Известия вузов. Математика
2024, №6, с. 68–79

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. ПЛАТОНОВ

УСЛОВИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ И ПЕРМАНЕНТНОСТИ ДЛЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ

Аннотация. Рассматривается обобщенная система типа Лотки–Вольтерры с переключениями. Изучаются условия предельной ограниченности решений и перманентности системы. С помощью прямого метода Ляпунова устанавливаются требования на закон переключения, позволяющие гарантировать нужную динамику решений системы. В фазовом пространстве системы строится притягивающее компактное инвариантное множество и обеспечивается заданная область притяжения для этого множества. Отличительной особенностью работы является применение комбинации двух разных функций Ляпунова, каждая из которых играет свою особую роль в решении задачи.

Ключевые слова: обобщенная система Лотки–Вольтерры, переключение, предельная ограниченность решений, перманентность.

УДК: 517.977

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-68-79

Введение

Системы типа Лотки–Вольтерры являются важным классом динамических систем, широко используемым для моделирования различных взаимодействий между субъектами в биологической, химической или экономической среде. Такие системы вызывают большой интерес уже многие годы (см., например, [1]–[11]). Анализируется возможная динамика решений подобных систем, в частности, исследуются вопросы устойчивости, диссипативности, конвергентности, и т. п. Рассматриваются как непрерывные системы, так и их разностные и дифференциально-разностные аналоги. Изучаются как стационарные, так и нестационарные системы, а также системы со случайными коэффициентами. Функции межвидовых связей в системах Лотки–Вольтерры могут быть линейными (классические системы) и нелинейными (обобщенные системы), аддитивными и мультипликативными. Системы могут описывать как сосредоточенные, так и распределенные взаимодействия, вызванные эффектом миграции или диффузии.

В настоящей работе рассматривается обобщенная система Лотки–Вольтерры с переключениями. Системы с переключениями являются гибридными системами, состоящими из семейства подсистем, каждая из которых задает функционирование системы в определенном режиме [12]. Закон переключения представляет собой некоторую функцию, определяющую в каждый момент времени, какая из подсистем является активной. Исследованию систем Лотки–Вольтерры с переключениями посвящено множество работ (см., например, [13]–[16] и цитируемую там литературу).

Поступила в редакцию 10.05.2023, после доработки 29.05.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Одной из важных проблем, связанных с теорией динамических систем, является проблема предельной ограниченности решений. В рамках этой проблемы важно определить условия, гарантирующие, что решения системы не уходят на бесконечность, а со временем попадают в некоторую ограниченную инвариантную область. Отметим, что в реальных практических задачах достаточно рассматривать только решения, начинающиеся в какой-то конечной окрестности начала координат. Это позволяет значительно ослабить искомые условия предельной ограниченности решений. Также в биологических, химических и экономических процессах часто бывает важно обеспечить постоянное сохранение взаимодействующих субъектов. Математически это означает, что любое решение системы должно быть покомпонентно отделено от нуля. При выполнении данного условия изучаемая система называется персистентной. Динамические системы с предельно ограниченными решениями и свойством персистентности принято называть перманентными [4].

Для решения поставленных задач в работе используется метод функций Ляпунова в сочетании с теорией дифференциальных неравенств. Поскольку рассматриваемые задачи относятся к области глобального анализа, подобрать одну функцию Ляпунова, удовлетворяющую необходимым условиям во всем пространстве, проблематично. Поэтому в работе задействована идея расщепления фазового пространства на две части и применение разных функций Ляпунова в этих частях. Такая идея уже доказала свою эффективность в ряде работ [16], [17].

1. Постановка задачи

Рассмотрим обобщенную систему типа Лотки–Вольтерры

$$\dot{x}_i = g_i(x_i)\left(a_i^{(\sigma)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j)\right), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Системы такого вида наиболее часто используются для моделирования взаимодействия нескольких популяций в биологическом сообществе [1]–[3]. Здесь переменные $x_1(t), \dots, x_n(t)$ описывают численности популяций в момент времени $t \geq 0$. Кусочно-постоянная функция $\sigma = \sigma(t):\ [0, +\infty) \to S = \{1, \dots, N\}$ задает закон переключений между различными возможными режимами функционирования системы. Переключения могут вызываться как изменением условий внешней среды, в которой обитают популяции, так и в результате целенаправленного воздействия человека на заданное биологическое сообщество. Постоянные коэффициенты $a_i^{(s)}$, $b_{ij}^{(s)}$ характеризуют скорость естественного прироста или убыли популяций, а также внутривидовые и межвидовые взаимодействия; $i, j = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, N$. Функции $g_i(x_i)$, $f_i(x_i)$ обычно подбираются из некоторого заданного класса функций на основе имеющихся наблюдений; $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что системы вида (1) также широко применяются для описания некоторых химических и экономических процессов [1].

В соответствии с физическим смыслом переменных, будем исследовать систему (1) в неотрицательном ортанте $K^+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T :\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n\}$. Через $K_0^+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T :\ x_i > 0,\ i = 1, \dots, n\}$ обозначим внутренность ортанта K^+.

