g(x(t_0), x(t_1)) = 0 \quad (2)$$

на пространстве пар $(x, u) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$, где отображение $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ переменных t, x и u непрерывно вместе со своей частной производной по x , отображения $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ и $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ переменных $\zeta_i \in \mathbb{R}^n, i = 0, 1$, дифференцируемы, U — непустое подмножество \mathbb{R}^r .

Определим *множество достижимости* для системы (1), (2) относительно открытого множества $V \subset C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$: $R(V) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \mid \exists (x, u) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r) : \text{выполнено (1), } f(x(t_0), x(t_1)) \leq y_1, g(x(t_0), x(t_1)) = y_2, x \in V\}$.

Скажем, что система (1), (2) *управляема относительно функции* $\hat{x} \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ *и ее окрестности* V , если справедливо включение $0 \in \text{int } R(V)$.

Важно отметить, что здесь функция \hat{x} не обязана быть допустимой траекторией для системы (1), (2), но, как нетрудно видеть, из управляемости следует, что V содержит и допустимые траектории для этой системы.

Ранее авторами было введено понятие *локальной управляемости* системы (1), (2) относительно функции $\hat{x} \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, которое отличается от приведенного тем, что включение $0 \in \text{int } R(V)$ должно выполняться для любой окрестности V функции \hat{x} .

Наша цель — получить достаточные условия управляемости относительно функции \hat{x} не только для исходной системы (1), (2), но и для “близких” к ней систем.

Сопоставим системе (1), (2) следующую выпуклую управляемую систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \varphi(t, x, u_i(t)), \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{A}_k, \quad \bar{u} \in \mathcal{U}^k, \quad f(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad g(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad (3)$$

где $\mathcal{A}_k = \{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (L_\infty([t_0, t_1]))^k : \bar{\alpha}(t) \in \Sigma^k \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1]\}$, $\Sigma^k = \{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$ и $\mathcal{U} = \{u \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r) : u(t) \in U \text{ для п. в. } t \in [t_0, t_1]\}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и тройка $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$, где $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k)$ и $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_k)$, допустима для выпуклой системы (3). Обозначим через $\Lambda(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$ множество наборов $(\lambda_f, \lambda_g, p) \in (\mathbb{R}^{m_1})_+^* \times (\mathbb{R}^{m_2})^* \times AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\dot{p}(t) = -p(t) \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i(t) \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}_i(t)), \quad p(t_0) = \hat{f}_{\zeta_0}^* \lambda_f + \hat{g}_{\zeta_0}^* \lambda_g, \quad p(t_1) = -\hat{f}_{\zeta_1}^* \lambda_f - \hat{g}_{\zeta_1}^* \lambda_g,$$

$$\langle \lambda_f, f(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \rangle = 0,$$

$$\max_{u \in U} \langle p(t), \varphi(t, \hat{x}(t), u) \rangle = \langle p(t), \hat{x}(t) \rangle \text{ п. в. на } [t_0, t_1].$$

Пусть $\rho > 0$, $\Delta(\rho) = \{(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U : |x - \hat{x}(t)| \leq \rho, t \in [t_0, t_1]\}$ и $B(\rho)$ — замкнутый шар в \mathbb{R}^{2n} с центром в точке $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ радиуса ρ .

Обозначим $\mathcal{L} = C(\Delta(\rho), \mathbb{R}^n) \times C(B(\rho), \mathbb{R}^{m_1}) \times C(B(\rho), \mathbb{R}^{m_2})$ (произведение пространств непрерывных ограниченных отображений с \sup -нормой).

Сопоставим любой тройке непрерывных отображений $(\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{g}): \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ систему вида (1), (2), в которой отображения φ, f и g заменены соответственно на отображения $\tilde{\varphi}, \tilde{f}$ и \tilde{g} . Будем говорить о такой тройке как о системе $(\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{g})$.

Теорема. Пусть k и тройка $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u})$ таковы, что $\Lambda(\hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{u}) = \{0\}$. Тогда для каждой окрестности V_0 функции \hat{x} найдется окрестность W_0 нуля в \mathcal{L} такая, что любая система $(\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{g})$, для которой $(\tilde{\varphi} - \varphi, \tilde{f} - f, \tilde{g} - g) \in W_0$, управляема относительно \hat{x} и V_0 .

Заметим, что для управляемости близкой (в указанном смысле) системы $(\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{g})$ к системе (φ, f, g) достаточно только непрерывности отображений $\tilde{\varphi}, \tilde{f}$ и \tilde{g} .

Следствие. В условиях теоремы исходная система (φ, f, g) локально управляема относительно функции \hat{x} .

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ

Авдюшкин А. Н. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

avdyushkin.a.n@yandex.ru

Рассматривается движение тела малой массы под действием гравитационных и репульсивных сил светового давления, действующих со стороны двух массивных излучающих тел, движущихся по кеплеровским эллиптическим орбитам. Рассматривается случай плоского движения, когда тело малой массы всё время располагается в плоскости орбит этих тел. Такая постановка задачи известна как плоская ограниченная эллиптическая фотогравитационная задача трёх тел. Данная задача имеет хорошо известное частное решение, описывающее движение, при котором тело малой массы находится между притягивающими телами на одной с ними прямой. В координатах Нехвила данному движению соответствует положение относительного равновесия тела малой массы, которое в классической задаче трёх тел называется коллинеарной точкой либрации L_1 . Задача об устойчивости точки либрации L_1 рассматривалась во многих работах. Наиболее полно исследована устойчивость L_1 в круговой фотогравитационной задаче трёх тел [1], [2], [3]. В случае эллиптических орбит массивных тел задача об устойчивости L_1 значительно менее исследована. В частности, линейный анализ устойчивости данной задачи проводился в [4]. Для частного случая, когда массивные тела имеют равные массы и одинаковые интенсивности излучения, а эксцентриситет их орбит мал, был выполнен нелинейный анализ устойчивости [5].

В данной работе выполнено нелинейное исследование устойчивости коллинеарной точкой либрации L_1 . Рассмотрен случай, когда эксцентриситет орбит притягивающих и излучающих тел мал, а на массы тел и интенсивности их излучения не наложено никаких ограничений. Предположение о малости эксцентриситета позволило применить метод малого параметра и провести анализ устойчивости аналитически. Была применена следующая методика исследования устойчивости. Функция Гамильтона уравнений возмущённого движения с помощью метода Депри-Хори была приведена к нормальной форме. Нормализация гамильтониана проводилась в полярных координатах, что позволило существенно упростить процедуру вычисления коэффициентов нормальной формы. На основании анализа коэффициентов нормальной формы были сделаны выводы об устойчивости для большинства начальных условий и о формальной устойчивости. Был исследован как нерезонансный случай, так и случаи резонансов третьего и четвёртого порядков. Был также рассмотрен случай, когда массивные тела имеют равные массы и одинаковые интенсивности излучения, а эксцентриситет их орбит может принимать любые значения из интервала $[0; 1]$. В этом случае коэффициенты нормальной формы определялись численно при помощи метода симплектических отображений.

Результаты исследования представлены в виде диаграмм устойчивости, построенных в пространстве параметров задачи.

Литература

- [1] Куницын А. Л., Турешбаев А. Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трёх тел // Письма в астрономический журнал. 1983. Т. 9. Вып. 7. С. 432–435.
- [2] Лукьянов Л. Г. Об устойчивости лагранжевых точек в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел // Астрономический журнал. 1986. Т. 63. 6. С. 1222–1229.
- [3] Bardin B.S., Avdyushkin A.N. On Stability of the Collinear Libration Point L_1 in the Planar Restricted Circular Photogravitational Three-Body Problem // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2022. Vol. 18. No. 4. Pp. 543–562.
- [4] Тхай В. Н., Зимовщиков А. С. Диаграммы устойчивости для гетерогенного ансамбля частиц в коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 221–229.
- [5] Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Stability of the collinear point L_1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 927.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МАГНИТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Агапов С. В. (Россия, Новосибирск)

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

agapov.sergey.v@gmail.com

Исследуются геодезические потоки на двумерных поверхностях в ненулевом магнитном поле. В то время как требование интегрируемости таких потоков одновременно на различных уровнях энергии является весьма ограничительным (см., например, [1], [2]), хорошо известны примеры метрик и магнитных полей, допускающих дополнительный интеграл лишь при фиксированной энергии. Так, например, в [3], [4] доказано, что на двумерном торе существуют семейства аналитических римановых метрик и магнитных полей с дополнительным квадратичным по импульсам первым интегралом. В [5] в явном виде построено большое количество локальных рациональных по импульсам первых интегралов магнитных геодезических потоков на фиксированном уровне энергии.

Доклад основан на совместных работах с М. Бялым, А.А. Валуженичем, А.Е. Мироновым, А.И. Поташниковым, В.В. Шубиным.

Литература

- [1] Тайманов И. А. О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе // Труды МИАН. 2016. Т. 295. С. 241–260.
- [2] Agapov S., Valyuzhenich A. Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels // Disc. Cont. Dyn. Syst. - A. 2019. Vol. 39. №11. P. 6565–6583.
- [3] Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys. 1985. Vol. 26. №12. P. 3070–3079.
- [4] Agapov S. V., Bialy M., Mironov A. E. Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: new examples via quasi-linear system of PDEs // Comm. Math. Phys. 2017. Vol. 351. №3. P. 993–1007.
- [5] Agapov S., Potashnikov A., Shubin V. Integrable magnetic geodesic flows on 2-surfaces // Nonlinearity. 2023. Vol. 36. №4. P. 2128–2147.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА В МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ИНВОЛЮЦИЕЙ²¹

Агафонкин Г. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

agafgr.an@yandex.ru

Модель Фридрихса — это модель компактного возмущения оператора умножения на аргумент в $L_2[-1, 1]$. Известно (см. [1], [2]), что если возмущение задано самосопряженным интегральным оператором с ядром $K(x, y)$, гёльдеровым с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$, то у возмущенного оператора будет не более чем конечный дискретный спектр, а если $\alpha = \frac{1}{2}$, то его спектральная мера может иметь любую наперед заданную сингулярную непрерывную и дискретную компоненты.

Наша задача состоит в исследовании возмущения оператора «умножения с инволюцией»

$$H_0 f(x) = ixf(-x)$$

интегральным оператором V с симметричным гёльдеровым ядром $K(x, y)$. Мы покажем, что при показателе гёльдеровости ядра $\alpha > \frac{1}{2}$ дискретный спектр возмущенного оператора не более чем конечен. Также в случае конечномерного ядра

$$K(x, y) = \varepsilon \sum_{j=1}^n k_j(x)k_j(y),$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, мы получим оценки количества собственных значений вне отрезка $[-1, 1]$ непрерывного спектра в зависимости от ε и приведем достаточные условия того, что заданный набор точек на $[-1, 1]$ попадает в дискретный спектр.

Литература

- [1] Фаддеев Л. Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Краевые задачи математической физики. 2, Сборник работ. Посвящается памяти В.А. Стеклова в связи со столетием со дня его рождения // Тр. МИАН СССР, 73, Наука, М.-Л., 1964, 292-313.
- [2] Павлов Б. С., Петрас С. В. О сингулярном спектре слабо возмущенного оператора умножения // Функц. анализ и его прил., 4:2 (1970), 54-61.

ЗАДАЧА КРАСОВСКОГО ОБ УСПОКОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ТИПА²²

Адхамова А. Ш. (Россия, Москва)

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

adkhamova-ash@rudn.ru

В работе [1] Н. Н. Красовский сформулировал и изучил задачу об успокоении системы с последствием, описываемой дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа. А. Л. Скубачевский в работе [2] обобщил задачу Н. Н. Красовского на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием. В статьях [3], [4] была исследована задача об успокоении системы нейтрального типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. В статье [5] была исследована задача об успокоении системы запаздывающего типа.

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{k=0}^M A_k(t)y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^M B_k(t)y(t - k\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \quad (1)$$

²¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-11-20261.

²²Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Здесь $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_k(t)$, $B_k(t) = \{a_{ij}^k(t)\}$, $\{b_{ij}^k(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ — матрицы порядка $n \times m$ с элементами $a_{ij}^k(t)$, $b_{ij}^k(t)$ которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на \mathbb{R} , $\tau = \text{const} > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \quad (2)$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1) с начальным условием (2) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \quad (3)$$

где $T > (M + 1)\tau$, $T - M\tau = \tau N$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \rightarrow \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n . Таким образом, в силу (1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{k=0}^M A_k(t)y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^M B_k(t)y(t - k\tau) \right|^2 dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Была рассмотрена задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений вырождающегося типа с матричными коэффициентами, с различным числом входов и выходов и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка с вырождением. Получены априорные оценки решений. Доказаны теоремы о разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

Литература

- [1] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [2] Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
- [3] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последствием // Современная математика. Фундаментальные направления. РУДН, М., Т. 65, № 4, 2019, С. 547–556.
- [4] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об успокоении системы управления с последствием нейтрального типа // Доклады академии наук, Т. 490, 2020, С. 81–84.
- [5] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа // Дифференциальные уравнения, Т. 58, № 6, 2022, С. 747–755.

АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СХОДИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ МЭКИ–ГЛАССА К РЕШЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНОГО РЕЛЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Алексеев В. В. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
РНОМЦ «Центр интегрируемых систем»
vladislav.alexeev.yar@gmail.com

Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
РНОМЦ «Центр интегрируемых систем»
rita.preo@gmail.com

Рассматривается уравнение Мэки–Гласса [1], после перенормировки параметров и перехода к логарифмической шкале принимающее вид

$$\dot{x} = -\beta + \alpha \frac{e^{x(t-1)-x}}{1 + e^{\gamma x(t-1)}}, \quad (1)$$

где a, b, γ — положительные параметры.

Устремляя $\gamma \rightarrow +\infty$ в уравнении (1), получаем релейное уравнение:

$$\dot{x} = -\beta + \alpha \exp(x(t-1) - x)H(\exp(x(t-1))), \quad (2)$$

где функция переключения $H(u)$ определяется как

$$H(u) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + u^\gamma} = \begin{cases} 0, & u > 1, \\ \frac{1}{2}, & u = 1, \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Введём обозначения:

$$t_0 = \frac{x_0}{\beta} + 1, \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{2} \alpha^2 e^{2\beta} (t_1 - t_0 - 1)^2 + \alpha e^\beta (t_1 - t_0) + 1 \right), \quad (5)$$

где t_1 — корень уравнения

$$e^{\beta(t-t_0)} - \alpha e^\beta (t - t_0 - 1) - 1 = 0, \quad (6)$$

$$t_2 = t_0 + T. \quad (7)$$

Зафиксируем положительные параметры x_0, p, q , такие что $p < q$. В качестве множества начальных функций для уравнений (1) и (2) возьмем

$$S = \{\varphi \in C[-1, 0] : 0 < p \leq \varphi(t) \leq q \text{ при } t \in [-1, 0], \varphi(0) = x_0\}. \quad (8)$$

Тогда верны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть параметры $\alpha, \beta > 0$ удовлетворяют условиям

$$\alpha > \min \left\{ -\frac{\beta e^{-\beta}}{W(-e^{-\beta-1})}, e^\beta - e^{-\beta} \right\}, \quad (9)$$

где W — функция Ламберта, т. е. обратная к функции $t \mapsto te^t$, рассматриваемой при $t \in [-1; +\infty)$,

$$\alpha > \frac{e^{\beta(t_1-t_0+1)}}{1 + e^\beta(t_1 - t_0)}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (2) с начальной функцией из множества (8) имеет T -периодическое решение

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 - \beta t, & t \in [0, t_0], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha e^\beta(t - t_0) + 1), & t \in [t_0, t_0 + 1], \\ x_0 - \beta t + \ln\left(\frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t - t_0 - 1)^2 + \alpha e^\beta(t - t_0) + 1\right), & t \in [t_0 + 1, t_1], \\ x_0 - \beta t + \ln\left(\frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t_1 - t_0 - 1)^2 + \alpha e^\beta(t_1 - t_0) + 1\right), & t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть параметры $\alpha, \beta > 0$ удовлетворяют условиям (9), (10). Тогда существуют такие значения параметров x_0, p, q и такое достаточно большое γ_0 , что при всех $\gamma > \gamma_0$ уравнение (1) с начальной функцией из множества (8) обладает периодическим решением $x_\gamma^*(t)$ периода T_γ , которое удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq T_\gamma} |x_\gamma^*(t) - x^*(t)| = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_\gamma = T. \quad (12)$$

Литература

- [1] Mackey M. C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. V. 197. № 4300. P. 287–289.

ФОРМАЛЬНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТИПИЧНЫХ ПЕРЕСТРОЕК ПОВЕРХНОСТИ В ТРЁХМЕРНОМ КОНТАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Али А. З. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
tonych777@googlemail.com

Важным методом исследования свойств решения линейного уравнения второго порядка от двух переменных с частными производными является изучение его характеристик. Уравнение его характеристик является неявным дифференциальным уравнением. Дифференциальное уравнение задаёт поверхность в трёхмерном пространстве (x, y, p) , где $p = \frac{dy}{dx}$, с контактной структурой, естественно определяемой уравнением поля плоскостей $pdx = dy$.

Нормальные формы неявного дифференциального уравнения изучались на протяжении многих лет в работах многих математиков (историю вопроса можно найти в работах [1] и [2]).

Результат, сформулированный в данном докладе, подсказан замечанием 3 работы В. И. Арнольда [3]. Доказательство идейно основывается на этой статье. Данный результат усилен в работе И. А. Богаевского [2]. В ней получены формальные нормальные формы перестроек неявного диф. ур-я относительно более узкого класса преобразований пространства.

Перейдём к формулировке основного результата.

Дано трёхмерное контактное пространство с контактной структурой, в окрестности нуля задаваемой уравнением $\theta = 0$, где $\theta = dz + \frac{pdq - qdp}{2}$.

Рассмотрим уравнение

$$H(p, q, z, \varepsilon) = 0,$$

где

- а) H – формальный ряд по переменным p, q, z и параметру ε ;
- б) $H = H_1 + H_2 + \dots$, где H_k , $k = 1, 2, \dots$ – однородные многочлены по переменным p, q, z и параметру ε ;
- в) $H_1 = \varepsilon$;
- г) $H_2|_{\varepsilon=0}$ – невырожденная квадратичная форма по p, q, z ;
- $H_2|_{\varepsilon=0, z=0}$ – невырожденная квадратичная форма по p, q .

Определение. Преобразование назовём *допустимым*, если оно является формальным контактоморфизмом, сохраняющим начало координат ($p = 0, q = 0, z = 0, \varepsilon = 0$) и зависящим от параметра ε ; или умножением уравнения на формальный ряд, зависящий от параметра ε ; или формальной заменой параметра ε ; или алгебраическим преобразованием.

Теорема. Уравнение $H(p, q, z, \varepsilon) = 0$, где H удовлетворяет условиям а)-з), при помощи допустимых преобразований приводится к одной из трёх нормальных форм:

$$p^2 + q^2 \pm z^2 = c(\varepsilon)z^3 + \varepsilon$$

или

$$p^2 - q^2 + z^2 = c(\varepsilon)z^3 + \varepsilon,$$

где $c(\varepsilon)$ – формальный ряд по ε .

Литература

- [1] Давыдов А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил., 1985, Т. 19, Вып. 2, С. 1-10.
- [2] Богаевский И. А. Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем., 2014, Т. 78, Вып. 6, С. 5-20.
- [3] Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями // Матем. заметки, 1988, Т. 44, Вып. 1, С. 3-18.

ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ВАСИЛЬЕВА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КЛАССА УЗЛОВ

Аллёнов С. В. (Россия, Коломна)

Государственный социально-гуманитарный университет

allenov@list.ru

В работе рассмотрено использование стрелочных формул для вычисления инвариантов Васильева до четвертого порядка изотопических классов узлов по их комбинаторному описанию - гауссовым диаграммам. Данные вычисления являются нетривиальными и требуют дальнейших обобщений. Подсчеты опираются на стрелочные формулы из работ [1], [2] и [3] для инвариантов Васильева узлов порядка не выше четырех. Вопрос реализуемости диаграмм Гаусса хорошо известен и рассматривался разными авторами, в частности исследовался в [4].

В работе мы приводим пример серию узлов, полученных из узла 4_1 четным перекручиванием его двух соседних ветвей. Получаемые альтернированные узлы задают узлы первыми представителями которой являются следующие табличные узлы: $4_1, 6_2, 8_2, 10_2$. Данная серия узлов H_{2n+2} изображена на рисунке 1.

Диаграммы Гаусса таких узлов показаны на рисунке 2. По стрелочным формулы из работы [1, 5] получим значения инвариантов на рассматриваемом классе узлов.

Утверждение 1. Если $\mathcal{G}(H_{2n+2})$ – диаграмма Гаусса узла H_{2n+2} , то

$$V_4^i(H_{2n+2}) = \langle P_4^i, \mathcal{G}(H_{2n+2}) \rangle \quad i = 1, 2$$

является инвариантом Васильева четвертого порядка, где стрелочные формулы P_4^i определяются выражениями:

$$P_4^1 = \frac{1}{4} \cdot \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} + \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} ,$$

$$P_4^2 = \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} .$$

Для каждого слагаемого стрелочной диаграммы формулы подсчитаем число вложений её в диаграмму Гаусса узлов H_{2n+2} :

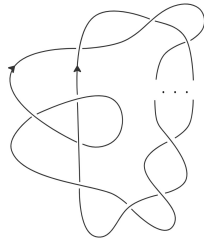


Рис. 1

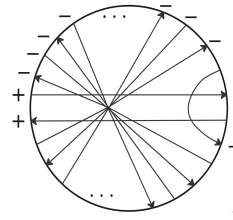


Рис. 2

$$V_4^1(H_{2n+2}) = \frac{1}{4}4n + \frac{1}{2}n(n-1),$$

$$V_4^2(H_{2n+2}) = 4n + 2n(n-1) + 2\frac{1}{6}n(n-1)(2n^2 - 13n + 12) - \frac{1}{2}n(n-1)(2n-3),$$

Утверждение 2. *Инварианты Васильева порядка не выше четырех на узлах H_{2n+2} равны: $V_2(H_{2n+2}) = \frac{1}{2}n(n-3)$, $V_3(H_{2n+2}) = \frac{1}{6}n(n-1)(7-2n)$, $V_4^1(H_{2n+2}) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $V_4^2(H_{2n+2}) = \frac{1}{6}n(4n^3 - 24n^2 + 47n - 3)$.*

Обобщения приведенных вычислений может помочь в нахождении новых интерпретаций инвариантов Васильева узлов малых порядков.

Литература

- [1] Аллёнов С.В. Диаграммно-стрелочные формулы для инвариантов Васильева четвёртого порядка // Вестник Коломенского государственного педагогического института. 2007. № 2 (3). С. 15.
- [2] Аллёнов С.В. Явные формулы инвариантов Васильева четвёртого порядка для узлов // Современная математика и ее приложения. 2008. Т. 53. № 1. С. 29-38.
- [3] Polyak M., Viro O. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Int. Math. Res. Notices, 1994. V. 11. P. 445-454.
- [4] Biryukov O. N. Parity conditions for realizability of Gauss diagram // Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2019. V. 28. № 1. P. 1950015.
- [5] Аллёнов С.В. Диаграммно-стрелочные формулы инвариантов узлов четвёртого порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 5. С. 1-17.

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД РЕЗКО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ

Аллилуева А. И. (Россия, Москва, Долгопрудный)

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Московский физико-технический институт

esina_anna@list.ru

Аннотация. Описаны коротковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений мелкой воды в случае, когда рельеф дна и внешний поток меняются скачкообразно вблизи некоторой кривой. Основной результат – асимптотический ряд для решения задачи Коши.

Строим асимптотические ряды для линеаризованных уравнений мелкой воды с начальными условиями в виде быстроосциллирующих функций. Все коэффициенты системы зависят от быстрой переменной $y = \frac{\Phi(x)}{\varepsilon}$ ($\Phi(x)$ – некоторая гладкая функция, ε – малый параметр), что и означает, что рельеф дна и внешний поток меняются скачкообразно вблизи некоторой кривой $\Phi(x) = 0$. Получаем два различных случая поведения внешнего потока, затем из характеристического уравнения получаем три различные фазы: две гидродинамические и одна вихревая. Изучая асимптотику решения для каждого случая поведения внешнего потока, получаем прошедшие и отраженные волны от кривой $\Phi(x) = 0$, где различные моды могут переходить друг в друга, а также появляются обратные волны, когда фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны.

Также, в зависимости от типа скачка внешнего потока (тангенциальный или нормальный) изучены кривые Петровского и различные моды прошедших и отраженных волн. Асимптотика выражается через вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение; показано, что это уравнение вырождается (т.е. его порядок меньше, чем в случае гиперболических систем общего положения).

Литература

- [1] Maslov V. P. Fedoriuk M. V. Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics // Math. Phys. Appl. Math., vol. 7, Dordrecht: Springer, 1981.
- [2] Доброхотов С. Ю. Приложение теории Маслова к двум задачам с операторнозначным символом // УМН, 1984, т. 39, вып. 4, стр. 125.
- [3] Буслаев В. С. Адиабатическое возмущение периодического потенциала // ТМФ. 1984. Т. 58, N 2. с. 233-213.
- [4] Доброхотов С. Ю., Шафаревич А. И. Квазиклассические асимптотики в задаче рассеяния волновых пакетов на быстроменяющемся потенциале вида $-2|\nabla\Phi|^2/ch^2(\Phi/h)$ // ДАН СССР, 1987, т. 295, N 6. с. 1347-1351.
- [5] Шафаревич А. И. Квазиклассическое рассеяние волновых пакетов на узком слое, в котором потенциал быстро меняется // Матем. заметки, 45:1 (1989), 106-114; Math. Notes, 45:1 (1989), 72-77.
- [6] Maslov V. P., Omel'vanov G. A. Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion, Russian Math. Surveys, 36:3 (1981), 73-149.
- [7] Calogero F., Degasperis A. Spectral Transform and Solitons, North-Holland Publishing Company, 1982.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА СО СНОСОМ И $L_{2+\delta}$ -ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ²³

Алхутов Ю. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
yurij-alkhutov@yandex.ru

Чечкин Г. А. (Россия, Москва; Казахстан, Алматы)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН
Институт математики и математического моделирования
chekkin@mech.math.msu.su

Ниже $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$, означает ограниченную строго липшицеву область, а $F \subset \partial D$ – замкнутое множество. Для постановки задачи Зарембы введем пространство функций $W_2^1(D, F)$ как пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F функций, по норме пространства Соболева $W_2^1(D)$. Априори для функций $v \in W_2^1(D, F)$ требуется выполнение неравенства Фридрикса

$$\int_D v^2 dx \leq C \int_D |\nabla v|^2 dx. \quad (1)$$

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = l \quad \text{в } D, \quad u = 0 \text{ на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } G, \quad (2)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ означает внешнюю нормальную производную функции u , а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_2^1(D, F)$. Вектор-функция $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ в (2) удовлетворяет следующим условиям:

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p = n, \text{ если } n > 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

²³Результаты Ю.А. Алхутова в теоремах 1 и 3 получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004), а результаты Г.А. Чечкина в теореме 2 поддержаны грантом РНФ (проект 20-11-20272).

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2, \text{ если } n = 2, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Под решением задачи (2) понимается функция $u \in W_2^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (5)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$, в котором компоненты вектор-функции $f = (f_1, \dots, f_n) \in (L_2(D))^n$ являются представлением линейного непрерывного функционала l . Такое представление вытекает из требуемого неравенства Фридрихса (1).

В формулировке необходимого и достаточного условия на множество $F \subset \partial D$ для справедливости (1) требуется понятие ёмкости. Обозначим через \mathcal{Q}_d открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Определим ёмкость $C_2(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компакта $K \subset \overline{\mathcal{Q}_d}$ по отношению к кубу \mathcal{Q}_{2d} равенством

$$C_2(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^2 \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов В.Г. Мазьи (см. [1, §14.1.2]) следует, что для функций $v \in W_2^1(D, F)$ неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$C_2(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \quad (6)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполнены условия (3) или (4) и (6), то задача Зарембы (2) однозначно разрешима в $W_2^1(D, F)$ и для ее решения справедлива оценка*

$$\|\nabla u\|_{L_2(D)} \leq C \|f\|_{L_2(D)} \quad (7)$$

с постоянной C , зависящей только от области D и размерности пространства.

Для формулировки результатов о повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы (2) нам потребуется понятие $C_q(K)$ - ёмкости компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^q \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый n -мерный шар радиуса r с центром в точке x_0 . Предполагается, что для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leq r_0$ выполнены следующие условия:

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-q}, \quad q = \frac{2n}{n+2}, \text{ если } n > 2 \quad (8)$$

и

$$C_{q_1}(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{2-q_1}, \quad q_1 = \frac{p}{p-1}, \text{ если } n = 2, \quad (9)$$

в которых положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r .

Отметим, что условия (8) и (9) обеспечивают выполнение неравенства Фридрихса (1). Сформулируем результаты о повышенной суммируемости градиента решений задачи Зарембы (2).

Теорема 2. *Если $n > 2$, выполнены условия (3) и (8), а $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^n$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(n, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи (2) справедлива оценка*

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} \, dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} \, dx, \quad (10)$$

где C зависит только от δ_0 , размерности пространства n , величины c_0 из (8), а также от области D и $\|b\|_{L_n(D)}$.

Теорема 3. Если $n = 2$, выполнены условия (4) и (9), а $f \in \left(L_{2+\delta_0}(D)\right)^2$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(p, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи (2) справедлива оценка (10), в которой C зависит только от δ_0 , величины c_0 из (9), а также от области D и $\|b\|_{L_p(D)}$.

Все приведенные выше утверждения остаются в силе, если вместо оператора Лапласа в главной части уравнения рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка с измеримыми коэффициентами. Теорема 2 и теорема 3 являются обобщением результатов работы [2], в которой задача Зарембы рассмотрена для дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка без младших коэффициентов.

Литература

- [1] Maz'ya V. Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [2] Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A., Maz'ya V. G. On the Wojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zarembo Problem // Arch. Rational Mech. Anal. 2022. V. 245. P. 1197–1211.

НАИСКОРЕЙШАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ

Ананьевский И. М. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

anan@ipmnet.ru

Рассматривается задача синтеза оптимального быстродействия для линейной управляемой системы четвертого порядка. Система описывает в линейном приближении перемещение около вертикального положения жесткого стержня с закрепленным на верхнем конце грузом (перевернутый маятник) с помощью активного динамического гасителя с поступательно перемещающейся вдоль горизонтальной прямой массой. Управляющей величиной служит сила взаимодействия между массой гасителя и грузом. Требуется за минимальное время с помощью ограниченной по модулю силы привести стержень в вертикальное состояние и остановить массу гасителя в заданном положении.

В безразмерных переменных динамика системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad \dot{v} = u, \quad \dot{z} = v.$$

Ограничение на управляющую переменную имеет вид $|u| \leq 1$.

На основе принципа максимума решена задача синтеза оптимального по быстродействию управления, построены поверхности переключения. Решение получено в несколько этапов. Сначала решается задача оптимального быстродействия для системы второго порядка, состоящей из первых двух уравнений системы. На втором этапе решается та же задача для системы из трех уравнений, а затем — для полной системы. На каждом этапе используются результаты, полученные на предыдущем для системы меньшей размерности.

Литература

- [1] Фельдбаум А. А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автомат. и телемех. 1955. Т. 16, вып. 2, 129–149.
- [2] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБРАТНОГО
МАЯТНИКА С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

Ананьевский И. М. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
anan@ipmnet.ru

Рассматривается линейная управляемая система четвертого порядка, которая описывает динамику линеаризованного обратного маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. На основе принципа максимума Понтрягина изучается задача синтеза оптимального управления, приводящего систему в состояние покоя за минимальное время. На примере этой задачи показано, как в некоторых случаях решение задачи оптимального быстрогодействия может быть сведено к решению аналогичной задачи для системы меньшей размерности.

О ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Андреева И. А. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
irandr@inbox.ru

Кондратьева Н. В. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
knat0202@mail.ru

В докладе обсуждаются результаты изучения ряда семейств кубических систем общего вида

$$\frac{dx}{dt} = p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x, y), \quad (1)$$

при условиях, что a, b, c, p_0, \dots, p_3 представляют собою вещественные параметры, для которых выполнен набор требований: $cp_3 \neq 0$, а X, Y — взаимно простые многочлены. Задача исследования, базирующегося на методах локальной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, состоит в выяснении видов всех топологически различающихся *фазовых портретов* систем вида (1) и их построении в круге Пуанкаре Ω , с индикацией критериев существования каждого такого портрета. В ходе формализации задачи вводим для системы специальные многочлены

$$P(u) := X(1, u) \equiv p_0 + p_1u + p_2u^2 + p_3u^3, \\ Q(u) := Y(1, u) \equiv a + bu + cu^2. \quad (2)$$

Понятно, что вещественные корни многочлена $P(u)$ ($Q(u)$) выступают в роли угловых коэффициентов изоклин бесконечности (нуля). С опорой на них исследуем особые точки наших систем вида (1) — конечные и бесконечно удаленные.

Теорема 1. *Динамические системы, принадлежащие к виду (1), не будут иметь предельных циклов.*

Доказательство основывается на формуле индекса особой точки И.О.Бендиксона.

В круге Пуанкаре Ω для относящейся к виду (1) полиномиальной динамической системы ее фазовый портрет зависит от следующих ключевых моментов:

- 1) от числовой пары (m, n) , где $m \in \{3, 2, 1\}$ ($n \in \{2, 1, 0\}$) равняется числу имеющихся у динамической системы изоклин бесконечности (изоклин нуля),
- 2) от порядка, в котором эти $m + n$ изоклин следуют друг за другом, если, двигаясь в направлении возрастания $u (= y/x)$, совершить полуобход точки $O(0, 0)$ в области $x > 0$,
- 3) от расположения изоклин бесконечности по отношению к оси $y = 0$.

Определение 1. *Рассмотрим $m \in \{3, 2, 1\}$, $n \in \{2, 1, 0\}$, (m, n) как фиксированную числовую пару. Совокупность динамических систем вида (1), у которых специальный*

многочлен $P(u)$ обладает m вещественными корнями, а специальный многочлен $Q(u)$ обладает n вещественными корнями, назовем (m, n) - семейством систем.

Из определения 1 вытекает, что глобальный вид систем (1) включает следующие (m, n) -семейства:

$$(3, 2), (2, 2), (3, 1), (2, 1), (3, 0), (2, 0), (1, 2), (1, 1), (1, 0). \quad (3)$$

Семейства полиномиальных динамических систем исследуются в рамках единой программы с учетом "разбегания" по подсемействам очередных слоев естественной их иерархии, достигающей 4-го подуровня. Итог работы заключается в конструировании возникающих принципиально различных в топологическом понимании видов фазового портрета каждого из подсемейств, выяснении числа (превысившего 250) и деталей таких портретов [1, 2].

Литература

- [1] Andreev A. F., Andreeva I. A. On a Behavior of Trajectories of a Certain Family of Cubic Dynamic Systems in a Poincare Circle // IOP Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1141 (1), 012114, (2018).
- [2] Andreeva I. A., Andreev A. F. Qualitative Research in the Poincare Disk of One Family of Dynamical Systems // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 281, No. 3, May 2024, DOI 10.1007/s10958-024-07110-3.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ I И АНСАМБЛИ СЛУЧАЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Аптекарев А. И. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики им М.В. Келдыша РАН

Aptekaa@keldysh.ru

Мы рассмотрим асимптотики (в различных режимах) решений дискретного уравнения Пенлеве I (dP_I). Интерес к этому уравнению вызван тем, что его решения формируют коэффициенты рекуррентного соотношения, генерирующего многочлены ортогональные по плоской мере, носитель которой является областью равномерного распределения собственных значений некоторого ансамбля случайных нормальных матриц. Эта область также возникает в одной модели двумерного роста Лапласа, так называемый «droplet».

Особый интерес для нас представляет ВКБ-режим: когда дискретная переменная n и параметр N в коэффициенте уравнения dP_I, согласованно стремятся к бесконечности: $n/N \rightarrow t$. При этом t имеет смысл времени роста «droplet»-а. Асимптотика решений dP_I в этом режиме, в свою очередь позволит определить главный член асимптотики соответствующих ортогональных многочленов и, как следствие, критическое время образования особенности (каспа) на границе «droplet»-а.

Совместная работа с В.Ю. Новокшеновым.

СВОБОДНЫЕ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Апушкинская Д. Е. (Россия, Москва)

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

apushkinskaya@gmail.com

Доклад представляет собой обзор, посвященный параболическим задачам со свободными границами, в которых участвует оператор с разрывным гистерезисом. Такие задачи описывают биологические, социологические и химические процессы "с памятью", в которых различные вещества взаимодействуют по закону гистерезиса.

Наша основная цель – обсудить разрешимость задач с гистерезисом, структуру свободных границ и качественные свойства так называемых "сильных решений", принадлежащих анизотропному соболевскому классу $W_q^{2,1}$ при достаточно большом q .

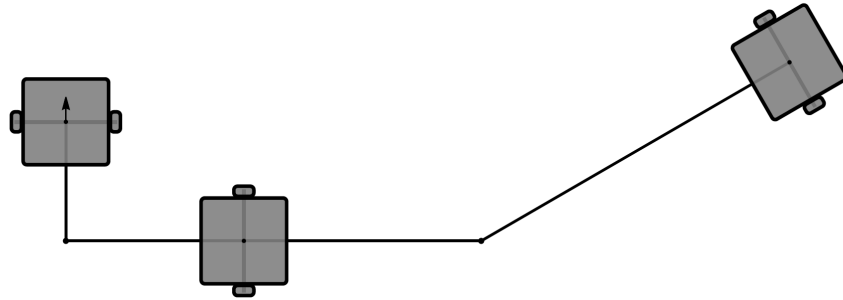
Доклад основан на результатах, полученных совместно с Н.Н. Уралцевой.

Ардентов А. А. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
aaa@pereslavl.ru

Исходя из неголономных ограничений на движение колес без проскальзывания, рассмотрена следующая управляемая система для робота с двумя прицепами с общим видом связки робота с прицепами:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \vartheta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = u_2, \\ \dot{\phi}_1 = -\frac{1}{l_2} \left(u_1 \sin \phi_1 + u_2 (l_2 + l_1 \cos \phi_1) \right), \\ \dot{\phi}_2 = \frac{1}{l_2 l_4} \left(u_1 \left((l_4 + l_3 \cos \phi_2) \sin \phi_1 - l_2 \cos \phi_1 \sin \phi_2 \right) + \right. \\ \left. + u_2 l_1 \left(\cos \phi_1 (l_4 + l_3 \cos \phi_2) + l_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \right) \right), \end{cases} \quad (1)$$

где x, y суть координаты центра робота; ϑ есть угол ориентации робота; ϕ_1, ϕ_2 суть угол ориентации первого прицепа относительно робота и угол ориентации второго прицепа относительно первого прицепа; $l_1 \neq 0$ и $l_2 \neq 0$ суть фиксированные расстояния от первой точки сцепки до центров робота и первого прицепа; $l_3 \neq 0$ и $l_4 \neq 0$ суть фиксированные расстояния от второй точки сцепки до центров первого и второго прицепа; а неограниченные управления u_1, u_2 суть линейная и угловая скорости робота.



На рисунке выше приведен пример модели колесного робота с двумя прицепами при $l_1 = 1/3, l_2 = 1/2, l_3 = 2/3, l_4 = 1$ для конфигурации с координатами $x = 0, y = 0, \vartheta = \pi/2, \phi_1 = \pi/2, \phi_2 = \pi/6$.

С помощью теоремы Рашевского-Чжоу [1] была доказана следующая теорема об управляемости рассматриваемой системы (1) (при отсутствии ограничений на управления).

Теорема 1. Пусть $l_i > 0, i = 1 \dots 4$, тогда

- если $l_1 \neq l_2, l_3 \neq l_4, (l_1 - l_4)^2 + (l_2 - l_3)^2 \neq 0$, то система (1) управляема.
- если $l_1 = l_2, \cos \frac{\varphi_1}{2} = 0$ или $l_3 = l_4, \cos \frac{\varphi_2}{2} = 0$, то система (1) неуправляема (этот случай унаследован от системы «робот с одним прицепом»); в случае, когда выполняются оба условия, система имеет вектор роста (2, 3), иначе вектор роста равен (2, 3, 4).
- если $l_3 = l_2, l_4 = l_1$, то система неуправляема; в случае, когда выполнено

$$\cos \varphi_2 = -\frac{2l_1 l_2 + (l_1^2 + l_2^2) \cos \varphi_1}{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_1 + l_2^2}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{(l_1^2 - l_2^2) \sin \varphi_1}{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_1 + l_2^2},$$

система (1) имеет вектор роста (2, 3, 4) при $l_1 \neq l_2$.

²⁴Исследование выполнено в ИПС им. А. К. Айламазяна РАН за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>.

Литература

- [1] Ращевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук, Т. 3, № 2, 1938, с. 83–94.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Арзикулов З. О. (Узбекистан, Фергана)
Ферганский политехнический институт
zafarbekarzikulov1984@gmail.com

При построении автомодельных решений вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными гипергеометрические функции многих переменных высокого порядка имеют огромное значение.

Введем в рассмотрение гипергеометрическую функцию третьего порядка [1]

$$F_{0;2}^{1;0}(a; \mathbf{b}, \mathbf{c}; \mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} (a)_{|\mathbf{k}|} \prod_{j=1}^n \frac{x_j^{k_j}}{k_j! (b_j)_{k_j} (c_j)_{k_j}}, \quad (1)$$

где a, b_j и c_j - действительные числа, причем $b_j, c_j \neq 0, -1, -2, \dots, j = \overline{1, n}$.

Нетрудно установить, что функция $z(\mathbf{x}) = F_{0;2}^{1;0}(a; \mathbf{b}, \mathbf{c}; \mathbf{x})$, определенная равенством (1) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left\{ x_j^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_j^3} + (b_j + c_j + 1) x_j \frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2} + b_j c_j \frac{\partial z}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^n x_j \frac{\partial z}{\partial x_j} - az = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2) \right.$$

Теорема. Система дифференциальных уравнений (2) вблизи начала координат имеет 3^n линейно независимые решения.

Чтобы получить общий интеграл системы (2), достаточно заметить, что она не меняет форму при замене

$$z(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n x_j^{\lambda_j} \cdot F_{0;2}^{1;0}(a; \mathbf{b}, \mathbf{c}; \mathbf{x}), \quad (3)$$

где λ_j - произвольные числа, подлежащие к определению. Вычислив необходимые производные от функции (3) и подставив их систему (2), получим

$$\{\lambda_j (\lambda_j - 1 + b_j) (\lambda_j - 1 + c_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

имеющую 3^n решений:

Теперь рассмотрим уравнение

$$\prod_{j=1}^n x_j^{m_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - t^l \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq k}^n x_j^{m_j} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^3} = 0, \quad l > 0, \quad m_j > 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (5)$$

в области $\Omega = \{(\mathbf{x}, t) : x_1 > 0, \dots, x_n > 0, t > 0\}$. Здесь и далее $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$. Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$u = P\omega(\xi), \quad (6)$$

где

$$P = \frac{l+1}{nt^{l+1}}, \quad \xi := (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_j = -\frac{l+1}{n(m_j+3)^3 t^{l+1}} x_j^{m_j+3}.$$

Подставляя (6) в уравнение (5), получим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \xi_j^2 \omega_{\xi_j \xi_j \xi_j} + \frac{2m_j + 3}{m_j + 3} \xi_j \omega_{\xi_j \xi_j} + [(m_j + 1)(m_j + 2) - n\xi_j] \omega_{\xi_j} \right\} - n\omega = 0, \quad (7)$$

которое равносильно следующей системе дифференциальных уравнений

$$\left\{ \xi_j^2 \omega_{\xi_j \xi_j \xi_j} + (1 + \alpha_j) \xi_j \omega_{\xi_j \xi_j} + \frac{1 + 2\alpha_j}{3} \cdot \frac{2 + \alpha_j}{3} \omega_{\xi_j} - \sum_{k=1}^n \xi_k \omega_{\xi_k} - \omega = 0, j = \overline{1, n}, \right.$$

где

$$\alpha_j = \frac{m_j}{m_j + 3}.$$

Сравнивая теперь последнюю систему дифференциальных уравнений с системой (2), легко выписать все 3^n автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных (5). Здесь мы ограничимся указанием одного (первого) из них:

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \lambda_1 t^{-k-1} F_{0:2}^{1:0} \left(1; \frac{2 + \alpha_1}{3}, \frac{1 + 2\alpha_1}{3}, \dots, \frac{2 + \alpha_n}{3}, \frac{1 + 2\alpha_n}{3} \xi_1, \dots, \xi_n \right).$$

Отметим, что автомодельные решения одного трехмерного вырождающегося дифференциального уравнения третьего порядка построены в [2].

Литература

- [1] Karlsson P. W. Reduction of certain generalized Kampe de Fériet functions // *Math.Scand.* 1973. Т. 32. pp. 265–268.
- [2] Ruzhansky M., Hasanov A. Self-similar solutions of the model degenerate partial differential equations of the second, third, and fourth order // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2020. Т. 41. № 6. pp. 1103–1114.

ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

Асеев С. М. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

aseev@mi-ras.ru

Задача оптимального управления на бесконечном интервале времени с общими концевыми ограничениями сводится к семейству стандартных задач на конечных интервалах, содержащих величину условной стоимости фазового вектора в качестве терминального члена. При помощи развитого подхода для задачи с общим асимптотическим концевым ограничением получен новый вариант принципа максимума Понтрягина, содержащий явное описание сопряженной переменной. В случае задачи со свободным правым концом данный подход приводит к варианту принципа максимума в нормальной форме, сформулированному полностью в терминах функции условной стоимости.

Литература

- [1] Асеев С. М., Функция условной стоимости и необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2023. Т. 514. No. 1. С. 5–11.
- [2] Aseev S. M. Necessary conditions for the optimality and sustainability of solutions in infinite-horizon optimal control problems // *Mathematics*, 2023. Vol. 11. Issue 18. 3851–15.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ТЕПЛИЦА-ГАНКЕЛЯ
И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ²⁵

Асхабов С. Н. (Россия, Грозный)

Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова

Чеченский государственный педагогический университет

askhabov@yandex.ru

Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов в вещественном пространстве Лебега $L_2(0,1)$ с обычной нормой $\|u\|_p = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ изучаются нелинейные интегральные уравнения

$$\lambda \cdot F[x, u(x)] + \int_0^1 K(x, t)u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

$$u(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)F[t, u(t)] dt = f(x), \quad (2)$$

$$u(x) + \lambda \cdot F \left[x, \int_0^1 K(x, t)u(t) dt \right] = f(x), \quad (3)$$

с ядром Теплица-Ганкеля $K(x, t) = \varphi(|x - t|) + \psi(x + t)$ (так называемое Toeplitz plus Hankel kernel [1]), где $\varphi(x)$ есть выпуклая вниз функция, $\psi(x) = x^{-\nu}$, $0 < \nu < 1$, и нелинейностью $F(x, t)$, которая определена при $x \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет известным условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ и непрерывна по t почти для всех $x \in [0, 1]$.

Прежде чем сформулировать основные результаты, обозначим через $L_2^+(0, 1)$ множество всех неотрицательных функций из $L_2(0, 1)$ и введем следующий класс $\Omega(0, 1]$ [2]. Скажем, что $\varphi \in \Omega(0, 1]$, если $\varphi(x)$ есть непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке $(0, 1]$ функция такая, что $\int_0^x \varphi(x) dx \geq 0$.

Следуя работе [2] и используя свойства интегральных операторов с ядром Теплица $\varphi(|x - t|)$ [3] и ядром Ганкеля $\psi(x + t)$ [4], без ограничений на параметр $\lambda > 0$ доказываются следующие глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для уравнений (1)–(3).

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Omega(0, 1]$, $0 < \nu < 1$ и $F(x, t)$ удовлетворяет условиям:

1) $|F(x, t)| \leq c(x) + d_1|t|$, где $c \in L_2^+(0, 1)$ и $d_1 > 0$;

2) $F(x, t)$ не убывает по t почти при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$;

3) $F(x, t) \cdot t \geq d_2|t|^2 - D(x)$, где $D \in L_1^+(0, 1)$ и $d_2 > 0$.

Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f \in L_2(0, 1)$ уравнение (1) имеет единственное решение $u^* \in L_2(0, 1)$. Кроме того, если условие 3) выполняется при $D(x) = 0$, справедлива оценка: $\|u^*\|_2 \leq \lambda^{-1}d_2^{-1}\|f\|_2$.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in \Omega(0, 1]$, $0 < \nu < 1$ и $F(x, t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f \in L_2(0, 1)$ уравнение (2) имеет единственное решение $u^* \in L_2(0, 1)$. Кроме того, если выполняются условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, справедлива оценка: $\|u^*\|_2 \leq d_1d_2^{-1}\|f\|_2$.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in \Omega(0, 1]$, $0 < \nu < 1$ и $F(x, t)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы 1, причем $F(x, t)$ строго возрастает по t . Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f \in L_2(0, 1)$ уравнение (3) имеет единственное решение $u^* \in L_2(0, 1)$. Кроме того, если выполняются условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, справедлива оценка: $\|u^* - f\|_2 \leq 2\lambda d_1^2 d_2^{-1} \left(\frac{1}{1-\nu} + \|\varphi\|_1 \right) \|f\|_2$.

²⁵Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEFS-2020-0001).

Литература

- [1] Tuan T., Hoang P. V., Hong N. T. Integral equation of Toeplitz plus Hankel's type and parabolic equation related to the Kontorovich-Lebedev-Fourier generalized convolutions // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. P. 1–11. <https://doi.org/10.1002/mma.5279>.
- [2] Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Матем. заметки. 2015. Т. 97. №5. С. 643–654.
- [3] Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №1. С. 101–109.
- [4] Porter D., Stirling D. Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990.

ОЦЕНКА СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ ДЛЯ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ВИДОВ

Базулкина А. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
hirasawa33rus@gmail.com

Исследования средней временной выгоды для моделей популяций, заданных системами дифференциальных уравнений, отражены в работах [1, 2]. В моей работе получены оценки данной характеристики для модели конкуренции двух видов.

Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (1)$$

Если $n \geq 2$, то популяция является неоднородной, то есть она либо состоит из отдельных видов x_1, \dots, x_n , либо разделена на n возрастных групп.

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$, $k = 1, 2, \dots$. С учетом эксплуатации получаем управляемую систему

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \quad x_i(kd) = (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \quad (2)$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ – количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент $\tau(k) = kd$ соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что решения этой системы непрерывны справа, функции f_i непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица, решения систем (1), (2) являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях.

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ – количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, $x_i(0) = x_i^0$ – начальное количество ресурса, $C_i \geq 0$ – агрегированная стоимость условной единицы i -го вида, $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$.

Определение 1. *Средней временной выгодой от извлечения ресурса называется функция $H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j)$.*

Решения системы (1) будем обозначать $\varphi(t, x)$, где $\varphi(0, x) = x$. Введем в рассмотрение функцию $D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$ и множество

$$D_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \varphi_i(d, x) \neq 0, i = 1, \dots, n\} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x \leq \varphi(d, x) \neq 0\}.$$

Для системы (1) на множестве \mathbb{R}_+^n рассмотрим *верхнюю систему сравнения*

$$\dot{x} = g(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (3)$$

то есть такую систему, что

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

для любых $t \geq t_0$, $x \leq y$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $y \in \mathbb{R}_+^n$.

Обозначим через $\psi(t, x)$ решения (3), удовлетворяющие начальным условиям $\psi(0, x) = x$. Предполагаем, что для функции g выполнены такие же свойства, как и для f . Пусть $\tilde{D}(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i(\psi_i(d, x) - x_i)$, $\tilde{\mathcal{D}}_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : x \leq \psi(d, x) \neq 0\}$, через $\tilde{H}_*(\bar{u}, x(0))$ обозначим среднюю временную выгоду для популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой (3).

Теорема 1. *Предположим, что система (3) является верхней системой сравнения для (1) на множестве \mathbb{R}_+^n . Тогда для любых $\bar{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ выполнены неравенства $H_*(\bar{u}, x(0)) \leq \max_{x \in \mathcal{D}_+} D(x) \leq \max_{x \in \tilde{\mathcal{D}}_+} \tilde{D}(x)$.*

Выпишем нижнюю систему сравнения для системы (1):

$$\dot{x} = v(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \quad (5)$$

и обозначим через $\xi(t, x)$ ее решения, удовлетворяющие начальным условиям $\xi(0, x) = x$. Пусть $\hat{D}(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i(\xi_i(d, x) - x_i)$, $\hat{\mathcal{D}}_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : x \leq \xi(d, x) \neq 0\}$, $\hat{H}_*(\bar{u}, x(0))$ – средняя временная выгода для популяции, заданной системой (5).

Теорема 2. *Предположим, что система (5) является нижней системой сравнения для (1) на множестве \mathbb{R}_+^n и $\max_{x \in \hat{\mathcal{D}}_+} \hat{D}(x) = \hat{D}(x^*)$, где $x^* \in \hat{\mathcal{D}}_+$. Тогда существует $\bar{u}^* \in U$, такое, что $H_*(\bar{u}^*, x(0)) \geq \max_{x \in \hat{\mathcal{D}}_+} \hat{D}(x)$ для всех $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$, для которых $\xi(d, x(0)) \geq x^*$.*

Пример 1.

Найдем оценку средней временной выгоды для модели конкуренции двух видов, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2, \end{cases} \quad (6)$$

где $a_i > 0$ – постоянные собственной скорости роста видов, $c_i > 0$ – постоянные самоограничения численности, $b_{12} < 0, b_{21} < 0$ – постоянные взаимодействия видов.

Нижней системой сравнения для (6) будет следующая модель конкуренции:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 - b x_1 x_2 - c x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a x_2 - b x_1 x_2 - c x_2^2. \end{cases} \quad (7)$$

Из (4) следует, что $a = \min(a_1, a_2)$, $b = -\min(b_{12}, b_{21})$, $c = \max(c_1, c_2)$.

Предположим, что $b > c$. При помощи теоремы 2 и с учетом результатов работы [1] (пример 1) получаем, что для некоторых $\bar{u}^* \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ выполнено

$$H_*(\bar{u}^*, x(0)) \geq \max_{x \in \hat{\mathcal{D}}_+} \hat{D}(x) \geq \max \left\{ \frac{C_1}{b}, \frac{C_2}{b}, \frac{C_1 + C_2}{b + c} \right\} \frac{a(e^{ad/2} - 1)}{e^{ad/2} + 1}. \quad (8)$$

В частности, из (8) следует, что при выполнении $b \min(C_1, C_2) \geq c \max(C_1, C_2)$ для системы (7) более выгодной является добыча двух видов ресурса.

Если $b \leq c$, то из результатов статьи [1] следует, что здесь выгоднее эксплуатировать только один из видов (который имеет большую стоимость). Поэтому для некоторых $\bar{u}^* \in U$, $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ имеет место оценка

$$H_*(\bar{u}^*, x(0)) \geq \max_{x \in \hat{\mathcal{D}}_+} \hat{D}(x) = \max(C_1, C_2) \frac{a(e^{ad/2} - 1)}{b(e^{ad/2} + 1)}.$$

Верхней системой сравнения для системы (6) в области \mathbb{R}_+^2 является система, определяющая модель нейтрализма. Следовательно, при всех $\bar{u} \in U$ имеем оценку сверху средней временной выгоды для исходной системы (6):

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \leq \max_{x \in \mathbb{R}_+^2} \tilde{D}(x) \leq d \sum_{i=1}^2 \frac{C_i a_i (e^{a_i d/2} - 1)}{c_i (e^{a_i d/2} + 1)}.$$

Литература

- [1] Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. Вып. 1. С. 12–24.
- [2] Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 137. С. 16–26.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ ПРОСТОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Баин Д. Д. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

danila.bain@yandex.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием второго порядка

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(x(t - T)), \quad (1)$$

где $b, c > 0$, функция F непрерывно дифференцируема, и для неё существуют конечные пределы на бесконечности:

$$f_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), \quad f_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x). \quad (2)$$

Пусть x_* — это состояние равновесия уравнения (1), то есть $cx_* = F(x_*)$. Линеаризуя систему около этого состояния равновесия, получится линейная система $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F'(x_*)y(t - T)$. Классическим методом для определения устойчивости состояния равновесия x_* является исследование вещественных частей корней характеристического квазимногочлена линеаризованного уравнения $\lambda^2 + b\lambda + c = F'(x_*)e^{-\lambda T}$: если все его корни имеют отрицательную вещественную часть, то состояние равновесия устойчиво, если оно имеет корень с положительной вещественной частью, то соответственно неустойчиво [1]. По итогам этого анализа получается явное условие, определяющее устойчивость x_* при любых параметрах $b, c, T > 0$ и $F'(x_*)$.

Около негрубых состояний равновесия строится нормальная форма бифуркации Андронова-Хопфа [2], при помощи которой получены условия рождения (при ε -малом изменении параметров) периодических решений малой амплитуды вида

$$x(t, \tau) = x_* + \sqrt{\varepsilon} \rho(\tau) \cos(\omega t + \varphi(\tau)) + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} x_3(t, \tau) + O(\varepsilon^2),$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное время».

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (1):

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = F(x(t - T)), \quad (3)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый положительный параметр. У данного уравнения ищется периодическое решение большой амплитуды вида

$$x(t, \tau) = \varepsilon^{-1} \rho(\tau) \cos(t + \varphi(\tau)) + x_0(t, \tau) + O(\varepsilon), \quad (4)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное время».

Теорема. Уравнение (3) имеет устойчивое периодическое решение вида (4) тогда и только тогда, когда $(f_+ - f_-) \sin(T) < 0$.

Литература

- [1] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений : пер. с англ. // Дж. Хейл . – М. : Мир, 1984 . – 421 с. 517 X-354.
- [2] Кащенко И.С. Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием: методические указания // И.С. Кащенко; Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 48 с.

О ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЯХ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

Байков А. Е. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
alexander@baikov.org

Майоров А. Ю. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
ylam123@gmail.com

Рассматриваются два основных тела (две звезды) одной массы m_0 , которые движутся вокруг общего центра масс O по круговой орбите радиуса R . Наряду с ними рассматриваются два малых тела A и B (два астероида) одной массы m , движущиеся произвольно в плоскости орбиты основных тел. Считается, что $m \ll m_0$, поэтому малые тела на звёзды не влияют, однако астероиды испытывают взаимное притяжение. Эта задача разбиралась в [1], но ещё раньше она была рассмотрена в [2], где были найдены относительные положения равновесия (центральные конфигурации) и установлен класс движений, называемых в этой работе внутренними.

Введён малый параметр ε как отношение массы малого тела к массе основного. Найдены коллинеарные и треугольные относительные равновесия малых тел в виде рядов по ε , показано, что все они неустойчивы. Далее рассматриваются внутренние движения системы, определяемые тем, что центр масс астероидов всё время совпадает с центром масс звёзд, при этом малые тела находятся так близко к друг другу, что силы притяжения между ними превосходят силы притяжения со стороны основных тел. Записаны уравнения в оскулирующих элементах a , e , ω и M , описывающие возмущённое движение малых тел, они приведены к безразмерному виду, а затем усреднены по средней аномалии M .

В усреднённых уравнениях безразмерная большая полуось $\tilde{a} = \tilde{a}_0 = \text{const}$. После замены $\beta = \omega - \tilde{a}_0^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{t}$, где \tilde{t} — безразмерное время, заключающейся в переходе от инерциальных осей к синодическим, усреднённые уравнения имеют автономный вид и допускают интеграл $\frac{1}{8} \sqrt{\varepsilon \tilde{a}_0} \sqrt{1 - e^2} + W^*(\tilde{a}_0, e, \beta) = \text{const}$, происходящий из интеграла Якоби строгих уравнений движения.

Построен фазовый портрет усреднённой системы на цилиндре $(0, 1) \times \mathbb{S}^1$ в переменных e , β , исследованы его бифуркации при изменении безразмерной большой полуоси \tilde{a}_0 , в частности, получены условия существования стационарных точек. Показано, что при $\tilde{a}_0^{\frac{3}{2}} < \frac{1}{36} \sqrt{\varepsilon}$ стационарных точек нет, есть зона траекторий с $e \rightarrow 1$ и зона траекторий ротационного типа. При $\tilde{a}_0^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{36} \sqrt{\varepsilon}$ усреднённая система имеет гиперболические стационарные точки на инвариантной кривой $e = 0$, центры $e = e_*$, $\beta = 0$, $\beta = \pi$ и три зоны с разным характером фазовых кривых: зона с $e \rightarrow 1$, зоны траекторий ротационного и либрационного типов, разделённые сепаратрисами.

В завершение доклада обсуждаются решения строгих уравнений движения, следующие из результатов усреднения (периодические и условно-периодические режимы), а также феномены, которые из усреднения не следуют: расщепление сепаратрис и стохастический слой, содержащий $e = 0$.

Литература

- [1] Bakker L. F., Freeman N. J. Relative equilibria and periodic orbits in a Circular Planar (2+2)-Body Problem // *Celest Mech Dyn Astron* 135, 58 (2023).
- [2] Белецкий В.В. Об одной ограниченной задаче четырех тел // Сборник трудов ГАИШ, 1990, 83–92.

О ВЫРОЖДЕНИИ ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ²⁶

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

bsbardin@yandex.ru

Исследование устойчивости периодических движений в классической и небесной механике часто сводится к задаче об устойчивости положения равновесия неавтономной периодической гамильтоновой системы. Анализ устойчивости, как правило, начинается с исследования линеаризованной в окрестности положения равновесия системы, гамильтониан которой может зависеть от одного или нескольких параметров. Если при определенных значениях параметров характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет корень с модулем отличным от единицы, то говорят, что имеет место явление параметрического резонанса [1], которое приводит к неустойчивости.

Рассмотрим частный случай системы с одной степенью свободы, гамильтониан которой имеет вид

$$H = H^{(0)}(q, p) + \varepsilon H^{(1)}(q, p, t, \varepsilon), \quad (1)$$

где ε – один из параметров задачи. Предполагается, что $q = p = 0$ является положением равновесия системы, которое при $\varepsilon = 0$ устойчиво по Ляпунову. Будем также считать, что в окрестности начала координат гамильтониан H является аналитической функцией канонических переменных q, p , а его неавтономная часть $H^{(1)}$ 2π -периодически зависит от t .

Если $\varepsilon \ll 1$, то явление параметрического резонанса в данной системе возникает, когда частота ω собственных колебаний системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия $q = p = 0$, близка к целому или полуцелому числу, т.е. $\omega \approx n/2$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. В плоскости параметров ω, ε области параметрического резонанса исходят из точек с координатами $(n/2; 0)$. Границы этих областей можно построить при помощи метода малого параметра в виде рядов по степеням ε [2].

В данной работе рассматривается особый случай, когда области параметрического резонанса системы с гамильтонианом (1) вырождаются в кривые и линейная система устойчива при $\omega \approx N/2$. В этом особом случае метод малого параметра не позволяет получить выводы об устойчивости. Показано, что в качестве альтернативной методики исследования устойчивости может быть использован подход, предложенный в [3]. Этот подход основан на применении теории бесконечных определителей Хилла для исследования решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

При помощи данного подхода исследована устойчивость положения равновесия в двух задачах классической и небесной механики: в фотогравитационной эллиптической задаче Ситникова и в задаче о движении маятника переменной длины. Показано, что в обеих задачах имеет место вырождение областей параметрического резонанса. Проведен нелинейный анализ и получены строгие выводы об устойчивости положения равновесия.

²⁶Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/> в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

- [1] Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
- [2] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исслед., 2009.
- [3] Magnus W. and Winkler S. Hill's Equation. New York: Interscience Publishers, 1966.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ ПРИ МАЛОЙ МАССЕ ОДНОГО ИЗ ПРИТЯГИВАЮЩИХ ТЕЛ

Бардин Б. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
bsbardin@yandex.ru

Волков Е. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
evvolkov94@mail.ru

Рассматривается плоская круговая ограниченная задача четырех тел, т.е. исследуется движение тела малой массы под действием сил гравитационного притяжения трех массивных притягивающих тел. Тело малой массы не оказывает влияния на движение массивных тел, которые находятся в лагранжевых точках либрации задачи трех тел, т.е. движутся в одной плоскости по круговым орбитам, располагаясь в вершинах равностороннего треугольника. Предполагается, что выполнено условие Рауса, т.е. движение притягивающих тел устойчиво. Уравнения движения тела малой массы допускают стационарные решения, которые описывают положения относительного равновесия этого тела во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат. В абсолютной системе координат этим частным решениям соответствуют центральные конфигурации, когда все четыре тела образуют четырехугольник неизменной формы и размеров, а результирующая сила притяжения, действующая на тело малой массы, направлена к центру масс системы.

Анализ устойчивости указанных центральных конфигураций в линейном приближении проводился в работах [1–5]. В случае равных масс двух притягивающих тел в работе [3] был выполнен нелинейный анализ устойчивости.

В данной работе в строгой нелинейной постановке решается задача об устойчивости данных центральных конфигураций в случае, когда масса одного из притягивающих тел, много меньше масс двух других притягивающих тел. Для ответа на вопрос об устойчивости была получена каноническая замена переменных, приводящая гамильтониан уравнений возмущенного движения к наиболее простой (нормальной) форме. Задача об устойчивости по Ляпунову исходной системы уравнений возмущенного движения эквивалентна задаче об устойчивости по Ляпунову нормализованной системы. Для решения последней задачи были применены известные условия устойчивости и неустойчивости гамильтоновых систем. Наличие в рассматриваемой задаче малого параметра позволило провести исследование аналитически. В плоскости параметров задачи были найдены области устойчивости и неустойчивости положений относительного равновесия тела малой массы, соответствующих центральным конфигурациям. Выводы об устойчивости были получены как при отсутствии резонансов, так и в случаях резонансов второго, третьего и четвертого порядков.

Литература

- [1] Брумберг В. А. Постоянные конфигурации в задаче четырех тел и их устойчивость // *Астрономический журнал*. 1957. Т. 34. Вып. 1. С. 55–74.

- [2] Budzko D. A. Linear stability analysis of equilibrium solutions of the restricted planar four-body problem // Computer algebra systems in teaching and research. 2009. V. 1. P. 28–36.
- [3] Bardin B. S., Volkov E. V. Stability Study of a Relative Equilibrium in the Planar Circular Restricted Four-Body Problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 927.
- [4] Bardin B. S., Volkov E. V. Analysis of Linear Stability and Bifurcations of Central Configurations in the Planar Restricted Circular Four-Body Problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. V. 1191.
- [5] Bardin B. S., Volkov E. V. On bifurcations and stability of central configurations in the planar circular restricted four-body problem // J. Phys.: Conference Series. 2021. V. 1959.

СТРУКТУРА БАСЕЙНОВ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ 3-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ²⁷

Барина М. К. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
mkbarinova@yandex.ru

В работе рассматриваются диффеоморфизмы, заданные на гладких замкнутых трехмерных многообразиях. Диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ называется A -диффеоморфизмом, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболично и периодические точки плотны в $NW(f)$. Для таких диффеоморфизмов имеет место теорема С. Смейла о спектральном разложении [1]: неблуждающее множество A -диффеоморфизма представляется в виде конечного объединения непересекающихся множеств, называемых базисными, каждое из которых является компактным, инвариантным и топологически транзитивным. Если базисное множество является периодической орбитой, то его называют тривиальным, в противном случае оно нетривиальное. Каждая точка x базисного множества обладает устойчивым W_x^s и неустойчивым W_x^u многообразиями, определяемыми следующим образом: $W_x^s = \{y \in M^3 : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$, $W_x^u = \{y \in M^3 : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$, где d — метрика на многообразии M^3 .

Если у компактного множества Λ существует окрестность U такая, что $cl f(U) \subset U$ и $\bigcap_{n=1}^{+\infty} f^n(U) = \Lambda$, то Λ называется аттрактором диффеоморфизма f . Аттрактор для f^{-1} называется репеллером для f . Множества $W_{\mathcal{A}}^s$ и $W_{\mathcal{R}}^u$ называются бассейнами аттрактора \mathcal{A} и репеллера \mathcal{R} соответственно. Согласно А. Брауну [2], двумерные связные гиперболические аттракторы бывают только двух типов:

- поверхностные аттракторы, в этом случае аттрактор \mathcal{A} гомеоморфен 2-тору, ручно вложенному в M^3 , и ограничение диффеоморфизма f на \mathcal{A} сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора;
- растягивающиеся аттракторы, при этом размерность неустойчивых многообразий точек аттрактора равна двум, а сам аттрактор имеет локальную структуру прямого произведения канторова множества на диск.

Имеет место следующая теорема о структуре бассейнов гиперболических аттракторов, доказанная в работе [3].

Теорема 1. Пусть Λ — двумерный связный гиперболический аттрактор A -диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ и B — компонента связности множества $W_{\Lambda}^s \setminus \Lambda$. Тогда

- если Λ — поверхностный аттрактор, то B гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$;
- если Λ — растягивающийся аттрактор, то B гомеоморфно либо $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$.

²⁷Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Структура бассейнов аттракторов и репеллеров непосредственно влияет на неблуждающее множество A -диффеоморфизма в целом. Опираясь на теорему 1, в работах [3] и [4] были доказаны следующие факты.

Теорема 2. *Если все базисные множества A -диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ являются двумерными, то либо все они поверхностные, либо поверхностных нет.*

Теорема 3. *Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ — Ω -устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит двумерный поверхностный аттрактор. Тогда существует нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f , не являющееся аттрактором.*

Литература

- [1] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747–817.
- [2] Brown A. W. Nonexpanding attractors: Conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds // Journal of Modern Dynamics. 2010. V. 4. P. 517–548.
- [3] Barinova M., Grines V., Pochinka O. Dynamics of three-dimensional A -diffeomorphisms with two-dimensional attractors and repellers // Journal of difference equations and applications. 2023. V. 29. № 9-12. P. 1275–1286.
- [4] Barinova M., Pochinka O., Yakovlev E. On a structure of non-wandering set of an Ω -stable 3-diffeomorphism possessing a hyperbolic attractor // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2024. V. 44. № 1. P. 1–17.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ Ω -УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1²⁸

Барина М. К. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
mmbarinova@edu.hse.ru

Кольчурина О. А. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
oakolchurina@edu.hse.ru

В этом докладе будут рассматриваться Ω -устойчивые n -диффеоморфизмы, заданные на ориентируемых многообразиях, все нетривиальные базисные множества которых являются двумерными растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами. Классическим примером такого диффеоморфизма с двумерным ориентируемым растягивающимся аттрактором является DA -диффеоморфизм на трехмерном торе, полученный хирургической операцией Смейла из алгебраического автоморфизма 3-тора. Впервые эта операция была описана Смейлом в 1967 году [1]. В докладе будет описан переход от системы с нерегулярной динамикой к системе с регулярной динамикой, которую будем называть «Регулярный спутник».

В отличие от потоков, каскады не всегда обладают энергетической функцией (см., например, обзор [2]). Первый пример такого каскада был построен Д. Пикеттоном в 1977 году на трехмерной сфере [3] и представлял собой диффеоморфизм Мореа-Смейла с четырьмя неподвижными точками. В той же работе Пикеттон доказал существование энергетической функции Морса для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на поверхностях. В работах В.З. Гринеса, О.В. Починки, М.К. Бариновой были выделены несколько классов 2- и 3-диффеоморфизмов, обладающих энергетическими функциями [4], [5], [6]. В 2022 году М.К. Барина выделила класс динамических систем на поверхностях, у которых нет энергетических функций [7]. Основным результатом является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Ω -устойчивый диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на ориентируемом многообразии, все нетривиальные базисные множества которого являются растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами коразмерности 1, обладает энергетической функцией тогда и только тогда, когда его "регулярный спутник" обладает энергетической функцией.*

²⁸Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Литература

- [1] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. V. 73, P. 747-817.
- [2] Гринес В. З., Починка О. В. Построение энергетических функций для Ω -устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. 2017. Т. 63, С. 191-222.
- [3] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16.
- [4] Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. V. 278, P. 27-40.
- [5] Grines V. Z., Noskova M. K., Pochinka O. V. The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor // Transactions of the Moscow Mathematical Society. 2015. V. 76, P. 237-249.
- [6] Grines V. Z., Noskova M. K., Pochinka O. V. Energy function for A-diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional non-trivial basic sets // Dynamical systems. 2015. V. 5, P. 31-37.
- [7] Barinova M. K. On Existence of an Energy Function for Ω -stable Surface Diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. V. 43, P. 257-263.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ

Безродных С. И. (Россия, Москва)

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
sbezrodnykh@mail.ru

В работе рассматривается следующая система уравнений с частными производными, которая была введена Дж. Лауричеллой в связи с изучением гипергеометрической функции $F_D^{(N)}$, см. [1], [2]:

$$z_j(1-z_j)\frac{\partial^2 u}{\partial z_j^2} + (1-z_j)\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} + \\ + [c - (1+a_j+b)z_j] \frac{\partial u}{\partial z_j} - a_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - a_j b u = 0, \quad j = \overline{1, N}; \quad (1)$$

здесь $u = u(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ — искомая функция, $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ — комплексное векторное переменное, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ и $b, c \in \mathbb{C}$ — комплексные параметры. Голоморфный ранг системы (1) равен $N+1$ и, таким образом, каждый базис в пространстве решений (1) состоит из $(N+1)$ -й функции.

Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ определяется с помощью следующего N -кратного ряда [1], [2]:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \cdots k_N!} z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}; \quad (2)$$

здесь суммирование ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, причем $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$. Фигурирующий в (2) символ Похгаммера $(a)_m$ определяется через гамма-функцию $\Gamma(s)$ по формуле $(a)_m := \Gamma(a+m)/\Gamma(a) = a(a+1) \cdots (a+m-1)$. Параметр c в формуле (2) не принимает целых неположительных значений, т.е. $c \notin \mathbb{Z}^-$. Ряд (2) сходится в единичном поликруге U^N . Ряд (2) является голоморфным в точке $(0, \dots, 0)$ решением системы (1) и представляет собой одно из наиболее естественных обобщений функции Гаусса на случай многих переменных.

