

Деформация плоскости из материала Джона с жестким эллиптическим включением, нагруженным силой и моментом

Ю. В. Малькова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Малькова Ю. В. Деформация плоскости из материала Джона с жестким эллиптическим включением, нагруженным силой и моментом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 337–347. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.303>

Получено точное аналитическое решение нелинейной задачи теории упругости для плоскости с жестким эллиптическим включением. В центре включения приложены сосредоточенная сила и (или) крутящий момент. Упругие свойства плоскости моделируются гармоническим материалом Джона. Номинальные (условные) напряжения и перемещения выражены через две аналитические функции комплексной переменной, которые определяются из граничных условий на контуре эллипса. Выполнены расчеты номинальных напряжений на контуре соединения плоскости со включением.

Ключевые слова: нелинейная плоская задача, жесткое эллиптическое включение, гармонический материал Джона, сосредоточенная сила и момент.

1. Введение. Модель материала Ф. Джона [1] позволяет исследовать большие деформации реальных материалов, в частности эластомеров. В случае малых деформаций модель приводит к закону Гука. Значительное развитие и применение модель получила в работах [2–9] и др. В [4] показано, что теоретические решения некоторых задач, например растяжение резиновых листов с круговыми или эллиптическими отверстиями, экспериментально подтверждены. В этой же статье дана комплексная формулировка уравнений нелинейных плоских задач, где изучались плоская деформация и плоское напряженное состояние для пластины с эллиптическим отверстием. Дальнейшее развитие комплексного метода содержится в работе [5] в случае неоднородной пластины с межфазной трещиной. Однако решение доведено до конца только для однородной пластины с трещиной. Комплексные уравнения нелинейных плоских задач для материала Джона, отличающиеся от ранее известных, приведены в [7], где также предложен метод решения уравнений, основанный на введении функций скачков напряжений и перемещений на межфазной границе двух материалов. С помощью этого метода получены точные решения задач для трещины и сосредоточенной силы на межфазной границе. Исследования проблемы межфазной трещины были продолжены для случая равномерного давления на берегах трещины [8]. Впервые показано, что существуют критические давления, превышение которых ведет к потере устойчивости материала и большим напряжениям и перемещениям в окрестности трещины. В ряде работ, например [9], рассматривалась нелинейная задача эллиптического включения в плоскость. Установлено, что тензор номинальных напряжений постоянен в области включения при заданных постоянных напряжениях на бесконечности.

2. Уравнения плоской деформации для гармонического материала Джона. Для решения нелинейной задачи упругости используем уравнения равнове-

сия и уравнения совместности деформаций отсчетной конфигурации (объемные силы отсутствуют) [2]:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{G}^T = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ — тензор номинальных (условных) напряжений; $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ — градиент деформации; \mathbf{e}_i — ортонормированный векторный базис декартовых координат.

Перейдем в (1) к компонентам тензоров и запишем для плоской деформации в комплексной форме

$$(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \quad (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0, \quad (2)$$

в которой штрих означает частные производные по декартовым координатам (x_1, x_2) .

Уравнения (2) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Комплексные координаты $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ задают точку тела в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно. Функция $\sigma = f_1 + if_2$ является главным вектором усилий $\mathbf{s}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ на дуге кривой AB в плоскости z [2, 3]:

$$\sigma = i \int_{AB} (s_{n1} + is_{n2}) ds + \text{const.}$$

Комплексные функции $\zeta(z, \bar{z})$ и $\sigma(z, \bar{z})$ находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

Из соотношений (3) следует, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega}, \quad e^{i\omega} = \frac{g_{11} + g_{22} + i(g_{21} - g_{12})}{\sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 + (g_{21} - g_{12})^2}},$$

где ω — угол поворота окрестности точки плоскости в результате деформации [2].