Будем считать, что функции $g_i(x_i)$, $f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют следующим стандартным условиям (см. [1]–[3]): $g_i(x_i)$, $f_i(x_i)$ непрерывны при $x_i \geq 0$, причем $f_i(x_i)$ непрерывно дифференцируемы при $x_i > 0$; система (1) обладает свойством единственности решений задачи Коши в ортанте K^+; $f_i(0) = g_i(0) = 0$, и $f_i(x_i) > 0$, $g_i(x_i) > 0$ при $x_i > 0$; $f_i'(x_i) > 0$ при $x_i > 0$, и $f_i(x_i) \to +\infty$ при $x_i \to +\infty$.

Заметим, что K^+ и K_0^+ являются инвариантными множествами системы (1).

Определение. Компактное множество G_1 назовем притягивающим для системы (1) с областью притяжения G_2, $G_1 \subset G_2 \subset K^+$, если для любых $t_0 \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in G_2$ найдется такое $\rho \geq 0$, что $\mathbf{x}(t) \in G_1$ при всех $t \geq t_0 + \rho$. Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (1), выходящее из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0. Если при этом величина ρ не зависит от выбора t_0, то множество G_1 назовем равномерно притягивающим. Если областью притяжения является весь неотрицательный ортант ($G_2 = K^+$), то говорят, что система (1) является диссипативной в K^+. Наконец, если $G_1 \subset K_0^+$, то система (1) называется перманентной.

Выполнение определения для некоторого компактного множества G_1 означает, что решения, начинающиеся в области G_2, будут предельно ограничены (численности популяций не будут превышать некоторые конечные значения). Перманентность означает, что указанные решения будут, кроме того, отделены от границы ортанта K^+ (популяции не вымрут).

Целью настоящей работы является нахождение условий, гарантирующих предельную ограниченность решений системы (1) и ее перманентность, а также оценка размеров соответствующих областей G_1 и G_2.

2. Построение функций Ляпунова

Рассмотрим семейство подсистем, образующих гибридную систему (1):

$$\dot{x}_i = g_i(x_i)\left(a_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(s)} f_j(x_j)\right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

В работе [16] предполагалось, что подсистемы (2) имеют общее положение равновесия $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T \in K_0^+$ и предлагалось для анализа поведения решений системы (1) использовать функции Ляпунова вида:

$$V_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{\bar{x}_i}^{x_i} \frac{f_i^{\omega}(\tau)}{g_i(\tau)}\, d\tau, \qquad V_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{\bar{x}_i}^{x_i} \frac{(f_i(\tau) - f_i(\bar{x}_i))^{\omega}}{g_i(\tau)}\, d\tau,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — положительные постоянные, ω — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. В настоящей работе мы будем использовать функции Ляпунова другого вида, которые позволят ослабить некоторые предположения, сделанные в [16], и получить более простые достаточные условия, обеспечивающие требуемую динамику решений исследуемой системы.

Предположение 1. Пусть для некоторого непустого подмножества $\hat{S}^- \subset S$ система неравенств

$$\hat{\mathbf{B}}_s \hat{\theta} < \mathbf{0}, \quad s \in \hat{S}^-, \tag{3}$$

имеет положительное решение относительно $\hat{\theta}$. Здесь $\hat{\mathbf{B}}_s = \left\{\hat{b}_{ij}^{(s)}\right\}_{i,j=1}^{n}$, $\hat{b}_{ii}^{(s)} = b_{ii}^{(s)}$ и $\hat{b}_{ij}^{(s)} = \max\left\{b_{ij}^{(s)};\, 0\right\}$ при $i \neq j$. Неравенства (3) понимаются покомпонентно.

Для анализа предельной ограниченности решений системы (1) построим функцию Ляпунова вида [14]:

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{f_i(x_i)}{\hat{\theta}_i},$$

где в качестве $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)^T$ возьмем положительное решение системы (3).

Выберем произвольную точку $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)^T \in K_0^+$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ подсистемы с номером s из семейства (2), выходящее из точки $\hat{\mathbf{x}}$ в момент времени $t = 0$. Обозначим

$$M = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{f_i(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i}.$$

Определим подмножество индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$ таких, что $f_i(\hat{x}_i)/\hat{\theta}_i = M$ при $i \in I$ и $f_i(\hat{x}_i)/\hat{\theta}_i < M$ при $i \notin I$. Для каждого $i \in I$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f_i(x_i(t))}{\hat{\theta}_i}\right)\bigg|_{t=0} = \frac{f_i'(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i} g_i(\hat{x}_i)\left(a_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(s)} f_j(\hat{x}_j)\right) \le \frac{f_i'(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i} g_i(\hat{x}_i)\left(a_i^{(s)} + \frac{f_i(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i}\sum_{j=1}^n \hat{b}_{ij}^{(s)}\hat{\theta}_j\right).$$

Принимая во внимание предположение 1, найдутся такие постоянные $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 \ge 0$, что

$$D^+\hat{V}(\hat{\mathbf{x}})\Big|_{(s)} \le \max_{i\in I}\left\{\frac{f_i'(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i} g_i(\hat{x}_i)\left(\hat{a}_1 - \delta_1\hat{V}(\hat{\mathbf{x}})\right)\right\}, \quad s \in \hat{S}^-,$$

$$D^+\hat{V}(\hat{\mathbf{x}})\Big|_{(s)} \le \max_{i\in I}\left\{\frac{f_i'(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i} g_i(\hat{x}_i)\left(\hat{a}_2 + \delta_2\hat{V}(\hat{\mathbf{x}})\right)\right\}, \quad s \in \hat{S}^+.$$

Здесь $D^+\hat{V}(\mathbf{x})\Big|_{(s)}$ — верхняя правая производная Дини [18] функции $\hat{V}(\mathbf{x})$ в силу s-й подсистемы из семейства (2); $\hat{S}^+ = S \setminus \hat{S}^-$; $\hat{a}_1 = \max_{s\in\hat{S}^-}\max_{i=1,\ldots,n} a_i^{(s)}$, $\hat{a}_2 = \max_{s\in\hat{S}^+}\max_{i=1,\ldots,n} a_i^{(s)}$.