В докладе будет представлен вид некоторых базисов в пространстве решений системы (1), а также формулы перехода между ними. В том числе, мы приведем набор формул, дающий решение проблемы аналитического продолжения функции Лауричеллы (2) в \mathbb{C}^N . Эффективный способ построения таких формул указан в [3], [4]. В докладе также будет продемонстрировано применение полученных результатов к решению проблемы параметров интеграла Кристоффеля — Шварца в ситуации кроудинга [3], [4]; об эффекте кроудинга см. [5], [6].

Литература

- [1] Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rendiconti Circ. math. Palermo. 1893. V. 7. P. 111–158.
- [2] Exton H. Multiple hypergeometric functions and application. New York: J. Willey & Sons inc, 1976.
- [3] Безродных С. И. Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // Успехи математических наук. 2018. Т. 73. №6 (444). С. 3–94.
- [4] Безродных С. И. Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и их приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. №11. С. 1763–1798.
- [5] Trefethen L. N., Driscoll T. A. Schwarz — Christoffel transformation. Campridge: Cambridge university press, 2005.
- [6] Banjai L. Revisiting the Crowding Phenomenon in Schwarz — Christoffel Mapping // SIAM Journal on Scientific Computing. 2008. V. 30. №2. P. 618–636.

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА ИЗ ДВУХ УДАЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ ТРАНСПОРТНЫХ ИЗДЕРЖКАХ

Беляков А. О. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Банк России²⁹
НИТУ МИСИС
a_belyakov@inbox.ru

Платов А. С. (Россия, Москва)

НИТУ МИСИС
platovmm@mail.ru

Постановка задачи.

Рассматривается максимизация агрегированной дисконтированной (с нормой $r > 0$) прибыли от эксплуатации с интенсивностями v_1 и v_2 двух удалённых источников возобновляемого ресурса с квадратичными издержками на транспортировку до точки v_3 , расположение которой выбирается между источниками без дополнительных издержек в каждый момент времени

$$\int_0^T e^{-rt} [z_1 v_1 (1 - a_3 v_3 - b_3 v_3^2) + z_2 v_2 (1 - a_3 (1 - v_3) - b_3 (1 - v_3)^2) - a_1 v_1 - a_2 v_2 - b_1 v_1^2 - b_2 v_2^2] dt \rightarrow \max_{v_1, v_2, v_3}, \quad v_1(t), v_2(t), v_3(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, T],$$

где коэффициенты $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$, положительны; управления v_1, v_2, v_3 ограничены. Ресурсы z_1 и z_2 в источниках восстанавливаются по логистическому закону

$$\dot{z}_1 = \alpha (\beta - z_1) z_1 - \delta z_1 v_1, \quad z_1(0) = z_{01} > 0,$$

$$\dot{z}_2 = \alpha (\beta - z_2) z_2 - \delta z_2 v_2, \quad z_2(0) = z_{02} > 0,$$

²⁹ Содержание и результаты данного исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России.

с одинаковыми параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\delta > 0$, где точка сверху переменной означает производную по времени.

Условия оптимальности.

Производные функции Гамильтона-Понтрягина в текущих сопряжённых переменных

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_1} &= z_1 (1 - a_3 v_3 - b_3 v_3^2) - \delta z_1 \theta_1 - a_1 - 2b_1 v_1, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_2} &= z_1 (1 - a_3 (1 - v_3) - b_3 (1 - v_3)^2) - \delta z_2 \theta_2 - a_2 - 2b_2 v_2, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_3} &= z_2 v_2 (a_3 + 2b_3 (1 - v_3)) - z_1 v_1 (a_3 + 2b_3 v_3) \\ &= (z_2 v_2 - z_1 v_1) a_3 + 2b_3 z_2 v_2 - 2b_3 (z_2 v_2 + z_1 v_1) v_3,\end{aligned}$$

и сопряжённые уравнения

$$\begin{aligned}-\dot{\theta}_1 &= v_1 (1 - a_3 v_3 - b_3 v_3^2) + (\alpha (\beta - 2z_1) - (\delta v_1 + r)) \theta_1, \\ -\dot{\theta}_2 &= v_2 (1 - a_3 (1 - v_3) - b_3 (1 - v_3)^2) + (\alpha (\beta - 2z_2) - (\delta v_2 + r)) \theta_2.\end{aligned}$$

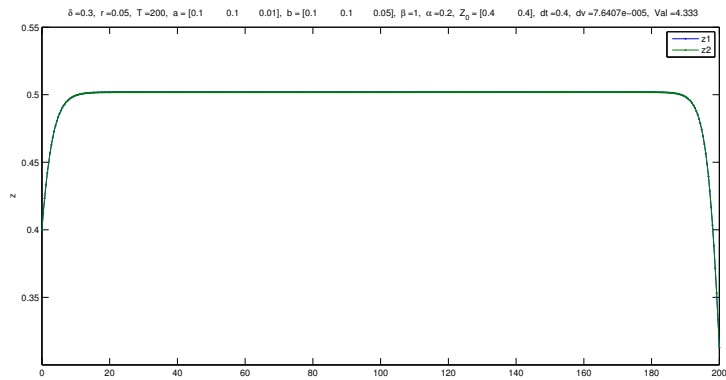
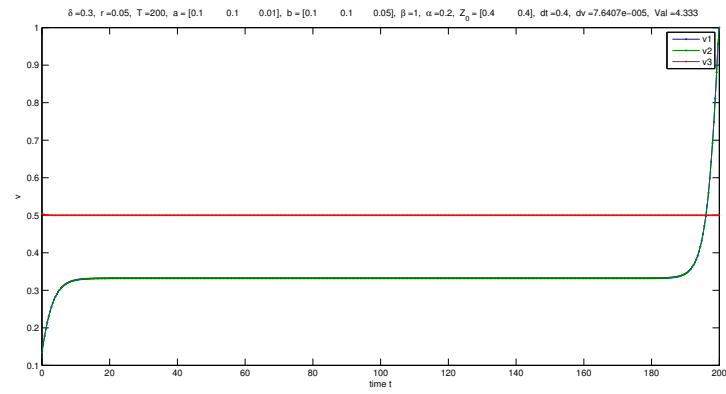
с условиями трансверсальности принципа максимума при конечном горизонте планирования

$$\theta_1(T) = 0, \quad \theta_2(T) = 0,$$

позволяют найти численно оптимальное решение методом градиентного спуска.

Для малой и большой цены транспортировки обнаружено качественное различие видов решений, представленных на верхних и нижних парах графиков Рис. 1, соответственно. При малой цене транспортировки в середине интервала времени интенсивности сбора стремятся к постоянным значениям, а точка, куда свозится ресурс, к равноудалённости от источников ресурса ($v_3 \approx 0.5$). Для большой цены транспортировки выгодно располагать точку своза ресурса то в одном ($v_3 = 0$), то в другом ($v_3 = 1$) источнике ресурса. При этом в середине интервала времени положение центра сбора не стабилизируется при увеличении горизонта планирования T и напоминает “дребезжание” *chattering*, хотя у начала и окончания временного промежутка управления выглядят периодическими и не меняются для больших T .

При малой цене транспортировки $a_3 = 0.01$



При высокой цене транспортировки $a_3 = 0.1$

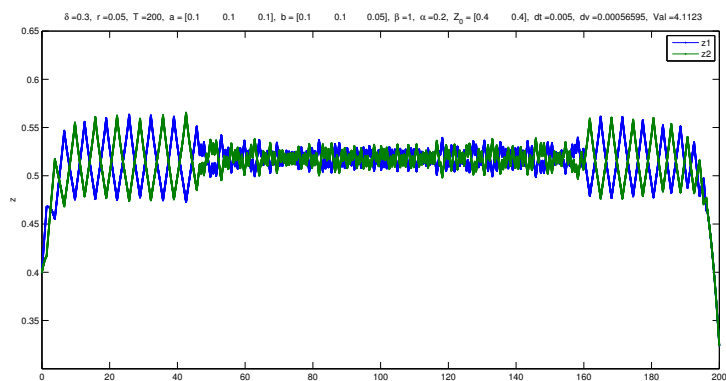
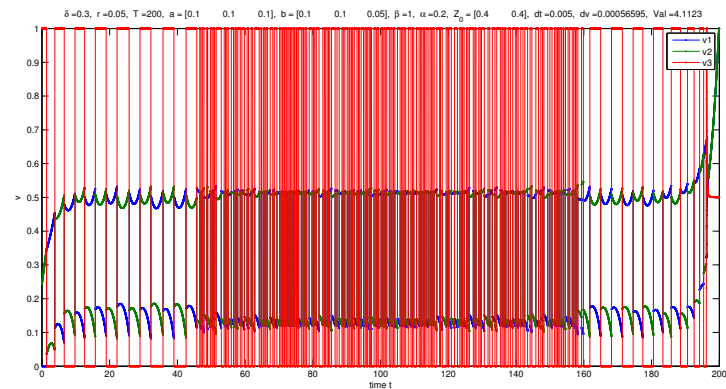


Рис. 1: Интенсивности сбора возобновляемого ресурса на первом v_1 и втором v_2 участке, и расположение точки v_3 , куда свозится собранный ресурс. Уровни возобновляемого ресурса на первом z_1 и втором z_2 участке.

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ГАЗОВЫХ СРЕДАХ

Богданов А. Н. (Россия, Москва)
НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова
bogdanov@imec.msu.ru

Учет вязкости и теплопроводности в уравнениях, моделирующих газодинамические процессы, позволяет вводить скачкообразные изменения параметров среды (ударные волны) в поле рассматриваемого течения как очень быстрые, но непрерывные изменения (что соответствует их природе), в противоположность обычно применяемому разрывному (ударно-волновому) переходу из одного состояния в другое [1]. Учет вязкости и теплопроводности в уравнениях газовой динамики приводит к повышению их порядка, но это искупается появляющейся при таком подходе возможностью моделирования всего процесса в целом, без привлечения дополнительных соображений о месте расположения разрыва и т.п.

Периодические воздействия на газовую среду, близкие по частоте к частоте возможных собственных колебаний среды (околорезонансные воздействия) приводят к развитию околорезонансных колебаний — периодических изменений параметров среды (процесса), то медленных, то очень быстрых, близких к скачкообразным. Колебания такого рода обнаруживают себя, например, в каналах различного устройства при близости частоты внешних воздействий на среду канала к частоте возможных собственных ее колебаний в этом устройстве — в таком случае в нем возникают и распространяются по нему периодические скачки сжатия — ударные волны. Нелинейные околорезонансные колебания в газе являются одной из важных проблем газовой динамики, поскольку развитие такого рода процессов может представлять серьезную угрозу работе механических систем [2]. Особо следует отметить возможность установления развития процесса автоколебаний, такие колебания не исчезают и после прекращения действия вынуждающей силы, т.е. являются автоколебаниями. Примером могут служить околорезонансные колебания в экзотермической среде [3].

Литература

- [1] Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
- [2] Ганиев Р. Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. 592 с.
- [3] Богданов А. Н. Релаксационные колебания неравновесного газа, заполняющего канал переменного сечения // ПМТФ. 1994, № 3. С. 22–33.

ЕЩЕ ОДНА БИЛЬЯРДНАЯ ЗАДАЧА

Болотин С. В. (Россия, Москва)
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
bolotin@mi-ras.ru

Трещев Д. В. (Россия, Москва)
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
treschev@mi-ras.ru

В работах С.Ю.Доброхотова и В.Е.Назайкинского [1], [2] по квазиклассическому приближению для вырожденного волнового уравнения возникла задача исследования геодезического потока римановой метрики, стремящейся к бесконечности на границе области. После регуляризации задача сводится к изучению вырожденного бильярда типа Биркгофа. Будет получена нормальная форма регуляризованного геодезического потока вблизи границы и доказан вариант теоремы Лазуткина [3] для соответствующего бильярдного отображения. Доклад основан на работе [4].

Литература

- [1] Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B., Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data // Russ. J. Math. Phys. 20 (2013), 389-401.
- [2] Назайкинский В. Е., Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области // Матем. заметки, 92:1 (2012), 153-156.
- [3] Лазуткин В. Ф., Существование каустик для бильярдной задачи в выпуклой области // Изв. АН СССР. Сер. матем., 37:1 (1973), 186-216.
- [4] Bolotin S., Treschev D., Another billiard problem // Russ. J. Math. Phys. 31 (2024), 50-59.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Боревич Е. З. (Россия, Санкт-Петербург)

Санкт-Петербургский государственный торгово-экономический университет
danitschi@gmail.com

Рассматривается нестационарная краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial E}{\partial x} E - fH(E, E_0), \\ E(0, t) = E(1, t) = E_0, \quad E(x, 0) = \tilde{E}(x), \end{cases} \quad (1)$$

где f – положительная константа, $H(E, E_0) = G(E) - G(E_0)$, а функция $G(E)$ класса C^2 удовлетворяет условиям:

- 1) функция $G(E)$ при $E > 0$ имеет ровно две точки экстремума: E_1 – локальный максимум, E_2 – локальный минимум, причем $E_1 < E_2$;
- 2) $G'(E) > 0$ при $E \in [0, E_1) \cup (E_2, +\infty)$, $G'(E) < 0$ при $E \in (E_1, E_2)$.

Рассмотрим стационарную задачу

$$\begin{cases} E'' + E'E = fH(E, E_0), \\ E(0) = E(1) = E_0. \end{cases} \quad (2)$$

Утверждение 1. 1) Если $0 < E_0 \leq E_1$ или $E_0 \geq E_2$, то задача (2) имеет только тривиальное решение $E(x) = E_0$;

2) если $E_0 \in (E_1, E_2)$, то задача (2) имеет бифуркационные решения $E_k^\gamma(x, f)$ при любом $f > f_k$, где $f_k = -H'(E_0)^{-1}(E_0^2/4 + \pi^2 k^2)$, $k = 1, 2, \dots$, $\gamma = +, -$ [1].

Утверждение 2. 1) Если $E_1 < E_0 < E_2$, то уравнение $H(E, E_0) = 0$ имеет ровно три положительных решения $0 < E_1(E_0) < E_0 < E_2(E_0)$, причем $H'_E(E_i(E_0), E_0) > 0$, $i = 1, 2$;

2) существует единственное E_0^* такое, что

$$\int_{E_1(E_0^*)}^{E_2(E_0^*)} H(s, E_0^*) ds \quad \begin{cases} > 0 & \text{if } E \in (E_1(E_0^*), E_2(E_0^*)), \\ = 0 & \text{if } E = E_2(E_0^*). \end{cases}$$

Теорема 1 [2]. Если $E_1 < E_0 < E_0^*$, то при $f > f_1$ решение $E_1^-(x, f)$ задачи (2) является асимптотически устойчивым в $H_0^1(0, 1)$;

2) если $E_0^* < E_0 < E_2$, то при $f > f_1$ решение $E_1^+(x, f)$ задачи (2) является асимптотически устойчивым в $H_0^1(0, 1)$;

3) если $E_0 = E_0^*$, то при $f > f_1$ оба решения $E_1^m(x, f)$ задачи (2) являются асимптотически устойчивыми в $H_0^1(0, 1)$.

Теорема 2 [2]. При любом $E_0 \in (E_1, E_2)$ и любом $k = 2, 3, \dots$ решения $E_k^\mp(x, f)$ не устойчивы в $H_0^1(0, 1)$ при $f > f_k$.

Теорема 3 [2]. Решение $E(x, f) \equiv E_0$ асимптотически устойчиво в $H_0^1(0, 1)$ при $0 < f < f_1$ и не устойчиво при $f > f_1$.

Литература

- [1] Grandall M. G., Rabinowitz P. H. Bifurcation from simple eigenvalues // J. Funct. Anal. — 1971. — Vol.8. — P. 321–340.
- [2] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ КРЕПЛЕНИЯ

Борзунов С. В. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
sborzunov@gmail.com

Семенов М. Е. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
mkl150@mail.ru

Канищева О. И. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
oleka_olesya@mail.ru

Соловьев А. М. (Россия, Воронеж)

АО «Концерн «Созвездие»
darkzite@yandex.ru

Мелешенко П. А. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
melechp@yandex.ru

Во многих практически важных задачах механики, физики, экономики, части технических систем подвержены воздействию неконтролируемых факторов и шумов. В этом случае корректное описание такого рода систем должно учитывать случайные факторы, и применительно к задачам стабилизации и управления это особенно важно. В теории управления на примере перевернутого маятника как эталона неустойчивой системы строятся многие алгоритмы управления.

Исследована возможность стабилизации обратного маятника посредством осцилляций нижней точки крепления. Движение нижней точки крепления происходит по стохастическому закону: амплитуда ее колебаний есть сумма детерминированной и случайной составляющей.

Модель перевернутого маятника с осциллирующей точкой подвеса была предложена в пионерских работах П. Л. Капицы [1, 2]. Закон движения имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} - \frac{1}{L}[g + \ddot{f}(t)] \sin \varphi = 0, \\ \varphi(t)|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t)|_{t=0} = \varphi_1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от вертикали, L — длина маятника, g — ускорение свободного падения, $f(t)$ — закон движения точки подвеса, а постоянные φ_0 и φ_1 задаются начальными условиями. Как хорошо известно, если движение точки подвеса носит гармонический характер, то уравнение (1) сводится к уравнению Матгё.

В настоящей работе показано, что сколь угодно малые стохастические рассогласования амплитуды колебаний приводят к невозможности стабилизации верхнего положения. Этот результат основан на аналитической зависимости собственных чисел матрицы монодромии от числа колебаний. В работе получен закон убывания меры области устойчивости в пространстве параметров с увеличением числа колебаний в условиях стохастических рассогласований амплитуды.

Полученные результаты позволяют сделать вывод: если рассматриваемая система или управление содержит даже очень слабую неопределенность, то такая система не может быть стабилизирована в принципе.

Литература

- [1] Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
- [2] Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
- [3] Semenov M. E., Shevlyakova D. V., Meleshenko P. A. Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions // Nonlinear Dynamics. 2014. V. 75. P. 247–256.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА СО СДВИГОМ³⁰

Борисов Д. И. (Россия, Уфа)

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН
borisovdi@yandex.ru

Поляков Д. М. (Россия, Владикавказ, Уфа)

Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН
DmitryPolyakow@mail.ru

В настоящей статье мы рассматриваем одномерный оператор Шрёдингера, который возмущен оператором малого сдвига. Данный сдвиг интерпретируется как малый параметр в задаче. Основная цель работы — получить асимптотику собственных значений для больших номеров, которая будет равномерна по малому параметру. Ранее задачи с малым параметром изучались только для отдельных модельных случаев операторов (см. [1] и используемую там литературу), которые содержали малый параметр при старшей производной.

Дадим подробную постановку задачи. В пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор \mathcal{A} вида $\mathcal{A}y = -y''$, который мы будем считать невозмущенным. В качестве области определения оператора \mathcal{A} будет выступать пространство $\dot{W}_2^2(0, 1)$, т. е. подпространство функций из пространства Соболева $W_2^2(0, 1)$, обращающихся в нуль на концах отрезка. При этом оператор \mathcal{A} самосопряжен.

Введем в рассмотрение два вспомогательных оператора. Через \mathcal{L} обозначим оператор продолжения нулем вне интервала $(0, 1)$, который рассматриваем как действующий из $L_2(0, 1)$ в $L_2(\mathbb{R})$, а через \mathcal{R} — оператор сужения на $(0, 1)$, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(0, 1)$. Оба введенных оператора задаются следующим образом: $\mathcal{L}y = y$ в $(0, 1)$ и $\mathcal{L}y = 0$ вне $(0, 1)$, а также $\mathcal{R}y = y$ на $(0, 1)$. Далее в $L_2(\mathbb{R})$ определим следующим образом оператор \mathcal{T}^ε малого сдвига $(\mathcal{T}^\varepsilon y)(x) = y(x + \varepsilon)$, $x \in (0, 1)$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть V и S — комплекснозначные функции из пространства $C^1[0, 1]$. Тогда для произвольной функции $y \in L_2(0, 1)$ основной возмущающий оператор \mathcal{B}^ε в пространстве $L_2(0, 1)$ действует следующим образом:

$$(\mathcal{B}^\varepsilon y)(x) = -V(x)y(x) - S(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

где функция y считается продолженной нулем вне отрезка $[0, 1]$, а результат действия сужается на данный отрезок. Хорошо видно, что при $\varepsilon = 0$ оператор \mathcal{B}^ε превращается в обычный оператор умножения на потенциал $-V$. Таким образом, основным объектом изучения в настоящей работе является оператор $\mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{A} - \mathcal{B}^\varepsilon$, действующий в $L_2(0, 1)$ на области определения $\dot{W}_2^2(0, 1)$.

Несложно установить, что оператор \mathcal{H}^ε имеет компактную резольвенту и его спектр состоит из счетного числа собственных значений с единственной точкой накопления в бесконечности. Обозначим собственные значения через λ_n , $n \in \mathbb{N}$, и пронумеруем их в порядке возрастания их модулей. Через $\chi_I = \chi_I(x)$ будем обозначать характеристическую функцию отрезка I на вещественной прямой.

³⁰Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>.

Наш основной результат посвящен асимптотике собственных значений оператора \mathcal{H}^ε при больших номерах n .

Теорема 1. Для собственных значений λ_n оператора \mathcal{H}^ε справедлива следующая асимптотика

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \pi^2 n^2 + 2 \int_0^1 V(x) \sin^2 \pi n x dx \\ & + 2 \int_0^1 S(x) \sin \pi n x \left(\chi_{[0,1-\varepsilon]}(x) \sin \pi n(x + \varepsilon) - \sin \pi n x \right) dx \\ & - \frac{\sin \pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^1 (S(x) - V(x)) \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) dt - \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(t) dt \right) dx \\ & + \frac{\sin 2\pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^{1-\varepsilon} S(x) \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{1-\varepsilon} S(t) dt \right) dx + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

при $n \rightarrow +\infty$. Оценка остаточного члена равномерна по ε .

Литература

- [1] Шкаликов А. А. О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №6. С. 950–953.

ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ КОДОВ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АЭРО- И ГИДРОУПРУГОСТИ

Бородин А. К. (Россия, Москва)
ООО «ТЕСИС»

Институт прикладной механики РАН
borodin@tesis.com.ru

Фельдштейн В. А. (Россия, Москва)
Институт прикладной механики РАН
dinpro@mail.ru

В процессе создания конструкций современной техники все большее место занимает расчетное исследование процессов динамики конструкций, взаимодействующих с потоками жидкости и газа. В настоящее время для решения задач этого класса широко применяются численные методы решения задач математической физики. Несомненно, что это направление будет получать большое развитие, стимулируемое как запросами практики, так и прогрессом компьютерных технологий. Вместе с тем, численные методы и их программная реализация требуют обоснования получаемых с их помощью решений, которое во многих случаях не может быть достигнуто традиционными методами. В связи с этим необходимо создать методику верификации программных кодов, основываясь на базовых аналитических задачах. В данной работе приводится решение и верификация двух задач аэро- и гидроупругости:

- Задача гидроупругости о колебаниях линейного осциллятора в потоке несжимаемой жидкости. Особенностью принятой постановки является учет изменения коэффициента гидродинамического сопротивления вследствие изменения числа Рейнольдса в течение периода колебаний [1]. Решение задачи получено двумя способами: численно и аналитически с использованием метода гармонической линеаризации по Боголюбову – Митропольскому [2]. Полученные решения использованы для верификации программных кодов, основанных на численных решениях уравнений Навье-Стокса по методу конечных объемов с использованием программного кода FlowVision.

- Задача о растяжении круглой упругой проницаемой мембраны при нелинейных деформациях под действием потока газа сквозь нее. Эта задача является модельной для тестирования программного кода FlowVision, связанного с расчетом парашютных систем. Предложен подход к решению задачи, основанный на сведении известной системы уравнений относительно нормального прогиба и функции напряжений [3] к одному нелинейному уравнению относительно радиального напряжения, содержащему единственный свободный параметр – коэффициент Пуассона материала. Решение этого уравнения получено численно и, благодаря использованию безразмерных параметров, является универсальным для одного из важных классов нелинейных задач теории оболочек и удобным для практического использования, в частности, для верификации программных кодов FlowVision.

Литература

- [1] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: «Мир», 1973.
- [2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958
- [3] Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М. ГИТТЛ, 1956.

ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Бортаковский А.С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
asbortakov@mail.ru

Рассматриваются задачи оптимального управления непрерывными динамическими системами с фазовыми ограничениями [1]. Предполагается, что траекторию системы можно разбить на участки, на каждом из которых набор активных фазовых ограничений известен. Такие траектории характерны для гибридных систем, в которых переход от одного участка к другому считается переключением. Применяя необходимые условия оптимальности гибридных систем с промежуточными ограничениями [2], получаем решение первоначальной задачи с фазовыми ограничениями. Сведение непрерывных динамических систем с фазовыми ограничениями к гибридным системам с промежуточными условиями демонстрируется на примерах.

Предлагаемый подход можно применить к задачам оптимального управления гибридными системами переменной размерности с фазовыми ограничениями. Если траектория гибридной системы разбивается на участки с известными наборами активных фазовых ограничений, то для ее оптимизации можно использовать необходимые условия оптимальности гибридных систем с промежуточными условиями [2]. Заметим, что в прикладных задачах последовательность, в которой меняются активные фазовые ограничения, как правило, известна. Поэтому предлагаемый подход кажется актуальным.

Литература

- [1] Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: Изд-во Центра приклад. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2004.
- [2] Bortakovskii A. S. Necessary Optimality Conditions for Hybrid System of Variable Dimension with Intermediate Constraints // J. of Math. Sci. 2023. Vol. 270. No. 5. P. 640-653.

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ p -ЛАПЛАСИАНА
НА МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Бровкин В. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
brovvadim2015@gmail.com

Пусть M — связное n -мерное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно пустым). Рассмотрим задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{на } M, \quad |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial M} = h, \quad \int_M |\nabla u|^p dV < \infty, \quad (1)$$

где Δ_p , $p > 1$, — оператор p -Лапласа-Бельтрами, ν — вектор внешней нормали к ∂M , а f и h — некоторые функции из $\mathcal{D}'(M)$, причем $\text{supp } h \subset \partial M$. Решения задачи (1) будем понимать в обобщенном смысле [1].

Многообразие M называется p -гиперболическим, если $\text{cap}_p(M) > 0$, где $\text{cap}_p(M)$ — p -емкость многообразия M [1]. В противном случае многообразие M называется p -параболическим.

Обозначим

$$N_\Omega(l) = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}=1} |(l, \varphi)|,$$

где $\Omega \subset M$ — открытое множество, $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}$ — полунорма в $L_p^1(\Omega)$ [2].

Множество $E \subset M$ называется модельным концом многообразия M , если оно представимо в виде $E = D \times [r_0, \infty)$, где D — $(n-1)$ -мерное компактное риманово многообразие с краем (возможно пустым) и $r_0 > 0$ — некоторое вещественное число, причем на E задана метрика $ds^2 = a^2(r) dr^2 + b^2(r) \tilde{g}_{ij}(\theta) d\theta^i d\theta^j$, где a и b — положительные бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, а \tilde{g}_{ij} и θ^i — метрический тензор и локальные координаты на D .

Говорим, что E — модельный конец p -гиперболического типа, если

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{a(r) dr}{b^{(n-1)/(p-1)}(r)} < \infty.$$

В противном случае E называется модельным концом p -параболического типа.

Несложно увидеть, что все модельные концы p -параболического многообразия имеют p -параболический тип. В то же время p -гиперболическое многообразие может иметь концы как p -гиперболического, так и p -параболического типа.

Будем предполагать, что $M = \omega \cup E_1 \cup \dots \cup E_k$, где ω — липшицева область с компактным замыканием, а $E_\tau = D_\tau \times [r_{0,\tau}, \infty)$ — модельные концы многообразия M с метрикой $ds_\tau^2 = a_\tau^2(r) dr^2 + b_\tau^2(r) \tilde{g}_{ij,\tau}(\theta) d\theta^i d\theta^j$, $\tau = 1, \dots, k$.

Положим $\Omega = \omega \cup D_1 \times [r_{0,1}, r_{1,1}) \cup \dots \cup D_k \times [r_{0,k}, r_{1,k})$ и $\Omega_{i,\tau} = D_\tau \times (r_{i-1,\tau}, r_{i+2,\tau})$, где последовательность вещественных чисел $\{r_{i,\tau}\}_{i=1}^\infty$ для каждого $\tau \in \{1, \dots, k\}$ определяется из соотношений

$$\int_{r_{i+1,\tau}}^{\infty} \frac{a(s) ds}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)} = \frac{1}{2} \int_{r_{i,\tau}}^{\infty} \frac{a(s) ds}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}$$

в случае, если E_τ — модельный конец p -гиперболического типа, и

$$\int_{r_{0,\tau}}^{r_{1,\tau}} \frac{a(s) ds}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)} = 1, \quad \int_{r_{0,\tau}}^{r_{i+1,\tau}} \frac{a(s) ds}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)} = 2 \int_{r_{0,\tau}}^{r_{i,\tau}} \frac{a(s) ds}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}$$

в случае, если E_τ — модельный конец p -параболического типа.

Теорема 1. Пусть M — p -гиперболическое многообразие. Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$N_\Omega(f - h) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{\tau=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_{i,\tau}}^{p/(p-1)}(f - h) < \infty. \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть M — p -параболическое многообразие. Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено (2), и при этом существовала последовательность функций $\eta_i \in C_0^\infty(M)$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f - h, \eta_i) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\eta_i\|_{L^1_p(M)} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_i|_K = 1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где K — некоторый компакт положительной меры.

Литература

- [1] Бровкин В. В., Коньков А. А. О существовании решений второй краевой задачи для p -лапласиана на римановых многообразиях // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 2. С. 180–195.
 [2] Мазья В. Г. Пространства С.Л.Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ И АДДИТИВНОЙ ФОРМЕ

Буланов С. Г. (Россия, Таганрог)

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)

Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)

bulanovtgp@mail.ru

Представлены разновидности критериев устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в виде необходимых и достаточных условий. Критерии конструируются в условиях существования и непрерывности решения на полуоси, непрерывности правой части системы и ее непрерывной дифференцируемости на полуоси. Мультипликативная и аддитивная форма критериев влечет возможность программной реализации в режиме реального времени.

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что в области $R : \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0\}$ для (1) выполнены все условия существования и единственности решения и функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t .

На основе мультипликативных преобразований разностных схем численного интегрирования получено соотношение для величины возмущения [1]

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)})(\tilde{y}_{k0} - y_{k0}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Теорема 1. В рассматриваемых условиях мультипликативные критерии устойчивости и асимптотической устойчивости решения задачи (1) имеют вид [1]:

$$\left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Так как, согласно (2) $\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + h D_{i-\ell}^{(k)}) = \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}}$ то критерии (3), (4) можно представить в эквивалентной форме

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \leq \tilde{c}_1, \tilde{c}_1 = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty), k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

По аналогии с (2), на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования величина возмущения определяется из следующего соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)),$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 2. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование Δ , $0 < \Delta \leq \delta$ такого, что $\forall \tilde{Y}(t) : 0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}_2, \tilde{c}_2 = \text{const}, \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1 \leq \Delta$, такое, что неравенство $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Литература

- [1] Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 7. С. 42–60.

ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ЛЬДА И ЖИДКОСТИ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ³¹

Булатов В. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
internalwave@mail.ru

Владимиров И. Ю. (Россия, Москва)

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
iywvladimirov@rambler.ru

³¹Работа выполнена по гранту РНФ 23-21-00194.

Ильичева М. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

mariailicheva@gmail.com

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Поверхностные возмущения ледяного покрова, которые могут быть зарегистрированы с помощью специальных радиолокационных и оптических систем, несут информацию не только об источниках возмущений, но и о характеристиках морской среды подо льдом. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным (его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн), и при достаточно общих условиях моделируется тонкой упругой физически линейной пластиной, деформации которой малы. Целью настоящей работы является решение задачи о построении асимптотик дальних волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых локализованным источником в потоке однородной жидкости бесконечной глубины. Показано, что при изменении основных параметров волновой генерации (изменение скоростей потока и толщины льда) происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей на границе раздела льда и жидкости. Дисперсионные зависимости могут представлять замкнутые, всюду выпуклые кривые, а также могут иметь две пары точек перегиба, которые существуют только при достаточно малых значениях волновых чисел и расположены симметрично. Усложнение топологии дисперсионных зависимостей приводит к генерации дополнительной системы поперечных волн и появлению соответствующих пар волновых фронтов. В этом случае фазовые картины демонстрируют пространственные структуры типа «ласточкина хвоста», когда в фиксированной точке наблюдения происходит качественная перестройка одновременно приходящих волновых фронтов. Наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных зависимостей, так как асимптотики дальних волновых полей в окрестности соответствующих волновых фронтов и каустик, отвечающих этим экстремумам, можно описать с помощью метода эталонных интегралов. Сложность топологии дисперсионных зависимостей требует для корректного асимптотического исследования дальних полей применения специального математического аппарата. Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений на границе раздела ледяного покрова и качественно анализировать полученные решения. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных морских условиях и рассчитывать дальние волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натуральных условиях волновым картинам, что дает возможность оценить физические параметры реальных источников в морской среде с ледовым покрытием и определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров.

КОММУТАТОРЫ СИНГУЛЯРНЫХ \mathbb{K} -ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ В \mathbb{R}_n^{32}

Булатов Ю. Н. (Россия, Елец)

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

y.bulatov@bk.ru

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\}$. Исследования уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя, в котором параметр оператора был отрицательным, иницировано И.А. Киприяновым. Такие исследования начаты в работе [1] для операторов вида

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad -\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n), \quad -\gamma_i \in (-1, 0),$$

Пусть $\mu_i = \frac{\gamma_i+1}{2}$, $i = \overline{1, n}$. Фундаментальной системой решений сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром $B_{-\gamma} u + u = 0$ являются \mathbb{J} -функции Бесселя [2]:

$$\mathbb{J}_{-\mu_i}(x) = \Gamma(1 - \mu_i) 2^{-\mu_i} x_i^{\mu_i} J_{-\mu_i}(x) = x_i^{2\mu_i} j_{-\mu_i}, \quad \mathbb{J}_{\mu}(t) = \Gamma(1 + \mu) 2^{\mu} t^{\mu} J_{\mu}(t) = t^{2\mu} j_{\mu}.$$

где $J_{\mp\mu_i}$ — функции Бесселя первого рода и $j_{\mp\mu_i}$ — j -функции Бесселя. Пусть $\mathbf{J}_{\mu}(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}$, где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ мультииндекс, координаты которого $\mu_i \in (\frac{1}{2}, 1)$. Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать подпространство пространства основных функций Л. Шварца, состоящее из четных по Киприянову функций [3, с.21].

Пусть s — действительное число. Через $\Xi_{-\gamma}^s = \Xi_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных по x и ξ функций $a(x, \xi)$. Класс функций $\Xi_{-\gamma}^s$ будем называть пространством символов порядка s . Через $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим пополнение множества S_{ev} по норме $\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_n^+} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi$, где \widehat{u} — четное \mathbf{J} -преобразование (см. [2]).

Определение 1. *Операторы, действующие на функцию, принадлежащую пространству $S_{ev}(0, \infty)$, по формуле*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}_n^+} \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_{\mu}(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} f(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i,$$

$(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y) = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \alpha_1}, \dots, \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos \alpha_n}\right)$, будем называть сингулярными \mathbb{K} -псевдодифференциальными операторами (далее \mathbb{K} -ПДО). Функция $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$ называется символом оператора A порядка m .

Приведем формулировки теоремы о порядке сингулярных \mathbb{K} -ПДО с символом из Ξ_{ev}^m и теоремы о произведении и коммутаторе.

Теорема 1. *Сингулярный \mathbb{K} -ПДО (1) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка m , т.е.*

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^s} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}} \quad (5)$$

Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные \mathbb{K} -ПДО. Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо для произведения

³²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-00387).

A_1A_2 и сингулярного \mathbb{K} - ПДО с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2 . Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

Теорема 2. *Оператор $A_1A_2 - A_1 \circ A_2$ имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n)$, т.е.*

$$\|(A_1A_2 - A_1 \circ A_2)u\|_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq C\|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Литература

- [1] Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. №12. С. 1610–1620.
- [2] Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. №12. С. 1654–1665.
- [3] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ СРЕДЫ³³

Булатова Р. Р. (Россия, Москва)

НИТУ МИСИС

bulatova.rr@misis.ru

Рассматривается система температурного пограничного слоя, возникающего вблизи поверхности пластины в случае, когда температуры поверхности обтекаемого тела и набегающего потока различны, тем самым, между телом и средой протекает процесс теплообмена.

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений пограничного слоя имеет вид:

$$\nu(1 + k(u_y)^2)u_{yy} - uu_x - vu_y = -U(x)U'(x), \quad u_x + v_y = 0. \quad (1)$$

$$aT_{yy} - uT_x - vT_y = -\frac{\nu}{c}(u_y)^2. \quad (2)$$

Здесь u и v – продольная и поперечная компоненты скорости жидкости в пограничном слое, $\nu > 0$ – реологическая константа среды, k – малая положительная постоянная, которая зависит от свойств среды, плотность жидкости предполагается равной единице. $T(x, y)$ – температура среды в точке (x, y) , a и c – заданные физические параметры рассматриваемой жидкости. $U(x)$ – продольная составляющая скорости среды во внешнем потоке. Заданная функция $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ соотношением Бернулли

$$U^2(x) + 2p(x) = const.$$

Система уравнений (1), (2) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, y) \Rightarrow U(x) \quad \text{п} \quad y \rightarrow \infty \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_w(x), \quad T(x, y) \Rightarrow T_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty \quad (4)$$

Функции $v_0(x)$, $T_w(x)$, обозначающие, соответственно, скорость вдува (отсоса) жидкости в поток (из потока) в точке x нижней стенки области и температуру стенки в точке x , предполагаются заданными. Постоянная T_∞ является температурой внешнего потока.

С помощью преобразования Крокко: $\xi = x$, $\eta = u(x, y)/U(x)$ система уравнений (1) сводится к одному квазилинейному уравнению вида

$$\nu(1 + 3kU^2w^2)w^2w_{\eta\eta} - \eta Uw_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu k U^2 w_\eta^2 w^3 = 0.$$

³³Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-11-20272

Область D переходит в область $G = \{0 < x < X, 0 < \eta < 1\}$, а граничные условия (3) в следующие условия для w

$$w|_{\eta=1} = 0, \quad (\nu(1 + 3kU^2w^2)w^2w_{\eta\eta} - v_0w + U_\xi)|_{\eta=0} = 0$$

При замене Крокко уравнение (2) для температуры имеет вид

$$aw^2T_{\eta\eta} - \eta UT_\xi - [(\nu(1 + 3kU^2w^2) - a)ww_\eta + (1 - \eta^2)U_\xi]T_\eta = -\frac{\nu}{c}U^2w^2$$

Последнее уравнение в области G обладает теми же особенностями, что и уравнение (2) в D : оно вырождается при $\eta = 1$, $\eta = 0$ и $\xi = 0$.

Изучено уравнение для температуры, доказана однозначная разрешимость основной краевой задачи для этого уравнения.

Литература

- [1] Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физмалит. 1997.
- [2] Джураев Т. Д. Об однозначной разрешимости основной краевой задачи теории температурного пограничного слоя. Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. № 1. С. 170-175.
- [3] Булатова Р. Р., Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко. Доклады Академии наук, М.: Наука. 2019. Т. 487. № 2. С. 119-125.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ, ЗАДАВАЕМЫХ КУСОЧНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФУНКЦИЯМИ³⁴

Буров А. А. (Россия, Москва)

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
jtm@narod.ru

На примерах обсуждаются особенности реализации одно- и двухсторонних голономных связей, заданных кусочно-дифференцируемыми функциями, в частности, чувствительность свойств равновесий систем, стеснённых связями, к способу реализации этих связей.

Пример. Тяжёлая материальная точка движется в области вертикальной плоскости, задаваемой неравенством

$$f = |x| - y \leq 0, \tag{1}$$

где Oxy — система отсчёта, ось Ox которой горизонтальна, а ось Oy направлена вдоль восходящей вертикали. Спрашивается, как аккуратно доказать то, что точка $(0, 0)$ — устойчивое положение равновесия.

Решение. Формально говоря, следует применить метод множителей Лагранжа: для отыскания критических точек и исследования их типа выписать функцию Лагранжа

$$W = U + mg\lambda f, \quad U = mgy$$

где m — масса точки, $g > 0$ — ускорение силы тяжести, и рассмотреть задачу на безусловный экстремум. Однако, трудность уже при выписывании уравнений движения состоит в том, что непрерывная функция $y = |x|$, определяющая границу неудерживающей связи (1), недифференцируема в классическом смысле в точке $(0, 0)$.

Ради преодоления таких трудностей представим связь (1) как объединение двух неудерживающих связей

$$f_1 = x - y \leq 0, \quad f_2 = -x - y \leq 0 \tag{2}$$

³⁴Работа выполнена при поддержке РФФ, грант 24-21-20143.

и для освобождения от связей составим потенциал по правилу (ср. [1-7])

$$U_N = \frac{1}{2}N\varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y), \quad (3)$$

Здесь $N > 0$ — безразмерный параметр,

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x - y \leq 0 \\ (x - y)^2, & x - y > 0 \end{cases}, \quad \varphi_2(x, y) = \begin{cases} 0, & -x - y \leq 0 \\ (x + y)^2, & -x - y > 0 \end{cases}.$$

В области $|x| + y \leq 0$ функция $W = mgy + N(x^2 + y^2)$ — гладкая. Её единственная критическая точка, определяемая из уравнений

$$W_x = 2Nx = 0, \quad W_y = mg + 2Ny = 0,$$

задаёт единственное равновесие, имеющее вид

$$x(N) = 0, \quad y(N) = -\frac{mg}{2N}$$

Оно расположено в рассматриваемой области и с увеличением жёсткости $N \rightarrow \infty$ стремится к началу координат — интуитивно понятному равновесию исходной системы, стеснённой связью. В силу положительности обоих коэффициентов Пуанкаре это равновесие устойчиво, что, впрочем, понятно из принципа Торричелли.

Литература

- [1] Rubin H., Ungar P. Motions under a strong constraining force // *Communs Pure and Appl. Math.* 1957. V. 10. No. 1. P.65 – 87.
- [2] Козлов В. В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неударивающими связями // *ПММ.* 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883 – 894.
- [3] Дерябин М. В. О реализации неударивающих связей // *Прикл. матем. и механ.* 1994. 58, вып. 6. С. 136 – 140.
- [4] Дерябин М. В., Козлов В. В. К теории систем с односторонними связями // *ПММ.* 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 531 – 539.
- [5] Журавлев В. Ф., Фуфаев Н. А. *Механика систем с неударивающими связями.* М.: Наука, 1993. 240 с.
- [6] Иванов А. П. Об устойчивости в системах с неударивающими связями // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725 – 732.
- [7] Буров А. А. О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // *ПММ.* 2003. Vol. 67. No. 2. P. 222 – 230.

СКОРОСТЬ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ СИНОС-ПРОЦЕССА

Буфетов А. И. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

bufetov@mi-ras.ru

В докладе дается квадратичная верхняя оценка убывания временных корреляций мультипликативных функционалов синус-процесса — скейлинового предела радиальных частей мер Хаара на унитарных группах растущего формата.

Вопрос об убывании временных корреляций эргодической динамической системы — один из самых тонких в эргодической теории. Это видно уже на примере сдвига Бернулли, отвечающего схеме независимых испытаний с двумя исходами. Купманов унитарный оператор, отвечающий сдвигу Бернулли, имеет счетнократный лебеговский спектр — и найдется квадратично-интегрируемая наблюдаемая, чьи временные корреляции сходятся как угодно медленно и чьи временные средние, таким образом, сходятся к пространственному среднему медленнее любой наперед заданной скорости сходимости. Для получения эффективных оценок

уже в этом самом простом случае необходимо обратиться к естественной гёльдеровской структуре на пространстве двоичных последовательностей — временные корреляции гёльдеровских функций убывают экспоненциально, а если закодировать сдвиг Бернулли отображением удвоения угла и взять наблюдаемую, голоморфно продолжаемую на кольцо, то получается и суперэкспоненциальное убывание корреляций.

Синус-процесс, как и любой детерминантный точечный процесс, задаваемый воспроизводящим ядром гильбертова пространства, удовлетворяет закону 0-1 Колмогорова: хвостовая сигма-алгебра нашего точечного процесса тривиальна (это установили Лайонс, Осада-Осада, Цью и Шаповалов в совместной работе с докладчиком). Доказательство тривиальности хвостовой сигма-алгебры использует лишь воспроизводящее свойство ядра, однако не даёт, и, в такой общности, не может дать никакой скорости сходимости. Явные оценки скорости убывания временных корреляций синус-процесса опираются на представление математических ожиданий мультипликативных функционалов синус-процесса детерминантами операторов Винера-Хопфа — то есть, непрерывными аналогами детерминантов Тёплица — затем, на скейлинговый предел формулы Видома для детерминанта Фредгольма оператора Ганкеля, а также на скейлинговый предел формулы Бородина-Окунькова-Джеронимо-Кейса, дающей явное выражение для остаточного члена во второй теореме Сегё в форме Ибрагимова.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕГОЛОНОМНОМ РЕПЕРЕ

Бухштабер В. М. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

buchstab@mi-ras.ru

Доклад посвящен теории и приложениям систем уравнений теплопроводности в неголономном репере интегрируемых в гиперэллиптических сигма-функциях.

Литература

- [1] Бухштабер В. М., Лейкин Д. В. Уравнения теплопроводности в неголономном репере // Функциональный анализ и его прил., 38:2 (2004), 12-27; *Funct. Anal. Appl.*, 38:2 (2004), 88-101.
- [2] Бухштабер В. М., Бунькова Е. Ю. Сигма-функции и алгебры Ли операторов Шрёдингера // Функциональный анализ и его прил., 54:4 (2020), 3-16.
- [3] Бухштабер В. М., Бунькова Е. Ю. Формулы дифференцирования гиперэллиптических функций по параметрам и периодам // Геометрия, топология, математическая физика, Сборник статей. К 85-летию академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН, 325, МИАН, М., 2024 (в печати).

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗОМ

Васильев В. Б. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

vv57@inbox.ru

Гебресласи Х. Ф. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

rhadishfe@gmail.com

В работах [1,2] изучались эллиптические псевдодифференциальные уравнения в областях с негладкой границей, на плоскости это были области с угловыми точками. Исследование проводилось при наличии специальной волновой факторизации эллиптического символа [1], это позволяло описать полную картину разрешимости модельного уравнения в угле на плоскости в зависимости от индекса волновой факторизации. В работе [3] рассмотрен случай уравнения в плоском угле с условиями Дирихле на сторонах угла и выписано интегральное уравнение, соответствующее случаю, когда раствор угла стремится к нулю. Здесь мы рассматриваем обобщение этой задачи на многомерный случай.

Модельный псевдодифференциальный оператор A в области $D \subset \mathbb{R}^m$ с символом $A(\xi)$ определяется следующим образом

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi)u(y)e^{i(y-x)\xi}d\xi dy, x \in D$$

в предположении, что символ $A(\xi)$ удовлетворяет условию

$$c_1 < |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| < c_2, \xi \in \mathbb{R}^m, c_1, c_2 > 0.$$

Здесь рассматривается модельное уравнение

$$(Au)(x) = f(x), x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{W}_+^a, \quad (1)$$

разрешимость которого исследуется в пространстве $H^s(\mathbb{R}^m \setminus \overline{W}_+^a)$ с нормой

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2(1 + |\xi|)^{2s}d\xi,$$

$W_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x_2 > a|x_1|, a > 0\}$, знак " \sim " над функцией обозначает ее преобразование Фурье.

В предположении, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1] относительно $W_-^a = -W_+^a$ с индексом α , таким, что $\alpha - s = 1 + \delta$, $|\delta| < \frac{1}{2}$, можно выписать общее решение, зависящее от двух произвольных функций, заданных на ребрах. Для их однозначного определения задаются граничные условия Дирихле

$$u|_{ax_1-x_2=0} = g_1(ax_1 + x_2, x'), u|_{ax_1+x_2=0} = g_2(ax_1 - x_2, x'), \quad (2)$$

$x' = (x_3, x_4, \dots, x_m)$, $g_1, g_2 \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{m-1})$.

Задача (1),(2) рассматривалась ранее в [1]. Здесь же исследуется ситуация о поведении решения задачи (1),(2) при $a \rightarrow \infty$ – это соответствует случаю, когда в пространстве \mathbb{R}^m имеется разрез в виде $(m - 1)$ -мерного полупространства. Выписано интегральное уравнение, однозначная разрешимость которого эквивалентна разрешимости предельной задачи (1),(2).

Литература

- [1] Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.
- [2] Vasilyev V. B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. 2019. V. 39. No 1. P. 109–124.
- [3] Агаркова Н. Н., Васильев В. Б., Гебресласи Х. Ф. О задаче Дирихле в плоской области с разрезом // ПМ&Ф. 2023. Т. 55. №3. С. 258–264.

ОКРЕСТНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК ДИФФЕОМОРФИЗМА С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ

Васильева Е. В. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e.v.vasilieva@spbu.ru

Рассматривается диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предполагается, что касание устойчивого многообразия с неустойчивым в гомоклинической точке не является касанием конечного порядка. Пример двумерного диффеоморфизма с таким касанием устойчивого многообразия с неустойчивым приведен в [1]. Известно [2], что в этом случае в произвольной окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество однообходных устойчивых периодических точек исходного диффеоморфизма, причем характеристические показатели этих точек отделены от нуля.

В работах [3], [4] изучалась окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки, в предположении, что гомолиническая точка является точкой с конечным порядком касания устойчивого и неустойчивого многообразия. Из этих работ следует, что наличие бесконечного множества устойчивых двухобходных и трехобходных периодических точек зависит от отношения логарифмов собственных чисел матрицы Якоби исходного диффеоморфизма в гиперболической точке. Из [2] следует, что наличие в окрестности гомоклинической точки множества устойчивых периодических точек в случае, когда касание устойчивого многообразия с неустойчивым не является касанием конечного порядка, не зависит от отношения логарифмов собственных чисел матрицы Якоби.

Цель доклада – показать, что в окрестности гомоклинической точки помимо инвариантных множеств, порожденных «подковами Смейла», могут лежать непрерывные кривые, заполненные точками, траектории которых не покидают расширенной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки.

Литература

- [1] Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.
- [2] Васильева Е. В. Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 307-315.
- [3] Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 8. С. 1411-1419.
- [4] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической точкой // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 2. С. 144-147.

ОБ УСТОЙЧИВОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ЛЕВЫМ КОНЦОМ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПОРОЖДАЕМОМ ИМ ДВИЖЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Вдовин А. Ю. (Россия, Екатеринбург)

Уральский государственный лесотехнический университет
vdovina@m.usfeu.ru

Рублева С. С. (Россия, Екатеринбург)

Уральский государственный лесотехнический университет
rublevass@m.usfeu.ru

Для динамической системы

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t), \quad (1)$$

где $t \in T = [a, b]$, $x(a) = x_0$, а функции $g(\cdot) : T \times R^n \rightarrow R^n$ и $f(\cdot) : T \times R^n \rightarrow R^n$ – удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных, рассматривается задача восстановления неизвестного управления $u(\cdot) : T \rightarrow Q \subset R^q$ (здесь Q – выпуклый компакт), по результатам измерений состояний системы $x(t_i) = x_i$ в узлах разбиения T , где $t_{i+1} = t_i + \Delta$, $\Delta = \frac{b-a}{n}$. Абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot) : T \rightarrow R^n$, являющуюся решением системы (1) в смысле Каратеодори, назовем её движением, порождённым управлением $u(\cdot)$.

Для решения этой задачи, являющейся некорректной, в [1] был предложен динамический регуляризирующий алгоритм (к.д.а.), позволяющий восстанавливать управление $u_*(\cdot)$, обладающее минимальной в пространстве $L_2(T; R^q)$ нормой среди всех управлений, порождающих движение $x(\cdot)$. В его основу положено управление системой – моделью по принципу обратной связи, с использованием процедуры экстремального сдвига [2]. Реализация такого подхода требует выполнения конечного числа арифметических операций на каждом шаге разбиения и не использует трудоемкую процедуру псевдообращения матриц. Построение приближения управления согласно к.д.а. осуществляется в виде функции $u_h(t) = u_h(t_i)$

постоянной при $t \in [t_i, t_{i+1})$. При этом используется неточная информация $x_h(t_i)$ о состоянии системы в узлах разбиения: $|x(t_i) - x_h(t_i)| \leq h$.

Подчеркнём, что решение рассматриваемой задачи в общем случае может оказаться не единственным. Практиками было высказано пожелание использовать при построении приближения управления доступную неточную информацию $u_h(a)$ о значении $u(a)$. Цель настоящей работы – построение модификации к.д.а из [1], использующую эту априорную информацию об управлении. При этом модифицированное правило построения приближения $v_h(\cdot)$ для $u(\cdot)$, отличного от нормального, реализуется следующим образом:

$$v_h(t_{i+1}) = v_h(t_{i+1} - \Delta) + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha}.$$

Здесь $w_h(t_{i+1})$ – это состояние дискретной системы – модели, имеющей вид:

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \Delta \left(g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) + f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))v_h(t_i) + f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha} \right). \quad (2)$$

Рассмотрим соответствующую ей непрерывную систему – модель с запаздыванием:

$$w'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t - \Delta) + f(t, x(t))f^T(t, x(t)) \frac{x(t) - w(t)}{\alpha}, \quad (3)$$

при этом на промежутке $[a - \Delta; a]$ полагается $v(t) \equiv u(a)$. Правило (2) можно трактовать как реализацию численного метода решения (3).

Утверждение. Пусть $f(t, x(t))$ обладает постоянным рангом вдоль движения, а $u(t)$ имеет ограниченную вариацию на T , $0 \in Q$. Тогда, можно указать согласование параметры $\alpha = \alpha(h)$, $\Delta = \Delta(h)$ с величиной погрешности h , при котором $w_h(t) \rightarrow x(t)$ – всюду на T , а $v_h(t) \rightarrow u(t)$ почти всюду.

Литература

- [1] Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
- [2] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.

ЧЕРНОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРА СДВИГА, БЫСТРО СХОДЯЩИЕСЯ К РЕШЕНИЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Веденин А. В. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономик»

lcsndr@mail.ru

Автор доклада предлагает новый метод аппроксимации решения параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, основанный на теории C_0 -полугрупп [2], теореме Чернова [1] и теореме Галкина-Ремизова [3]

Точное решение параболического дифференциального уравнения при определенных условиях можно построить при помощи однопараметрической сильно непрерывной полугруппы операторов (C_0 -полугруппы) [2]. В 1968 году Пол Чернов доказал теорему об аппроксимации C_0 -полугруппы с помощью операторнозначной функции, которую мы сейчас называем функцией Чернова [1]. Приближения, которые мы строим на основе этой функции, называются черновскими аппроксимациями.

В 2017 году И.Д. Ремизов предложил метод построения черновских аппроксимаций к решению параболического дифференциального уравнения на основе оператора сдвига

аргумента [4]. В 2022 году И.Д. Ремизов и О.Е. Галкин оценили скорость сходимости черновских аппроксимаций, а также выдвинули условия, при которых эту скорость можно увеличить [3]. Согласно теореме Галкина-Ремизова погрешность аппроксимаций, основанных на методе, предложенном И.Д. Ремизовым [4], оценивалась через C/n , где n — номер аппроксимации, а C — некоторая константа. Автор доклада предлагает значительное усиление этого метода. А именно, для каждого сколь угодно большого натурального m построены аппроксимации Чернова, оценка погрешности которых улучшена до C/n^m . Алгоритм построения таких аппроксимаций основан на решении некоторой системы линейных уравнений.

В более точной формулировке мы можем представить результат следующим образом.

Рассмотрим задачу Коши для параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} u_t'(t, x) = a(x)u_{xx}''(t, x) + b(x)u_x'(t, x) + c(x)u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и функции $a, b, c, u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены и равномерно непрерывны. Мы строим семейство операторов $S(t)$, $t \geq 0$, для которого выполняются следующие условия:

1. $u_n(t, x) = (S(t/n)^n u_0)(x)$
2. $\|u_n(t, x) - u(t, x)\| \leq C/n^m$,
3. для каждого $T > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, T]} \|u_n(t, x) - u(t, x)\| = 0$,

где $u(t, x)$ — точное решение, $u_n(t, x)$ для каждого натурального n — черновские аппроксимации к точному решению, m — некоторое фиксированное натуральное число.

Литература

- [1] Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 2:2 (1968), 238–242.
- [2] Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — Springer-Verlag. New York. 2000. 609 p.
- [3] Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators, 2022, 33 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>.
- [4] Ремизов И. Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук. 476:1 (2017), 17–21.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ВЛАСОВА, КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ И РАСШИРЕНИИ ВСЕЛЕННОЙ

Веденяпин В. В. (Россия, Москва)
ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
vicveden@yahoo.com

Фимин Н. Н. (Россия, Москва)
ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
nnf@post.com

Чечёткин В. М. (Россия, Москва)
ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
chechetv@mail.com

Руссков А. А. (Россия, Москва)
ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
Russkov@inbox.ru

В классических работах (см. [1–4]), уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более

общего принципа наименьшего действия [5–11]. Получающийся вывод уравнений типа Власова даёт уравнения Власова-Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее [12–13]. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям [5–8], как это делалось раньше уже самим А.А. Власовым [4]. В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона-Якоби, как это делалось уже в квантовой механике Е. Маделунгом, а в более общем виде В.В.Козловым. Таким образом получаются в нерелятивистском случае решения Милна-Маккри, а также нерелятивистский и релятивистский анализ решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет проанализировать Лямбду Эйнштейна и темную энергию как причину ускоренного расширения Вселенной и построить теорию космологических решений. Это позволило переосмыслить и уточнить многие классические и новые вопросы расширяющейся вселенной [1-4].

Литература

- [1] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [3] Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 стр.
- [4] Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 стр.
- [5] Веденяпин В. В., Негматов М. А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тожество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. — 2012. Т. 170. № 3. С. 468-480.
- [6] Веденяпин В. В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н. Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45-82.
- [7] Веденяпин В. В., Негматов М. А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.
- [8] Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
- [9] Веденяпин В. В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 188. 20 с.
- [10] Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D, 2020. V. 29. № 1. 23 p.
- [11] Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 p.
- [12] Cercigniani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
- [13] Choquet–Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ ЗА ИЗМЕНЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ³⁵

Вельмисов П. А. (Россия, Ульяновск)

Ульяновский государственный технический университет
velmisov@ulstu.ru

Тамарова Ю. А. (Россия, Ульяновск)

Ульяновский государственный технический университет
kazakovaia@mail.ru

Рассматривается механическая система «трубопровод-датчик давления», предназначенная для контроля за изменением давления в газожидкостных средах (Рис.1). В начальном

³⁵Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517.

сечении $x = 0$ трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$, где P_0 – давление в состоянии покоя, $P_*(t)$ – избыточное давление. Состоянию покоя соответствует положение $x = l$ поршня, закрепленного с помощью системы упругих связей и демпферов и являющегося составной частью датчика давления, расположенного в другом конце трубопровода. Целью задачи является получение и исследования уравнения, связывающего закон изменения давления в двигателе $P_*(t)$ с величиной отклонения от положения равновесия поршня $w(t)$ в любой момент времени t .

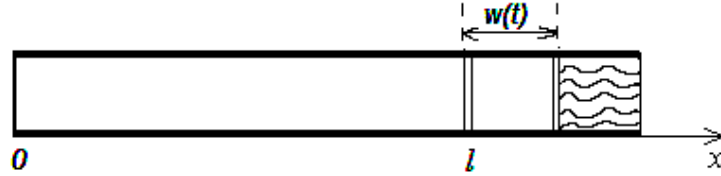


Рис. 1: Схема механической системы «трубопровод-датчик давления»

Математическая модель рассматриваемой механической системы может быть представлена в виде

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_x^2\Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad (1)$$

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2)$$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (3)$$

$$m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t). \quad (4)$$

В (1)-(4) $\Phi(x, t)$ – потенциал скорости рабочей среды; $P(x, t)$ – давление в рабочей среде (в жидкости или газе); a_0 – скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды; χ – коэффициент Пуассона; m – масса поршня; α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи; индексы x, t снизу обозначают частные производные по координате x и времени t , точка сверху – производную по t .

Уравнения (1),(4) следует дополнить начальными условиями.

Уравнение (1) для потенциала скорости $\Phi(x, t)$ описывает движение рабочей среды (в модели идеального сжимаемого газа) в трубопроводе, условие (2) задает закон изменения давления $P_*(t)$ рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод $x = 0$), условие (3) – условие непротекания на поверхности поршня, (4) – уравнение, описывающее движение поршня. При этом давление в потоке определяется интегралом Лагранжа – Коши: $P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}$, а скорость потока в трубопроводе находится по формуле $u = \Phi_x$.

Математическая постановка аналогичной задачи тепломассообмена для механической системы «трубопровод-датчик давления» имеет вид

$$\rho(u_t + uu_x) = -P_x, \quad (5)$$

$$\rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0, \quad (6)$$

$$\rho c_v(T_t + uT_x) + Pu_x = kT_{xx}, \quad (7)$$

$$P = R\rho T, \quad R = c_p - c_v. \quad (8)$$

В (5)-(8) $u(x, t)$, $P(x, t)$, $\rho(x, t)$, $T(x, t)$ – скорость, давление, плотность и температура рабочей среды в трубопроводе; R, c_p, c_v, k – физические постоянные.

Кроме граничных условий (2)-(4), необходимо также задать закон изменения температуры на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод): $T(0, t) = T_*(t)$, и условие теплоизоляции на поршне: $T_x(l_*(t), t) = 0$.

Разработаны численно-аналитические методы решения указанных начально-краевых задач.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ
АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ветохин А. Н. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

anveto27@yandex.ru

Пусть X — локально компактное метрическое пространство, то есть у каждой его точки существует открытая окрестность, замыкание которой компактно, f — непрерывное отображение из X в X . Наряду с исходной метрикой d на пространстве X определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad f^i \equiv \underbrace{f \circ \dots \circ f}_i, \quad f^0 \equiv \text{id}_X, \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем точку $x \in X$. Для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ подмножество P шара $B_d(x, \rho) = \{y : d(x, y) < \rho\}$ называется (f, r, n, x, ρ) -отделенным, если попарные d_n^f -расстояния между любыми двумя точками P больше, чем r . Пусть $N_d(f, r, n, x, \rho)$ — максимальное число точек в (f, r, n, x, ρ) -отделенном множестве, тогда *локальную энтропию* динамической системы f в точке x определяют формулой [1]

$$h_d(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho). \quad (1)$$

Отметим, что пределы в формуле (1) существуют, так как величина

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho)$$

не возрастает с уменьшением ρ и не убывает с уменьшением r .

Теорема 1 [2]. *Функция $(f, x) \mapsto h_d(f, x)$ принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $C(X, X) \times X$.*

Теорема 2 [3]. *Для любого отображения $f \in C(X, X)$ функция $x \mapsto h_d(f, x)$ принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X , а если X полное метрическое пространство, то ее множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве X .*

Обозначим через \mathcal{K} совершенное множество Кантора. В работе [3] установлено, что в случае $X = \mathcal{K}$, найдется отображение $f_0 \in C(X, X)$ такое, что функция $x \mapsto h_d(f_0, x)$ всюду разрывна, а следовательно не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве X .

Теорема 3. *Если $X = \mathcal{K}$, то найдется отображение $f_0 \in C(X, X)$ такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции $x \mapsto h_d(f_0, x)$ пусто.*

Рассмотрим локально компактное метрическое пространство \mathcal{R} , построенное в работе [4]. Точками пространства \mathcal{R} являются всевозможные пары (x, i) , где $x \in \mathcal{K}$, $i \in \mathbb{N}$, а расстояние между двумя точками $(x, i) \in X$ и $(y, j) \in X$ определяется формулой

$$d((x, i), (y, j)) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В работе [2] установлено существование точки $x_0 \in \mathcal{R}$, такой что функция $f \mapsto h_d(f, x_0)$ не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $C(X, X)$.

Теорема 4. *Если $X = \mathcal{R}$, то для любой точки $x_0 \in X$ функция $f \mapsto h_d(f, x_0)$ не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $C(X, X)$.*

Литература

- [1] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
- [2] Ветохин А.Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. №6. 27–36.

- [3] Vetokhin A. N. Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space // Сборник "International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022" December 17 - 19, 2022, Tbilisi, Georgia". V. 1. P. 228-231.
- [4] Ветохин А. Н. О некоторых свойствах топологической энтропии семейства динамических систем, определенных на произвольном метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, №10. С. 1005–1013.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ
ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПОПУЛЯЦИЕЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Винников Е. В. (Россия, Москва)
НИТУ МИСИС
evinnikov@gmail.com

Платов А. С. (Россия, Москва)
НИТУ МИСИС
platovmm@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления популяцией, динамика которой имеет вид:

$$\begin{cases} z_t = (\alpha(x)z_x)_x + (a(x) - u)z - b(x)z^2, & t \in [0, T], \quad x \in [0, \tau], \\ z(0, x) = v(x), \end{cases} \quad (1)$$

где $z = z(t, x)$ — численность популяции в точке x в момент времени t . Функция $a(x) \in C^0([0, \tau])$ и положительная функция $b(x) \in C^0([0, \tau])$ имеют период τ . Здесь $a(x)$ — темп прироста, а коэффициент $b(x)$ отвечает за насыщение по численности популяции в точке x . Коэффициент диффузии $\alpha(x) \in C^1([0, \tau])$ положительный и τ -периодичный. Функция управления $u = u(t, x)$ определяет долю популяции, которая изымается в момент t в точке x . Управление популяцией рассматривается на конечном промежутке времени $[0, T]$, $T > 0$. Начальное распределение популяции задаётся функцией $v(x) \in L_2([0, \tau])$ и $v(x) \geq 0$ для $x \in [0, \tau]$. Периодические гетерогенные модели, подобные рассматриваемой, исследовались в работе [2], а оптимизационные задачи с различными критериями качества для этих систем рассматривались в работах [1], [3], [4].

Под множеством допустимых управлений, понимается множество функций $u \in L_2([0, T] \times [0, \tau])$, таких что $U_1 \leq u \leq U_2$, где U_1, U_2 — некоторые константы, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq U_1 < U_2 < \infty$; данное множество обозначим через \mathcal{U} .

Пусть $(v, u) \in L_2([0, \tau]) \times \mathcal{U}$. Функцию $z \in L_2(0, T; H_\alpha([0, \tau]))$, которая имеет период τ по переменной x , будем называть решением уравнения (1), если выполняются

$$\int_0^T \int_0^\tau [-z\varphi_t + \alpha(x)z_x\varphi_x] dx dt = \int_0^T \int_0^\tau v(x)\varphi(x, 0) dx + \int_0^T \int_0^\tau ((a(x) - u)z - b(x)z^2)\varphi dx dt,$$

$$\forall \varphi \in W_2^{1,0}([0, \tau] \times [0, T]) \cap L_2(0, T; H_\alpha([0, \tau])) : \quad \varphi|_{t=T} = 0$$

и функция φ имеет период τ . Здесь $H_\alpha([0, \tau])$ — гильбертово пространство с нормой

$$\|z\|_{H_\alpha([0, \tau])} = \left\{ \|z\|_{L_2([0, \tau])}^2 + \|\alpha z_x\|_{L_2([0, \tau])}^2 \right\}^{1/2}.$$

Критерием качества в задаче оптимального управления с дифференциальной связью (1) является функционал следующего вида:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \int_0^\tau e^{-rt} c(x) u(t, x) z(t, x) dx dt \rightarrow \max_{u \in \mathcal{U}}. \quad (2)$$

Здесь r — постоянный коэффициент дисконтирования, $r > 0$, и $c(x)$ — функция цены за единицу изымаемой популяции в точке x , $c(x) \in C^0([0, \tau])$.

Теорема 1. Пусть u^* оптимальное управление задачи (1),(2); z^* — соответствующее ему решение уравнения (1) и ψ^* — вариация z для u^* . Тогда существует функция $\lambda \in C([0, T]; L_2(0, \tau)) \cap L_2(0, T; H_\alpha(0, \tau))$, удовлетворяющая сопряжённому уравнению

$$\lambda_t + (\alpha(x)\lambda_x)_x = -c(x)u^* + \lambda(r - a(x) + u^* + 2b(x)z^*\psi^*)$$

с условием трансверсальности

$$\lambda(T, x) = 0$$

и для любого управления $u \in \mathcal{U}$ выполняется неравенство

$$\int_0^T \int_0^\tau e^{-rt} (\lambda - c(x)) z^* (u^* - u) dx dt \geq 0.$$

Литература

- [1] Belyakov A. O., Davydov A. A. Optimal Cyclic Harvesting of a Distributed Renewable Resource with Diffusion // Proc. Steklov Inst. Math. **315**, 1–9 (2021).
- [2] Berestycki H., Hamel F., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I – Species persistence. Journal of Mathematical Biology, 51(1), 75–113 (2005). doi:10.1007/s00285-004-0313-3.
- [3] Davydov A., Vinnikov E. Optimal Cyclic Dynamic of Distributed Population Under Permanent and Impulse Harvesting // Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 407. Springer, pp 101–112 (2022). https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9_5
- [4] Lenhart S. M., Yong J. Optimal control for degenerate parabolic equations with logistic growth // Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications, 1995, Volume 25, pp. 681-698

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КВАДРАТИЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Вирченко Ю. П. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный технологический университет
virch@bsu.edu.ru

Жильцова В. В. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный научно-исследовательский университет
806060@bsu.edu.ru

Изучаются решения $u(x, t) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ с компактным носителем $[c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$ одномерного нелинейного уравнения теплопроводности

$$\dot{u} = (uu_x)_x + u^2. \quad (1)$$

Для этих решений, которые обладают обострением режима (см., например, [1]), строятся асимптотические степенные разложения

$$u(x, t) = \Delta^{-1}(t) \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^m(t) \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n v_{m,n}(x)$$

по малому параметру ε . Этот параметр вводится как мера отклонения начальной функции $u(x, 0)$ от начального значения $v_{0,0}(x)$ автомодельного решения уравнения (1) со слабым разрывом так, что функция $w(x) \equiv v_{0,0}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$aw = \frac{1}{2}(w^2)'' + w^2$$

с некоторой постоянной $a > 0$ и $\Delta(t) = 1 - at$. Выбирается специальное частное решение этого уравнения, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{4}{3}aw^3 - w^4 = 2w^2w'^2,$$

и имеет вид

$$w(x) = \frac{2}{3}a \cos \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - x_0) \right].$$

Оно сосредоточено на компактном носителе $D = [-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}] + x_0$.

Решения $u(x, t)$ обращаются в бесконечность за конечное время t_* , которое называется *временем обострения*, одновременно во всех точках некоторого интервала $D = [c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$ так, что такие решения существуют только лишь на конечном интервале $t \in [0, t_*)$ и на конечном интервале действительной оси значений x . Построение асимптотического разложения (1) возможно вследствие того, что соответствующие ему решения определены только в компактной области пространства $\mathbb{R}^2 = \{(x, t)\}$.

Для построения разложений (1) полагается, что $\Delta(t)$ имеет порядок ε и начальное значение решения представляется в виде

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_{0,n}(x). \quad (2)$$

Для функций $v_{0,n}(x)$ формулируются нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В частности, при $n = 1$ такое уравнение имеет вид

$$(v_{0,1}w)'' + 2v_{0,1}w = 0.$$

Доказывается, что

Теорема. *Асимптотическое разложение (1) существует.*

Следствием существования разложения (1) является то, время обострения t^* и область D обострения для решений $u(x, t)$ также также представляются в виде степенных разложений

$$t^* = t_0^* + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m t_m^*,$$

где $t_0^* = a^{-1}$, и, в частном случае, когда решение $u(x, t)$ симметрично относительно точки $x = 0$, $c_- = c_+ \equiv c^*$,

$$c^* = c_0^* + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m c_m^*,$$

где $c_0^* = \pi\sqrt{2}$.

Литература

- [1] Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin : Walter de Gruyter, 2011.

ОБ ОДНОЙ АПРИОРНОЙ МАЖОРАНТЕ
НАИМЕНЬШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Владимиров А. А. (Россия, Москва)

Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
karulinaes@yandex.ru

Карулина Е. С. (Россия, Москва)

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова
karulina.es@rea.ru

Рассматривается граничная задача

$$y'' - qy + \lambda y = 0,$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где потенциал выбирается внутри семейства

$$A_\gamma = \left\{ q \in C[0, 1] : q \leq 0, \int_0^1 |q|^\gamma dx = 1 \right\}.$$

Свяжем с указанной задачей априорную мажоранту $M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения. Как было установлено в [1], [2], [3], [4], при $\gamma \geq 1/2$ выполняется равенство $M_\gamma = \pi^2$, а при $\gamma < 1/3$ справедлива строгая оценка $M_\gamma < \pi^2$.

Целью настоящей работы является установление справедливости строгой оценки $M_\gamma < \pi^2$ также в случае $\gamma \in [1/3, 1/2)$. Иначе говоря, нами устанавливается справедливость следующего утверждения:

Теорема. *При любом выборе значения $\gamma \in (0, 1/2)$ имеет место строгая оценка $M_\gamma < \pi^2$.*

Литература

- [1] Ежак С.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле / В кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 517-559.
- [2] Ezhak S.S. On estimates for the first eigenvalue of the Sturm-Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and integral condition // Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer New York (New York, N.Y., United States). 2013. – V. 47. – P. 387-394.
- [3] Ежак С.С. Об одной задаче минимизации функционала, порождённого задачей Штурма-Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Вестник СамГУ. – 2015. – N 6 (128). – С. 57-61.
- [4] Ezhak S., Telnova M. On Estimates for the First Eigenvalue of Some Sturm-Liouville Problems with Dirichlet Boundary Conditions and a Weighted Integral Condition // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations „QUALITDE-2016“. Abstracts. – A. Razmadze mathematical institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia, 2016. – P. 81-85.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ³⁶

Волков А. М. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
volkov@imm.uran.ru

Авербух Ю. В. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
ayv@imm.uran.ru

Рассматривается задача Коши для нелокального уравнения неразрывности

$$\partial_t m_t + \nabla \cdot (f(x, m_t) m_t) = 0, \quad m_0 = m_*,$$

где $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ — пространство вероятностных мер, $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$. Этим уравнением описывается система бесконечного числа однотипных элементов, подчиняющихся уравнению

$$\dot{x} = f(x, m_t).$$

Решением является мерозначная функция, т.е. функция, ставящая каждому моменту времени в соответствие вероятностную меру над \mathbb{R}^d .

