УДК 539.182 Вестник СПбГУ. Сер. 4. Т. 3 (61). 2016. Вып. 1

А. В. Головин[1], *В. М. Лагодинский*[2]

ЗАДАЧА О ГЛУБОКОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67

Определение квадратного корня из дифференциального оператора, приводящее к локальному оператору, использовано для решения задачи о глубокой потенциальной яме в релятивистской квантовой механике. Получено уравнение, основанное на выражении для энергии частицы через импульс. Поставлена задача и получены аналитические решения для всех возможных случаев изменения значений спектрального параметра ε (ε < 0, ε $\in (0, m)$ и ε $> m$) для частицы в одномерном пространстве с потенциалом, имеющим форму прямоугольной ямы. Показано, что система собственных функций дискретного и непрерывного спектра этой задачи полна в пространстве H непрерывных функций. Проанализированы свойства полученных решений. Показано, что, как и в нерелятивисткой теории, сумма коэффициентов отражения R и прохождения D равна единице. Библиогр. 18 назв.

Ключевые слова: релятивистская квантовая механика, дифференциальный оператор, потенциальная яма.

A. V. Golovin[1], *V. M. Lagodinski*[2]

DEEP POTENTIAL HOLE PROBLEM IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Saint-Petersburg State university of aerospace instrumentation, 67, ul. Bol'shaya Morskaya, 190000, St. Petersburg, Russian Federation

The definition presented earlier of a square root from the differential operator leading to the local operator is used for the solution of the deep potential hole problem in relativistic quantum mechanics. The equation based on expression for the energy of a particle through an impulse is received. The problem is set and analytical solutions for all possible values of spectral parameter ε (ε < 0, ε $\in (0, m)$ and ε $> m$) for a particle in one-dimensional space with a potential having a form of a rectangular hole are received. It is shown that the system of eigenfunctions of the discrete and continuous spectrum of this problem is full in the space H of continuous functions. The properties of the received solutions are analyzed. It is shown that, as in non-relativistic theory, the sum of the coefficients of reflection R and transmission D is equal to one. Refs 18.

Keywords: relativistic quantum mechanics, differential operator, potential hole.

Введение. Как известно [1], применение уравнения Клейна—Гордона—Фока (УКГФ) к задаче о состояниях частицы в пространстве с глубокой потенциальной ямой связано с существенными трудностями. Строго говоря, эти трудности возникают и в отсутствие потенциальных ям. Действительно, из этого уравнения следует, что энергия свободной частицы может быть отрицательной, как угодно большой по абсолютной величине; энергетический спектр свободной частицы состоит из двух континуумов, верхнего и нижнего, и ничто не мешает, казалось бы, частице из верхнего континуума «провалиться» в нижний и «падать» бесконечно, излучая бесконечную энергию. Однако, судя по всему, ничего подобного не происходит. Если нигде в пространстве

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

нет потенциальных ям глубиной, вдвое превышающей энергию покоя частицы, состояния нижнего континуума можно игнорировать, но если такие ямы есть, одно и то же значение энергии в одних областях пространства принадлежит нижнему, а в других — верхнему континууму. И это должно приводить к рождению частиц из вакуума.

Известны и другие трудности, которыми сопровождается применение УКГФ (комплексные значения энергии водородоподобного атома с большим зарядом ядра [2], парадокс Клейна [3] и другие). В связи с этим появилось убеждение, что релятивистская квантовая теория должна изначально строиться как теория многих частиц или как теория с бесконечным числом степеней свободы, т. е. как квантовая теория поля. Но квантовая теория поля приводит к расходимостям. Можно, однако, понять, что все трудности, к которым приводит УКГФ, связаны с тем, что, в отличие от нерелятивистского уравнения Шрёдингера, это уравнение основано не на выражении энергии частицы через импульс

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \tag{1}$$

(используется система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ равны единице), а на выражении квадрата энергии через импульс

$$\varepsilon^2 = m^2 + \mathbf{p}^2. \tag{2}$$

Причина такого выбора состоит в том, что если стандартную замену

$$\varepsilon \to i\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \mathbf{p} \to -i\nabla$$

произвести в равенстве (1), то получится не вполне обычное уравнение

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\Psi. \tag{3}$$

Это уравнение приводят многие авторы [4, 5], но, как правило, только для того, чтобы объявить его непригодным и перейти к УКГФ. Выдвигаются два аргумента: а) уравнение несимметрично относительно координат и времени; б) оператор, имеющий вид квадратного корня из дифференциального оператора, нелокален. Однако симметричность относительно координат и времени отнюдь не обязательна для релятивистской инвариантности уравнения: выражение для интервала в теории относительности $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ тоже несимметрично относительно пространства и времени. Что касается нелокальности, необходимо определить это понятие: локальным называется линейный оператор, который любой функции, равной нулю на некоторой области, сопоставляет функцию, равную нулю на той же области [6].