Выберем такое $\hat{H} > 0$, что $\hat{V}(\hat{\mathbf{x}}) > \hat{a}_1/\delta_1$ при всех $\hat{\mathbf{x}}$, удовлетворяющих условию $\|\hat{\mathbf{x}}\| \ge \hat{H}$. Здесь и далее, если не оговорено противное, под нормой вектора понимается евклидова норма.

Учитывая свойства функций $f_i(x_i)$, $g_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, для любого $H_1 \ge \hat{H}$ и для любого числа γ можно подобрать положительные коэффициенты $c_1(H_1, \gamma)$, $c_2(H_1, \gamma)$ таким образом, что будут справедливы неравенства

$$c_1(H_1,\gamma)\hat{V}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}) \le \frac{f_i'(\hat{x}_i)}{\hat{\theta}_i} g_i(\hat{x}_i) \le c_2(H_1,\gamma)\hat{V}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}) \tag{4}$$

при $\hat{H} \le \|\hat{\mathbf{x}}\| \le H_1$, $i \in I$.

Таким образом, в области

$$K_1(H_1) = \left\{\mathbf{x} \in K_0^+ :\ \hat{H} \le \|\mathbf{x}\| \le H_1\right\} \tag{5}$$

приходим к оценкам

$$D^+\hat{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \le -\hat{\alpha}(H_1,\gamma)\hat{V}^{1+\gamma}(\mathbf{x}), \quad s \in \hat{S}^-, \tag{6}$$

$$D^+\hat{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \le \hat{\beta}(H_1,\gamma)\hat{V}^{1+\gamma}(\mathbf{x}), \quad s \in \hat{S}^+, \tag{7}$$

где $\hat{\alpha}(H_1, \gamma)$, $\hat{\beta}(H_1, \gamma)$ — постоянные коэффициенты, зависящие, вообще говоря, от выбора значений H_1 и γ; $\hat{\alpha}(H_1, \gamma) > 0$, $\hat{\beta}(H_1, \gamma) \ge 0$.

Замечание 1. Далее в статье оценки (6) и (7) будут использованы для установления ограничений на закон переключения в системе (1), гарантирующих предельную ограниченность решений и обеспечивающих требуемые размеры областей G_1 и G_2 (см. определение). Очевидно, эти результаты будут зависеть от выбора величин H_1 и γ. Это дает возможность поставить задачу об оптимизации выбора указанных величин для получения наилучших в каком-то смысле результатов. Данную задачу можно решать посредством численного анализа. Более того, в левой и правой частях (4) можно использовать разные значения параметра γ, тогда степени функции $\hat{V}(\mathbf{x})$ в дифференциальных неравенствах (6) и (7) тоже будут разными. Используя подходы, описанные в работе [16], такой более общий случай также может быть успешно исследован. Однако, поскольку задача оптимизации выбора γ в настоящей статье не решается, ограничимся в дальнейшем рассмотрением более простой ситуации, когда параметр γ выбирается единым в неравенствах (4) и, соответственно, (6), (7).

Для нахождения условий перманентности системы (1) введем дополнительные предположения.

Предположение 2. Пусть $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\tau}{g_i(\tau)} = +\infty,\ i = 1,\ldots,n.$

Предположение 3. Пусть для некоторого непустого подмножества $\widetilde{S}^- \subset S$ система неравенств

$$\widetilde{\mathbf{B}}_s^T \widetilde{\theta} < \mathbf{0}, \quad s \in \widetilde{S}^-, \tag{8}$$

имеет положительное решение относительно $\widetilde{\theta}$. Здесь $\widetilde{\mathbf{B}}_s = \left\{\widetilde{b}_{ij}^{(s)}\right\}_{i,j=1}^n$, $\widetilde{b}_{ii}^{(s)} = b_{ii}^{(s)}$ и $\widetilde{b}_{ij}^{(s)} = |b_{ij}^{(s)}|$ при $i \neq j$. Неравенства (8) понимаются покомпонентно.

Замечание 2. Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных неравенств вида (3), (8) с Метцлеровыми матрицами $\hat{\mathbf{B}}_s$, $\widetilde{\mathbf{B}}_s^T$ были получены в работе [19]. Отметим, что из существования положительного решения системы $\hat{\mathbf{B}}_s \hat{\theta} < \mathbf{0}$ для некоторого множества индексов s, вообще говоря, не следует существование положительного решения системы $\widetilde{\mathbf{B}}_s^T \widetilde{\theta} < \mathbf{0}$ при тех же значениях индексов s, и наоборот. Поэтому подмножества $\hat{S}^-$ и $\widetilde{S}^-$ в предположениях 1 и 3 могут быть разными.