Используемая модель гармонического материала Ф. Джона определяется удельной энергией деформации (упругим потенциалом), имеющим вид [1]

$$\Phi = 2\mu[F(I) - J], \quad I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad J = \lambda_1 \lambda_2, \quad (4)$$

здесь λ_1, λ_2 — главные кратности удлинений, $F(I)$ — заданная функция. Далее полагаем [3], что

$$2\mu F'(I) = \frac{1}{4b} [I + \sqrt{I^2 - 16bc}]. \quad (5)$$

Постоянные b, c выражаются через постоянные Ляме λ, μ материала плоскости, они единственным образом определяются условиями перехода закона упругости (3) в закон Гука при малых деформациях:

$$4\mu b = 1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad c = \mu \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) = 2\mu(1 - 2\mu b).$$

Обзор основных работ, где применялась модель материала Ф. Джона (4), (5), приведен в [3].

Инварианты I и J выражаются через компоненты градиента деформации следующим образом:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 = \sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 + (g_{21} - g_{12})^2} = 2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|,$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}.$$

По формулам $s_{ij} = \partial \Phi / \partial g_{ji}$ получим закон упругости для номинальных напряжений и компонент градиента деформации. Подставив напряжения в (3), придем к двум уравнениям для функций ζ и σ , решение которых имеет вид [3]

$$\zeta = b \varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\varphi'(z)}, \quad \sigma = (1 - 2\mu b) \varphi(z) - 2\mu \overline{\psi(z)} - 2\mu \frac{cz}{\varphi'(z)}. \quad (6)$$

Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются граничными условиями на контуре отверстия. Запишем через эти аналитические функции напряжения и деформации:

$$s_{11} + is_{12} = (1 - 2\mu b) \varphi'(z) - 2\mu \left[\frac{c}{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)} + \frac{cz \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} \right],$$

$$s_{22} - is_{21} = (1 - 2\mu b) \varphi'(z) - 2\mu \left[\frac{c}{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} - \frac{cz \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} \right], \quad (7)$$

$$g_{11} + ig_{21} = b \varphi'(z) + \frac{c}{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} - \frac{cz \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)},$$

$$g_{22} - ig_{12} = b \varphi'(z) + \frac{c}{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)} + \frac{cz \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)}.$$

Из соотношений (7) следуют равенства

$$s_{11} + is_{12} + 2\mu (g_{22} - ig_{12}) = \varphi'(z), \quad s_{22} - is_{21} + 2\mu (g_{11} + ig_{21}) = \varphi'(z),$$

$$s_{11} + is_{12} + s_{22} - is_{21} = 2(1 - 2\mu b) \left[\varphi'(z) - 4\mu^2 \frac{1}{\varphi'(z)} \right], \quad (8)$$

$$g_{11} + ig_{21} + g_{22} - ig_{12} = 2b \varphi'(z) + \frac{2c}{\varphi'(z)}.$$

3. Бесконечная пластина с жестким эллиптическим включением. Бес-

конечная пластина со впаянным жестким эллиптическим ядром подвергается действию сосредоточенной силы и крутящего момента, приложенных в центре ядра (рис. 1). Угол между осью эллипса и направлением силы обозначим α . Будем считать, что напряжения на бесконечности равны нулю. Сила уравновешивается напряжениями окружающего материала. Внешняя сила и момент могут вызвать поступательное перемещение ядра и его поворот. Поскольку поступательное перемещение ядра может быть устранено жестким поступательным перемещением всей системы, можно

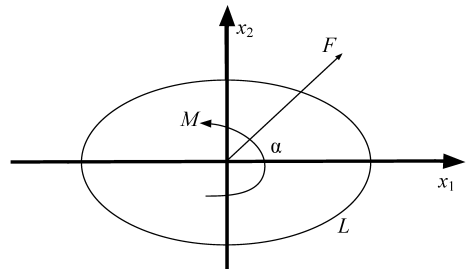


Рис. 1. Плоскость со включением, нагруженным силой и моментом

его не учитывать. Примем, что при деформации пластины ядро повернулось вокруг своего центра на неизвестный угол β .

Текущие координаты контура L эллиптического включения известны с точностью до поворота вокруг центра:

$$\zeta = b\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\varphi'(z)} = g(z), \quad z \in L, \quad (9)$$

где $g(z) = g_1 + ig_2 = ze^{-i\beta}$ — смещения точек контура эллипса. Таким образом, нужно решить вторую основную краевую задачу нелинейной теории упругости (9) для плоскости с эллиптическим отверстием, край которого соединен с жестким ядром.