Главной целью данной работы является построение методов определения устойчивости динамических систем для нелокального уравнения неразрывности, аналогичных методам Ляпунова.

Существенным ограничением является нелинейность пространства вероятностных мер. По этой причине требуется введение понятий, обобщающих понятие дифференцирования. Для большого числа известных обобщений типичный представитель функции Ляпунова — квадрат расстояния до положения равновесия — является недифференцируемой. Чтобы обойти данную проблему, были использованы методы негладкого анализа. В частности, нами было введено понятие барицентрического супердифференциала.

Определение 1. Пусть $q = p' = \frac{p}{p-1}$, а функционал $\phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывен сверху. Тогда барицентрическим супердифференциалом $\partial_b^+ \phi(m)$ функции ϕ в точке m будем называть множество всех таких функций $\gamma \in L_q(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^d)$, что для любой функции $b \in L_p(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^d)$ найдется такая функция $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством $\xi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$, что для любого $\tau > 0$ выполняется следующее соотношение:

$$\phi((\text{Id} + \tau b) \# m) - \phi(m) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \langle \gamma(x), \tau b(x) \rangle m(dx) + \tau \xi(\tau).$$

В силу того, что пространство вероятностных мер, наделенное метрикой Канторовича, является польским, в нем можно естественным образом ввести понятия положения равновесия уравнения неразрывности и его устойчивости.

Каждый из методов проиллюстрирован примерами систем, устойчивость положений равновесия которых может быть получена с их помощью.

Теорема 2. Пусть $\hat{m} \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ — положение равновесия уравнения, функция $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ липшицева, а также существует такая неотрицательная липшицевая на любом ограниченном множестве функция $\phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, что для некоторого $R > 0$ функция ϕ супердифференцируема в шаре $B_R(\hat{m})$, обращается в 0 только в точке \hat{m} и выполнено следующая оценка:

$$\sup_{\mu \in B_R(\hat{m})} \inf_{\gamma \in \partial_b^+ \phi(\mu)} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \gamma(x), f(x, \mu) \rangle \mu(dx) \leq 0.$$

Тогда положение равновесия \hat{m} устойчиво.

³⁶Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

Данный метод позволяет определять устойчивость положений равновесия для систем, порожденных градиентным потоком, имеющим стационарную точку.

Теорема 3. Пусть $f(x, m) = Ax + \int_{\mathbb{R}^d} By m(dy)$, а $\hat{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Пусть также для каждой ненулевой функции ξ из замыкания в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d, \hat{m}; \mathbb{R}^d)$ множества градиентов бесконечно дифференцируемых функционалов над \mathbb{R}^d с компактным носителем выполнено соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^d} \xi(\hat{x})^\top \cdot A \cdot \xi(\hat{x}) \hat{m}(d\hat{x}) + \int_{\mathbb{R}^d} \xi(\hat{x})^\top \hat{m}(d\hat{x}) \cdot B \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \xi(\hat{x}) \hat{m}(d\hat{x}) < 0.$$

Тогда положение равновесия \hat{m} является устойчивым.

Данный метод позволяет определять устойчивость меры Гиббса для возмущенной гамильтоновой системы математических маятников.

УРАВНЕНИЕ МАРКОВА НАД ПОЛЕМ ВЫЧЕТОВ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ

Вьюгин И. В. (Россия, Москва)

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
ilyavyugin@yandex.ru

Уравнением Маркова называется диофантово уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3.$$

Множеством \mathcal{M} троек Маркова $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ называется множество его целых решений. Легко проверяется, что преобразование

$$\mathcal{R}_1 : (x, y, z) \mapsto (3yz - x, y, z)$$

и аналогично определенные преобразования $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ (все они являются инволюциями) переводят одну тройку Маркова в другую. Также очевидно, что то же самое происходит и с перестановками $\Pi \in \mathcal{S}_3$ компонент (x, y, z) .

С помощью классического результата Маркова [1] все целочисленные решения получают из решения $(1, 1, 1)$ применением указанных выше преобразований. Если определить граф на тройках Маркова, где, начиная с “корня” $(1, 1, 1)$, рёбра $(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_2, y_2, z_2)$ регулируются $(x_2, y_2, z_2) = \mathcal{T}(x_1, y_1, z_1)$, где

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\} \cup \mathcal{S}_3, \quad (1)$$

то этот граф связан. Граф натуральных решений является деревом.

Барагар, Бургейн, Гамбурд и Сарнак предположили, что свойство связности сохраняется по модулю всех достаточно больших простых чисел и множество ненулевых решений \mathcal{M}_p уравнения Маркова по модулю p можно получить из множества троек Маркова \mathcal{M} , редуцировав их по модулю p . Эта гипотеза означает, что граф \mathcal{X}_p , ассоциированный с преобразованием, остается связным.

Соответственно, если мы определим $\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{M}_p$ — множество троек в наибольшей компоненте связности, приведенного выше графа \mathcal{X}_p . То в работе [3] получена оценка.

Теорема 1. Имеет место следующая оценка

$$\#(\mathcal{M}_p \setminus \mathcal{C}_p) \leq \exp\left((\log p)^{1/2+o(1)}\right), \quad p \rightarrow \infty.$$

Мы также получаем нижние оценки размеров отдельных компонент графа \mathcal{X}_p в случае, если они существуют.

Теорема 2. Размер любой компоненты связности \mathcal{X}_p не менее $c(\log p)^{7/9}$, где $c > 0$ — абсолютная константа.

Оценки теорем 1 и 2 являются улучшениями оценок, полученных в работах Бургейна, Гамбурда и Сарнака [2].

Кроме этих результатов мы планируем представить новые оценки для числа элементов рекуррентных последовательностей по простому модулю p . В том числе для чисел Фибоначчи, взятых по простому модулю. Рекуррентные последовательности активно используются при получении оценок теорем 1 и 2.

Литература

- [1] Крейн М., Диофантово уравнение А. А. Маркова // Квант. 1985. №4. С. 13-16.
- [2] Bourgain J., Gamburd A., Sarnak P., Markoff triples and strong approximation // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, V. 354. (2016), 131-135.
- [3] Konyagin S. V., Shparlinski I. E., Vyugin I. V., Polynomial Equations in Subgroups and Applications // In: A. Avila, M. Th. Rassias, Y. Sinai (eds.), Analysis at Large, Dedicated to the Life and Work of Jean Bourgain, Springer, 2022, pp. 273-297.

РОЛЬ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ СТРУЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Гайфуллин А. М. (Россия, Жуковский)

Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского
gaifullin@tsagi.ru

Рассматривается несколько задач теории струй вязкой жидкости, в которых знание инвариантов определяющих уравнений играет значительную роль.

Хорошо известна задача об осесимметричной струе, вытекающей из точечного источника [1] - [3]. Характеристики такой струи определяются единственным инвариантом - импульсом. В выходном сечении струи скорость принимает бесконечное значение, а расход жидкости - нулевое значение. Реальные струи вытекают из сопла конечного размера с конечной скоростью, т.е. имеется ненулевой расход жидкости через выходное сечение струи. Впервые корректное решение в дальнем поле струи с расходом через начальное сечение было построено в работе [4]. В это решение вошли две неизвестные константы. Одну из них определял импульс струи, а вторую удалось определить в [5], используя недавно полученный инвариант [6].

Если осесимметричная струя имеет закрутку, то уравнения движения допускают возможность существования двух типов струй. В [4] построено решение для струи, у которой сохраняются импульс и момент количества движения, а в [7] построено решение для струи, у которой сохраняется импульс и циркуляция окружной скорости по внешней границе струи. Появился вопрос: струя какого типа реализуется на практике? Полученный в [8] скрытый инвариант указывал на то, что в дальнем поле любая закрученная струя должна выходить на струю [7]. В [9], [10] указано на ошибку [8] при вычислении скрытого инварианта, после чего стало ясно, что должна реализовываться струя [4].

Наличие инварианта в задаче о плоской пристенной струе позволило построить автомодельное решение с известным параметром автомодельности [11]. Для трехмерной пристенной струи аналогичного инварианта получить не удалось. Поэтому строится численное решение задачи, из которого был определен параметр автомодельности и универсальные профили скорости. Определена также топология течения.

Литература

- [1] Schlichting H. Laminare Strahlbreitung // ZAMM. 1933. V. 13. P. 260–263.
- [2] Слезкин Н. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений вязкой жидкости // Ученые записки МГУ. 1934. Вып. 2 С. 89–90.
- [3] Ландау Л. Д. Об одном точном решении уравнений Навье-Стокса // Доклады АН СССР. 1944. Т. 43, № 7. С. 299–301.
- [4] Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // ПММ. 1953. Т. 17, № 1. С. 3–16.

- [5] Гайфуллин А.М., Жвик В.В. Связь дальней асимптотики струи с профилем скорости в отверстии // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 50–53.
- [6] Naz R. Conservation laws for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl // *Applicable Analysis*. 2012. V. 91. N 5. P. 1045–1052.
- [7] Long R.R. A vortex in an infinite viscous fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1961. V. 11. N. 4. P. 611–625.
- [8] Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981.
- [9] Жвик В.В. Инварианты и асимптотики осесимметричных закрученных затопленных струй // ПМТФ. 2020. №2. С. 92–108.
- [10] Гайфуллин А.М., Жвик В.В. Ламинарные затопленные струи несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса // УФН. 2023. Т. 193. № 11. С. 1214–1226.
- [11] Акатнов Н.И. Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // Труды Ленинградского политехнического института. 1953. № 5. С. 24–31.
- [12] Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В. Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 51–61.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ³⁷

Галкин О. Е. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
olegegalkin@ya.ru

Предисловие. Доклад посвящён изложению результатов работы, выполненной автором совместно с С.Ю. Галкиной, И.Д. Ремизовым, А.В. Ведениным, К.А. Драгуновой, А.Т. Ивановой, Д.А. Минеевым и П.Ю. Пантелеевой. Основным объектом исследования являются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, имеющие вид

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, а функции a , b , c и g принадлежат классу $UC_b(\mathbb{R})$ всех вещественнозначных равномерно непрерывных ограниченных функций на \mathbb{R} . Нас интересуют решения f уравнения (1), лежащие в классе $UC_b^2(\mathbb{R}) = \{h \in UC_b(\mathbb{R}) \mid h', h'' \in UC_b(\mathbb{R})\}$.

Теоретические основы. В работе Ивана Ремизова [1] (см. в ней теорему 6) было доказано, что если $S(t)$ — функция Чернова для дифференциального оператора

$$A: f(x) \mapsto (Af)(x) = a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

на пространстве $UC_b(\mathbb{R})$ с областью определения $UC_b^2(\mathbb{R})$, то при определенных условиях, наложенных на $S(t)$, на число λ и на коэффициентные функции a , b , c , единственное ограниченное решения уравнения (1) можно представить в виде равномерного предела черновских аппроксимаций:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left([S(t/n)]^n g \right) (x) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Более того, в теореме 6 работы [1] было получена оценка на скорость сходимости этих аппроксимаций.

Численные эксперименты. Для изучения зависимости скорости сходимости в (2) от функций Чернова и от гладкости коэффициентных функций a , b , c , g нами был проведён ряд

³⁷Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

численных экспериментов. В них использовались следующие две функции Чернова $S_6(t)$ и $S_8(t)$, найденные, соответственно, Александром Ведениным и Иваном Ремизовым:

$$(S_6(t)f)(x) = \frac{1}{2}(1 + t \cdot c(x)) \cdot \left(f(x + \sqrt{2t \cdot a(x)} + 2t \cdot b(x)) + f(x - \sqrt{2t \cdot a(x)}) \right);$$

$$(S_8(t)f)(x) = \frac{1}{4} \left(f(x + \sqrt{2t \cdot a(x)}) + f(x - \sqrt{2t \cdot a(x)}) \right) + \frac{1}{2} f(x + 2t \cdot b(x)) + t \cdot c(x) f(x).$$

Для этих функций Чернова и для нескольких конкретных наборов переменных коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$ в ходе численных экспериментов был определен показатель p для скорости C/n^p сходимости к нулю погрешности

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

черновских аппроксимаций $f_n(x)$ к решению $f(x)$ уравнения (1).

Схему наших численных экспериментов можно описать следующим образом:

- 1) Задаем коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ уравнения (1) из класса $UC_b(\mathbb{R})$, а также число $\lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)|$.
- 2) Задаём предполагаемое решение $f(x)$ уравнения (1) из класса $UC_b^2(\mathbb{R})$.
- 3) Вычисляем правую часть уравнения (1) по формуле

$$g(x) = -(a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 4) Выбираем подходящие функции Чернова.
- 5) Решаем полученное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с помощью методов черновских аппроксимаций и с помощью сеточных методов Рунге-Кутты 4-го и 8-го порядков.
- 6) Сравниваем полученные результаты по погрешности, а также по временным затратам на вычисления.

Литература

- [1] Remizov I. D. Chernoff approximations as a way of finding the resolvent operator with applications to finding the solution of linear ODE with variable coefficients // arXiv:2301.06765v2 [math.FA] (2023). P. 1–11.

ФУНКЦИИ ЧЕРНОВА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ C_0 -ПОЛУГРУППЫ, СГЕНЕРИРОВАННОЙ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ³⁸

Галкина С. Ю. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

svetlana.u.galkina@mail.ru

Доклад посвящён изложению результатов работы, выполненной автором совместно с О. Е. Галкиным. Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, то через $\mathcal{L}(X)$ будем обозначать множество всех ограниченных линейных операторов на X .

В 1968 году Поль Чернов в [1] доказал следующую теорему:

Теорема 1 (Чернов; 1968). Пусть X — банахово пространство, $F(t)$ — сильно непрерывная функция из $[0, \infty)$ в подмножество сжимающих операторов из $\mathcal{L}(X)$, причем $F(0) = I$. Пусть замыкание A сильной производной $F'(0)$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $(e^{tA})_{t \geq 0}$. Тогда $[F(t/n)]^n$ сходится к e^{tA} в сильной операторной топологии.

Заметим, что эта теорема не содержит оценки скорости сходимости. В 2022 году в [2] (см. также [3]) была опубликована теорема, которая дает такую оценку:

³⁸Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Теорема 2 (Галкин, Ремизов; 2021). Пусть C_0 -полугруппа $(e^{tA})_{t \geq 0}$ с генератором $(A, D(A))$ в банаховом пространстве X для некоторых $M_1 \geq 1$ и $w \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\|e^{tA}\| \leq M_1 e^{wt}$ для всех $t \geq 0$. Пусть, кроме того, для отображения $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и любых элементов $x \in D(A^{m+1}) \subset X$, $t \in (0, T]$ верно неравенство

$$\left\| F(t)x - \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} A^k x \right\| \leq C_m(t) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \|A^{m+1}x\|,$$

где $C_m(t) > 0$ при каждом $t \in (0, T]$. Предположим также, что $\|F(t)^k\| \leq M_2 e^{kwt}$ при некотором $M_2 \geq 1$ для всех $t \in [0, T]$ и натуральных k . Тогда для любых $x \in D(A^{m+1})$, $t \in (0, T]$ и натуральных n будет выполняться оценка

$$\left\| \left[F\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x - e^{tA}x \right\| \leq \left(C_m\left(\frac{t}{n}\right) + M_1 e^{\frac{|w|t}{n}} \right) \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m (m+1)!} \|A^{m+1}x\|.$$

Определение 1. Отображение $F: (0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ называется функцией Чернова порядка m для оператора A , если оно удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $UC_b(\mathbb{R})$ - банахово пространство всех равномерно непрерывных ограниченных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, и оператор $L = [f \mapsto f'']$ имеет область определения $D(L) = \{f \in UC_b(\mathbb{R}) \mid f'' \in UC_b(\mathbb{R})\}$. Функцию Чернова S_m любого порядка $m \in \mathbb{N}$ для оператора L можно построить на основе пространственных сдвигов. В этом направлении известно, в частности, следующее:

а) в 2016 году Иван Ремизов [4] нашел следующую функцию Чернова порядка 1:

$$[S_1(t)f](x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{t}) = f(x) + tf''(x) + o(t).$$

б) в 2019 году Александр Веденин построил функцию Чернова уже порядка 2:

$$[S_2(t)f](x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6t}) = f(x) + tf''(x) + \frac{t^2}{2}f^{IV}(x) + o(t^2).$$

В общем случае, верна следующая теорема:

Теорема 3. Для любого натурального m существует единственная функция Чернова S_m порядка m для оператора $A = [f \mapsto f'']$, имеющая вид

$$[S_m(t)f](x) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i \cdot F(x + b_i t^{s_i}).$$

При этом: (1) $s_1 = \dots = s_{m+1} = 1/2$; (2) числа $b_1/2, \dots, b_{m+1}/2$ являются различными корнями ортогональных многочлена Чебышева-Эрмита степени $m+1$;

(3) числа a_1, \dots, a_{m+1} являются коэффициентами Кристоффеля, соответствующими квадратурным узлам b_1, \dots, b_{m+1} и могут быть вычислены по формулам

$$a_i = \frac{2^{m+2}(M+1)!\sqrt{\pi}}{(H'_{m+1}(b_i))^2}, \quad i = 1, \dots, m+1.$$

Литература

- [1] Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. V. 2. No. 2. P. 238–242.
- [2] Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators // 2021. arXiv:2104.01249. math.FA.
- [3] Галкин О. Е., Ремизов И. Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0 -полугрупп // Матем. заметки. 2022. Т. 111. № 2. С. 297–299.
- [4] Ремизов И. Д. Решение уравнения Шрёдингера с помощью оператора сдвига // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 477–480.

О СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМЫ
ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ q -РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гаянов Н. В. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
gajapovnv@gmail.com

Парусникова А. В. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
aparusnikova@hse.ru

Рассматриваются q -разностные уравнения [1] – функциональные уравнения, которые связывают значение функции в точках z и $q^k z, k = 1, 2, \dots, n$ для некоторого фиксированного числа $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Далее также предполагаем, что $q^n \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Мы исследуем возможность нахождения решений алгебраических q -разностных уравнений, а также таких, к которым могут быть сведены некоторые алгебраические q -разностные уравнения, в классе формальных рядов Дюлака [2], приводим достаточные условия наличия таких разложений (расширив рассматриваемый класс уравнений). Приведены примеры нахождения решений в виде формальных рядов Дюлака в определенных случаях, а также оценки на степени коэффициентов разложений в виде ряда Дюлака через степени коэффициентов начального отрезка разложения.

В частности, доказана следующая

Теорема 1. *Уравнение*

$$L(\sigma)y = zM(z, \log_q z, y, \sigma y, \dots, \sigma^n y),$$

где $(\sigma y)(z) = y(qz)$, $L(\sigma) = \sum_{j=0}^n a_j \sigma^j$ – многочлен от оператора σ , $L \neq 0$, $M \in \mathbb{C}[z, \log_q z, y, \dots, y_n]$ – многочлен от $n + 3$ переменных, обладает N -параметрическим формальным решением в виде ряда Дюлака, где N – количество корней многочлена $L(s)$, которые имеют вид $q^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, с учётом их кратности.

Литература

- [1] Cano J., Fortuny Ayuso P. Power series solutions of non-linear q -difference equations and the Newton-Puiseux polygon // Qualitative theory of dynamical systems. 2022. Vol. 21. № 4. 123.
- [2] Мардешич П., Ресман М. Аналитические модули для параболических ростков Дюлака // Успехи математических наук. 2021. Т. 76. № 3 С. 13-92.

О РЕШЕНИИ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ³⁹

Гермидер О. В. (Россия, Архангельск)

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
o.germider@narfu.ru

Попов В. Н. (Россия, Архангельск)

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
v.popov@narfu.ru

Представленная работа посвящена решению бигармонического уравнения в задаче об изгибе тонкой ортотропной пластины, которая находится под воздействием поперечной нагрузки, нормально распределенной по ее поверхности. Предполагается, что материал пластины в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии [1]. Функция, аппроксимирующая решение этого уравнения, представлена в виде разложения в двойные ряды по системам ортогональных многочленов Лежандра и Чебышева первого

³⁹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 24-21-00381.

рода. Конечные суммы рядов записаны в матричном виде на основе определения тензорного произведения матриц. С использованием корней многочленов в качестве точек коллокаций, граничных условий на краях пластины и свойств многочленов Лежандра [2] и Чебышева [2], [3], краевая задача сведена к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложении решения исходного уравнения. Представлены результаты вычисления значений функции изгиба срединной поверхности при распределенной нагрузке постоянной интенсивности, нагрузки вида, допускающего аналитическое решение краевой задачи, и с интенсивностью, соответствующей гидростатическому давлению. Полученные значения отклонений построенных решений с использованием многочленов Лежандра и Чебышева от аналитического решения задачи приведены по бесконечной норме [4] и конечной норме в пространстве интегрируемых с квадратом функций [4], [5]. Для дискретизации интегральной нормы использовано разложение функции квадрата этого отклонения для каждого полученного решения в ряд Чебышева, а коэффициенты в этом разложении найдены с использованием значений функции изгиба, вычисленные в корнях многочленов Чебышева. Верификация полученных значений интегральной нормы осуществлена с использованием алгоритма из [6] в системе компьютерной алгебры Maple.

Литература

- [1] Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [2] Shen J., Tang T., Wang L. Spectral Methods. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [3] Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press, 2003.
- [4] Kosov E., Temlyakov V. Sampling discretization of the uniform norm and applications // J. Math. Anal. Appl. 2024. no 128431.
- [5] Новиков С. И. Об одной задаче интерполяции с минимальным значением L_2 -нормы оператора Лапласа // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28. № 4. С. 143–153.
- [6] Berntsen J., Espelid T. O., Genz A. Algorithm 698: DCUHRE: an adaptive multi-dimensional integration routine for a vector of integrals // ACM Trans. Math. Softw. 1991. V. 17, no 4. P. 452-456.

ОБ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА⁴⁰

Гомоюнов М. И. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
m.i.gomoyunov@gmail.com

В теории антагонистических игр для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, важное место занимают следующие два вопроса (см., например, [1], [2], [3], [4]): доказательство существования цены игры, то есть совпадения нижней и верхней цен, которые обычно определяются в терминах неупреждающих стратегий управления игроков; разработка методов построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи, которые позволили бы игрокам гарантировать величину цены игры с любой наперед заданной точностью. В литературе известны несколько подходов к исследованию этих вопросов. Среди прочих, хорошо зарекомендовал себя подход, основанный на принципе динамического программирования и опирающийся на результаты из теории уравнений Гамильтона–Якоби и их обобщенных решений (например, в минимаксном [2] или вязкостном [5] смысле).

Настоящая работа посвящена развитию данного подхода с целью изучения двух вышеупомянутых вопросов для более широкого класса антагонистических игр, в которых движение динамической системы описывается нелинейным интегральным уравнением Вольтерра следующего вида:

$$x(\tau) = x^0(\tau) + \int_0^\tau K(\tau, \xi) f(\xi, x(\xi), u(\xi), v(\xi)) d\xi, \quad \tau \in [0, T], \quad (1)$$

⁴⁰Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, <https://rscf.ru/project/21-71-10070/>.

где $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в текущий момент времени τ ; $u(\xi) \in P \subset \mathbb{R}^r$ и $v(\xi) \in Q \subset \mathbb{R}^s$ — управления первого и второго игроков соответственно в момент времени ξ , P и Q — компактные множества; $T > 0$ — фиксированный терминальный момент времени; непрерывная функция $x^0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задана. Путем выбора управлений первый игрок стремится минимизировать, а второй — максимизировать значение терминально-интегрального показателя качества

$$J = \sigma(x(T)) + \int_0^T \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (2)$$

При определенных условиях на ядро K и функции f , σ , χ , позволяющих охватить в том числе дифференциальные игры для систем с производными дробного порядка, доказано, что игра (1), (2) имеет цену, и предъявлена конструкция оптимальных стратегий управления игроков по принципу обратной связи с памятью истории движения. Основу результатов составляет техника так называемых наследственных уравнений Гамильтона–Якоби [6] и использование подходящего функционала Ляпунова–Красовского [7].

Литература

- [1] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [2] Subbotin A. I. Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.
- [3] Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, 2nd ed. New York: Springer, 2006.
- [4] Yong J. Differential Games: A Concise Introduction. Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2015.
- [5] Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, № 1. P. 1–42.
- [6] Лукоянов Н. Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011.
- [7] Gomoyunov M. I. On viscosity solutions of path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations for fractional-order systems // J. Differ. Equ. 2024. Vol. 399. P. 335–362.

ИЗОМОНОДРОМНОЕ СЕМЕЙСТВО ШЛЕЗИНЕГРА ФУКСОВЫХ СИСТЕМ И СЛИЯНИЕ ЕГО ОСОБЫХ ТОЧЕК

Гонцов Р. Р. (Россия, Москва)

Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
gontsovrr@gmail.com

Рассматривается изомонодромное семейство Шлезингера фуксовых систем линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \quad z \in \mathbb{C}, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad (1)$$

зависящее от параметра деформации $a = (a_1, \dots, a_N)$ (положения особых точек матрицы коэффициентов), принадлежащего некоторому диску D комплексного пространства $\mathbb{C}^N \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a \in \mathbb{C}^N \mid a_i = a_j\}$. Такое семейство характеризуется следующими свойствами:

- матрицы монодромии систем семейства сохраняются при локальном изменении параметра деформации;
- матрицы-вычеты $B_i(a)$ удовлетворяют уравнению Шлезингера (системе уравнений в частных производных):

$$dB_i(a) = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Доклад посвящен продолжению исследований работы [1] по поведению решений уравнения (2) вне диска D и *изономодрному слиянию* нескольких особых точек a_1, \dots, a_k семейства (1) в одну: $a_1, \dots, a_k \rightarrow x$. Последнее имеет место, если существует предел матрицы коэффициентов семейства (1) при $a_1, \dots, a_k \rightarrow x$. В общем случае матрицы-вычеты $B_i(a)$ имеют ветвление вдоль множества слияния $C = \{a \in \mathbb{C}^N \mid a_1 = \dots = a_k\}$, поэтому, говоря о существовании предела, подразумевают, что каждая точка a_i подходит к x , оставаясь при этом в своем открытом секторе S_i с вершиной в x , $i = 1, \dots, k$, так что непересекающиеся секторы S_1, \dots, S_k образуют покрытие окрестности точки x .

В частности, нами исследуется вопрос сохранения уравнения Шлезингера (на пространстве переменных x, a_{k+1}, \dots, a_N) в случае такого изономодрного слияния, при котором существуют пределы матриц-вычетов на множестве C . Также мы получаем семейства решений уравнения (2) без особенностей на C (полиномиальные), с полярными особенностями вдоль C (рациональные), со степенным ветвлением вдоль C (представимые в радикалах).

Доклад основан на результатах совместной работы с Владимиром Драговичем и Василисой Шрамченко.

Литература

- [1] Болибрух А. А. Об изономодрных слияниях фуксовых особенностей // Труды МИАН. 1998. Т. 221. С. 127–142.

СХОДИМОСТЬ (ОБОБЩЕННЫХ) СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ МАЛЕРА

Гонцов Р. Р. (Россия, Москва)

Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
gontsovrr@gmail.com

Горючкина И. В. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
chukhareva@yandex.ru

Рассматривается аналитическое уравнение Малера

$$F(x, y(x), y(x^\ell), \dots, y(x^{\ell^n})) = 0, \quad \ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \quad (1)$$

Для классических степенных рядов (с целочисленными показателями степени),

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{C}[[x]], \quad (2)$$

формально удовлетворяющих уравнению Малера, имеется следующий результат относительно их сходимости.

Теорема (Ж.-П. Безивин, 1994). *Формальный степенной ряд (2), удовлетворяющий уравнению (1), имеет ненулевой радиус сходимости.*

В нашем докладе мы расскажем о другом доказательстве теоремы Безивина, которое основывается на методе мажорант и кажется более простым. А также мы расскажем об обобщении теоремы Безивина на случай обобщенных степенных рядов, т.е. рядов с комплексными показателями степени.

О ДИСКРЕТНЫХ АТТРАКТОРАХ ЛОРЕНЦА⁴¹

Гонченко С. В. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
sergey.gonchenko@mail.ru

В этом году Леониду Павловичу Шильникову исполнилось бы 90 лет. Среди его важнейших научных исследований, тематика, связанная с изучением аттракторов Лоренца, всегда была одной из самых приоритетных. Результаты, полученные в этой области им самим и его соавторами, в том числе знаменитая геометрическая модель Афраймовича-Быкова-Шильникова [1,2,3], составляют основу теории аттракторов Лоренца. Настоящую работу можно рассматривать в контексте развития этой теории, но уже для так называемых дискретных аттракторов Лоренца многомерных отображений. Такие аттракторы впервые были найдены численно в работе [4], а основы их качественной теории были заложены в нашей работе с Л.П. Шильниковым [5]. В докладе дается обзор этих и новых результатов по теории дискретных аттракторов Лоренца. Мы описываем основные свойства различных типов таких аттракторов в случае трехмерных отображений, уделяя особое внимание бифуркационным сценариям, приводящим к их возникновению, а также свойствам робастности (псевдогиперболичности) их хаотической динамики.

Литература

- [1] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР, 1977, Т. 234, № 2, 336-339.
- [2] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО, 1982, Т. 44, 150-212.
- [3] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. // Дополнение I к книге: Дж.Марсден, М.Мак-Кракен "Бифуркация рождения цикла и ее приложения". М., Мир, 1980, 19 с.
- [4] Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. - Int. J. of Bifurcation and chaos, 2005, v. 15, No. 11, 3493-3508.
- [5] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная Динамика, 2012, Т. 8, № 1, С. 3-28.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ НА ХИМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ⁴²

Губайдуллин И. М. (Россия, Уфа)

Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН
irekmars@mail.ru

Язовцева О. С. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
kurinaos@gmail.com

Наиболее сложным вопросом при разработке математических моделей сложных процессов и явлений является вопрос о допустимом упрощении модели. Доклад посвящен исследованию величины скорости вынужденной конвекции (стефановского потока), возникающей в ходе течения химических реакций в пористом теле (зерне катализатора) [1]. Явление вынужденной конвекции при химических процессах наблюдается при изменении реакционного объема вследствие поглощения газообразных веществ твердым веществом [2] или в гомогенных реакциях при резких изменениях плотности [3] и т.д.

В качестве объекта исследования взят процесс окислительной регенерации цилиндрического зерна катализатора. Математическая модель процесса нелинейна и включает

⁴¹Работа поддержана грантом РФФ 24-11-00339.

⁴²Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема FMRS-2022-0078).

в себя двумерные нестационарные уравнения диффузии-конвекции-реакции для описания материального баланса зерна катализатора, параболическое уравнение теплопроводности с источниковым членом, обыкновенные дифференциальные уравнения для описания химических реакций [4]. Поскольку конвекция носит вынужденный характер, для описания ее скорости введено дополнительное стационарное уравнение переноса с источниковым членом.

Вычислительный алгоритм носит явный характер, в его основе лежит схема расщепления по физическим процессам, задачи химии решены в отдельном блоке трехстадийным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности. Для повышения точности расчета в представленный ранее в [4] алгоритм внесено изменение в части расчета стефановского потока: он ведется на основе вклада химических реакций в процесс.

Для нескольких численных экспериментов было получено, что доля поглощаемого кислорода от его начальной концентрации составляет примерно 8.4-8.5%, что свидетельствует о необходимости учета вынужденной конвекции в задаче.

Литература

- [1] Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 491 с.
- [2] Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С., Загоруйко А. Н. Численное моделирование окислительной регенерации сферического зерна катализатора // Матем. моделирование, 2022. Т. 34, № 11. С. 48–66.
- [3] Снытников В. Н., Пескова Е. Е., Стояновская О. П. Модель двухтемпературной среды газ-твердые наночастицы с лазерным пиролизом метана // Математическое моделирование. 2023. Т. 35, № 4. С. 24–50. DOI 10.20948/mm-2023-04-02.
- [4] Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Peskova E.E., Sukharev L.A., Zagoruiko A.N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. V. 11. P. 669.

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ТОПОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КРИВЫХ И РЯДЫ ПУАНКАРЕ

Гусейн-Заде С. М. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

sabir@mccme.ru

В работе [1] был вычислен ряд Пуанкаре набора нормирований на кольце ростков голоморфных функций от двух переменных, определяемых неприводимыми компонентами ростка плоской комплексной кривой $(C, 0)$. Было показано, что он совпадает с многочленом Александера (от нескольких переменных) соответствующего алгебраического зацепления $C \cap \mathbf{S}_\varepsilon^3$. Отсюда следует, что ряд Пуанкаре определяет комбинаторику (минимального) разрешения кривой C и её топологию, т. е. (локальную) топологию пары (\mathbf{C}^2, C) . Для ряда Пуанкаре набора нормирований на плоскости (например, определяемых неприводимыми компонентами ростка плоской комплексной кривой) имеется несколько эквивалентных формул, в частности, в виде некоторого интеграла по отношению к эйлеровой характеристике по проективизации пространства ростков функций, как эйлеровой характеристики, так называемой расширенной полугруппы набора нормирований.

Было предложено рассматривать соответствующие нормирования на кольце ростков вещественно аналитических функций. В этом случае (эквивалентные для кольца голоморфных функций) формулы дают, вообще говоря, разные результаты. На основе этих формул в [2] были предложены (различные) аналоги рядов Пуанкаре наборов нормирований на кольце ростков вещественно аналитических функций. Эти ряды были вычислены для одного нормирования, определяемого неприводимым ростком плоской (комплексной) кривой. Рассмотренная постановка приводит к понятию вещественной топологии алгебраического узла или зацепления. Будет обсуждено, насколько ряд Пуанкаре определяет вещественную топологию.

Доклад основан на совместной работе с А. Кампильо и Ф. Дельгадо.

Литература

- [1] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S. M. The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it // *Duke Math. J.* 2003, V. 117, no. 1, p. 125–156.
- [2] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S. M. On real analogues of the Poincaré series // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2024, V. 56, no. 1, p. 449–459.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В НЕЛОКАЛЬНОЙ КПП-МОДЕЛИ

Давыдов А. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
НИТУ МИСИС

davydov@mi-ras.ru

Платов А. С. (Россия, Москва)

НИТУ МИСИС

platoymm@mail.ru

Туницкий Д. В. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

dtunitsky@yahoo.com

Одной из активно используемых сегодня моделей для анализа динамики распределенного ресурса является модель Колмогорова-Петровского-Пискунова и Фишера [1], [2]. Мы рассматриваем нелокальную модель такого типа на компактном замкнутом связном многообразии без края M (например, на n -мерном торе, естественно появляющемся при изучении ресурса в периодической среде [3], или на двумерной сфере – естественной модели поверхности Земли [4]). Уравнение модели имеет вид

$$p_t - Lp = ap - bp^2,$$

где $p = p(x, t)$ – неотрицательная плотность изучаемого ресурса в точке x многообразия M в момент времени t , L – равномерно эллиптический оператор, непрерывно зависящий от этой точки, а ограниченные функции a и b характеризуют скорости процессов возобновления ресурса и насыщения им среды, соответственно, измеримо зависят от точки x и непрерывно от показателя объема имеющегося ресурса, например, его суммарной массы, что и делает модель нелокальной. Таким образом, $a = a(x, E)$, $b = b(x, E)$, где показатель E определяется строго монотонным непрерывным функционалом на конусе неотрицательных плотностей распределения с нулевым значением в нуле. Предполагается, что функции a и b монотонно зависят от E , а именно, при его росте функция a не возрастает, а функция b не убывает, и что последняя функция отделена от нуля, $0 < b_0 \leq b(\cdot, 0)$.

Мы показываем, что в изучаемой модели не может существовать более одного нетривиального неотрицательного ограниченного стационарного решения; оно существует и является положительным, если при нулевом значении E глобальный аттрактор нетривиальных неотрицательных ограниченных решений положителен (см. [4], [5]). Более того, существует постоянный распределённый отбор ресурса, что добавляет в правую часть уравнения модели слагаемое $-up$, с некоторым неотрицательным ненулевым измеримым управлением u , $u = u(x)$, при котором есть стационарное положительное решение. Возможно добавление слагаемых и другого вида, учитывающих, например, сложность обнаружения и/или извлечения ресурса [5], [6]. Наконец, в нашем случае при наличии ограничения $0 \leq u \leq U$ с некоторой ограниченной измеримой функцией U существует допустимое управление, при котором средний временной сбор ресурса на соответствующем ему стационарном состоянии не меньше, чем при других допустимых управлениях на соответствующих им стационарных состояниях ресурса.

Литература

- [1] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1–26.
- [2] Fisher R. A. The Wave of Advance of Advantageous Genes // Annals of Eugenics, 1937. 7 (4), P. 353–369.
- [3] Berestycki H., Francoise H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51. P. 75–113.
- [4] Винников Е. В., Давыдов А. А., Туницкий Д. В. Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 514, № 1. С. 59–64.
- [5] Туницкий Д. В. О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Изв. РАН. Сер. матем. 2023. Т. 87. № 4. С. 186–204.
- [6] Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимальный циклический сбор распределенного возобновляемого ресурса с диффузией // Оптимальное управление и дифференциальные игры, Сборник статей, Труды МИАН. 2021. Т. 315. С. 64–73

ТОЖДЕСТВО ОШИБКИ ДЛЯ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ГЛАДКИМ ТЕНЗОРОМ

Даровская К. А. (Россия, Москва)

Первый МГМУ имени И. М. Сеченова

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

k.darovsk@gmail.com

Говоря о приближенных решениях вариационных задач, отметим, что для измерения их «качества» (т. е. близости к точному решению) хорошо себя зарекомендовали функциональные апостериорные оценки, поскольку они не накладывают условий на способ построения аппроксимаций. Эффективная техника для случая бигармонической задачи, связанные с задачей трудности и численное моделирование подробно изложены в статье [1]. В недавней обширной работе [2] форма апостериорного тождества получена для класса задач с монотонными операторами.

Особую роль в получении апостериорных оценок играет так называемое «тождество ошибки», описывающее разрыв между точным решением задачи и произвольной функцией из соответствующего энергетического класса. В рамках доклада предлагается новый подход к его получению для задачи с линейным дифференциальным оператором второго порядка и гладким тензором и формулируется соответствующее общее утверждение. Указанные результаты являются продолжением исследования, опубликованного в [3].

Рассмотрим вариационную задачу, порожденную линейным дифференциальным оператором Λ :

$$J(v) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda v)_Y - (f, v)_{L_2} \rightarrow \min_{\mathbb{K}}. \quad (1)$$

Здесь Λ действует из V — пространства Соболева $H^2(\Omega)$ с некоторыми граничными условиями — в пространство $Y = M_{sym}^{d \times d}(L_2(\Omega))$ симметрических матриц с элементами из $L_2(\Omega)$ и скалярным произведением $(q, g)_Y = \int_{\Omega} q : g \, dx$, где $q : g = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d q_{ij} g_{ij}$. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ полагаем ограниченной, связной, с липшицевой границей $\partial\Omega$. Краевые условия для пространства V диктуются приложениями задачи (1); для бигармонического случая ими являются $v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$.

Далее, $\mathcal{A} = \{a_{ijkl}\}$, $a_{ijkl} \in L_{\infty}(\Omega)$ реализует линейное непрерывное отображение $Y \rightarrow Y$ и обладает следующими свойствами: $a_{ijkl} = a_{klij}$, $a_{ijkl} = a_{jikl}$ и

$$\kappa_1 |\sigma|^2 \leq \mathcal{A}\sigma : \sigma \leq \kappa_2 |\sigma|^2 \quad (\forall \sigma \in Y),$$

подробнее см. в [4]. Наконец, $f \in L_2(\Omega)$ и $\mathbb{K} \subseteq V$ — выпуклое замкнутое подмножество.

Целью является получение тождества ошибки для задачи (1).

Литература

- [1] Апушкинская Д. Е., Репин С. И. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1881–1897.
- [2] Репин С. И. Апостериорные тождества для мер отклонений от точных решений нелинейных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 6. С. 896–919.
- [3] Darovskaya K. Deviation identities on solutions for a class of the obstacle problems // The Third International Conference “Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives”. Abstracts. Yerevan: YSU, 2023. P. 22-23.
- [4] Neittaanmäki P., Repin S. I. A posteriori error estimates for boundary–value problems related to the biharmonic operator // East-West J. of Num. Math. 2001. Vol. 9. № 2. P. 157–178

РЕШЕНИЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИМ НУЛЁМ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ⁴³

Джабраилов А. Л. (Россия, Грозный)

Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова

ahmed_0065@mail.ru

Изучается система дифференциальных уравнений

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

в предположении, что функции f_i , $i = \overline{1, n}$ непрерывны по всем аргументам в области $D: \{x \in [a, b], |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$, d_i , $i = \overline{1, n}$, данные числа при $x = +\infty$ имеют неинтегрируемую особенность (сингулярность [1, 2]). Допускается существование частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$ с такими же свойствами. Налагаются следующие ограничения:

$$f'_{iy_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq -\psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n)| \geq \tilde{\psi}_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

Здесь $\psi_i(x)$, $\tilde{\psi}_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, интегрируемые неотрицательные функции на $[a, +\infty)$, причём

$$K_i = \exp\left(\int_a^{+\infty} \psi_i(t) dt\right) \int_a^{+\infty} \tilde{\psi}_i(t) dt \leq d_i, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \tilde{\psi}_i(t) dt = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Теорема 1. Система (1) имеет по крайней мере одно решение y_i , $i = \overline{1, n}$ удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

При введенных $\varphi_i(x)$, таких что

$$\varphi_i(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\int_t^x \psi_i(s) ds} \tilde{\psi}_i(t) dt, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

и

$$\varphi_i(x) \leq K_i \leq d_i, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

⁴³Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ (FEGS-2020-0001).

Пример 1. Дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad x \in [1, +\infty)$$

удовлетворяет условиям (2)–(7) и имеет решение $y = -\frac{1}{2x}$, удовлетворяющее условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2x}) = 0$.

Если рассмотреть систему (1) в области $D : \{x \in [a, b], |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$, то ограничения (2)–(7) видоизменяются следующим образом:

$$f'_{iy_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq -\psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n)| \geq \tilde{\psi}_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$K_i = \exp\left(\int_{-\infty}^a \psi_i(t) dt\right) \int_{-\infty}^a \tilde{\psi}_i(t) dt \leq d_i, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^a \tilde{\psi}_i(t) dt = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$\varphi_i(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\int_t^x \psi_i(s) ds} \tilde{\psi}_i(t) dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$\varphi_i(x) \leq K_i \leq d_i, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Система (1) будет иметь решение $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Литература

- [1] Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Эльфа, 2004. 445 с.
- [2] Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала: Алеф. 2014. 440 с.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов С. З. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан
siroj63@mail.ru

Сипатдинова Б. К. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан
sbiybinaz@mail.ru

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [1]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучены в монографии [2]. Для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях обратные задачи мало исследованы. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе исследуется однозначность разрешимости линейной обратной задачи с полупериодическим краевым условием для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (0, 1) \times (0, T) \times R = Q \times R = \{(x, t, z); x \in (0, 1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода второго порядка:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x, t)u = \psi(x, t, z), \quad (1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа, и пусть $k(0) \leq 0 \leq k(T)$.

Здесь $\psi(x, t, z) = g(x, t, z) + h(x, t)f(x, t, z)$, $g(x, t, z)$ и $f(x, t, z)$ - заданные функции, а функция $h(x, t)$ подлежит определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0, T]$ не налагается никаких ограничений [3].

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области \bar{Q} .

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x, t, z), h(x, t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G , такие что, функция $u(x, t, z)$ удовлетворяет следующим полупериодическим краевым условиям:

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (3)$$

Далее будем считать, что $u(x, t, z) \rightarrow 0$ и $u_z(x, t, z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$,

$u(x, t, z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом $(x, t) \in \bar{Q}$. (4)

Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x, t, l_0) = \varphi_0(x, t), \quad l_0 \in R \quad (5)$$

и с функцией $h(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{2,3}(G); h \in W_2^2(Q)\}.$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ весовая пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^2(Q)}^2 d\lambda,$$

Пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (1) и заданной функции $\varphi_0(x, y)$;

Условие 1:

Периодичность: $a(x, 0) = a(x, T)$, $c(x, 0) = c(x, T)$, $g(x, 0, z) = g(x, T, z)$, $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$.

Гладкость: $f(x, t, l_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(Q)$, $|f_0(x, t)| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

Условие 2:

$$\varphi_0(x, t) \in W_2^3(Q); \varphi_0|_{t=0} = \varphi_0|_{t=T}; \varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0.$$

Основными результатом является

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2, кроме того, пусть $2a - |k_t| + \mu k \geq B_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq b_2 > 0$, для всех $(x, t) \in \bar{Q}$ и пусть существует малое положительное число σ - такое, что для $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$ имеют оценки $b_0 - 11\mu^2\sigma^{-1} = \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, где $M = \text{const} \left(\sigma\mu^2 m \delta^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(Q)} \right)$,

$m = 10c_1c_2c_3$, $c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^8} < +\infty$, $c_i (i = 2, 3)$ -коэффициенты теоремы вложения Соболева.

Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U .

Литература

- [1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г., Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. С. 67.
- [2] Джамалов С.З., Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. 2021. С. 176.
- [3] Врагов В.Н., Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Джамалов С. З. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан
siroj63@mail.ru

Халходжаев Б. Б. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан
xalxadjayev@yandex.ru

Юсупов Ш. Б. (Узбекистан, Ташкент)

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан
sherzod.yusupov.2020@inbox.ru

Как нам известно нелокальные краевые задачи для уравнения в частных производных высокого порядка без вырождения исследованы многими учеными, полная библиография имеется в книге А.Дезина [1], а для уравнения смешанного типа высокого порядка с локальными краевыми условиями в различных пространствах исследованы в работах [2, 3], с нелокальными краевыми условиями такие задачи очень мало исследованы [5, 6]. В данной работе с применением методы Фаэдо-Галеркина, априорных оценок, и «ε-регуляризации» изучается однозначная разрешимость регулярного обобщенного решения одной полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространстве Соболева.

В области

$$Q = (0, 1) \times (0, T) = \{(x, t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$$

рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка:

$$L_2 u = Pu - Mu = f(x, t) \quad (1)$$

Здесь $Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x, t) D_t^i u$; $Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$ где $K_4(x, t) = K_4(t)$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), $D_t^0 u = u$,

Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены следующее условия:

$$K_4(t) \in C^3(0, T) \cap C[0, T]; \quad K_i(x, t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q}); \quad a, b, c - consts > 0.$$

$$K_4(0) = K_4(T) = 0; \quad K_{4t}(0) = K_{4t}(T), \quad K_i(x, 0) = K_i(x, T); \quad i = 0, 2, 3,$$

для всех $x \in [0, 1]$. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0, T]$ не налагается никаких ограничений [2].

Полунелокальная краевая задача: найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0; \quad (3)$$

$$u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (4)$$

где γ величина отличное от нуля, которого будет уточнена ниже.

Теорема. Пусть выполнены высшее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $|K_1(x, t)| > 0$ достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие неравенство для коэффициентов уравнения (1); $(2K_3 + (2j - 3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $j = 0, 1, 2$; $-2K_1 + K_{2t} - \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $-\lambda K_0 + K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x, t) \in \bar{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, для всех $x \in [0, 1]$. Тогда для любой функции $f(x, t) \in W_2^1(Q)$, такой, что $\gamma f(x, 0) = f(x, T)$, существует единственное регулярное решение задачи (1),(2)-(4) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$.

Литература

- [1] Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М: Наука, 1980.
- [2] Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
- [3] Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. С. 5-13.
- [4] Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск, 1995, С. 133.
- [5] Джамалов С. З, Пятков С. Г. О некоторых классах краевых задач для много-мерных уравнений смешанного типа высокого порядка // Сиб.мат.журнал, 2020, Т.61, №4, С. 777-795.
- [6] Джамалов С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. С. 173.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ КЕПЛЕРОВСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ АСТЕРОИДА ВО ВНЕШНЕЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Доброславский А. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
a.dobroslavskiy@gmail.com

Красильников П. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
krasil06@rambler.ru

Рассматривается классическая задача об анализе вековых возмущений кеплеровских элементов орбиты астероида во внешней ограниченной круговой задаче трех тел, когда орбита малого тела с фокусом в Солнце возмущается гравитационным притяжением со стороны внутреннего тела (Юпитера), двигающегося по круговой орбите. Численный анализ внешней круговой ограниченной задачи трех тел хорошо известен [1]. В докладе дано новое представление возмущающей силовой функции в виде степенного ряда по отношению $\mu = r_J/a$. Коэффициенты ряда имеют компактный вид и выражаются через гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена. Это разложение описывает пертурбационную функцию как однозначную аналитическую функцию параметра μ , которую можно эффективно раскладывать в ряды по кеплеровским элементам орбиты, строить ее усечения любых порядков малости, находить производные и т.д. Одна из целей доклада — доказательство асимптотичности степенного ряда в областях его расходимости. Асимптотичность ряда позволит использовать традиционные методы теории возмущений для анализа эволюции движений астероида при произвольных значениях μ из интервала $(0, 1)$, за исключением случая равномерно близких орбит ($\mu \approx 1$).

Как известно, возмущающая функция для внешней ограниченной круговой задачи трех тел имеет вид:

$$R = fm_J \left[\frac{1}{r} + \frac{r_J^3 - r^3}{r_J^2 r^2} + \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r_J}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma) \right],$$

где f — постоянная тяготения, m_J — масса Юпитера, r и r_J — радиус-векторы астероида и Юпитера, γ — угол между векторами, а P_k — полином Лежандра степени k .

После усреднения R по λ_J — долготе тела Юпитера и l — средней долготе астероида, аналогично [2], было получено представление пертурбационной функции в виде степенного ряда по отношениям r_J/a :

$$R^{**} = \frac{fm_J}{a} + \frac{fm_J}{a\sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_J}{a} \right)^{2k} D_k, \quad (1)$$

здесь

$$D_k = (1+e)^{1-2k} P_{2k}(0) \left(F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 1-2k, 1; \frac{2e}{e-1} \right) P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) + 2 \sum_{n=1}^k A_{2n}^{2k} (-1)^n \cos 2n\omega \right),$$

$$A_m^{(k)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 1-k; 1-n, 1+n; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(k-n)!}{(k+n)!} P_k^{(n)}(0) P_k^{(n)}(\cos i),$$

e , ω , a — эксцентриситет, аргумент перигелия и большая полуось оскулирующей орбиты астероида, i — угол ее наклона, а $F_{2,1}$, $F_{3,2}^{reg}$ — гипергеометрические функции Гаусса и Клаузена.

Рассматривается вопрос о поведении ряда (1) в областях расходимости. Численно показано, что этот ряд является асимптотическим по Пуанкаре, т.е.

$$\|R^{**} - R_N^{**}\| \sim o(\mu^N)$$

на конечном промежутке времени, где R_N^{**} — частичная сумма ряда. Это значит, что точность приближения ряда его частичной суммой — малая величина высокого порядка. Поэтому, для исследования эволюции кеплеровских элементов орбиты астероида в областях расходимости ряда (1), можно использовать классические методы теории возмущений, основанные на идее усечения этого ряда.

Литература

- [1] Вашковьяк М. А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. I. Качественное исследование // Космические исследования. 1981. Т. 19. № 1. с. 5–18.
- [2] Красильников П. С., Доброславский А. В. Усредненная круговая пространственная ограниченная задача трех тел: внутренний вариант, новые результаты // ДАН. Математика, Информатика, Процессы Управления, 2023, Т. 512, с. 33–41.

КЛАССИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕРЕГОВЫХ ВОЛН И ВЫРОЖДЕННЫЕ БИЛЬЯРДЫ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ⁴⁴

Доброхотов С. Ю. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН

s.dobrokhотов@gmail.com

Под бильярдами с полужесткими стенками мы понимаем специальные решения гамильтоновых систем, задаваемых на двумерной плоскости (x_1, x_2) гамильтонианами $H = D(x_1, x_2)(p_1^2 + p_2^2)$, где $D(x)$ — гладкая функция, обращающаяся в ноль на некоторой

⁴⁴ Доклад основан на совместных исследованиях с М.М.Вотяковой, Д.С.Миненковым, В.Е.Назайкинским и А.В.Цветковой, частично поддержанных Российским научным фондом (Проект 24-11-00213).

гладкой замкнутой кривой Γ , причем $\nabla D|_{\Gamma} \neq 0$. Такие бильярды возникают в теории волн на воде в ограниченных и неограниченных бассейнах, функция D описывает дно бассейна и внутри бассейна принимает положительные значения. Кривая Γ -береговая линия. В работе [1] при условии интегрируемости гамильтоновой системы с гамильтонианом H с помощью квазиклассического приближения и модифицированного преобразования Карриера-Гринспана были построены периодические по времени асимптотические решения нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами, локализованные в окрестности береговой линии. Соответствующие траектории гамильтоновой системы образуют некомпактные («нестандартные») торы Лиувилля, их проекции на плоскости (x_1, x_2) замечают кольцевую область и отражаются от некоторой простой каустики, находящейся внутри бассейна, и береговой линии, которая представляет собой «нестандартную» каустическую Дефект построенных в [1] решений состоит в требовании интегрируемости введенной гамильтоновой системы, которое практически не может быть выполнено в реальных ситуациях. В этом докладе мы в основном рассматриваем вырожденные ситуации [2], когда «стандартная» каустика сильно приближается к береговой линии («нестандартной» каустике). Тогда в гамильтоновой системе появляются «быстрые и медленные переменные», требование интегрируемости тогда исчезает, и всегда возможно построение эффективных асимптотических волновых решений, имеющих небольшое число осцилляций по нормали к берегу (являющихся аналогами волн Стокса и Урселла). Соответствующие траектории сильно локализованы в узкой окрестности берега, при этом они всегда входят в береговую линию и отражаются от нее под углом 90 градусов. Таким образом мы имеем асимптотические решения похожие на известные в акустике решения типа «шепчущей галереи», но при этом для их существования за счет «вырожденной» стенки (береговой линии) не требуется выпуклости двумерной области, в которой расположен бассейн, то есть области на двумерной плоскости (x_1, x_2) , в которых $D(x_1, x_2) > 0$. На примерах показана зависимость локальной амплитуды нелинейных волн от угла наклона, кривизны береговой линии и т.д.

Литература

- [1] Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Цветкова А. В. Нелинейные эффекты и заплеск береговых волн, порожденных бильярдами с полужесткими стенками, в рамках теории мелкой воды // Труды МИАН, 2023, Т. 322, С. 1-13.
- [2] Dobrokhotov S. Yu., Minenkov D. S., Votiakova M. M. Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores // Russian Journal of Mathematical Physics, 2024, Vol. 31, No. 1, pp. 79-93.

О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСАХ И СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ⁴⁵

Драгунов Т. Н. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
dtn@mm.unn.ru

Морозов К. Е. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
kirwamath@gmail.com

Морозов А. Д. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
morozov@mm.unn.ru

На основе анализа усреднённых систем рассматривается вопрос о топологии окрестностей вырожденных резонансов при квазипериодических по времени возмущениях

⁴⁵Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00050. Численные эксперименты выполнены при поддержке Министерства образования и науки (проектная часть госзадания №. 0729-2020-0036).

двумерных нелинейных гамильтоновых систем. Предполагается, что возмущенная автономная система имеет предельный цикл, а неавтономная система имеет вырожденные резонансы. Рассматривается проблема синхронизации колебаний на вырожденных резонансах при *параметрических* возмущениях [1, 2, 3]. В этом случае усредненная система может иметь предельный цикл в области колебательных движений, что приводит к новому типу синхронизации. Даются возможные типы фазовых портретов усредненной системы в зависимости от величины отклонения резонансного уровня от уровня с предельным циклом.

Литература

- [1] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
- [2] Morozov K. E., Morozov A. D. Synchronization of quasiperiodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case // *Chaos*, 2021, vol. 31, 083109.
- [2] Morozov K. E., Morozov A. D. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of TwoDimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2024, vol. 29, no. 1, pp. 65-77.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЦИКЛОНОВ В КУБИЧЕСКОЙ ЗАМКНУТОЙ ЯЧЕЙКЕ

Ермаков А. Д. (Россия, Москва)

Московский физико-технический институт
ermakov.ad@phystech.edu

Фортова С. В. (Россия, Москва)

Институт автоматизации проектирования РАН
Московский физико-технический институт
sfortova@mail.ru

Проведено численное исследование возникновения вихревого течения в несжимаемой жидкости внутри кубической ячейки при постоянном воздействии внешней силы (силы Колмогорова) и силы вращения (силы Кориолиса) [1]. В результате численного эксперимента в объеме жидкости возникали когерентные столбовые вихри, расположенные вдоль оси вращения. Время существования вихрей значительно превышало время вязкого затухания за счет трения о верхнюю и нижнюю грани куба. Установлено существование нескольких типов квази-двумерных течений, вид которых зависит от амплитуды внешней силы и частоты вращения куба. Данные типы течений так же были обнаружены в работе [2]. В течении выделены хаотический режим, режим нескольких вихрей-циклонов небольшого размера, режим одного крупного вихря-циклона и режим крупного вихря-циклона, внутри которого присутствует интенсивный вихрь-антициклон. Исследованы радиальные профили средней по времени азимутальной скорости в когерентных вихрях для указанных типов течений. Показано, что они отличаются числом и размерами вихрей и имеют различное распределение завихренности по радиусу вихря, аналогично экспериментальным данным [3].

Литература

- [1] Greenspan H. P. The theory of rotating fluids, At the University Press, Cambridge (1968).
- [2] Alexakis A. Biferale L. *Phys. Rep.* 767, 1 (2018).
- [3] Tumachev D., Filatov S., Vergeles S., Levchenko A. Two dynamical regimes of coherent columnar vortices in rotating fluid, *JETP Letters* 118, 426–432 (2023).

О КЛАССЕ ЧЕРНА–ЛОСИКА СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Ефременко Ю. Д. (Россия, Новосибирск)
Новосибирский государственный университет
i.efremenko@ngsu.ru

Модифицированные классы Черна – Лосика были определены Лосиком для слоений коразмерности один [1]. Эти характеристические классы принимают значения в когомологиях пространства струй (джетов) реперов второго порядка на пространстве листов слоения. В работах [2], [3] классы Черна – Лосика и Годбийона – Вея – Лосика были вычислены для слоения Рибба с произвольной функцией, определяющей асимптотику некомпактных слоев в окрестности компактного слоя. В частности, показана возможная нетривиальность модифицированных классов при тривиальности классических классов Годбийона – Вея.

В данной работе мы обобщаем класс Черна – Лосика для слоений коразмерности два. Получены явные формулы, определяющие модифицированный класс Черна – Лосика в этой ситуации. Рассмотрены явно построенные слоения коразмерности два, представляющие собой одномерные обмотки на трехмерном торе (полнотории). Показано, что в зависимости от параметров обмотки возможны как тривиальность, так и нетривиальность характеристических классов Черна – Лосика. Результаты получены совместно с Я.В. Базайкным и А.С. Галаевым.

Литература

- [1] Лосик М. В. О некотором обобщении многообразия и его характеристических классах // Функциональный анализ и его прил. (1990), Т. 24, В. 1, С. 29 – 37.
- [2] Bazaikin Y. V., Galaev A. S. Losik classes for codimension-one foliations // J. Inst. Math. Jussieu (2021), V. 21, № 4, pp. 1391 – 1419.
- [3] Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Gumenyuk P., Non-diffeomorphic Reeb foliations and modified Godbillon-Vey class // Mathematische Zeitschrift (2022), V 300, pp. 1335 – 1349.

О C^1 -ГЛАДКИХ Ω -УСТОЙЧИВЫХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОТВОРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ НА МНОГОМЕРНЫХ ТОРАХ⁴⁶

Ефремова Л. С. (Россия, Нижний Новгород, Москва)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Московский физико-технический институт
lefunn@gmail.com

Рассмотрены C^1 -гладкие косые произведения отображений окружности на торах размерности ≥ 3 .

Доказан критерий C^1 - Ω -устойчивости (относительно возмущений класса C^1 -гладких косых произведений); приведено описание структуры неблуждающего множества таких отображений.

Введены новые динамические многозначные функции, приспособленные к описанию косых произведений одномерных отображений на многообразиях размерности ≥ 3 . С использованием такого рода функций в пространстве C^1 -гладких косых произведений отображений окружности на торах размерности ≥ 3 выделено некоторое подпространство отображений, содержащее Ω -устойчивые косые произведения.

Доказано, что множество рассматриваемых Ω -устойчивых отображений не образует всюду плотного подмножества в содержащем его подпространстве (и тем более, во всем пространстве C^1 -гладких косых произведений) отображений окружности на торах размерности ≥ 3 .

⁴⁶Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 24-21-00242, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/>.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ТИПА И ОБРАЗУЮЩИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЛЕНТОЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ: НОВЫЙ АЛГОРИТМ

Жиров А. Ю. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

alexei_zhirov@mail.ru

Медведев А. А. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

medvedevaa@student.bmstu.ru

Для алгоритмического решения задач перечислительной классификации псевдоаносовских гомеоморфизмов и диффеоморфизмов поверхностей с одномерными гиперболическими аттракторами используется комбинаторное описание так называемых ленточных поверхностей (см. [1]).

Ленточная поверхность задаётся набором данных, называемых её конфигурацией. Один из основных алгоритмов, необходимых для работы с этими данными предполагает вычисление по конфигурации сингулярного типа ленточной поверхности и образующих фундаментальной группы в её копредставлении, ассоциированным с её естественным марковским разбиением. Такой алгоритм был описан в [1] (алгоритм А).

Предлагаемый новый алгоритм основывается на предварительном сопоставлении ленточной поверхности обобщенной матрица смежности точек базисного отрезка, принадлежащих её краю по связным компонентам последнего. Такое представление позволяет адаптировать для решения указанных задач процедуру обхода в глубину основного набора простых циклов, заданного в виде матрицы смежности [2].

В сравнении с алгоритмом А, новый алгоритм обладает тем преимуществом, что не предполагает задания вспомогательных множеств и использования рекуррентных функций, что заметно ускоряет вычисления на компьютере.

Литература

- [1] Жиров А. Ю. Топологическая сопряженность псевдоаносовских гомеоморфизмов. М.: Издательство МЦНМО, 2013.
- [2] Медведев А. А. Поиск семейства простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2 // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2022. Т. 26. № 3. С. 151-165.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ⁴⁷

Жуковская Т. В. (Россия, Тамбов)

Тамбовский государственный технический университет

t_zhukovskaia@mail.ru

Серова И. Д. (Россия, Тамбов)

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

irinka_36@mail.ru

В докладе рассматривается функциональное включение вида

$$G(t, x(h(t)), x(t)) \ni 0, \quad t \in [a, b]; \quad x(s) = 0, \quad s \notin [a, b], \quad (1)$$

относительно неизвестной измеримой функции $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Здесь многозначное отображение $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ имеет компактные значения и удовлетворяет несколько более общим условиям, чем условия Каратеодори (подробнее см. [1]),

⁴⁷Исследование проведено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>).

а измеримая функция $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset [a, b]$ меры $\mu(E) = 0$ выполнено $\mu(h^{-1}(E)) = 0$. Эти условия обеспечивают измеримость суперпозиции $G(t, x(h(\cdot)), x(\cdot))$ для любой измеримой функции $x(\cdot)$. Также предполагается, что отображение $G(t, x, \cdot)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$, а отображение $G(t, \cdot, u)$ антитонно.

Доказано, что если найдется такая измеримая функция $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

$$G(t, u_0(h(t)), u_0(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset, \quad t \in [a, b]; \quad x(s) = 0, \quad s \notin [a, b],$$

то включение (1) имеет измеримое решение $x \leq u_0$.

Это утверждение аналогично известным теоремам типа Чаплыгина (см., например [2]), устанавливающим связь между решениями различных функциональных уравнений (прежде всего, дифференциальных и интегральных уравнений) и решениями соответствующих неравенств.

Доказательство этого утверждения использует результаты [3] об операторном включении в частично упорядоченных пространствах.

Литература

- [1] Серова И. Д. Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314.
- [2] Жуковский Е. С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.
- [3] Zhukovskiy E. S., Serova I. D., Panasenko E. A., Burlakov E. O. On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes // Advances in Systems Science and Applications. 2022. V. 22. № 1. P. 176–191.

О ВЗАИМОСВЯЗИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ И РАЗРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ГОЛОВНОГО МОЗГА⁴⁸

Жуковский Е. С. (Россия, Тамбов)

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
zukjuskys@mail.ru

Патрина А. С. (Россия, Тамбов)

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
lanina.anastasiia5@mail.ru

Представленные результаты продолжают исследования [1], [2] дифференциальных уравнений, составляющих модель Хопфилда электрической активности головного мозга. Показано существование периодических решений рассматриваемых систем и исследуется зависимость решений от времени $\delta \geq 0$ активации нейронов.

Сформулируем более точно представленные результаты.

Рассмотрим сеть, состоящую из n нейронов. Обозначим через $v_i(t)$ — состояние уровня электрической активности нейрона $i \in \overline{1, n}$ в момент времени t ; w_{ji} — силу связи нейрона j с нейроном i ; $I_i(t)$ — внешнее воздействие, оказываемое на нейрон i . Предположим, что для каждого нейрона скорость изменения уровня электрической активности пропорциональна с некоторым коэффициентом $-\alpha$, $\alpha > 0$, уровню его электрической активности. В зависимости от времени $\delta \geq 0$ перехода нейрона в активное состояние будем рассматривать непрерывную (при $\delta > 0$) или разрывную (при $\delta = 0$) функции активации f_δ , которые определим формулами

$$f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v < \theta, \\ \delta^{-1}(v - \theta), & \theta \leq v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta, \end{cases} \quad f_0(v) = \begin{cases} 0, & v < \theta, \\ 1, & v \geq \theta, \end{cases}$$

⁴⁸Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>).

где θ – некоторое пороговое значение, в котором начинается активация нейрона.

В перечисленных предположениях модель электрической активности головного мозга принимает вид системы дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(v_j) + I_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Функции $I_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем предполагать суммируемыми (по Лебегу) на каждом конечном отрезке из \mathbb{R}_+ . Решением системы (1) на произвольном конечном отрезке $[0, T]$ будем считать абсолютно непрерывную на этом отрезке вектор-функцию $v = (v_1, \dots, v_n)$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0, T]$.

Теорема 1. Пусть при любом i функции I_i являются периодическими с одинаковым периодом $T > 0$. Тогда при любом $\delta \geq 0$ существует T -периодическое решение уравнения (1), множество $\mathfrak{R}(\delta)$ сужений T -периодических решений уравнения (1) на отрезок $[0, T]$ не пусто, замкнуто и ограничено в пространстве $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$, а многозначное отображение $\mathfrak{R} : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ антитонно на \mathbb{R}_+ и полунепрерывно сверху в точке $\delta = 0$.

Доказательство этого утверждения использует редукцию периодической краевой задачи для уравнения (1) к интегральному уравнению в пространстве $L([0, T], \mathbb{R}^n)$. Полученное интегральное уравнение исследуется методами теории монотонных отображений частично упорядоченных пространств (см. [3]). Доказательство полунепрерывности сверху в точке $\delta = 0$ отображения \mathfrak{R} основано на полученной авторами доклада теореме о полунепрерывной зависимости от параметров множеств неподвижных точек отображений частично упорядоченных пространств.

Литература

- [1] Ланина А. С., Плужникова Е. А. О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. №139. С. 270–283.
- [2] Патрина А. С. О краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, моделирующей электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. №144. С. 383–394.
- [3] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. №1. P. 13–33.

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ И СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКАМИ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА

Завьялова Т. В. (Россия, Москва)
НИТУ МИСИС
tzava@yandex.ru

В работе рассматриваются условия робастного управления в системе дифференциальных уравнений, параметры которой зависят от случайного процесса. Случайный процесс или структура объекта управления описывается простой марковской цепью с конечным числом состояний. Динамика процесса осложняется предположением о том, что в случайные моменты времени с известной вероятностью система переходит из одного состояния в другое. При этом скачкообразно изменяется случайным образом фазовый вектор системы и продолжение движения начинается с новыми начальными условиями. Предполагается, что множество таких начальных условий для продолжения траектории ограничено.

Пусть динамика процесса описывается следующей системой управления

$$dx(t) = [A(t, r(t))x + B(t, r(t))u]dt + \sum_{v=1}^l \sigma_v(t, r(t))x dw_v \quad (1)$$

$$y = C(r(t))x,$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ — n -мерный вектор фазовых координат системы; время t может изменяться в области; $I = \{t : t \geq t_0\}$ — управляющее воздействие; $u \in \mathbf{R}^m$ — вектор выхода. Матрицы-функции, зависящие от структурного состояния $A(r(t))$, $B(r(t))$, $\sigma_v(r(t))$ — заданы.

Вектор-функция $r(t)$ является простой марковской цепью, при каждом $t \in I$ принимает значения из множества $F = \{r_1, \dots, r_k\}$. Простая марковская цепь допускает разложение

$$P\{r(t) = r_j \mid r(s) = r_i \neq r_j\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s), \quad (2)$$

$$P\{r(t) = r_i, s \leq \tau \leq t \mid r(s) = r_i\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s),$$

где q_{ij} — известные переходные вероятности из i -го состояния в j -е, $o(t-s)$ — бесконечно малая величина, более высокого порядка малости, чем $(t-s)$, $w(t) = \{w_1(t), \dots, w_m(t)\}$ — m -векторный стандартный винеровский процесс.

Предположим, что в случайные моменты времени скачкообразного изменения $r(t)$ фазовый вектор $x(t)$ так же изменяется скачком по закону:

$$x(\tau) = K_{ij}x(\tau-0), \quad (3)$$

где τ — момент перехода системы из состояния $r(\tau-0) = r_i$ в состояние $r(\tau+0) = r_j \neq r_i$; K_{ij} — матрица размерности $n \times m$, характеризующая состояние фазового вектора в момент смены структурного состояния $r(t) \in F$, ограничена $\|K_{ij}\| \leq \delta_i$.

В данной работе предположение о случайно изменяющемся скачке фазового вектора является новым и продиктовано практическими соображениями. Управляющее воздействие ищется в виде

$$u = -F(r(t))x,$$

где $F(r(t))$ — матрица размерности $n \times m$, зависящая от структурного состояния системы.

В реальных практических ситуациях в момент случайной смены структурного состояния системы матрицы K_{ij} точно неизвестны, а заданы лишь номинальные или некоторые допуски ее значений. Поэтому важно найти такие соотношения параметров системы, при которых она будет стабилизируема тем же управлением.

Для описанного класса систем (1) – (3) со случайной структуры получены достаточные условия робастной стабилизации со статической обратной связью по состоянию, а также найдены соотношения между параметрами скачка фазового вектора и параметрами системы, при котором робастное управление существует. В работе смоделирован физический процесс, описывающий движение тела со случайно изменяющейся массой. Для него построено стабилизирующее робастное управление с обратной связью по выходу.

Литература

- [1] Bernstein D.S. Robust Static and Dinamic Output-Feedback Stabilization: Deterministic and Stochastic Perspectives. /IEEE Transaction and automatic control, — 1987 — vol. AC-32. — NO.12. — p.1076-1083.
- [2] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков — М. : Наука, 2002. — 303 с.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ
УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ

Зайцева Н. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
zaitseva@cs.msu.ru

В прямоугольной области $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где l, T — положительные заданные числа, исследованы на корректную разрешимость (существование, единственность, устойчивость решения) начально-граничные задачи для гиперболического уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{k}{x}u_x$$

с интегральными условиями первого рода

$$\int_0^l x^k u(x, t) dx = A, \quad k > -1, k \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\int_0^l x u(x, t) dx = A, \quad k \leq -1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где A — заданное действительное число, и с интегральными условиями второго рода

$$u_x(l, t) + \int_0^l x^k u(x, t) dx = 0 \quad k > -1, k \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\left(x^{k-1}u(x, t)\right)\Big|_{x=l} + \int_0^l x u(x, t) dx = 0, \quad k \leq -1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

С подробными результатами можно ознакомиться в работах [1], [2].

Литература

- [1] Зайцева Н. В. Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021.
- [2] Zaitseva N. V. Mixed problems with integral conditions for hyperbolic equations with the Bessel operator // Diff. Equations. 2023. V. 59. № Suppl. 1. P. 1–72.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ ПЕШЕХОДНОГО МОСТА⁴⁹

Зайцева Ю. С. (Россия, Санкт-Петербург)

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербургский электротехнический университет «ЛЭТИ»
julia.zaytsev@gmail.com

Фрадков А. Л. (Россия, Санкт-Петербург)

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербургский государственный университет
alf@ipme.ru

В процессе проектирования несущих конструкций зданий и сооружений, в том числе мостов, выполняется оценка их надежности и устойчивости. Общепринятыми являются

⁴⁹Работа поддержана Минобрнауки РФ (проект госзадания 124041500008-1).

методы сопротивления материалов, в основе которых лежит расчет всех сил и моментов, действующих на конструкцию. Как правило, эти методы дают приближенный результат, из-за чего прочностные характеристики реальных конструкций многократно увеличиваются. Одним из факторов, влияющих на надежность конструкции является подверженность их колебаниям, поэтому проверяется возможность возникновения резонанса на собственных частотах конструкции и вычисляются пределы нагрузки. Для оценки допустимых внешних возмущений, например, ветровых, может быть использован аппарат дифференциальных уравнений, описывающих изгибно-крутильные колебания [1].

Как замечено в [2], современные конструкции балочных мостов по своим характеристикам приблизились к вантовым и висячим, из-за чего они стали более подвержены внешним нагрузкам. К такому типу мостов относится лондонский мост Миллениум, который в день открытия был закрыт на ремонт из-за ощутимых для пешеходов колебаний. После этого инцидента интерес к исследованию устойчивости пешеходных мостов усилился и появился ряд работ, в которых авторы дали оценки критическому количеству пешеходов, способных раскачать мост [3], [4], [5]. Однако известно, что локомоция человека основана на его естественном свойстве сохранять равновесие, что до сих пор не было отражено ни в одной из этих работ, где модель пешехода представляется как механический осциллятор. В то же время, существуют кибернетические модели систем с человеком-оператором, отражающие такие свойства нервной системы как адаптация и оптимизация [6].