Предположение 4. Пусть существует точка $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)^T \in K_0^+$, для которой выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{\theta}_i \left| a_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(s)} f_j(\widetilde{x}_j) \right| < \min_{j=1,\ldots,n} \delta_j^{(s)} f_j(\widetilde{x}_j), \quad s \in \widetilde{S}^-, \tag{9}$$

где $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\theta}_1,\ldots,\widetilde{\theta}_n)^T$ — положительное решение системы (8); $\delta_j^{(s)} = -\sum_{i=1}^n \widetilde{b}_{ij}^{(s)} \widetilde{\theta}_i$.

Замечание 3. Согласно неравенствам (8) имеем $\delta_j^{(s)} > 0$, $j = 1,\ldots,n$, $s \in \widetilde{S}^-$. Отметим также, что с помощью замены переменных $y_j = f_j(\widetilde{x}_j)$, $j = 1,\ldots,n$, неравенства (9) могут быть переписаны в линейной форме. Таким образом, проверку разрешимости системы (9) нетрудно выполнить как с помощью аналитических, так и с помощью численных подходов. Например, предположение 4 будет выполнено, если подсистемы (2) с номерами из подмножества $\widetilde{S}^-$ имеют положения равновесия, расположенные в положительном ортанте достаточно близко друг к другу.

Построим теперь функцию Ляпунова вида

$$\widetilde{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widetilde{\theta}_i \left| \int_{\widetilde{x}_i}^{x_i} \frac{d\tau}{g_i(\tau)} \right|,$$

выбрав параметры $\widetilde{\theta}_i$, $\widetilde{x}_i$, $i = 1,\ldots,n$, в соответствии с предположениями 3 и 4.

Получаем

$$D^+\widetilde{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \le \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\theta}_i \operatorname{sign}(x_i - \widetilde{x}_i)\left(a_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(s)} f_j(x_j)\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\theta}_i \left| a_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(s)} f_j(\widetilde{x}_j)\right| + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}^{(s)} \widetilde{\theta}_i\right)|f_j(x_j) - f_j(\widetilde{x}_j)|.$$

Обозначим

$$P_s = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : \ \sum_{j=1}^{n} \delta_j^{(s)} |f_j(x_j) - f_j(\widetilde{x}_j)| \le M_s\right\}, \quad s \in \widetilde{S}^-, \tag{10}$$

где $M_s = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\theta}_i \left| a_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(s)} f_j(\widetilde{x}_j)\right|$. Множества (10) компактны, причем при выполнении неравенств (9) имеем $P_s \subset K_0^+$, $s \in \widetilde{S}^-$. Значит, можно построить компактное множество P так, что

$$\bigcup_{s \in \widetilde{S}^-} P_s \subset P \subset K_0^+, \tag{11}$$

и для любого $H_2 > 0$ в области $K_2(H_2) \setminus P$ будет выполнена оценка

$$D^+\widetilde{V}(\mathbf{x})\Big|_{(s)} \le -\widetilde{\alpha}(H_2), \quad s \in \widetilde{S}^-. \tag{12}$$

Здесь $\widetilde{\alpha}(H_2)$ — некоторый положительный коэффициент, и

$$K_2(H_2) = \{\mathbf{x} \in K_0^+ : \ \|\mathbf{x}\| \le H_2\}. \tag{13}$$

Аналогично можно подобрать неотрицательный коэффициент $\widetilde{\beta}(H_2)$ так, что в области $K_2(H_2) \setminus P$ будут иметь место неравенства

$$D^+\widetilde{V}(\mathbf{x})\Big|_{(s)} \le \widetilde{\beta}(H_2), \quad s \in \widetilde{S}^+, \tag{14}$$

где $\widetilde{S}^+ = S \setminus \widetilde{S}^-$.

3. Анализ динамики решений гибридной системы

Установим сначала достаточные условия предельной ограниченности решений системы (1), начинающихся в некоторой произвольно выбранной окрестности начала координат.

Обозначим

$$A(u) = \max_{\mathbf{x} \in K_0^+ : \ \|\mathbf{x}\| = u} \hat{V}(\mathbf{x}), \quad B(v) = \max_{\mathbf{x} \in K_0^+ : \ \hat{V}(\mathbf{x}) = v} \|\mathbf{x}\|.$$

Функции $A(u)$, $B(v)$ определены и строго возрастают на интервале $[0, +\infty)$, причем $A(u) \to +\infty$ и $B(v) \to +\infty$ при $u, v \to +\infty$.

Предположение 5. Пусть длительности промежутков времени, в течение которых переключения в системе (1) происходят только между подсистемами из множества $\hat{S}^-$, ограничены снизу положительной константой $\hat{L}_1$, а длительности промежутков времени, в течение которых переключения происходят только между подсистемами из множества $\hat{S}^+$, ограничены сверху положительной константой $\hat{L}_2$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 5*, для некоторого* $H_1 \geq \hat{H}$ *в области* $K_1(H_1)$ *построены оценки* (6), (7) *и справедливы следующие условия:*

1) *существуют числа* Δ_1 *и* Δ_2 *такие, что*

$$\hat{H} < B\big(A(\hat{H})\big) < \Delta_1 < \Delta_2 < B\big(A(\Delta_2)\big) < H_1; \tag{15}$$