Главный вектор и главный момент номинальных напряжений $\mathbf{s}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ на любом замкнутом контуре, содержащем эллиптическое включение, должны уравнивать внешнюю силу и момент:

$$F_1 + iF_2 = \oint (s_{n1} + is_{n2}) ds, \quad M = \oint (x_1 s_{n2} - x_2 s_{n1}) ds. \quad (10)$$

На функцию ζ налагается условие однозначности на указанном замкнутом контуре.

Чтобы найти решение уравнения (9), предварительно выполним конформное отображение плоскости с эллиптическим включением на плоскость с круговым включением единичного радиуса [10]:

$$z = \eta(\xi) = R(\xi + m\xi^{-1}), \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1.$$

Окружности $|\xi| = 1$ соответствует эллипс с полуосями $a = R(1 + m)$, $d = R(1 - m)$. Выбором параметров R и m можно получить эллипс любых размера и формы. Положим $\xi = re^{i\theta}$, параметры (r, θ) являются полярными координатами плоскости ξ и криволинейными координатами плоскости z : окружностям $r = \text{const}$ соответствуют софокусные эллипсы, а лучам $\theta = \text{const}$ — софокусные гиперболы.

В формулах (6), (7) перейдем к комплексной переменной ξ :

$$\zeta = b\varphi(\xi) + \overline{\psi(\xi)} + c \frac{\eta(\xi)\overline{\eta'(\xi)}}{\varphi'(\xi)}, \quad (11)$$

$$\sigma = (1 - 2\mu b)\varphi(\xi) - 2\mu\overline{\psi(\xi)} - 2\mu c \frac{\eta(\xi)\overline{\eta'(\xi)}}{\varphi'(\xi)}.$$

$$\begin{aligned} s_{rr} + is_{r\theta} &= \frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}} e^{-2i\gamma} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \\ s_{\theta\theta} - is_{\theta r} &= \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}} e^{-2i\gamma} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \\ g_{rr} + ig_{\theta r} &= \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}} e^{-2i\gamma} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \\ g_{\theta\theta} - ig_{r\theta} &= \frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}} e^{-2i\gamma} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} - \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

В (11) и (12) γ — угол между осью x_1 и нормалью к эллипсу в плоскости z :

$$e^{-2i\gamma} = \frac{\overline{\xi\eta'(\xi)}}{\xi\eta'(\xi)} = \frac{\overline{\eta'(\xi)}}{\eta'(\xi)} e^{-2i\theta}.$$

Формулы (8) в криволинейных координатах имеют вид

$$s_{rr} + is_{r\theta} + 2\mu(g_{\theta\theta} - ig_{r\theta}) = \varphi'(z) = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)}, \quad s_{\theta\theta} - is_{\theta r} + 2\mu(g_{rr} + ig_{\theta r}) = \varphi'(z) = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)},$$

$$s_{rr} + is_{r\theta} + s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = 2(1 - 2\mu b) \left[\varphi'(z) - 4\mu^2 \frac{1}{\varphi'(z)} \right] = 2(1 - 2\mu b) \left[\frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)} - 4\mu^2 \frac{\overline{\eta'(\xi)}}{\varphi'(\xi)} \right],$$

$$g_{rr} + ig_{\theta r} + g_{\theta\theta} - ig_{r\theta} = 2b\varphi'(z) + 2c \frac{1}{\varphi'(z)} = 2b \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)} + 2c \frac{\overline{\eta'(\xi)}}{\varphi'(\xi)}.$$

Граничное условие (9) преобразуем к переменной $\xi = t = e^{i\theta}$:

$$b\varphi(t) + \overline{\psi(t)} + c \frac{\eta(t)\overline{\eta'(t)}}{\varphi'(t)} = g(t) = R \left(t + \frac{m}{t} \right) e^{-i\beta}. \quad (13)$$

Уравнение (13) позволяет найти обе функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$, аналогично линейной задаче [10]. Выделим в этих функциях неголоморфные и голоморфные слагаемые в бесконечной области $|\xi| > 1$:

$$\varphi(\xi) = A \ln \xi + A'R\xi + \varphi_0(\xi), \quad \psi(\xi) = B \ln \xi + B'R\xi + \psi_0(\xi). \quad (14)$$

Функции $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$ голоморфны в бесконечной области $|\xi| > 1$. Комплексные постоянные A и B выражаются через главный вектор внешних сил, а постоянные A' и B' определяются напряжениями на бесконечности. Легко проверить, что равенство нулю напряжений на бесконечности дает значения постоянных $A' = 2\mu$, $B' = 0$. Из условия однозначности функции $\zeta(\xi)$ на контуре отверстия следует равенство для постоянных $bA - B = 0$.