Убеждение, что любой дифференциальный оператор бесконечного порядка нелокален, основано на определении функции оператора, сформулированном Дж. фон Нейманом [7]: функции комплексного переменного $f(z)$ и самосопряжённому оператору A, имеющему собственные значения a и соответствующие собственные функции φ_a, оно сопоставляет самосопряжённый оператор $f(A)$, имеющий те же собственные функции φ_a, которым соответствуют собственные значения $f(a)$. Такое определение позволяет, исходя из соотношения

$$-i\nabla\exp(i\mathbf{pr}) = \mathbf{p}\exp(i\mathbf{pr}),\ \forall\mathbf{p}\in\mathbb{R},\ \forall\mathbf{r}\in\mathbb{R},$$

получить результат действия на ту же функцию $\exp(i\mathbf{pr})$ оператора в правой части уравнения (3):

$$\sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\exp(i\mathbf{pr}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}\,\exp(i\mathbf{pr}),\ \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R},$$

а затем, с помощью трёхмерного преобразования Фурье [8]

$$\varphi(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{pr})\, d\mathbf{r}$$

— результат действия этого оператора на функцию $u(\mathbf{r})$:

$$\sqrt{m^2 - \nabla^2}\, u(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}\, \varphi(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{pr})\, d\mathbf{p},\ \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Конечно, этот оператор (такие операторы называются псевдодифференциальными) нелокален, поскольку его определение включает интегрирование по координатам. Тем не менее он используется в ряде работ [8–10], где уравнение (3) называют бесспиновым уравнением Солпетера, но, по-видимому, его действительно нельзя считать основой релятивистской квантовой теории. В частности, невозможно использовать это определение к задачам со ступенчатым потенциалом — оно не даёт возможности ставить граничные условия в точках скачков потенциала. Можно, однако, отметить, что любой самосопряжённый оператор нелокален: даже самосопряжённый дифференциальный оператор второго порядка не определён на функции, равной нулю на $P \subset \mathbb{R}^3$, если она не принадлежит гильбертову пространству.

Определение, предложенное Дж. фон Нейманом, — это просто обобщение определения функции матрицы [11]. Оно не учитывает специфики дифференциальных операторов. Известно [7], что оператор id/dx не может быть определён как самосопряжённый на промежутке $[0, \infty)$, а оператор $-d^2/dx^2$, который, казалось бы, является квадратом предыдущего оператора, может быть определён как самосопряжённый на этом промежутке.

Возникает вопрос: нельзя ли определить локальный оператор, двукратное применение которого к функции $u(\mathbf{r})$, независимо от принадлежности её гильбертову пространству, эквивалентно применению к ней оператора $(m^2 - \nabla^2)$? Положительный ответ на этот вопрос и соответствующее определение получены одним из соавторов настоящей работы [12]. Уравнение (3) при таком определении естественно называть свободным релятивистским уравнением Шрёдингера (РУШ). В настоящей работе одномерное РУШ используется для решения задачи о состояниях бесспиновой частицы в пространстве с прямоугольной ямой произвольной «глубины».

Квадратный корень из дифференциального оператора. Заметим, что дифференциальный оператор, имеющий вид полинома от оператора дифференцирования, в линейном дифференциальном уравнении локален, но не является самосопряжённым, однако он вполне определён (на функциях, достаточное число раз дифференцируемых). Самосопряжённой может быть граничная задача для такого уравнения, заданная с помощью постановки некоторых граничных условий, причём разные граничные условия для одного и того же дифференциального уравнения приводят к разным самосопряжённым граничным задачам. Спектры таких задач и рассматриваются как спектры самосопряжённых операторов, а их решения — как собственные функции. Самосопряжённый оператор — это не то, чем «оперируют» в процессе решения задачи, это — результат её решения. Поэтому нет смысла определять самосопряжённый оператор. Надо определить неполиномиальную «функцию» локального дифференциального оператора безотносительно к каким-либо граничным условиям, как «ряд Тейлора по степеням дифференциального оператора конечного порядка».

Пусть аналитическая функция $f(z)$ (символ) голоморфна в некоторой окрестности нуля, имеет точки разветвления, каждая из которых соединена разрезом с бесконечно удаленной точкой, и продолжения разрезов за точки разветвления пересекаются в начале координат, D — линейный локальный дифференциальный оператор (обыкновенный или в частных производных), а $u(x)$ — функция такая, что в области Q определены все её образы $(D^n u)(x)$, причём множество предельных точек последовательности

$$\{\gamma_n(x_0)\} = \left\{|(D^n u)(x_0)|^{1/n} \exp\left(i\frac{\varphi_n}{n}\right)\right\},$$