2) *постоянные* $\hat{L}_1$ *и* $\hat{L}_2$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$-\hat{\alpha}(H_1,\gamma)\hat{L}_1 + \hat{\beta}(H_1,\gamma)\hat{L}_2 < 0, \tag{16}$$

$$\hat{L}_2 \leq \min\{\hat{L}_{21};\, \hat{L}_{22}\}, \tag{17}$$

где

$$\hat{L}_{21} = \begin{cases} \gamma^{-1}\hat{\beta}^{-1}(H_1,\gamma)\left(\big(A(\Delta_2)\big)^{-\gamma} - \big(B^{(-1)}(H_1)\big)^{-\gamma}\right), & \textit{если} \quad \gamma \neq 0; \\ \hat{\beta}^{-1}(H_1,0)\ln\left(B^{(-1)}(H_1)/A(\Delta_2)\right), & \textit{если} \quad \gamma = 0, \end{cases}$$

$$\hat{L}_{22} = \begin{cases} \gamma^{-1}\hat{\beta}^{-1}(H_1,\gamma)\left(\big(A(\hat{H})\big)^{-\gamma} - \big(B^{(-1)}(\Delta_1)\big)^{-\gamma}\right), & \textit{если} \quad \gamma \neq 0; \\ \hat{\beta}^{-1}(H_1,0)\ln\left(B^{(-1)}(\Delta_1)/A(\hat{H})\right), & \textit{если} \quad \gamma = 0, \end{cases}$$

$B^{(-1)}(\cdot)$ — *функция, обратная к функции* $B(\cdot)$.
Тогда множество $K_2(\Delta_1)$ *будет притягивающим для системы* (1) *с областью притяжения* $K_2(\Delta_2)$*. Здесь области* $K_1(\cdot)$ *и* $K_2(\cdot)$ *строятся в соответствии с формулами* (5), (13).

Доказательство. Построим на интервале $[0,+\infty)$ кусочно-постоянную функцию $\hat{\eta}(t)$ такую, что $\hat{\eta}(t) = -\hat{\alpha}(H_1,\gamma)$, если $\sigma(t) \in \hat{S}^-$, и $\hat{\eta}(t) = \hat{\beta}(H_1,\gamma)$, если $\sigma(t) \in \hat{S}^+$. Зададим $t_0 \geq 0$ и $\mathbf{x}_0 \in K_2(\Delta_2)$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), выходящее из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0. Очевидно, достаточно исследовать ситуацию, когда $\|\mathbf{x}_0\| > \Delta_1$.

Учитывая дифференциальные неравенства (6), (7), получаем (см. [18]), что пока решение $\mathbf{x}(t)$ остается в области $K_1(H_1)$ будут иметь место оценки

$$\hat{V}^{-\gamma}(\mathbf{x}(t)) \geq \hat{V}^{-\gamma}(\mathbf{x}_0) - \gamma\int_{t_0}^{t}\hat{\eta}(t)\,dt, \quad \text{если} \quad \gamma > 0,$$

$$\hat{V}^{-\gamma}(\mathbf{x}(t)) \leq \hat{V}^{-\gamma}(\mathbf{x}_0) - \gamma\int_{t_0}^{t}\hat{\eta}(t)\,dt, \quad \text{если} \quad \gamma < 0,$$

$$\hat{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \hat{V}(\mathbf{x}_0)e^{\int_{t_0}^{t}\hat{\eta}(t)\,dt}, \quad \text{если} \quad \gamma = 0.$$

Тогда из условий (15)–(17) получаем требуемое. В самом деле, неравенство (16) обеспечивает тенденцию $\displaystyle\int_{t_0}^{t}\hat{\eta}(t)\,dt \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Значит, в какой-то момент времени решение $\mathbf{x}(t)$ окажется в области $K_2(\hat{H})$. Условие $\hat{L}_2 \leq \hat{L}_{21}$ гарантирует при этом, что данное решение в любой момент времени будет оставаться в области $K_2(H_1)$. Наконец, требование $\hat{L}_2 \leq \hat{L}_{22}$ влечет за собой тот факт, что все решения системы (1), начинающиеся в области $K_2(\hat{H})$, не покинут область $K_2(\Delta_1)$. Из неравенств (15) вытекает корректность оценки (17). □

Замечание 4. Нетрудно заметить, что для существования постоянных Δ_1 и Δ_2, удовлетворяющих неравенствам (15), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $B(A(B(A(\hat{H})))) < H_1$. Это условие будет выполнено, если значение H_1 задать достаточно большим. Оценки (16), (17) представляют собой ограничения на закон переключения в гибридной системе (1), обеспечивающие требуемую динамику решений. Эти ограничения определяются размерами области начальных значений решений ($K_2(\Delta_2)$) и области предельных значений решений ($K_2(\Delta_1)$) при выбранных величинах Δ_1 и Δ_2.

Замечание 5. Отметим, что точность получаемых численных оценок можно повысить, если при анализе предельной ограниченности решений конкретно заданной системы (1) в качестве нормы вектора использовать не евклидову норму, а положить $\|\mathbf{x}\| = \hat{V}(\mathbf{x})$. Это устранит излишние огрубления в оценках. В данном случае будем иметь $A(u) = u$, $B(v) = v$, тогда постоянные Δ_1, Δ_2 в теореме 1 достаточно выбирать, исходя из условий $\hat{H} < \Delta_1 < \Delta_2 < H_1$.