В уравнении (13) присутствует граничное значение функции $\eta(\xi)\overline{\eta'(\xi)}/\overline{\varphi'(\xi)}$, которая голоморфна в области $|\xi| < 1$, за исключением точки $\xi = 0$, где она имеет полюс с главной частью $mR^2 \frac{1}{2\mu R \xi}$. Выделим в этой функции голоморфную часть в области $|\xi| < 1$:

$$\overline{\phi(\xi)} = \frac{\eta(\xi)\overline{\eta'(\xi)}}{\overline{\varphi'(\xi)}} - \frac{mR}{2\mu} \frac{1}{\xi}. \quad (15)$$

Интеграл типа Коши от функции (15) в области $|\xi| > 1$ равен нулю.

Функции $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ в уравнении (13) заменим выражениями (14). В итоге придем к граничной задаче для голоморфных функций $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$:

$$b\varphi_0(t) + \overline{\psi_0(t)} + c\overline{\phi(t)} = g_0(t), \quad g_0(t) = g(t) - 2\mu bRt - \frac{cmR}{2\mu} \frac{1}{t}, \quad t = e^{i\theta}. \quad (16)$$

Ее решение имеет вид

$$b\varphi_0(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_0(t) dt}{t - \xi} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(t) dt}{t - \xi} - cmR \frac{1}{2\mu} \frac{1}{\xi} = me^{-i\beta} R \frac{1}{\xi} - \frac{cmR}{2\mu} \frac{1}{\xi},$$

$$\psi_0(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{g_0(t)} - b\overline{\varphi_0(t)}}{t - \xi} dt - \frac{c}{2\pi i} \oint \frac{\phi(t) dt}{t - \xi} + \psi_0(\infty) = \quad (17)$$

$$= e^{i\beta} R \frac{1}{\xi} - 2\mu b R \frac{1}{\xi} - c\phi(\xi) + \psi_0(\infty).$$

Постоянная $\psi_0(\infty)$ не влияет на величину напряжений и может быть опущена. Значение этой постоянной можно найти тем же методом, что и в работе [10]. В формуле (17) использовано преобразование функции $\overline{\eta(\xi)}\eta'(\xi)/\varphi'(\xi)$, которая голоморфна при $|\xi| > 1$, кроме точки $\xi = \infty$, где она имеет вид $mR^2 \frac{1}{2\mu R} \xi + O(\xi^{-2})$. Голоморфная часть указанной функции обозначена $\phi(\xi)$, причем

$$\phi(\xi) = \frac{\overline{\eta(\xi)}\eta'(\xi)}{\varphi'(\xi)} - \frac{mR}{2\mu} \xi.$$

Формулы (14), (17) в совокупности дают полное решение второй основной нелинейной задачи для плоскости с эллиптическим отверстием.

На жестко подкрепленном крае отверстия $g_{\theta\theta} - ig_{r\theta} = 1$ с помощью формулы

$$s_{rr} + is_{r\theta} + 2\mu(g_{\theta\theta} - ig_{r\theta}) = \varphi'(z) = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)}$$

находим на этом контуре напряжения $s_{rr} + is_{r\theta}$:

$$s_{rr} + is_{r\theta} = \varphi'(z) - 2\mu = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)} - 2\mu. \quad (18)$$

Привлекая формулы (12), получим напряжения $s_{\theta\theta} - is_{\theta r}$:

$$s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = 2(1 - 2\mu b) \left[\frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)} - 4\mu^2 \frac{\overline{\eta'(\xi)}}{\varphi'(\xi)} \right] - s_{rr} - is_{r\theta}. \quad (19)$$

Далее перейдем к решениям конкретных задач о действии сосредоточенных силы и момента на эллиптическое включение.