В связи с этим, в данной работе система пешеходного моста представлена в терминах теории автоматического управления с учетом динамики движения пешеходов, находящихся в замкнутом контуре с мостом и компенсирующих отклонение от вертикали, ориентируясь по визуальному стимулу. Передаточную функцию такой модели можно исследовать, применяя различные критерии оценки устойчивости. В докладе проиллюстрирован анализ устойчивости системы с помощью критерия Гурвица и частотного критерия Я.З. Цыпкина для систем с запаздыванием. Получены выражения для критического количества пешеходов и его численные значения для сохранения устойчивости системы при данных параметрах моста Миллениум.

Литература

- [1] Питтель Б. Г., Якубович В. А. Математический анализ устойчивости висячих мостов на примере Такомского моста // Вестник ЛГУ. 1969. Т. 1. С. 80-91.
- [2] Овчинников И. И., Овчинников И. Г., Филиппова В. О. Насколько уникальны колебания Волгоградского моста? // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2015. Т. 6. № 14. С. 81-91.
- [3] Belykh I., Jeter R., Belykh V. Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // Applied Sciences and Engineering. 2017. Vol. 3. No. e1701512. 12 P.
- [4] Zivanovic S., Pavic A., Reynolds P. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review // J. of Sound and Vibration. 2005. Vol. 279. P. 1-74.
- [5] Han H., Zhou D., Ji T., Zhang J. Modeling of Lateral Forces Generated by Pedestrians Walking Across Footbridges // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 89. P. 1775-1791.
- [6] Ефремов А. В., Тяглик М. С., Тяглик А. С., Иргалеев И. Х. Разработка математической модели летчика в задаче управления с предвидением // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. Т. 3. С. 39-45.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМ ОБЪЕКТОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ

Зверева Е. Л. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
elizavetka.zvereva.2003@mail.ru

Рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения подвижного объекта из заданного начального состояния в заданное конечное. Плоское движение

происходит с постоянной линейной скоростью. Управление осуществляется выбором направления движения. На плоскости заданы запрещенные области (зоны), которые объект управления вынужден обходить.

Поставленная задача относится к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями. Ее решение находится, используя геометрические соображения, поскольку запрещенные области выбираются простой формы в виде кругов или выпуклых многоугольников.

Разработан алгоритм решения задачи для одной запрещенной области. Программная реализация алгоритма выполнена в среде Python. Программа позволяет визуализировать постановку и решение задачи: изобразить начальное и конечное состояния объекта управления, запрещенные области, оптимальную по быстродействию траекторию движения, вычислить минимальное время достижения цели. Эффективность алгоритма демонстрируется на примерах с разными запрещенными зонами.

Литература

- [1] Бортакровский А. С., Урюпин И. В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Труды МАИ, 2020, № 113, <http://trudymai.ru/published.php?ID=118185>.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ЛЕОНТОВИЧА—ФОКА ДЛЯ ДИФРАКЦИИ НА НЕГЛАДКИХ ПРЕПЯТСТВИЯХ

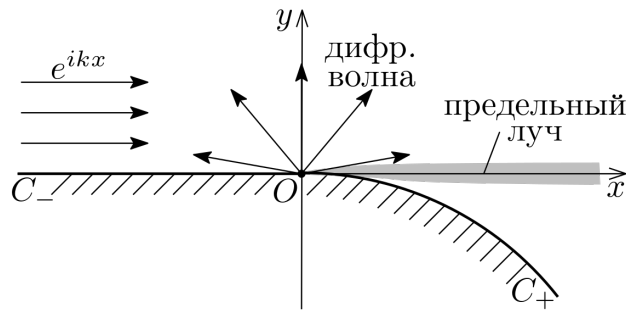
Злобина Е. А. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
ezlobina2@yandex.ru

Киселев А. П. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН
aleksei.kiselev@gmail.ru

Доклад посвящен построению асимптотических формул в рамках техники пограничного слоя.

В середине прошлого века в серии работ М.А. Леонтовича и В.А. Фока (см. монографию [1] и литературу в ней) было начато исследование задачи высокочастотной дифракции на гладком выпуклом теле. Для изучения области вблизи предельного луча (границы света и тени), касательного к телу, ими был предложен новый подход, получивший название метода “параболического уравнения”. Главный член асимптотики волнового поля при этом описывается “параболическим уравнением” (на самом деле — уравнением типа Шредингера) с гладкими коэффициентами. Данный подход развивался для дифракции на гладких препятствиях во многих работах, среди которых отметим монографию [2], где результаты Леонтовича и Фока доведены до высокого уровня математической строгости.

Мы рассматриваем касательную дифракцию на *негладких* телах с дифференцируемой границей и развиваем метод “параболического уравнения” в духе последовательного погранслоного подхода [2]. В этом случае коэффициенты “параболического уравнения” не являются гладкими. В докладе будет подробно обсуждаться задача Малюжинца—Попова [3], [4], [5] о падении плоской волны вдоль прямой C_- , переходящей со скачком кривизны в точке O в выпуклую кривую C_+ (на границе предполагается выполненным условие Неймана).



В освещенной области вместо отраженной волны возникает цилиндрическая дифрагированная волна, расходящаяся из точки негладкости O , однако структура поля во многом напоминает фоковскую. Поле в переходных зонах вокруг предельного луча (выделены серым на рисунке) описываются специальными функциями, напоминающими классические интегралы Фока.

Коротко будет рассказано о задачах касательной дифракции с другими конфигурациями контура.

Литература

- [1] Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения волн. М.: Наука, 1975.
- [2] Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд. ЛГУ, 1974.
- [3] Попов А. В. Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны // Тр. V Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн (Ленинград, 1970). Л.: Наука, 1971. С. 171–175.
- [4] Малюжинец Г. Д. Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга) // Успехи физ. наук. 1959. Т. 69, № 2. С. 321–334.
- [5] Zlobina E. A., Kiselev A. P. The Malyuzhinets—Popov diffraction problem revisited // Wave Motion. 2023. V. 121. Article ID 103172.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕЖИМА ЗАМИРАЮЩЕГО НЕЙРООСЦИЛЛЯТОРА⁵⁰

Зеленова В. К. (Россия, Ярославль)

Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
verzelenowa12@gmail.com

Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)

Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
rita.preo@gmail.com

Рассматривается система, моделирующая ассоциацию из двух нейроосцилляторов. Предполагаем, что первый нейрон описывается обобщенным уравнением Хатчинсона [1, 2]

$$\dot{u} = \lambda f_\alpha(u(t-1))u, \quad (1)$$

где $u = u(t) > 0$ — нормированный мембранный потенциал, $\lambda \gg 1$ характеризует скорость протекания электрических процессов, гладкая функция f_α удовлетворяет условиям

$$f_\alpha(0) = 1; \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f_\alpha(u) = -\alpha \quad (\alpha > 0); \quad u f'_\alpha(u), f''_\alpha(u) = O(u^{-2}) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty.$$

Относительно второго нейроосциллятора предполагаем, что он связан с первым, и его нормированный мембранный потенциал $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = \lambda(f_\beta(v(t-h)) + g(u(t)))v. \quad (2)$$

⁵⁰Работа выполнена частично (Преображенская М. М.) за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

Здесь параметр λ и функция f_β имеют тот же смысл, что в уравнении (1); для функции g так же известны значения при $u = 0$ и при $u \rightarrow +\infty$:

$$g(0) = -\eta \ (\eta > 0); \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = \xi \ (\xi > 0); \quad g'(u), ug''(u) = O(u^{-2}) \text{ при } u \rightarrow +\infty.$$

В настоящей работе для уравнения (2) доказываем существование режима так называемого замирающего осциллятора, особенность которого состоит в следующем. Для любого наперед заданного фиксированного натурального n можно подобрать параметры $\alpha, \beta, \eta, \xi, h$ таким образом, что v совпадает с некоторой периодической функцией $v_0(t)$ на первых n периодах, а далее, после переходного процесса совпадает с периодической функцией $v_1(t)$. При этом функция $v_0(t)$ обладает на периоде высоким (порядка e^λ) всплеском, а функция $v_1(t)$ имеет малые значения (порядка $e^{-\lambda}$).

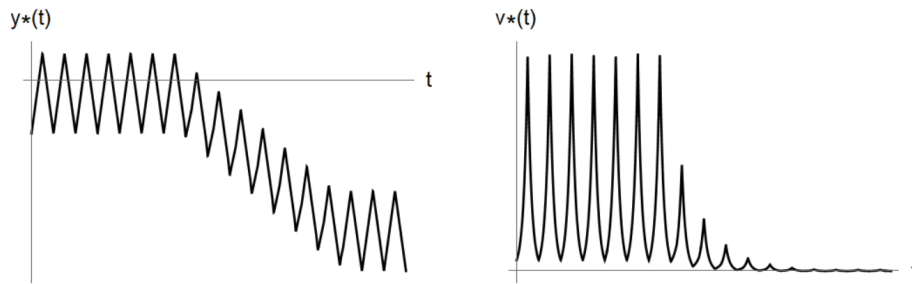
При этом решение уравнения (2) оказывается асимптотически близким к соответствующему решению предельного при $\lambda \rightarrow +\infty$ релейного уравнения

$$\dot{v} = \lambda(\mathcal{F}_\beta(v(t-h)) + \mathcal{G}(u))v, \tag{3}$$

которое изучалась в работах [3,4]. Здесь

$$\mathcal{F}_\beta(u) = \begin{cases} -\beta, & 0 < u \leq 1, \\ 1, & u > 1; \end{cases} \quad \mathcal{G}(u) = \begin{cases} -\eta, & 0 < u \leq \theta, \\ \xi, & u > 1. \end{cases}$$

Справедливо предельное равенство $y_\lambda^*(t) = y^*(t) + O(\frac{1}{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, где $v^* = e^{\lambda y^*(t)}$ — решение уравнения (3), $v_\lambda^* = e^{\lambda y_\lambda^*(t)}$ — решение уравнения (2).



Литература

- [1] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2099–2112.
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т. 70. № 3(423). С. 3–76.
- [3] Preobrazhenskaia M. M. Relay system of differential equations with delay as a perceptron model // Proceedings of the XXIV International Conference on Neuroinformatics «Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI». Springer Cham; 2022. P. 530–539.
- [4] Зеленова В. К. Релейная модель замирающего нейрона // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32. № 2. С. 268–284.

ДИНАМИКА АСИММЕТРИЧНОГО ФЛЮГЕРА В РАЗРЕЖЕННОМ ПОТОКЕ

Зиатдинов Н. Р. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

nail.ziatdinov@math.msu.ru

Мы изучаем движение флюгера на плоскости, являющегося массивным стержнем, прикрепленным к опорной точке, вокруг которой он может свободно вращаться, в предположениях, что силы гравитации нет, но есть поток невзаимодействующих точечных частиц,

движущихся с одной и той же фиксированной ненулевой скоростью и взаимодействующих со стержнем не более одного раза по закону бильярдного отражения. Наша цель — дать полное описание фазового портрета такой модели.

Путем изменения масштаба длины, мы добьемся, чтобы "большая" часть флюгера от опорной точки имела длину 1, а "меньшая" — $(-a)$ при $a \in (-1, 0]$. Таким образом, его общая длина тогда равна $1 - a$. Теперь изменением масштаба времени сделаем величину скорости потока равной единице.

Обозначая через $x, x = x(t)$, угол, образуемый в момент времени t большей частью флюгера (от опорной точки) с направлением вектора скорости потока, приходим в следующему уравнению динамики

$$\ddot{x} = -\kappa \int_a^1 (\sin x + r\dot{x}) |\sin x + r\dot{x}| r dr, \quad (1)$$

где \dot{x} и \ddot{x} первая и вторая производная от x по t , а параметр κ равен удвоенному отношению плотности потока к моменту инерции флюгера.

Как и в [1], где в качестве флюгера рассматривался стержень на спице, интегрирование происходит по-разному в зависимости от значений x и \dot{x} . Аналогично имеют место четыре случая:

(a) $\sin x + r\dot{x} \geq 0$ для всех $r \in [a, 1]$.

$$\ddot{x} = -\kappa \left[\frac{1-a^2}{2} \sin^2 x + 2 \frac{1-a^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1-a^4}{4} \dot{x}^2 \right] \quad (2)$$

(b) $\sin x + a\dot{x} \geq 0$ и $\sin x + \dot{x} < 0$.

$$\ddot{x} = \kappa \left[\frac{1+a^2}{2} \sin^2 x + 2 \frac{1+a^3}{3} \dot{x} \sin x + \frac{1+a^4}{4} \dot{x}^2 - \frac{1}{6} \frac{\sin^4 x}{\dot{x}^2} \right] \quad (3)$$

а также

(c) $\sin x + a\dot{x} < 0$ и $\sin x + \dot{x} \geq 0$, и (d) $\sin x + r\dot{x} < 0$ для всех $r \in [a, 1]$,

в которых результат интегрирования с точностью до знака равен значению в случаях соответственно (b) и (a) в силу симметричности модели относительно смены знака x .

Стандартным вводом новой переменной $y = \dot{x}$ уравнение динамики перепишем в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \kappa v(x, y), \quad (6)$$

где $v = v(x, y)$ с коэффициентом κ равно правой части уравнения в каждом из случаев. Нетрудно видеть, что с точностью до периода по x система имеет две особые точки: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, обе вырожденные. По аналогии с [1] показываем, что топологически эти точки являются фокусом и седлом соответственно, а затем устанавливаем, что фазовый портрет изучаемой системы с точностью до гомеоморфизма совпадает с фазовым портретом классической модели математического маятника с трением $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k \sin x = 0$ с положительными α и k [2].

Литература

- [1] Davydov A., Plakhov A. Dynamics of a pendulum in a rarefied flow // Regular and Chaotic Dynamics, 2024, 29:1, 134–142.
- [2] Arnold V. I. Ordinary differential equations, MIT Press, Cambridge, MA–London, 1978, x+280 pp.

МИНИМАЛЬНЫЕ ЗАПОЛНЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Иванов А. О. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
aoiva@mail.ru

Щербаков О. С. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
shcherbakovos@yandex.ru

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства появилась в [1] и [2] как обобщение двух классических проблем: задачи Штейнера о поиске кратчайшей сети, соединяющей заданный конечный набор точек метрического пространства, и задачи Громова о минимальном заполнении риманова многообразия. *Цель доклада* — рассказать о новых результатах в этой области.

В этом контексте, *заполнением* конечного метрического пространства M называется такой связный граф $G = (V, E)$ с весовой функцией ω на ребрах, который соединяет точки пространства M (то есть $M \subset V$) так, что вес любого пути в графе G между произвольными точками из M не меньше, чем расстояние между этими точками в метрическом пространстве M . Граф G называется *типом* заполнения. Пусть тип G заполнения фиксирован. Если весовая функция ω такова, что вес заполнения $\omega(G)$ минимален, то заполнение называется *минимальным параметрическим заполнением типа G* . Точная нижняя грань весов $\omega(G)$ минимальных параметрических заполнений по всем возможным типам G графов, соединяющих M , называется *весом минимального заполнения*, а взвешенный граф, на котором этот инфимум достигается — *минимальным заполнением пространства M* . Существование минимального заполнения для произвольного конечного метрического пространства доказано в [1]. Там же показано, что в качестве типа заполнения G достаточно брать так называемые *бинарные деревья*, то есть деревья, степени вершин которых равны 1 или 3, причем множество вершин степени 1 совпадает с M , см. подробности в [3].

Минимальные заполнения конечных метрических пространств тесно связаны с решениями проблемы Штейнера — кратчайшими деревьями. Действительно, пусть $M \subset X$ — конечное подмножество метрического пространства X . Тогда расстояние между точками в X превращает M в конечное метрическое пространство, а каждое дерево с вершинами в X , которое соединяет M (то есть содержит M как подмножество множества своих вершин), задает заполнение метрического пространства M , если в качестве весовой функции взять длину ребер в X . Поэтому вес минимального заполнения для M дает оценку снизу на длину кратчайшего дерева, соединяющего M .

Введение в рассмотрение обобщенных заполнений [2] позволило получить общую формулу веса минимального параметрического заполнения в терминах так называемых неприводимых мультиобходов, см. [4], подтвердив, в модифицированном виде, высказанную в [1] гипотезу о связи обходов дерева и веса минимального заполнения. Однако, полученная формула предполагает экспоненциально большой и комбинаторно сложный перебор.

Еще в работе [1] было замечено, что задача о минимальном параметрическом заполнении сводится к задаче линейного программирования. Двойственная задача в этом случае — это классическая задача линейного программирования, ее множество допустимых значений — выпуклый многогранник Λ_G , зависящий только от типа G минимального параметрического заполнения, см. [5]. От функции расстояния на метрическом пространстве M зависит только целевая функция, максимум которой соответствует весу минимального заполнения. В работах [5] и [6], [7] дана геометрическая интерпретация формулы Еремина: точки многогранника Λ_G с рациональными координатами соответствуют мультиобходам дерева G , а вершины многогранника Λ_G — неприводимым мультиобходам. Таким образом, формула Еремина представляет собой классический результат теории линейного программирования: максимум целевой функции может быть найден как максимум ее значений в вершинах многогранника допустимых значений Λ_G . Отметим, что максимум может достигаться в любой вершине многогранника Λ_G , см. [6].

Авторами получен ряд ограничений на возможную кратность неприводимых мультиобходов дерева бинарного, в зависимости от его структуры. Напомним, что пара граничных вершин бинарного дерева называется *усами*, если эти вершины имеют общую соседнюю вершину (степень которой, очевидно, равна трем). Хорошо известно, что каждое бинарное дерево с четырьмя и более граничными вершинами имеет не менее двух усов.

Утверждение 1 ([6, 7, 8]). *Кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с двумя усамы равна 1. Кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с тремя усамы не превосходит 2, причем каждое дерево с тремя усамы имеет мультиобход кратности 2.*

Утверждение 2 ([9]). *Кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с n вершинами степени 1 не превосходит n .*

Литература

- [1] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сборник, 203 (5), 65–118 (2012).
- [2] Иванов А. О., Овсянников З. Н., Стрелкова Н. П., Тужилин А. А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. Унив., серия 1: Матем., Мех., по. 5, сс. 3–8 (2012).
- [3] Ivanov A. O., Tuzhili A. A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // in: *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*. Contemporary Mathematics, Vol. 625. AMS Press, pp. 9–35. (2014).
- [4] Еремин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Математ. сборник, **204** (9), сс. 51–72 (2013).
- [5] Ivanov A., Tuzhili A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // ArXiv e-prints: arXiv:1907.03828 (2019); in: *Trends in Mathematics*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2021, PP. 165–182.
- [6] Щербаков О. С. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея» // Чебышевский сборник, **23** (4), сс. 136–151 (2022).
- [7] Щербаков О. С. Ограничения на кратность неприводимых мультиобходов некоторых бинарных деревьев // Вестн. Моск. Унив., серия 1: Матем., Мех., по. 5, (2024) (в печати).
- [8] Иванов А. О., Щербаков О. С. Существование неприводимых мультиобходов кратности 2 // Чебышевский сборник, (2024) (в печати).
- [9] Щербаков О. С. Нормальная форма мультиобходов бинарных деревьев // Мат. заметки, (2024) (в печати).

ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СТРУКТУР В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

Ильичев А. Т. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

ilichev@mi-ras.ru

Савин А. С. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

assavin@list.ru

Рассматривается слой жидкости конечной глубины, описываемый уравнениями Эйлера. Ледяной покров моделируется геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгофа-Лява. Траектории частиц жидкости под ледяным покровом находятся в поле нелинейных поверхностных бегущих волн малой, но конечной амплитуды, а именно классических уединенных волн понижения уровня [1], которые существуют в системе при больших начальных напряжениях сжатия ледяного покрова, а также обобщенных уединенных волн возвышения уровня. Рассматриваются также нелинейные волновые поверхностные структуры являющиеся продуктом 1:1 резонанса: уединенный волновой пакет (монокроматическая волна под огибающей, скорость которой равна скорости огибающей) и, так называемый, темный

солитон (волна, являющаяся нелинейным произведением боры и периодической волны) [2], [3], [4]. В анализе используются явные асимптотические выражения для решений, описывающих упомянутые волновые структуры на границе раздела вода-лед, а также асимптотические решения для поля скоростей в столбе жидкости, генерируемого этими волнами.

Литература

- [1] Ильичев А. Т., Савин А. С., Шашков А. Ю. Траектории частиц жидкости под ледяным покровом в поле уединенной изгибно-гравитационной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 2023. Т. 66. №10, в печати.
- [2] Ильичев А. Т., Савин А. С., Шашков А. Ю. Траектории жидких частиц в поле темного солитона в жидкости под ледяным покровом // Изв. РАН. МЖГ. 2023. №6. С. 110–120.
- [3] Ильичев А. Т., Савин А. С., Шашков А. Ю. Движение частиц в поле нелинейных волновых пакетов в слое жидкости под ледяным покровом // Теор. Мат. Физ. 2024. Т. 218. №3. С. 586–600.
- [4] P'ichev A. T., Savin A. S., Shashkov A. Yu. Motion of liquid particles in the field of 1:1 resonanse nonlinear wave structures in a fluid beneath an ice cover // Int. J. Non-Linear Mech. 2024. V. 160. 104665.

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

Ильяшенко Ю. С. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
yulijis@gmail.com

Глобальная теория бифуркаций на двумерной сфере - молодая ветвь теории бифуркаций, развиваемая в основном, докладчиком и его учениками: Андросовым, Бакиевым, Гончарук, Доровским, Кудряшовым, Солодовниковым, Филимоновым, Филипповым, Щуровым и другими. В 1985 году Арнольд поставил вопросы, на которые должна ответить новая теория и сформулировал гипотетические ответы. Все ответы оказались неверны, но вопросы определили направление развития новой теории. Обзор этого развития и будет дан в докладе.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ В ТИПИЧНЫХ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА КОМПАКТНЫХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Ильяшенко Ю. С. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
yulijis@gmail.com

Филимонов Д. А. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
mityafil@gmail.com

С середины XX века особое внимание в теории динамических систем уделялось типичным свойствам, характерным, как для отдельных векторных полей, так и для их конечнопараметрических семейств. В терминах типичности обычно описываются такие понятия как коразмерности бифуркаций и соответствующих им вырождений, однако зачастую точные определения типичности недостаточно чётко определены. Для целей настоящей работы мы будем пользоваться топологической типичностью:

Определение 1. Множество называется типичным, если оно является остаточным, то есть пересечением не более чем счётного числа открытых всюду плотных множеств.

Удивительно, но даже для однопараметрических семейств знаменитая теорема Сотомайора [1] не исключает некоторые вырождения, которые приводят к бифуркациям коразмерности два и выше. Ещё сложнее обстоит дело с типичными двупараметрическими семействами векторных полей на двумерных компактных многообразиях. Для них нет ни единого списка глобальных бифуркаций, ни даже полного разбора всех уже известных вырождений коразмерности два.

Подробное описание и исследование типичных двухпараметрических семейств является большой и непростой задачей. В настоящей работе сделан первый шаг в этом исследовании — описаны все типы и наборы особых точек, которые могут встречаться в векторных полях из таких семейств.

Определение 2. Обозначим за $Vect^r(M^2)$ множество всех C^r -гладких векторных полей на двумерном компактном многообразии M ; q -гладким k -параметрическим семейством векторных полей на M назовём любое $V \in C^q([0; 1]^k; Vect^r(M^2))$. Ниже везде мы будем считать, что $q = r$.

Сами по себе особые точки различных коразмерностей рассматривались различными авторами ещё в 1970-х годах (например, [2] и [3]), однако полного описания всех вариантов и наборов для векторных полей в типичных двухпараметрических семействах в этих работах нет.

Определение 3. Введём следующие обозначения: особую точку типа невырожденный седлоузел будем обозначать как SN, седлоузел кратности 2 как dSN2, типа Андронова–Хопфа как AH, типа Баутина (Андронова–Хопфа кратности два) как dAH2, типа Богданова–Такенса как BT.

Теорема 1. *Существует остаточное множество $\mathcal{A}_{sp} \subset C^5([0; 1]^2; Vect^k(M^2))$, проходящее только через векторные поля, содержащие не более, чем 2 негиперболические особые точки, причём если точек ровно две, то это либо седлоузлы, либо особые точки типа Андронова–Хопфа, а если такая точка одна, то это может быть только точка из списка: $\{SN, dSN2, AH, dAH2, BT\}$.*

Кроме того, в данной работе доказана следующая теорема, которая будет полезна для дальнейшего исследования типичных двухпараметрических семейств:

Теорема 2. *Множество векторных полей на компактном двумерном многообразии, все особые точки которых гиперболически, либо есть единственная негиперболическая особая точка из списка: $\{SN, dSN2, AH, dAH2, BT\}$, либо есть ровно две негиперболические особые точки и это либо седлоузлы, либо особые точки типа Андронова–Хопфа, открыто в пространстве всех векторных полей на сфере. Любое векторное поле указанного вида содержит лишь конечное число особых точек.*

Литература

- [1] Sotomayor J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publications Mathématiques de L’Institut des Hautes Scientifiques, 1974, № 43, pp. 5-46.
- [2] Takens F. Singularities of vector fields // Publications Mathématiques de L’Institut des Hautes Scientifiques 43, pp. 47-100, 1974.
- [3] Dumortier F., Singularities of vector fields on the plane // Journal of Differential Equations, 1977. V. 23, № 1, pp. 53-106.

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Илюхин А. А. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
aleilyukhin@yandex.ru

Клово А. Г. (Россия, Таганрог)
Южный федеральный университет
klovo_ag@mail.ru

Изучаемое уравнение имеет следующее представление [1]

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_{13}u_x + a_{23}u_y + a_{33}u + a_{00} = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} являются функциями только x и y в общей для них области определения D , либо эти коэффициенты постоянны. Рассмотрим возможность упрощения уравнения (1) при условии $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Поставим изначально задачу обратить в нуль только

один коэффициент. Чтобы эллиптический тип уравнения сохранился в качестве такового в преобразованном уравнении должен обратиться в нуль коэффициент при смешанной производной: $A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0$.

Запишем это равенство в следующем виде

$$(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)\xi_x + (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)\xi_y = (a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y)\eta_x + (a_{12}\xi_x + a_{22}\xi_y)\eta_y = 0. \quad (2)$$

Так как для отыскания замены двух переменных возникает только одно уравнение, то имеющийся произвол можно устранить, рассмотрев один из четырех вариантов:

$$\begin{aligned} 1) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0 \\ \xi_y = 0 \end{array} \right. & ; \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y = 0 \\ \xi_x = 0 \end{array} \right. ; \\ 3) \left\{ \begin{array}{l} a_{12}\xi_x + a_{22}\xi_y = 0 \\ \eta_x = 0 \end{array} \right. & ; \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y = 0 \\ \eta_y = 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Возможны ещё два варианта приравнивания к нулю сомножителей в равенстве (2), одного следует $\xi_x = \xi_y = 0$ или $\eta_x = \eta_y = 0$. В каждом из четырех вариантов одна из «новых» переменных связана только с одной из «старых» переменных. Изучению подлежит лишь случай, когда все три коэффициента a_{11} , a_{12} и a_{22} , не обращаются в нуль. Можно остановиться на первом варианте. Из второго уравнения следует, что $\xi = \xi(x)$. В связи с первым уравнением можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Для того, что бы функция $\eta = \eta(x, y)$ была решением уравнения (2) в области D , необходимо и достаточно, чтобы соотношение $\eta(x, y) = C$ определяло общий интеграл уравнения $a_{11}(x, y)dy - a_{12}(x, y)dx = 0$.

Поставим задачу: одновременно с равенством $A_{12} = 0$ подобрать $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(x, y)$ так, чтобы выполнялось ещё одно равенство $A_{11} = A_{22}$, которое обеспечит следующий вид главной части:

$$A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \quad (3)$$

Предварительно преобразуем равенство (2) с учётом того, что равенство $A_{12} = 0$ получено при условиях 1):

$$A_{11} = a_{11}(\xi_x)^2, \quad A_{22} = a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{11}(\eta_y)^2 = (a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)\eta_x + (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)\eta_y.$$

В силу уравнения (2) первая скобка равна нулю, тогда $A_{22} = (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)\eta_y$. Равенство $A_{11} = A_{22}$ можно записать в следующем виде $a_{11}(\xi_x)^2 = a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}(\eta_x)^2$. С учетом невырожденности преобразования получим

$$a_{11} \left(\frac{\xi_x}{\eta_y} \right)^2 = a_{12} \frac{\eta_x}{\eta_y} + a_{22}.$$

Найдём отношение ξ_x/η_y из соотношения 2) и подставим в последнее равенство

$$\left(\frac{\xi_x}{\eta_y} \right)^2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} > 0.$$

Таким образом, такое равенство возможно. Для того, чтобы из него можно было определить ξ , необходимо и достаточно, чтобы

$$(\xi_x)^2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} (\eta_y)^2. \quad (4)$$

и правая часть этого равенства зависела только от x . Выполнение этого условия позволит определить функцию $\xi = \xi(x)$ вместе с функцией $\eta = \eta(x, y)$, найденной из уравнения $a_{12}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0$. Эти две функции определяют вид уравнения (3), называемое **каноническим**. Если же с помощью равенства (3) нельзя сразу определить ξ , то для приведения уравнения эллиптического типа к каноническому виду можно использовать вторую возможность, определив одну из неизвестных из интеграла $\eta(x, y) = C$.

Литература

[1] Илюхин А. А. Уравнения математической физики. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2010.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Казимиров Д. Д. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
danil.kazimirov@math.msu.ru

Рассматривается пространство Соболева $\dot{W}_p^n[0; 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$), состоящее из вещественнозначных функций f , обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка $n - 1$ включительно, таких, что $f^{(n)} \in L_p[0; 1]$, и удовлетворяющих краевым условиям $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, $0 \leq j \leq n - 1$. Пространство $\dot{W}_p^n[0; 1]$ снабжено естественной нормой $\|f\| := \|f^{(n)}\|_{L_p[0; 1]}$.

Для каждого $a \in (0; 1)$ и $0 \leq k \leq n - 1$ ставится цель изучить величины $A_{n,k,p}(a)$, являющиеся наименьшими возможными в неравенствах $|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0; 1]}$, а также оценить глобальный максимум $\Lambda_{n,k,p} := \max_{a \in (0; 1)} A_{n,k,p}(a)$ функции $A_{n,k,p}$ на отрезке $[0; 1]$. Число $\Lambda_{n,k,p}$ является точной константой вложения пространства $\dot{W}_p^n[0; 1]$ в пространство $\dot{W}_\infty^k[0; 1]$, $0 \leq k \leq n - 1$: $\Lambda_{n,k,p} = \sup\{\|f^{(k)}\|_{L_\infty[0; 1]} : \|f^{(n)}\|_{L_p[0; 1]} = 1\}$.

В работе [1] установлена взаимосвязь величин $A_{n,k,p}(a)$ с ошибкой наилучшей полиномиальной аппроксимации сплайна вида

$$f_{n,k,a}(x) := (-1)^{n-k-1} \frac{(x-a)_-^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \equiv (-1)^{n-k-1} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \chi_{[0,a]}(x)$$

в пространстве $L_{p'}[0; 1]$, где $\chi_{[0,a]}(x)$ обозначает характеристическую функцию отрезка $[0, a]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f_{n,k,a} - u\|_{L_{p'}[0,1]},$$

здесь \mathcal{P}_{n-1} — пространство вещественных алгебраических полиномов степени, не превосходящей $n - 1$.

Далее определим $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, $x = \cos\theta$, $x \in [-1, 1]$ — многочлен Чебышева второго рода степени n на отрезке $[-1, 1]$, $a_i = \sin^2 \frac{\pi i}{2(n+1)}$, $1 \leq i \leq n$ — нули многочлена $U_n(2x - 1)$. Также используем обозначение $p_{n,k,a} \in \mathcal{P}_{n-1}$ для полиномиального интерполанта степени $n - 1$ функции $f_{n,k,a}$ по точкам $\{a_i\}_{i=1}^n$. В дальнейшем особенно подробно рассматривается случай $p = \infty$. Уточняется значение величин $A_{n,k,\infty}(a)$ на множестве $[0, a_1] \cup [a_n, 1]$:

Теорема 1. На отрезке $a \in [0, a_1]$ справедливо равенство

$$A_{n,k,\infty}(a) = \|f_{n,k,a}\|_{L_1[0,1]} = \frac{a^{n-k}}{(n-k)!},$$

на отрезке $a \in [a_n, 1]$ выполнено $A_{n,k,\infty}(a) = \|f_{n,k,a}\|_{L_1[0,1]} = \frac{(1-a)^{n-k}}{(n-k)!}$.

Назовем *марковскими* те значения параметра $a \in (a_1, a_n) \subseteq [0, 1]$, для которых разность (ошибка интерполяции) $f_{n,k,a} - p_{n,k,a}$ меняет знак на интервале $(0, 1)$ в точках a_i , $1 \leq i \leq n$, и только в них. Марковское подмножество значений параметра a обозначается как $\mathcal{A}_{n,k} \subseteq (a_1, a_n)$. Значения $a \in (a_1, a_n) \setminus \mathcal{A}_{n,k}$ называются *немарковскими*. Основными доказанными теоремами являются теоремы об описании структуры марковского множества, а также об уточнении значений величин $A_{n,k,\infty}$ на марковском множестве и констант вложения $\Lambda_{n,k,\infty}$.

Теорема 2. Для марковских значений $a \in \mathcal{A}_{n,k} \subseteq (a_1, a_n)$ интерполант $p_{n,k,a} \in \mathcal{P}_{n-1}$ является многочленом наилучшего $L_1[0, 1]$ -приближения функции $f_{n,k,a}$ и

$$A_{n,k,\infty}(a) = \|f_{n,k,a} - p_{n,k,a}\|_{L_1[0,1]} = \frac{1}{2^{n-k}} |V_n^{(k)}(2a - 1)|,$$

где $V_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_{-1}^t (t-u)^{n-1} \cdot \text{sgn}(U_n(u)) du$ – ядро Пеано порядка n .

Теорема 3. Пусть $0 \leq k \leq n-2$. Определим $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ – k решений уравнения $f_{n,k,a}(0) - p_{n,k,a}(0) = 0$ с неизвестным a , а $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ – k решений уравнения $f_{n,k,a}(1) - p_{n,k,a}(1) = 0$ с неизвестным a (существуют согласно теореме 1 из работы [2]), $a_1 < \underline{a}_1 < \bar{a}_1 < \dots < \underline{a}_k < \bar{a}_k < a_n$. Тогда немарковское множество значений параметра $a \in (a_1, a_n) \setminus \mathcal{A}_{n,k}$ представляет собой дизъюнктивное объединение k интервалов $(\underline{a}_i, \bar{a}_i)$ ($1 \leq i \leq k$): $(a_1, a_n) \setminus \mathcal{A}_{n,k} = \sqcup_{i=1}^k (\underline{a}_i, \bar{a}_i)$. Марковское и немарковское множества значений параметра a симметричны относительно точки $a = \frac{1}{2}$.

Теорема 4. Пусть $0 \leq k \leq n-1$, n – нечетное, k – четное. При выполнении условия выпуклости (вниз) функции $A_{n,k,\infty}(a)$ на немарковском множестве, справедливо равенство

$$\Lambda_{n,k,\infty} = A_{n,k,\infty}(1/2) = \frac{1}{2^{n-k}} |V_n^{(k)}(0)| = \frac{1}{2^{n-k} \cdot (n-k-1)!} \left| \int_0^1 u^{n-k-1} \text{sgn}(U_n(u)) du \right|.$$

Литература

- [1] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Связь наилучших L_p приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных производных в пространствах Соболева // Математические заметки, 114 (4), 2023, 623–627.
- [2] Curry H. B., Schoenberg I. J. On Pólya frequency functions IV: the fundamental spline functions and their limits // J. Analyse math, 17 (71), 1966, 107.

НЕИЗЛУЧАЮЩИЕ ИСТОЧНИКИ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО НАБЛЮДЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ⁵¹

Калинин А. В. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
avk@mm.unn.ru

Тюхтина А. А. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
tyukhtina@iee.unn.ru

Под неизлучающими источниками понимаются локализованные в пространстве источники, порождающие локализованные в пространстве решения дифференциальных уравнений [1]–[5]. Характеризация неизлучающих источников позволяет отвечать на вопросы о единственности решения обратных задач об источниках по результатам граничных наблюдений и может использоваться при построении алгоритмов решения обратных задач [6]–[9].

В настоящей работе рассматриваются задачи для систем дифференциальных уравнений, возникающих при описании различных стационарных и квазистационарных приближений для системы уравнений Максвелла [10], [11]. Приводятся результаты о характеристике неизлучающих источников для рассматриваемых систем. Выделяются классы единственности решения обратных задач об источниках по различным граничным наблюдениям. Обсуждаются алгоритмы решения этих задач.

Литература

- [1] Новиков П. С. Об единственности обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. №3. С. 165–168.
- [2] Devaney A. J., Wolf E. Radiating and nonradiating classical current distributions and the fields they generate // Phys. Rev. D 1973. V. 8. P. 1044.
- [3] Bleistein N., Cohen J. Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics // J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 194–201.

⁵¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, <https://rscf.ru/project/23-21-00440/>.

- [4] Gbur G., Wolf E. Nonradiating sources and other "invisible" objects // Progress in Optics 2003. V. 45. P. 273–316.
- [5] Marengo E. A., Devaney A. J. Nonradiating sources with connections to the adjoint problem // Phys. Rev. E 2004. V. 70. Art. No. 037601.
- [6] Isakov V. Inverse source problems. Providence R.I.: American Mathematical Society, 1990.
- [7] He S., Romanov V. G. Identification of dipole sources in a bounded domain for Maxwell's equations // Wave Motion 1998. V. 28. P. 25–40.
- [8] Albanese R., Monk P. B. The inverse source problem for Maxwell's equations // Inverse Problems 2006. V. 22. P. 1023–1035.
- [1] Alonso Rodriguez A., Camano J., Valli A. Inverse source problems for eddy current equations // Inverse problems 2012. V.28. 15 pp.
- [9] Kalinin A. V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 450. № 1. P. 112–136.
- [10] Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields // MMST 2020, Revised Selected Papers. CCIS, v. 1413. Springer, 2021. P. 77–92.

О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин В. А. (Россия, Липецк)

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
kalitvin@gmail.com

К интегральным уравнениям с частными интегралами и их частным случаям приводятся задачи интегро-дифференциальных уравнений Барбашина, механики сплошных сред и ряда других прикладных задач [1–3].

$$x(t, s) = \int_a^t l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau + \int_c^d m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + \int_a^t \int_c^d n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + f(t, s) \quad (1)$$

Найти явное решение линейного интегрального уравнения (1) удастся в достаточно редких случаях. Поэтому актуальной задачей является разработка схем приближенного и алгоритмов численного решения этого уравнения. Будем рассматривать частный случай интегрального уравнения (1)

$$x(t, s) = \int_a^t c(\tau, s)x(\tau, s)d\tau + \int_a^t \int_c^d k(\tau, s, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + f(t, s), \quad (2)$$

с частными интегралами, где $t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$, заданные функции $c(\tau, s)$, $k(\tau, s, \sigma)$, $f(t, s)$ и $f'_t(t, s)$ непрерывны по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Решение интегрального уравнения (2) является решением интегро-дифференциального уравнения Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s)x(t, s) + \int_c^d k(t, s, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + f'_t(t, s), x(a, s) = f(a, s). \quad (3)$$

Задача Коши (3) эквивалентна следующему двумерному интегральному уравнению:

$$x(t, s) = \int_a^t \int_c^d r(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + g(t, s) \equiv (Rx)(t, s) + g(t, s) \quad (4)$$

Для численного решения уравнения (4) могут быть использованы многочисленные методы решения линейных интегральных уравнений, в частности, метод механических квадратур (ММК). При применении ММК к уравнению (4) переходим к дискретному аналогу

$$\int_a^{t_p} \int_c^d r(t_p, s_q, \tau, \sigma) x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma = hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} r_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pq}. \quad (5)$$

где $r_{pqij} = r(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pq} — остаток в формуле (5). В результате интегральное уравнение (4) заменяется системой уравнений относительно неизвестных $x(t_i, s_j)$. Отбрасывая в этой системе уравнений остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q)

$$x_{pq} = hg \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^Q \gamma_{pqij} r_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq} \quad (p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q), \quad (6)$$

Теорема. Пусть в формуле (5) остатки стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$, $|\gamma_{pqij}| \leq A < \infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \rightarrow 0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение $x_{pq}(p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$ может быть найдено из системы (6), причем для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие h_0 и g_0 , что при $h < h_0$ и $g < g_0$ $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \varepsilon$ ($p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q$).

Аналогичный подход может быть распространен на нелинейные интегральные уравнения с частными интегралами вида

$$x(t, s) = \int_a^t c(\tau, s) x(\tau, s) d\tau + \int_a^t \int_c^d k(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma)) d\tau d\sigma + f(t, s), \quad (7)$$

где $t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$, $u \in (-\infty, +\infty)$, заданные функции $c(\tau, s)$, $k(\tau, s, \sigma, u)$, $f(t, s)$ и функция $f'_t(t, s)$ непрерывны по совокупности переменных, функция $k(\tau, s, \sigma, u)$ удовлетворяет условию Липшица $|k(\tau, s, \sigma, u) - k(\tau, s, \sigma, v)| \leq N|u - v|$, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Для решения нелинейных уравнений можно использовать метод Ньютона-Канторовича [1]. С применением данных алгоритмов были разработаны программы и проведены численные эксперименты, показывающие достаточно хорошие результаты.

Литература

- [1] Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 p.
- [2] Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.
- [3] Калитвин А. С., Калитвин В. А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. 177 с.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ И ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Канатников А. Н. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

skipper@bmstu.ru

Одна из возможностей функционального метода локализации инвариантных компактов (ФМЛИК) состоит в анализе асимптотического поведения траекторий динамической системы [1]. В частности, использование метода позволяет устанавливать факт глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия.

Глобальную устойчивость положения равновесия можно доказать с помощью прямого метода Ляпунова и его обобщений. В частности, для автономных систем дифференциальных

уравнений известен принцип инвариантности Ла-Салля, согласно которому траектория, начинающаяся в положительно инвариантном компактном множестве Q , стремится к максимальному инвариантному подмножеству в $\dot{V} = 0$, где функция V удовлетворяет в Q неравенству $\dot{V} \leq 0$. Аналогичный принцип существует и для неавтономных систем.

Для произвольной функции φ , определенной на фазовом пространстве автономной системы, множество $S(\varphi) = \{x : \dot{\varphi}(x) = 0\}$ будем называть универсальным сечением, соответствующим функции φ . Полагая для произвольного множества Q в фазовом пространстве $\varphi_{\inf}(Q) = \inf\{\varphi(x) : x \in S(\varphi \cap Q)\}$, $\varphi_{\sup}(Q) = \sup\{\varphi(x) : x \in S(\varphi \cap Q)\}$, введем множество $\Omega(\varphi, Q) = \{x \in Q : \varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\}$. Это множество называется локализирующим, поскольку все инвариантные компакты, целиком лежащие в Q , расположены также в $\Omega(\varphi, Q)$ [2].

Сформулированное утверждение лежит в основе функционального метода локализации. Отметим, что этот метод работает в широком классе динамических систем, поскольку в своей сущности является топологическим (например, неавтономные системы, системы с управлением и возмущением, дифференциальные включения, системы дискретного времени).

Глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия можно доказать, пройдя три этапа: а) построить положительно инвариантное компактное множество Q , являющееся областью захвата; б) для множества Q построить функцию φ , для которой $\dot{\varphi} \leq 0$ в Q ; в) доказать, что единственный инвариантный компакт в множестве $S(\varphi) \cap Q$ есть рассматриваемое положение равновесия.

Принцип инвариантности срабатывает на этапе б). Однако на этом этапе может использоваться и метод локализации (нужно φ подобрать так, что $S(\varphi)$ будет множеством уровня функции φ). Связь принципа инвариантности Ла-Салля с функциональным методом локализации рассмотрена в [2]. Этап а) также во многих случаях может быть реализован с помощью функционального метода локализации, а этап в) требует специального анализа.

Описанный подход иллюстрируется на примере одной 6-мерной популяционной модели рака [3], которая содержит слагаемое с запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - q_1 x_1 x_2 - \frac{p_1 x_1 y}{A_1 + x_1}, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - q_2 x_1 x_2 - \frac{p_2 x_2 y}{A_2 + x_2} - \delta x_2, \\ \dot{y} = \Delta - \left[\xi + \frac{c_1 x_1}{A_1 + x_1} + \frac{c_2 x_2}{A_2 + x_2}\right] y, \\ \dot{u}_1 = b_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{l_1}\right) - r_1 u_1 u_2 - \frac{s_1 u_1 z}{B_1 + u_1}, \\ \dot{u}_2 = b_2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{l_2}\right) - r_2 u_1 u_2 - \kappa x_2 u_2 - \frac{s_2 u_2 z}{B_2 + u_2} + \varepsilon \delta x_2 (t - \tau), \\ \dot{z} = \Phi - \left[\eta + \frac{d_1 u_1}{B_1 + u_1} + \frac{d_2 u_2}{B_2 + u_2}\right] z. \end{cases}$$

В системе все фазовые переменные неотрицательны, а параметры положительны.

Литература

- [1] Канатников А. Н. Локализирующие множества и поведение траекторий неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №11. С. 1465–1475.
- [2] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Функциональный метод локализации и принцип инвариантности Ла-Салля // Математика и математическое моделирование. 2021. №1. С. 1–12.
- [3] Starkov K. E., Kanatnikov A. N. Cancer cell eradication in a 6D metastatic tumor model with time delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. V. 120. Art. no. 107164.

ЗАДАЧИ С ДВОЙНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Карачик В. В. (Россия, Челябинск)

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

karachik@susu.ru

Турметов Б. Х. (Казахстан, Туркестан)

Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави

batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Краевые задачи для уравнений в частных производных, заданные в виде связи значений искомой функции или ее производных в различных точках области или границы являются нелокальными задачами. Задача такого типа впервые была исследована в работе [1]. Далее, в работе [2] подробно описано возникновение таких задач при математическом моделировании некоторых процессов в плазме. Сведения о методах решения и приложениях нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского к задачам физики и техники изложены в [3]. Краевые задачи с преобразованными аргументами рассмотрены в работе [4]. Некоторые нелокальные краевые задачи с отображениями такого же типа в n -мерном случае приводятся в [5,6].

Пусть $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ – единичный шар в R^n и S_1, S_2 – действительные коммутативные ортогональные $n \times n$ матрицы такие, что $S_i^{l_i} = E, l_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$, где $l_1, l_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим $\ell = l_2 l_1$. Введем оператор $R_{\mathbf{a}}$, образованный вектором $\mathbf{a} = (a_{(0,0)}, \dots, a_{(0,l_1-1)}, a_{(1,0)}, \dots, a_{(1,l_1-1)}, \dots, a_{(l_2-2,l_1-1)}, \dots, a_{(l_2-1,l_1-1)})$ в виде

$$R_{\mathbf{a}}[u](x) = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} u \left(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x \right),$$

где $(i_2, i_1) \equiv i_2 l_1 + i_1$. Пусть $i \oplus j = (i_2, i_1) \oplus (j_2, j_1) \equiv ((i_2 + j_2 \bmod l_2), (i_1 + j_1 \bmod l_1))$. Определим матрицу $A_{(2)}(\mathbf{a}) = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,\ell-1} = (a_{j \oplus i})_{i,j=0,\dots,\ell-1}$.

Теорема 1. *Собственный вектор матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$ с номером $k = (k_2, k_1) = 0, \dots, \ell - 1$ можно представить в виде $\mathbf{e}_k = \left(\lambda_k^j \right)_{j=0,\dots,\ell-1} \equiv \left(\lambda_{k_2}^{j_2} \lambda_{k_1}^{j_1} \right)_{(j_2, j_1)=0,\dots,(l_2-1, l_1-1)}$, где $\lambda_{k_s} = e^{i 2\pi k_s / l_s}$ – корень степени l_s из единицы, $s = 1, 2$.*

Теорема 2. *Пусть числа $\{a_k : k = 0, \dots, \ell - 1\}$ такие, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t \neq 0$ при $k = 0, \dots, \ell - 1$ и $f \in C^\lambda(\bar{\Omega}), g \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega), 0 < \lambda < 1$. Тогда решение задачи Дирихле*

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad R_{\mathbf{a}}[u]|_{\partial\Omega} = g(x), x \in \partial\Omega$$

существует, единственно, принадлежит классу $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ и представляется в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} R_{\mathbf{b}}[g](y) ds_y,$$

где компоненты вектора \mathbf{b} определяются как $b_j = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \bar{\lambda}_k^j / \mu_k, j = 0, \dots, \ell - 1$.

Теорема 3. *Если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k \neq 0$ при $k = 0, \dots, \ell - 1$ и для функций $f \in C^1(\bar{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$ выполнено условие $\int_{\partial\Omega} g(\xi) ds_{\xi} = \int_{\Omega} R_{\mathbf{a}}[f](\xi) d\xi$. Тогда решение задачи Неймана*

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad R_{\mathbf{a}}\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]|_{\partial\Omega} = g(x), x \in \partial\Omega$$

существует и может быть записано в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \mathcal{N}_2(x, \xi) R_{\mathbf{b}}[g](\xi) ds_{\xi} - \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \mathcal{N}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi + C,$$

где $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ – функция Грина задачи Неймана [7].

Литература

- [1] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
- [2] Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
- [3] Skubachevskii A. L. Nonclassical boundary-value problems I // J. Math. Sci. 2008. Vol. 155. P. 199–334.
- [4] Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Comment. Math. Helv. 1974. No. 17. P. 451–457.
- [5] Karachik V. V., Sarsenbi A. M., Turmetov B. K. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal poisson equation // Turk. J. Math. 2019. Vol. 43. P. 1604–1625.
- [6] Turmetov B., Karachik V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Var. Elliptic Equ. 2023. Vol. 68. No. 7. P. 1204–1218.
- [7] Karachik V. Riquier–Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball // Mathematics. 2023. Vol. 11. No. 4. 1000.

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ДО ОТКАЗА БЕЗОПАСНОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ КИБЕРАТАК⁵²

Касенов А. А. (Россия, Омск)

Омский государственный технический университет
kassenov_adil@mail.ru

Горохова В. Ф. (Россия, Омск)

Омский государственный технический университет
lera.tsyrulnik@mail.ru

Титова Е. К. (Россия, Омск)

Омский государственный технический университет
ekaterinatitova1234@gmail.com

В работе рассматривается модель кибератак, описываемая марковской цепью с непрерывным временем [1, 2]. Моделируемая система имеет следующий набор состояний: s_0 – безопасное состояние, то есть состояние, в котором атаки отсутствуют, s_1, \dots, s_n – транзитные состояния, характеризующиеся появлением кибератак, s_{n+1} – поглощающее состояние (отказ безопасности). Входными параметрами модели являются следующие величины: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – интенсивности потоков кибератак, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ – интенсивности потоков отражений кибератак, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – вероятности отражения кибератак. Динамика переходов между состояниями модели описывается системой уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0(t) &= -p_0(t) \sum_{k=1}^n \lambda_k + \sum_{k=1}^n \mu_k r_k p_k(t), \\ \dot{p}_i(t) &= -p_i(t) \sum_{k=1}^n \lambda_k - \mu_i p_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{p}_{n+1}(t) &= \sum_{k=1}^n \mu_k (1 - r_k) p_k(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь точкой обозначена производная по времени t .

Важным параметром, характеризующим эффективность защитных механизмов системы, является *время до отказа безопасности* – время, за которое система из начального

⁵²Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-20025, <https://rscf.ru/project/24-21-20025/>.

состояния s_0 перейдет в поглощающее состояние s_{n+1} . Данная случайная величина имеет плотность распределения $f(t) = \dot{p}_{n+1}(t)$, а её математическое ожидание равно

$$\tau = \int_0^{\infty} t \dot{p}_{n+1}(t) dt. \quad (2)$$

В случае, когда все параметры модели являются постоянными величинами, система уравнений (1) интегрируется стандартными методами и для среднего времени до отказа безопасности можно получить аналитическое выражение [1]. Более реалистичной является ситуация, когда интенсивности атак являются периодическими функциями времени. В настоящем исследовании мы изучаем ситуацию, когда интенсивности атак являются простейшими гармоническими функциями вида

$$\lambda_i(t) = \lambda_{0i} + \varepsilon_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (3)$$

где λ_{0i} , ε_i , ω_i и ϕ_i — некоторые постоянные, $i = 1, \dots, n$. Уравнения Колмогорова (1) в этом случае не допускают точное интегрирование, поэтому в докладе основное внимание уделяется качественным и приближённым методам исследования данной системы, основанным на теории Флокке. Изучается также зависимость среднего времени до отказа безопасности τ от параметров ε_i и ω_i .

Литература

- [1] Магазев А. А., Мельникова А. С., Цырульник В. Ф. Оценка среднего времени до отказа безопасности на основе марковских цепей с непрерывным временем // Математические структуры и моделирование. 2020. Т. 56. № 4. С. 112–125.
- [2] Росенко А. П., Бордак И. В. Математическая модель определения вероятности последствий от реализации злоумышленником угроз безопасности информации ограниченного распространения // Известия Южного федерального университета. Технические науки. — 2015. — № 7 (168). — С. 6–19.

ПОГРАНСЛОЙНЫЕ АСИМПТОТИКИ В БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЫСТРО И С МЕДЛЕННО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ⁵³

Каценко С. А. (Россия, Ярославль)

Региональный научно-образовательный математический центр
при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова
kasch@uniyar.ac.ru

Толбей А. О. (Россия, Ярославль)

Региональный научно-образовательный математический центр
при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова
a.tolbey@uniyar.ac.ru

Принцип усреднения Крылова-Боголюбова является одним из наиболее мощных и хорошо разработанных методов асимптотического анализа. Для уравнений с запаздыванием этот метод получил обоснование в работе Ю.С. Колесова. В случае систем уравнений параболического типа для применимости метода усреднения необходимо наложить довольно серьезные ограничения. Ранее автором рассматривался вопрос о применимости метода усреднения для систем параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и переменной областью определения. Показано, что алгоритмическая часть исследования содержит как регулярные асимптотические разложения, так и погранслойные, теория которых развита в работах Бутузова В.Ф. и Васильевой А.Б. Здесь исследуется вопрос о локальной – в

⁵³Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

окрестности установившегося режима – динамике, важной для приложений параболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(\tau)[1 - a(\tau)u(t - T(\tau), x)]u, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha_1(\tau)u \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha_2(\tau)u \Big|_{x=1}, \quad \tau = \omega t. \quad (2)$$

В (1), (2) $u = u(t, x) \geq 0$. Все коэффициенты периодичны по τ . Коэффициенты $d(\tau)$, $r(\tau)$, $a(\tau)$ и $T(\tau)$ положительны, а $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$ имеют нулевое «среднее»: $\int_0^P d^{-1}(\tau)\alpha_j(\tau)d\tau = 0$, ($j = 1, 2$).

Основное предположение состоит в том, что параметр ω является достаточно большим: $\omega \gg 1$.

Построена усредненная для (1), (2) краевая задача. Показано, что она имеет положительное состояние равновесия $u_0 = (M(r(\tau)a(\tau)))^{-1}M(r(\tau))$. Краевая задача (1), (2) тогда имеет близкое к u_0 решение $u_0(t, \omega) = u_0 + \omega^{-1}u_1(\tau, \omega) + \dots$, где $u_j(\tau, \omega)$ -периодичны по τ и ω . Исследован вопрос об устойчивости $u_0(t, \omega)$ и выделен критический случай. Для этого случая предложен алгоритм построения локального инвариантного интегрального многообразия $S(t, \omega)$ в окрестности $u_0(t, \omega)$ и сведения на него краевой задачи (1), (2). Этот алгоритм содержит как регулярные, так и погранслоиные ряды. Анализ поведения решений на $S(t, \omega)$ позволил решить вопрос о поведении при $t \rightarrow \infty$ всех решений (1), (2) из малой и не зависящей от ω окрестности $u_0(t, \omega)$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ БИЛЛИАРДАМИ ИНВАРИАНТОВ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ⁵⁴

Кибкало В. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

slava.kibkalo@gmail.com

Градиентно-подобные потоки Морса-Смейла на двумерных поверхностях допускают классификацию с точностью до топологической эквивалентности и сопряженности с помощью комбинаторных инвариантов, см. обзор [1]. Нам будет удобен инвариант, построенный А.А.Ошемковым и В.В.Шарко и названный трехцветным графом [2]. Каждую ячейку на M^2 , ограниченную четырьмя сепаратрисами седел, разделим произвольной траекторией t_i от источника к стоку. Устойчивые и неустойчивые сепаратрисы обозначим s_i, u_i . Двойственный граф имеет вершины степени 3, причем инцидентные вершине ребра имеет разные типы u, s, t .

Построенные инварианты оказались связаны с другим классом систем — интегрируемыми гамильтоновыми системами (ИГС). Теория топологической классификации их слоений Лиувилля (разбиения фазового пространства M^4 на связные компоненты совместных уровней энергии H и независимого с ней первого интеграла F) была построена в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [2] в предположении невырожденности особенностей. Важным различающим инвариантом слоений на неособой изоэнергетической поверхности $Q_h^3 : H = h$ в M^4 является молекула W — база слоения Лиувилля, являющаяся графом, каждая вершина которой оснащается 3-атомом: классом послойной гомеоморфности слоения в связной компоненте прообраза $F^{-1}([\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon])$ окрестности особого значения $F = \varphi$.

Ранее В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой [3] было показано, что в классе слоений Лиувилля интегрируемых бильярдных систем на софокусных бильярдных книжках (столах-комплексах с циклическими перестановками на 1-клетках) реализуется произвольная молекула невырожденной ИГС с невырожденными (боттовскими) 3-атомами. Листы книжки X^2 при проекции $\pi : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(x, y)$ изометричны плоским бильярдам, ограниченными дугами софокусных квадрик $(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)$. Интеграл Λ таких бильярдов сохраняется и при движении на X^2 .

⁵⁴Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-71-10106 в МГУ им. М.В.Ломоносова.

Книжка X^2 , моделирующая молекулу, склеена из следующих листов e_i^2 . Каждый из них ограничен дугами двух софокусных гипербол $b < \lambda_\alpha < \lambda_\beta \leq a$ и эллипса с параметром λ_0 (для всех листов $\lambda_0, \lambda_\alpha, \lambda_\beta$ — общие), а также дугой эллипса $b > \lambda_i > \lambda_0$ для $i = 1, \dots, 2m$. При этом по границе $\lambda = \lambda_i$ склеено ровно два листа (т.е. для $i \exists! j \neq i : \lambda_i = \lambda_j$). Обозначим через σ_0 перестановку из S_{2m} , отвечающую уровню λ_0 . Ее независимые циклы отвечает корешкам склейки e_γ^1 (1-клеткам X^2), проецирующихся при π на дугу эллипса λ_0 . Обозначим класс таких книжек через \mathbb{B} .

Теорема 1. *Для каждой билиардной книжки из класса \mathbb{B} определен комбинаторный инвариант, изоморфный трехцветному графу градиентно-подобного потока на двумерной поверхности. При этом каждый трехцветный граф реализуется подходящей билиардной книжкой.*

В основе лежит следующее наблюдение. Рассмотрим в изоэнергетической поверхности $Q^3 : H = h > 0$ двумерный прообраз $\Lambda^{-1} \circ \pi^{-1}$ гиперболы $\lambda_\alpha < \lambda < \lambda_\beta$. Исключим уровни $\lambda \geq \lambda_\gamma$. Тогда множество таких пар “точка стола – вектор скорости” разбивается на четырехугольники кривыми, отвечающими или склейкам листов по эллипсу λ_0 (t -кривые) и по эллипсам $\lambda_i = \lambda_j$ (u -кривые) или касанию траекторией на листе e_i каустики при $\lambda_0 < \lambda < \lambda_i$ (s -кривые). Также мы обсудим вопрос о единственности реализации слоения с некоторой молекулой в классе книжек \mathbb{B} .

Литература

- [1] Круглов В. Е., Починка О. В. Топологическая сопряженность градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективные алгоритмы ее различения // СМФН. 2022. Т. 68. № 3. С. 467–487.
- [2] Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях дробями // Матем. сборник. 1998. Т. 189. №8. С. 93–140.
- [3] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [4] Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Билиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сборник. 2021. Т. 212. № 8. С. 89–150.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА⁵⁵

Кобенко В. С. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
svaleryk@yandex.ru

В работе рассматриваются краевые задачи произвольного порядка с линейно зависящими от спектрального параметра краевыми условиями:

$$\begin{cases} \ell(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = \lambda y \\ U_i(y, \lambda) = U_i^0(y) - \lambda U_i^1(y) = 0, & i = 1, \dots, m \\ U_i(y, \lambda) = U_i^0(y) = 0, & i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

где линейные формы $U_i^\nu(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k}^\nu y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{i,k}^\nu y^{(k)}(1)$, $\nu \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,k}^\nu, b_{i,k}^\nu \in \mathbb{C}$ и коэффициенты дифференциального выражения $p_i(x) \in L_1[0, 1]$.

Частные случаи рассматриваемой задачи для уравнений второго и четвертого порядков рассматривались в работах [1]–[4] и других (см. имеющиеся в этих работах ссылки). Кроме того, во всех этих работах предполагались дополнительные условия, которые обеспечивали возможность сведения соответствующих задач к задачам на собственные значения для самосопряженных операторов или самосопряженных операторов в пространстве Понтрягина. В отличие от цитированных работ мы изучаем общую задачу (1), предполагая только, что

⁵⁵Работа поддержана грантом РНФ № 20-11-20261.

рассматриваемая задача регулярна (или усиленно регулярна) в смысле определений работы [5], а система линейных форм $\{U_i^0\}_{i=1}^n \cup \{U_j^1\}_{j=1}^m$ является линейно независимой. При таких предположениях из результатов работы [5] можно извлечь, что собственные и присоединенные функции (СПФ) задачи (1) не образуют минимальную систему в $L_2[0, 1]$, необходимо удалить из этой системы конечное число функций, чтобы она стала минимальной. Задача состоит в том, какие функции надо удалить, чтобы оставшаяся система стала минимальной или базисом.

С задачей (1) свяжем оператор

$$\mathcal{L} : (y \ U_1^1(y) \ \dots \ U_m^1(y)) \rightarrow (\ell(y) \ U_1^0(y) \ \dots \ U_m^0(y)), \quad (2)$$

действующий в расширенном гильбертовом пространстве $H = L_2[0, 1] \oplus \mathbb{C}^m$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{y \in W_2^n[0, 1] \mid U_i(y) = 0, i = m + 1, \dots, n\}$.

Теорема 1. Пусть задача (1) регулярна, а формы $\{U_i^0\}_{i=1}^n \cup \{U_i^1\}_{i=1}^m$ линейно независимы. Тогда спектр оператора \mathcal{L} совпадает со спектром задачи (1), а проекции $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ СПФ оператора \mathcal{L} на пространство $L_2[0, 1]$ совпадают с СПФ этой задачи. При этом система СПФ оператора \mathcal{L} образует базис Рисса, возможно со скобками, в пространстве H . При дополнительном условии усиленной регулярности задачи (1) система СПФ оператора \mathcal{L} образует безусловный базис в H .

Теорема 2. При выполнении условий Теоремы 1 сопряженная задача к задаче (1) порождается дифференциальным выражением $\ell^*(y)$ и краевыми условиями такого же вида, как в (1) с заменой линейных форм U_i^ν на некоторые формы V_i^ν , а линеаризующий сопряженную задачу оператор \mathcal{L}^* имеет также вид (2) с заменой дифференциального выражения ℓ на ℓ^* и линейных форм U_i^ν на V_i^ν . При этом операторы \mathcal{L} и \mathcal{L}^* взаимно сопряжены. Система проекций $\{y_k\}_{k=1}^\infty \setminus \{y_{k_j}\}_{j=1}^m$ образует базис Рисса, возможно со скобками, в пространстве $L_2[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} V_1^1(z_{k_1}) & \dots & V_1^1(z_{k_m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_m^1(z_{k_1}) & \dots & V_m^1(z_{k_m}) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3)$$

Доклад основан на совместной работе с А.А.Шкаликовым.

Литература

- [1] Fleydanli A. E. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. 2023. V. 11. No. 1. p. 28–40.
- [2] Алиев З. С., Абдуллаева К. Ф. Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 9. С. 1165–1185.
- [3] Gao C., Ran M. AIMS Mathematics. 5(2). p. 904–922.
- [4] Шкаликов А. А. Дифференциальные уравнения, 2019. Т. 55. № 5. С. 647–659.
- [5] Шкаликов А. А. Тр.семинара им. И.Г.Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.

ДИФФУЗИЯ И ФОРМАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Козлов В. В. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

kozlov@pran.ru, vvkozlov@mi-ras.ru

Будет рассказано о новом механизме диффузии в гамильтоновых системах дифференциальных уравнений, который отличается от механизма переходных цепочек, предложенного В.И. Арнольдом. Обсуждаются вопросы существования инвариантных торов аналитических гамильтоновых систем, которые обладают лишь конечной гладкостью, или которые только непрерывны. Будет приведен пример аналитической гамильтоновой системы с формально устойчивым положением равновесия, но которое на самом деле неустойчиво по Ляпунову. При анализе устойчивости здесь используется новый механизм диффузии.

ПОЧЕМУ УСТОЙЧИВЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МОГУТ СХОДИТЬСЯ
К РАЗНЫМ РЕШЕНИЯМ: АНАЛИЗ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХОПФА⁵⁶

Коломийцев Г. В. (Россия, Москва)

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
kolomiytsev@theor.mephi.ru

Томашева А. М. (Россия, Москва)

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
anastasiatomasheva@gmail.com

Обобщенное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi(v)}{\partial x} = 0, \quad v = v(x, t) \quad (1)$$

выражает скалярный закон сохранения функции $v(x, t)$, где x и t — координата и время соответственно. Функция $\phi(v)$, называемая функцией потока, является дважды непрерывно дифференцируемой.

Интегральная форма уравнения (1)

$$\oint v dx - \phi(v) dt = 0 \quad (2)$$

имеет обобщенные разрывные решения в виде бегущих (ударных) волн

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1, & x - Wt < 0, \\ v_2, & x - Wt > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где W — скорость волны, v_1, v_2 — значения функции v за и перед разрывом соответственно. При этом величины $v_{1,2}$ в (3) удовлетворяют условию на разрыве

$$W = \frac{\phi(v_2) - \phi(v_1)}{v_2 - v_1}. \quad (4)$$

Сформулируем для (1) задачу Римана о распаде произвольного разрыва следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi(v)}{\partial x} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{R}, \\ v(x, 0) &= \begin{cases} v_l, & x < 0, \\ v_r, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае строго выпуклой $\phi(v)$ задача Римана имеет единственное решение в виде бегущей (ударной) или простой волны. Если же $\phi(v)$ обладает точками перегиба, то задача Римана может обладать множеством решений [1]. Это проявляется, в частности, в том, что уравнение (4) может иметь несколько решений для одной и той же величины W .

На примере двух семейств конечно-разностных схем (консервативных и неконсервативных) показано [2], что в общем случае численное решение задачи Римана для обобщенного уравнения Хопфа (1) зависит от конечно-разностной схемы. Численное решение может отличаться как количественно, так и качественно. Причина этого заключается в неединственности решения задачи Римана для обобщенного уравнения Хопфа. В случае функции потока с двумя точками перегиба удастся добиться единственности, если искусственно ввести диссипацию и дисперсию, т.е. перейти к обобщенному уравнению Кортевега-де Вриза-Бюргерса. В докладе предлагается метод подбора коэффициентов диссипации и дисперсии. Метод позволяет получить физически обоснованное единственное численное решение, которое не зависит от разностной схемы.

⁵⁶Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда по гранту №20-11-20141, <https://rscf.ru/project/23-11-45003/>.

Литература

- [1] Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка. Издательство ЦПИ при мех-мат факультете МГУ: Москва, 1999. 96 с.
- [2] Shargatov V.A., Chugainova A.P., Kolomiytsev G.V.; Nasyrov I.I., Tomasheva A.M., Gorkunov S.V., Kozhurina P.I. Why Stable Finite-Difference Schemes Can Converge to Different Solutions: Analysis for the Generalized Hopf Equation. *Computation* 2024, 12, 76. <https://doi.org/10.3390/computation12040076>.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА⁵⁷

Конечная Н. Н. (Россия, Архангельск)

САФУ имени М.В. Ломоносова

n.konechnaya@narfu.ru

Мирзоев К. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

mirzoev.karahan@mail.ru

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n и λ – комплексные числа, p_1, p_2, \dots, p_n – комплекснозначные измеримые на $R_+ := [0, +\infty)$ функции, такие, что

$$|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^n |p_j| \in L^1_{loc}(R_+).$$

В докладе будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этого условия определить, в каком смысле следует трактовать уравнение вида

$$y^{(n)} + (a_1 + p_1(x))y^{(n-1)} + (a_2 + p'_2(x))y^{(n-2)} + \dots + (a_n + p'_n(x))y = \lambda y, \quad (1)$$

где все производные понимаются в смысле теории распределений. Далее, используя эту конструкцию и накладывая дополнительные условия интегрального убывания на бесконечности функций p_1, p_2, \dots, p_n , будет показано, что главный член асимптотики при $x \rightarrow +\infty$ фундаментальной системы решений уравнения (1) и их производных определяется по корням многочлена

$$Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n - \lambda.$$

В докладе, в частности, будут изложены доказательства следующих теорем:

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) число λ отлично от a_n , а функции p_1, p_2, \dots, p_n такие, что

$$x^{m-1}(|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^n |p_j|) \in L^1(R_+),$$

где m – наибольшее из чисел, равных кратностям корней многочлена $Q(z)$. Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, такую, что если z_1 – корень многочлена $Q(z)$ кратности l_1 , то уравнение (1) имеет подсистему фундаментальных решений y_j , $j = 1, 2, \dots, l_1$, такую, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$y_j = e^{z_1 x} x^{j-1} (1 + o(1)). \quad (2)$$

Такую же асимптотику имеет и другая подсистема фундаментальных решений y_j , $j = l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2$, отвечающая корню z_2 многочлена $Q(z)$ кратности l_2 , и т.д.

⁵⁷Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект №20-11-20261).

Теорема 2. Пусть в уравнении (1) $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \lambda = 0$, а функции p_1, p_2, \dots, p_n такие, что

$$|p_1| + (1 + x|p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^n x^{j-2} |p_j| \in L^1(R_+).$$

Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, такую, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$y_j = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} (1 + o(1)). \quad (3)$$

Отметим, что асимптотические формулы (2) и (3) допускают дифференцирование до $(n-2)$ -го порядка включительно.

Литература

- [1] Конечная Н. Н., Мирзоев К. А. Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 1. С. 74–83.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Корнеева О. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
korneevaolya@bk.ru

Мастерков Ю. В. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
Jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0, T], \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

в предположении, что матричная функция $t \rightarrow (A(t), B(t))$ является кусочно-постоянной на отрезке $[0, T]$.

Система (1) называется *вполне управляемой на отрезке* $[0, T]$, если для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, существует такое измеримое управление $\tilde{u}(t)$, что соответствующее ему решение $\tilde{x}(t) \doteq x(t, \tilde{u}(\cdot))$ удовлетворяет условиям: $\tilde{x}(0) = x_0$; $\tilde{x}(T) = x_1$. Известно (см. [1]), что вполне управляемость системы (1) эквивалентна условию *управляемости в нуль (из нуля)* данной системы, и множество точек, достижимых из нуля, является линейным пространством, которое будем обозначать $\mathcal{L}(T)$ и называть *пространством управляемости системы (1) на отрезке* $[0, T]$.

Пусть $\theta \doteq (t_1, t_2, t_3 \dots t_{k-1}) - k - 1$ -мерный вектор, определяющий разбиение отрезка $[0, T]$ ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < T \doteq t_k$) на k отрезков $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, k}$. Предполагается, что $(A(t), B(t)) = (A_i, B_i)$ на промежутках $\Delta_i \doteq (t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, k}$.

Введем в рассмотрение системы

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (\xi_i)$$

Через L_i обозначим пространство управляемости системы (ξ_i) . Известно, (см. [1]) что L_i – суть линейная оболочка столбцов матрицы управляемости системы ξ_i , т. е. $L_i = \text{Lin}(B_i, A_i B_i, \dots, A_i^{n-1} B_i)$.

Лемма. Пусть $k = 2$, т. е. $[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2]$ и $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $T > 0$ система (1) вполне управляема в \mathbb{R}^n .

Теорема 1. Пусть $L_1 + L_2 + \dots + L_k = \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\vartheta_0 > 0$, что для любого разбиения $\theta \doteq (t_1, t_2, t_3 \dots t_{k-1})$ отрезка $[0, T]$, такого, что $t_i - t_{i-1} < \vartheta_0$, $i = \overline{1, k}$ система (1) вполне управляема в \mathbb{R}^n , т.е. $\mathcal{L}(T) = \mathbb{R}^n$.

Заметим, что условие

$$L_1 + L_2 + \dots + L_k = \mathbb{R}^n \quad (2)$$

не является ни необходимым, ни достаточным условием вполне управляемости системы (1) на отрезке $[0, T]$. Однако почти для всех разбиений θ отрезка $[0, T]$ условие (2) достаточно для того, чтобы $\mathcal{L}(T) = \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Пусть $L_i + L_{i+1} = \mathbb{R}^n$ для некоторого $1 \leq i < k$. Тогда для любого разбиения θ отрезка $[0, T]$ система (1) вполне управляема в \mathbb{R}^n на отрезке $[0, T]$, т.е. $\mathcal{L}(T) = \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\Phi_i(\tau)$, $i = \overline{1, k}$ фундаментальные матрицы систем (ξ_i) , удовлетворяющие начальным условиям $\Phi_i(0) = E$, где E – единичная матрица.

Теорема 3. Пусть для некоторого i , $1 < i < k$ выполнено условие

$$\Phi_i(\tau_i)L_{i-1} + L_i + L_{i+1} = \mathbb{R}^n,$$

где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. Тогда система (1) вполне управляема в \mathbb{R}^n на отрезке $[0, T]$, т.е. $\mathcal{L}(T) = \mathbb{R}^n$.