Замечание 6. Если $\hat{S}^- = S$ в предположении 1, то система (1) будет равномерно диссипативной в K^+ при любом законе переключения. В этом случае функция $\hat{V}(\mathbf{x})$ будет общей функцией Ляпунова для подсистем (2), удовлетворяющей теореме Йосидзавы о равномерной диссипативности.

Замечание 7. Если существует такое $\gamma \le 0$, что коэффициенты $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ в дифференциальных неравенствах (6), (7) можно выбрать не зависящими от H_1, то при выполнении условия (16) система (1) будет равномерно диссипативной в K^+. Действительно, в этом случае можно положить $H_1 = \Delta_2 = +\infty$. Например, если функции $f_i'(x_i)g_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ограничены снизу и сверху положительными константами на бесконечном интервале $[\hat{H}, +\infty)$, то, полагая $\gamma = 0$, придем к указанным условиям равномерной диссипативности. Такая ситуация характерна, в частности, для сатурационных систем [20].

Привлечем теперь к анализу дополнительно функцию Ляпунова $\widetilde{V}(\mathbf{x})$ для установления достаточных условий перманентности системы (1).

Предположение 6. Пусть длительности промежутков времени, в течение которых переключения в системе (1) происходят только между подсистемами из множества $\widetilde{S}^-$, ограничены снизу положительной константой $\widetilde{L}_1$, а длительности промежутков времени, в течение которых переключения происходят только между подсистемами из множества $\widetilde{S}^+$, ограничены сверху положительной константой $\widetilde{L}_2$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1–6, *и справедливы следующие условия:*

1) *для некоторого* $H_1 \ge \hat{H}$ *в области* $K_1(H_1)$ *построены оценки* (6), (7), *существуют числа* Δ_1 *и* Δ_2, *удовлетворяющие неравенствам* (15), *и для постоянных* $\hat{L}_1$ *и* $\hat{L}_2$ *выполнены соотношения* (16), (17);

2) *для* $H_2 = \Delta_1$ *в области* $K_2(H_2) \setminus P$ *построены оценки* (12), (14), *постоянные* $\widetilde{L}_1$ *и* $\widetilde{L}_2$ *удовлетворяют соотношению*

$$-\widetilde{\alpha}(\Delta_1)\widetilde{L}_1 + \widetilde{\beta}(\Delta_1)\widetilde{L}_2 < 0. \tag{18}$$

Тогда множество

$$G = \left\{ \mathbf{x} \in K_0^+ : \ \widetilde{V}(\mathbf{x}) \le \max_{\mathbf{x} \in P \cap K_2(\Delta_1)} \widetilde{V}(\mathbf{x}) + \widetilde{\beta}(\Delta_1)\widetilde{L}_2 \right\} \cap K_2(\Delta_1) \tag{19}$$

будет притягивающим для системы (1) *с областью притяжения* $K_2(\Delta_2)$. *Здесь области* $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot), P$ *строятся в соответствии с формулами* (5), (13), (11).

Доказательство. Согласно теореме 1 любое решение системы (1), начинающееся в области $K_2(\Delta_2)$, в некоторый момент времени окажется в области $K_2(\Delta_1)$ и более из нее не выйдет.

Построим на интервале $[0, +\infty)$ кусочно-постоянную функцию $\widetilde{\eta}(t)$ такую, что $\widetilde{\eta}(t) = -\widetilde{\alpha}(\Delta_1)$, если $\sigma(t) \in \widetilde{S}^-$, и $\widetilde{\eta}(t) = \widetilde{\beta}(\Delta_1)$, если $\sigma(t) \in \widetilde{S}^+$. Зададим некоторые $t_0 \ge 0$ и $\mathbf{x}_0 \in K_2(\Delta_1)$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), выходящее из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0. Исследуем ситуацию, когда $\mathbf{x}_0 \notin P$.

В соответствии с дифференциальными неравенствами (12), (14) пока решение $\mathbf{x}(t)$ остается в области $K_2(\Delta_1) \setminus P$ будет справедлива оценка

$$\widetilde{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \widetilde{V}(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^{t} \widetilde{\eta}(t)\, dt. \tag{20}$$

В силу неравенства (18) получаем $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \widetilde{\eta}(t)\, dt \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Значит, в какой-то момент времени решение $\mathbf{x}(t)$ окажется в области P. В то же время, учитывая оценку (20), любое решение системы, начинающееся в области P, не выйдет за пределы области G. $\square$

Замечание 8. Отметим, что условия перманентности в настоящей работе удается получить лишь при совместном использовании двух функций Ляпунова $\hat{V}(\mathbf{x})$ и $\widetilde{V}(\mathbf{x})$. Здесь используется "склейка" этих функций. Функция $\hat{V}(\mathbf{x})$ пригодна лишь для анализа предельной ограниченности решений системы (1). А с помощью только одной функции $\widetilde{V}(\mathbf{x})$ без каких-то дополнительных более обременительных предположений не удастся гарантировать ни перманентности, ни даже просто предельной ограниченности решений. Данная функция будет годиться только для очень локального анализа системы. В частности, в настоящей статье даже не предполагается выполнение условий $\displaystyle\int_{\widetilde{x}_i}^{x_i} \frac{d\tau}{g_i(\tau)} \to +\infty$ при $x_i \to +\infty$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. функция $\widetilde{V}(\mathbf{x})$ может не быть бесконечно большой при $\|\mathbf{x}\| \to \infty$.