4. Действие сосредоточенной силы на эллиптическое ядро. Предположим, что на жесткое эллиптическое ядро действует сосредоточенная сила в центре эллипса. Проекция силы на оси x_1, x_2 декартовых координат отсчетной конфигурации обозначим F_1 и F_2 . Номинальные напряжения на бесконечности равны нулю. Из этого условия получены постоянные $A' = 2\mu$ и $B' = 0$. Для определения постоянных A и B в формулах (14) применим первую формулу (10) и условие однозначности перемещений на замкнутом контуре, содержащем включение (это условие использовалось выше):

$$F_1 + iF_2 = -2\pi[(1 - 2\mu b)A + 2\mu\overline{B}], \quad bA - \overline{B} = 0.$$

Поскольку

$$A = -\frac{F_1 + iF_2}{2\pi}, \quad B = -b\frac{F_1 - iF_2}{2\pi},$$

функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ в (14) примут вид

$$\varphi(\xi) = -\frac{F_1 + iF_2}{2\pi} \ln \xi + 2\mu R \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right), \quad \psi(\xi) = -b\frac{F_1 - iF_2}{2\pi} \ln \xi - 2\mu b R \frac{1}{\xi} - c\phi(\xi).$$

5. Действие сосредоточенного момента на эллиптическое ядро. Предположим, что за счет поступательного перемещения плоскости центр эллипса всегда находится в начале координат, а эллиптическое ядро может поворачиваться вокруг

своего центра. При отсутствии сосредоточенной силы постоянные $A = B = 0$, равенство нулю напряжений на бесконечности дает $A' = 2\mu$, $B' = 0$. Уравнение (16) запишем следующим образом:

$$b\varphi_0(t) + \overline{\psi_0(t)} + c\overline{\phi(t)} = \eta(t)e^{-i\beta} - 2\mu Rbt. \quad (20)$$

Решив уравнение (20), найдем функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= 2\mu R\xi + \varphi_0(\xi) = 2\mu R\xi + \frac{m}{b}R \left(e^{-i\beta} - \frac{c}{2\mu} \right) \frac{1}{\xi}, \\ \psi(\xi) &= \psi_0(\xi) = -2\mu bR \frac{1}{\xi} - c\phi(\xi) + c \frac{m}{2\mu} R\xi + R \frac{1}{\xi} e^{i\beta}. \end{aligned}$$

Выполним интегрирование по частям в интеграле для момента (10), учитывая формулы $df_1 = -s_{n2}ds$, $df_2 = s_{n1}ds$:

$$\begin{aligned} M &= \oint (x_1 s_{n2} - x_2 s_{n1}) ds = - \oint (x_1 df_1 + x_2 df_2) = \\ &= -[x_1 f_1 + x_2 f_2]_L + \oint (f_1 dx_1 + f_2 dx_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Если главный вектор усилий, приложенных к контуру L , равен нулю, то функции f_1 и f_2 непрерывны на L , потому

$$[x_1 f_1 + x_2 f_2]_L = 0.$$

Используя равенство

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \frac{1}{2}(\sigma d\bar{z} + \bar{\sigma} dz)$$

и формулу (21), окончательно получаем, что

$$M = \frac{1}{2} \oint (\sigma d\bar{z} + \bar{\sigma} dz). \quad (22)$$

Преобразуем интеграл (22):

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \oint (\sigma d\bar{z} + \bar{\sigma} dz) = \frac{1}{2} \oint \left[(\varphi(z) - 2\mu\zeta) d\bar{z} + (\overline{\varphi(z)} - 2\mu\bar{\zeta}) dz \right] = \\ &= \frac{1}{2} \oint \left[\varphi(z) d\bar{z} + \overline{\varphi(z)} dz \right] - \mu \oint \left[ze^{-i\beta} d\bar{z} + \bar{z}e^{i\beta} dz \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} \right]_L - \mu R^2 \oint \left[\left(t + \frac{m}{t} \right) e^{-i\beta} d \left(\frac{1}{t} + mt \right) + \left(\frac{1}{t} + mt \right) e^{i\beta} d \left(t + \frac{m}{t} \right) \right]. \end{aligned}$$

Перейдем здесь к переменной θ : $t = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Слагаемое в квадратных скобках равно нулю ввиду непрерывности функции на контуре ядра, последнее слагаемое дает окончательный результат — соотношение жесткости для крутящего момента

$$M = 4\pi\mu(1 - m^2)R^2 \sin \beta.$$

6. Сравнение с решением линейных задач. Аналогичная линейная задача для плоскости с жестким эллиптическим ядром при действии силы и момента рассмотрена в книге Н. И. Мухелишвили [10]. Коротко остановимся на полученных в ней результатах.