где $\varphi_n = \arg[(D^n u)(x_0)]$, ограничено и не пересекается с множеством точек разрезов функции $f(z)$ при всех $x_0 \in Q$. Тогда функция $\big(f(D)u\big)(x)$ определена на Q аналитическим продолжением функции

$$\big(f(\alpha D)u\big)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, \alpha^n (D^n u)(x),\ \forall x \in Q$$

по вещественному параметру α от 0 до 1:

$$\big(f(D)u\big)(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha_{p-1})^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{p-1}-\alpha_{p-2})^k}{k!} \ldots \\ \ldots \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^l}{l!} f^{(i+k+\ldots+l)}(0)(D^{i+k+\ldots+l}u)(x_0), \quad (4)$$

где $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p = 1$ (α_n, $n = 1, 2, \ldots, p-1$ выбираются так, что все ряды сходятся абсолютно, и это возможно для таких функций $u(x)$).

Определённый таким образом оператор удовлетворяет приведённому выше определению. Если

$$D = -i\nabla,\ f(z) = \sqrt{m^2 - z^2},\ \Psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{pr}),\ \forall \mathbf{r} \in P \subset \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

$f(0) = m > 0$, разрезы по промежуткам $(-\infty, -m]$ и $[m, \infty)$, то

$$\big(f(D)\Psi\big)(\mathbf{r}) = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}\,\Psi(\mathbf{r}),\ \forall \mathbf{r} \in P. \quad (6)$$

Определим также оператор $g(D)$ с символом $g(z) = (m^2 - z^2)^{-1/2}$, заменив в (4) производные $f^{(i+k+\ldots+l)}$ на производные $g^{(i+k+\ldots+l)}$. Подчеркнём, что функция $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \equiv \big(g(D)\Psi\big)(\mathbf{r})$ определяется однозначно по функции $\Psi(\mathbf{r})$. Эта функция есть такое решение уравнения

$$\sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\Phi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}),$$

которое обращается в нуль при $\Psi(\mathbf{r}) \equiv 0$. Нетрудно доказать формулу

$$V(\nabla) = i[\sqrt{m^2 - \nabla^2}\mathbf{r} - \mathbf{r}\sqrt{m^2 - \nabla^2}] = -i\frac{\nabla}{\sqrt{m^2 - \nabla^2}}. \quad (7)$$

Очевидно, это формула для оператора скорости частицы — она полностью соответствует релятивистскому выражению для скорости частицы. Таким образом, уравнение

(3), в отличие от УКГФ и уравнения Дирака (УД), приводит к правильному выражению для оператора скорости.

Определение функции оператора с помощью ряда Тейлора по степеням дифференциального оператора приводит к тому, что преобразование $f(z) \to f(D)$ при любом дифференциальном операторе D сумме символов $f_1(z) + f_2(z)$ ставит в соответствие сумму функций оператора $f_1(D) + f_2(D)$, а произведению символов $f_1(z)f_2(z)$ — последовательное действие этих операторов $f_1(D)f_2(D)$ в произвольном порядке. (Это означает, что оно является изоморфизмом колец, кольца коммутативные с единицей.) В частности, как легко проверить, справедлива формула

$$\sqrt{m^2 - \nabla^2} = (m^2 - \nabla^2)(m^2 - \nabla^2)^{-1/2}. \tag{8}$$

Используя формулу (8), можно показать, что если функция $\Psi(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (3), справедливо уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j},$$

где

$$\rho(t, \mathbf{r}) = |\Psi(t, \mathbf{r})|^2 + m^2 \big|\big(g(\nabla)\Psi\big)(t, \mathbf{r})\big|^2 + \big|\big(V(\nabla)\Psi\big)(t, \mathbf{r})\big|^2, \tag{9}$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \Psi^*(t, \mathbf{r})\big(V(\nabla)\Psi\big)(t, \mathbf{r}) - \Psi(t, \mathbf{r})\big(V(\nabla)\Psi^*\big)(t, \mathbf{r})]. \tag{10}$$

Очевидно, функция (9) существенно положительна, а функция (10) включает оператор скорости, что вполне естественно для плотности потока.

Итак, уравнение (3) гораздо ближе к нерелятивистскому уравнению Шрёдингера, чем УКГФ. Можно предположить, что причина трудностей релятивистской квантовой механики, основанной на УКГФ и УД, состоит не в сложном устройстве вакуума, требующем (якобы) отказа от построения релятивистской квантовой механики по аналогии с нерелятивистской, а в стремлении к математической простоте. Вероятно, есть смысл в попытке построения релятивистской квантовой механики на основе уравнения (3), которое мы называем не уравнением Солпетера, а релятивистским уравнением Шрёдингера, потому что теперь квадратный корень из дифференциального оператора определяется в соответствии с выражением (4). В работах [13–16] нами было показано, что при использовании РУШ в задачах об S-состояниях водородоподобного иона, отражении частицы от скачка потенциала и столкновении частицы с зеркалом конечной массы не возникает трудностей, характерных для общепринятой теории, а решения вполне правдоподобны. В теории, основанной на РУШ, возможно использование дельта-потенциала [16] (УКГФ этого не допускает, поскольку включает квадрат потенциала, а квадрат дельта-функции не определён).