Замечание 9. Полученные в статье условия предельной ограниченности решений и перманентности системы зависят от выбора параметров H_1, γ, Δ_1 и Δ_2. Как уже отмечалось в замечании 1, для нахождения наилучших условий выбор указанных параметров может быть оптимизирован, например, с использованием сеточных методов.

Пример. Рассмотрим семейство (2), состоящее из трех подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left(2 - 3\ln(1 + x_1^4) + \ln(1 + x_2^4)\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left(1 + \ln(1 + x_1^4) - 2\ln(1 + x_2^4)\right); \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left(-1 - 2\ln(1 + x_1^4) + \ln(1 + x_2^4)\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left(-1 - 3\ln(1 + x_1^4) - \ln(1 + x_2^4)\right); \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left(-1 - \ln(1 + x_1^4) + 2\ln(1 + x_2^4)\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left(1 + \ln(1 + x_1^4) - \ln(1 + x_2^4)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, здесь $n = 2$, $N = 3$, $g_i(x_i) = x_i$, $f_i(x_i) = \ln(1 + x_i^4)$, $i = 1, 2$.

Будем считать, что подсистема (21) соответствует первому режиму функционирования гибридной системы, подсистема (22) — второму, подсистема (23) — третьему. Нетрудно заметить, что предположение 1 будет выполнено для $\hat{S}^- = \{1, 2\}$ (можно положить $\hat{\theta} = (1, 1)^T$). Предположение 3 будет выполнено для $\widetilde{S}^- = \{1\}$ (можно положить $\widetilde{\theta} = (1, 1)^T$). Предположения 2 и 4 также выполнены. В самом деле, подсистема (21) имеет в K_0^+ положение равновесия $\left(\sqrt[4]{e - 1}, \sqrt[4]{e - 1}\right)^T$ и, соответственно, его можно принять в качестве точки $\widetilde{x}$ из предположения 4 (см. замечание 3).

Согласно введенным ранее обозначениям можно положить $\hat{H} = 3.9$. Для любого $H_1 \geq \hat{H}$ в области $K_1(H_1)$ будут справедливы дифференциальные неравенства:

$$D^+\hat{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \leq -1.9\hat{V}(\mathbf{x}), \quad s \in \hat{S}^-,$$

$$D^+\hat{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \le 5\hat{V}(\mathbf{x}), \quad s \in \hat{S}^+,$$

т. е. здесь $\gamma = 0$, причем коэффициенты $\hat{\alpha}(H_1, 0) = 1.9$ и $\hat{\beta}(H_1, 0) = 5$ не зависят от выбора H_1. Значит (см. замечание 7), можно взять $H_1 = \Delta_2 = +\infty$ и установить достаточные условия равномерной диссипативности исследуемой гибридной системы.

Имеем $A(\hat{H}) = 5.4$, $B(A(\hat{H})) = 5.5$. Зададим, например, $\Delta_1 = 10$. Тогда $B^{(-1)}(\Delta_1) = 7.8$. Пусть выполнено предположение 5. Выписывая соотношения (16), (17), находим согласно теореме 1, что если $\hat{L}_1 > 2.6\hat{L}_2$ и $\hat{L}_2 \le 0.07$, то множество $K_2(10)$ будет притягивающим для рассматриваемой гибридной системы, причем областью притяжения этого множества будет являться весь ортант K_0^+.

Зададим теперь компактное множество

$$P = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T : \ 1 \le x_i \le 10, \ i = 1, 2\} \subset K_0^+.$$

В области $K_2(10) \setminus P$ придем к дифференциальным неравенствам

$$D^+\widetilde{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \le -0.9, \quad s \in \widetilde{S}^-,$$

$$D^+\widetilde{V}(\mathbf{x})\big|_{(s)} \le 10, \quad s \in \widetilde{S}^+.$$

Пусть выполнено предположение 6. Тогда если в дополнение к найденным ранее условиям еще выполняется и соотношение $\widetilde{L}_1 > 11.2\widetilde{L}_2$, то, как следует из теоремы 2, система (1) будет перманентной. Вводя некоторое ограничение на $\widetilde{L}_2$, можно найти оценку притягивающего множества по формуле (19). Например, полагая $\widetilde{L}_2 \le 0.1$, получим

$$G = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in K_0^+ : \ \left|\ln \frac{x_1}{\widetilde{x}_1}\right| + \left|\ln \frac{x_2}{\widetilde{x}_2}\right| \le 4.7\right\} \cap K_2(10).$$

Предположим, что подсистемы (21)–(23) активируются последовательно друг за другом. Пусть $L_1^{(s)}$, $L_2^{(s)}$, $s = 1, 2, 3,$ — нижнее и верхнее ограничения на длины промежутков активности подсистем (21), (22) и (23) соответственно. Тогда с учетом вышеизложенного получаем, что при выполнении условий

$$L_1^{(1)} + L_1^{(2)} > 2.6L_2^{(3)}, \quad L_2^{(3)} \le 0.07$$

заданная гибридная система будет равномерно диссипативной в K_0^+ с притягивающим множеством $K_2(10)$. Если, кроме того, выполнены условия

$$L_1^{(1)} > 11.2(L_2^{(2)} + L_2^{(3)}), \quad L_2^{(2)} + L_2^{(3)} \le 0.1,$$

то в качестве глобально притягивающего множества будет выступать область G.