Действие силы на жесткое ядро. Полагаем, что напряжения на бесконечности равны нулю, а ядро не испытывает вращения. Тогда на основании формул [10] получим уравнения

$$\varphi(\xi) = -\frac{F_1 + iF_2}{2\pi(\varkappa + 1)} \ln \xi, \quad \psi(\xi) = \frac{\varkappa(F_1 - iF_2)}{2\pi(\varkappa + 1)} \ln \xi + \frac{F_1 + iF_2}{2\pi(\varkappa + 1)} \frac{1 + m^2}{\xi^2 - m} + \frac{m(F_1 + iF_2)}{2\pi(\varkappa + 1)},$$

$$F_1 + iF_2 = \int_{AB} (\sigma_{n1} + i\sigma_{n2}) ds = -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] \Big|_A^B.$$

Действие момента на жесткое ядро. Считаем, как и раньше, что напряжения на бесконечности равны нулю. Согласно формулам [10], находим, что

$$\varphi(\xi) = \frac{2\mu m \beta Ri}{\varkappa \xi}, \quad \psi(\xi) = \frac{2\mu \beta Ri}{\varkappa \xi} \left(\varkappa + m \frac{1 + m\xi^2}{\xi^2 - m} \right),$$

$$M = \int_{AB} (x_1\sigma_{n2} - ix_2\sigma_{n1}) ds = \operatorname{Re} [\chi(z) - z\psi(z) - z\overline{z}\varphi'(z)] \Big|_A^B.$$

При этом величина угла поворота жесткого ядра β определяется по формуле

$$\beta = \frac{M\varkappa}{4\pi\mu R^2(m^2 + \varkappa)}.$$

Знание функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ позволяет легко вычислить напряжения [9]

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \Phi(\xi) + \overline{\Phi(\xi)} - G(\xi), \quad \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(\xi) + \overline{\Phi(\xi)} + G(\xi),$$

$$G(\xi) = \left[\frac{\eta(\xi)}{\eta'(\xi)} \overline{\Phi'(\xi)} + \overline{\Psi(\xi)} \right] e^{-2i\gamma}, \quad e^{-2i\gamma} = \frac{\overline{\eta'(\xi)}}{\eta'(\xi)} e^{-2i\theta}, \quad \Phi(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)}, \quad \Psi(\xi) = \frac{\psi'(\xi)}{\eta'(\xi)}.$$

Примеры. Выполнены расчеты напряжений для линейной и нелинейной задач на жестко подкрепленном контуре эллипса. В качестве внешней нагрузки взято действие сосредоточенной силы $F_1 + iF_2$ (рис. 2) и момента M (рис. 3 и 4). Запишем формулу (18) для напряжений при действии силы:

$$s_{rr} + is_{r\theta} = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)} - 2\mu = -\frac{F_1 + iF_2}{2\pi R} \frac{\xi}{\xi^2 - m}.$$

Такая же формула имеет место в линейной задаче. При действии момента напряжения вычисляются по формуле

$$s_{rr} + is_{r\theta} = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)} - 2\mu = \frac{m}{b}(1 - e^{-i\beta}) \frac{1}{\xi^2 - m},$$

а напряжения $s_{\theta\theta} - is_{\theta r}$ — по (19).

Представим пример расчета напряжений со следующими параметрами: размеры эллиптического отверстия $a = 3$ см, $d = 1$ см, $R = 2$ см, $m = 0.5$, параметры материала пластины $\mu = 1$ МПа, $\nu = 0.4902$. Напряжения s_{rr}^* , $s_{\theta\theta}^*$, $s_{\theta r}^*$ соответствуют линейным задачам. При действии сосредоточенной силы значения напряжений нелинейной и линейной задач близки, при действии момента они существенно различаются.