В настоящей работе РУШ используется для решения задачи о состояниях бесспиновой частицы в одномерном пространстве с потенциалами, имеющими вид прямоугольной потенциальной ямы.

Стационарное одномерное РУШ с постоянным потенциалом. Легко обобщить уравнение (3) на случай наличия потенциала (потенциальной энергии) $U(\mathbf{r})$:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} - U(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\,\Psi(\mathbf{r}). \tag{11}$$

Если потенциал $U(\mathbf{r})$ не зависит от y и z, зависимости от всех переменных разделяются. Используя подстановку

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\varepsilon, x)\exp(-i\varepsilon t),$$

получаем стационарное одномерное РУШ с потенциалом $U(x)$:

$$[\varepsilon - U(x)]\psi(\varepsilon, x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi(\varepsilon, x), \tag{12}$$

где $\nabla_x \equiv d/dx$.

Если $U(x) = U_0$ при всех $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, это уравнение принимает вид

$$(\varepsilon - U_0)\psi(\varepsilon, x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi(\varepsilon, x),\ \forall x \in (a, b). \tag{13}$$

Из определения оператора $\sqrt{m^2 - \nabla_x^2}$ следует, что если $\varepsilon < U_0$, уравнению (13) удовлетворяет лишь функция $\psi(\varepsilon, x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Если $0 < \varepsilon - U_0 < m$, решение уравнения (12) имеет вид

$$\psi(\varepsilon, x) = A\exp(\kappa x) + B\exp(-\kappa x),\ \forall x \in (a, b),$$

где A, $B \in \mathbb{C}$, $\kappa_k \in \mathbb{R}$:

$$\kappa = \sqrt{m^2 - (\varepsilon - U_0)^2}.$$

Если же $\varepsilon - U_0 > m$,

$$\psi(\varepsilon, x) = A\exp(ipx) + B\exp(-ipx),\ \forall x \in (a, b),$$

где

$$p = \sqrt{(\varepsilon - U_0)^2 - m^2} \in \mathbb{R}.$$

Для того чтобы определить коэффициенты A, $B \in \mathbb{C}$, необходимо поставить граничные условия. В работе [12] было показано, что аналогом вронскиана дифференциального уравнения второго порядка в теории уравнения (13) является функция

$$W[x, \psi_1, \psi_2] = \psi_1(x)\big(V(\nabla_x)\psi_2\big)(x) - \psi_2(x)\big(V(\nabla_x)\psi_1\big)(x) \tag{14}$$

и что, если поставлены граничные условия, при которых эта функция принимает одинаковые значения в краевых точках, соответствующая краевая задача является самосопряжённой в смысле скалярного произведения:

$$(\psi_1, \psi_2)_a^b = \int_a^b \big[\psi_1^*(x)\psi_2(x) + m^2\big(g(\nabla_x)\psi_1^*\big)(x)\big(g(\nabla_x)\psi_2\big)(x) + \\ + \big(V^*(\nabla_x)\psi_1^*\big)(x)\big(V(\nabla_x)\psi_2\big)(x)\big]\,dx. \tag{15}$$

Соответствующая норма

$$\|\psi\| = \big[(\psi, \psi)_a^b\big]^{1/2}. \tag{16}$$

Определение локального оператора $\sqrt{m^2 - \nabla_x^2}$ порождает бесконечное множество самосопряжённых граничных задач, каждая из которых имеет свой спектр и свои собственные функции. Каждой из них можно сопоставить самосопряжённый (как это доказано в работе [12]) оператор в соответствующем гильбертовом пространстве. Определение Дж. фон Неймана [7] приводит непосредственно к самосопряжённому оператору, но только к такому, который соответствует единственной граничной задаче — при $a = -\infty$, $b = \infty$. Применение этого определения, например, к задаче на промежутке $(0, \infty)$, вообще невозможно, поскольку наш оператор должен быть функцией оператора $-i\nabla_x$, а последний не может быть определён на функциях на этом промежутке как самосопряжённый [7].