Более того, система (1) будет вполне управляема на отрезке $[0, t_{i+1}]$.

Литература

- [1] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления, М: Наука, 1972.

АСИМПТОТИКИ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ ДЛЯ РЕШЕНИЙ $n \times n$ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ⁵⁸

Косарев А. П. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
ruterminals@gmail.com

Рассматривается $n \times n$ система дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{y}' - B(x)\mathbf{y} - C(x, \lambda)\mathbf{y} = \lambda A(x)\mathbf{y}, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где

$$A = \text{diag}\{a_1(x), \dots, a_n(x)\}, \quad B = \{b_{ij}(x)\}, \quad C = \{c_{ij}(x, \lambda)\}, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

а λ — большой спектральный параметр. Элементы матриц A , B и C предполагаются суммируемыми на отрезке $[0, 1]$, причем $\|c_{ij}(x, \lambda)\|_{L_1} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Наша задача — получить асимптотическое поведение фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$ решений системы (1).

Будем говорить, что условие упорядоченности Биркгофа выполняется в точке $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, если существует такая перестановка σ индексов $\{1, \dots, n\}$ функций a_j , что неравенства

$$\Re e^{i\theta} a_{\sigma(1)}(x) \leq \Re e^{i\theta} a_{\sigma(2)}(x) \leq \dots \leq \Re e^{i\theta} a_{\sigma(n)}(x) \quad \text{п.в.} \quad x \in [0, 1] \quad (2)$$

верны для $\theta = \theta_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что условие (2) выполняется для $\theta = 0$.

Для формулировки основного результата определим матрицы

$$M(x) = \text{diag}\{e^{\int_0^x b_{11} dt}, \dots, e^{\int_0^x b_{nn} dt}\}, \quad E(x, \lambda) = \text{diag}\{e^{\lambda \int_0^x a_1 dt}, \dots, e^{\lambda \int_0^x a_n dt}\}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие Биркгофа (2) для $\theta = 0$, и для всех индексов $j \neq k$ найдутся числа $p, q \in [1, \infty]$ (возможно, зависящие от j и k) такие, что

$$a_j - a_k \in L_p[0, 1], \quad (a_j - a_k)^{-1} \in L_q[0, 1], \quad 1/p + 1/q = 1.$$

⁵⁸Работа поддержана грантом РФФИ No 20-11-20261.

Тогда при любых фиксированных $\kappa, h \geq 0$ в полуполосах

$$\Pi_{\kappa, h}^{\pm} = \pm\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda \geq -\kappa, \ |\Im \lambda| \leq h\}$$

существуют фундаментальные матрицы $Y_{\pm}(x, \lambda)$ решений уравнения (1), которые имеют асимптотические представления

$$Y_{\pm}(x, \lambda) = M(x) (I + R_{\pm}(x, \lambda)) E(x, \lambda), \quad (3)$$

где $|R_{ij}^{\pm}(x, \lambda)| \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $\lambda \in \Pi_{\kappa, h}^{\pm}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Если для некоторой перестановки σ условие упорядоченности (2) выполнено при всех $\theta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, тогда асимптотические представления (3) верны в секторах

$$\Lambda_{\kappa, \varepsilon}^{\pm} = \pm\{\lambda - \kappa, \ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg \lambda| \leq \varepsilon\}.$$

Для матриц $R_{\pm}(x, \lambda)$ можно получить асимптотические представления по степеням λ^{-1} , если при некотором $m \in \mathbb{N}$ они имеются для матрицы $C(x, \lambda)$

$$C(x, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^{-i} B_i(x) y + \lambda^{-m} C_m(x, \lambda), \quad \|c_{ij}^m(\cdot, \lambda)\|_{L_1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

и коэффициенты уравнения достаточно гладкие, а именно

$$a_i \in W_1^m[0, 1], \quad b_{ii} \in W_1^{m-1}[0, 1], \quad b_{jk} \in W_1^m[0, 1], \quad j \neq k, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \\ b_{jk}^s \in W_1^{m-s}[0, 1], \quad j, k = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, m.$$

Тогда при дополнительном условии $a_j(x) \neq a_k(x) \ \forall x \in [0, 1]$ фундаментальные матрицы $Y_{\pm}(x, \lambda)$ в полуполосах $\Pi_{\kappa, h}^{\pm}$ (или в секторах $\Lambda_{\kappa, \varepsilon}^{\pm}$) допускают представление

$$Y_{\pm}(x, \lambda) = M(x) (I + \lambda^{-1} P_1(x) + \dots + \lambda^{-m} P_m(x) + \lambda^{-m} R_{\pm}(x, \lambda)) E(x, \lambda),$$

где $|R_{ij}^{\pm}(x, \lambda)| \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $\lambda \in \Pi_{\kappa, h}^{\pm}$ ($\lambda \in \Lambda_{\kappa, \varepsilon}^{\pm}$) при $\lambda \rightarrow \infty$.

Матрицы P_1, \dots, P_m зависят от матриц A, B, B_1, \dots, B_m , и формулы для них выписываются явно.

Доклад основан на совместной работе с А.А. Шкаликовым.

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В НЕСКОЛЬКИХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ⁵⁹

Костерин Д. С. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

kosterin.dim@mail.ru

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + (D_0 + \varepsilon D_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x + s) ds$$

с периодическим краевым условием

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x).$$

Здесь $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, A_0, A_1, D_0, D_1 – матрицы размера $n \times n$, $F(*, *)$, $F_3(*, *, *)$ – линейные по каждому аргументу вектор-функции, ε – малый положительный параметр.

⁵⁹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

Исследуется динамика данной краевой задачи в окрестности её нулевого решения. Устойчивость нулевого решения определяется в главном собственными значениями матриц A_0 и $A_0 + D_0$. Если все собственные значения этих матриц имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение краевой задачи асимптотически устойчиво.

Будем считать в дальнейшем, что все собственные значения матрицы $A_0 + D_0$ имеют отрицательную вещественную часть.

Пусть матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение, все остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательную вещественную часть. Будем искать решение краевой задачи в виде асимптотического ряда

$$u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x) a + \varepsilon^2 u_2(t, \tau, x) + \dots$$

Подставив его в исходную систему уравнений, приравняем между собой коэффициенты при разных степенях ε . Тогда при ε^2 получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \delta(\xi^2 - M(\xi^2)), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x)$$

с дополнительным условием

$$M(\xi) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем $M(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x) dx$. Такую краевую задачу будем называть квазинормальной формой.

Если в квазинормальной форме $\delta = 0$, то решение будем искать в виде

$$u(t, x) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, x) + \varepsilon u_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots$$

Тогда квазинормальная форма будет иметь вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \delta_1(\xi^3 - M(\xi^3)), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x), \quad M(\xi) = 0.$$

Пусть теперь матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$, все остальные её собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. Тогда решение исходной задачи будем искать в виде асимптотического ряда

$$u(t, x) = \varepsilon^{1/2} (a \xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \bar{a} \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon u_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots$$

В этом случае квазинормальной формой будет являться краевая задача

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \sigma(\xi|\xi|^2 - M(\xi|\xi|^2)) + \beta \xi M(|\xi|^2) + \gamma \bar{\xi} M(\xi^2), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x),$$

$$M(\xi) = 0.$$

В работе показано наличие кусочно-постоянных по x решений у перечисленных квазинормальных форм, представлены результаты об устойчивости этих решений. Методы исследования квазинормальных форм опираются на аналогичные, представленные в работах [1], [2].

Литература

- [1] Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Медленные и быстрые колебания в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Доклады Академии наук. 2019. т. 484, № 1. С. 21–25.
- [2] Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–Улама // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. т. 23, № 5. С. 548–558.

ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ
КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПО ДЛИНЕ СИЛОЙ В СЕЧЕНИИ⁶⁰

Костин Г. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

kostin@ipmnet.ru

Исследование управляемости динамических систем с распределенными параметрами — важное направление в теории управления для уравнений в частных производных. На основе обобщенной формулировки начально-краевой задачи в [1] показано, что допустимое время управления продольными колебаниями свободного упругого стержня сокращается в N раз, если к краевой силе добавить N одинаковых пьезоэлектрических актюаторов (ПА), расположенных без промежутков вдоль оси и создающих кусочно-постоянную нормальную силу в поперечном сечении. В [2] доказано, что без граничной силы достижимыми оказываются лишь периодические терминальные состояния свободного стержня с длиной волны обратно пропорциональной числу ПА. В [3] рассмотрена схема, в которой ПА расположены с промежутками периодически, и предлагается алгоритм оптимального гашения колебаний. В этой работе изучена возможность управления продольными колебаниями консольно закрепленного однородного упругого стержня с помощью одного ПА. Анализируется управляемость системы в зависимости от расположения и длины ПА.

Рассмотрим продольные колебания однородного упругого стержня единичной длины (в безразмерных параметрах) на интервале времени $t \in \mathcal{T} = (0, T)$. Один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, другой — свободен от нагрузок. Вдоль оси на интервале $x \in \mathcal{U} = (x_-, x_+)$ расположен ПА, который создает в поперечном сечении равномерно распределенную на отрезке \mathcal{U} нормальную управляющую силу:

$$x \in \mathcal{U} : f(t, x) = u(t), \quad x \notin \mathcal{U} : f(t, x) = 0. \quad (1)$$

В области $(t, x) \in \mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = (0, 1)$, состояние стержня выражается через пару функций (v, w) . Здесь $w : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — это перемещение его точек, а $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — динамический потенциал. Первая производная потенциала по времени определяет нормальную силу в поперечном сечении $s = v_t$, а производная по пространственной координате задает линейную плотность импульса $p = v_x$.

Сформулируем обобщенную краевую задачу о движении стержня. Пусть заданы начальные распределения $v_0, w_0 \rightarrow H^1(\mathcal{X})$ и допустимая сила $f \in L^2(\mathcal{D})$. Требуется найти динамическую и кинематическую переменные $(v^*(t, x), w^*(t, x))$, которые минимизируют функционал состояния

$$\begin{aligned} \Phi[v^*, w^*] = \min_{v, w} \Phi[v, w] = 0, \quad \Phi = \int_{\mathcal{D}} ((v_x - w_t)^2 + (v_t - w_x - f)^2) d\mathcal{D}; \\ v(0, x) = v_0(x), \quad w(0, x) = w_0(x), \quad v(2, x) = w(2, x) = v(t, 1) = w(t, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Можно показать, что при таком обезразмеривании система не управляема, если $x_+ + x_- = 2(2m - 1)(2k - 1)^{-1} \leq 2$ и $\ell = 4n(2k - 1)^{-1} < 1$, где $k > 1, m, n > 0$ — целые числа. При таких параметрах нельзя влиять на моды колебаний с номерами k , которым соответствует собственные частоты $\omega_k = k\pi - \pi/2$.

Для рассмотренной системы время управления $T = 2$, за которое возможно погасить произвольные колебания, является кратчайшим из допустимых. Для этого критического времени удастся построить решение краевой задачи (1), (2) в рядах с управлением $u = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k e_k(t) + b_k e'_k(t))$ (исключая упомянутые случаи неуправляемости). Здесь $e_k(x) = 2\omega_k^{-1} \sin \omega_k x$ — форма k -й моды колебаний, а коэффициенты a_k, b_k выражаются явно через геометрические параметры x_{\pm} и интегральные проекции начальных распределений v_0 и w_0 на функции e_k и e'_k , соответственно.

⁶⁰Работа выполнена по теме государственного задания (124012500443-0).

Литература

- [1] Kostin G., Gavrikov A. Optimal motion of an elastic rod controlled by piezoelectric actuators and boundary forces // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2022, IEEE.
- [2] Kostin G., Gavrikov A. Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55, No. 16. P. 350–355.
- [3] Гавриков А. А., Костин Г. В. Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. ТИСУ. 2023. № 6. С. 93–109.

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ МАЯТНИКОВОГО ТИПА С НЕМОНОТОННЫМ ВРАЩЕНИЕМ⁶¹

Костромина О. С. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
os.kostromina@yandex.ru

Изучаются неконсервативные квазипериодические двухчастотные возмущения уравнения маятникового типа с немонотонным вращением в случае, когда возмущение содержит нелинейные параметрические члены. Проводится исследование топологии вырожденной резонансной зоны с порядком вырождения, равным двум. Устанавливается существование квазипериодических решений нового типа, возникающих при параметрическом резонансе. Рассматривается задача о синхронизации квазипериодических колебаний в вырожденном случае.

РАВНОВЕСИЕ В СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ КАК ТОЧКА СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Котюков А. М. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
amkotyukov@mail.ru

Павлова Н. Г. (Россия, Москва)

Московский физико-технический институт
natasharussia@mail.ru

Доклад посвящен вопросам, связанным с понятием положения равновесия в моделях сложных систем, в частности, экономических. Положением равновесия на рынке называется ситуация, при которой спрос на все товары равен предложению этих товаров. В статическом случае вопрос о существовании и получении положения равновесия сводится к исследованию системы неявных алгебраических уравнений и неравенств, а в динамическом случае – системы неявных дифференциальных уравнений при различных ограничениях. Предлагается новый подход к исследованию моделей рынка на предмет положения равновесия, а именно: положение равновесия рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения, действующих из метрического пространства цен в метрическое пространство объемов товаров. Преимущество данного подхода состоит в том, что отображения не должны быть гладкими, что является существенным требованием в большинстве известных подходов. Для получения достаточных условий существования положения равновесия, а также для исследования их свойств используется понятие накрывающего отображения.

Определение. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$, где $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно, называется α -накрывающим на множестве $M \subseteq X$, если для любых $x \in M, r > 0$ таких, что $B_X(x, r) \subseteq M$, выполнено включение

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r),$$

⁶¹Работа частично поддержана РНФ, грант № 24-21-00050.

где $B_X(x, r), B_Y(y, r)$ – замкнутые шары с центрами в точках $x \in X, y \in Y$ радиуса $r > 0$ соответственно.

В [1] были получены достаточные условия существования точки совпадения накрывающего и липшицевого отображений.

Теорема. Пусть пространство X полное и заданы $\alpha > 0, x_0 \in X$ и $R > 0$. Пусть также $\Psi : X \rightarrow Y$ является α -накрывающим на $B_X(x, R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi : B_X(x_0, R) \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq (\alpha - \beta)R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

С помощью этой теоремы были получены условия существования положения равновесия в статических и динамических моделях рынка (см., например, [2]), а также разработан алгоритм численного поиска положения равновесия, основанный на итерационном процессе нахождения точек совпадения двух отображений (см., например, [3]). Проведены соответствующие численные эксперименты.

Литература

- [1] Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5, 1. P. 5–16.
- [2] Kotyukov A. M., Pavlova N. G. Equilibrium in Dynamic Market Models with Known Elasticity // Journal of Mathematical Sciences. 2023. 269. P. 847–852.
- [3] Котюков А. М., Павлова Н. Г. Алгоритм поиска точек совпадения в сложных системах // Управление большими системами. 2024. Выпуск 107. С. 6–27.

О ДВИЖЕНИЯХ ГАНТЕЛИ НА ИНВАРИАНТНОМ МНОГООБРАЗИИ «ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРОПЕЛЛЕР» В ОБОБЩЁННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

Красильников П. С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
krasil06@rambler.ru

Исмагилов А. Р. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
albertic5@mail.ru

Исследована задача о поступательно-вращательных движениях симметричной гантели малой массы в обобщенной эллиптической задаче Ситникова [1]. Получены уравнения движения гантели в инерциальном пространстве, доказано существование интегрального многообразия «гравитационный пропеллер», на котором центр масс гантели перемещается вдоль нормали к плоскости орбитального движения основных тел, а сама гантель вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный угол $\pi/2$ (см. рис. 1) Ранее, подобные движения были исследованы в круговой задаче Ситникова [2,3].

Получена система неавтономных уравнений движения на этом многообразии. Составлено уравнение плоских колебаний гантели, когда центр масс гантели совпадает с центром масс основных тел. Показано, что если длина гантели бесконечно малая, то это уравнение совпадает с уравнением Белецкого. Исследуются малые колебания при любых длинах s гантели, когда уравнение колебаний содержат два малых параметра: характерное значение амплитуды колебаний и эксцентриситет орбиты основных тел. Получены два типа регулярных уравнений при степенной редукции между малыми параметрами. Описаны изолированные периодические колебания гантели, а также квазипериодические колебания [4]. Исследованы некоторые резонансные эффекты.

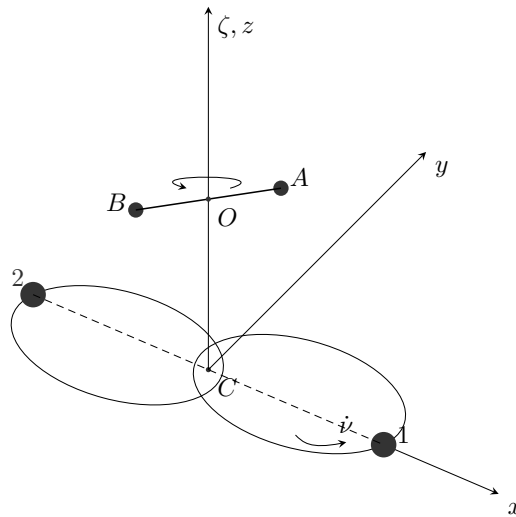


Рис. 1: Движение гантели на многообразии «гравитационный пропеллер»

Литература

- [1] Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
- [2] Красильников П. С. О многообразии "гравитационный пропеллер" в обобщенной круговой задаче Ситникова // ПММ. 2021. Т. 85. № 4. с. 555-565.
- [3] Krasilnikov P. S., Ismagilov A. R. On the Dumb-Bell Equilibria in the Generalized Sitnikov Problem // Russian J. of Nonlinear Dyn., 2022, vol. 18, no. 4, pp. 577–588.
- [4] Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., ГИТТЛ. 1956. 491 с.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ: ОТ ИДЕИ ДО МЕТОДА

Крищенко А. П. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

yarpkri@yandex.ru

Задача локализации возникла в середине 90-х годов в связи с численными методами поиска периодических траекторий. Известный метод Пуанкаре сводит задачу поиска периодической траектории n -мерной автономной системы к численному построению отображения сечения Пуанкаре ($n-1$ -мерной поверхности) в себя и нахождению неподвижной точки этого отображения. При этом важными оказываются два вопроса: как выбирать сечение Пуанкаре и как долго интегрировать при построении отображения его в себя? Оказалось [1], что любая периодическая траектория имеет не менее одной общей точки с S — множеством нулей производной в силу системы любой гладкой функции h и все периодические траектории содержатся в множестве $\{\inf_S h \leq h \leq \sup_S h\}$. Аналогичное утверждение справедливо и для всех инвариантных компактных множеств системы

Теорема 1. [2] *Все компактные инвариантные множества системы $\dot{x} = f(x)$, $x \in M \subseteq \mathbf{R}^n$, $f \in C^1(M)$ содержащиеся в множестве $U \subseteq M$, для любой функции $h \in C^1(M)$ содержатся в локализирующих множествах*

$$\{h(x) \leq h_{\sup}(U)\} \cap U, \quad \{h_{\inf}(U) \leq h(x)\} \cap U, \quad \{h_{\inf}(U) \leq h(x) \leq h_{\sup}(U)\} \cap U, \quad (1)$$

где

$$h_{\inf}(U) = \inf\{h(x) \mid x \in S(h, U)\}; \quad h_{\sup}(U) = \sup\{h(x) \mid x \in S(h, U)\}, \quad (2)$$

а $S(h, U) = S(h) \cap U = \{x \in U \mid \dot{h}(x) = 0\}$, $S(h) = \{x \in M \mid \dot{h}(x) = 0\}$.

Свойства локализирующих множеств.

1. Если компактное множество U положительно инвариантно, то и локализирующие множества (1) положительно инвариантны.

2. Функция \dot{h} сохраняет знак на каждой компоненте связности множества $U \setminus L$, где L — локализирующее множество из (1).

3. Если множество U положительно инвариантно, а производная \dot{h} положительна в $\{h < h_{\inf}(U)\} \cap U$ и отрицательна в $\{h > h_{\sup}(U)\} \cap U$, то расширения локализирующих множеств (1), а именно множества $\{h(x) \leq h_{\sup}(U) + \tau\} \cap U$, $\{h_{\inf}(U) - \nu \leq h(x)\} \cap U$ и $\{h_{\inf}(U) - \nu \leq h(x) \leq h_{\sup}(U) + \tau\} \cap U$ положительно инвариантны для любых $\tau > 0$, $\nu > 0$.

Эти и другие свойства локализирующих множеств и поверхностей уровня функции h оказались полезными при доказательстве существования аттрактора в системе, асимптотической устойчивости положений равновесия и устойчивости в целом, а также при построении оценок областей притяжения и исследовании других вопросов поведения траекторий системы.

В качестве иллюстрации приводится исследование трехмерной системы динамики популяций [3].

Литература

- [1] Крищенко А. П. Локализация предельных циклов // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №11. С.1858–1865.
- [2] Крищенко А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. №12. С. 1597–1604.
- [3] Starkov K. E., Krishchenko A. P. On the Dynamics of Immune – Tumor Conjugates in a Four – Dimensional Tumor Model // Mathematics. 2024. V. 12. 843.

О СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМАХ С ДВУМЕРНЫМ РАСТЯГИВАЮЩИМСЯ АТТРАКТОРОМ, ЗАДАННЫХ НА 3-МНОГООБРАЗИИ

Круглов Е. В. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

kruglov19@mail.ru

В докладе излагаются результаты, полученные в длительном сотрудничестве с В.З. Гринесом и О.В. Починкой. На замкнутом трехмерном многообразии \mathbb{M}^3 рассматриваются А-диффеоморфизмы, неблуждающие множества которых содержат двумерный растягивающийся аттрактор. В 1979 году В.З. Гринесом и Е.В. Жужомой были получены условия существования гомеоморфизма, сопрягающие ограничения таких диффеоморфизмов на базисные множества, а в 2002 году теми же авторами было показано, что для таких диффеоморфизмов \mathbb{M}^3 гомеоморфно тору \mathbb{T}^3 и анонсирована их топологическая классификация на всём несущем многообразии. А именно, пусть $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество $NW(f)$ содержит двумерный растягивающийся аттрактор Λ . Класс таких диффеоморфизмов обозначим G . Через $W^u(y)$ ($W^s(y)$) будем обозначать неустойчивое (устойчивое) многообразие точки y . Так как для произвольной точки $x \in \Lambda$ $\dim W^s(x) = 1$, то множество $W^s(x) \setminus x$ состоит из двух компонент связности, причем не менее, чем одна из них имеет непустое пересечение с множеством Λ . Точка $x \in \Lambda$ называется граничной, если у неё имеется компонента связности $W^{s\emptyset}(x) \subset W^s(x) \setminus x$, не пересекающаяся с Λ . Множество всех граничных точек аттрактора Λ не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на ассоциированные пары (p, q) точек одинакового периода таким образом, что 2-связка $W^u(p) \cup W^u(q)$ является достижимой изнутри границей некоторой компоненты связности V_{pq} множества $\mathbb{T}^3 \setminus \Lambda$. Пусть $T(f) = NW(f)$ и $T_{pq} = T(f) \cap V_{pq}$. В D 2002 году В.З. Гринесом и Е.В. Жужомой было показано, что существует натуральное число k_{pq} такое, что множество T_{pq} состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq} - 1$ периодических седловых точек $p_1, \dots, p_{k_{pq}-1}$, причём дуга $l_{pq} = W^{s\emptyset}(p) \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s(p_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}} \alpha_i \cup W^{s\emptyset}(q)$

простая. Особенностью дискретных динамических систем на трехмерных многообразиях является возможность нетривиального вложения сепаратрис, а именно, замыкания двумерной сепаратрисы и одной из одномерных сепаратрис седловой неподвижной точки могут быть инвариантными дико вложенной двумерной сферой и дугой соответственно. Следствием этого, в частности, явилось доказанное в 2000 году Х. Бонатти и В.З. Гринесом существование на трехмерном ориентируемом многообразии счетного числа топологически несопряженных диффеоморфизмов Морса-Смейла, неблуждающее множество каждого из которых состоит из одной седловой, одной источниковой и двух стоковых неподвижных точек. Таким образом, для завершения топологической классификации диффеоморфизмов из класса G на всём несущем многообразии не хватало доказательства ручности сепаратрис седел p_i и множеств $W^{s\varnothing}(p)$, $W^{s\varnothing}(q)$, которое было получено в работе [1]. Это позволило доказать, что: 1) если диффеоморфизмы $f, f' \in G$ и существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ такой, что $h(\Lambda) = \Lambda'$ и $f|_{\Lambda} = h^{-1}f'|_{\Lambda'}h$, где Λ' – растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f' , то отображение h может быть продолжено на множество $\mathbb{T}^3 \setminus \Lambda$ [2]; 2) существует простая дуга, соединяющая произвольный диффеоморфизм из класса G и ДА-диффеоморфизм, то есть диффеоморфизм из класса G , у которого нет изолированных седловых периодических точек [3].

Литература

- [1] Grines V. Z., Kruglov E. V., Medvedev T. V., Pochinka O. V. On embedding of arcs and circles in 3-manifolds and its application to dynamics of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional expanding attractors // *Topology and its Applications*. 2020. Vol.271. Pap.106989.
- [2] Grines V. Z., Kruglov E. V., Pochinka O. V. On the Topological Classification of Structurally Stable Diffeomorphisms on 3-Manifolds with a 2-Dimensional Expanding Attractor // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42. No. 14. 3372-3381.
- [3] Гринес В. З., Круглов Е. В., Починка О. В. Сценарий простого перехода от структурно устойчивого 3-диффеоморфизма с двумерным растягивающимся аттрактором к ДА-диффеоморфизму // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*. 2020. т. 308. с. 152–166.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ГЕССА

Кулешов А. С. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
kuleshov@mech.math.msu.su, alexander.kuleshov@math.msu.ru

Скрипкин А. Д. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
antohaskripkin@gmail.com

В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс [1] указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В 1963 году Л. Н. Сретенский в своей работе [2] показал, что частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, будет существовать и в задаче о движении тяжелого гиростата — тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в котором расположен вращающийся однородный маховик. В дальнейшем в работах [3–7] были предложены многочисленные обобщения случая Гесса, имеющие место при движении твердого тела и гиростата с неподвижной точкой в различных силовых полях. Наиболее общие условия, при которых существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, были указаны в работе А. А. Косова [6].

Первые работы, в которых приводилось качественное описание движения тяжелого твердого тела в интегрируемом случае Гесса были опубликованы практически сразу после того, как этот случай был указан. В 1892 году П. А. Некрасов показал [8,9], что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка

с переменными коэффициентами. Аналогичный вывод в отношении задачи о движении гиростата в интегрируемом случае Гесса был сделан в работе Л. Н. Сретенского [2]. В данной работе представлен вывод соответствующего уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича [10] исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного уравнения второго порядка. Получены условия на параметры задачи, при выполнении которых уравнения движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса интегрируются в квадратурах.

Литература

- [1] Hess W. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Mathematische Annalen*. 1890. Vol. 37. Issue 2. P. 153–181.
- [2] Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // *Доклады АН СССР*. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Случай Гесса в динамике твердого тела // *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 256–265.
- [4] Буров А. А., Карапетян А. В. О движении твердого тела в потоке частиц // *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77–81.
- [5] Козлов В. В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1985. № 6. С. 28–33.
- [6] Косов А. А. Об аналогах случая Гесса для гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил // *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 839–856.
- [7] Самсонов В. А. О вращении тела в магнитном поле // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1984. № 4. С. 32–34.
- [8] Некрасов П. А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // *Математический сборник*. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 508–517.
- [9] Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // *Математический сборник*. 1896. Т. 18. Вып. 2. С. 161–274.
- [10] Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // *Journal of Symbolic Computation*. 1986. Vol. 2. P. 3–43.

ДВУМЕРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА

Куликов А. Н. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
anat_kulikov@mail.ru

Куликов Д. А. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
kulikov_d_a@mail.ru

Рассматривается краевая задача (КЗ)

$$u_t + u_{xxxx} + b_1 u_{xx} + b_2 (u^2)_{xx} + b_3 (u^3)_{xx} + a (u^2)_x = 0, \quad b_1, b_2, b_3, a \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Уравнение (1), если $a \neq 0$, это конвективное уравнение Кана-Хиллиарда (УКХ) [1,2]. При $a = 0$ имеем классический вариант УКХ. УКХ и его модификации имеют приложения в химической кинетике, гидродинамике [1-3].

КЗ (1), (2) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия $u(t, x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $M(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx$. Для решений КЗ (1), (2) получаем, что $M(u) = \alpha$, где α – произвольная постоянная.

Выполним замену

$$u(t, x) = \alpha + v(t, x), \quad \alpha = M(u(t, x)). \quad (3)$$

Для $v(t, x)$ получаем вспомогательную КЗ

$$v_t = A(\alpha)v + F(v, \alpha), \quad (4)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M(v) = 0, \quad (5)$$

где $A(\alpha)v = -v_{xxxx} - b(\alpha)v_{xx} - a(\alpha)v_x$, $b(\alpha) = -(b_1 + 2b_2\alpha + 3b_3\alpha^2)$, $a(\alpha) = 2\alpha a$, $F(v, \alpha) = -b_2(\alpha)(v^2)_{xx} - a(v^2)_x - b_3(v^3)_{xx}$, $b_2(\alpha) = b_2 + 3b_3\alpha$.

Пусть

$$b(\alpha) = m^2(1 + \nu\mu), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \nu = \pm 1 \text{ или } 0. \quad (6)$$

Далее $\alpha = \alpha(m, \mu)$ выбираем как один из корней уравнения (6).

Теорема 1. Пусть $\alpha = \alpha(m, \mu)$. Существует $\mu_0 = \mu_0(m)$ такая, что при всех $\mu \in (0, \mu_0)$ у КЗ (4), (5) существует предельный цикл $C(m, \mu)$, порождаемый семейством t -периодических решений $v(t, x, \sqrt{\mu}, t, \varphi_m)$, $\varphi_m \in \mathbb{R}$, для которых получены асимптотические формулы. При $m \neq 1$ эти циклы седловые, а при $m = 1$ ответ об их устойчивости зависит от знака ляпуновской величины.

Из теоремы 1 и замены (3) вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. При всех $\mu \in (0, \mu_0)$ циклу $C(m, \mu)$ соответствует двумерное инвариантное многообразие $V_2(m, \mu)$ КЗ (1), (2), сформированное t периодическими решениями $u(t, x, \mu, t) = \alpha(m, \mu) + v(t, x, \sqrt{\mu}, t, \varphi_m)$. При $m \neq 1$ многообразие $V_2(m, \mu)$ седловое. При $m = 1$ оно седловое, если седловым является цикл $C(1, \mu)$. Наконец, $V_2(1, \mu)$ локальный аттрактор, если аналогичное утверждение справедливо для $C(1, \mu)$.

Добавим, что можно указать варианты КЗ (1), (2), у которой существует любое число инвариантных многообразий $V_2(m, \mu)$, включая вариант, когда имеется их счетный набор, а также когда они отсутствуют.

Некоторые из этих результатов были получены в работах [4,5].

Литература

- [1] Cahn J. W., Hilliard J. E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1959. V. 28. P. 258-267.
- [2] Podolny A., Zaks M. A., Rubinstein B. Y., Golovin A. A., Nepomnyashchy A. A. Dynamics of domain walls governed by the convective Cahn-Hilliard equation // Physica D. 2005. V. 201. № 3. P. 291-305.
- [3] Frolovskaya O. A., Admaev O. V., Pukhnachev V. V. Special case of the Cahn-Hilliard equation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2013. V. 10. P. 324-334.
- [4] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана-Хилларда, Курамото-Сивашинского и их обобщениях // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 4. С. 670-683.
- [5] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local Bifurcations of Invariant Manifolds of the Cahn – Hilliard – Oono Equation // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. P. 1003-1017.

ДИСКРЕТНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ЦЕПИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ
ТИПА ЦЕПОЧКИ ТОДА⁶²

Кутузова А. А. (Россия, Ярославль)
Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
postcrossing2002@mail.ru

Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)
Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
rita.preo@gmail.com

Рассмотрим систему нелинейных уравнений, описывающих динамику взаимосвязанных нелинейных осцилляторов. В общем случае система имеет вид [1]

$$M\ddot{r}_j = f(r_{j+1}) + f(r_{j-1}) - 2f(r_j). \quad (1)$$

Впервые такую систему рассматривал Моркидзу Тода [2,3] при изучении динамики поведения элементов кристаллической решетки. В своей работе он изучал систему (1) для $f(r) = -a(1 - e^{-br})$. В настоящей работе мы рассмотрим кусочно-постоянную функцию $f(r)$, определенную следующей формулой:

$$f(r) = \begin{cases} \alpha, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -\beta, & r < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где α и β неотрицательные параметры.

Для системы из m одинаковых осцилляторов, связанных в кольцо, построим гладкое периодическое решение в виде дискретной бегущей волны. Техника построения решений такого типа рассмотрена в работах [4,5]. Это означает, что все компоненты представлены одной и той же периодической функцией $r(t)$ со сдвигом, кратным некоторому параметру Δ (который предстоит найти):

$$r_j = r(t + j\Delta), \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (3)$$

Для поиска описанных решений в настоящей работе осуществляется переход от нелинейной системы к уравнению с запаздыванием относительно неизвестной функции $r(t)$

$$\ddot{r}(t) = f(r(t - \Delta)) + f(r(t - m\Delta)) - 2f(r(t)). \quad (4)$$

Для полученного уравнения удается построить периодическое решение с периодом T и параметром Δ , удовлетворяющими уравнению $nT(\Delta) = (m+1)\Delta$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что обеспечивает существование соответствующего периодического решения системы (1). Исследованы его свойства устойчивости.

Литература

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Мир, 1977 С. 584–588.
- [2] Toda M. Waves in Nonlinear Lattice // Supplement of the Progress of Theoretical Physics 1970. №45. С. 174–200.
- [3] Toda M. Studies of a non-linear lattice // Physics Reports 1975 Vol.18, iss. 1. С. 1–123.
- [4] Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 61, № 1. С. 71–89. DOI: 10.31857/S004446692201.
- [5] Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Periodic traveling – wave – type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations // Theor. Math. Phys. 2013 175 С. 499–517.

⁶²Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

КЛАССИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
И СИСТЕМЫ ЖОРДАНА-ПОХГАММЕРА

Лексин В. П. (Россия, Коломна)

Государственный социально-гуманитарный университет

lexin_vp@mail.ru

Классические гипергеометрические функции Гаусса $F(a, b, c, z)$, Аппеля $F_1(a_1, a_2, b, c, z_1, z_2)$ и Лауричелла $F_D^{(n)}(a_1, \dots, a_n, b, c, z_1, \dots, z_n)$ [1, 2, 3] определяются в окрестностях начала координат соответствующих комплексных пространств \mathbb{C} , \mathbb{C}^2 , \mathbb{C}^n однотипными сходящимися степенными рядами, с параметрами входящими в их коэффициенты

$$F(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k, \quad (1)$$

где $(a)_k$, $(b)_k$, $(c)_k$ есть символы Похгаммера для чисел a, b, c , то есть произведения вида $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$.

$$F_1(a_1, a_2, b, c, z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+} \frac{(b)_{k_1+k_2} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2} k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad (2)$$

$$F_D^{(n)}(a_1, \dots, a_n, b, c, z_1, \dots, z_n) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (a_1)_{k_1} \cdots (a_n)_{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \cdots k_n!} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}. \quad (3)$$

Здесь $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n$ – сумма целых неотрицательных показателей степеней переменных. Очевидно, что гипергеометрическая функция Лауричелла $F_D^{(n)}$ является непосредственным обобщением функций Гаусса $F(a, b, c, z)$ и Аппеля $F_1(a_1, a_2, b, c, z_1, z_2)$ на случай произвольного числа переменных n .

Аналитические продолжения функций Гаусса, Аппеля и Лауричелла определяются интегралами эйлера типа

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (4)$$

$$F_1(a_1, a_2, b, c, z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz_1)^{-a_1} (1-tz_2)^{-a_2} dt. \quad (5)$$

$$F_D^{(n)}(a_1, \dots, a_n, b, c, z_1, \dots, z_n) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \prod_{i=1}^n (1-tz_i)^{-a_i} dt. \quad (6)$$

Функции Гаусса $F(a, b, c, z)$, Аппеля $F_1(a_1, a_2, b, c, z_1, z_2)$ и Лауричелла $F_D^{(n)}(a_1, \dots, a_n, b, c, z_1, \dots, z_n)$ являются представителями класса гипергеометрических функций, имеющих интегральное представление следующего вида

$$I(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = \text{const} \int_{\gamma} \prod_{j=1}^n (t - z_j)^{\beta_j} dt, \quad (7)$$

то есть представленные обычными (некратными) криволинейными интегралами по переменной t от произведения степеней линейных функций [1, 2, 3]. С другой стороны системы Жордана-Похгаммера

$$dy_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \quad (8)$$

имеют решения, компоненты которых $y_i(z)$ есть интегралы типа (7), а сами системы Жордана-Похгаммера присутствуют во многих моделях математической физики [4-5], в которых имеются параметры. Мы выражаем компоненты решений некоторых моделей математической физики через стандартные гипергеометрические функции, описанные выше, выражая их параметры через параметры моделей.

Литература

- [1] Appell P., Kampé de Fériet M. J. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Gauthier-Villars, 1926.
- [2] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1973.
- [3] Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1893. V. 7.: 111–158.
- [4] Feigin M. V., Veselov A. P. \vee -systems, Holonomy Lie Algebras and Holomorphic Vector Fields // International Mathematics Research Notices, 2017, Vol. 2018, No. 7, P.2070–2098.
- [5] Varchenko A. N. Special functions, KZ type equations, and representations theory // CBMS regional conference series in Mathematics. N. 98. AMS/NSF. 2003. — 1676 с.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Лукоянов Н. Ю. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН

nyul@imm.uran.ru

Речь пойдет об управлении движением динамических систем, описываемых при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, в условиях неконтролируемых помех и/или противодействия. Цель управления – оптимизировать заранее заданный показатель, оценивающий качество движения на конечном временном промежутке. В рамках теоретико-игрового подхода ставится вопрос о нахождении оптимального гарантированного результата и построении стратегии управления, обеспечивающей этот результат. Обсуждаются структура и свойства оптимальных стратегий в зависимости от свойств оптимизируемого показателя качества, наличия ресурсных ограничений, запаздывания в управлении. Указываются методы приближенного решения задачи в линейно-выпуклом случае. Приводятся иллюстрирующие примеры.

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА ПРИМЕНЕНИЕМ ДВОЙСТВЕННОГО К НЕМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ⁶³

Ляхов Л. Н. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

ЕГУ им. И.А. Бунина

levnlya@mail.ru

Калитвин В. А. (Россия, Липецк)

Российская академия народного хозяйства и государственной службы

при Президенте Российской Федерации

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

kalitvin@gmail.com

Лапшина М. Г. (Россия, Липецк)

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

marina.lapsh@ya.ru

⁶³Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-00387).

Многочисленные задачи, порожденные сферической симметрией, приводят к преобразованию Радона специального вида, введенного в [1]:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) x_1^\gamma dx, \gamma > 0,$$

где $\langle x, \theta \rangle$ — скалярное произведение n -мерных векторов, θ — единичный вектор нормали к плоскости $\langle x, \theta \rangle = p$, а символ $\mathcal{P}_{x_1}^\gamma$ ($\gamma > 0$) обозначает действие оператора Пуассона по переменной x_1 (см. [1], [2]). Это преобразование называется *преобразованием Радона—Киприянова*.

Вращение $f(x_1, x') \rightarrow f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x') = \tilde{f}(z, x')$ позволяет записать преобразование Радона—Киприянова в виде

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z),$$

где введены обозначения $z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z: z_2 > 0\}$, $\{p=\langle z, \tilde{\Theta} \rangle\}^+ = \Theta_\perp^+$ — полуплоскость интегрирования, определенная неравенством ($z_2 > 0$). При фиксированном векторе Θ примем обозначение $K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p)$.

Следуя [2], запишем преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости Θ_\perp^+ в \mathbb{R}_{n+1}^+ :

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z).$$

Двойственное преобразование в R_1 . Через $S_{ev} = S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства Л.Шварца пробных функций, четных по Киприянову (см. [3], с.21) по переменной x_1 . Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Введем линейную форму в \mathbb{R}_1

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp.$$

Положив $y = p\Theta + z \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{y=(z_1, z_2, x') : z_2 > 0\}$, получим

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma, \Theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx'$$

с двойственным оператором

$$K_{\gamma, \Theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^\gamma (g(\theta, \langle \theta, x \rangle)).$$

$\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma, \Theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx$ — оператор, полученный дополнительным интегрированием по сфере функции $K_{\gamma, \Theta}^\# g(x)$.

Теорема 1. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Тогда

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{(1-n)} I^{-\alpha} K^\# I^{\alpha-n+1} g, g = Rf,$$

где линейный оператор I^α определяется равенством $(I^\alpha \tilde{f})(\theta) = |\theta|^{-\alpha} f(\theta)$.

Литература

- [1] Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Математические заметки. 2023. Т. 113, выпуск 4. С. 527–538.
- [2] Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН, 1951. Т. 6. № 2. С. 102–143.
- [3] Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона // Докл. АН СССР. 1998. 360. № 2. С. 157–160.
- [4] Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова—Радона // Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С. 153–163.
- [5] Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. С. 279.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ D_B^α -ОПЕРАТОРОВ БЕССЕЛЯ
В ОБРАЗАХ \mathbb{J} -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕССЕЛЯ⁶⁴

Ляхов Л. Н. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского

levnlya@mail.ru

Рощупкин С. А. (Россия, Елец)

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

roshupkinsa@mail.ru

$D_{B_{-\gamma}}^\alpha$ -оператором Бесселя называется следующий оператор

$$D_{B_{-\gamma}}^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} B_{-\gamma}^k, & \text{если } \alpha = 2k \\ \frac{d}{dx} B_{-\gamma}^k, & \text{если } \alpha = 2k + 1 \end{array} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}.$$

Пусть $\gamma \in (0, 1)$ и $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Рассмотрим уравнение $B_{-\gamma}u + u = 0$. Как показано в [1], решением этого уравнения являются функции

$$u_1 = \mathbb{J}_{-\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(1-\mu)}{k! \Gamma(k+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = \Gamma(1-\mu) 2^{-\mu} t^\mu J_{-\mu}(t) = t^{2\mu} j_{-\mu}(t),$$

$$u_2 = \mathbb{J}_\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(1+\mu)}{k! \Gamma(k+1+\mu)} \frac{t^{2(k+\mu)}}{2^{2k}} = \Gamma(1+\mu) 2^\mu t^\mu J_\mu(t) = t^{2\mu} j_\mu(t),$$

где J_μ и $J_{-\mu}$ — функции Бесселя первого рода, а j_μ и $j_{-\mu}$ — j -функции Бесселя [2].

Имеет место следующая формула [3]: $(\mathbb{J}_\mu(t))' = 2\mu t \mathbb{J}_{\mu-1}(t)$.

Четное \mathbb{J} -преобразование Бесселя на основе \mathbb{J} -функций Бесселя введено в [1]. По определению полагаем

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)} = \widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(\xi y) f(y) y^{-\gamma} dy,$$

$$\left(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}\right)^{-1} = \frac{1}{(\Gamma(1+\mu))^2 2^{2\mu}} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(\xi x) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Обратимость этих преобразований вытекает из представления функций интегралом Фурье-Ганкеля [1].

Нечетное \mathbb{J} -преобразование Бесселя основано на функции Бесселя следующего вида $\frac{1}{\xi} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x = 2\mu(\xi x) \cdot \mathbb{J}_{\mu-1}(\xi x) = 2\mu \xi x \mathbb{J}_{\mu-1}(\xi x)$ имеет вид

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f](\xi) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\xi} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x x^{-\gamma} dx.$$

Лемма 1. Пусть f четная функция из пространства основных функций Шварца. Тогда

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f'](\xi) = \xi \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[f](\xi) = \xi \widehat{f}(\xi)$$

Из леммы 1 видно, что преобразование $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром

$$\frac{1}{2} \Lambda(x\xi) = \frac{1}{2} \mathbb{J}_\mu(x\xi) - \mu x\xi \mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi).$$

⁶⁴Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00387).

При этом, полагая $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f_{ev}(x) + f_{od}(x)$, получим

$$\mathbb{L}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Lambda(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное \mathbb{J} -преобразование Бесселя, а второе нечетное \mathbb{J} -преобразование Бесселя.

Теорема 1. (о символе $D_{B_{-\gamma}}^\alpha$ -оператора). Для $f \in S(\mathbb{R}_n)$ имеет место формула

$$\mathbb{L}[D_{B_{-\gamma}}^\alpha f](\xi) = \begin{cases} \xi^{2k} \hat{f}(\xi) & \text{если } \alpha=2k \text{ четное} \\ \xi^{2k+1} \hat{f}(\xi) & \text{если } \alpha=2k+1 \text{ нечетное} \end{cases} \quad \left| \quad k = 0, 1, 2, \dots \right.$$

Литература

- [1] Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1654–1665.
- [2] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6. № 2 (42). С. 102–143.
- [3] Булатов Ю. Н. Преобразование Ганкеля – Катрахова и сингулярные K -псевдодифференциальные операторы // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31. № 1. С. 21–34.

РАЗМЕРНОСТИ САМОПОДОБИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР, ПОРОЖДЕННЫХ СКРЫТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Ляхов Л. Н. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
levnlya@mail.ru

Санина Е. Л. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
sanina08@mail.ru

Через $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, координаты которого $\gamma_i > -1$ ($i = \overline{1, n}$), при этом число $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ (обычно называемое длиной мультииндекса) может быть отрицательным, но всегда $n + |\gamma| > 0$.

Размерность Хаусдорфа, порожденная скрытой сферической симметрией.

Классическое определение размерности Хаусдорфа d_H геометрического объекта Ω существенно зависит от выбранной меры покрытия. В качестве покрытия удобно использовать сферы малого радиуса δ , а в качестве такой меры покрытия — меру Лебега–Киприянова $d\mu_n^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx$, $\gamma_i > -1$ (введена в [1]).

Размерность Хаусдорфа-Безиковича d_H представляет собой «критическое число d » такое, что мера M_d множества Ω изменяет значение с нуля на бесконечность:

$$M_d = \sum \eta(d) \delta^d = \eta(d) N(\delta) \delta^d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } d > d_H \\ \infty & \text{при } d < d_H \end{cases}, \text{ где } \eta(d) - \text{геометрический коэффициент.}$$

В этом определении существенно, что при определении размерности необходимо покрывать множество элементами всевозможных форм, размеры которых не превышают некоторое малое значение, и определить инфимум выражения $\eta(d) \sum \delta^d$. Предположим, что покрытие области Ω в \mathbb{R}_n осуществляется сферами (отрезками для $n=1$) радиуса ε , а минимальное покрытие Ω состоит из $N(\varepsilon)$ слагаемых. Предположим также наличие скрытой сферической симметрии с параметрами $\gamma(\varepsilon) = (\gamma_1(\varepsilon), \dots, \gamma_n(\varepsilon))$, $-1 < \gamma_i(\varepsilon) \leq 0$. В каждом шаре покрытия введем локальные координаты с началом в центре шара покрытия. Весовая мера каждой из сфер покрытия определяется по формуле $K_{\gamma, \varepsilon} = \int_{|x| < \varepsilon} \prod_{i=1}^n |x_i|^{\gamma_i(\varepsilon)} dx =$

$|S_1(n)|_\gamma \frac{\varepsilon^d}{d}$, где $d = n + |\gamma| > 0$. Исходя из определения размерности Хаусдорфа–Безиковича

предположим, что при $\gamma_i > -1$ существует такое конечное положительное число C , что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |S_1(n)|_\gamma \frac{\varepsilon^d}{d} N(\varepsilon) = C$. Следовательно $d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C - \ln \frac{|S_1(n)|_\gamma - \ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}}{\ln \varepsilon}$. Учитывая, что константа C предполагается конечной, можем считать $C = 1$. Тогда получим равенство $d_H = n + |\gamma| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$. Здесь выражение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = d_f$ — хорошо известная клеточная размерность фрактальной структуры, а d_H размерность Хаусдорфа—Безиковича. Отсюда получаем факт присутствия *скрытой сферической симметрии* во фрактальных структурах, для которых клеточная и хаусдорфова размерности совпадают (аффинно-самоподобные фракталы). Число $|\gamma|$ ($\gamma_i > -1$) назовем *коэффициентом скрытой сферической симметрии* евклидовой области интегрирования Ω .

Теорема 1. *Если совпадают хаусдорфова и фрактальная размерности $d_H = d_f$ области $\Omega \in \mathbb{R}_n$, то существует коэффициент $|\gamma|$ скрытой сферической симметрии области Ω , определяемый по формуле $|\gamma| = d_f - n$.*

Утверждение 1. *Коэффициент скрытой сферической симметрии γ самоподобных структур, удовлетворяющих условию клеточной размерности и отвечающих масштабу $\varepsilon(m) = \begin{cases} 0, & m = 0 \\ 1/k^m, & m \geq 1 \end{cases}$, где k и m соответствующие натуральные числа, вычисляется*

$$\text{из уравнения } d_{K_\gamma} = n + |\gamma(m)| = -\frac{\ln \frac{|S_1^+(n)|_\gamma(m)}{n + |\gamma(m)|}}{\ln \varepsilon(m)} + d_f, \quad \gamma(0) = 0.$$

Величину $d_{K_\gamma} = n + |\gamma(m)|$ будем называть *размерностью Киприянова самоподобия фрактала, отвечающего масштабу $\varepsilon(m)$* .

В докладе будут приведены размерности самоподобий и коэффициенты скрытой сферической симметрии для классических фракталов, для которых отношение $\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \text{const} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = d_f$, т.е. не зависит от ε (множества Кантора, ковер и салфетка Серпинского, кривая Коха, кривая Гивена и др.).

Литература

- [1] Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Математические заметки. 2023. Т. 113, № 4. С. 517-528.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА⁶⁵

Мажгихова М. Г. (Россия, Нальчик)

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова

mazhgihova.madina@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^\alpha u(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

где $\alpha \in (n - 1, n]$, D_{0t}^α — оператор Римана—Лиувилля [1]

$$D_{st}^\alpha g(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{g(\xi) d\xi}{|t-\xi|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ g(t), & \alpha = 0; \\ \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} g(t), & n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2)$$

λ — произвольная константа.

В работе строится регулярное решение обобщенной краевой задачи типа Штурма для уравнение (1) и доказывается теорема существования и единственности решения этой задачи.

⁶⁵Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (FEGS-2020-0001).

Регулярным решением уравнения (1) назовём функцию $u(t)$ такую, что $u(t) \in L(0, 1)$, $D_{0t}^{\alpha-n}u(t) \in C^n(0, 1)$ и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $0 < t < 1$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-k} u(t) = c_i, & i = \overline{1, p}, \\ \sum_{k=1}^n b_{jk} \lim_{t \rightarrow 1} D_{0t}^{\alpha-k} u(t) = d_j, & j = \overline{1, q}, \end{cases}$$

где $p, q \geq 1$ и $p + q = n$.

Литература

- [1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

О ПОСТРОЕНИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМОЙ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ

Максимов Б. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

badmamaksimov1@gmail.com

Для решения вопроса об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы, часто бывает достаточно, ограничиться анализом укороченной системы, сохраняя в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности положения равновесия лишь члены до четвертой степени включительно. Вместе с тем, для некоторых задач классической и небесной механики представляют интерес также и особые критические случаи, когда для получения строгих выводов об устойчивости необходимо учитывать в разложении гамильтониана уравнений возмущённого движения члены выше четвертой степени. Такие особые случаи требуют отдельного исследования.

В данной работе рассматривается гамильтонова система с одной степенью свободы, периодически зависящая от времени. Предполагается, что разложение функции Гамильтона этой системы в ряд в окрестности положения равновесия не содержит членов нечётных степеней и имеет место, указанный выше, особый критический случай, когда для решения вопроса об устойчивости положения равновесия необходимо проводить анализ с учётом членов до шестой степени включительно. Для резонансов третьего, четвёртого и шестого порядка описан алгоритм построения симплектического отображения, генерируемого данной гамильтоновой системой. Выполнена нормализация данного отображения и получены достаточные условия устойчивости неподвижной точки.

В качестве приложения рассмотрена задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твёрдого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого относятся как 4:1:4. Ранее эта задача исследовалась в [1-3]. В работе [1] на основе линейного анализа устойчивости было показано, что маятниковые вращения орбитально неустойчивы при всех значениях параметров. Для маятниковых колебаний, устойчивых в линейном приближении, в [2,3] был проведен нелинейный анализ и получены строгие выводы об орбитальной устойчивости почти для всех значений параметров задачи. Неисследованными остались лишь особые резонансные случаи. На основании упомянутых выше результатов данной работы был выполнен анализ орбитальной устойчивости в этих особых резонансных случаях. Данное исследование позволило получить полное и строго решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых движений при резонансах третьего, четвёртого и шестого порядков.

Литература

- [1] Bardin B. S., Maksimov B. A., Zarodov V. K. Analysis of the orbital stability of periodic pendulum motions of a heavy rigid body with a fixed point under the Goryachev–Chaplygin condition // MATEC Web of Conferences 362 , 01003, 2022.

- [2] Bardin B. S., Maksimov B. A. The orbital stability analysis of pendulum oscillations of a heavy rigid body with a fixed point under the Goriachev-Chaplygin condition // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 275. №1. P. 66–77.
- [3] Бардин Б. С., Максимов Б. А. Об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в отношении 1:4:1 // Прикладная математика и механика 2023. Т. 87. №5. С. 784–800.

**ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПО ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ**

Максимова И. С. (Россия, Москва)

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
irismax@yandex.ru

Осипенко К. Ю. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
kosipenko@yahoo.com

Рассматривается задача оптимального восстановления решения системы линейных дифференциальных однородных уравнений по исходной информации, заданной со случайной ошибкой. Рассмотрены различные варианты задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < t < \tau$. При этом мы не ограничиваемся лишь нормальным распределением случайной величины, а будем рассматривать произвольные распределения случайного вектора с фиксированным математическим ожиданием и фиксированной оценкой для дисперсии. Как и в задачах с детерминированной ошибкой здесь были обнаружены такие эффекты, как линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерений информацию.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ и

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$$

— собственные числа матрицы A . Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям μ_j , $j = 1, \dots, n$. Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0 . Требуется восстановить решение в момент $\tau > 0$.

Положим для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \nu_j x_j^2 \leq 1. \right\}, \quad Tx = (e^{\mu_1 \tau} x_1, \dots, e^{\mu_n \tau} x_n), \quad Ix = (x_1, \dots, x_n).$$

Зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{ y = (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix, \mathbb{D}(y_j) \leq \delta^2, j = 1, \dots, n \}.$$

Обозначим через l_2^n пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой $\|x\|_{l_2^n} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}$.

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства l_2^n , принимаемый за приближение к значению Tx . Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow l_2^n} \left(\sup_{x \in W, y \in Y_\delta(x)} \mathbb{M} \left(\|Tx - \varphi(y)\|_{l_2^n}^2 \right) \right)^{1/2}$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым оптимальным.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{\mu_j \tau}}, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Теорема: Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \leq s \leq n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^s e^{2\mu_k \tau} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^s \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^s \nu_k},$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^s \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) e^{\mu_k \tau} y_k e_k$$

является оптимальным.

Литература

- [1] Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления: учебное пособие для вузов, Санкт - Петербург: Лань, 2022.
- [2] Кривошеев К. Ю. Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой // Матем. сб., 2021. Т. 212. №11. С.89–108.

КРИТЕРИЙ ХАОТИЧНОСТИ ЛОРЕНЦЕВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
В ТЕРМИНАХ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Малкин М. И. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
malkin@unn.ru

Решетилов Р. Н. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
reshetilovr@gmail.com

Отображения отрезка $[a; b]$ с двумя промежутками монотонного роста (лоренцевские) моделируют отображения Пуанкаре систем с аттрактором Лоренца [1] и унимодальные отображения [2]. Отождествив концевые точки отрезка, мы можем рассмотреть лоренцевское отображение как отображение окружности, для которого определено множество вращения – точка или связный замкнутый интервал [3]. Невырожденность интервала вращения является сильной хаотической характеристикой системы. К примеру, в [4] доказывается, что из невырожденности интервала вращения лоренцевского отображения следует положительность топологической энтропии.

Лоренцевские отображения могут быть описаны в терминах символической динамики. Разбиение отрезка на две части точкой разрыва позволяет сопоставить каждой траектории последовательность над двухсимвольным алфавитом $\{-; +\}$, называемую нидинг-последовательностью. В [5] показано, что две нидинг-последовательности, сопоставленные крайним точкам отрезка (нидинг-инварианты $K_0(f)$ и $K_1(f)$), являются полным символическим описанием лоренцевского отображения (в случае плотности прообразов точек разрыва – полным инвариантом топологической сопряжённости). В [6] установлены ограничения на f -допустимые нидинг-последовательности лоренцевского отображения f , а в [4] описана связь допустимых последовательностей и интервала вращения.

Доклад посвящён отображениям, нидинг-инварианты которых периодичны. Периодические последовательности рассматриваются как конечные слова (точные периодические части) над двухбуквенным алфавитом $\{-; +\}$. На множестве конечных слов вводится лексикографический порядок, а также операции инверсии I , инверсии первой буквы I_1 , циклической перестановки σ . Наряду с классическим отношением сопряжённости (два слова A и B считаются сопряжёнными, если при некотором n : $\sigma^n(A) = B$) вводится отношение полусопряжённости – сопряжённости с точностью до инверсии. Доказывается, что в качестве нидинг-инвариантов могут выступать только те последовательности, периодическая часть которых является словом Линдона – наименьшей из циклических перестановок примитивного слова. Далее на множестве слов Линдона выделяются слова K , удовлетворяющие при некотором n неравенству:

$$\sigma^n(K) > I_1(K), \quad (1)$$

Такие слова допускают разложение $K = E_{V,W} = -V + W$, где $|-V|$ – наименьшее n , при котором неравенство (1) выполнено. Допустимость нидинг-последовательностей вида $(E_{V,W})$ при выполнении некоторых сопутствующих условий влечёт нетривиальность интервала вращения. В частности, справедлива

Теорема 1. *Лоренцевское отображение f с периодическими нидинг-инвариантами имеет невырожденный интервал вращения тогда и только тогда, когда в ней f -допустима периодическая последовательность K , периодическая часть которой полусопряжена с $E_{V,W}$, и справедливо неравенство:*

$$w_p(v+1) \neq (v_p+1)(w+1), \quad (2)$$

где $v = |V|$; $w = |W|$, а v_p и w_p – количество символов "+" в соответствующих словах.

Определим для нидинг-последовательности K величину $\rho(K)$, равную верхней асимптотической плотности номеров, соответствующих символу $+$ в последовательности. Эта величина равна числу вращения траектории, сопоставленной нидинг-последовательности K [2][4].

Следующий результат, являющийся следствием теоремы 1, позволяет обосновать простой алгоритм вычисления точных границ интервала вращения:

Теорема 2. *Если нидинг-инварианты лоренцевского отображения $K_0(f) \neq (E_{V,W})$ и $K_1(f) \neq (I(E_{V,W}))$, то его интервал вращения в точности $[\rho(K_0(f)); \rho(K_1(f))]$. Если же $K_0 = (E_{V,W})$, то крайняя левая точка интервала вращения равна $\rho(V+)$; аналогично если $K_0 = (I(E_{V,W}))$, то крайняя правая точка интервала вращения $1 - \rho(V+)$.*

Литература

- [1] Афраимович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. М., Издательство Московского университета, 1982, т. 44, С. 150-212.
- [2] Li. M. C, Malkin M. I. Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2003. V. 13. P. 3353-3371.
- [3] Keener J. P. Chaotic behavior in piecewise continuous difference equation // Transactions of the American Mathematical Society. 1980. V. 261. P. 589-604.
- [4] Malkin M. I. Rotation intervals and the dynamics of Lorenz type mappings // Selecta Mathematica Sovietica. 1991. Vol. 10. No 3. P. 265-275.
- [5] Малкин М. И. О топологической сопряженности разрывных отображений отрезка // Украинский математический журнал. 1980. т. 32. № 5. С. 610-616.
- [6] Rand D. The topological classifications of Lorenz attractors // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1978. Vol. 83. P. 451-460.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Мамаев И. С. (Россия, Ижевск)

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
matmaev@rcd.ru

Бизяев И. А. (Россия, Ижевск)

Удмуртский государственный университет
bizyaevtheory@gmail.com

В докладе рассмотрены вопросы существования тензорных инвариантов (законов сохранения) и их связь с поведением системы на примере неголономных механических систем. Значительное внимание уделено возможности представления уравнений движения в конформно-гамильтоновой форме.

Наряду с первыми интегралами мы рассматриваем более сложные законы сохранения, такие как поля симметрий, инвариантная мера, пуассонова структура. Исследование системы при определенных наборах тензорных инвариантов позволяет получить достаточно подробную качественную информацию о движении [1], [2]. Кроме того, эти инварианты используются при интегрировании уравнений неголономной механики.

Возможны различные способы интегрирования, использующие указанные тензорные инварианты. Мы, в частности, сосредоточимся на вопросе о взаимосвязи между интегрируемостью и приводимостью уравнений к гамильтоновой форме с помощью замен координат и, возможно, времени. Этот метод был впервые предложен Чаплыгиным и был назван им методом приводящего множителя [3]. Мы существенно расширяем класс систем, интегрируемых этим методом и называем эти системы обобщенными системами Чаплыгина. Оказывается, что к таким обобщенным системам относится ряд классических и сравнительно новых систем неголономной механики (включая задачу о качении резинового тела [4]).

Кроме упомянутых выше законов сохранения, при наличии некоторых дискретных симметрий, обусловленных геометрией поверхности и распределением масс в катящемся теле, уравнения движения могут допускать различные наборы инволюций, которые также оказывают большое влияние на динамику. Отметим, что рассматриваемые неголономные системы дают наиболее естественные примеры различных типов обратимых потоков, тогда как большинство исследований по обратимым системам рассматривает систематически только формальные дискретные отображения [5].

Литература

- [1] Borisov A. V., Mamaev I. S. The Rolling of Rigid Body on a Plane and Sphere. Hierarchy of Dynamics // Regul. Chaotic Dyn. 2002. Vol. 7. No. 1. P. 177–200.
- [2] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Rolling of a Ball on a Surface. New Integrals and Hierarchy of Dynamics // Regul. Chaotic Dyn. 2002. Vol. 7. No. 2. P. 201–220.
- [3] Чаплыгин С. А. К теории движения не голономных систем. Теорема о приводящем множителе // Мат. сб. 1911. Т. 28. №. 1; Полн. собр. соч. М.-Л. 1948. Т. 1, С. 15–25.
English transl.: Chaplygin S. A. On the Theory of Motion of Nonholonomic Systems. The Reducing-Multiplier Theorem // Regul. Chaotic Dyn. 2008. Vol. 13. No. 4. P. 369–376.
- [4] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Hierarchy of Dynamics of a Rigid Body Rolling without Slipping and Spinning on a Plane and a Sphere // Regul. Chaotic Dyn. 2013. Vol. 18. No. 3. P. 277–328.
- [5] Roberts J. A. G., Quispel G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems // Phys. Rep. 1992. Vol. 216. Nos. 2–3. P. 63–177.

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ РЕЗОНАНСА⁶⁶

Маркеев А. П. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

anat-markeev@mail.ru

Получены явные формулы для частот нелинейных колебаний автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы с точностью до второй степени относительно начальных отклонений системы от её устойчивого положения равновесия.

В случае консервативной системы, представляющей собой материальную точку, движущуюся по неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести, изучен характер нелинейных колебаний в предположении об отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно. Дано приближенное аналитическое представление колмогоровского множества условно-периодических колебаний и указана оценка меры этого множества.

В качестве конкретного примера нерезонансной задачи исследованы нелинейные колебания двойного маятника в окрестности его устойчивого равновесия на вертикали. Показано, что для большинства начальных условий движение маятника является условно-периодическим, а относительная мера множества, дополнительного к этому большинству, экспоненциально мала.

Проведенный анализ опирается на современные методы исследования нелинейных динамических систем [1],[2]. При проведении необходимых вычислений используются преобразование Биркгофа [3] и его модификации [4],[5], удобные для применения методов компьютерной алгебры.

Литература

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- [2] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
- [3] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
- [4] Джакалья Г.Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
- [5] Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

⁶⁶Работа выполнена в рамках Государственного задания (номер госрегистрации 124012500443-0) в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Масаева О. Х. (Россия, Нальчик)

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

olesya.masaeva@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + D_{0y}^\beta u(x, y) = f(x, y), \quad 1 < \beta < 2, \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y) : |x| < \infty, 0 < y < T\}$, где $D_{0y}^\beta u(x, y)$ – дробная производная порядка β Римана-Лиувилля [1], [2].

Уравнение (1) при $\beta = 2$, как следует из определения операторов дробного дифференцирования Римана-Лиувилля, обращается в уравнение Пуассона.

Уравнения в частных производных дробного порядка, в частности, уравнения вида (1), имеют эффективные приложения при математическом моделировании социально-экономических систем [3].

Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа в полуплоскости и в четверти плоскости рассмотрена в работах [4], [5].

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$ такую, что $y^{2-\beta}u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, D_{0y}^\beta u \in C(\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $(x, y) \in \Omega$.

В данной работе исследуется следующая

Задача. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-2} u = \tau(x), \quad D_{0T}^{\beta-2} u = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Литература

- [1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [2] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
- [3] Нахушев А. М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9. № 1. С. 128–137.
- [4] Масаева О. Х. О задаче Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2023. Т. 23. № 4. С. 43–53.
- [5] Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа в квадранте // Тезисы докладов Всероссийской научно-практической конференции: "Новгородские встречи. Связь времен, наук и технологий". В рамках проекта языка науки-языки искусства. г. Великий Новгород, 11-13 мая 2023 г.

МЕТОД ГОЛОМОРФНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ⁶⁸

Маслов Д. А. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

maslovdma@mpei.ru

Тихоновские системы дифференциальных уравнений, то есть, системы дифференциальных уравнений, часть из которых является сингулярно возмущенными, возникают во многих прикладных задачах, в том числе в задачах механики. Динамика волнового

⁶⁷ Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ (проект № FEFS-2020-0001).

⁶⁸ Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00546.

твердотельного гироскопа, в котором используется свойство инертности волн, возбуждаемых в осесимметричных оболочках, описывается тихоновской системой [1]. Выведенная в [1] нелинейная математическая модель описывает во взаимосвязанной форме механические колебания резонатора гироскопа и электрические процессы в контуре управления колебаниями, причём сингулярно возмущёнными являются уравнения электрических процессов. В данной работе к математической модели динамики гироскопа применён метод голоморфной регуляризации, который позволяет строить приближённые решения нелинейных сингулярно возмущённых задач в виде рядов по малому параметру, сходящихся не только асимптотически, но и в обычном смысле [2], [3].

Рассмотрим задачу Коши для тихоновской системы в виде, соответствующем математическим моделям динамики резонаторов волновых твердотельных гироскопов [1], следующей структуры: сингулярно возмущённые уравнения линейны относительно быстрых переменных, матрица сингулярно возмущённой части системы является диагональной, остальные уравнения слабо нелинейны:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \varepsilon \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{D}(t, \mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0, \varepsilon) &= \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{y}(0, \varepsilon) = \mathbf{y}^0,\end{aligned}\tag{1}$$

где ε - малый параметр; $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$;
 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, f_m(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\}$, $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = \{h_1(t, \mathbf{x}), \dots, h_n(t, \mathbf{x})\}$;
 $\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \text{diag} \{d_1(t, \mathbf{x}), d_2(t, \mathbf{x}), \dots, d_n(t, \mathbf{x})\}$ - диагональная матрица.

Пусть для задачи (1) выполнены условия теоремы А.Н. Тихонова о предельном переходе [4]. Пусть дополнительно $\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ - аналитические функции в некоторой замкнутой области $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$, $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ в Ω , и точка $(0, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ принадлежит Ω .

Для применения к системе (1) метода голоморфной регуляризации, введём дифференциальные операторы:

$$L^{\mathbf{A}} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^m ((\mathbf{e}_k^*, \mathbf{A}\mathbf{x}) + f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad L^{\mathbf{D}} = \sum_{k=1}^n (d_k(t, \mathbf{x})y_k + h_k(t, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

где $\mathbf{e}_k^* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ - вектор-строка с единицей в k -м положении.

Тогда уравнение первых интегралов системы (1) примет следующий вид:

$$\varepsilon L^{\mathbf{A}}\mathbf{U} + L^{\mathbf{D}}\mathbf{U} = 0.\tag{2}$$

В (2) введён вектор

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = (U_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \dots, U_{m+n}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon))^T,$$

поскольку нам понадобится построение $m + n$ независимых первых интегралов системы (1).

Считая оператор $L^{\mathbf{A}}$ подчиненным оператору $L^{\mathbf{D}}$, будем искать решение уравнения (2) в виде регулярного ряда по степеням ε , т.е.

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = \mathbf{U}^{[0]}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{U}^{[1]}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots + \varepsilon^k \mathbf{U}^{[k]}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots.\tag{3}$$

Коэффициенты в (3) могут быть найдены в результате решения серии уравнений

$$L^{\mathbf{D}}\mathbf{U}^{[0]} = 0, \quad L^{\mathbf{D}}\mathbf{U}^{[1]} = -L^{\mathbf{A}}\mathbf{U}^{[0]}, \quad \dots \quad L^{\mathbf{D}}\mathbf{U}^{[k]} = -L^{\mathbf{A}}\mathbf{U}^{[k-1]}, \quad \dots.\tag{4}$$

В качестве решения первого уравнения серии (4) возьмём вектор

$$\mathbf{U}^{[0]} = \left(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), x_1 - \hat{X}_1(t), \dots, x_m - \hat{X}_m(t) \right)^T,$$

где $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ - аналитические на $[0, T]$ функции. Значения

$$U_{n+j}^{[0]}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_j - \hat{X}_j(t), \quad j = 1 \dots m,$$

выбираются так, чтобы не было зависимости от \mathbf{y} , обычно полагают $\hat{\mathbf{X}} = \left(\hat{X}_1(t), \dots, \hat{X}_m(t) \right)^T$ - решение вырожденной задачи, соответствующей (1), однако может быть выбрана и другая функция, например, приближение к решению вырожденной задачи. Для решения остальных уравнений в (4) можно воспользоваться интегральным способом решения неоднородных уравнений первого порядка в частных производных [5].

Можно указать, что

$$U_j^{[1]}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\varphi_j'(t)}{d_j(t, \mathbf{x})} \ln \left(\frac{d_j(t, \mathbf{x})y_j + h_j(t, \mathbf{x})}{d_j(t, \mathbf{x})y_j^0 + h_j(t, \mathbf{x})} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

В итоге, получается система $n + m$ независимых первых интегралов, аналитических в точке $\varepsilon = 0$ [2], [3], которые запишем в следующем виде

$$\begin{cases} -U_j^{[1]} - \varepsilon U_j^{[2]} - \dots = \frac{\varphi_j}{\varepsilon}, & j = 1, \dots, n, \\ x_j - \hat{X}_j + \varepsilon U_{n+j}^{[1]} + \varepsilon^2 U_{n+j}^{[2]} + \dots = 0, & j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (5)$$

Решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$, $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ задачи Коши (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если при представлении $\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{X}\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$, $\mathbf{y}(t, \varepsilon) = \mathbf{Y}\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$, функции $\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$ и $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$, аналитичны по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ равномерно по $t \in [0, T]$ при каждом $\boldsymbol{\eta}$ из некоторого неограниченного множества, т.е. представляющие их ряды

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}^{[k]}(t, \boldsymbol{\eta}) \cdot \varepsilon^k, \quad \mathbf{y}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Y}^{[k]}(t, \boldsymbol{\eta}) \cdot \varepsilon^k \quad (6)$$

сходятся в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ (зависящей от t и $\boldsymbol{\eta}$).

Если выполнены указанные выше условия применения метода голоморфной регуляризации, то решение $\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$, $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$ задачи Коши (1) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ [3].

Определим $\mathbf{y} = \mathbf{Y}^{[0]}(t, \boldsymbol{\eta})$, $\mathbf{x} = \mathbf{X}^{[0]}(t)$, из уравнений, полученных вводя в (5) $\boldsymbol{\eta} : \eta_j = \varphi_j(t)/\varepsilon$, $j = 1, \dots, n$, и полагая далее $\varepsilon = 0$:

$$Y_j^{[0]}\left(t, \frac{\varphi_j}{\varepsilon}\right) = \left(y_j^0 + \frac{h_j}{d_j}\right) \exp\left(\frac{d_j}{\varphi_j'(t)} \frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}\right) - \frac{h_j}{d_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и также имеем $\mathbf{X}^{[0]} = \hat{\mathbf{X}}(t)$.

Записывая (5) в виде

$$\begin{cases} -U_j^{[1]} - \varepsilon U_j^{[2]} - \dots = \eta_j, & j = 1, \dots, n, \\ x_j - \hat{X}_j + \varepsilon U_{n+j}^{[1]} + \varepsilon^2 U_{n+j}^{[2]} + \dots = 0, & j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

и дифференцируя по ε , можно определить коэффициенты разложений (6), при $k = 1, 2, \dots$. Например, для $k = 1$, получим систему

$$J(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \mathbf{U}^{[1]}}{\partial \varepsilon},$$

где $\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)^T$, $J(\mathbf{z})$ - матрица Якоби,

$$J_{ij} = \frac{\partial U_i^{[1]}}{\partial z_j}, \quad i, j = 1, \dots, m + n.$$

Тогда

$$\mathbf{X}^{[1]} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, \mathbf{x}=\widehat{\mathbf{X}}(t), \mathbf{y}=\mathbf{Y}^0(t, \varphi(t)/\varepsilon)}, \quad \mathbf{Y}^{[1]} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, \mathbf{x}=\widehat{\mathbf{X}}(t), \mathbf{y}=\mathbf{Y}^0(t, \varphi(t)/\varepsilon)}.$$

Таким образом, показана схема применения метода голоморфной регуляризации к математической модели динамики резонатора гироскопа.