Заключение

Установленные в работе достаточные условия предельной ограниченности решений и перманентности системы базировались на идее дробления фазового пространства и использовании своей функции Ляпунова в каждой из полученных частей. Такой подход позволяет более тонко учитывать нелинейные особенности системы при глобальном анализе. В настоящей статье задействовались две функции Ляпунова разной структуры. Задача одной из этих функций заключалась в том, чтобы загнать решения системы в ограниченную окрестность начала координат (обеспечить предельную ограниченность решений). Задача другой функции была в том, чтобы отдалить решения от границ неотрицательного ортанта (обеспечить перманентность системы).

Литература

[1] Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).

[2] Kazkurewicz E., Bhaya A. *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation* (Birkhauser, Boston, 1999).

[3] Пых Ю. А. *Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики* (Наука, М., 1983).

[4] Lu Z., Wang W. *Permanence and global attractivity for Lotka–Volterra difference systems*, J. Math. Biol. **39**, 269–282 (1999).

[5] Zhao J. D., Jiang J. F. *Average conditions for permanence and extinction in nonautonomous Lotka–Volterra system*, J. Math. Anal. Appl. **229**, 663–675 (2004).

[6] Bao J., Mao X., Yin G., Yuan C. *Competitive Lotka–Volterra population dynamics with jumps*, Nonlinear Anal. **74** (17), 6601–6616 (2011).

[7] Hu H., Wang K., Wu D. *Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka–Volterra competitive system with impulses and infinite delays*, J. Math. Anal. Appl. **377** (1), 145–160 (2011).

[8] Chakraborty K., Haldar S., Kar T.K. *Global stability and bifurcation analysis of a delay induced prey – predator system with stage structure*, Nonlinear Dyn. **73** (3), 1307–1325 (2013).

[9] Li L., Wang Zj. *Global stability of periodic solutions for a discrete predator – prey system with functional response*, Nonlinear Dyn. **72** (3), 507–516 (2013).

[10] Capone F., De Luca R., Rionero S. *On the stability of non-autonomous perturbed Lotka–Volterra models*, Appl. Math. Comput. **219** (12), 6868–6881 (2013).

[11] Игнатьев А. О. *О глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия системы "хищник – жертва" в изменяющейся окружающей среде*, Изв. вузов. Матем. (4), 8–14 (2017).

[12] Liberzon D. *Switching in Systems and Control* (Birkhäuser, Boston, MA, 2003).

[13] Zu L., Jiang D., O'Regan D. *Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka–Volterra predator – prey model with regime switching*, Comm. Nonlinear Sci. and Numerical Simulation **29** (1–3), 1–11 (2015).

[14] Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V. *Ultimate Boundedness Conditions for a Hybrid Model of Population Dynamics*, in: *Proc. of* 21st *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation* (*MED*'2013), 622–627 (Platanias–Chania, Crite–Greece, 2013).

[15] Platonov A. V. *On the global asymptotic stability and ultimate boundedness for a class of nonlinear switched systems*, Nonlinear Dyn. **92** (4), 1555–1565 (2018).

[16] Platonov A. V. *Analysis of the Dynamical Behavior of Solutions for a Class of Hybrid Generalized Lotka–Volterra Models*, Comm. Nonlinear Sci. and Numerical Simulation **119**, Art. Number 107068 (2023).

[17] Wang S., Wu W., Lu J., She Zh. *Inner-approximating domains of attraction for discrete-time switched systems via multi-step multiple Lyapunov-like functions*, Nonlinear Anal. Hybrid Systems **40**, Art. Number 100993 (2021).

[18] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения,* пер. с англ. (Мир, М., 1970).

[19] Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V., Zang L., *Stability analysis for a class of switched nonlinear systems*, Automatica **47**, 2286–2291 (2011).

[20] Liu D., Michel A. N. *Dynamical Systems with Saturation Nonlinearities: analysis and design* (Springer–Verlag, London, 1994).

Алексей Викторович Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет,

Университетская наб., д. 7–9, г. Санкт-Петербург, 199034, Россия,

e-mail: a.platonov@spbu.ru

A. V. Platonov

Conditions for ultimate boundedness of solutions and permanence for a hybrid Lotka–Volterra system

Abstract. In the paper, a generalized Lotka–Volterra – type system with switching is considered. The conditions for the ultimate boundedness of solutions and the permanence of the system are studied. With the aid of the direct Lyapunov method, the requirements for the switching law are established to guarantee the necessary dynamics of the system. An attractive compact invariant set is constructed in the phase space of the system, and a given region of attraction for this set is provided. A distinctive feature of the work is the use of a combination of two different Lyapunov functions, each of which plays its own special role in solving the problem.

Keywords: generalized Lotka–Volterra system, switching, ultimate boundedness of solutions, permanence.

Alexey Viktorovich Platonov

Saint Petersburg State University,
7–9 Universitetskaya Nab., Saint Petersburg, 199034 Russia,

`e-mail:` a.platonov@spbu.ru