Частица в пространстве с прямоугольной потенциальной ямой.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$(\varepsilon - U(x))\psi_\varepsilon(x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi_\varepsilon(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

где функция $U(x)$ имеет вид

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & \forall x \in (-a, a) \\ 0, & x \notin (-a, a). \end{cases} \tag{18}$$

Положим для общности $U_0 > m$. Уравнение (17) с таким потенциалом эквивалентно паре уравнений на промежутках, где $|x| < a$ и $|x| > a$:

$$[\varepsilon + U_0]\psi_\varepsilon(x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi_\varepsilon(x), \qquad |x| < a, \tag{19}$$

$$\varepsilon\psi_\varepsilon(x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi_\varepsilon(x), \qquad |x| > a. \tag{20}$$

Решения должны быть ограниченными и непрерывными. Поставим граничные условия, приводящие к вещественному спектру. Они зависят от спектрального параметра ε. Так как при $\varepsilon < 0$ уравнение (20) имеет только тривиальное решение, граничные условия в точках $x = \pm a$ при $\varepsilon < 0$ имеют вид

$$\psi_\varepsilon(a) = \psi_\varepsilon(-a) = 0. \tag{21}$$

При $\varepsilon > 0$ уравнение (20) имеет нетривиальные решения, поэтому для этого диапазона энергий потребуем не только непрерывности решения, но и непрерывности функции $(V\psi_\varepsilon)(x)$.

Граничная задача поставлена. Задача симметрична относительно преобразования $x \to -x$, поэтому существуют её чётные и нечётные решения.

Спектр и решения при $\boldsymbol{\varepsilon < 0}$. Уравнение (20) имеет только тривиальное решение. При $\varepsilon < -U_0$ только тривиальное решение имеет и уравнение (19). Уже это обеспечивает ограниченность спектра снизу. При $-U_0\varepsilon < 0$ уравнение (19) имеет нетривиальные решения, но ограниченное и непрерывное решение — только тривиальное. При $-U_0 + m\varepsilon < 0$ чётное $\psi_\varepsilon^0(x)$ и нечётное $\psi_\varepsilon^1(x)$ решения уравнения (19) имеют соответственно вид

$$\psi_\varepsilon^0(x) = A_0 \cos px,\ \psi_\varepsilon^1(x) = A_1 \sin px, \tag{22}$$

где

$$p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}, \tag{23}$$

$A_0, A_1 \in \mathbb{C}$.

Используя (23) и условие (21), получим собственные значения для чётных ε^0 и для нечётных ε^1 решений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^0 &= \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4a^2}} - U_0,\ n = 1, 2, \ldots, N_0, \\ \varepsilon_n^1 &= \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} - U_0,\ n = 1, 2, \ldots, N_1, \end{aligned} \tag{24}$$

где N_0 и N_1 — наибольшие значения n, при которых ε_n^0 и ε_n^1 не больше 0. Соответствующие собственные функции:

$$\psi_{\varepsilon_n}^0(x) = A_0 \cos \frac{\pi(2n+1)}{2a}\,x,\ \psi_\varepsilon^1(x) = A_1 \sin \frac{\pi n}{a}\,x. \tag{25}$$

Чтобы эти функции были нормированы в смысле нормы (16), выберем значения коэффициентов: $A_0 = A_1 = 1/2$.

Спектр и решения при $\boldsymbol{\varepsilon \in (0, m)}$. Решения уравнения (19) сохраняют свой вид, но теперь и уравнение (20) имеет нетривиальные решения, чётные и нечётные. Наложив условие ограниченности решения, получаем выражения

$$\psi^0_\varepsilon(x) = \begin{cases} B^0 \exp[\varkappa(a+x)], & \forall x < -a, \\ B^0 \exp[\varkappa(a-x)], & \forall x > a, \end{cases} \quad \psi^1(\varepsilon, x) = \begin{cases} -B^1 \exp[\varkappa(a+x)], & \forall x < -a, \\ B^1 \exp[\varkappa(a-x)], & \forall x > a. \end{cases} \tag{26}$$

Используя условия непрерывности решения и функции $\big(V(\nabla_x)\psi_\varepsilon\big)(x)$, получаем системы для коэффициентов

$$\begin{cases} A^0 \cos qa = B^0, \\ \dfrac{q}{\sqrt{m^2+q^2}} A^0 \sin qa = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{m^2-\varkappa^2}} B^0; \end{cases} \quad \begin{cases} A^1 \sin qa = B^1, \\ \dfrac{q}{\sqrt{m^2+q^2}} A^1 \cos qa = -\dfrac{\varkappa}{\sqrt{m^2-\varkappa^2}} B^1. \end{cases}$$

Это однородные системы, и они имеют ненулевые решения, только если их определители равны нулю. Отсюда следуют равенства для чётных и нечётных решений соответственно, представляющие собой уравнения относительно собственных значений энергии

$$\operatorname{tg}(q^0 a) = \frac{\varkappa^0 \sqrt{m^2 + {q^0}^2}}{q^0 \sqrt{m^2 - {\varkappa^0}^2}}, \ \operatorname{tg}(q^1 a) = -\frac{q^1 \sqrt{m^2 - {\varkappa^1}^2}}{\varkappa^1 \sqrt{m^2 + {q^1}^2}}.$$