Литература

- [1] Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. №6. С. 88–110.
- [2] Качалов В. И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 654–661.
- [3] Besova M. I., Kachalov V. I. Analytical Aspects of the Theory of Tikhonov Systems // Mathematics. 2022. Vol. 10. №. 1, 72.
- [4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.
- [5] Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 1989.

О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ РАЗРЫВНЫХ ПО ВРЕМЕНИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Мастерков Ю. В. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

Jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega. \quad (1)$$

Предполагается, что множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, содержит некоторую окрестность начала координат. Пусть $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < T \doteq t_k)$ — заданное разбиение отрезка $[0, T]$ на k полуинтервалов $\Delta_i \doteq (t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, k}$.

Предполагается, что $f(t, 0, 0) = 0$ для всех $t \in [0, T]$ и компоненты вектор-функции $f(t, x, u)$ непрерывны по совокупности переменных на каждом из множеств Δ_i и имеют непрерывные частные производные $\partial^p f_s / \partial x_j^p$, $\partial^p f_s / \partial u_l^p$, $\partial^p f_s / \partial t^p$ ($s, j \in \overline{1, n}$, $l \in \overline{1, m}$) до порядка n .

Система (1) называется *локально управляемой на отрезке* $[0, T]$, если для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$, существует такое измеримое управление $\tilde{u}(t)$, что соответствующее ему решение $\tilde{x}(t) \doteq x(t, \tilde{u}(\cdot))$ удовлетворяет условиям: $\tilde{x}(0) = x_0$; $\tilde{x}(T) = 0$.

Для достаточно гладкой системы известно достаточное условие локальной управляемости по первому приближению (см. [1]). Однако для разрывных систем известно лишь достаточное условие локальной управляемости линейной нестационарной системы (см. [2]).

Получены достаточные условия локальной управляемости системы (1).

Литература

- [1] Тонков Е. Л. Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, № 4. С. 599-606.
- [2] Родина Л. И., Тонков Е. Л. Условия полной управляемости нестационарной линейной системы в критическом случае // Кибернетика и системный анализ. 2004. Т. 49. № 3. С. 87-100.

СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА НА ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ
ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ⁶⁹

Маштакоев А. П. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
alexey.mashtakov@gmail.com

Доклад посвящен исследованию четырехмерного расширения модели Петито-Читти-Сарти [1] завершения контуров зрительной корой головного мозга. Конфигурационное пространство нейронов зрительной коры интерпретируется как центральное расширение группы движений плоскости $M = \overline{SE}(2)$. Левоинвариантное распределение касательных подпространств моделирует возможные направления установления нейронной связи. Субриманово расстояние пропорционально энергии, затрачиваемой на активацию промежуточных нейронов между двумя возбужденными пограничными нейронами. В исследуемой модели поврежденные контуры изображения восстанавливаются с помощью субримановых геодезических в пространстве M положений, ориентаций и толщин контуров. Альтернативное уточнение, путем включения кривизны контуров, предложено в работе [2].

Рассматриваемая субриманова структура является структурой с максимально неинтегрируемым двумерным распределением на четырехмерной группе Ли. Такие структуры называются структурами энгелева типа. Полная классификация субримановых структур энгелева типа получена в работе [3]. Согласно классификации существует двухпараметрическое семейство таких структур. Методами геометрической теории управления [4] исследуется задача поиска геодезических на M .

Задача формулируется в виде задачи оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{\beta}u_1 + \alpha\sqrt{\beta}u_2, & (\theta, x, y, k) \in SE(2) \times \mathbb{R}^+ = M, \\ \dot{x} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\beta}}u_2, & (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{y} = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{\beta}}u_2, & \gamma(0) = (0, 0, 0, 1), \gamma(T) = (\theta_1, x_1, y_1, k_1), \\ \dot{k} = -ku_2, & \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

где $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ — параметры, которые однозначно (с точностью до локальных изометрий) определяют субриманову структуру на M .

Доказаны полная управляемость и существование оптимальных управлений. С помощью принципа максимума Понтрягина выписана гамильтонова система на экстремали. Получено явное выражение аномальных геодезических и доказана интегрируемость по Лиувиллю нормального геодезического потока для всего семейства субримановых структур. В частном случае $\alpha = 0, \beta = 1$ получено явное выражение для экстремальных управлений и траекторий.

Доклад основан на совместной работе с И. Галяевым.

Литература

- [1] Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // J. Math. Imaging Vis. 2006. No. 24. PP. 307–326.
- [2] Galyaev I., Mashtakov A. Liouville Integrability in a Four-Dimensional Model of the Visual Cortex // Journal of Imaging. 2021. No. 7(12):277.
- [3] Almeida D. M. Sub-Riemannian homogeneous spaces of Engel type // J. Dyn. Control Syst. 2014. No. 20(2). PP. 149–166.
- [4] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М: Физматлит, 2005.

⁶⁹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>.

О РЕАЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ КАК СЕРВОСВЯЗЕЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ⁷⁰

Микишанина Е. А. (Россия, Чебоксары)

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова
evaeva_84@mail.ru

Платонов П. С. (Россия, Чебоксары)

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова
platonov1998@yandex.ru

Впервые понятие «сервосвязь» было введено Бегеном, а позже П. Апфель сформулировал некоторые принципы исследования механических систем с сервосвязями [1]. В работе [2] автор обсуждает динамику систем с сервосвязями в смысле Бегена, когда связи реализуются посредством управляемых сил и посредством изменения инерционных свойств системы. В [3] нами была рассмотрена конкретная механическая система, представляющая собой сферический робот с маятниковым приводом, управление которым осуществлялось посредством сервосвязей, задающих роботу программу движения. В научной литературе существует и ряд нестандартных подходов к исследованию систем с сервосвязями. Например, в [4] автор предлагает подход, заключающийся в математическом освобождении от сервосвязей. Однако, недостатком некоторых работ является абстрактность решаемых задач, то есть отсутствие упоминания о механизмах, реализующих сервосвязи.

Отметим ряд особенностей, отличающих сервосвязи и системы с сервосвязями от неголономных связей и систем

- неголономные связи возникают естественным образом, сервосвязи создаются искусственно с помощью дополнительных механизмов и управления этими механизмами или инерционными свойствами системы;
- класс систем с сервосвязями гораздо шире класса неголономных систем;
- исследование систем с сервосвязями не может происходить в отрыве от физических механизмов реализации сервосвязей. В научной литературе часто управляющие механизмы называют единым термином «следающие системы», подразумевая нечто абстрактное, хотя они представляют собой широкий класс автоматических систем электрической, гироскопической и другой направленности. Разновидность «следающей системы» и способы управления также будут оказывать влияние на динамику системы.

Целью данной работы является сравнение математических принципов построения уравнений движения в случае неголономных систем и систем с сервосвязями и иллюстрация указанных положений на конкретных механических системах. Будет рассмотрено управляемое посредством сервосвязей движение сферического робота с маятниковым приводом и сферической оболочки с твердым телом внутри, контактирующим со сферической оболочкой омниколесами.

Так как механические системы, движение которых подчинено сервосвязям, являются прикладными системами, то, обозначая природу управляющих механизмов, можно вызвать к исследованиям в данной области большой интерес коллективов, работающих в области робототехники.

Литература

- [1] Апфель П. Теоретическая механика. Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: гос. из-во физико-математической литературы, 1960. 487 с.
- [2] Козлов В.В. Принципы динамики и сервосвязи // Нелинейная динамика. 2015 Т. 11, № 1 С. 169–178.

⁷⁰Исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда (грант № 23-21-10019) и Чувашской Республики. <https://rscf.ru/project/23-21-10019/>

- [3] Mikishanina E. A. Motion Control of a Spherical Robot with a Pendulum Actuator for Pursuing a Target // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2022. V. 18, No. 5. P. 899–913.
- [4] Тешаев М. Х. К задаче стабилизации движений механических систем, стесненных геометрическими и кинематическими сервосвязями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. 2009. №4(12). С. 27–38.

О ЦИКЛАХ В МОДЕЛЯХ КОЛЬЦЕВЫХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕГРАДАЦИЕЙ КОМПОНЕНТ⁷¹

Минушкина Л. С. (Россия, Новосибирск)
Новосибирский государственный университет
l.minushkina@g.nsu.ru

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_3) - \Gamma_1(x_1); \quad \frac{dx_2}{dt} = L_2(x_1) - \Gamma_2(x_2); \quad \frac{dx_3}{dt} = L_3(x_2) - \Gamma_3(x_3), \quad (1)$$

моделирующую кольцевую генную сеть, в которой взаимодействуют три вещества с концентрациями $x_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, $j - 1 := 3$ при $j = 1$. Скорости синтеза каждой компоненты зависят от концентрации предыдущего вещества и описываются гладкими монотонно убывающими функциями $L_j(x_{j-1})$. Процессу разложения компонент соответствуют гладкие монотонно возрастающие функции Γ_j . Примеры подобных моделей были приведены в работе [1].

Ограничимся случаем, когда $\sup \Gamma_j(x_j) \geq \max L_j(x_{j-1}) = L_j(0)$. Тогда

Лемма 1. Область $\mathcal{Q}^3 = [0, \Gamma_1^{-1}(L_1(0))] \times [0, \Gamma_2^{-1}(L_2(0))] \times [0, \Gamma_3^{-1}(L_3(0))]$ является положительно инвариантной для траекторий системы (1).

Лемма 2. Область \mathcal{Q}^3 содержит единственную стационарную точку системы (1).

Для исследования фазового портрета в окрестности стационарной точки проведем линеаризацию системы (1).

Теорема 1. Если выполняется условие $(p_1 + p_2 + p_3)(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) < p_1 p_2 p_3 + q_1 q_2 q_3$, где положительные параметры $p_j = \Gamma'_j$, $-q_j = L'_j$ — производные монотонных функций Γ_j , L_j , вычисленные в стационарной точке, то у системы (1) существует цикл \mathcal{C}^3 , который содержится в инвариантной области \mathcal{Q}^3 .

Траектории динамической системы (1) лежат на двумерной инвариантной поверхности, построение которой описано в [2].

Далее, рассмотрим шестимерную модель генной сети,

$$\frac{dx_j}{dt} = L_j(y_{j-1}) - \Gamma_j(x_j); \quad \frac{dy_j}{dt} = G_j(x_j) - \gamma_j(y_j) \quad (2)$$

с отрицательными и положительными обратными связями, выраженными гладкими монотонными функциями L_j и G_j соответственно. Деградация компонент описывается гладкими монотонно возрастающими функциями Γ_j и γ_j . Аналогичная симметричная модель молекулярного репрессилатора предложена в [3].

В данной работе рассматриваем только функции, удовлетворяющие неравенствам $\sup \Gamma_j(x_j) \geq \max L_j(y_{j-1}) = L_j(0)$, $\sup \gamma_j(y_j) \geq \sup G_j(x_j)$. В этом случае определены значения обратных функций.

Лемма 3. Шестимерный параллелепипед $\mathcal{Q}^6 = \prod_{j=1}^3 [0, \Gamma_j^{-1}(L_j(0))] \times [0, \gamma_j^{-1}(\sup G_j)]$ является инвариантным для траекторий системы (2).

Лемма 4. Динамическая система (2) имеет единственную стационарную точку внутри инвариантной области \mathcal{Q}^6 .

⁷¹Работа поддержана РНФ грант № 23–21–00019, <https://rscf.ru/project/23-21-00019/>.

Параллелепипед \mathcal{Q}^6 разбивается на три подобласти. Подробное описание дискретизации фазового портрета приведено, например, в [4]. Будем изучать поведение траекторий в инвариантной подобласти W_1 .

Теорема 2 *Если характеристический многочлен матрицы линеаризации системы (2) имеет хотя бы два комплексно сопряженных корня с положительной вещественной частью и при этом не имеет чисто мнимых корней, то у системы (2) существует цикл C^6 в инвариантной подобласти W_1 .*

Аналогичным образом для шестимерной системы можно построить двумерную инвариантную поверхность, содержащую траектории системы.

Литература

- [1] Hastings S., Tyson J., Webster D., Existence of Periodic Solutions for Negative Feedback Cellular Control System // J. of Diff. Equations, 1977. V. 25. P. 39–64.
- [2] Миушкина Л. С. Периодические траектории нелинейных моделей кольцевых генных сетей // Владикавказский матем. журнал, 2023. Т. 25. № 4. С.80–90.
- [3] Elowitz M. B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature, 2000. V.403. P. 335–338.
- [4] Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Казанцев М. В. О существовании цикла в одной несимметричной модели молекулярного репрессилатора // Сиб. журн. вычисл. матем., 2017. Т. 20. № 2. С. 121–129.

ОПТИЧЕСКИЙ ПОТОК В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ СРЕДСТВАМИ

Миллер Б. М. (Россия, Москва)

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича

bmillер@iitp.ru

В современных условиях управление беспилотными аппаратами (БА) в автономном режиме, как правило использует спутниковые средства навигации, такие как GPS и GLONAS. Однако, во многих приложениях использование спутниковых средств является невозможным. Навигация по наблюдениям текущего видеоизображения является одним из наиболее перспективных средств навигации и управления беспилотными аппаратами в условиях ограниченного применения спутниковых средств навигации. В режиме автономного движения простое добавление видеокамеры при отсутствии средств распознавания и интерпретации к системе инерциальной навигации не дает значимого эффекта. Поэтому извлечение навигационной информации из последовательности изображений играет ключевую роль. Важной характеристикой наблюдаемых изображений является эволюция порождаемого информационного потока. Примерами являются оптический поток при видеонаблюдении [1], доплеровское измерение абсолютной скорости и эволюция рельефа измеренной дальности при использовании многолучевых сонаров [2]. С алгоритмической точки зрения они весьма близки, что позволяет объединить их обсуждение в данном обзоре [3].

Литература

- [1] Миллер Б. М., Степанян К. В., Попов А. К., Миллер А. Б. Навигация БПЛА на основе последовательностей изображений, регистрируемых бортовой видеокамерой // Автоматика и телемеханика, № 12, 2017, стр. 141–153.
- [2] Миллер А. Б., Миллер Б. М. Определение скорости АНПА при помощи акустического зондирования профиля дна // Информационные процессы, Том 17, № 3, 2017, стр. 165–171.
- [3] Степанян К. В., Попов А. К., Миллер А. Б., Миллер Б. М. Оптический поток в задачах навигации и управления беспилотными автономными средствами // Информационные процессы, Том 23, № 4, 2023, стр. 526–544.

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАНГА ОДИН
КАК ПРЕДЕЛ КОММУТИРУЮЩИХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Миронов А. Е. (Россия, Новосибирск)
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
mironov@math.nsc.ru

Мы покажем, что обыкновенные коммутирующие дифференциальные операторы ранга один могут быть расширены до коммутирующих разностных операторов. Коэффициенты разностных операторов зависят от малого параметра. При стремлении малого параметра к нулю разностные операторы переходят в дифференциальные. При этом спектральные данные для разностных операторов получаются из спектральных данных для дифференциальных операторов некоторым расширением. В качестве примера будет рассмотрен оператор Ламе и его разностный аналог. Результаты получены совместно с Г.С. Маулешовой.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО — ФАБРИЦИО⁷²

Нагуманова А. В. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
urazaeva_anna@mail.ru

Пусть \mathcal{U} , \mathcal{Z} — банаховы пространства, через $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов действующих из \mathcal{U} в \mathcal{Z} . Рассмотрим обратную задачу для эволюционного уравнения

$$D_{0t}^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad (1)$$

где D_{0t}^α — дробная производная Капуто — Фабрицио, $0 < \alpha < 1$, A — линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве \mathcal{Z} ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$), операторная функция $B(t)$ определена на отрезке $[0, T]$ ($B \in C([0, T], \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}))$), функция $g(t) \in C([0, T], \mathcal{Z})$, с начальным условием

$$z(0) = z_0, \quad (2)$$

и условием переопределения

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}. \quad (3)$$

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 < \alpha < 1$, $f \in H^1(a, b)$. Дробной производной Капуто — Фабрицио порядка α по временной переменной называется

$$D_{at}^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)} f'(\tau) d\tau.$$

Решением задачи (1)–(3) будем называть пару $(z(t), u)$, где функция $z(t)$ является решением задачи (1), (2) с соответствующим $u \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее (3).

Введём оператор

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{s}{s(1-\alpha) + \alpha} - A \right)^{-1} e^{st} ds,$$

где Γ — контур Ганкеля.

⁷²Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда и Правительства Челябинской области, грант № 24-21-20015.

Теорема 1. Пусть A — линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве \mathcal{Z} с нормой $\|A\| < \frac{1}{1-\alpha}$, элемент $u \in \mathcal{U}$ известен, операторная функция $B \in C([0, T], \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}))$, $B(0) = 0$, функция $g \in C([0, b]; \mathcal{Z})$, $g(0) = 0$, $z_0 \in \ker A$. Тогда единственным классическим решением задачи Коши (1), (2) является функция

$$z(t) = z_0 + \int_0^t Z(t-s)(B(s)u + g(s))ds.$$

Задачу (1)–(3) назовём корректной, если для любых $z_0 \in \ker A$ и $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C(\|z_0\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C^1([0, T], \mathcal{Z})}).$$

Введём операторы

$$\chi(A) \equiv \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z(t-s)B(s)ds, \quad (4)$$

$$\psi(A) \equiv z_T - V_0^T(\mu(t))z_0 - \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z(t-s)g(s)ds, \quad (5)$$

где $V_0^T(\mu(t))$ — вариация функции $\mu(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Теорема 2. Пусть A — линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве \mathcal{Z} с нормой $\|A\| < \frac{1}{1-\alpha}$, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, операторная функция $B \in C([0, T], \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}))$, $B(0) = 0$, функция $g \in C([0, b]; \mathcal{Z})$, $g(0) = 0$, $z_0 \in \ker A$. Тогда обратная задача (1)–(3) корректна в том и только том случае, когда существует $\chi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{U})$. При этом решение имеет вид $u = \chi^{-1}(A)\psi(A)$.

Литература

- [1] Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress in Fractional Differentiation & Applications. 2015. Т. 1, № 2. С. 73–85.

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ РАЗМЕРНОСТИ ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА

Николаев В. Г. (Россия, Великий Новгород)

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
vg14@inbox.ru

Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ лежат в верхней полуплоскости. Назовем комплексную ℓ -вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$ аналитической по Дуглису [1] с матрицей J , если она удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $z \in D$.

Пусть гладкий контур $\Gamma = \partial D$. Рассмотрим следующую *однородную задачу Шварца* [1]. Требуется найти аналитическую по Дуглису в области D функцию $\phi(z)$ по граничному условию

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Ядром задачи Шварца называется линейное пространство решений задачи (1).

Рассмотрим частный случай, когда 2×2 -матрица J имеет разные собственные числа λ, μ , причем $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \mu > 0$. Здесь ядро задачи Шварца содержит, в частности, два линейно независимых тривиальных элемента $\phi \equiv ic$, где $c \in \mathbb{R}^2$. Приведем пример нетривиального ядра.

Пример 1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 2 & 4i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} -3(x^2 + 2y^2)i \\ x^2 + 8y^2 - 4 - 4xyi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Функция $\phi(z)$ в (2) является аналитической по Дуглису с матрицей J . При этом матрица J имеет разные собственные числа $\lambda = i$, $\mu = 2i$. Имеем: $\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma : x^2 + 8y^2 = 4$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть область D представляет собой эллипс, симметричный относительно координатных осей. Тогда размерность нетривиальной составляющей ядра задачи Шварца для изучаемого типа матриц J не превосходит двух.

Литература

- [1] Николаев В. Г., Солдатов А. П. О решении задачи Шварца для J -аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №7. С. 965–969.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХОФФА⁷³

Николаева Н. Г. (Россия, Челябинск)

Южно-Уральский государственный университет
nikolaevang@susu.ru

Манакова Н. А. (Россия, Челябинск)

Южно-Уральский государственный университет
manakovana@susu.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ . Рассмотрим модель Хоффа [1]

$$(\mu + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3, \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (2)$$

Модель Хоффа описывает динамику деформации двутавровой балки. Неизвестная функция $u = u(x, t)$ моделирует отклонение балки от положения равновесия. Параметр $\mu \in \mathbb{R}$ характеризует продольную нагрузку на балку, а параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, характеризуют свойства материала балки.

В работе [2] показано, что фазовое пространство модели (1), (2) является простым банаховым C^∞ -многообразием в случае $\alpha\beta > 0$ и принимает следующий вид

$$\mathfrak{B} = \left\{ u \in L_4(\Omega) : \int_{\Omega} (\alpha + \beta u^2) u \varphi_l dx = 0, l : \mu = \lambda_l \right\},$$

где $\{\lambda_l\}$, $\{\varphi_l\}$ – собственные значения и собственные функции однородной задачи Дирихле оператора $(-\Delta)$.

Целью данного исследования является изучение структуры фазового пространства модели (1), (2) в случае $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и выявление условий накладываемых на параметры α, β ($\alpha\beta < 0$), при которых фазовое пространство имеет особенности при $\dim \ker(\mu + \Delta) = 1$ и $\dim \ker(\mu + \Delta) = 2$ [3].

⁷³Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>.

Обозначим через $\{\lambda_{l_1, l_2}\}$, $\{\varphi_{l_1, l_2}\}$ семейства собственных значений и собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$. Если $\mu = \lambda_{l_1, l_2}$ и $l_1 = l_2$, то множество \mathfrak{B} C^∞ -диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{ (s_1, u^\perp) \in \mathbb{R} \times L_4(\Omega) : s_1^3 \|\varphi_{l_1, l_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^3 u^\perp dx dy + s_1 \left(3 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + \alpha \beta^{-1} \right) + \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} (u^\perp)^3 dx dy = 0 \right\}.$$

Если $\mu = \lambda_{l_1, l_2}$ и $l_1 \neq l_2$, то множество \mathfrak{B} C^∞ -диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{B}_2 = \left\{ (s_1, s_2, u^\perp) \in \mathbb{R}^2 \times L_4(\Omega) : \beta \iint_{\Omega} \varphi_{l_2, l_1} (u^\perp)^3 dx dy + \beta \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} (u^\perp)^3 dx dy + \alpha s_1 + \alpha s_2 + 3\beta s_1 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + 3\beta s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} \varphi_{l_2, l_1} (u^\perp)^2 dx dy + 3\beta s_1 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} \varphi_{l_2, l_1} (u^\perp)^2 dx dy + 3\beta s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_2, l_1}^2 (u^\perp)^2 dx dy + 3\beta s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^3 u^\perp dx dy + 3\beta s_2^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} \varphi_{l_2, l_1}^2 u^\perp dx dy + 3\beta s_1^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_2, l_1}^3 u^\perp dx dy + 3\beta s_2^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^2 \varphi_{l_2, l_1} u^\perp dx dy + 3\beta s_1^2 s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^3 \varphi_{l_2, l_1} dx dy + 3\beta s_1 s_2^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^2 \varphi_{l_2, l_1}^2 dx dy + 3\beta s_1^2 s_2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^2 \varphi_{l_2, l_1}^2 dx dy + 3\beta s_1 s_2^2 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} \varphi_{l_2, l_1}^3 dx dy + \beta s_1^3 \|\varphi_{l_1, l_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 + \beta s_2^3 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2} \varphi_{l_2, l_1}^3 dx dy + \beta s_2^3 \|\varphi_{l_2, l_1}\|_{L_4(\Omega)}^4 + \beta s_1^3 \iint_{\Omega} \varphi_{l_1, l_2}^3 \varphi_{l_2, l_1} dx dy = 0 \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $\mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha\beta < 0$, тогда

- (i) если $l_1 = l_2$, то множество \mathfrak{B}_1 образует 2-сборку Уитни;
(ii) если $l_1 \neq l_2$, то множество \mathfrak{B}_2 образует k-сборку Уитни.

Литература

- [1] Hoff N. J. Creep Buckling // Journal of the Aeronautical Science. 1956. №7. P. 1–20.
- [2] Свиридюк Г. А., Казак В. О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Матем. заметки. 2002. Т. 71, №2. С. 292–297.
- [3] Николаева Н. Г., Гаврилова О. В., Манакова Н. А. Исследование единственности решения задачи Шоултера – Сидорова для математической модели Хоффа. Морфология фазового пространства // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2024. Т. 17, №1. С. 49–63.

РАЗЛИЧИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СОХРАНЕНИЙ

Овсянников В. М. (Россия, Москва)

Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ)

OvsyannikovVM@yandex.ru

Понятие сохранения в философии возникло давно в различных частях мира независимо друг от друга. Но было одно сходство. Все философы имели ввиду интегральное сохранение. Европейская философия получила закон сохранения из рук члена пифагорейского сообщества Эмпедокла (490 г. – 430 г. до н.э.) уже позже смерти Пифагора (570 г. – 490 г. до н.э.). Закон сохранения он изложил в такой формулировке: «Ничто не может произойти из ничего, и никак не может то, что есть, уничтожиться».

Этот закон в Древности мог иметь только интегральное толкование, будучи отнесен к одной изолированной области. Создание в более поздний период Лейбницем и Ньютоном дифференциального исчисления поставило вопрос о применении понятия сохранения или несохранения к дифференциальным объемам, которых много, каждый из которых окружен в

сплошной среде со всех сторон такими же дифференциальными объемами. Изолированность контрольного объема от соседних не гарантирована. Для движущейся сплошной среды дифференциальная геометрия рассматривает понятие якобиана второго и третьего порядков, физический смысл которых – мера искажения пространства, определяющаяся комплексами из производных компонент скорости по координатам. Из этих якобианов составлены квадратичный I_2 и кубичный I_3 инварианты тензора скоростей деформаций.

Эйлер в 1752 г. геометрически вывел уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости [1], [2], [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0)I_2 + (t - t_0)^2 I_3 = 0,$$

где квадратичный (второй) инвариант равен сумме якобианов второго порядка

$$I_2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)},$$

а кубичный (третий) инвариант равен якобиану третьего порядка

$$I_3 = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}.$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль координатных осей x, y, z , t — время, $t - t_0$ — интервал времени деформации контрольной фигуры.

Л.И.Седов указал на 75-ой странице I тома «Механики сплошной среды» [4] на то, что существующие курсы дисциплин теории упругости, гидродинамики, электродинамики остановились на рубеже пренебрежения высшими инвариантами I_2, I_3 .

Величие философов, указавших на очень широкое выполнение интегрального закона сохранения, сдерживает освоение и учет высших инвариантов в практической деятельности гидродинамиков, электродинамиков и специалистов по теории упругости. Производится искусственное сдерживание дифференциального подхода решения задач, навязыванием дифференциального сохранения, обеднения решений, дающихся математическим аппаратом. Бесконечно малых величин не существует. Поэтому возможно, как сохранение, так и несохранение для конечно-разностных уравнений, когда $\Delta t \neq 0$. Речь идет о локальном сохранении или несохранении за малый, но конечный интервал времени Δt . Термин «локальное несохранение» возник в ИПМ им. М.В.Келдыша при развитии численного метода регуляризации уравнений гидрогазодинамики для решения задач на компьютере.

При рассмотрении поведения жидкости во времени t интервал Δt не может быть нулевым. Он мал, но конечен. Поэтому волновое уравнение, описывающее поведение жидкости, содержит квадратичный и кубичный инварианты, умноженные на Δt в различных степенях. Уравнение неразрывности было записано В.М.Овсянниковым [5] в 2006 г. для сжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + (t - t_0)\rho I_2 + (t - t_0)^2 \rho I_3 = 0.$$

В 2007 г. В.М.Овсянниковым методом акустической аналогии Лайтхилла было получено волновое уравнение второго порядка по времени [6], [7]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - c_0^{-2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 I_2 + (t - t_0)\rho_0 2I_3.$$

Здесь p — волновое давление, ρ_0 — термодинамическая плотность, c_0 — скорость распространения звука.

Развитие акустики показывает возможности согласования гармонических колебаний, локального несохранения плотности в сжимаемой среде с интегральным сохранением общего количества воздуха в замкнутом помещении. Генерация новых волн давления и плотности происходит за счет появления неоднородных членов в волновом уравнении. Учет высших инвариантов в задачах гидродинамики и электродинамики дает описание ранее неизвестных физических процессов.

Литература

- [1] Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756-1757). P. 271-311 = Opera omnia, ser. II. V. 13. P. 1-369.
- [2] Leonhardi Euleri. Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius. Edidit C.A.Truesdell. Lausannae, 1954.
- [3] Эйлер Л. Принципы движения жидкостей. Перевод с латыни начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской Академии Наук Ивановой Е.В., Овсянникова В.М. М.: Издательство «Спутник +», 2020. – 203 с.
- [4] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.:Наука, 1970. – 492 с.
- [5] Овсянников В.М. Введение в аксиоматическую механику жидкости, основанную на базисных экспериментах с жидкостью. В сборнике "Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике"(Axiomactical problems in Hydro-Gasdynamics) № 15, 2006, с. 19-51. ISBN 5-94436-018-X.
- [6] Овсянников В. М. Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., – 2020. – Т.182. – С. 95-100. DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-95-100>.
- [7] Ovsyannikov V. M. Euler continuity equation with high-order terms in time // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 277, No. 5, December, 2023. DOI 10.1007/s10958-023-06888-y

РАЗЛОЖЕНИЕ В СВЯЗНУЮ СУММУ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ МОРСА-СМЕЙЛА БЕЗ ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ КРИВЫХ⁷⁴

Осенков Е. М. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
eosenkov@hse.ru

Починка О. В. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
olga-pochinka@yandex.ru

Как известно, любое связное замкнутое трехмерное многообразие единственным образом раскладывается в связную сумму так называемых простых многообразий – тех, что не могут быть представлены как связная сумма двух отличных от трехмерной сферы многообразий. Этот результат известен как теорема Кнезера-Милнора [1], [2], и она верна и для случая неориентируемых многообразий [3].

Мы в своей работе рассматриваем связные гладкие замкнутые 3-многообразия M^3 , допускающие диффеоморфизмы Морса-Смейла без гетероклинических кривых. Оказалось, что топология слагаемых разложения таких многообразий может быть существенно уточнена.

Классификация для случая ориентируемых многообразий была получена К. Бонатти, В.З. Гринесом, В.С. Медведевым и Э. Пеку в 2002 году. Мы обобщаем их результат, приводя исчерпывающее описание разложения в связную сумму любых 3-многообразий M^3 , которые являются несущим многообразием некоторого диффеоморфизма Морса-Смейла без гетероклинических кривых.

Литература

- [1] Kneser H. Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten // Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1929. Vol. 38. P. 248-259.
- [2] Milnor J. A unique decomposition theorem for 3-manifolds // American Journal Of Mathematics. 1962. Vol. 84. P. 1-7.
- [3] Trace B. Two Comments Concerning the Uniqueness of Prime Factorizations for 3-Manifolds // Bulletin Of The London Mathematical Society. 1987. Vol. 19.

⁷⁴Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Остапенко В. В. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Петренко И. А. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
petrenko_irina@bk.ru

Шарифуллина Т. С. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Черевко А. А. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
cherevko@mail.ru

Артериовенозная мальформация головного мозга (АВМ) – врожденная сосудистая патология, при которой артериальное и венозное русла соединяются клубком сросшихся патологических сосудов. Распространенный и предпочтительный способ ее лечения – проведения нейрохирургической операции по эмболизации. При этом патологические сосуды заполняются специальным твердеющим веществом (эмболическим агентом).

Предложен подход к моделированию гемодинамики в АВМ и ее сосудистом окружении во время эмболизации. Математически моделируются рацемозные (мелкососудистые) АВМ или отдельные рацемозные части (компарменты) АВМ. Для учета изменения кровотока в окружении патологии, возникающего вследствие заполнения АВМ эмболическим агентом, одномерная модель двухфазной фильтрации для патологии сопрягается с гидравлической моделью окружающих патологию сосудов. Производится моделирование потока крови на входе в патологию вместо использования клинических данных об этом потоке. Такой подход не требует описания перетоков крови из здорового артериального бассейна в венозный, данные о которых клинически получить затруднительно. Это позволяет при наличии данных о фильтрационных свойствах патологии и ее гемодинамическом окружении проводить предоперационные оценки хода эмболизации и перестройки гемодинамики в окрестности патологий.

Математическая модель описывается цепочкой интегро-дифференциальных гиперболических уравнений. Для определения параметров и функций, входящих в модель, используются реальные клинические данные пациентов. На основе модели поставлена и численно исследована в специальном классе управлений задача оптимального управления многоэтапной эмболизацией. Для численного решения гиперболического уравнения в частных производных с невыпуклой функцией потока, возникающего при моделировании двухфазной фильтрации, применяется монотонная модификация метода SABARET, который с высокой точностью локализует сильные и слабые разрывы, возникающие при решении данной задачи. Оптимальные режимы эмболизации для реальных пациентов находятся с помощью модифицированного «метода роя частиц» – численного метода глобальной оптимизации. Найденные оптимальные режимы эмболизации демонстрируют хорошее совпадение расчетных данных с клиническими. Предложенный подход может быть использован для получения предоперационных рекомендаций об оптимальной тактике хирургического вмешательства. Для этого должны быть заданы из медицинских соображений два параметра – максимально допустимое артериальное давление в течении операции и минимальное венозное давление в конце операции. В этом случае, имея данные о потоке, давлении и геометрии сосудов вблизи патологии до начала операции (предоперационные данные гемодинамики) можно определить параметры модели и рассчитать приближенный оптимальный режим эмболизации.

Литература

- [1] Черевко А. А., Шарифуллина Т. С., Панарин В. А. Математическая модель перестройки гемодинамики в окружении сосудистой патологии при нейрохирургическом вмешательстве // Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 65. №. 1. С. 104-118.

⁷⁵Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, номер проекта 22-11-00264, <https://rscf.ru/project/22-11-00264>.

- [2] Cherevko A. A., Gologush T. S., Petrenko I. A., Ostapenko V. V., Panarin V. A. Modelling of the arteriovenous malformation embolization optimal scenario // Royal Society Open Science. 2020. T. 7. №. 7. С. 191992.

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ⁷⁶

Панов А. В. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

gjd.y@ya.ru

Воронин С. М. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет

voron@csu.ru

Рассматривается динамическая система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\varphi_1(x, y, z) + y\varphi_2(x, y, z), \\ \dot{y} &= x\psi_1(x, y, z) + y\psi_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= x\chi_1(x, y, z) + y\chi_2(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где функции φ_i , ψ_i , χ_i предполагаются достаточно гладкими. Такие системы, а также их бифуркации, возникают в исследованиях динамики многофазных сред. Динамические системы с неизоллированными особыми точками изучались, например, в работах [1], [2]. В докладе будет рассказано о бифуркациях системы (1), возникающих в окрестности точки особой кривой $\gamma = \{x = y = 0\}$, в которой линейная часть системы имеет два нулевых собственных значения. Будут представлены топологические нормальные формы бифуркаций коразмерности один.

Литература

- [1] Roussarie R. Mod'eles locaux de champs et de formes. Paris: Ast'erisque, 30, Soc. Math. France, 1975.
 [2] Ремизов А. О. Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 19. С. 131-170.

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА-НЕЙМАНА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Панов Е. Ю. (Россия, Великий Новгород)

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

evpanov@yandex.ru

В области $t, x > 0$ рассматривается многофазная задача Стефана

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1)$$

где $u_0 < u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = +\infty$, u_i , $i = 1, \dots, m$ – температуры фазовых переходов, $a_i > 0$, $i = 0, \dots, m$, – коэффициенты диффузии для i -ой фазы. Рассматриваются непрерывные, невозрастающие по x решения $u = u(t, x)$, удовлетворяющие (1) в классическом смысле в областях $u_i < u(t, x) < u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m$. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где $u = u_i$, должно выполняться условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)-) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)+) = 0, \quad (2)$$

⁷⁶Работы выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-11-00142.

в котором $k_i > 0$ – коэффициент теплопроводности i -ой фазы, а $d_i \geq 0$ – скрытая удельная теплота i -го фазового перехода. Добавим к нашей задаче также начальное и краевое условия

$$u(0, x) = u_0, \quad u_x(t, 0) = b_N t^{-1/2}, \quad (3)$$

где $b_N < 0$. Ввиду инвариантности задачи (1),(2),(3) относительно группы преобразований $(t, x) \rightarrow (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda > 0$, естественно искать автомодельное решение $u = u(t, x) = u(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$. Из условия (3) следует, что $u'(0) = b_N$, $u(+\infty) \doteq \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_0$. Так как $b_N < 0$,

функция $u(\xi)$ не возрастает. Будем называть типом решения количество участвующих в нём фазовых переходов $n \in \overline{0, m}$, так что $u_n < u(0) \leq u_{n+1}$. Решение задачи (1), (2), (3) типа n получается “склеиванием” автомодельных решений уравнений теплопроводности (1) и имеет вид:

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

$$u(\xi) = u_n + a_n b_N \sqrt{\pi} (F(\xi/a_n) - F(\xi_n/a_n)), \quad 0 < \xi < \xi_n.$$

где $+\infty = \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_n > \xi_{n+1} = 0$, $F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2/4} ds$ (считаем, что $F(+\infty) = 1$). При $n > 0$ точки $\xi = \xi_i$, $i = 1, \dots, n$, на которых $u = u_i$, неизвестны и подлежат определению из условий (2). Оказалось, что эти условия сводятся к равенству $\nabla E = 0$, где функция

$$E(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^{n-1} k_i (u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i))$$

$$+ k_n a_n b_N \sqrt{\pi} F(\xi_n/a_n) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^2, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega,$$

задана и строго выпукла в открытом конусе $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, определяемым неравенствами $\xi_1 > \dots > \xi_n > 0$. Таким образом, решение типа n соответствует единственной точке глобального минимума функции $E(\bar{\xi})$. Для существования этого глобального минимума необходимым и достаточным является условие

$$k_n > \bar{k}_n \doteq - \frac{k_{n-1} (u_n - u_{n-1})}{\sqrt{\pi} a_{n-1} b_N F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1})}, \quad (4)$$

в котором ξ_{n-1}^0 точка фазового перехода (с температурой u_{n-1}) для автомодельного решения $u_D(\xi)$ задачи Стефана (1), (2) с начальным условием $u(0, x) = u_0$ и краевым условием Дирихле $u(t, 0) = u_n$ (доказывается, что всегда существует единственное автомодельное решение этой задачи и оно не зависит ни от b_N , ни от параметров a_i, k_i, d_i при $i \geq n$). При $n = 1$ полагаем в (4) $\xi_{n-1}^0 = +\infty$, так что $F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1}) = 1$. Если значение $k_n - \bar{k}_n > 0$ достаточно мало, то выполнено и условие

$$u(0) = u_n - a_n b_N F(\xi_n/a_n) \leq u_{n+1},$$

означающее, что тип решения действительно равен n . При $n = 0$ это условие имеет вид $u_0 - a_0 b_N \leq u_1$ и может быть достигнуто выбором a_0 . Выбирая последовательно параметры $a_0, k_i, i = 1, \dots, m$, мы можем добиться выполнения (или нарушения) условий существования решений типа n при всех $n = 0, \dots, m$. Поэтому, для любого подмножества $I \subset \overline{0, m}$ можно так выбрать параметры задачи, что существуют решения тех и только тех типов n , которые входят в I . В частности, в общем случае нарушены как существование, так и единственность решения.

МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИЗИСА АГРЕССИВНЫХ ИНВАЗИЙ
В УРАВНЕНИЯХ С ВОЗМУЩЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ⁷⁷

Переварюха А. Ю. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН
madelf@rambler.ru

Обсуждается моделирование стремительных кризисов в ходе инвазионного процесса на основе уравнений, где стохастические факторы учтены возмущением запаздывания. Проблема моделируемой ситуации инвазии в том, что регулируемое противодействие агрессивно размножающемуся виду в биологическом сообществе вырабатывается с запаздыванием и приводит к резкому переходу в фазу депрессии численности вселенца, но это запаздывание не константа. Направление продолжим развивать в модификации с $\dot{N} = rF(N(t))^\Theta$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t)/(K + \vartheta N))^\Theta}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}.$$

Решения подобных моделей описывают уравнивающиеся процессы $\forall N(0) > 0$. Не все уравнения имеет смысл дополнять включением $t - \tau$. Отличие моделей ограниченного роста — положение точки перегиба $N_p \neq 0$ на графике $N(t)$. Для модели ордината точки перегиба $N_p = K/2$, абсцисса $t_p = r^{-1} \ln(K - N(0))/N(0)$. Положение ординаты точки перегиба N_p установим для оптимальной эксплуатации с изъятием $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$.

Сравним динамику модели инвазионного процесса для агрессивного вселенца с $N(t - \tau)$ и модель инвазии в форме уравнения с отклоняющимся аргументом, где величина запаздывания τ возмущена равномерно распределенной случайной величиной $\gamma \in [-0.5, 0.5]$, что отражает влияние случайных факторов на небольшую исходную группу особей-вселенцев. Для включения стохастической компоненты лучше возмущать именно величину запаздывания $\gamma\tau$, что качественно отразится на сценариях завершения инвазионного процесса. Эффекты запаздывания разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. В результате биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, включая гибель $N(t_\infty) = 0$.

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим \ln_K -регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t - \nu))$ и при $Q > q, m \geq 2, N(0) < J < K$. Запаздывание ν в модели возмущено равномерно распределенной случайной величиной $\nu \times \gamma$ на отрезке $[0, 0.5\nu]$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right) - Q \frac{N^m(t - \nu \times \gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t). \quad (1)$$

Вместо стабилизации $N(t) \rightarrow K, N(t_S) < K$ и превышения равновесия K стадия кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \rightarrow J$ и потенциал роста не нивелирован \ln_K -регуляцией. Время активации вариативно, но не менее τ_1 . Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \quad (2)$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению $J, N(0) < J < K$ резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t), \max N_*(t) < J$ зависит от стохастических временных факторов. Популяция погибает при увеличении репродуктивного потенциала r . Можно показать, что существует $r = \bar{r}$, что для события $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} N(t; \bar{r}\tau) = 0$ вероятность $P > 0$ и $\exists \hat{r} > \bar{r}, t < \infty$ реализуется для данного события $P = 1$. \hat{r} критический порог репродуктивной активности.

⁷⁷Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект 23 - 21 - 00339.

Литература

- [1] Переварюха А. Ю. Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41–44.
- [2] Переварюха А. Ю. Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления. 2013. № 45. С. 82–91.
- [3] Perevaryukha A. Y. An iterative continuous-event model of the population outbreak of a phytophagous hemipteran // Biophysics. 2016. Vol. 61, № 2. С. 334–341.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА С ЧАСТОТОЙ ПРЕЦЕССИИ ЛУННОЙ ОРБИТЫ

Перепёлкин В. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
vadimkin1@yandex.ru

Румянцев Д. С. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
lanina.anastasiia5@mail.ru

Механизм возбуждения чандлеровского колебания земного полюса является одним из интереснейших вопросов науки. Исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса (как чандлеровской, так и годичной) важно для задачи прогнозирования движения полюса и необходимо для изучения механизма возбуждения и поддержания чандлеровского колебания.

Синфазность вариаций параметров основных компонент (чандлеровского и годичного колебаний) движения земного полюса и прецессии лунной орбиты была установлена в [1]–[3]. Выявлен нестационарный характер амплитуд найденного колебательного процесса в чандлеровской и годичной компонентах, а частоты и фазы достаточно стабильны [1]–[3]. Это указывает на наличие регулярности возмущений, а размытость пиков в спектре, возникающая вследствие нестационарности амплитуд, — на влияние геофизических процессов. В то же время, найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана [4].

Простейшая модель движения полюса [5] представляет собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами относительно координат полюса x_p , y_p , содержащие диссипативные слагаемые, и правой частью μ_x , μ_y , обусловленной возмущениями различного характера (гравитационными, атмосферными, океаническими и другими), приводящими к наблюдаемому движению полюса. Однако исследуемые вариации даже с учётом известных геофизических возмущений не удаётся объяснить в рамках простейшей модели.

В данной работе исследуется механизм возбуждения найденных колебаний на основе более сложной модели полюсного прилива в дифференциальных уравнениях движения полюса:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - (N + a_{\Omega}^{cx} \cos \Omega + a_{\Omega}^{sx} \sin \Omega) y_p &= \sigma x_p + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + (N + a_{\Omega}^{cy} \cos \Omega + a_{\Omega}^{sy} \sin \Omega) x_p &= \sigma y_p + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где N — чандлеровская частота, σ — коэффициент диссипации, Ω — долгота восходящего узла лунной орбиты, μ_x , μ_y — возмущения.

В модели (1) учитываются приливные деформации мантии Земли, которые получаются как комбинация влияний смещения полюса и долгопериодического возмущения от Луны. Уравнения (1) представляют собой уравнения с медленно меняющимися параметрами, а именно с 18-летней вариацией чандлеровской частоты, которая достаточно хорошо наблюдаема в чандлеровском периоде.

На основе модели (1) движения полюса и численной обработки данных наблюдений определены параметры уравнений (1), соответствующие наблюдаемому колебательному процессу с частотой прецессии лунной орбиты как в чандлеровской компоненте, так и в

годовой. Использование модели позволяет существенно повысить точность прогнозирования положения полюса.

Литература

- [1] Перепёлкин В. В., Рыхлова Л. В., Филиппова А. С. Долгопериодические вариации в колебательном процессе земного полюса, вызванные лунным возмущением // *Астрономический журнал*. 2019. Т. 96, №3, С. 255–264.
- [2] Перепёлкин В. В., Рыхлова Л. В., Сое Вэй Ян О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // *Астрономический журнал*. 2022. Т. 99, №1, С. 75–87.
- [3] Perepelkin V.V. and Rumyantsev D.S. The influence of the average frequency of oscillations of the Earth's pole on the accuracy of predicting its position // *IEEE* 2020 doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140555.
- [4] Krylov S.S., Perepelkin V.V., Filippova A.S. Estimation of the contribution of geophysical perturbations to the Earth pole oscillatory process at the precession frequency of the lunar orbit // *Materials Science and Engineering* 927 (2020) 012036.
- [5] Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. Движение полюса Земли // *ДАН*. 2002. Т. 382, №2, С. 199–205.

ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЛУННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА

Перепёлкин В. В. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
vadimkin1@yandex.ru

Румянцев Д. С. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
lanina.anastasia5@mail.ru

Солнце и Луна оказывают наибольшее воздействие на движение Земли по орбите и перемещение её подвижных сред. Момент сил гравитационного возмущения от Луны приводит к изменению углов прецессии и нутации Земли, которые испытывают наибольшие вариации с периодом 18.61 лет прецессии орбиты Луны [1]. Можно показать, что указанные вариации присущи и движению мгновенной оси вращения Земли в связанной системе координат. Ранее было предложено преобразование координат земного полюса, позволяющее установить синфазность вариаций в его движении и прецессии лунной орбиты [2]-[4]. Переход от исходной земной системы координат (x, y) к новой системе (ξ_p, η_p) , в которой полюс совершает колебания, синфазные с прецессионным движением лунной орбиты, в матричной записи задаётся выражением:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2 - w_1) \left[\Pi(w_1) \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (1)$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_{ch}, & \text{если } a_{ch} < a_h, \end{cases}$$

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_h, & \text{если } a_{ch} < a_h, \end{cases}$$

$$\dot{w}_h = \nu\omega_*, \quad \dot{w}_{ch} = N\omega_*.$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ – матрица плоского поворота на угол α ; a_0 – среднее значение амплитуды колебаний полюса при его движении вокруг "средней точки" за 6-летний цикл (без трендовой составляющей); c_x, c_y задают положение "средней точки" полюса и содержат константы, вековые слагаемые и вариации с периодами более шести лет; a_{ch}, a_h – амплитуды чандлеровской и годичной гармоник с фазами w_{ch}, w_h , соответственно; $N \cong 0.843, \nu = 1 -$

чандлеровская и годовая частоты, измеряемые в циклах/год; ω_* – среднее движение барицентра системы Земля-Луна по орбите вокруг Солнца; $\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1 = \pm \nu_T \omega_*$ – частота шестилетней цикличности движения полюса.

В данной работе предложен второй способ преобразования координат земного полюса к системе, в которой его движение происходит синфазно с изменением ориентации плоскости лунной орбиты по отношению к экватору Земли. Первый способ преобразования использовал только численную обработку данных наблюдений, а второй основан на кинематических свойствах движения полюса.

С помощью численной обработки ряда C01 данных наблюдений и измерений о движении земного полюса на длительном интервале времени, начиная с 1900 года, выделен колебательный процесс земного полюса, связанный с прецессионным движением орбиты Луны. Показано, что в новой системе координат (ξ_p, η_p) после преобразования полярный радиус b совершает колебания, синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, а колебания полярного угла $\delta\varphi$ происходят синфазно с отклонением θ вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором.

Литература

- [1] International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS Annual Reports (<http://www.iers.org>).
- [2] Перепёлкин В. В., Рыхлова Л. В., Филиппова А. С. Долгопериодические вариации в колебательном процессе земного полюса, вызванные лунным возмущением // *Астрономический журнал*. 2019. Т. 96, №3, С. 255–264.
- [3] Перепёлкин В. В., Рыхлова Л. В., Сое Вэй Ян О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // *Астрономический журнал*. 2022. Т. 99, №1, С. 75–87.
- [4] Perepelkin V.V. and Rumyantsev D.S. The influence of the average frequency of oscillations of the Earth's pole on the accuracy of predicting its position // *IEEE* 2020 doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140555.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ⁷⁸

Петросян А. С. (Армения, Ереван)

Национальный аграрный университет Армении
haykuhi25@mail.ru

Доклад посвящен исследованию вопросов существования и единственности неотрицательного нетривиального и ограниченного решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Такие уравнения возникают в кинетической теории газов в рамках модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана. Доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного нетривиального и ограниченного решения. Исследуется асимптотическое поведение решения на бесконечности. В определенном подклассе неотрицательных нетривиальных и ограниченных функций доказывается также единственность построенного решения. Приводятся конкретные прикладные примеры ядра и нелинейности исследуемого уравнения.

⁷⁸Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта no. 21Т-1А047.

Петухов В. С. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А.К.Айламазяна РАН
vladimir@sycore.org

Сачков Ю. Л. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А.К.Айламазяна РАН
yusachkov@gmail.com

В докладе рассмотрена почти лоренцева задача оптимального управления на плоскости Грушина в следующей постановке:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \\ q &\in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \\ q(0) &= q_0 = (0, 0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1), \\ X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Исчерпывающе исследованы нормальные и аномальные оптимальные траектории (лоренцевы длиннейшие) с использованием принципа максимума Понтрягина, вычислено множество достижимости, сферы и расстояние в лоренцевой метрике для следующих классов управления и функционалов качества :

$$\begin{aligned} u \in U &= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq |u_2|\}, & l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max, \\ u \in U &= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 \geq |u_1|\}, & l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_2^2 - u_1^2} dt \rightarrow \max, \\ u \in U &= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1, u_2 \geq 0\}, & l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1 u_2} dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Литература

- [1] Сачков Ю. Л. Введение в геометрическую теорию управления, URSS, (2021).
- [2] Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint, Cambridge Univ. Press, 2019.
- [3] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1961.

ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ⁸⁰

Пискарев С. И. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
piskarev@gmail.com

Мы рассматриваем дискретизация уравнений в частных производных разностными схемами. А именно, рассматриваются дробные уравнения

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u^0,$$

в банаховом пространстве и они аппроксимируются явными и неявными разностными схемами. Такие задачи отличаются от классических тем, что гладкость начальных данных и скорость сходимости разностных схем имеют [1] – [4] специфическую связь $O(\tau^\alpha)$.

О такой специфике для дробных уравнений мы и поговорим.

⁷⁹Исследование выполнено в ИПС им. А.К.Айламазяна РАН за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>.

⁸⁰Работа выполнена при поддержке гранта РФФ N 23-21-00005.

Литература

- [1] Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev Sergey. Convergence Rates of a Finite Difference Method for the Fractional Subdiffusion Equations // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Cham Switzerland. 2023. V. 423, PP. 89-113.
- [2] Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S. Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in $L^p([0, 1], \Omega)$ // Applied Mathematics and Computation. 2021. V. 389, Article 125574.
- [3] Piskarev S., Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2022. V. 10, PP. 58 – 72.
- [4] Piskarev S., Ovchinnikov A. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. Singapore: World Scientific. 2023.

ДЕСИНХРОНИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЯХ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ В. А. ЯКУБОВИЧА

Плотников С. А. (Россия, Санкт-Петербург)

Институт проблем машиноведения РАН

waterwolf@gmail.com

В последние десятилетия задачи об исследовании динамики сложных сетевых систем привлекают специалистов в различных областях науки. Самым изученным состоянием динамической сети является состояние синхронизации, для которого было введено несколько определений [1] и получено множество результатов, в том числе и математических. Другие возможные состояния динамических сетей мало изучены на данный момент, особенно мало получено математических результатов. В данной работе вводится определение координатной десинхронизации и приводится теорема, устанавливающая достаточные условия десинхронизации в нелинейных динамических сетях. Приведенные результаты основаны на работах В. А. Якубовича о колебательности динамических систем [2], [3].

Рассмотрим N объектов (процессов) с состояниями $\mathbf{x}_i(t)$ со значениями в \mathbb{R}^n . Введем для них среднюю динамику $\bar{\mathbf{x}} = 1/N \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$ и ошибки синхронизации $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}$.

Определение 1. *Сеть из N объектов (процессов) будем называть частично десинхронизированной, если существуют выход $\psi = \eta(\mathbf{e}_i)$, где $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, и достаточно большие $\Delta_i > 0$ такие, что для некоторых $i = 1, \dots, N$ выход $\psi = \eta(\mathbf{e}_i)$ является (α, β) -колебательным и выполнены неравенства $\beta - \alpha \geq \Delta_i, \forall t \geq 0$.*

Если неравенства выполнены для всех $i = 1, \dots, N$, то сеть называется полностью десинхронизированной.

Рассмотрим однородную сеть из N нелинейных систем в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{f}^y(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)) - \mathbf{u}_i(t), \\ \dot{\mathbf{z}}_i(t) &= \mathbf{f}^z(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{z}_i(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ – выход и вход i -й системы, соответственно, а $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{n-m}$ – ее поль-динамика. Вектор-функции $\mathbf{f}^y : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{f}^z : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ являются локально липшицевыми.

Пусть связи между системами будут линейными диффузионными:

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} [\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t)], \quad (2)$$

где a_{ij} – коэффициенты связи между соответствующими узлами. Введем векторы состояния $\mathbf{x}_i = \text{col}(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ каждой системы (1).

Теорема 1. *Пусть все решения сети (1), (2) ограничены, а граф сети является неориентированным. Пусть все положения равновесия \mathbf{x}_j^* несвязанной системы (1)*

являются локально устойчивыми, а все матрицы линеаризованной сети (1), (2) вокруг каждого из положений равновесия $\text{col}(\mathbf{x}_j^*, \dots, \mathbf{x}_j^*)_N$, имеют хотя бы одно собственное число с положительной вещественной частью и не имеют чисто мнимых собственных чисел. Тогда сеть (1), (2) является частично десинхронизированной при некотором $\Delta > 0$. Если $(N-1)n$ собственных чисел матриц линеаризованной сети имеют положительные вещественные части, то сеть (1), (2) будет полностью десинхронизирована при некотором $\Delta > 0$, если начальные данные не лежат в множестве $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_j^*\}$.

Доказательство данной теоремы основано на координатном преобразовании, описанном в работе [4], позволяющем рассмотреть систему (1), (2) в новых координатах *средняя динамика – ошибки синхронизации*, и применении теоремы о колебательности, предложенной В. А. Якубовичем к системе из ошибок синхронизации.

Литература

- [1] Фрадков А. Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. Спб.: Наука, 2003.
- [2] Якубович В. А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 5. С. 1100–1129.
- [3] Томберг Э. А., Якубович В. А. Условия автоколебаний в нелинейных системах // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 4. С. 180–195.
- [4] Panteley E., Loria A. Synchronization and dynamic consensus of heterogeneous networked systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2017. Vol. 62. No. 8. P. 3758–3773.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА УЧАСТКАХ С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТНЫМИ РЕЖИМАМИ⁸¹

Погребняк М. А. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

rogrebnyakmaksim@mail.ru

Работа посвящена расширению математической модели движения транспортного потока, предложенной в [1, 2]. Расширенная модель описывает динамику движения нескольких автомобилей на участках с различными скоростными режимами.

Разделим весь участок дороги на $M \in \mathbb{N}$ интервалов. Обозначим за φ^m начало m -ого интервала.

Будем считать, что водитель транспортного средства стремится ехать с максимальной допустимой скоростью на каждом участке:

$$V_{max,n}^m = v_{max,n}^m, \quad \text{если } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1}.$$

Введем функцию $V_{min,n}^m$ вида:

$$V_{min,n}^m = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau), v_{max,n}^{m+1}), \quad \text{при } n > 1 \text{ и } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1},$$

будет описывать скорость под которую транспортное средство должно подстраивать свою текущую скорость ($V_{min,1}^m = V_{max,1}^{m+1}$).

Транспортное средство должно заранее обратить внимание на начало следующего интервала и подстроить свою скорость:

$$\Phi_n^m = \begin{cases} \min(\varphi_n^{m+1}, x_{n-1}(t - \tau)), & \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1} \text{ и } \dot{x}_n \geq V_{max,n}^{m+1}, \\ x_{n-1}(t - \tau), & \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1} \text{ и } \dot{x}_n < V_{max,n}^{m+1}. \end{cases}$$

Таким образом, модель для движения транспортного потока на участках с различными скоростными интервалами будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1^m [a_1 (V_{max,1}^m - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1^m)H_1^m, \\ \ddot{x}_n(t) = R_n^m [a_n (V_n^m - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n^m)H_n^m, \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

⁸¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-71-30011).

где $a_n > 0$ — коэффициент чувствительности. P_n^m — логистическая функция вида:

$$P_n^m = \frac{V_{max,n}^m - V_n^m}{1 + \exp[k_n(-\Delta x_n^m(t, \tau) + S_n^m)]} + V_n^m,$$

в которой $\Delta x_n^m(t, \tau) = \Phi_n^m - x_n(t)$, $k_n > 0$ — скорость логистического роста. Функция V_n^m имеет вид:

$$V_n^m = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau), V_{max,n}^m) \quad \text{при } n > 1, \quad V_1^m = V_{max,1}^m.$$

S_n — параметр логистической кривой, который отражает расстояние, начиная с которого влияние впереди идущего автомобиля перестает превалировать над преследующим:

$$S_n^m = (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n + \tau\Delta\dot{x}_n^m(t, \tau),$$

в которой $\Delta\dot{x}_n^m(t, \tau) = V_{min,n}^m - \dot{x}_n(t)$, τ — время реакции водителя, t_b — время срабатывания тормозной системы, μ — коэффициент трения скольжения, g — ускорение свободного падения. Параметр l_n — сумма безопасного расстояния между двумя соседними автомобилями и длины впереди идущей машины.

Функция Хевисайда H_n^m имеет вид:

$$H_n^m = \begin{cases} q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta\dot{x}_n^m(t, \tau)}{\Delta_l x_n^m(t, \tau)} \right)^2, & q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta\dot{x}_n^m(t, \tau)}{\Delta_l x_n^m(t, \tau)} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta\dot{x}_n^m(t, \tau)}{\Delta_l x_n^m(t, \tau)} \right)^2 > \mu g. \end{cases}$$

где $\Delta_l x_n^m(t, \tau) = \Phi_n^m - x_n(t) - l_n$, а $q_n > 0$ описывает интенсивность торможения автомобиля.

Релейная функция R_n^m имеет вид:

$$R_n^m = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n^m(t, \tau) > (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n^m(t, \tau) \leq (\tau + t_b)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n. \end{cases}$$

Литература

- [1] Погребняк М. А. Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк. // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 10. — С. 95–109.
- [2] Погребняк М. А. Оценка параметров в модели транспортного потока // Математическое моделирование / М. А. Погребняк. // Математическое моделирование. — 2024. — Т. 36, № 1. — С. 131–140.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

Постнов С. С. (Россия, Москва)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
postnov.sergey@inbox.ru

Пусть поведение системы описывается диффузионно-волновым уравнением:

$$r(x)_0^C D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[w(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] - q(x)Q(x, t) + u(x, t), \quad \alpha \in (0, 2), \quad (1)$$

где $Q(x, t)$ — состояние системы, $u(x, t)$ — распределённое управление, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени в смысле определения Капуто, $t \geq 0$, $x \in [0, L]$, $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$. Функции $r(x)$, $w(x) > 0$, $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0, L]$.

Начальные условия для уравнения (1):

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0, L], \quad k = 0, \dots, [\alpha]. \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (1):

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + a_i Q(x, t) \right]_{x=x^i} = u^i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$; $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_p[0, T]$, $p > 1$ и могут быть объединены в вектор $U(t) = (u^1(t), u^2(t))$. Распределённое управление рассматривается в виде подвижного управления [1]:

$$u(x, t) = p(t)\psi(x - x_0(t)),$$

где $p(t) \in L_p[0, T]$ определяет интенсивность управляющего воздействия, $x_0(t) \in L_p[0, T]$ — положение источника этого воздействия, а функция $\psi(x)$ определяет пространственную форму воздействия (пространственное распределение интенсивности воздействия).

Управление должно обеспечить достижение системой заданного (желаемого) состояния $Q^*(x)$ в заданный момент времени $T > 0$:

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad T > 0, \quad x \in [0, L]. \quad (4)$$

Рассматриваются две задачи оптимального управления [2]: найти управления $u(x, t)$, $u_{1,2}(t)$ такие, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3) достигает при $t = T$ состояния (4) и при этом либо норма управлений будет минимальной при заданном времени T , либо время перехода в заданное состояние будет минимальным при заданном ограничении на норму управлений $\|U(t)\| \leq l$ ($l > 0$ — заданное число).

Сформулированные выше задачи оптимального управления сводятся к некоторой обобщённой проблеме моментов, а в случае приближённого решения диффузионно-волнового уравнения — к обычной конечномерной l -проблеме моментов [3].

В случае задачи граничного управления соответствующая конечномерная проблема моментов, при определённых условиях, имеет точное решение, на основе которого строится решение задач оптимального управления. В работе проанализированы примеры, когда решение задачи быстрогодействия может не существовать, в то время как решение соответствующей проблемы моментов существует [4]. Эти примеры демонстрируют качественное отличие решений задачи быстрогодействия для уравнений дробного порядка от её решений для аналогичных уравнений целого порядка (диффузии и колебаний).

В случае подвижного управления получаемая проблема моментов является нелинейной. Для неё исследованы вопросы разрешимости и частные решения.

Литература

- [1] Кубышкин В. А., Финягина В. И. Подвижное управление в системах с распределёнными параметрами. М.: Синтез, 2005.
- [2] Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965.
- [3] Postnov S. S. Optimal control for systems modeled by the diffusion-wave equation // Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol. 64. No. 3. P. 757–766.
- [4] Постнов С. С. О поиске оптимального по быстроддействию граничного управления с помощью метода моментов для систем, описываемых диффузионно-волновым уравнением // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 225. С. 108–114.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА В КВАДРАТНОЙ ЯЧЕЙКЕ

Посудневская А. О. (Россия, Москва)

Институт автоматизации проектирования РАН
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
posudnevskaja.a.o@phystech.edu

Долуденко А. Н. (Россия, Москва)

Объединенный институт высоких температур РАН
adoludenko@gmail.com

Среди распространенных в природе хаотических явлений особый интерес представляют квазидвумерные течения, для которых характерно возникновение когерентных структур (вихрей) [1], [2], [3]. В работе рассматривается двумерное течение вязкой слабосжимаемой жидкости в квадратной ячейке, которое возбуждается внешней силой (накачкой) с характерной длиной меньше размеров ячейки (Течение Колмогорова).

В работе [4] путем прямого численного моделирования системы уравнений Навье-Стокса численным методом Мак-Кормака с использованием модели слабосжимаемой жидкости получены различные типы крупномасштабных течений: вихревой, в котором доминирует большой вихрь с хорошо определенным средним профилем, хаотический, при котором существуют вихри различного масштаба и времени жизни, и ламинарный. Характер течения зависит от величин внешней возбуждающей силы, коэффициента кинематической вязкости жидкости, волнового вектора внешней силы и коэффициента трения о дно.

В данной работе представлены различные способы анализа характеристик течений, возникающих в исследуемой задаче. Рассматриваются следующие методы анализа режимов течений: ранговое распределение поля завихренности, характер поведения координаты с максимальной завихренностью и компонент разложения Фурье поля скорости. Выделены характерные для определенных типов течения свойства исследуемых параметров.

Литература

- [1] Kraichnan R. H. Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10. P. 1417-1423.
- [2] Batchelor G. K. Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12, Suppl. II. P. 233-239.
- [3] Kolokolov I. V., Lebedev V. V. Large-scale flow in two-dimensional turbulence at static pumping // JETP Lett. 2017. Vol. 106, 10. P. 659-661.
- [4] Doludenko A. N., Fortova S. V., Kolokolov I. V., Lebedev V. V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids. 2021. V. 33. P. 011704.

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕСОБЫХ 4-ПОТОКОВ С НЕСКРУЧЕННОЙ СЕДЛОВОЙ ОРБИТОЙ

Починка О. В. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
olga-pochinka@yandex.ru

Топологической эквивалентности маломерных потоков Морса-Смейла без неподвижных точек (НМС-потоков) в предположениях различной общности посвящен целый ряд работ. Начиная с размерности 4 имеется пока незначительное число классификационных результатов. Однако, известно, что существуют четырехмерные неособые потоки с дико вложенными инвариантными седловыми многообразиями. В настоящей статье рассмотрен класс неособых потоков Морса-Смейла, заданных на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях и имеющих единственную седловую орбиту, которая является нескрученной. Установлено, что полным

инвариантом для них является класс эквивалентности узла, вложенного в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. По любому узлу в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, построен стандартный представитель в классе рассматриваемых потоков. Также доказано, что несущим многообразием всех таких потоков является многообразие $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Литература

- [1] Pochinka O., Shubin D. On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 5(2):261-266, 2020.
- [2] Pochinka O., Shubin D. Non-singular Morse-Smale flows on manifolds with attractor-repeller dynamics // Nonlinearity, 35(3):1485, 2022.
- [3] Pochinka O., Shubin D. Nonsingular Morse-Smale flows with three periodic orbits on orientable 3-manifolds // Mathematical Notes, 112(3):436-450, 2022.

О РАЗМЕРНОСТИ МИНКОВСКОГО НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Починка О. В. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
olga-pochinka@yandex.ru

Ягилев А. А. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
agilevandrej@gmail.com

Текст с основными положениями доклада.

Хорошо известно, что фрактальное множество не является подмногообразием объемлющего пространства. Однако, фракталы возникают, как инвариантные подмножества, даже в бесконечно гладких динамических системах и размерность Минковского служит в этом случае характеристикой сложности такого множества. Например, в момент потери устойчивости состоянием равновесия при бифуркации Андронова-Хопфа, замыкание неособой траектории является параметрически заданной кривой фрактального типа. В настоящей работе вычислена фрактальная размерность таких кривых. Кроме того, исследовано двухпараметрическое семейство функций, размерность Минковского графиков которых варьируется в промежутке от 1 до 2. Полученный результат позволяет реализовать регулярную динамическую систему, замыкание двумерного устойчивого многообразия изолированной гиперболической точки которой может иметь размерность Минковского больше 2. Вычисление размерности графика основано на разбиении отрезка аргумента, его задающего, на две части. Размерность одной части графика при этом возможно оценить сверху с помощью непосредственного вычисления длины соответствующей кривой. Размерность другой оценивается сверху через площадь прямоугольника, в которой он лежит. Оценка размерности Минковского снизу основана на вычислении мощности ε -различимого множества точек графика.

Литература

- [1] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука. 1973. 575 с.
- [2] Fernandez-Martinez M., Sanchez-Granero M. A. A new fractal dimension for curves based on fractal structures // Topology Applications. 2016. Vol. 203. pp. 108-124.
- [3] Зелик С. В. Аттракторы. Тогда и сейчас // Успехи математических наук. 2023. Т. 78, № 4. С. 53-198.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ
БЕЗ ГРАНИЧНЫХ ВЕРШИН

Прядиев В. Л. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
pryad@mail.ru

Пусть $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m [a; b_i] \subset \mathbb{R}^n$, где $a \neq b_i \neq b_j$ при $i \neq j$, – геометрический граф-звезда, и пусть $J = \{a\} \cup \{\overline{b_i} \mid i = \overline{1, m}\}$ – множество его внутренних вершин. Рассмотрим задачу

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad x \in \Gamma \setminus J, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\sum_{h \in D(c)} u_h^+(c, t) = 0, \quad c \in J, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \text{ и } u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

где производная по x понимается в соответствии с [1], $u_h^+(c, t)$ – правая производная u в точке c по допустимому относительно Γ единичному вектору h , $D(c)$ – множество таких векторов, φ задана. Решение задачи (1)–(3) понимается классически.

Пусть функция $G : \Gamma^3 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и

1) $G_{xx}(x, s_1, s_2) = 0$ при $x \in \Gamma \setminus (J \cup \{s_1, s_2\})$,

2) $\sum_{h \in D(c)} G_h^+(c, s_1, s_2) = 0$ при $c \in J \setminus \{s_1, s_2\}$,

3) если $s_1 \neq s_2$, то $\sum_{h \in D(s_i)} G_h^+(s_i, s_1, s_2) = (-1)^i$ – для $i \in \{1; 2\}$ (здесь производные – по первому аргументу),

4) $\int_{\Gamma} G(x, s_1, s_2) dx = 0$.

Пусть \mathcal{C} – операторная косинус-функция, построенная в [2].

Теорема. Пусть сужение φ'' на любое из ребер $(a; b_i)$ равномерно непрерывно и, кроме того,

$$\sum_{h \in D(c)} \varphi_h^+(c, t) = 0, \quad c \in J, \quad \text{и} \quad \varphi_{hh}^{++}(a) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a) \quad h, \eta \in D(a).$$

Тогда решение задачи (1)–(3) существует, единственно и представимо в виде:

$$u(x, t) = \left(\sum_{i=1}^m |b_i - a| \right)^{-1} \left(\int_{\Gamma} \varphi(s) ds - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} g(x, t, s_1, s_2) \varphi''(s_1) ds_1 ds_2 \right),$$

где $g(x, t, s_1, s_2) = [\mathcal{C}(t)G(\cdot, s_1, s_2)](x)$.

Замечание. Функция G кусочно-линейна по первому аргументу.

Литература

- [1] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [2] Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Современная математика и её приложения. Т. 38. Труды международной конференции по динамическим системам и дифференциальным уравнениям (Суздаль, 5-10 июля 2004 г.) Часть 3. – Тбилиси: Ин-т Академии наук Грузии, 2006. С. 82-94.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ
КРАЕВЫХ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пулькина Л. С. (Россия, Самара)
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева
ludmila.pulkinina@gmail.com

В докладе рассматривается уравнение

$$u_{yy} - (au_x)_x - (bu_{xy})_x + cu = f(x, y),$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска-Лява и ставить для него начально-краевые задачи, так и как уравнение с доминирующей смешанной производной, и рассматривать для него задачи с условиями на характеристиках. Проведенные исследования позволили использовать эту особенность и увидеть возможность комбинирования методов исследования разрешимости начально-краевых и характеристических задач. Такой подход оказался особенно полезным в том случае, когда некоторые из условий задачи являются нелокальными.

ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Рабинович С. (Израиль, Тель-Авив)
Медицинский центр Ихилон
shaul.rabinovich@gmail.com

Малютин В. Б. (Беларусь, Минск)
Институт математики НАН Беларуси
malyutin@im.bas-net.by

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{E}} = 4\pi i_0, \quad \operatorname{div} \underline{\mathbf{H}} = 0, \quad \frac{1}{c} \partial_0 \underline{\mathbf{E}} - \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = -\frac{4\pi}{c} \underline{\mathbf{I}}, \quad \frac{1}{c} \partial_0 \underline{\mathbf{H}} + \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = 0,$$

где $\underline{\mathbf{E}} = (E_1, E_2, E_3)$, $\underline{\mathbf{H}} = (H_1, H_2, H_3)$, $\underline{\mathbf{I}} = (i_1, i_2, i_3)$, являются видимо наиболее известными уравнениями физики.

За полуторастолетнюю историю было предложено множество подходов и уточнений их решения. В этой заметке мы предлагаем новый подход для записи решений этих уравнений, который не использует потенциалы. В рассматриваемом подходе используются кватернионы, которые широко применяются в физике и математике [1], [2]. Мы покажем как нетрадиционная запись ведет непосредственно к нахождению функции Грина для этих уравнений.

Стартовой точкой этого подхода является запись Kuni Imaeda [3]

$$D\mathbf{F}^*(X) = -4\pi \underline{\mathbf{I}}, \tag{1}$$

где $D = \frac{1}{c} \partial_0 - e_1 \partial_1 - e_2 \partial_2 - e_3 \partial_3$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^3 e_j (E_j + iH_j)$, $E_0 = H_0 = 0$, $\underline{\mathbf{I}} = \sum_{j=0}^3 e_j i_j$, $e_0 = 1$, $e_j^2 = 1$, $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = i e_3$ и так далее.

В нашем случае формальная запись (1) распадается на четыре уравнения которые и являются в точности уравнениями Максвелла. Уравнения с нулевой правой частью являются точным аналогом уравнений Коши-Римана для комплекснозначной функции комплексного переменного. Решение таких уравнений записывают в виде полиномов Фютера [4].