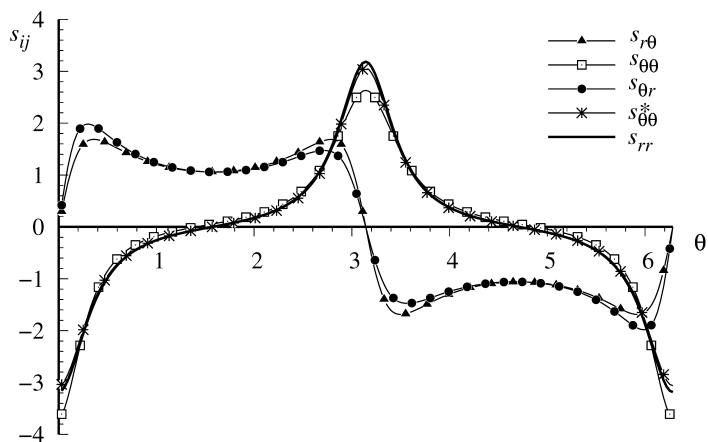


Рис. 2. Напряжения при действии сосредоточенной силы $F_1 = 20$ кг/см, $F_2 = 0$

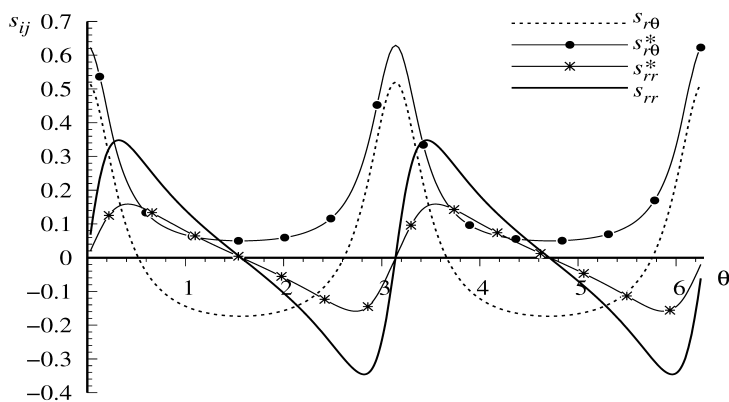


Рис. 3. Напряжения $s_{rr}, s_{r\theta}, s_{rr}^*, s_{r\theta}^*$ при действии момента $M = 5$ кг

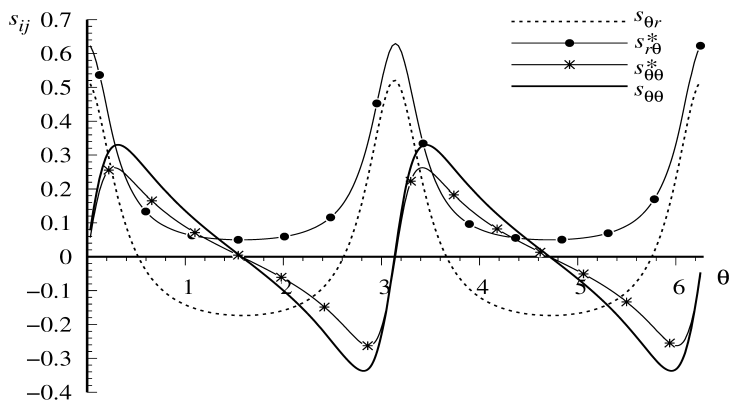


Рис. 4. Напряжения $s_{\theta\theta}, s_{\theta r}, s_{\theta\theta}^*, s_{r\theta}^*$ при действии момента $M = 5$ кг

7. Заключение. В работе представлено точное аналитическое решение нелинейной задачи теории упругости для плоскости с жестким эллиптическим включением. В задаче о действии силы смещения не остаются ограниченными на бесконечности. Чтобы они были ограниченными, необходимо выполнение ряда условий [10]:

- 1) главный вектор всех внешних сил на границе области обращается в нуль;
- 2) напряжения равны нулю на бесконечности;
- 3) бесконечно удаленная часть плоскости не испытывает вращения.

Обратим внимание на то, что даже в случае обращения в нуль напряжений на бесконечности и отсутствия вращения смещения все же возрастают как $\ln r$ при $r \rightarrow \infty$, если главный вектор внешних сил на границе не равен нулю.