Нетрудно установить, что на каждом промежутке

$$\left(\sqrt{m^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} - U_0, \sqrt{m^2 + \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2}} - U_0\right) \subset (0, m)$$

существует ровно одно собственное значение ε^0_n, соответствующее чётному решению и ровно одно собственное значение ε^1_n, соответствующее нечётному решению. Эти значения могут быть найдены численно. Они составляют второе подмножество σ_2 дискретного спектра нашей задачи. Решения, соответствующие этому подмножеству, имеют вид

$$\psi^0_{n+N_0}(x) = \begin{cases} A^0_{n+N_0} \cos q^0_{n+N_0} x, & \forall x \in (-a, a), \\ A^0_{n+N_0} \dfrac{\exp[\varkappa^0_{n+N_0}(a - |x|)]}{\cos q^0_{n+N_0} a}, & \forall x \notin (-a, a), \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots, K_0, \tag{27}$$

$$\psi^1_{n+N_1}(x) = \begin{cases} A^1_{n+N_1} \sin q^1_{n+N_1} x, & \forall x \in (-a, a), \\ A^1_{n+N_1} \dfrac{\exp[\varkappa^1_{n+N_1}(a - |x|)]}{\sin q^1_{n+N_1} a}, & \forall x \notin (-a, a), \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots, K_1, \tag{28}$$

где

$$q^i_k = \sqrt{(\varepsilon^i_k + U_0)^2 - m^2}, \ \varkappa^i_k = \sqrt{m^2 - {\varepsilon^i_k}^2}, \ n = N_i + 1, N_i + 2, \ldots, N_i + K_i, \ i = 0, 1,$$

K_i — наибольшее значение n такое, что $\varepsilon^i_{n+N_i} < m$, $i = 0, 1$. Выберем значения коэффициентов $A^0_{n+N_0}$ и $A^1_{n+N_1}$ из условия $\|\psi\|^{\infty}_{-\infty} = 1$:

$$A^0_{n+N_0} = \left[2a + \frac{m^2}{q^0_{n+N_0}\left(m^2 + {q^0_{n+N_0}}^2\right)} \sin 2q^0_{n+N_1} a + \right.$$

$$\left. + \frac{2m^2}{\varkappa^0_{n+N_0}\left(m^2 - {\varkappa^0_{n+N_0}}^2\right) \cos^2 q^0_{n+N_0} a}\right]^{-1/2},$$

$$A^1_{n+N_1} = \left[2a - \frac{m^2}{q^1_{n+N_1}\left(m^2 + {q^1_{n+N_1}}^2\right)} \sin 2q^1_{n+N_1} a + \right.$$

$$\left. + \frac{2m^2}{\varkappa^1_{n+N_1}\left(m^2 - {\varkappa^1_{n+N_1}}^2\right) \sin^2 q^1_{n+N_1} a}\right]^{-1/2}.$$

Спектр и решения при $\boldsymbol{\varepsilon > m}$. Вид решений на промежутке $(-a, a)$ остаётся прежним, а для $x \notin (-a, a)$ теперь справедливы выражения

$$\psi^0_\varepsilon(x) = \begin{cases} B^0 \cos[p(x+a) - \varphi_0], & \forall x < -a, \\ B^0 \cos[p(x-a) + \varphi_0], & \forall x > a, \end{cases}$$
$$\psi^1(\varepsilon, x) = \begin{cases} B^1 \sin[p(x+a) - \varphi_1], & \forall x < -a, \\ B^1 \sin[p(x-a) + \varphi_1], & \forall x > a, \end{cases} \tag{29}$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, B^0, $B^1 \in \mathbb{C}$, φ_0, φ_1 — фазовые сдвиги для чётного и нечётного решений соответственно. Используя условия непрерывности решения и функции $\big(V(\nabla_x)\psi_\varepsilon\big)(x)$, получаем:

$$\begin{cases} A^0 \cos qa = B^0 \cos \varphi_0, \\ \dfrac{q}{\sqrt{m^2+q^2}} A^0 \sin qa = \dfrac{p}{\sqrt{m^2+p^2}} B^0 \sin \varphi_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^1 \sin qa = B^1 \sin \varphi_1, \\ \dfrac{q}{\sqrt{m^2+q^2}} A^1 \cos qa = \dfrac{p}{\sqrt{m^2+p^2}} B^1 \cos \varphi_1. \end{cases}$$

Отсюда следуют выражения для фазовых сдвигов:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{q\sqrt{m^2+p^2}}{p\sqrt{m^2+q^2}} \operatorname{tg} qa\right), \ \varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{p\sqrt{m^2+q^2}}{q\sqrt{m^2+p^2}} \operatorname{tg} qa\right), \tag{30}$$

Таким образом, для каждого значения $\varepsilon > m$ существуют однозначно определённые значения фазовых сдвигов чётного и нечётного решений, а следовательно, и сами эти (нетривиальные) решения, удовлетворяющие граничным условиям непрерывности решения и функции $\big(V(\nabla_x)\psi_\varepsilon\big)(x)$ и условию ограниченности, т. е. каждое значение