Видно, что запись (1) это одно дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Как принято в таких случаях мы будем искать решение уравнения для функции Грина

$$DG(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}).$$

Можно решить эти уравнения заметив, что оператор D факторизует оператор Даламбера $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Именно, $-DD^\dagger = -D^\dagger D = \square$, где $D^\dagger = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Таким образом, для $G = -D^\dagger G_\square$ верно $DG(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ и решение уравнений Максвелла обретет форму

$$\mathbf{E} - i\mathbf{H} = 4\pi \int D^\dagger G_\square(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{I}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (2)$$

В общем случае функцию G_\square можно выбрать в виде линейной комбинации

$$G_\square = -c_1 \frac{\delta(cx_0 + r)}{4\pi r} - c_2 \frac{\delta(-cx_0 + r)}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Вычисляя оператор D^\dagger от функции $-G_\square$ мы получим функцию Грина G для нашей задачи.

$$G = -D^\dagger G_\square = c_1 \frac{\delta'(cx_0 + r)}{4\pi r} - c_2 \frac{\delta'(-cx_0 + r)}{4\pi r} + \left[-c_1 \frac{\delta(cx_0 + r)}{4\pi r^2} - c_2 \frac{\delta(-cx_0 + r)}{4\pi r^2} + c_1 \frac{\delta'(cx_0 + r)}{4\pi r} + c_2 \frac{\delta'(-cx_0 + r)}{4\pi r} \right] \frac{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}{r}. \quad (3)$$

Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 1. *Решение уравнений Максвелла (1) записывается в виде равенства (2), где $D^\dagger G_\square$ определяется формулой (3).*

Литература

- [1] Girard P. R. Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics. Birkhauser, Basel. 2007.
- [2] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Москва. 2003.
- [3] Imaeda K. Quaternionic formulation of classical electrodynamics and theory of functions of a biquaternion variable // Nuovo Cimento. 1976. V.32B. P.138-162.
- [4] Fueter R. // Comm. Math. Helv. 1934-1935. V.B7. P.307-330.

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БРОДВЕЛЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Радкевич Е. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
evrad07@gmail.com

Васильева О. А. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева
vasiljeva.ovas@yandex.ru

Филиппов Г. А. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
g.philippov@yandex.ru

Будет показано, что решения задачи Коши с периодическими начальными данными (периодические возмущения состояния равновесия) системы Бродвелла:

$$\partial_t n_1 + c \partial_x n_1 = \frac{1}{\varepsilon} (n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\partial_t n_2 - c \partial_x n_2 = \frac{1}{\varepsilon} (n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\begin{aligned}\partial_t n_3 + c \partial_y n_3 &= \frac{1}{\varepsilon} (n_1 n_2 - n_3 n_4), \\ \partial_t n_4 - c \partial_y n_4 &= \frac{1}{\varepsilon} (n_1 n_2 - n_3 n_4),\end{aligned}$$

стабилизируются к состоянию равновесия экспоненциально быстро.

Используется метод Фурье решений системы для коэффициентов Фурье, проекцией на одну переменную, например, $z_{k,l}$ (z -проекция).

1) Возникает препятствие к стабилизации для (k, l) , $(k^2 - l^2)k = 0$. Процесс назовем регулярным, если для начальных данных $z_{k,k}^0 = z_{k,-k}^0 = z_{0,l}^0 = 0$ для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, а так же $z_{0,0}^0 = u_{0,0}^0 = v_{0,0}^0 = w^0(0, 0) = 0$. Регулярный процесс стабилизируются к состоянию равновесия экспоненциально быстро.

2) Для нерегулярного процесса, когда коэффициенты Фурье $z_{k,k}^0, z_{k,-k}^0, z_{0,l}^0$ могут быть не равны нулю, но выполнены три условия согласования коэффициентов Фурье начальных данных препятствий, также процесс стабилизируются к состоянию равновесия экспоненциально быстро.

3) И последнее, если не выполнены условия согласования препятствий, возникает необходимость подключения второй проекции для построения Фурье решения (например, u -проекция). Представление решения задачи Коши как суммы двух решений, отвечающих этим проекциям (за счет соответствующей разбивки на две группы начальных данных), позволяет доказать экспоненциально быструю стабилизацию решения к состоянию равновесия.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Раецкая Е. В. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова
raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система в частных производных разного порядка:

$$\frac{\partial^2 x(t, s)}{\partial t^2} = B \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} + D \frac{\partial u(t, s)}{\partial s}, \quad (1)$$

с условиями

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad (2)$$

$$x(T, s) = \beta(s), \quad (3)$$

$$x(t, 0) = \gamma(t), \quad (4)$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]$; $x(t, s) \in R^n$; $u(t, s) \in R^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Существование такого управления $u(t, s)$, которое переводит систему (1) из произвольного состояния (2) в произвольное состояние (3), при этом состояние $x(t, s)$ удовлетворяет условию (4), подразумевает полную управляемость системы (1).

Решается задача управления, а именно, реализация процедуры структурного анализа исследуемой системы с целью выявления свойства матричных коэффициентов, влекущих полную управляемость или неуправляемость системы (1). В случае выявления свойства полной управляемости системы производится

- установление свойств функций $\alpha(s), \beta(s), \gamma(t)$ в условиях (2), (3), необходимых для реализации управляемого процесса;

- получение формул для построения функции управления $u(t, s)$ и соответствующей функции состояния $x(t, s)$.

Строится решение задачи программного управления, а именно, в аналитическом виде рассчитывается функция состояния, удовлетворяющая заданным изначально условиям, затем строится соответствующая функция управления.

Основным методом исследования является метод каскадной декомпозиции, хорошо зарекомендовавший себя при решении задач управления и наблюдения для различных динамических систем, а также при исследовании ряда их свойств (например, [1] – [3]). Предложенный подход позволяет избежать решения уравнения в частных производных; искомые функции находятся с помощью алгебраических преобразований и решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Практическая реализация метода позволяет избежать громоздких матричных преобразований и обойтись процедурой замены переменных. Метод базируется на свойствах матричного коэффициента при функции управления и заключается в пошаговом эквивалентном переходе от исходной системы к редуцированным системам в подпространствах. Выявляется функция, принадлежащая подпространству минимальной размерности, названная определяющей.

За конечное количество шагов декомпозиции выявляются свойства матричных коэффициентов, влекущие полную управляемость системы, а также свойства функций в заданных условиях, достаточные для реализации управляемого процесса.

Выводится критерий полной управляемости исходной системы. Для полностью управляемой системы производится построение определяющей функции, удовлетворяющей всем дополнительным, возникающим вследствие редукции исходных, условиям, что закладывает предпосылки для построения функций состояния и управления исходной системы. Установлено, что вид указанных функций определяется выбором вида определяющей функции; приведены формулы для построения этих функций.

Литература

- [1] Zubova S. P., Raetskaya E. V. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. New York : AIMS Press. 2021. Vol. 44. № 15. P. 11998–12009.
- [2] Раецкая Е. В. Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных разного порядка // *Моделирование систем и процессов*. 2023. Т. 16. № 1. С. 93–104.
- [3] Раецкая Е. В. Алгоритм построения полиномиального решения задачи программного управления для динамической системы в частных производных // *Моделирование систем и процессов*. 2023. Т. 16. № 3. С. 94–104.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ⁸²

Раутиан Н. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

nadezhda.rautian@math.msu.ru

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина-Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости и теории распространения тепла. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в большом числе прикладных задач.

Получены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными

⁸²Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

коэффициентами в гильбертовом пространстве, доказана теорема об экспоненциальной устойчивости полученной полугруппы при дополнительных предположениях о ядрах интегральных операторов.

Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве.

Основным результатом работы является теорема о корректной разрешимости этой задачи, а также начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения. Устанавливается связь между классическими решениями этих задач (см. [1]-[3]).

Литература

- [1] Раутиан Н. А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 9. С. 1226–1244.
- [2] Раутиан Н. А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, №4. С. 65–81.
- [3] Раутиан Н. А. Власов В. В. Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, №10, С. 1414–1430.

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ ПО НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Рачков А. А. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
rachkovaa@mai.ru

Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела (корпуса), опирающегося своей плоской гранью на наклонную шероховатую плоскость, и материальной точки, движущейся внутри тела в вертикальной плоскости по круговой траектории, центр которой совпадает с центром масс тела. Модуль скорости движения точки по окружности предполагается постоянным. Сила трения между корпусом и опорной поверхностью описывается моделью сухого кулоновского трения. Ранее рассматривалась задача о движении указанной механической системы по горизонтальной шероховатой плоскости без отрыва от поверхности [1-4]. Было выполнено полное качественное исследование всех возможных режимов движения в предположении, что на корпус действует как сила сухого кулоновского трения [1-3], так и сила вязкого трения [4]. В данной работе выполнено исследование качественного характера движения корпуса по наклонной плоскости без отрыва от поверхности для всех допустимых значений параметров задачи и произвольных начальных скоростей корпуса.

В данной задаче имеется 3 безразмерных параметра: μ – параметр, описывающий геометрические и динамические характеристики системы; k – коэффициент сухого трения; β – угол наклона плоскости, по которой движется корпус.

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Если для набора значений параметров системы (μ_*, k_*, β_*) выполняются соотношения $k_* < \tan \beta_*$ и $\mu_* \cos \beta_* \geq 1$, то не существует периодических режимов движения корпуса по наклонной плоскости без отрыва от поверхности.

Также было показано, что если условие $k_* < \tan \beta_*$ теоремы не выполняется, то может существовать только единственный периодический режим движения без отрыва корпуса от опорной поверхности. Характер периодического режима существенно зависит от значений параметров задачи. При исследовании характера периодического движения существенную роль играют интервалы времени, на которых ускорение корпуса всегда направлено против его скорости (или равно нулю, если корпус покоится). Такие интервалы называют *интервалами замедления*, а соответствующие им участки траектории движения подвижной массы – *зонами*

замедления. Было показано, что периодические режимы являются предельными режимами движения. Установлено, что на периодический режим движения с остановкой хотя бы в одной из зон замедления корпус выходит за конечный интервал времени. При определенных значениях параметров возможен периодический режим движения, при котором остановки корпуса происходят вне зон замедления. Выход на такой режим движения за конечный интервал времени невозможен. Движение корпуса асимптотически приближается к данному режиму.

Было показано, что в предельном случае $k = \tan \beta$ существует семейство периодических движений корпуса. Для таких движений перемещение корпуса за период оборота внутренней массы зависит только от значения его начальной скорости.

Литература

- [1] Bardin V. S., Panev A. S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2016, Vol. 8. pp 135–141.
- [2] Бардин Б. С., Панёв А. С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // *Труды МАИ*, 2015, Выпуск № 84.
- [3] Bardin V. S., Panev A. S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, Vol. 14, no. 4, pp. 519–542.
- [4] Бардин Б. С., Панёв А. С. О поступательном прямолинейном движении твердого тела, несущего подвижную внутреннюю массу // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2019, Т. 65, № 4, С. 557–592.

ОПТИМАЛЬНОЕ И СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМИ РОБОТИЗИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ПЛОСКОСТИ

Решмин С. А. (Россия, Москва)

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН

reshmin@ipmnet.ru

Исследована задача оптимального управления силой тяги инерционного объекта при его скоростном маневрировании в плоскости. Сила тяги постоянна и максимальна по величине. В общем случае начальная скорость не равна нулю. Задача состоит в управлении направлением тяги таким образом, чтобы перевести объект на заданную прямую в плоскости движения и максимизировать скорость вдоль этой прямой. Предложено несколько видов эффективного управления рассматриваемым объектом, включая непрерывное оптимальное управление, построенное на основе так называемого закона линейного тангенса, и релейные субоптимальные управления, максимум с одним или двумя переключениями. Предложено управление направлением тяги, учитывающее фазовые и смешанные ограничения, использующее модифицированный закон линейного тангенса. Рассмотрены приложения результатов к управлению мобильными роботизированными системами. При этом исследованы задачи траекторной оптимизации и задачи уклонения от столкновения с протяжённым препятствием.

ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК СБОРА РЕСУРСА

Родина Л. И. (Россия, Москва, Владимир)

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

LRodina67@mail.ru

Доказан один из вариантов теоремы сравнения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

в предположении, что вектор-функция f непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по аргументам x_1, \dots, x_n . Пусть $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x^0)$ является решением системы (1), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(t_0) = x^0$. Вместе с системой (1) исследуем систему

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

с такими же условиями для вектор-функции g . Неравенство $x \leq y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать, как неравенства $x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n$.

Будем говорить, что система (2) является *верхней системой сравнения* для (1), а система (1) является соответственно *нижней системой сравнения* для (2) в области $P \subseteq \mathbb{R}^n$ при $t \geq t_0$, если имеет место следующее условие.

Условие 1. Для любых $t \geq t_0, x \in P, y \in P$ выполнены неравенства

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_i(t, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Множество $P \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1), если для любой начальной точки $x^0 \in P$ траектория ее решения $\varphi(t, t_0, x^0)$ содержится в P при всех $t \geq t_0$. Обозначим через $\psi(t) = \psi(t, t_0, x^0)$ решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию $\psi(t_0) = x^0$.

Теорема 1. Пусть множество $P \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно систем (1), (2) и выполнено условие 1. Тогда для любых $x^0 \leq y^0, x^0 \in P, y^0 \in P$ неравенство $\varphi(t, t_0, x^0) \leq \psi(t, t_0, y^0)$ справедливо для всех $t \geq t_0$.

При помощи данной теоремы сравнения можно найти оценки характеристик сбора возобновляемого ресурса в случаях, когда не известны аналитические решения систем. Рассмотрим структурированную популяцию, состоящую из отдельных видов x_1, \dots, x_n , либо разделенную на n возрастных групп. Предполагаем, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в моменты времени $\tau(k) = kd, d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u(k) \in [0, 1]^n, k = 1, 2, \dots$.

Пусть $X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент $kd, k = 1, 2, \dots, x_i(0) = x_i^0$ — начальное количество ресурса, $C_i \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент времени kd равна $\sum_{i=1}^n C_i X_i(k) u_i(k)$. Одной из характеристик сбора ресурса является *средняя временная выгода* (см. [1], [2]) —

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Полученные результаты проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов таких, как симбиоз и конкуренция. Показано, что для моделей симбиоза и нейтрализма наибольшее значение средней временной выгоды достигается при одновременной эксплуатации ресурса двух видов. Для популяций, между которыми наблюдается взаимодействие типа «конкуренция» выделены случаи, в которых целесообразно производить добычу ресурса только одного вида или добычу ресурса двух видов.

Литература

- [1] Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия вузов. Математика. 2022. № 1. С. 12–24.
- [2] Родина Л. И., Черникова А. В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Труды ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 1. С. 167–179.

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ДВИЖУЩЕГОСЯ УПРУГОГО ПОЛОТНА

Романенков А. М. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

ФИЦ ИУ РАН

romanaleks@gmail.com

Будем рассматривать математическую модель малых поперечных колебаний движущегося упругого полотна. Пусть функция $u(x, t)$ — отклонение движущегося полотна от положения равновесия в точке x в момент времени t . Эта функция является решением следующей гиперболической начально-краевой задачи:

$$u_{tt} + 2v_0 u_{tx} + (v_0^2 - c^2) u_{xx} + \frac{D}{m} u_{xxxx} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad (3)$$

где v_0 — скорость движения полотна, c — скорость распространения колебаний (скорость звука) в покоящемся полотне, при этом $v_0 < c$, D — коэффициент жесткости на изгиб, m — удельная масса полотна на единицу площади, $f(x, t)$ — внешнее воздействие. Краевые условия (2) являются условиями шарнирного закрепления полотна по краям, а условия (3) являются начальными отклонением и скоростью полотна соответственно. Для данной задачи установлен закон сохранения энергии, а именно, имеет место теорема.

Теорема 1. *Определим в момент времени $t > 0$ энергию движущегося полотна:*

$$E(t) = \int_0^l \left(u_t^2 - (v_0^2 - c^2) u_x^2 + \frac{D}{m} u_{xx}^2 \right) dx.$$

Тогда при $f(x, t) \equiv 0$ и $\forall T > 0$ имеет место тождество $E(T) = E(0)$.

Заметим, что из теоремы 1 следует теорема единственности решения однородной начально-краевой задачи (1) – (3). Далее, методом автомодельных решений получено решение этой задачи в виде функционального ряда по системе базисных функций [1]:

$$u_n(x, t) = e^{\pm c \lambda_n \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda_n^2} t} e^{\lambda_n (x - v_0 t)}, \quad (4)$$

здесь $\lambda_n = i \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \left(a + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) - \frac{a}{2}}$, при этом $a = \frac{m}{D} (c^2 - v_0^2)$ [2]. Благодаря явно полученной системе функций (4) можно применить метод моментов к задаче управления колебаниями движущегося полотна (1) – (3) при нулевых начальных условиях (3) и правой части $f(x, t) = g(t)s(x)$. То есть, необходимо определить функцию $g(t)$ так, что

$$u|_{t=T} = y_0(x) \quad u_t|_{t=T} = y_1(x). \quad (5)$$

С помощью применения метода решения этой проблемы моментов из [3] получено представление $g(t)$ в виде ряда Фурье.

Литература

- [1] Романенков А. М. О решениях уравнения малых поперечных колебаний движущегося полотна // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 346–356. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.214>.
- [2] Рудаков И. А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки, по. 3, 4–21 (2019). <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-3-4-21>.
- [3] Васильев Ф. П. Методы оптимизации: в 2-ч кн. — Новое изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011. ISBN 978-5-94057-706-5 Кн. 2.— 433 с.

РАЗРАБОТКА ТУРБУЛЕНТНОЙ МОДЕЛИ
НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Романова Д. И. (Россия, Москва)

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
romanovadi@gmail.com

В работе проведено исследование алгоритмов машинного обучения для предсказания турбулентной вязкости на примере различных течений, в том числе течения за обратным уступом, а также других сдвиговых потоков. Данные для обучения получены с помощью расчёта с применением программного комплекса OpenFOAM и оптимизированной модели турбулентности $k - \varepsilon$. Для предсказания турбулентной вязкости выполнен анализ значимости параметров течения, включающих пульсации скоростей, градиенты давления и скорости, инварианты тензора скоростей деформаций и их комбинации. Произведено сравнение различных алгоритмов машинного обучения и проанализирована значимость входных признаков.

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ФУЛЛЕРА С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

Ронжина М. И. (Россия, Москва)

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина
ronzhina.m@gubkin.ru

Манига Л. А. (Россия, Москва)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
МИЭМ
lmanita@hse.ru

Для задач оптимального управления, аффинных по скалярному ограниченному управлению, обладающих особыми решениями порядка 2, важную роль в построении синтеза в окрестности особого режима играет задача Фуллера:

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x, y, u \in \mathbb{R}.$$

В задаче Фуллера для любой начальной точки соответствующая оптимальная траектория является четтеринг-траекторией, а именно, приходит в начало координат (особую точку порядка 2) за конечное время, при этом оптимальное управление имеет счетное число переключений с 1 на -1 (и наоборот). В [1] было показано, что для достаточно широкого класса задач в окрестности особой экстремали второго порядка имеются четтеринг-траектории и структура оптимального синтеза определяется решениями задачи Фуллера. А именно, было доказано, что при выполнении некоторых условий в окрестности особой экстремали второго порядка фазовое пространство расслаивается над многообразием особых траекторий на двумерные слои, заполненные оптимальными четтеринг-траекториями, аналогичными решениям задачи Фуллера. Мы покажем, что результаты такого же типа можно получить и в случае векторного управления.

В докладе будут представлены результаты для задач оптимального управления, аффинных по двумерному управлению из круга. Мы предполагаем, что структура решений в окрестности особых экстремалей второго порядка для таких задач определяется решениями аналога задачи Фуллера с двумерным управлением из круга:

$$\int_0^{\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad \|u\| \leq 1, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Для задачи (1) доказано [1]-[2], что начало координат является особой точкой порядка 2, и для некоторых начальных точек найдены оптимальные четтеринг-траектории и оптимальные траектории типа логарифмических спиралей, причем спирали приходят в начало координат за конечное время, и управление на них совершает бесконечное число оборотов (за конечное время) вдоль единичной окружности.

Для произвольной задачи, аффинной по управлению из круга, экстремали в виде логарифмических спиралей были найдены в окрестности особой экстремали порядка 2 в случае большой размерности [3]. Для малой размерности была доказана оптимальность логарифмических спиралей для обобщения задачи (1) в классе линейных управляемых систем второго порядка с квадратичным функционалом и управлением из круга [4]. В докладе будет рассмотрено нелинейное возмущение задачи (1):

$$\int_0^{\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u + f(x, y), \quad \|u\| \leq 1, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Будет показано, что при некоторых условиях на функцию $f(x, y)$ в окрестности особой экстремали второго порядка в задаче (2) имеются экстремали в виде логарифмических спиралей, на которых управление за конечное время совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности.

Литература

- [1] Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [2] Chukanov S. V., Milyutin A. A. Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 1. P. 31–48.
- [3] Ронжина М. И., Манита Л. А. Локуциевский Л. В. Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга // Труды МИАН. 2021. Т. 315. С. 222–236.
- [4] Ронжина М. И., Манита Л. А. Логарифмические спирали в задачах оптимального управления с управлением из круга // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2024. Т. 233. С. 1–14.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННЫМ И УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦАМИ

Рудаков И. А. (Россия, Москва)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
rudakov_ia@mail.ru

Рассматривается задача о периодических решениях уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} + h(x, t, u) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t); \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Предполагается выполнение следующих граничных условий:

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \quad (3)$$

$$u(\pi, t) = u_{xx}(\pi, t) + hu_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Константы h, a и период времени T удовлетворяют следующим условиям:

$$a > 0, h > 0, T = 2\pi \frac{b}{c}, b, c \in \mathbf{N}, (b, c) = 1; \quad (5)$$

$$b \left(a + \frac{1}{8} + \frac{2h}{\pi} \right) \notin \mathbf{N}. \quad (6)$$

Рассматриваемое уравнение описывает колебания проводов и балки, подверженной растяжению вдоль горизонтальной оси. Граничные условия (3),(4) соответствуют случаю жестко заделанного левого и упруго закрепленного правого концов балки.

Будем предполагать, что нелинейное слагаемое $h(x, t, u)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$h \in C^1(\Omega \times \mathbf{R}) \text{ и не убывает по } u; \quad (7)$$

$$h(x, t, -u) = -h(x, t, u) \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times \mathbf{R}; \quad (8)$$

$$(A_1 + \delta)|u|^{r-1} + A_2 \geq |h(x, t, u)| \geq A_1|u|^{r-1} - A_3 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times \mathbf{R}, \quad (9)$$

где

$$r > 2, \quad (10)$$

A_1, A_2, A_3, δ есть положительные константы и

$$\delta < \frac{r-2}{2} A_1. \quad (11)$$

Теорема 2. *Предположим выполнены условия (5) – (11). Тогда задача (1) – (4) имеет не ограниченную в $L_r(\Omega)$ последовательность обобщенных решений из пространства $H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, имеющих непрерывную вторую производную по x .*

Литература

- [1] Рудаков И. А. О существовании счётного числа периодических решений краевой задачи для уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. С.1062-1072. DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN.
- [2] Rudakov I. A. Periodic Solutions to the Vibration Equation of a Beam with a Rigidly Clamped Endpoint and an Elastically Fixed Endpoint // Journal of Mathematical Sciences, New York, Springer. 2023. Vol. 270. No. 5. P. 721-732. DOI 10.1007/s10958-023-06383-04.
- [3] Rudakov I. A., Ji S. Infinitely many periodic solutions for the quasi-linear Euler–Bernoulli beam equation with fixed ends // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2023. 62:66. P. 62-85. DOI: 10.1007/s00526-022-02404-3.

ОСРЕДНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОГО ТЕЛА, АРМИРОВАННОГО ТОНКИМИ ВОЛОКНАМИ

Рудой Е. М. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
rem@hydro.nsc.ru

Саженов С. А. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
sazhenkovs@yandex.ru

В рамках плоской теории упругости изучается динамическая модель термоупругого тела, содержащего тонкие включения (волокна). Включения параллельны друг другу, и, таким образом, задача содержит малый положительный параметр ε , который описывает расстояние между двумя соседними включениями. Опираясь на слабую формулировку задачи,

мы исследуем поведение решений при ε стремящимся к нулю. В результате мы получаем хорошо поставленную гомогенизированную (осредненную) модель анизотропного композита, в которой нет необходимости учитывать каждое отдельное включение. Процесс гомогенизации основан на использовании теории двухмасштабной сходимости.

Литература

- [1] Fankina I. V., Furtsev A. I., Rudoy E. M., Sazhenkov S. A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material // *Philos. Trans. Roy. Soc. A*. 2022. V. 380. 20210354.
- [2] Fankina I. V., Furtsev A. I., Rudoy E. M., Sazhenkov S. A. The homogenized quasi-static model of a thermoelastic composite stitched with reinforcing threads // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023. V. 234. 115346.
- [3] Fankina I. V., Furtsev A. I., Rudoy E. M., Sazhenkov S. A. A quasi-static model of a thermoelastic body reinforced by a thin thermoelastic inclusion // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2024. DOI: 10.1177/10812865231217043

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Рыбалко А. В. (Россия, Санкт-Петербург)
Институт проблем машиноведения РАН
alexandrarybalko21@gmail.com

Фрадков А. Л. (Россия, Санкт-Петербург)
Институт проблем машиноведения РАН
fradkov@mail.ru

В последнее время применение методов, основанных на математическом и компьютерном моделировании, стало широко используемым подходом в нейронауках. Однако использование таких моделей требует их идентификации, то есть корректного определения значений параметров модели на основе данных, полученных в ходе экспериментов. Проблема становится сложнее, если требуется оценить значения параметров не одного нейрона, а популяции нейронов или нейронной сети, состоящей из большого числа взаимосвязанных нейронов.

В работе рассматривается задача идентификации динамической сети, составленной из N моделей нейронов ФитцХью-Нагумо [1], [2]:

$$\begin{cases} \dot{u}_k = u_k - \frac{u_k^3}{3} - v_k + I_{ext} + \sigma \sum_{j=1}^N A_{kj} [B_{uu}(u_j - u_k) + B_{uv}(v_j - v_k)], \\ \dot{v}_k = \varepsilon(u_k - a - bv_k) + \sigma \sum_{j=1}^N A_{kj} [B_{vu}(u_j - u_k) + B_{vv}(v_j - v_k)], \end{cases} \quad (1)$$

где $k \in 1 : N$, $u_k(t)$, $v_k(t)$ — переменные состояния, σ , A_{kj} , B_{uu} , B_{uv} , B_{vu} , B_{vv} — некоторые коэффициенты связи между нейронами, I_{ext} , ε , a , b — параметры, значения которых требуется оценивать по результатам наблюдений.

В основе решения лежит метод скоростного градиента для интегрального целевого функционала [3]. По причине неизмеряемости на практике переменных $v_k(t)$ и производных всех переменных, (1) преобразуется к виду системы из дифференциальных уравнений второго порядка и фильтруется с помощью реальных дифференциаторов. Последующее применение метода скоростного градиента позволяет получить закон настройки параметров:

$$\dot{\theta} = -\gamma \delta(x, \theta, t) z(x, t), \quad (2)$$

где $\gamma > 0$, $\theta(t)$ — вектор оценок истинных значений параметров преобразованной модели, $x(t)$ — вектор состояния преобразованной модели, $z(x, t)$ — вектор наблюдаемых величин, $\delta(x, \theta, t) = (\theta - \theta^*)^T z(x, t)$.

Определение 1. Вектор-функция $z(t)$ удовлетворяет условию постоянного возбуждения, если существуют положительные L, α, t_0 такие, что для любого $t > t_0$ выполняется:

$$\int_t^{t+L} z(s)z(s)^T ds \geq \alpha I.$$

Теорема 1 [4]. Если вектор-функция $z(x(t), t)$ удовлетворяет условию постоянного возбуждения, то для сети из моделей ФитцХью-Нагумо алгоритм (2) обеспечивает достижение цели идентификации: $\theta(t) - \theta^* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В докладе рассмотрен практически важный случай, когда на нейронную сеть (1) действуют ограниченные возмущения (включающие, например, погрешности измерения). Предложено регуляризовать закон управления (2) введением параметрической отрицательной обратной связи и найдены условия выполнения ослабленной цели идентификации: $\|\theta(t) - \theta^*\| \leq \tilde{\Delta}$ при $t > t_*$ для некоторых $\tilde{\Delta}, t_*$.

Полученные результаты показывают, что применение метода скоростного градиента для идентификации сети из моделей нейронов ФитцХью-Нагумо позволяет получить теоретически обоснованные алгоритмы оценивания параметров, которые можно использовать при работе с реальными данными электрической активности мозга, получаемыми, например, с помощью электроэнцефалографии.

Литература

- [1] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. Vol. 1. P. 445-466.
- [2] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. Vol. 50. No 10. P. 2061-2070.
- [3] Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. СПб.: Наука, 1990.
- [4] Rybalko A., Fradkov A. Identification of two-neuron FitzHugh-Nagumo model based on the speed-gradient and filtering // Chaos. 2023. Vol. 33. №. 8. P. 083126.

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПОТОКИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сакбаев В. Ж. (Россия, Москва)

Московский физико-технический институт

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

fumi2003@mail.ru

На бесконечномерном фазовом пространстве, снабженном трансляционно инвариантной симплектической формой, вводятся неотрицательные конечно-аддитивные меры, инвариантные относительно группы сдвигов. В пространстве функций, квадратично интегрируемых по построенным инвариантным мерам, получено унитарное представление бесконечномерных гамильтоновых потоков. Получено разложение инвариантных мер на эргодические относительно потока компоненты. Исследованы свойства полученных представлений, в частности, свойства сильной непрерывности и спектральные свойства генераторов купмановской унитарной группы. Показано, что усреднение гауссовских случайных блужданий в бесконечномерном пространстве порождает полугруппу самосопряженных преобразований пространства квадратично интегрируемых по инвариантной мере функций. Получены условия, необходимые и достаточные для сильной непрерывности полугруппы, при выполнении которых исследован генератор полугруппы самосопряженных сжатий. При нарушении условий сильной непрерывности показано, что усреднение гауссовских случайных блужданий описывает переход из векторного состояния эволюционирующей системы в

смешанное сингулярное состояние, при этом семейство преобразований векторной компоненты состояния образует разрывную однопараметрическую полугруппу.

СЕТЬ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА-ВЕЙЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ

Сакс Р. С. (Россия, Уфа)

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

romen-saks@yandex.ru

Рассматриваются пространства \mathbf{A}^k и \mathbf{V}^m потенциальных и вихревых полей, образованные собственными полями \mathbf{p}_j и \mathbf{q}_j^\pm операторов: градиент дивергенции и ротор. Эти операторы и их самосопряжённые расширения \mathcal{N}_d и S в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ задают в \mathbf{A}^k и \mathbf{V}^m базисы. Пространства \mathbf{A}^k и \mathbf{V}^k являются проекциями векторных пространств Соболева $\mathbf{H}^k(\Omega)$ на ортогональные подпространства \mathcal{A} и \mathcal{B} потенциальных и вихревых полей в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (k, m - целые, область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - гомеоморфна шару).

Разложение $\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ впервые обнаружил Г. Вейль (H. Weyl) в 1941 году.

В его честь С.Л. Соболев использовал букву "W" при обозначении пространств $W_p^{(l)}(\Omega)$. Следуя С.Л., \mathbf{A}^k и \mathbf{V}^m назовём пространствами Соболева-Вейля.

Рассматриваются также классы $\mathbf{C}(k, m) \equiv \mathbf{A}^k \oplus \mathbf{V}^m$ прямых сумм пространств \mathbf{A}^k и \mathbf{V}^m для всех -целых k и m . Они образуют сеть пространств.

Классы $\mathbf{C}(m, m) = \mathbf{H}^m$; $\mathbf{C}(k, m) \subset \mathbf{H}^0$, если $k, m \geq 0$.

В этой сети мы изучили краевые задачи для модельных операторов $(\nabla \operatorname{div})^p + \lambda I$ и $(\operatorname{rot})^p + \lambda I$ с параметром λ при $p = 1, 2$. Например,

Задача 1₂. *Задаю поле $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. Найдите поле \mathbf{u} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\operatorname{rot}^2 \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

(т.е. поле $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, для которого $(\mathbf{u}, (\operatorname{rot}^2 - \lambda I)\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ и выполняются условия: $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0$, если следы $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ и $\gamma(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u})$ на границе Ω существуют).

Доказано, что эта задача разрешима по Фредгольму, а **при $\lambda \in Sp(\operatorname{rot}^2)$ оператор $\operatorname{rot}^2 - \lambda I$ (и обратный) отображают класс $\mathbf{C}(k, m+2)$ на $\mathbf{C}(k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно.**

Рассмотрена также задача C для оператора Стокса с параметром λ :

$$\nu(\Delta + \lambda I)\mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0. \quad (C)$$

Эта задача также разрешима по Фредгольму.

При $\lambda \notin Sp(S^2)$, где оператор S - самосопряжённое расширение ротора в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, задача (C) безусловно и однозначно разрешима, а её решение, пара $(\nabla p, \mathbf{u})$, имеет вид $-\nabla p = \nabla h \equiv \mathbf{f}_A$, $\mathbf{u} = -\nu^{-1}(S^2 - \lambda)^{-1}\mathbf{f}_B$, где $\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B = \mathbf{f}$.

Причём $(\nabla h, \mathbf{u}) \in (\mathbf{A}^k, \mathbf{W}^{m+2})$, если пара $(\mathbf{f}_A, \mathbf{f}_B) \in \mathbf{C}(k, m) \equiv (\mathbf{A}^k, \mathbf{W}^m)$.

Литература

- [1] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 810 с.
- [2] Weyl H. The method of orthogonal projection in potetial theory. Duke Math. J., 1941. vol. 7, no. 1, pp. 411-444.
- [3] Солонников В. А. Переопределенные эллиптические краевые задачи. Кр. задачи матем. физики и смежн. вопросы теории функций. 5 / Зап. науч. семинаров ЛОМИ, Т.21. Л.: Наука, Ленингр. отд., 1971. С. 112-158.
- [4] Yoshida Z. Giga Y. Remark on spectra of operator rot // Math. Z. 1990. vol. 204. pp. 235-245.
- [5] Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева // Динамические системы, 2018. Т. 8, № 4. С. 385-407.
- [6] Сакс Р. С. Пространства Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. 24, № 2. С. 249-274. DOI: 10.14498/vsgtu1759.

- [7] Сакс Р.С. Сеть пространств Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023. Т. 27, № 1, с. 23-49. DOI: 10.14498/vsgtu1961.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Сапармуратов А. С. (Туркменистан, Ашхабад)

Туркменский государственный университет им. Махтумкули

saparmuradov58@mail.ru

В работе исследуется множество достижимости систем с распределенными параметрами, задаваемых оператором дифференцирования первого порядка по времени и несамосопряженным дифференциальным оператором произвольного порядка по пространственной переменной. Управляющие действия входят в смешанные граничные условия соответствующих начально-краевых задач [1,2].

Рассматривается система

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = (\sigma u(\cdot, t))(x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$U(x, 0) = u_0(x), \quad \tau_j u(\cdot, t) = \sum_{j=1}^r \beta_j^l v_l(t), \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (2)$$

где дифференциальное выражение

$$(\sigma u)(x) = (-1)^{n-1} \sum_{\nu=0}^{2n} p_\nu(x) u^{(2n-\nu)}(x), \quad x \in (0, 1),$$

граничные операторы τ_j , $j = 1, 2, \dots, 2n$

$$\tau_j u = \sum_{\nu=0}^{2n-1} [\alpha_{j\nu}^0 u^{(\nu)}(0) + \alpha_{j\nu}^1 u^{(\nu)}(1)], \quad \beta_j^l, \alpha_{j\nu}^0, \alpha_{j\nu}^1 - \text{постоянные числа.}$$

Предполагается, что а) $p_\nu(\cdot) \in W_2^{2n-\nu}(0, 1)$, $p_0(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, б) граничные условия $\tau_j u = 0$, $j = 1, 2, \dots, 2n$ усиленно регулярны [3]. Управляющие воздействия $v_l(\cdot)$, $l = 1, 2, \dots, r$ выбираются из класса $\overset{o}{W}_2^m(0, T)$. Задача (1)-(2) имеет обобщенное решение, которое существует и единственно при любых заданных $v_l(t)$. В конечный момент времени T решение задачи (1)-(2) определяет функцию $u_1(x)$ и пусть она имеет представление

$$u_1(x) = \sum_{k,s} u_{k,s}^1 X_{ks}(x), \quad \sum_{k,s} |u_{k,s}^1|^2 < \infty,$$

где $X_{ks}(x)$ – семейство собственных и присоединенных функций оператора

$$(Cu)(x) = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{2n} p_\nu(x) \frac{d^{2n-\nu}}{dx^{2n-\nu}} u(x)$$

с областью определения $\Delta = \{u \mid u \in W_2^{2n}(0, 1), \tau_j u = 0, j = 1, 2, \dots, 2n\}$.

Вопрос об управляемости системы эквивалентен следующей проблеме моментов [4]:

$$u_{k,s}^1 - e^{-\lambda_k^{2nT}} \sum_{i=0}^{r_k-s} \frac{(-1)^i T^i}{i!} = \sum_{l=1}^r \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{r_k-s} \beta_j^l \gamma_{ks+i}^j \int_0^T v_l(t) \frac{(-1)^i (T-t)^i}{i!} e^{-\lambda_k^{2n(T-t)}} dt. \quad (4)$$

Представляя моментные соотношения в виде $Au = b$, можно показать, что

$$A : L_2[0, T] \rightarrow l_2^\alpha, \quad \alpha < 2(n - m) - 1.$$

Здесь через m обозначен наибольший порядок производной от $u(x, t)$ по x , входящей в выражение $\gamma_{ks+i}^j = \overline{\tilde{\tau}_j^*(\psi_{ks})}$, l_p^α -пространство последовательностей b_k , для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |b_k|^p$ сходится, где α -действительное число, зависящее от p , размерности области пространственных производных, порядка дифференциального оператора и порядка производной от искомой функции, входящей в граничные условия.

Теорема 1. Если множество управлений $v_l(t)$ ограничено в пространстве $L_p(0, T)$, то множество последовательностей, определяемое равенствами (4) компактно в пространстве l_p^α , $\alpha < (2n - m)p - 2n - 1$.

Литература

- [1] Авдонин С. А. Управляемость систем с распределенными параметрами и базисы Рисса из показательных функций. Канд. дисс. Ленинград, 1977. 115 с.
- [2] Авдонин С. А. Об управляемости систем с распределенными параметрами // Вестник ЛГУ, серия математика, №19, 1980. С.5-8.
- [3] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
- [4] Сапармурадов А. Множества достижимости параболических систем // Труды Второй научно-технической конференции советских и польских молодых ученых. Киев, 1986. С.57-61.

СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Сахаров А. Н. (Россия, Нижний Новгород)

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет
ansakharov2008@yandex.ru

Система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где φ – угловые координаты на торе, ω – вектор с рационально независимыми компонентами, а матрица $A(\varphi)$ является функцией на торе, определяет поток, который называется линейным расширением квазипериодического потока на торе. Будем считать, что след матрицы $A(\varphi)$ равен нулю, т.е. она представима в виде

$$A(\varphi) = a(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Согласно спектральной теореме ([1], теорема 3) множество всех показателей Ляпунова линейного расширения – *спектр показателей Ляпунова*, представляет собой объединение непересекающихся замкнутых интервалов. В нашем случае спектр либо $\{-\beta, \beta\}$, либо $[-\beta, \beta]$, либо $\{0\}$ [1]. Свойства спектра позволяют ввести следующую классификацию. Линейное расширение называется

1. *равномерно гиперболическим*, если его спектр $\{-\beta, \beta\}$;
2. *эллиптическим*, если спектр $\{0\}$ и все решения (1) ограничены;
3. *параболическим*, если спектр $\{0\}$ и есть как ограниченные, так и неограниченные решения (1);
4. *неравномерно гиперболическим*, если спектр невырожденный интервал $[-\beta, \beta]$.

Эта система определяет *проективный поток*, индуцируемый линейной системой. Компактификация фазового пространства системы (1) преобразует ее в систему на трехмерном торе \mathbb{T}^3 :

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = 2a(\varphi) + 2b(\varphi) \cos \theta - 2c(\varphi) \sin \theta. \quad (3)$$

Предел

$$\varrho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{t},$$

где $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ – решение (3), называется *числом вращения слоя*. Этот предел не зависит от начальных данных и является непрерывной функцией параметров системы [2]. *Резонансом* системы (3) называется равенство $\langle k, \omega \rangle + l\varrho = 0$, $(k, l) \in \mathbb{Z}^3$. Ступеньки на графике числа вращения слоя в зависимости от параметра называются *интервалами захвата фазы*.

Теорема. *Линейное расширение квазипериодического потока на торе структурно устойчиво тогда и только тогда, когда*

1. *линейное расширение равномерно гиперболично;*
2. *неблуждающее множество проективного потока состоит из двух инвариантных торов (экспоненциально устойчивого и неустойчивого), являющихся конечно-листным накрытием базы;*
3. *число вращения слоя резонансное и принадлежит некоторому интервалу захвата фазы.*

Доказательство этого результата является приложением теории проективных потоков Дж. Селгрейда [3].

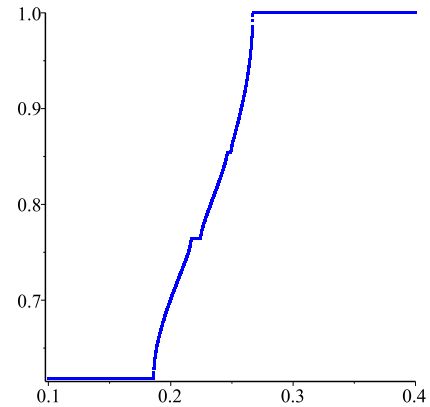


Рис. 1: Число вращения слоя.

Литература

- [1] Sacker R., Sell G. R. A Spectral Theory for Linear Differential Systems // Journal of Diff. Equat. — 1978. — V. 27, — P. 320–358.
- [2] Веременик В. В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, — № 6, — С. 1073–1076.
- [3] Selgrade J. F. Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 203. P. 359–390.

ОБОВЩЕННАЯ ПОЧТИ РИМАНОВА ЗАДАЧА ГРУШИНА⁸³

Сачкова Е. Ф. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
efsachkova@mail.ru

Сачков Ю. Л. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
yusachkov@gmail.com

Рассматривается обобщенная почти риманова задача Грушина, отличающаяся от классической задачи Грушина [1] произвольной степенью вырождения $k > 0$ базисного векторного поля на особом множестве. Получены следующие результаты.

- Доказана полная управляемость для любого $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$.
- Подробно изучен случай $k = 2$.
 - Доказано существование оптимальных траекторий.
 - Экстремальные траектории параметризованы функциями Якоби.
 - Изучены симметрии системы, найдено соответствующие времена Максвелла.

⁸³Исследование выполнено в ИПС им. А.К.Айламазяна РАН за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>.

- Доказано, что время разреза равно первому времени Максвелла.
- Построен оптимальный синтез.
- Исследованы расстояние и сферы.
- Часть полученных результатов обобщена для произвольного натурального k .
- Некоторые результаты получены для общего действительного $k > 0$.

Литература

- [1] Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint // Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2019.

О ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Седова Н. О. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
sedovano@ulsu.ru

Реальные системы не всегда обладают свойством устойчивости по Ляпунову, демонстрируя, тем не менее, приемлемое поведение, к примеру, колебания в окрестности (неустойчивого) равновесия. Учет случайных внешних возмущений дополнительно усложняет обоснование свойства математической устойчивости. Эти соображения привели к необходимости определения подходящих модификаций понятия устойчивости. Одним из первых понятий стала техническая устойчивость, предложенная Н.Д. Моисеевым [1]; в настоящее время в литературе чаще используется понятие «практическая устойчивость» [2].

Известно, что для анализа свойств устойчивости систем с запаздыванием производная функции Ляпунова оценивается не во всей окрестности начала координат, а лишь в ее части [3,4]. При этом оценки производной имеют вид, аналогичный полученным для обыкновенных дифференциальных уравнений; в частности, традиционная оценка, гарантирующая практическую устойчивость, имеет вид суммы отрицательно определенной функции и положительного слагаемого. В данной работе получены как условия практической устойчивости, так и оценки сходимости решений, при этом в оценке производной функции Ляпунова не обязательно выделяется отрицательно определенная составляющая.

Рассмотрим систему с запаздыванием вида:

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где функционал $X : R^+ \times C \rightarrow R^n$ удовлетворяет предположениям из [5].

Используемые здесь обозначения стандартные: $R^+ = [0, +\infty)$, $C = C([-r, 0], R^n)$ – банахово пространство с супремум-нормой $\|\cdot\|$ ($r > 0$); для функции $x(t) \in C([t_0 - r, t_0 + \beta], R^n)$ элемент $x_t \in C$ определяется равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leq s \leq 0$, $\dot{x}(t)$ обозначает правостороннюю производную. Решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x_{t_0} = \varphi_0$, обозначим $x(t; t_0, \varphi_0)$.

Определим скалярную функцию Ляпунова $V(t, x) \in C^1([-r, +\infty) \times R^n, R^+)$, такую, что $V(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$, и ее производную в силу системы (1):

$$V'(t, \varphi) = \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial x_i} X_i(t, \varphi).$$

В данной работе оценки сходимости решений уравнения (1) основаны на следующей лемме:

Лемма. *Предположим, что существуют $\bar{a} > 0$, $\underline{a} \in R$, а также функции $\eta \in K$, $V \in C^1(R^+ \times R^n, R^+)$ и $p \in C([-r, +\infty), R)$, $q \in C([-r, +\infty), R^+)$, $G \in C(R^+, R^+)$ такие, что:*

1. $V'(t, \varphi) \leq -p(t)V(t, \varphi(0)) + q(t)G(V(t, \varphi(0)))$ при всех $t \in R^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V, \eta)$, где $\Omega_t(V, \eta) = \{\varphi \in C : V(t+s, \varphi(s)) \leq \eta(V(t, \varphi(0))), -r \leq s \leq 0\}$;
2. для всех $t \in [-r, +\infty)$, $s \in [0, r]$ выполняются неравенства $\underline{a} \leq \int_t^{t+s} p(\theta)d\theta \leq \bar{a}$, $\eta(u) \geq e^{\bar{a}u}$ для $u > 0$;

Тогда для произвольного решения $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$ системы (1) при всех $t \geq t_0$ функция $v(t) = V(t, x(t))$ допускает оценку

$$v(t) \leq \|v_{t_0}\| e^{-\left(\int_{t_0}^t p(\theta)d\theta + a\right)} + G(\|v_{t_0}\|) \int_0^t q(s) e^{-\int_s^t p(\theta)d\theta},$$

где $a = \min\{0, \underline{a}\}$.

В частности, (при некоторых дополнительных ограничениях) получены условия глобальной равномерной практической экспоненциальной устойчивости.

Литература

- [1] Моисеев Н. Д. Обзор истории развития понятия и теории устойчивости в смысле Ляпунова // Записки семинара по теории устойчивости движения. Москва, ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1946. Вып. 1. С. 5–105.
- [2] Мартынюк А. Практическая устойчивость движения. Киев: Наукова думка, 1983.
- [3] Красовский Н. Н. Об асимптотической устойчивости систем с последствием // ПММ. 1956. Т.20, № 4. С. 513–518.
- [4] Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20, № 4. С. 500–512.
- [5] Седова Н. О. К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // АИТ. 2011. № 9. С. 74–86.

ТОПОЛОГИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ КАУСТИК

Седых В. Д. (Россия, Москва)

РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина

vdsedykh@gmail.com

Каустикой называется множество критических значений лагранжева отображения. Росток лагранжева отображения является ростком развертки градиентного отображения. По теореме Арнольда о лагранжевых особенностях простые устойчивые лагранжевы ростки определяются версальными деформациями ростков гладких функций в критических точках типов A, D, E . Мультиособенностью лагранжева отображения в точке пространства-образа называется неупорядоченный набор особенностей отображения в прообразах этой точки. Мы расскажем о примыканиях простых устойчивых мультиособенностей лагранжева отображения общего положения в точках его каустики.

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОПЕРАТОРОМ ПРЕЙЗАХА

Семенов М. Е. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

mkl150@mail.ru

Канищева О. И. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

oleka_olesya@mail.ru

Соловьев А. М. (Россия, Воронеж)

АО «Концерн «Созвездие»

darkzite@yandex.ru

Мелешенко П. А. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет

melechp@yandex.ru

Задача идентификации динамических режимов нелинейных динамических систем относится к числу важных и актуальных проблем в современной науке и технике. Наиболее естественный метод идентификации динамических режимов связан с вычислением показателей Ляпунова. Современные методы решения этой задачи, такие, как алгоритм Бенеттина, алгоритм Вольфа, алгоритм Кантца и др., применимы лишь к системам с гладкими нелинейностями. Настоящая работа расширяет возможности методов идентификации динамических режимов на случай, когда правые части содержат нелинейности гистерезисной природы (которые, в свою очередь, часто встречаются в задачах моделирования технических систем, содержащих ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы, преобразователи-накопители энергии, многоразрядные запоминающие устройства), а именно, нелинейности в виде преобразователя Прейзаха [1-3].

Алгоритм вычисления показателей Ляпунова для систем с оператор Прейзаха основан на классическом методе Бенеттина.

Выберем некоторое начальное условие \vec{x}_0 , которое подвергается возмущению $\delta\vec{x}_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим разбиение временного интервала $[t_0, T] = \bigcup_{j=1}^m [t_{j-1}, t_j]$. Для некоторого фиксированного $j \in [1, m]$ через небольшой промежуток времени $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$: $\vec{x}^{(j)} = \vec{x}(t_j)$ и $\delta\vec{x}_i^{(j)} = \delta\vec{x}_i(j)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Из-за существенного различия смещений от невозмущенной траектории в разных пространственных направлениях для сохранения точности расчетов используется процедура Грама–Шмидта. Получаем оценку спектра Ляпунова:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^J \ln |\delta\vec{x}_i^{(j)}|.$$

В отличие от классического алгоритма Бенеттина, где моменты t_1, t_2, \dots, t_J фиксируются на протяжении всего расчета, в предлагаемом алгоритме набор этих моментов увеличивается на τ_d , $d = 1, \dots, D$, где τ_d соответствует точкам разрыва или потери гладкости в уравнении. Вычисление матрицы Якоби начинается в моменты времени $t_d + 0$ и заканчивается в момент $t_{d+1} - 0$. Вычисление накопленных сумм останавливается в точках, соответствующих особенностям; на очередной итерации цикла матрица Якоби вычисляется на следующем участке гладкости.

Предложенный алгоритм применимы и к системам с гистерезисными нелинейностями, формализуемыми другими моделями: модель Боука–Вена, модель Прандтля–Ишлинского и т. д.

Литература

- [1] Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
- [2] Karpov E., Semenov M., Meleshenko P. Loaded Euler–Bernoulli beam with the distributed hysteresis properties // Journal of Vibration and Control. 2023. P. 10775463231211364.
- [3] Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 101. P. 2599–2614.

Сергеев А. Г. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

sergeev@mi-ras.ru

Доклад посвящен теории топологических диэлектриков. Помимо ее важности для теоретической физики эта теория тесно связана с различными математическими дисциплинами такими как теория гомотопий и К-теория, клиффордовы алгебры и некоммутативная геометрия.

Топологические диэлектрики характеризуются наличием широкой энергетической щели, устойчивой относительно малых деформаций, что является основанием для использования топологических методов при их изучении.

Ключевую роль в их исследовании играют группы симметрии этих объектов. Описание возможных типов симметрий восходит к Китаеву, который предложил классификацию топологических диэлектриков, основанную на изучении их групп симметрий и представлений.

В докладе основное внимание будет уделено топологическим диэлектрикам, инвариантным относительно обращения времени. Примером подобных систем может служить квантовый спиновый диэлектрик Холла, обладающий нетривиальным топологическим \mathbb{Z}_2 -инвариантом, введенным Кейном и Милом. Математическая теория таких диэлектриков связана с инволютивными топологическими пространствами и кватернионными расслоениями на них.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА СОБОЛЕВСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Сивкова Е. О. (Россия, Москва)

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

e.o.sivkova@mail.ru

Пусть d и n — целые числа. Положим

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d) = \{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi < \infty \},$$

где $F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$.

Пространство $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d)$ называется однородным соболевским пространством. Оно играет важную роль в теории функциональных пространств.

Определим следующее множество

$$W_2^n(\mathbb{R}^d) = \{ f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d) : \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \leq 1 \},$$

которое будем называть соболевским классом.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная неубывающая функция на \mathbb{R}_+ , $a(0) = 0$ и $a(\eta) \rightarrow +\infty$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Определим семейство операторов $\Lambda_a(t): L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$, действующих в образах Фурье по формулам

$$F[\Lambda_a(t)f(\cdot)](\xi) = e^{-ta(|\xi|)} F[f](\xi) \quad \text{для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \forall f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d . Очевидно, что это семейство линейных непрерывных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Мы ставим следующую задачу. Пусть при $t = T > 0$ имеется возможность измерить значение оператора $\Lambda_a(T)$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ с точностью до $\delta > 0$, т. е. нам известна функция $g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\|\Lambda_a(T)f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$ при некотором $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$. По этой информации мы хотим восстановить значение оператора $\Lambda_a(\tau)$, где $0 \leq \tau < T$.

⁸⁴Исследование выполнено при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 24-11-00196).

Точная постановка состоит в том, чтобы найти величину

$$E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|\Lambda_a(T)f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|\Lambda_a(\tau)f(\cdot) - \varphi(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $\varphi: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ и найти оптимальные методы $\widehat{\varphi}$, т. е. те, на которых нижняя грань достигается.

Обозначим через $h(\cdot)$ функцию на \mathbb{R}_+ , заданную параметрически:

$$x(\xi) = |\xi|^{2n} e^{2Ta(|\xi|)}, \quad y(\xi) = e^{2(T-\tau)a(|\xi|)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Существует наименьшая вогнутая непрерывная функции $\theta_\tau(\cdot)$, мажорирующая $h(\cdot)$.

Теорема. Пусть $0 \leq \tau < T$ и $\delta > 0$. Тогда

$$E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) = \delta \sqrt{\theta_\tau(\delta^{-2})}.$$

Существуют положительные числа $\widehat{\lambda}_i = \widehat{\lambda}_i(\delta, a(\cdot))$, $i = 1, 2$ при условии, что, такие, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$ на \mathbb{R}^d , равных нулю вне множества $D = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n} e^{2\tau a(|\xi|)} \leq 1\}$ и таких, что

$$\frac{|\omega(\xi)|^2 e^{2Ta(|\xi|)}}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2n}} \leq e^{2\tau a(|\xi|)}$$

для п. в. $\xi \in D$, непусто, и для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ метод $\widehat{\varphi}_\omega$, определенный формулой

$$\widehat{\varphi}_\omega(g(\cdot))(\cdot) = (K * g)(\cdot),$$

где $F[K](\xi) = \omega(\xi) e^{(T-\tau)a(|\xi|)}$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, является оптимальным.

Оптимальные методы определены корректно, поскольку функция $\omega(\cdot)$ равна нулю вне D , то преобразование Фурье $K(\cdot)$ также равно нулю вне D и, очевидно, ограничено на D . Следовательно, $F[K](\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и поэтому $K(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, а тогда $\widehat{\varphi}_\omega(g(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ как свертка двух функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Если $a(|\xi|) = |\xi|^2$, то теорема дает оптимальные методы восстановления распределения температуры в \mathbb{R}^d в момент времени τ по неточному ее измерению в момент времени $T > \tau$ при условии, что начальное распределение температуры $f(\cdot)$ принадлежит классу $W_2^n(\mathbb{R}^d)$.

Если же $a(|\xi|) = |\xi|$, то в задаче Дирихле для полупространства $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\}$ эта теорема дает оптимальные методы восстановления гармонической функции на гиперплоскости $y = y_0$ по неточным ее измерениям на гиперплоскости $y = Y > y_0$ при условии, что граничная функция $f(\cdot)$ принадлежит классу $W_2^n(\mathbb{R}^d)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ С ПОМОЩЬЮ ОТОБРАЖЕНИЯ, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ФАЗОВЫЙ ПОТОК СИСТЕМЫ

Сидоренко В. В. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

vvsidorenko@list.ru

Постановка задачи. Рассматривается движение осесимметричного спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента. Центр масс спутника движется по круговой орбите в центральном гравитационном поле. Если проекция вектора кинетического момента спутника на ось его симметрии равна нулю, то возможны "плоские" движения – движения, в которых ось симметрии перемещается в плоскости орбиты.

В фазовом пространстве гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описывающей движение осесимметричного спутника относительно центра масс, плоским движениям

отвечают фазовые траектории, лежащие на двумерном инвариантном многообразии. Поведение фазовых траекторий на этом многообразии аналогично поведению траекторий на фазовом портрете математического маятника – сепаратрисы разделяют траектории, соответствующие вращениям и колебаниям спутника относительно местной вертикали. В [1, 2] изучалась устойчивость плоских движений осесимметричного спутника. Цель нашего анализа заключалась в максимально подробном описании динамики системы в том случае, когда фазовые траектории располагаются в окрестности сепаратрисного контура.

Методы исследования. Общий подход к исследованию гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, в фазовом пространстве которых имеются инвариантные многообразия с располагающимися на них сепаратрисными контурами, был развит Л.М. Лерманом [3]. Основная идея данного подхода состоит в построении методами теории возмущений отображения, аппроксимирующего отображение, порождаемого фазовым потоком системы в окрестности сепаратрисного контура. Аппроксимирующее отображение представляет комбинацию оператора поворота, описывающего поведение фазового потока в окрестности положений неустойчивого равновесия, входящего в состав сепаратрисного контура, и линейного отображения, описывающего поведение фазового потока при перемещении вдоль сепаратрисы. В [4] подход Л.М. Лермана был применен для анализа динамики конкретной механической системы – некоторой разновидности двойного маятника. Плоские колебания осесимметричного спутника около местной вертикали отличаются от колебаний маятника физической неэквивалентностью ситуаций, соответствующих разным направлениям относительной угловой скорости. Поэтому нам потребовалось внести ряд изменений в конструкцию сепаратрисного отображения, использованного в [3, 4].

Результаты исследования. Было построено отображение, аппроксимирующее фазовый поток в задаче о движении осесимметричного спутника. Произведена проверка его корректности сравнением с численно построенными сечениями Пуанкаре фазового потока системы. С помощью аппроксимирующего отображения удалось описать серию бифуркаций, в результате которых из плоских движений рождаются семейства пространственных периодических движений спутника. Исследована устойчивость найденных семейств периодических движений для разных значений отношения продольного и поперечного моментов инерции спутника. Исследована устойчивость сепаратрисного контура, разделяющего плоские вращательные и колебательные движения спутника. Найдено критическое значение отношения моментов инерции спутника, при котором происходит потеря устойчивости контура. Установлена фрактальность динамической структуры фазового пространства задачи.

Литература

- [1] Маркеев А. П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космические исследования. 1975. Т. 13. С. 322–336.
- [2] Markeev A. P., Bardin B. S. On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2003. V. 85. P. 51–66.
- [3] Lerman L. M. Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center // Sel. Math. Sov. 1991. V. 10. P. 297–306.
- [4] Grotta Ragazzo C. On the stability of double homoclinic loops // Commun. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 251–272.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ГЕМОДИНАМИКИ
ПРИ МНОГОСОСУДИСТОЙ ИШЕМИЧЕСКОЙ БОЛЕЗНИ СЕРДЦА
НА ФОНЕ НАРУШЕНИЯ ПЕРФУЗИИ МИОКАРДА⁸⁵

Симаков С. С. (Россия, Москва)

Московский физико-технический институт

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

simakov.ss@phystech.edu

Гамилов Т. М. (Россия, Москва)

Первый МГМУ им. И.М. Сеченова

gamilov@crec.mipt.ru

Данилов А. А. (Россия, Москва)

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

a.daniolov@inm.ras.ru

Ишемическая болезнь сердца (ИБС) является ведущей причиной смертности во всем мире, на ее долю приходится примерно 12.8% всех смертей. Компьютерная томография коронарных артерий в настоящее время является стандартным диагностическим инструментом для оценки распространенности ИБС. В настоящее время катетерный тест на фракционный резерв кровотока (FFR) считается золотым стандартом для оценки тяжести ИБС и определения необходимости чрескожного коронарного вмешательства (ЧКВ). Для оценки тяжести ИБС так же используются показатели резерва коронарного кровотока (CFR) и мгновенного безволнового соотношения (iFR). Показатели FFR, CFR и iFR характеризуют тяжесть поражения крупных коронарных артерий диаметром более 0.5 мм. Примерно у 30-50

Современные математические модели коронарного кровообращения часто не включают данные о перфузии для оценки ИБС [1, 2]. Мы используем ранее разработанную и апробированную одномерную модель гемодинамики, которая основана на физической модели потока жидкости через сеть эластичных сосудов [3]. В этой модели мы вычисляем коэффициент трансмурального перфузионного отношения (TPR) для определенных пользователем сегментов левой коронарной артерии. При увеличении TPR происходит снижение терминального сосудистого сопротивления. Полученная модель может быть использована в качестве междисциплинарного вычислительного инструмента для оценки изменений коронарной гемодинамики до и после чрескожного коронарного вмешательства (ЧКВ) у 11 пациентов. Для настройки параметров модели используются неинвазивные данные о пациентах.

Наши результаты показывают, что использование данных TPR для моделирования показателей улучшает точность до 3% при стандартном отклонении 0.04. Высокие значения FFR и iFR как в краткосрочной, так и в долгосрочной перспективе не обязательно коррелируют с улучшением CFR и долгосрочным восстановлением коронарного кровотока. Наши расчеты также показывают, что ЧКВ при стенозе приводит к повышению показателей гемодинамики в соседних сосудах со стенозами, причем эффект более выражен в долгосрочной перспективе.

Литература

- [1] Carson J. M., Pant S., Roobottom C., et. al. Noninvasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: A benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies // International journal for numerical methods in biomedical engineering. 2019. V. 35. e3235.
- [2] Lu M. T., Ferencik M., Roberts R. S. et. al. Noninvasive FFR Derived From Coronary CT Angiography: Management and Outcomes in the PROMISE Trial // JACC Cardiovascular Imaging. 2017. V. 10. P. 1350-1358.
- [3] Gamilov T., Kopylov P., Serova M., et. al. Computational analysis of coronary blood flow: The role of asynchronous pacing and arrhythmias // Mathematics. 2020. V. 8. No. 8. 1205.

⁸⁵Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №21-71-30023.

Ситник С. М. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
sitnik@bsu.edu.ru

Половинкина М. В. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет инженерных технологий
polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин И. П. (Россия, Воронеж)

Воронежский государственный университет
polovinkin@yandex.ru

Пусть $x'=(x_1, \dots, x_n)$, $x''=(x_{n+1}, \dots, x_N)$, $\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x''), x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$,
 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\nu_\kappa = (\gamma_\kappa - 1)/2$, $x^\gamma = (x')^\gamma = \prod_{\kappa=1}^n x_\kappa^{\gamma_\kappa}$, $\gamma_\kappa > 0$, $\kappa = 1, \dots, n$.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\partial u / \partial t = \Delta_B u, \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad \partial u / \partial x_\kappa(+0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \kappa = 1, \dots, n$$

где B – эллиптический оператор Δ_B , называемый также оператором Лапласа–Бесселя, определяется формулой

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=n+1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^n B_{x_k} u + \sum_{k=n+1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

где $B_{x_k} = B_{x_k, \gamma_k}$ – оператор Бесселя, действующий по переменной x_k по формуле $B_{x_k} u = \partial^2 u / \partial x_k^2 + \gamma_k x_k^{-1} \partial u / \partial x_k$. Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$.

Поставим следующую задачу. Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ известны в моменты $0 \leq t_1 < \dots < t_p$ и $\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leq \epsilon_j$, $j = 1, \dots, p$, где $\epsilon_j > 0$, $j = 1, \dots, p$. Требуется каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в \mathbb{R}_+^N в фиксированный момент времени τ . Для классического уравнения теплопроводности эта задача была поставлена и решена в [1]. Мы пользуемся терминологией и методами этой работы.

Следуя [1], любое отображение $m : L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \times \dots \times L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \rightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ мы называем методом восстановления (температуры в \mathbb{R}_+^N в момент τ согласно этой информации). Пусть $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot))$, $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$, $\bar{y}(\cdot) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p$, $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$, $U = \{(u_0(\cdot), \bar{y}(\cdot)) : \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leq \epsilon_j, j = 1, \dots, p\}$. Значение $e(\tau, \bar{\epsilon}, m) = \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)}$, называется ошибкой этого метода. Значение

$$E(\tau, \bar{\epsilon}) = \inf_{m: (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p \rightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} e(\tau, \bar{\epsilon}, m)$$

называется ошибкой оптимального восстановления. Метод \hat{m} , для которого $E(\tau, \bar{\epsilon}) = e(\tau, \bar{\epsilon}, \hat{m})$, называется оптимальным методом восстановления.

На двумерной плоскости (t, y) построим множество

$$M = \text{co} \left\{ \left(t_j, \ln \left(\frac{1}{\epsilon_j} \right) \right) j = 1, \dots, p \right\} + \{(t, 0) : t \geq 0\},$$

где $\text{co} A$ означает выпуклую оболочку множества A . Введем функцию $\theta(t) = \max\{y : (t, y) \in M\}$, на луче $[0, +\infty)$, предполагая, что $\theta(t) = -\infty$, если $(t, y) \notin M$ при всех y . На луче $[t_1, +\infty)$ график функции $\theta(t)$ – направленная вверх выпуклая (вогнутая) ломаная линия. Пусть $t_1 = t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_p}$ суть точки ее изломов.

Теорема [2]. Для любого $\tau > 0$ равенство $E(\tau, \bar{\epsilon}) = e^{-\theta(\tau)}$ имеет место.

Если $\rho \geq 2$, $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, то оптимальным является метод \hat{m} , определенный формулой $\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_{\gamma}(\cdot) + (\Phi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_{\gamma}(\cdot)$, где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ – функции, образы Фурье–Бесселя которых имеют вид

$$F_{\gamma} \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau) \epsilon_{s_{j+1}}^2 e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \epsilon_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \epsilon_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

$$F_{\gamma} \Phi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j}) \epsilon_{s_j}^2 e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau) \epsilon_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j}) \epsilon_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}.$$

Литература

- [1] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб. 2009. 200, № 5. С. 37–54.
- [2] Ситник С.М., Половинкина М.В., Половинкин И.П. О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, № 1. С. 173–187.

СУБОПТИМАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СМЕЩЕННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ И ОПЕРАТОРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НОРМАМИ

Соколов В. Ф. (Россия, Сыктывкар)

Физико-математический институт Коми научного центра УрО РАН

sokolov@ipm.komisc.ru

подавляющее большинство исследований в теории робастного управления относится к H_{∞} -теории, соответствующей для систем с дискретным временем сигнальному пространству ℓ_2 . Поскольку в H_{∞} -теории не удастся получить явные представления для соответствующих этой теории показателей качества управления, задачи оптимального управления и идентификации систем в условиях неполной априорной информации остаются нерешенными и актуальными до настоящего времени. В ℓ_1 -теории, соответствующей сигнальному пространству ограниченных последовательностей ℓ_{∞} [1], [2], получены явные представления для индуцированных норм систем со структурированными операторными возмущениями [3], [4]. Это открывает возможности для решения некоторых задач оптимального управления и идентификации в условиях неполной априорной информации. Ниже рассматривается одна из таких оптимальных задач.

Объект управления описывается разностным уравнением

$$a(q^{-1})y_t = b(q^{-1})u_t + v_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ – выход объекта в момент времени t , $u_t \in \mathbb{R}$ – управление, $v_t \in \mathbb{R}$ – суммарное возмущение. Полиномы $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ и $b(\lambda) = b_1\lambda + \dots + b_m\lambda^m$ характеризуют номинальную модель объекта (т.е. объекта без возмущений), q^{-1} – оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$). Начальные данные y_{1-n}, \dots, y_0 произвольны, $u_t = 0$ при $t < 0$. Суммарное возмущение v_t удовлетворяет ограничению

$$|v_t - c^w| \leq \delta^w + \delta^y \max_{t-\mu \leq k < t} |y_k| + \delta^u \max_{t-\mu \leq k < t} |u_k|, \quad (2)$$

где c^w – смещение внешнего возмущения, δ^w – верхняя граница несмещенного внешнего возмущения $\delta^w w$ с неизвестным нормированным возмущением w , $\sup_t |w_t| \leq 1$, $\delta^y > 0$ и $\delta^u > 0$ – коэффициенты усиления (индуцированные нормы) операторных возмущений по выходу и управлению соответственно. Операторные возмущения по выходу и управлению описывают

не моделируемую динамику объекта (1). Конечная память μ операторных возмущений выбирается конструктором достаточно большой без ущерба для гарантируемого качества управления и гарантирует независимость качества от начальных данных.

Априорная информация. Заданные полиномы $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ - тестируемые параметры номинальной модели, $b_1 \neq 0$, полином $b(\lambda)/\lambda$ устойчив (модули его корней больше единицы). Все параметры суммарного возмущения v неизвестны.

Задачи. Требуется оценить в онлайн режиме параметры возмущений и качество номинальной модели и построить управление объектом (1), гарантирующее минимизацию с заданной точностью гарантированной верхней границы асимптотической ошибки отслеживания заданного ограниченного сигнала $r \in \ell_\infty$:

$$\sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - r_t| \rightarrow \min,$$

где супремум вычисляется на множестве суммарных возмущений v , удовлетворяющих ограничению (2). Сложность задач заключается в неидентифицируемости всех неизвестных параметров. Решение задач базируется на использовании оптимального значения показателя качества задачи управления как идентификационного критерия и полиэдральном онлайн оценивании неизвестных параметров, согласованных с данными измерений.

Литература

- [1] Khammash M., Pearson J. B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 4. P. 398-412.
- [2] Dahleh M. A. Diaz-Bobillo I. J. Control of uncertain systems: a linear programming approach. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [3] Khammash M. H. Robust Performance: Unknown Disturbances and Known Fixed Inputs // IEEE Transactions on Automatic Control, 1997. V. 42. P. 1730-1734.
- [4] Соколов В. Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях. Коми научный центр УрО РАН. Сыктывкар. 2011.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО⁸⁶

Солонуха О. В. (Россия, Москва)

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

solonukha@yandex.ru

Пример. Пусть $p = \frac{m+1}{m}$, $\Omega_T = Q \times (0, T)$, $Q = (0, 2) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial G \in C^\infty$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t w(x, t) + \Delta_p w(x, t) = f(x, t) \quad (x \in Q, t \in (0, T)), \quad (1)$$

где $\Delta_p w = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (\text{sign}(\partial_i w) |\partial_i w|^{p-1})$, с начальными условиями

$$w|_{t=0} = \psi \quad x \in Q \quad (1)$$

и нелокальными краевыми условиями Бицадзе-Самарского

$$w|_{x' \in \partial G} = 0, \quad w|_{x_1=0} = \gamma w|_{x_1=1}, \quad w|_{x_1=2} = \gamma w|_{x_1=1}. \quad (3)$$

Пусть $L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) = \{w \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : w \text{ удовлетворяет (3)}\}$,

⁸⁶Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

$W_\gamma = \{w \in L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) : \partial_t w \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T) =: \mathcal{V}^*\}$.
 При $|\gamma| < 1$ для любых $f \in \mathcal{V}^*$ и $\psi \in L_2(Q)$ задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение $w \in W_\gamma \subset C(0, T; L_2(Q))$.

Утверждение примера основано на следующей теореме:

Теорема. Пусть $p \in (0, 2]$, $W = \{w \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) : \partial_t w \in \mathcal{V}^*\}$, $R_Q : L_2(\Omega_T) \rightarrow L_2(\Omega_T)$ — невырожденный, ограниченный, линейный, положительно определенный оператор, $A_R : W \rightarrow \mathcal{V}^*$ — ограниченный, деминепрерывный, сильно монотонный оператор. Тогда для любых $f \in \mathcal{V}^*$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u \in W$ операторного уравнения

$$\partial_t R_Q u + A_R u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi. \quad (4)$$

О СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ⁸⁷

Субботина Н. Н. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
subb@uran.ru

Крупенников Е. А. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
kрупенников@imm.uran.ru

Рассматривается задача реконструкции управлений (ЗРУ) по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории для аффинно-управляемых детерминированных систем. Известны невыпуклые геометрические ограничения на управления. В подобных случаях могут возникать управления со скользящими режимами.

Как правило, управление, порождающее наблюдаемую траекторию, не единственное. Среди множества таких управлений единственным образом выделяется нормальное управление. Для этого применяется теория обобщенных управлений [1,2]. Целью ЗРУ является построение по неточным замерам наблюдаемой траектории аппроксимаций нормального управления, которые сходятся к нему при стремлении к нулю параметров замеров. При этом траектории, порождаемые аппроксимациями, должны равномерно сходить к наблюдаемой.

Доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть $\mathcal{U} \subset L^2$ — множество измеримых с квадратом функций со значениями из некоторого компакта в R^m . Тогда выпуклая оболочка множества \mathcal{U} совпадает с замыканием \mathcal{U} в слабой топологии пространства L^2 .

Предлагается метод построения кусочно-постоянных аппроксимаций нормального управления таких, что: их значения удовлетворяют заданным невыпуклым ограничениям на управления; траектории, порождаемые этими аппроксимирующими управлениями, равномерно сходятся к наблюдаемой; сами аппроксимирующие управления сходятся слабо в L^2 к нормальному. Метод базируется на подходе к решению ЗРУ, описанном и обоснованном авторами доклада в работах [3,4]. При этом используются конструкции из неклассических вспомогательных задач вариационного исчисления. Особенностью подхода является использование функционалов, интегранты которых представляют собой разницу двух выпуклых функций (являются d.c.-функциями).

Для предлагаемого метода получены оценки близости к наблюдаемой траектории траекторий, порождаемых аппроксимирующими управлениями.

Приводятся результаты численной реализации метода на примере реконструкции управлений для механической системы.

⁸⁷Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

Литература

- [1] Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 230 с.
- [2] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
- [3] Subbotina N. N., Krupennikov E. A. Variational Approach to Solving Control Reconstruction Problems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, No. 6. P. 1428–1437.
- [4] Subbotina N. N., Krupennikov E. A. Variational Approach to Construction of Piecewise-Constant Approximations of the Solution of Dynamic Reconstruction Problem // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms. 2023. Vol. 423. Springer, Cham. P. 227–242.

О ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Сурков П. Г. (Россия, Екатеринбург)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
spg@imm.uran.ru

Дробный анализ является сейчас одной из активно развивающихся областей математики. Пока основная часть публикаций в этой области носит теоретический характер, все чаще фундаментальные результаты используются в прикладных исследованиях [1]. Большое число работ посвящено задачам управления в различных постановках и смежным им задачам идентификации. Мы будем рассматривать задачу восстановления неизвестной характеристики системы дробного порядка в режиме онлайн. Пусть управляемая система дробного порядка задана в виде

$$[D_*^{u(t)} x](t) = f(t), \quad t \in T := [\sigma, \theta], \quad x(\sigma) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^d$ — фазовый вектор, $t \in T$ — конечный отрезок, u — внешнее воздействие, $u(t) \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$, f — заданная непрерывная функция, и также использовано обозначение для дробной производной Капуто переменного порядка $u(t)$:

$$[D_*^{u(t)} x](t) := \frac{1}{\Gamma(1 - u(t))} \int_{\sigma}^t \frac{\dot{x}(s)}{(t - s)^{u(t)}} ds,$$

здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Развитие и применение производных дробного переменного порядка отражены в обзорах [2], [3]. Движение системы (1) определяется внешним воздействием $u(\cdot)$, которое заранее неизвестно. Сама траектория системы также неизвестна и доступна для непрерывных измерений с некоторой погрешностью в режиме онлайн, т.е. в каждый момент $t \in T$ имеются вектор $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^d$, отвечающие условию

$$\|x(t) - \xi^h(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq h, \quad t \in T, \quad (2)$$

где $h \in (0, 1)$ — допустимая погрешность. Ставится следующая задача. В предположении, что траектория $x(\cdot)$ и внешнее воздействие $u(\cdot)$ заранее неизвестны, а информация о позиции системы поступает одновременно с ее функционированием в виде векторов $\xi^h(\cdot)$, удовлетворяющих (2), требуется построить адаптивный работающий в режиме онлайн алгоритм приближенного нахождения воздействия $u(\cdot)$, устойчивый к погрешностям вычислений. Рассматриваемая задача относится к классу обратных задач динамики и для ее решения используется метод динамического обращения [4]. Данный метод основывается на использовании принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского в сочетании с методом регуляризации А.Н. Тихонова. Предложен алгоритм построения аппроксимаций неизвестного внешнего воздействия в режиме онлайн, и установлена его сходимости.

Литература

- [1] Uchaikin V. V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Heidelberg: Springer Berlin, 2013.

- [2] Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W. A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2019. Vol. 22. No 1. pp. 27–59.
- [3] Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review // *Proc. R. Soc. A.* 2020. Vol. 476. Article ID:20190498.
- [4] Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И., Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
С НЕСТАНДАРТНЫМИ УСЛОВИЯМИ РОСТА: НАСЛЕДИЕ В.В. ЖИКОВА И ДАЛЕЕ

Сурначёв М. Д. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
peitsche@yandex.ru

В 1950-х и 1960-х годах в основополагающих работах Е. DiGiorgi, Ч.В. Morrey, J. Moser, S. Campanato, М. Giaquinta, J. Serrin, G. Stampacchia, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и др. была в основных чертах построена теория регулярности минимизантов интегральных функционалов вида

$$\int_D f(x, u, \nabla u) dx, \quad (1)$$

с интегрантом $f(x, u, \xi)$, выпуклым по ξ , который удовлетворяет условиям коэрцитивности и роста вида

$$C_1|\xi|^\alpha - f_1(x, u) \leq f(x, u, \xi) \leq C_2|\xi|^\alpha + f_2(x, u),$$

где $\alpha > 1$, $C_1, C_2 > 0$, с подходящими условиями на функции f_1, f_2 . Уравнения Эйлера–Лагранжа для (1) имеют вид

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u), \quad (2)$$

где, например, можно рассматривать условия коэрцитивности и роста вида

$$A(x, u, \xi) \cdot \xi \geq c_3|\xi|^\alpha - \psi_3(x, u), \quad c_3 > 0, \\ |A(x, u, \xi)| \leq c_1|\xi|^{\alpha-1} + \psi_1(x, u), \quad |B(x, u, \xi)| \leq c_2|\xi|^{\alpha-1} + \psi_2(x, u),$$

с функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 , удовлетворяющими подходящим условиям. Соответствующие результаты и методы подробно освещены в монографиях [1]–[3].

В 1980-х годах В.В. Жиковым [4] было начато изучение задач с “нестандартными” условиями коэрцитивности и роста (интегрант далее предполагается не зависящим от u)

$$C_1|\xi|^\alpha - C \leq f(x, \xi) \leq C_2|\xi|^\beta + C,$$

или же для уравнения (2),

$$|A(x, \xi)|^{\beta'} \leq c_1A(x, \xi) \cdot \xi + c_3, \quad A(x, \xi) \cdot \xi \geq c_2|\xi|^\alpha - c_3, \quad 1 < \alpha < \beta.$$

Примерами (изотропных) интегрантов такого рода являются

$$p(x)\text{-энергия} \quad f(x, \xi) = \frac{|\xi|^{p(x)}}{p(x)}, \quad 1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty, \\ \text{весовая энергия} \quad f(x, \xi) = a(x) \frac{|\xi|^2}{2}, \quad 0 \leq a, a^{-1} \in L^t(D), t > 1, \\ \text{двухфазная энергия} \quad f(x, \xi) = |\xi|^\alpha + a(x)|\xi|^\beta, \quad 1 < \alpha < \beta, \quad a(x) \geq 0.$$

Для задачи с $p(x)$ -энергией было обнаружено существование двух типов минимизантов (соотв. решений для уравнений Эйлера-Лагранжа), причём обладающих различными свойствами — одно из них в построенном примере было разрывным, другое непрерывным. Примеры иного рода (анизотропные) были построены в работе [5]. Вопросам существования решений и перехода к пределу посвящён обзор [6].

В докладе планируется обсудить результаты о регулярности решений эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста.

Литература

- [1] Morrey Ch. V. Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin: Springer, 1966.
- [2] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [3] Giaquinta M. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Princeton (NJ): PUP, 1983.
- [4] Жиков В. В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50. № 4. С. 675–710.
- [5] Gaaquinta M. Growth conditions and regularity: a counterexample // Manuscripta Math. 1987. V. 59. P. 245–248.
- [6] Zhikov V. V. On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. 2011. V. 173. No. 5. P. 463–570.

НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО (p, q) -ЛАПЛАСИАНА⁸⁸

Сурначёв М. Д. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

peitsche@yandex.ru

Тихомиров Р. Н. (Россия, Владимир)

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

romat81@bk.ru

Рассмотрим в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, эллиптическое уравнение

$$\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = 0 \quad (1)$$

с двухфазным кусочно-постоянным показателем $p(x)$. Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$, и

$$p(x) = \begin{cases} q & \text{в } D^{(1)}, \\ p & \text{в } D^{(2)}, \end{cases} \quad 1 < q < p. \quad (2)$$

Для определения решения, введём класс функций

$$W_{\text{loc}}(D) = \{u : u \in W_{1,\text{loc}}^1(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_{\text{loc}}^1(D)\},$$

где $W_1^1(D)$ – классическое пространство Соболева. Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{\text{loc}}(D)$, для которой справедливо интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad (3)$$

на финитных пробных функциях $\varphi \in W_{\text{loc}}(D)$.

⁸⁸Результаты Р.Н. Тихомирова получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004).

Если $p = q$, то свойства решений уравнения (1) подробно исследованы (см. [1]). В частности (см. [2]), в шаре $B_{4R} \subset D$ установлено классическое неравенство Харнака:

$$\inf_{B_R} u \geq C \sup_{B_R} u \quad (4)$$

с положительной постоянной C , не зависящей от R и u .

Для постоянных показателей p и q из (2) в работах [3]-[4] установлено отсутствие классического неравенства Харнака (3) в шарах с центром на разделяющей гиперплоскости Σ и приведён аналог неравенства Харнака для неотрицательных решений в шарах $B_{4R} \subset D$ с центром на Σ вида

$$\inf_{B_R} u + R \geq C_1 \sup_{B_R^-} u, \quad (5)$$

где $B_R^- = \{x \in B_R : x_n < -\frac{R}{2}\}$ и $0 < C_1(n, p, q) < 1$.

Настоящее сообщение посвящено обобщению результата работы [3]. Ниже для постоянных p и q из (2) полагается

$$p - q = h > 0. \quad (6)$$

Для формулировки результатов обозначим через B_R открытый шар радиуса R , где $R \leq 1$, с центром на Σ такой, что $B_{4R} \subset D$ и $M = 1 + \sup_{D'} u$, где $D' \subset D$ какая-либо строго

внутренняя подобласть области D , содержащая шар B_{4R} и $D_R^{(2)} = D^{(2)} \cap B_R$.

Теорема 1. Пусть u — неотрицательное в шаре B_{4R} решение уравнения (1) и выполнено условие (6). Тогда существует положительная постоянная $C = C(n, p, q)$ такая, что справедливо неравенство

$$\inf_{D_R^{(2)}} u + MR^\nu \geq K \sup_{D_R^{(2)}} u, \quad \text{где } \nu = \frac{p-q}{p} = \frac{h}{p} \text{ и } K = C^{-C^{1/h}}. \quad (7)$$

Оценка (7) является аналогом классического неравенства Харнака в полушаре $D_R^{(2)}$. Следствием оценок (5) и (7) является следующее утверждение

Теорема 2. Пусть u — неотрицательное в шаре B_{4R} решение уравнения (1) и выполнено условие (6). Существует положительная постоянная $C = C(n, p, q)$, такая, что справедливо неравенство

$$\inf_{B_R} u + MR^\nu \geq K \sup_{D_R^{(2)}} u, \quad \text{где } K = C^{-C^{1/h}}.$$

Литература

- [1] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2-е изд. М.: Наука, 1973.
- [2] Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247–302.
- [3] Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. О неравенстве Харнака для эллиптического (p, q) -лапласиана // Докл. РАН. 2016. Т.470, No. 6. С. 623–627.
- [4] Alkhutov Yu. A., Surnachev M. D. A Harnack inequality for a transmission problem with $p(x)$ -Laplacian // Applicable Analysis. 2019. V. 98, No. 1-2. P. 332–344.

О ЯВЛЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ НЕСУЩИХ И УПРАВЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛА

Тлеулинов М. К. (Россия, Казань)

Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева — КАИ
mktleulinov@kai.ru

Исследования динамики несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов в геометрически нелинейной постановке позволили обнаружить различные нелинейные явления и эффекты.

В составных несущих и управляющих поверхностях, например, оперении с рулем, с тремя и более шарнирами навески, при отклонении рулевой поверхности возникают лобовые реакции, лежащие в плоскости руля. Эти реакции тем больше, чем больше лобовая изгибная жесткость рулевой поверхности. В современных летательных аппаратах, где это соотношение может достигать 50-100 и более раз, эти реакции могут оказаться больше нормальных и существенно изменить картину напряженно-деформированного состояния конструкции. Более того, они могут привести к возникновению нового явления – колебаниям катастрофического изменения формы составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов (явлению колебаний «прощелкивания»). Суть этого явления заключается в том, что в определенный момент конструкция резко, скачком переходит из одного состояния равновесия в другое, при этом существенно меняются прогибы и углы закручивания – происходит жесткая бифуркация (катастрофа). Катастрофическое уменьшение углов отклонения управляющей поверхности в потоке резко снижает внешнюю (аэродинамическую) нагрузку на оперение. Кривизна несущей поверхности начинает уменьшаться, что уменьшает кривизну оси шарниров и, как следствие, лобовую нагрузку управляющей поверхности в плоскости хорд. Кривизна управляющей поверхности в плоскости хорд и ее углы закручивания уменьшаются, и происходит перескок в исходное положение – обратная катастрофа. Это восстанавливает углы отклонения руля и вновь вызывает увеличение нагрузки на оперение в целом. Далее описанный цикл повторяется. Это явление было подтверждено экспериментом в аэродинамической трубе.

В составных авиационных конструкциях могут также возникнуть такие явления нелинейной динамики, как хаотические колебания. Возникновение хаотических колебаний связано с динамическим деформированием составных несущих и управляющих поверхностей ЛА. Здесь могут возникнуть хаотические колебания как несущей, так и управляющей поверхности. Исследования показывают, что колебания таких конструкций имеют сложный характер, и, в ряде случаев, имеют хаотическую составляющую, о чем свидетельствуют расхождение фазовых траекторий и выход характеристических показателей Ляпунова в положительную область.

При численных исследованиях нелинейных колебаний методами прямого интегрирования по времени могут возникнуть расходящиеся нелинейные процессы. Для решения этой проблемы были разработаны метод прямого интегрирования и специальная методика численного динамического расчета. В докладе приводятся результаты численных экспериментов по исследованию колебаний катастрофического изменения формы и хаотических колебаний составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ФЛОКЕ

Трещев Д. В. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
treschev@mi.ras.ru

Я рассматриваю оператор Шредингера, описывающий динамику квантовой частицы на окружности в поле периодического по времени потенциала. Соответствующее уравнение Шредингера – это линейное дифференциальное уравнение на гильбертовом пространстве H квадратично интегрируемых функций на окружности. Задача состоит в построении

периодической по времени унитарной замены переменных на H , преобразующей оператор Шредингера в оператор, не зависящий от времени.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Тулакова З. Р. (Узбекистан, Фергана)

Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий
ziyodacoders@gmail.com

В настоящее время известны фундаментальные решения трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами

$$H_{\alpha,\beta,\gamma}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1 \quad (1)$$

в первом бесконечном октанте $x > 0, y > 0, z > 0$, благодаря которым решения основных краевых задач для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в бесконечной (в первом октанте) и конечной (в одном из октантов шара) областях получены в явных формах.

Исследованию смешанной задачи для сингулярных эллиптических уравнений посвящены сравнительно мало работ. Первая работа в этом направлении – работа М.М.Смирнова [1], в которой построена теория потенциала смешанной задачи для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad 0 < 2\beta < 1, \quad y > 0.$$

К такому направлению исследований примыкает также работа [2].

Пусть $D \subset R_3$ – конечная область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$ и получетвертью сферы $S : \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Задача DN² Найти регулярное решение $u(x, y, z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_1(y, z), \quad y^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \nu_2(x, z), \quad z^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nu_3(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = \varphi(x, y, z),$$

где $\tau_1(y, z), \nu_2(x, z), \nu_3(x, y), \varphi(x, y, z)$ – заданные непрерывные и достаточно гладкие функции, N – внешняя нормаль к сфере S .

Задача D²N. Найти регулярное решение $u(x, y, z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_1(y, z), \quad u|_{y=0} = \tau_2(x, z), \quad z^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nu_3(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = \varphi(x, y, z),$$

где $\tau_1(y, z), \tau_2(x, z), \nu_3(x, y), \varphi(x, y, z)$ – заданные непрерывные и достаточно гладкие функции, причем функции $\tau_1(y, z)$ и $\tau_2(x, z)$ удовлетворяют условию согласования: $\tau_1(0, z) = \tau_2(0, z)$.

Задача D³. Найти регулярное решение $u(x, y, z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_1(y, z), \quad u|_{y=0} = \tau_2(x, z), \quad u|_{z=0} = \tau_3(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = \varphi(x, y, z),$$

где $\tau_1(y, z), \tau_2(x, z), \tau_3(x, y), \varphi(x, y, z)$ – заданные непрерывные и достаточно гладкие функции, причем $\tau_2(x, 0) = \tau_3(x, 0), \tau_1(y, 0) = \tau_3(0, y), \tau_1(0, z) = \tau_2(0, z), \tau_1(0, 0) = \tau_2(0, 0) = \tau_3(0, 0)$.

Теорема. Если решение задачи DN² (D²N, D³) существует, то оно единственно.

Существование решения поставленных смешанных задач докажем методом функции Грина. Например, функция Грина задачи \mathbf{DN}^2 имеет вид:

$$G_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) - \left(\frac{a}{R_0}\right)^{3-2\alpha+2\beta+2\gamma} q_1(x, y, z; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0),$$

где $q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ — фундаментальное решение уравнения (1):

$$q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_1 \frac{(xx_0)^{1-2\alpha} x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma}}{r^{3-2\alpha+2\beta+2\gamma}} F_A^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{3}{2} - \alpha + \beta + \gamma, 1 - \alpha, \beta, \gamma; \\ 2 - 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right],$$

$F_A^{(3)}$ — гипергеометрическая функция Лауричелла от трех переменных,

$$\xi = -\frac{4xx_0}{r^2}, \quad \eta = -\frac{4yy_0}{r^2}, \quad \zeta = -\frac{4zz_0}{r^2}; \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2;$$

$$R_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \tilde{x}_0 = \frac{a^2}{R_0^2} x_0, \quad \tilde{y}_0 = \frac{a^2}{R_0^2} y_0, \quad \tilde{z}_0 = \frac{a^2}{R_0^2} z_0.$$

Главный результат данного сообщения заключается в том что, решения поставленных задач предоставляются в явных формах.

Литература

- [1] Смирнов М.М. Смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$. // Сибирский математический журнал, 1963, Том 4, 5, с. 1150-1161.
- [2] Ergashev T.G. Potentials for three-dimensional singular elliptic equation and their application to the solving a mixed problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41, No. 6. pp. 1067-1077.

О КРИТЕРИИ МОЛЧАНОВА КОМПАКТНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Туманов С. Н. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
sntumanov@yandex.ru

Для комплекснозначного $q \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ введем дифференциальное выражение

$$l(y) = -y'' + qy \tag{1}$$

и линеалы

$$\begin{aligned} D &= \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) \mid y, y' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+), l(y) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}, \\ D_0 &= \{y \in D \mid y(0) = y'(0) = 0, \exists x_0 > 0 \forall x \geq x_0 y(x) = 0\}, \\ D_U &= \{y \in D \mid U(y) = 0\}, \end{aligned}$$

где U — некоторая форма краевых условий в $x = 0$:

$$U(y) = Ay(0) + By'(0), \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad |A| + |B| > 0.$$

Определим дифференциальные операторы $L_0 \subset L_U$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ на соответствующих областях определения $D_0 \subset D_U$ дифференциальным выражением (1).

Оператор L_0 назовем *минимальным*.

Будем говорить, что потенциал q удовлетворяет *условию Молчанова*, если для любого $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+a} |q(\xi)| d\xi = +\infty,$$

Теорема 1. Для того, чтобы у минимального оператора L_0 в $L_2(\mathbb{R}_+)$ существовало расширение с компактной резольвентой, необходимо, чтобы q удовлетворял условию Молчанова.

Определение 1. Скажем, что для q выполнено \mathbb{R}_- -условие, если при всех достаточно больших $x > x_0 \geq 0$ значения $q(x)$ лежат в секторе $\alpha \leq \arg(q(x) - q_0) \leq \beta$ для некоторых $-\pi < \alpha \leq \beta < \pi$ и $q_0 \in \mathbb{C}$.

Определение 2. Потенциал q назовём секториальным, если для него выполнено \mathbb{R}_- -условие с $\beta - \alpha < \pi$.

Теорема 2. Пусть потенциал q секториальный. Тогда оператор L_U имеет компактную резольвенту тогда и только тогда, когда q удовлетворяет условию Молчанова.

Как показывает следующая теорема, условие $\beta - \alpha < \pi$ не может быть ослаблено.

Теорема 3. Существует потенциал q , принимающий чисто мнимые значения $q(x) \in i\mathbb{R}$ при $x \in \mathbb{R}_+$, такой, что $|q| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, но минимальный оператор L_0 не имеет расширений с компактной резольвентой.

Для этого потенциала $\beta - \alpha = \pi$, и, очевидно, он удовлетворяет условию Молчанова. Оператор L_U с краевыми условиями Дирихле $U(y) = y(0)$ имеет ограниченную резольвенту, по меньшей мере в левой полуплоскости.

Следующая теорема даёт достаточное условие компактности резольвент операторов с потенциалами, удовлетворяющими \mathbb{R}_- -условию с $\beta - \alpha > \pi$. При этом теряется свойство секториальности самих рассматриваемых операторов, в частности, числовой образ L_U может заметать всю комплексную плоскость.

Теорема 4. Пусть для некоторого $x_0 > 0$ при всех $x \geq x_0 > 0$ $|q(x)| \geq 1$ и дополнительно:

- $q \in AC_{loc}[x_0, +\infty)$,

- для некоторого $0 < \varkappa < \pi$

$$-\pi + \varkappa < \arg q(x) < \pi - \varkappa, \quad x \geq x_0,$$

- для некоторого $0 < \delta < 1$

$$\left| \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} \right| < 4\delta \sin \frac{\varkappa}{2}, \quad x \geq x_0.$$

Тогда для компактности резольвенты L_U достаточно, чтобы для любого $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+a} |q(x)|^{1/2} dx = +\infty.$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

Филимонов А. М. (Россия, Москва)

Российский университет транспорта (МИИТ)

amfilimonov@yandex.ru

Как известно, процессы с конечной скоростью распространения возмущений, часто описываются гиперболическими уравнениями и системами. Однако, встречаются и модели (см., например, [1], [2], [3]) в виде уравнений или систем, которые по своей структуре можно отнести к гиперболическому типу, однако в которых часть характеристик параллельна оси x , что можно интерпретировать, как бесконечную скорость распространения сигнала для части искомых функций:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + B(x, t, \bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} = \bar{f}(x, t, \bar{u}, \bar{v}), \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} = \bar{g}(x, t, \bar{u}, \bar{v}), \end{cases} \quad (1)$$

где B – матрица, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$.

В случае квазилинейных систем, несингулярная часть которых приводима к инвариантам Римана, сходные задачи рассматривались в [4], а для систем общего вида, но при весьма специального вида краевых условиях и соответствующих специальных предположениях, относящихся к несингулярной части системы, в работе [5].

В докладе описывается достаточно широкий класс краевых условий для несингулярной части систем общего вида (1), позволяющий получить локальную разрешимость (в обобщенном смысле) смешанной задачи.

Литература

- [1] Верещагин И. К., Кокин С. М., Селезнев В. А. Старение кристалла люминофора // Известия АН СССР, Физика, 49, 10, 1985, с. 1940-1943.
- [2] Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М., Наука, 1998, 448 с.
- [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М., Высшая школа, 1990, 208 с.
- [4] Лапин С. А., Филимонов А. М. Смешанная задача для сингулярной квазилинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной // Математические заметки, 73, 2, 2003, 315-318.
- [5] Кирилич В. М., Филимонов А. М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Математичні Студії 2008. 30, №1. с. 42-60.

ЗАДАЧИ О ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛАХ С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ⁸⁹

Фурцев А. И. (Россия, Новосибирск)
Новосибирский государственный университет
al.furtsev@mail.ru

Рассматриваемые задачи описывают деформируемые тела, содержащие жесткие включения различной природы: объемные и тонкие, а также характеризующиеся наличием трещин между включениями и окружающей средой. Предполагается, что тела гиперупругие, их деформации могут быть большими, в связи с чем задачи формулируются в рамках нелинейной теории упругости. Более того, применяются условия взаимного непроникания, которые предотвращают физически нежелательный эффект взаимопроникновения материи. Указанные условия непроникания по своей природе могут быть как односторонними ограничениями на заранее неизвестные положения точек включений и окружающей среды, так и глобальными условиями инъективности деформаций. Для задач равновесия тел, содержащих включения и трещины, обсуждаются краевые задачи с условиями непроникания. Также исследуются сопутствующие задачи минимизации энергии и доказывается, что задачи равновесия имеют слабые решения.

⁸⁹Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке (соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации).

О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА-ВОЛЬТЕРРА⁹⁰

Хачатрян Х. А. (Армения, Ереван)
Ереванский Государственный Университет
khachatur.khachatryan@ysu.am

Рассматривается многомерное интегральное уравнение типа Гаммерштейна-Вольтерра с монотонной и вогнутой нелинейностью. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в газовой динамике и математической теории пространственно-временного распространения эпидемических заболеваний. Доказывается конструктивная теорема неотрицательного и ограниченного решения.

Более того, для разности соседних последовательных приближений получается равномерная оценка, правая часть в которой стремится к нулю со скоростью некоторой геометрической прогрессии.

В классе неотрицательных и ограниченных функций устанавливается также теорема единственности решения.

Полученные результаты применяются для построения глобального решения задачи Коши одного класса нелинейных уравнений теплопроводности. Разработанные методы используются также для построения положительного решения задачи Коши одной нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений возникающее в задаче распространения эпидемии в рамках модели Дикмана-Капера.

О ФОРМУЛЕ ТИПА КОШИ
КАК УСЛОВИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Хлопин Д. В. (Россия, Екатеринбург)
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
khlopin@imm.uran.ru

Доклад посвящен условиям трансверсальности в задачах управления

$$\text{минимизировать } l(y(0)) + \int_0^\infty f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau$$

при условиях $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t))$ п.в., $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(t) \in U$, $y(0) = x_*$.

Необходимые условия для таких задач в виде принципа максимума Л.С.Понтрягина были доказаны уже в [1], но имеющийся там принцип максимума не полон: он не содержит условие трансверсальности на бесконечности. Построение такого необходимого условия, дополняющего принцип максимума, затруднено прежде всего потому, что управляемые процессы не обязаны обладать какими-либо хорошими асимптотическими свойствами на бесконечности, к примеру, суммируемостью тех или иных функционалов на всей полуоси.

В частности, это означает, что необходимость этих условий зачастую показана лишь в предположении тех или иных асимптотических свойств самой системы, проверка которых сама по себе задачей является непростой, а то и невозможной. Во-вторых, в силу возможной расходимости функционала качества, в литературе сформулирована масса критериев [2] оптимальности для управлений на бесконечном промежутке, при этом естественно применение более сильного критерия оптимальности должно давать более сильное условие трансверсальности, сравните условия в [3, Theorem 1], [3, Theorem 2], [4], [5]. В-третьих, уже в линейных задачах управления, при недостаточно сильных асимптотических предположениях на систему, не стоит надеяться на то, необходимое

⁹⁰Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта по. 23RL-1A027.

условие на сопряженную траекторию выделит ровно одну среди всех удовлетворяющих принципу максимума, см. пример в [3, Example 5]. С другой стороны, в том числе из соображений удобства, необходимость таких, гарантирующих единственность сопряженной траектории, условий трансверсальности действительно полезно получить при максимально широких предположениях на систему.

Самым популярным условием, гарантирующих единственность сопряженной траектории, является предложенная А. В. Кряжимским и С. М. Асеевым в [6] формула на основе фундаментальной матрицы Коши A вдоль оптимального процесса (\hat{y}, \hat{u}) :

$$-p(0) = \lim_{\theta \uparrow \infty} \int_0^\theta \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau, \hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau)) A(\tau) d\tau, \quad \lambda = 1,$$

что эквивалентно (см. [4]) условию

$$\lim_{\theta \uparrow \infty} p(\theta)A(\theta) = 0, \quad \lambda = 1.$$

В докладе предполагается обсудить как относительно общие асимптотические предположения на систему, гарантирующие необходимость такого условия (см. [3,7]), так и модификации этого условия для задач управления с асимптотическим терминальным условием на бесконечности.

Литература

- [1] Halkin H.: Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // *Econometrica*. 1974. V. 42. P. 267–272.
- [2] Carlson D. A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // *J. Optim. Theory Appl.* 1990. V. 64, P. 55–69.
- [3] Khlopin D. Necessary Conditions in Infinite-Horizon Control Problems that Need no Asymptotic Assumptions // *Set-Valued and Variational Analysis*. 2023. V. 31, art 8.
- [4] Khlopin D. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // *J. Dyn. Con. Sys.* 2023. V. 19, P. 519–552.
- [5] Хлопин Д. В. О необходимых краевых условиях для сильно оптимального управления в задачах на бесконечном промежутке // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*. 2013, №1, С. 49–58.
- [6] Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // *Тр. МИАН*. 2007. Т. 257, Р. 3–271.
- [7] Асеев С. М., Вельов В. М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // *УМН*. 2019. V. 74. №6(450). С. 3–54.

Задача Дирихле для эллиптического уравнения с сингулярным потенциалом в области с конической точкой

Худайкулиев Б. А. (Туркменистан, Ашхабад)
Туркменский государственный институт финансов
bazargeldyh@yandex.ru

Пусть $G \subset R^n$, $n \geq 3$, – область с конической точкой $B_\rho = B(0, \rho)$ -шар радиуса ρ , $\rho < 1$, с центром в начале координат.

Пусть $\Omega = G \cap B_\rho \subset R^n$, $n \geq 3$, и $\partial\Omega$ – граница области Ω . Предполагается, что граница $\partial\Omega$ области Ω является, кроме начала координат, достаточно гладкой. Напомним, что область $G \subset R^n$, $n \geq 3$, называется областью с конической точкой, если ее граница $\partial\Omega$ является бесконечно гладкой всюду, кроме начала координат O , а в некоторой окрестности начала координат область G совпадает с конусом Σ , вершиной которого является точка O . В области Ω рассмотрим задачу нахождения неотрицательной функции $u(x)$ такой, что

$$\begin{aligned} -\Delta u &= V(x)u, \quad x \in \Omega, & (1) \\ u(x) &= \phi(x), \quad x \in \partial\Omega, & (2) \end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и Δ – оператор Лапласа.

В качестве решения уравнения (1) понимается обобщенная функция $u \in D'(\Omega)$ такая, что $u(x) \geq 0$, $Vu \in L^1_{loc}(\Omega)$, и $u = \phi$ для почти всех $x \in \partial\Omega$.

Предполагается, что $0 \leq V \in L^1_{loc}(\Omega)$ и $\phi(x)$ заданная неотрицательная непрерывная на границе $\partial\Omega$ функция, где $L^1_{loc}(\Omega)$ – пространство локально интегрируемых в Ω функций, $D'(\Omega)$ -пространство обобщенных функций (распределений).

Введем сферические координаты (r, ω) , $r = |x|$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})$ с центром в начале координат. Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega,$$

где Δ_ω – оператор Бельтрами.

Пусть λ_ρ – наименьшее собственное значение оператора Бельтрами на $G \cap \partial B_\rho$ с нулевым краевым условием Дирихле на $\partial G \cap \partial B_\rho$ и $Y_\rho(\omega)$ – собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению λ_ρ . Пусть $\phi(x) = |x|^{-\alpha} \cdot Y_\rho(\omega)$. Найдем функцию $V_0(x)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta\phi + V_0(x)\phi = 0$ в $D'(\Omega)$. Переходя к сферическим координатам (r, ω) , получаем

$$-\Delta\phi = [\alpha(n-2-\alpha) + \lambda_\rho] \cdot |x|^{-2}\phi,$$

так что $-\Delta\phi/\phi = (c + \lambda_\rho) \cdot |x|^{-2}$, где $c = \alpha(n-2-\alpha)$.

Положим

$$V_0(x) = (c + \lambda_\rho) \cdot |x|^{-2}, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Когда $\phi(x) = |x|^{-a} \cdot Y_\rho(\omega) > 0$, условие $\Delta\phi(x) \in L^1(\Omega)$ означает, что $n-2-\alpha > 0$. Последнее выполняется, если $c > 0$ (и $\alpha > 0$).

Заметим, что при $0 \leq c \leq C_* = (n-2)^2/4$ величина α определяется равенством

$$\alpha = \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} - c}.$$

В работе [1] показано, что при $0 \leq c \leq C_*$ и $0 \leq V(x) \leq V_0(x)$ в области Ω , задача (1), (2) имеет неотрицательное обобщенное решение при любой неотрицательной непрерывной граничной функции $\phi(x)$; а при $c > C_*$ и $V \geq V_0$, эта задача не имеет неотрицательных решений, если $\phi(x) > 0$.

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = |x|^{-(n-2)/2} |\ln |x|^{\alpha/2}| \cdot Y_\rho(\omega).$$

Найдем функцию $V_0(x)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta\varphi + V_0\varphi = 0$ в $D'(\Omega)$. Переходя к сферическим координатам (r, ω) , получаем

$$-\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{(n-2)^2}{4|x|^2} + \frac{\alpha(2-\alpha)}{4|x|^2 \ln^2|x|} + \frac{\lambda_\rho}{|x|^2}.$$

Положим

$$V_0(x) = \frac{(n-2)^2}{4|x|^2} + \frac{c}{4|x|^2 \ln^2|x|} + \frac{\lambda_\rho}{|x|^2}, \quad x \in \Omega,$$

где $c = \alpha(2-\alpha)$. Заметим, что при $0 \leq c \leq 1$ число α определяется из равенства $\alpha = 1 - \sqrt{1-c}$ и $\Delta\varphi \in L^1(\Omega)$ при $0 < \alpha \leq 1$.

В работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. 1. Пусть $V(x) \geq 0$. Если $0 \leq c \leq 1$ и $V(x) \leq V_0(x)$ в области Ω , то задача (1), (2) имеет неотрицательное обобщенное решение при любой неотрицательной непрерывной граничной функции $\phi(x)$.

2. Если $c > 1$ и $V(x) \geq V_0(x)$ в области Ω , то при $\phi > 0$ задача (1), (2) не имеет неотрицательных решений.

Литература

- [1] Худайкулиев Б. А. Эллиптическое уравнение с сингулярным потенциалом в области с конической точкой // Математические заметки, 2012, том 92, выпуск 6, с. 928-938.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ГЛОБАЛЬНЫХ АСИМПТОТИК ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ⁹¹

Цветкова А. В. (Россия, Москва)

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
annatsvetkova25@gmail.com

Доклад посвящен описанию подхода к построению асимптотики гауссовых пучков, основанному на теории канонического оператора Маслова [1] и изучении динамики и особенностей соответствующих лагранжевых многообразий. Этот подход позволяет, в частности, получить глобальные асимптотики в виде специальных функций для пучков Лагерра-Гаусса, которые являются решениями параксиального уравнения Гельмгольца [2].

В случае, когда пучок определяется классическими полиномами Лагерра, асимптотика в центре пучка описывается функцией Бесселя [3]. Мы также обсудим ситуацию, когда пучки определяются присоединенными полиномами Лагерра. В этом случае асимптотика описывается функцией Эйри.

Одним из преимуществ обсуждаемого подхода является тот факт, что он позволяет отказаться от параксиального приближения и изучать динамику лагранжева многообразия вдоль гамильтонова векторного поля, соответствующего исходному уравнению Гельмгольца, что также будет проиллюстрировано на примерах.

Доклад основан на совместных работах с С.Ю. Доброхотовым и В.Е. Назайкинским.

Литература

- [1] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- [2] Салех Б., Тейх М. Оптика и фотоника. Принципы и применения. Т 1. М.: Изд-во Интеллект, 2012.
- [3] Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Цветкова А. В. Асимптотика локализованных бесселевых пучков и лагранжевы многообразия // Радиотехника и электроника. 2023. Т. 30. №2. С. 527–541.

О ВЫРОЖДЕННЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ БИНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Черепанова Е. А. (Россия, Челябинск)

Челябинский государственный университет
gloomson13@mail.ru

В работе рассматриваются так называемые *бинарные уравнения*, то есть неявные дифференциальные уравнения вида

$$ap^2 + 2bp + c = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

с аналитическими в $(\mathbb{R}^2, 0)$ коэффициентами a, b, c , такими, что

$$a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0.$$

Бинарное уравнение называют *линейным*, если все его коэффициенты – линейные функции.

⁹¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 24-11-00213).

Топологическая классификация бинарных уравнений была получена в [1]; все топологические нормальные формы из этой работы – линейны. Однако аналитическая (и даже формальная) классификация бинарных уравнений является существенно более сложной из-за наличия функциональных модулей. Частным результатом ее исследования является следующая *теорема о жесткости*.

Теорема. *Для типичных бинарных уравнений:*

- из формальной эквивалентности следует аналитическая эквивалентность;
- из формальной линеаризуемости следует аналитическая линеаризуемость.

Отметим, что оба утверждения теоремы были получены ранее в комплексном случае (см. [2]), однако использованные при этом ограничения типичности полностью исключали вещественно-аналитические уравнения.

Литература

- [1] Bruce J. W., Tari F. On binary differential equations // Nonlinearity. 1995. 8. P.255–271.
- [2] Voronin S. M., Cherepanova E. A. Linearizability of Degenerate Singular Points of Binary Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 70. №2. P. 143–164.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВДУВА-ОТСОСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В КАНАЛЕ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ⁹²

Чечкин И. Г. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики имени М.В. Кедыша РАН
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
ivan.chechkin@math.msu.ru

Демьянко К. В. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики имени М.В. Кедыша РАН
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН
kirill.demyanko@yandex.ru

Нечепуренко Ю. М. (Россия, Москва)

Институт прикладной математики имени М.В. Кедыша РАН
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН
yumnech@yandex.ru

В докладе рассматривается задача оптимального управления гармоническим вдувом-отсосом с продольным волновым числом α для создания нормированных в L_2 -норме оптимального возмущения и ведущей моды для течения Пуазейля в канале квадратного сечения [1]. При этом минимизируется среднеквадратичная скорость вдува-отсоса. Данная задача сводится к задаче оптимального управления для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Cu,$$

где A — матрица $n \times n$, C — матрица $n \times p$, x — n -компонентный вектор внутренних переменных, а u — непрерывная p -компонентная векторная функция ($p \ll n$). Последняя, в свою очередь, сводится к следующей приближенной матричной задаче оптимального управления:

$$\|x(T) - x_T\|_2 \leq \varepsilon \|x_T\|_2, \quad \|u\|_{L_2} \rightarrow \min,$$

где x_T — заданный вектор, ε — заданная точность, а x и u удовлетворяют исходной системе. Необходимость сведения к приближенной задаче возникает из-за плохой обусловленности исходной. Применяется оригинальный численный алгоритм, использующий результаты работ [2], [3], [4].

⁹²Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект №22-71-10028).

Результаты численных экспериментов с применением данного алгоритма, представленные в таблице 1, позволяют сделать вывод, что затраты на создание оптимального возмущения выше затрат на создание ведущей моды примерно в 10^4 раз, а оптимальное возмущение с высокой точностью вообще не удалось создать.

| α | ε | Ведущая мода | Оптимальное возмущение |
|----------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 0 | 10^{-1} | 5.77×10^{-2} | 2.13×10^2 |
| | 1.86×10^{-3} | 1.08×10^{-1} | 1.98×10^3 |
| | 10^{-7} | 2.89×10^{-1} | — |
| 0.1 | 10^{-1} | 1.21 | 6.76×10^4 |
| | 6.78×10^{-2} | 1.45 | 1.28×10^5 |
| | 10^{-5} | 7.19 | — |
| 1 | 9×10^{-1} | 5.52×10^{-1} | 1.043×10^3 |
| | 7.24×10^{-1} | 2.06 | 7.86×10^5 |
| | 10^{-4} | 5.02×10^2 | — |

Таблица 4: Затраты для создания возмущений с различной точностью ε при различных значениях волнового числа α .

Литература

- [1] Boiko A. V., Nechepurenko Yu. M. Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross sections // J. Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48(10). P. 1699-1714.
- [2] Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. Optimal control. Springer: New York, 1987.
- [3] Lee E. B., Marcus L. Foundations of optimal control theory. Wiley: New York, 1967.
- [4] Nechepurenko Yu. M. On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 86(1). P. 457-459.

О ПОВЫШЕННОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ p -ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Чечкина А. Г. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
chekkina@gmail.com

Исследуются интегральные свойства обобщённых решений неоднородного p -эллиптического уравнения, где $p > 1$, задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$ (подробнее см. [1]). Обозначим $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, пусть $W_p^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме пространства $W_p^1(D)$. Априори для функций $v \in W_p^1(D, F)$ предполагается выполнение неравенства Фридрихса–Мазьи

$$\int_D |v|^p dx \leq C \int_D |\nabla v|^p dx.$$

Предположим, что матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ с измеримыми компонентами является симметрической и равномерно положительно определённой. Обозначим собственные значения матрицы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть выполнено соотношение

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \leq \left(\frac{p + 2\sqrt{p-1}}{p-2} \right)^2,$$

где $\lambda_{max} = \max_j \sup_D \{\lambda_j(x)\}$, $\lambda_{min} = \min_j \inf_D \{\lambda_j(x)\}$.

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы для p -эллиптического уравнения вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} A \nabla u) = \operatorname{div} f & \text{в } D, \\ u = 0 & \text{на } F, \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0 & \text{на } G, \end{cases} \quad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ — внешняя кономальная производная функции u , а $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in L_{p'}(D)$, $p' = p/(p-1)$.

Для формулировки результата нам потребуется понятие ёмкости. Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ ёмкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^q dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Величина показателя q связана со значением показателя p из (1), размерностью пространства n и определяется следующим образом: если $p \in (1, n/(n-1)]$, то $q = (p+1)/2$, а если $p \in (n/(n-1), n]$, где $n > 2$, то $q = np/(n+p)$.

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый шар радиуса r с центром в точке x_0 . Сформулируем ограничение на множество F .

А. Если $1 < p \leq n$, то предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leq r_0$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-q}, \quad (2)$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r .

В. Если $p > n$, то предполагается, что множество F не пусто: $F \neq \emptyset$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если $f \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, $p' = p/(p-1)$, то существует положительная постоянная $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ такая, что для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{p'(1+\delta/p)} dx,$$

в которой константа C при $1 < p \leq n$ зависит только от p , δ_0 , n , величины c_0 из (2) и области D . При $p > n$ зависимость C от c_0 отсутствует.

Литература

- [1] Чечкина А. Г. О задаче Зарембы для p -эллиптического уравнения // Математический сборник. 2023. Т. 214. № 9. С. 144–160. (Chechkina A. G. On the Zarembo problem for the p -elliptic equation // Sbornik: Mathematics. 2023. V. 214, № 9. P. 1321–1336).

О ГОМЕОМОРФИЗМАХ С ПСЕВДОАНОСОВСКИМИ АТТРАКТОРАМИ И РЕПЕЛЛЕРАМИ⁹³

Чилина Е. Е. (Россия, Нижний Новгород)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

k.chilina@yandex.ru

Напомним, что инвариантное множество B гомеоморфизма f называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества B такая, что $f(U) \subset \operatorname{int} U$, $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = B$.

Аттрактор для гомеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* гомеоморфизма f .

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $P: S_g \rightarrow S_g$ замкнутой ориентируемой поверхности рода $g > 1$ называется *псевдоаносовским отображением с растяжением* $\lambda > 1$, если на поверхности S_g существует пара P -инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}_P^s, \mathcal{F}_P^u$ с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ_s, μ_u такая, что:

⁹³Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

- каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;
- $\mu_s(P(\alpha)) = \lambda\mu_s(\alpha)$ ($\mu_u(P(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu_u(\alpha)$) для любой дуги α , трансверсальной \mathcal{F}_P^s (\mathcal{F}_P^u).

Подпространство X топологического пространства Y называется *цилиндрическим вложением* в Y топологического пространства \bar{X} , если существует гомеоморфизм на образ $h: \bar{X} \times [-1, 1] \rightarrow Y$ такой, что $X = h(\bar{X} \times \{0\})$.

Настоящий доклад посвящен исследованию классу гомеоморфизмов \mathcal{G} , каждое отображение f которого является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом замкнутого ориентируемого топологического 3-многообразия M^3 , неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из конечного числа компонент связности B_0, \dots, B_{m-1} , удовлетворяющих для любого $i \in \{0, \dots, m-1\}$ следующим условиям:

1. B_i является цилиндрическим вложением замкнутой ориентируемой поверхности рода большего единицы;
2. существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(B_i) = B_i$, $f^{\bar{k}_i}(B_i) \neq B_i$ для любого натурального $\bar{k}_i < k_i$ и ограничение отображения $f^{k_i}|_{B_i}$ топологически сопряжено сохраняющему ориентацию псевдоаносовскому гомеоморфизму;
3. B_i является либо аттрактором, либо репеллером гомеоморфизма f^{k_i} .

В докладе будет описано построение класса Φ косых произведений псевдоаносовских отображений поверхности и структурно-устойчивых диффеоморфизмов окружности, принадлежащих классу \mathcal{G} .

Гомеоморфизмы $f_1: X \rightarrow X$ и $f_2: Y \rightarrow Y$ топологических многообразий X и Y называются *объемлюще Ω -сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow Y$ такой, что $h(NW(f_1)) = NW(f_2)$ и $hf_1|_{NW(f_1)} = f_2h|_{NW(f_1)}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Любой гомеоморфизм из класса \mathcal{G} является объемлюще Ω -сопряженным некоторому гомеоморфизму из класса Φ .*

Литература

- [1] Grines V. Z., Pochinka O. V., Chilina E. E. Dynamics of 3-Homeomorphisms with Two-Dimensional Attractors and Repellers // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – С. 1-10.
- [2] Grines V. Z., Pochinka O. V., Chilina E. E., On Homeomorphisms of Three-Dimensional Manifolds with Pseudo-Anosov Attractors and Repellers // Regular and Chaotic Dynamics, 2024, Volume 29, Number 1, pp. 156-173

РЕОЛОГИЯ СЛОЖНЫХ СРЕД В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ: ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Чупахин А. П. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
chupakhin@hydro.nsc.ru

Паршин Д. В. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
parshin@hydro.nsc.ru

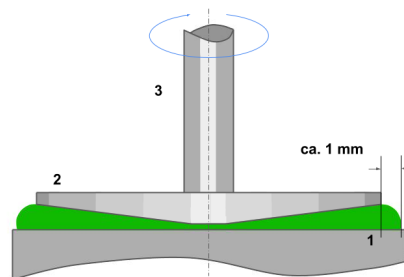
Коптюг А. В. (Швеция, Остерсунд)

Mid Sweden University, SportsTech Research Center
andrey.koptyug@miun.se

Бесов А. С. (Россия, Новосибирск)

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
besov@catalysis.ru

Различные задачи медицины и спорта высоких достижений приводят к необходимости исследования прочностных свойств и реакции на внешнюю нагрузку сложных материалов в зависимости от различных видов нагрузок и внешних условий. Биоматериалы, эмболизирующие флюиды и снег имеют сложную структуру, характеризующуюся несколькими масштабами характерных размеров, которые определяют их физические свойства. Для стенок кровеносных сосудов – это разномасштабная структура белковых волокон. Для снега – это кристаллическая структура, зависящая от многих факторов: истории нагружения, истории внешних условий среды, так и от текущих температуры, влажности, атмосферного давления и воздействующей на него нагрузки. Для клеящих полимеров, которые используются в медицине – это температура и модуль сдвига, который для сосудов по сути представляет отношение скорости потока крови и сечения сосуда. На эту крупномасштабную картину поведения сложного материала накладываются мелкомасштабную по сути, но не по значению явления: течение крови в сосуде, скольжение лыжи по снежной поверхности, распределение эмболизирующего флюида с сети сосудов артериовенозной мальформации или опухоли. Адекватное описание процесса в целом должно включать в себя взаимодействие макро и микромасштабных явлений. В настоящее время эта тематика интенсивно развивается как с точки зрения математического и компьютерного моделирования [1, 2], так и экспериментальных исследований [3]. Отметим, что во всех подобных задачах реологические свойства материалов не могут рассматриваться в какой-то единой точке применительно к задачам, в которых такие материалы используются: эмболизат, ткань сосуда или снег. В природном или жизненном процессе материал «накапливает» определенных характеристики, которые оказывают, порой существенное, влияние на его свойства в текущий момент времени.



Работа выполнена совместно с коллективом хирургов НМИЦ им. ак. Е.Н. Мешалкина, а также научной группой Mid Sweden University, SportsTech Research Center, Östersund, Sweden.

Литература

- [1] Pukaluk A., Wolinski H., Viertler C., Regitnig P., Holzzapfel G.A., Sommer G. Changes in the microstructure of the human aortic adventitia under biaxial loading investigated by multi-photon microscopy // *Acta Biomaterialia*, 2023. p. 39.
- [2] Dobroserdova T., Liang F., Panasenko G., Vassilevski Yu. Multiscale models of blood flow in the compliant aortic bifurcation // *Applied Mathematics Letters*, 93, 2019. 98-104.
- [3] Kuianova I., Chupakhin A., Besov A., Gorbatykh A., Kislitsin D., Orlov K., Parshin D. Rheological Properties of Non-Adhesive Embolizing Compounds-The Key to Fine-Tuning Embolization Process-Modeling in Endovascular Surgery, *Polymers*, 2023, 15(4), 1060.

ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Шамолин М. В. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
shamolin@rambler.ru

Как известно [1–3], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных

уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и сами инвариантные формы должны, вообще говоря, включать функции с существенно особыми точками (см. также [4–6]).

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем скалярные инварианты — это первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы дифференциальных уравнений порядка m помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m - 1$ независимый тензорный инвариант.

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее $(n + 1)$ -мерное пространство”, приводит к системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n -мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Литература

- [1] Poincaré H. Calcul des probabilités. Gauthier–Villars, Paris. 1912. 340 p.
- [2] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
- [3] Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1 (445). С. 117–148.
- [4] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
- [5] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
- [6] Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
- [7] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СКАЧКООБРАЗНО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шафаревич А. И. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

shafarev@yahoo.com

Хорошо известно, что коротковолновые асимптотические решения линейных строго гиперболических по Петровскому систем, коэффициенты которых не зависят от малого параметра (или зависят от него регулярно), описываются в терминах канонического оператора Маслова на наборе лагранжевых поверхностей. Эти поверхности инвариантны относительно гамильтоновых полей, гамильтонианы которых удовлетворяют характеристическому уравнению для старшего символа гиперболической системы.

Если коэффициенты разрывны, или зависят от малого параметра сингулярно (т.е. их слабые пределы не гладкие), решение имеет более сложный вид вблизи носителя сингулярности; в общем случае соответствующая теория не разработана. В докладе описывается асимптотика решения задачи Коши в случае, когда коэффициенты меняются скачкообразно, т.е. они или их слабые пределы терпят разрыв на некоторой гиперповерхности в пространстве независимых переменных. В этой ситуации лагранжевы поверхности перестраиваются в точках, соответствующих указанной поверхности, причем перестройка управляется геометрией проективной гиперповерхности в двойственном пространстве, определяемой старшим символом системы. Доказано, что решение разлагается в асимптотический ряд, слагаемые которого выражаются через канонический оператор Маслова на перестраивающихся лагранжевых поверхностях; функции, к которым применяются эти операторы, удовлетворяют вспомогательной задаче рассеяния для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а коэффициенты оператора монодромии такой задачи определяют коэффициенты отражения и прохождения волн через поверхность скачка коэффициентов.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЯ АБЕЛЯ–ПРИМА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ СИСТЕМАМ

Шейнман О. К. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

sheinman@mi-ras.ru

Отображение Абеля является классическим инструментом теории интегрируемых систем. Для систем, инвариантные торы которых можно представить как якобианы алгебраических кривых (например, для системы Ковалевской), оно даёт квадратурную формулу для траекторий в виде $\mathcal{A}(\gamma) = It + \phi_0$, где I – набор функций от переменных действия, ϕ_0 – начальные переменные угла, γ – набор исходных фазовых координат. Тем самым траектории "линеаризуются" на якобианах, то есть являются их прямолинейными обмотками. Для получения уравнения траектории в исходных координатах (т.е. в виде $\gamma = \gamma(t)$), достаточно применить обратное отображение Якоби, для которого имеются формулы в θ -функциях. Современное развитие предъявило интегрируемые системы, инвариантные торы которых являются абелевыми многообразиями другого класса – многообразиями Прима, или примианами. Такими являются системы Хитчина с простыми структурными группами. Примианы возникают и при рассмотрении классических систем (см. [3] для системы Ковалевской, [1] для системы Клебша). Однако описанная выше схема интегрирования, основанная на применении обращения Якоби, в случае инвариантных торов-примианов неприменима. Препятствие заключается в том, что прообраз точки примиана при отображении Абеля–Прима состоит из вдвое большего числа элементов, чем это необходимо для обращения. Предметом настоящего доклада является случай, когда аналог обращения Якоби всё-таки можно определить.

Теорема 1. Пусть Σ – кривая с парой коммутирующих голоморфных инволюций τ_1, τ_2 , причём дифференциалы Прима относительно τ_1 инвариантны относительно τ_2 , $\Sigma_i = \Sigma/\tau_i$, $\text{Prum}_i(\Sigma)$ – её примиян относительно инволюции τ_i , $h_i = \dim \text{Prum}_i(\Sigma)$. Тогда в зависимости от типов ветвления $\Sigma \rightarrow \Sigma_i$ ($i = 1, 2$) имеет место один из следующих случаев:

$$\text{Prum}_1(\Sigma) \simeq \text{Sym}^{h_1} \Sigma_2 \quad \text{или} \quad \text{Prum}_1(\Sigma) \simeq (\text{Sym}^{h_1} \Sigma_2)/\mathbb{Z}_2,$$

где знак \simeq обозначает бирациональную эквивалентность.

При наличии на кривой двух инволюций с указанными свойствами, для неё и её примияна имеет место следующая версия обращения Якоби.

Теорема 2. 1°. Для $\phi \in \text{Prum}_1(\Sigma)$ число элементов в $\mathcal{A}^{-1}(\phi)$ равно $2h_1$. Они разбиваются на h_1 пар, внутри которых точки связаны инволюцией τ_2 .

2°. Пусть $P_1, \dots, P_{h_1} \in \mathcal{A}^{-1}(\phi)$ – представители этих пар, Σ представлена как (разветвлённое) накрытие римановой сферы: $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\pi(P_i) = x_i$, $i = 1, \dots, h_1$, $\sigma_k(\phi) = x_1^k + \dots + x_{h_1}^k$. Тогда для функций σ_k имеет место следующее представление:

$$\sigma_k(\phi) = c - \sum_{Q \in \pi^{-1}(\infty)} \sum_{i=1}^{h_1} D_i \ln \theta(\mathcal{A}(Q) - \phi - \Delta),$$

где D_i – дифференциальный оператор по ϕ (вид которого будет уточнён в докладе), $c \in \mathbb{C}$, $\Delta \in \mathbb{C}^{h_1}$ – константы.

При $k = 1, \dots, h_1$ соотношения $\sigma_k(\phi) = x_1^k + \dots + x_{h_1}^k$ позволяют выразить координаты x_1, \dots, x_{h_1} точек прообраза через ϕ , с точностью до порядка, и, подставляя $\phi = It + \phi_0$, получить траекторию системы в тэта-функциях. В [4] так впервые решена система Хитчина со структурной группой $SO(4)$ на кривой рода 2. Теорема 1 приводит к качественным выводам об инвариантных торах интегрируемых систем. Например, позволяет уточнить результат, полученный в [2], что инвариантные торы системы Хитчина со структурной группой SL_2 – это якобианы кривых рода 3 (на самом деле – факторы таких якобианов по \mathbb{Z}_2), или вывести известный факт, что траектории системы Ковалевской линейризуются на якобианах кривых рода 2.

Литература

- [1] Fedorov Y., Magri F., Skrypnuk T. A new approach to separation of variables for the Clebsch integrable system // Part 1: arXiv:2102.03445, Part 2: arXiv:2102.03599.
- [2] Gawedzki K., Tran-Ngoc-Bich P. Hitchin systems at low genera // J.Math.Phys. 41 (2000) 4695-4712; arXiv:hep-th/9803101.
- [3] Рейман А. Г., Семёнов-тян-Шанский М. А. Интегрируемые системы. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [4] Шейнман О. К. Разделение переменных для системы Хитчина со структурной группой $SO(4)$, на кривой рода 2 // Труды МИАН, том 325, №2, 2024.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА И ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ СПЛАЙНОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА⁹⁴

Шейпак И. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

iasheip@yandex.ru

Рассматривается пространство Соболева $\dot{W}_p^n[0; 1]$, состоящее из вещественных функций y , обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка $n - 1$, таких, что $y^{(n)} \in L_p[0; 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$ и выполняются краевые условия $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$)).

⁹⁴Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

Для произвольной точки $a \in (0; 1)$ изучаются величины $A_{n,k,p}(a)$, которые являются наименьшими возможными в неравенствах

$$|y^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \|y^{(n)}\|_{L_p[0;1]}, \quad y \in \mathring{W}_p^n[0;1], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Также целью является получение точных констант вложения пространства $\mathring{W}_p^n[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0;1]$

$$\Lambda_{n,k,\infty} := \max_{a \in [0;1]} A_{n,k,p}(a).$$

Определим \mathcal{P}_m — пространство вещественных многочленов

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j x^j, \quad x, c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq m \right\}$$

степени не выше m . Также рассмотрим сплайны вида

$$S_{n,k,a}(x) := \begin{cases} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, & x \in [0; a] \\ 0, & x \in (a; 1] \end{cases}$$

Теорема 1. Для величин $A_{n,k,p}(a)$ справедливо равенство

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k,a} - u\|_{L'_p[0;1]}.$$

Заметим, что случай $p = 2$ изучен в [1] при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Далее нас интересует случай $p = \infty$. На основании результатов о наилучшем приближении многочленами характеристической функции в $L_1[0;1]$ (см. [2]) доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $k = n-1$ четно, то точка $a = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,n-1,\infty}$. Если $k = n-1$ нечетно, то точка $a = 1/2$ является точкой локального минимума функции $A_{n,n-1,\infty}$.

При четном n точками глобального максимума функции $A_{n,n-1,\infty}$ являются точки $\sin^2 \frac{\pi n}{4(n+1)}$ и $\sin^2 \frac{\pi(n+2)}{4(n+1)}$ (ближайшие к $1/2$ точки из множества $\left\{ a_j = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)} \right\}_{j=1}^n$). Таким образом,

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ нечетно,}$$

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} \sin \frac{\pi n}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ четно.}$$

Свойства функций $A_{n,0,\infty}$ ($k = 0$) можно описать в терминах ядра Пеано (см. [3]), которое определяется следующим образом

$$V_n(t) := \frac{2\sqrt{2}(n+1)}{\pi n!} \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1/2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n}{1 - (t+ix\sqrt{1-t^2})^{2(n+1)}} dx.$$

На основании свойств ядра Пеано и сплайна $S_{n,0,a}$ устанавливается следующий результат.

Теорема 3. Справедлива формула

$$A_{n,0,\infty}(a) = \frac{V_n(2a-1)}{2^n}, \quad a \in [0;1].$$

Теорема 4. Точные константы вложения $\Lambda_{n,0,\infty}$ определяются следующим образом

$$\Lambda_{n,0,\infty} = A_{n,0,\infty}(1/2) = \frac{V_n(0)}{2^n} = \frac{n+1}{\pi n! 2^{2(n-1)}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1 + (-1)^n x^{2(n+1)}} dx.$$

Используя представление для $\Lambda_{n,0,\infty}$ при $n \rightarrow \infty$, можно получить их асимптотическое поведение.

Следствие 1. *Для констант вложения $\Lambda_{n,0,\infty}$ справедлива асимптотика*

$$\Lambda_{n,0,\infty} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi n!} 2^{2n-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Литература

- [1] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. — 2021. — Т. 55, вып. 1. — С. 43–55.
- [2] Дейкалова М. В. Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки алгебраическими многочленами // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 144–155.
- [3] Fiedler H., Jukart W. B. L_1 -Approximation by Polinomials // Journal of Approximation Theory. — 1983. — V. 37. — P. 260–292.

НОВОЕ В СТАРОЙ ЗАДАЧЕ О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Шкаликов А. А. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
ashkaliko@yandex.ru

Линеаризованные уравнения движения механических систем часто записывают в форме

$$R\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0, \quad x = x(t),$$

где R, B, C симметрические операторы в подходящем гильбертовом пространстве H .

Задача об устойчивости решений этого уравнения тесно связана с задачей о собственных значениях квадратичного пучка операторов

$$L(\lambda) = R\lambda^2 + \lambda B + C.$$

Одна из задач, рассматриваемых в докладе — задача о гирокопической стабилизации, представляющая интерес даже в случае конечномерного пространства H . Пусть $B = \omega B_0$, где B_0 — фиксированная матрица, а $\omega \rightarrow \infty$. Найти динамику движения собственных значений пучка $L(\lambda)$ при $\omega \rightarrow \infty$. Оказывается, эта динамика может быть полностью описана в терминах собственных значений линейных пучков $R\lambda + B$, $B\lambda + C$ и $R\lambda + C$.

В докладе будут использованы результаты совместной работы с А.Аракчеевым.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМЕХОЙ В ТЕРМИНАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ УБЕГАНИЯ⁹⁵

Щелчков К. А. (Россия, Ижевск)

Удмуртский государственный университет
incognitobox@mail.ru

Рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E . Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, u — управление преследователя P , v — управление убегающего E ; $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, $v_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \dots, m$. Множество $U \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция

⁹⁵Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

$f : \mathbb{R}^k \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ — для каждого $v \in V$ непрерывна по совокупности переменных x , u и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной, не зависящей от u .

Под разбиением σ промежутка $[t_0, \infty)$ будем понимать неограниченную сверху последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^\infty$ такую, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \dots$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией W убегающего E на промежутке $[0, T]$ ($[0, \infty)$) называется пара (σ, W_σ) , где σ — разбиение промежутка $[0, T]$ ($[0, \infty)$), а W_σ — семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \dots, \eta - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\bar{v}_r(t) \equiv \bar{v}_r \in V, t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.*

Под управлением преследователя будем понимать произвольную измеримую функцию $u : [0, \infty) \rightarrow V$. Для построения управления преследователю P в начальный момент времени известно начальное положение x_0 и выбранная стратегия W убегающего E . Кроме того, игрокам известны динамика системы, то есть функция f , и множества U, V .

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит убежание на промежутке $[0, T]$ ($[0, \infty)$)*, если существуют $\varepsilon > 0$ и кусочно-постоянная стратегия W убегающего E на промежутке $[0, T]$ ($[0, \infty)$) такие, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ преследователя P выполнено неравенство $\|x(\tau)\| \geq \varepsilon$ для любого $\tau \in [0, T]$ ($[0, \infty)$).

Целью убегающего является осуществление убежания на промежутке $[0, T]$ ($[0, \infty)$). Цель преследователя — воспрепятствовать этому.

Определение 3. ([1]) Совокупность векторов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом* если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Обозначим $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов a, b ;

Теорема 1. Пусть

$$\min_{j=1, \dots, n} \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle f(0, u, v), p_j \rangle = \beta > 0,$$

для некоторого набора векторов $A = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^k$, которые образуют положительный базис и $\|p_j\| = 1, j = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^k, x_0 \neq 0$, в игре $\Gamma(x_0)$ происходит убежание на промежутке $[0, \infty)$. Кроме того, убегающему для построения стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.

Литература

- [1] Петров Н. Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ С ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ В ТРУБАХ

Эглит М. Э. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

m.eglit@mail.ru

Дроздова Ю. А. (Россия, Москва)

Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина

drozдова.y@gubkin.ru

Рассматриваются среды, которые ведут себя как твердые тела, то есть, под действием сил не движутся или движутся без деформирования, пока интенсивность касательных напряжений в них меньше некоторой величины, называемой пределом текучести, но текут как жидкости, когда интенсивность касательных напряжений превосходит предел текучести. Так ведут себя, например, многие биологические жидкости, в частности, кровь; расплавы и растворы полимеров; гели, кремы, пасты; масляные краски; гелеобразные авиационные топлива; тяжелые нефти; буровые растворы; бумажная пульпа; принтерные чернила; расплавленные

металлы вблизи температуры кристаллизации, кетчуп, зубные пасты, сточные грязи, а также вулканическая лава и движущийся в снежной лавине снег.

При математическом моделировании течений таких жидкостей вводится понятие эффективной вязкости, как величины, характеризующей отношение величины сдвиговых напряжений к величине скоростей деформаций. Эффективная вязкость неньютоновских жидкостей зависит от величины скоростей деформаций. Поэтому, изменяя скорости проведения процесса, можно существенно влиять на параметры потока.

В докладе на примере течений неньютоновских жидкостей с пределом текучести в трубах, в частности, жидкостей, описываемых реологической моделью Хешеля-Балкли, демонстрируется влияние наложения пульсаций перепада давления на первоначально стационарный поток. Формулируются условия, при которых такое создание нестационарности приводит к увеличению или уменьшению среднего по периоду расхода. Особое внимание уделено исследованию влияния предела текучести.

Литература

- [1] Эглит М. Э., Дроздова Ю. А., Усачев И. Н., Дроздов А. В. Течения жидкостей с пределом текучести в трубах при пульсирующем перепаде давления // Труды математического Института имени Стеклова, 2023, т. 322 с. 282-295.
- [2] Nakamura M., Sawada T. Numerical study on the laminar pulsatile flow of slurries // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1987. V. 22, N 2. P. 191-206.
- [3] Barnes H. A., Townsend P., Walters K. On pulsatile flow of non-Newtonian liquids // Rheol. acta. 1971. V. 10, N 4. P. 517-527.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ КОМПОЗИТОВ И ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ И ОЦЕНКИ ИХ ПОГРЕШНОСТИ

Эглит М. Э. (Россия, Москва)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

m.eglit@mail.ru

Якубенко Т. А. (Россия, Москва)

НИИ механики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

yakubta@mail.ru

Рассматриваются микронеоднородные упругие материалы с периодической структурой и задачи, в которых отношение ϵ типичного линейного масштаба неоднородности к глобальному масштабу мало. Тогда материал можно смоделировать неким эффективным однородным материалом. Уравнения, описывающие поведение этого однородного материала, могут быть получены с использованием известного метода двухмасштабных асимптотических разложений. При этом для расчета эффективных упругих модулей необходимо найти решения так называемых задач на ячейке. Как правило, это можно сделать только численно. Однако, если задача на ячейке содержит дополнительный малый параметр q , то можно построить явное приближенное решение и вывести явные приближенные формулы для эффективных модулей. В докладе представлены примеры таких формул для пористых материалов, в которых размер пор в одном направлении много больше, чем размеры в других направлениях, а также для композитов, в которых дополнительный малый параметр связан с отношением упругих модулей и объемных долей включений и матрицы. Проведено сравнение величин эффективных упругих модулей, полученных по явным приближенным формулам, с их значениями, полученными с помощью численного решения задач на ячейке.

О ГИПЕРБОЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ⁹⁶

Язовцева О. С. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

kurinaos@gmail.com

Губайдуллин И. М. (Россия, Уфа)

Уфимский государственный нефтяной технический университет

irekmars@mail.ru

Сухарев Л. А. (Россия, Саранск)

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

suharev_la@mail.ru

В настоящее время возрастает актуальность применения математических средств для исследования процессов химической технологии. Математические модели в этой области имеют вид нелинейных систем уравнений в частных производных и описывают материальный и тепловой балансы процесса [1]. Очевидно, что ввиду необходимости учета множества физико-химических явлений получаемые модели сложны и требуют особых методов исследования. Наиболее распространенный подход к решению задач подобной сложности – разработка вычислительных алгоритмов. Однако, большая разница в характерных временах процессов различной природы приводит к неприемлемо малому шагу интегрирования по времени [2], а существенная нелинейность сводит к нулю эффективность неявных схем [3].

Одним из способов снижения сложности задачи является гиперболизация параболических уравнений [4]. Она заключается в добавлении члена, содержащего вторую производную по времени, домноженного на малый параметр в параболические уравнения. Это значительно ослабляет условие устойчивости разностной схемы при сравнительно небольшом отклонении возмущенного решения от исходного [5]. Применение такого подхода к уравнению теплопроводности представлено в [6].

Настоящий доклад посвящен гиперболизации системы нелинейных уравнений в частных производных, отвечающих математической модели окислительной регенерации сферического зерна катализатора. Разностная схема для гиперболизированных параболических уравнений в модели носит явный характер. В вычислительных экспериментах наблюдается существенное увеличение шага интегрирования по времени, что позволяет снизить общее расчетное время задачи. Оценка сходимости алгоритма показывает хорошую сходимость даже для небольшого количества расчетных ячеек. Сравнение с результатами расчета при использовании параболических уравнений показывает хорошее совпадение решений, превышающее теоретическую точность метода.

Литература

- [1] Боресков Г. К., Слинько М. Г. Моделирование химических реакторов // Теоретические основы химической технологии. 1967. Т. 1. № 1. С. 5–16.
- [2] Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Yazovtseva O. S., Zagoruiko A. N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. Vol. 15. No. 3. P. 485–495. DOI: 10.1134/S2070048223030079.
- [3] Масагутов Р. М., Морозов Б. Ф., Кутепов Б. И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Химия, 1987. 144 с.
- [4] Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Трехслойная схема для решения уравнения диффузии излучения // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. № 1. С. 89–95. DOI 10.31857/S2686954323600295.
- [5] Мышецкая Е. Е., Тишкин В. Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1299.

⁹⁶Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012, <https://rscf.ru/en/project/23-71-33002/>.

- [6] Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Явная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 12. С. 3–19. DOI: 10.20948/mm-2022-12-01.

СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕДЛЕННО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ
В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Якубив Ю. А. (Россия, Ярославль)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

yuliyayakubiv1004t@gmail.com

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \alpha \cdot \text{sign}(\dot{x}(t - T)) + \gamma(y - x), \\ \dot{y} + y = \alpha \cdot \text{sign}(\dot{y}(t - T)) + \gamma(x - y), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha < 0$, $T > 0$, $\gamma \geq 0$, с начальным условием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) > 0, & t \in [-T, 0], & x(0) = h_1, \\ \dot{y}(t) > 0, & t \in [-T, 0], & y(0) = h_2. \end{cases} \quad (2)$$

При $\gamma = 0$ система (1) представляет собой два независимых дифференциальных уравнения одного и того же вида, решения которых были изучены в работе [1].

Теорема 1. При $h_1 = h_2 = h^* = \alpha \frac{1 - e^T}{1 + e^T} \in (-|\alpha|, |\alpha|)$ решение системы (1) с начальным условием (2) является синхронизированным (т.е. $x(t) = y(t)$) и периодическим, а при выполнении условий

$$\begin{cases} h_1, h_2 \in (-|\alpha|, |\alpha|), \\ h_1 < h_2, \\ \min(h_1, h_2) > \frac{\alpha + \gamma \max(h_1, h_2)}{1 + \gamma}, \\ \max(h_1, h_2) < \frac{\min(h_1, h_2)(1 + 2\gamma - e^{2\gamma T}) - 2\alpha e^{2\gamma T}}{1 + 2\gamma + e^{2\gamma T}}. \end{cases}$$

соответствующие решения стремятся к этому синхронизированному и периодическому решению.

Рассмотрим теперь начальные условия

$$\begin{cases} \dot{x} > 0 \text{ при } t \in [-T, -\theta T], \\ \dot{x} < 0 \text{ при } t \in [-\theta T, 0], \\ \dot{y} > 0 \text{ при } t \in [-T, 0], \\ x(0) = h_1, y(0) = h_2, \end{cases} \quad (3)$$

где $\theta \in [0, 1]$ — параметр величины рассинхронизации. Случай $\theta = 0$ соответствует случаю синхронизации ($x(t) = y(t)$), случай $\theta = 1$ соответствует случаю антисинхронизации ($x(t) = -y(t)$).

Теорема 2. Существуют единственные h_1^*, h_2^* т.ч. если $h_1 = h_1^*$, $h_2 = h_2^*$ и

$$e^{-T} \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - \alpha \right) - e^{-T(1+2\gamma)} (1 + 2\gamma) \frac{h_1 - h_2}{2} - \alpha e^{-T(1+2\gamma)\theta} + \alpha e^{-T\theta} > 0, \quad (4)$$

то решение уравнения (1) с начальным условием (3) является периодическим. При этом это периодическое решение является устойчивым, а для начального условия (3) при h_1

и h_2 достаточно близких к h_1^* и h_2^* все решения экспоненциально стремятся к этому периодическому решению.

Из анализа неравенства (4) следует, что для небольших T и γ сосуществуют рассинхронизированные периодические решения для любых величин рассинхронизации θ ; при увеличении T и γ часть режимов становится невозможной, и остаются только режимы близкие к синхронизированному или антисинхронизированному.

Литература

- [1] Якубив Ю. А. Исследование дифференциального уравнения с запаздыванием нейтрального типа со знаковой функцией в правой части // Современные проблемы математики и информатики : сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : Филигрань, 2023. — Вып. 23. — С. 93 – 99.

О ЗАДАЧЕ ДЭВИСА-МОНРО

Яськов П. А. (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

yaskov@mi-ras.ru

В 1984 г. Дэвис и Монро [1] поставили задачу о значениях параметра $\varepsilon > 0$, для которых распределение μ_ε винеровского процесса $B_\varepsilon = B + \varepsilon F$ с нелинейным сносом εF (как случайного элемента в $C[0, 1]$) абсолютно непрерывно относительно винеровской меры μ на $C[0, 1]$, где $B = (B(t))_{t \in [0, 1]}$ – стандартный винеровский процесс, $F(t, \tau) = \sqrt{(t - \tau)^+}$ при $t \in [0, 1]$, а τ – независимый от B случайный момент возникновения сноса, равномерно распределенный на $[0, 1]$. Данная задача тесно связана с теорией гауссова мультипликативного хаоса.

Хорошо известно, что в случае линейного сноса $F(t) = (t - \tau)^+$ всегда имеет место абсолютная непрерывность. Рассмотренный в [1] случай степенного является критическим: если показатель степени сноса $\alpha > 0$, то для всех $\varepsilon > 0$ указанные меры μ_ε будут эквивалентны μ ($\mu_\varepsilon \sim \mu$) при $\alpha > 1/2$ и сингулярны μ ($\mu_\varepsilon \perp \mu$) при $\alpha < 1/2$. При $\alpha = 1/2$, как показано в [1], $\mu_\varepsilon \ll \mu$, т.е. мера μ_ε абсолютно непрерывна относительно μ , при $\varepsilon < 2$ и $\mu_\varepsilon \perp \mu$ при $\varepsilon > \sqrt{8}$. В докладе исследуется интервал значений $\varepsilon \in [2, \sqrt{8}]$, где происходит фазовый переход. С помощью идей одномерной теории гауссова мультипликативного хаоса будет доказана следующая теорема, дающая исчерпывающее решение задачи Дэвиса-Монро:

Теорема 1. $\mu_\varepsilon \sim \mu$ при $0 < \varepsilon < \sqrt{8}$ и $\mu_\varepsilon \perp \mu$ при $\varepsilon \geq \sqrt{8}$.

Литература

- [1] Davis B., Monroe I. Randomly started signals with white noise // Ann. Probab. 1984. Vol. 12. Is. 3. P. 922–925.

Научное электронное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ»

Сборник тезисов докладов международной конференции
и международной школы молодых учёных

Суздаль
28 июня – 3 июля 2024 г.

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader;
дисковод CD-ROM.

Тираж 8 экз.

Владимирский государственный университет
Имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и электроники
diff@vlsu.ru