Литература

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // *Commun. Pure and Applied Mathematics*. 1960. Vol. 13. N 2. P. 239–296.
2. *Мальков В. М.* Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2010. 276 с.
3. *Mal'kov V. M., Mal'kova Y. V.* Modeling nonlinear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John's harmonic material // *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*. 2017. Vol. 50. Iss. 1. P. 74–81. <https://doi.org/10.3103/S1063454117010095>
4. *Varley E., Cumberbatch E.* Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // *Journal of Elasticity*. 1980. Vol. 10. N 4. P. 341–405.
5. *Ru C. Q.* On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // *Acta Mechanica*. 2002. Vol. 156. N 3–4. P. 219–234.
6. *Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A.* Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // *International Journal of Non-linear Mechanics*. 2005. Vol. 38. N 2–3. P. 281–287.
7. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия*. 2008. Вып. 3. С. 114–126.
8. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Степанова В. А.* Двухкомпонентная плоскость из материала Джона с межфазной трещиной, нагруженной давлением // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия*. 2013. Вып. 3. С. 113–125.
9. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Деформация пластины с упругим эллиптическим включением // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2015. Т. 2 (60). Вып. 4. С. 617–632.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Статья поступила в редакцию 24 апреля 2023 г.

Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

Контактная информация:

Малькова Юлия Вениаминовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; y.malkova@spbu.ru

Deformation of a plane modelled by John's material with a rigid elliptical inclusion loaded by force and moment

Yu. V. Malkova

St. Petersburg State University,

7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Malkova Yu. V. Deformation of a plane modelled by John's material with a rigid elliptical inclusion loaded by force and moment. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 337–347.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.303> (In Russian)

An exact analytical solution is obtained for a non-linear problem of elasticity theory for a plane with a rigid elliptical inclusion. A concentrated force and a moment are applied at the center of inclusion. The elastic properties of the plane are modeled by John's harmonic material. For this material methods of the theory of functions of a complex variable are used for solving nonlinear plane problems. Nominal stresses and displacements are expressed in terms of two analytical functions of a complex variable, which are determined from the boundary conditions on the contour of inclusion. The problems of the action of a concentrated force and moment on an elliptical core in a plane are considered separately. A comparison with a similar linear problem is made. The influence of the applied force and moment on the magnitude of stresses is studied depending on various parameters of the problem. Calculations of nominal stresses on the contour joining the plane with inclusion are performed.

Keywords: non-linear plane problem, rigid elliptical inclusion, John's harmonic material, concentrated force and moment.

References

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 1960, vol. 13, no. 2, pp. 239–296.
2. Malkov V. M. *Vvedenie v nelineinuiu uprugost'* [Introduction to non-linear elasticity]. St. Petersburg, Saint Petersburg State University Press, 2010, 276 p. (In Russian)
3. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. Modeling non-linear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John's harmonic material. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, 2017, vol. 50, iss. 1, pp. 74–81. <https://doi.org/10.3103/S1063454117010095>
4. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes. *Journal of Elasticity*, 1980, vol. 10, no. 4, pp. 341–405.
5. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. *Acta Mechanica*, 2002, vol. 156, no. 3–4, pp. 219–234.
6. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2005, vol. 38, no. 2–3, pp. 281–287.
7. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskaia zadacha nelineinnoi uprugosti dlia garmonicheskogo materiala [Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2008, iss. 3, pp. 114–126. (In Russian)
8. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Stepanova V. A. Dvukhkompontentnaia ploskost' iz materiala Dzhona s mezhfaznoi treshchinou, nagruzhennoi davleniem [Bi-material plane modelled by John's material with pressure-loaded interfacial crack]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2013, iss. 3, pp. 113–125. (In Russian)
9. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. Deformatsiia plastiny s uprugim ellipticheskim vklucheniem [Deformation of a plate with elliptic elastic inclusion]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2015, vol. 2 (60), iss. 4, pp. 617–632. (In Russian)
10. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p. (In Russian)

Received: April 24, 2023.

Accepted: June 8, 2023.

Author's information:

Yulia V. Malkova — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; y.malkova@spbu.ru