$\varepsilon > m$ принадлежит непрерывной части σ_3 спектра нашей задачи и является двукратным. Соответствующие решения имеют вид

$$\psi^0(\varepsilon, x) = \begin{cases} A^0(\varepsilon)\cos\left[\sqrt{(\varepsilon+U_0)^2 - m^2}\, x\right], & \forall x \in (-a, a) \\ A^0(\varepsilon)\dfrac{\cos[p(x-a)+\varphi_0]}{\cos\left[\sqrt{(\varepsilon+U_0)^2 - m^2}\, a\right]}, & \forall x \notin (-a, a), \end{cases} \tag{31}$$

$$\psi^1(\varepsilon, x) = \begin{cases} A^1(\varepsilon)\sin\left[\sqrt{(\varepsilon+U_0)^2 - m^2}\, x\right], & \forall x \in (-a, a) \\ \operatorname{sign}(x) A^1(\varepsilon)\dfrac{\sin[p(|x|-a)+\varphi_1]}{\sin\left[\sqrt{(\varepsilon+U_0)^2 - m^2}\, a\right]}, & \forall x \notin (-a, a), \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \geqslant 0, \\ -1, & \forall x < 0, \end{cases} \quad p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}.$$

Удобно нормировать эти решения на дельта-функцию $\delta(p_1 - p_2)$:

$$A^0(\varepsilon) = (\pi)^{-1/2}\cos\left[\sqrt{(\varepsilon+U_0)^2 - m^2}\, x\right], \; A^1(\varepsilon) = (\pi)^{-1/2}\sin\left[\sqrt{(\varepsilon+U_0)^2 - m^2}\, x\right].$$

Решения, соответствующие различным значениям из $\sigma_2 \cup \sigma_3$, взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения $(\psi_1, \psi_2)_{-\infty}^{\infty}$. Действительно, для этого достаточно, чтобы вронскиан принимал одинаковые значения в концевых точках и был непрерывен. Но он постоянен на каждом из промежутков постоянства потенциала и непрерывен в точках его скачков.

Докажем, что невещественных значений в спектре нет. Действительно, пусть $\psi(x)$ есть решение уравнения (17) с потенциалом (18) и $\varepsilon = \omega$, удовлетворяющее граничным условиям непрерывности решения и функции $\big(V(\nabla_x)\psi_\varepsilon\big)(x)$. Тогда ввиду вещественности и линейности оператора и граничных условий функция комплексно сопряжённая $\psi^*(x)$ есть решение уравнения (17) с потенциалом (18) и $\varepsilon = \omega^*$, удовлетворяющее этим граничным условиям:

$$(\omega - U(x))\psi(x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi(x), \tag{33}$$

$$(\omega^* - U(x))\psi^*(x) = \sqrt{m^2 - \nabla_x^2}\,\psi^*(x). \tag{34}$$

Умножив обе стороны уравнения (33) на $\psi^*(x)$, а обе стороны уравнения (34) на $\psi(x)$, вычтя затем (34) из (33) и проинтегрировав от $-\infty$ до ∞, получим

$$(\omega - \omega^*)\left(\|\psi\|_{-\infty}^{\infty}\right)^2 = 0,$$

откуда следует $\omega = \omega^*$.

Однако решения, соответствующие подмножеству σ_1, не ортогональны решениям, соответствующим подмножеству $\sigma_2 \cup \sigma_3$, они лишь линейно независимы по отношению к ним.

В приложении показано, что система собственных функций дискретного и непрерывного спектров нашей задачи полна в пространстве H непрерывных функций, которые можно представить в виде

$$v(x) = u(x) + \vartheta(a - |x|)\left[\sum_{n=1}^{N_0} C_n^0 \cos q_n^0 x + \sum_{n=1}^{N_1} C_n^1 \sin q_n^1 x\right],$$

где $u(x)$ — функция, непрерывная вместе с функцией $w = \big(V(\nabla_x)u\big)(x)$,

$$\vartheta(\xi) = \begin{cases} 0, & \forall\xi < 0, \\ 1, & \forall\xi > 0. \end{cases}$$

Столкновение бесспиновой частицы с потенциальной ямой. Рассмотрим следующие линейные комбинации решений (31) и (32), соответствующих диапазону $\varepsilon > m$:

$$\psi^+(\varepsilon, x) = e^{i\varphi_0}\psi^0_\varepsilon(x) + ie^{i\varphi_1}\psi^1_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{ipx} + \frac{1}{2}(e^{2i\varphi_0} - e^{2i\varphi_1})e^{-ipx}, & \forall x < -a, \\ \frac{1}{2}(e^{2i\varphi_0} + e^{2i\varphi_1})e^{-ipx}, & \forall x > a. \end{cases} \qquad (35)$$

Очевидно, эти решения, аналогично нерелятивистской теории можно рассматривать как волновые функции, описывающие частицу, налетающую на яму со стороны отрицательных x. Коэффициенты отражения R и прохождения D определяются формулами

$$R = \frac{1}{4}\,|(e^{2i\varphi_0} - e^{2i\varphi_1})|^2 = \sin^2(\varphi_0 - \varphi_1),\ D = \frac{1}{4}\,|(e^{2i\varphi_0} + e^{2i\varphi_1})|^2 = \cos^2(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Таким образом, как и в нерелятивистской теории, справедливо естественное равенство: $R + D = 1$. Казалось бы, ничего странного: отражение и прохождение — события несовместные, и в соответствии с теорией вероятностей их вероятности складываются. Вспомним, однако, что, согласно копенгагенской интерпретации квантовой механики, движение частицы — волновой процесс. А при падении волны на препятствие всегда возникает интерференция отражённой волны с падающей. Почему здесь её нет?

Ответить на этот вопрос пытались авторы книги [17] и объясняли этот факт, используя временно́е уравнение Шрёдингера. Рассматривая падение частицы на потенциальный барьер, они пришли к выводу, что волновой пакет, падающий на барьер, разделяется на два пакета: один проходит за барьер, а другой отражается обратно. Поэтому падающий и отражённый пакеты никогда не совмещаются. Тем самым отсутствие интерференции падающего и отражённого потоков становится вроде бы понятным (хотя можно заметить вычислительную ошибку, допущенную авторами книги [17] и влияющую на результат), но тот факт, что в одно и то же время существуют и отражённый, и прошедший волновые пакеты, никак не комментируется. Иными словами если даже признать убедительным разъяснение авторов, почему падающий и отражённый потоки не интерферируют, остаётся непонятным, находится ли частица одновременно слева и справа от барьера. Это эквивалентно парадоксу шрёдингеровской кошки. По-видимому, наиболее правдоподобно (на самом деле, только это и правдоподобно!), что частица либо пролетает за барьер или яму либо отражается от них, а не и то и другое одновременно, несмотря на то, что её волновая функция отлична от нуля и при $x < -a$, и $x > a$.

Разгадка, очевидно, состоит в том, что движению частицы, согласно квантовой механике, соответствует не вещественная, а комплексная волна! На этом и основано определение потока в квантовой механике. Но тогда, по-видимому, такой вид волновой функции не свидетельствует о том, что движению частицы соответствует реальный волновой процесс. А дифракция на щелях или отверстиях связана с тем, что при их наличии не выполняется закон сохранения импульса, который справедлив только в однородном пространстве.

Заключение. Итак, показано, что релятивистская квантовая механика может быть построена вполне аналогично нерелятивистской квантовой механике, т. е. начиная с описания движения одной частицы, если не избегать определения квадратного корня из дифференциального оператора и использовать такое его определение, которое приводит к локальному оператору. При этом ликвидируются трудности, связанные с «нижним континуумом» энергий, а также комплексными значениями энергии в кулоновском поле. Парадоксально, что эти трудности возникли не из-за «сложного строения вакуума», а из-за стремления физиков к математической простоте.

Конечно, возможности релятивистской квантовой механики, основанной на новом определении квадратного корня из дифференциального оператора, не ограничиваются одночастичными задачами. Простейшая из двухчастичных задач — задача о столкновении частицы с идеальным зеркалом конечной массы — решена в работе [15], где показано, что законы сохранения полных импульса и энергии данной физической системы выполняются точно, без неопределённостей. Готовится к печати и работа о многоканальной двухчастичной реакции. Тем самым намечается новый подход в релятивистской квантовой теории, отличный от квантово-полевого и не приводящий к расходимостям, неизбежным в квантовой теории поля.

Приложение. Покажем, что система решений, соответствующих подмножеству $\sigma_2 \cup \sigma_3$, полна в линейном пространстве H_1, состоящем из функций $u(x)$, определённых и непрерывных вместе с функцией $w(x) = \big(V(\nabla_x)u\big)(x)$ на множестве всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ и имеющих конечную норму $\|u\|_{-\infty}^{\infty}$, т. е. всякая функция $u(x) \in H_1$ может быть представлена в виде

$$u(x) = \sum_{n=N_0+1}^{N_0+K_0} A^0_{n=N_0+1} \psi^0_{n=N_0+1}(x) + \sum_{n=N_1+1}^{N_1+K_1} A^1_n \psi^1_{n=N_1+1}(x) + \\ + \int_0^\infty A^0\left(\sqrt{m^2+p^2}\right) \psi^0\left(\sqrt{m^2+p^2}, x\right) dp + \\ + \int_0^\infty A^1\left(\sqrt{m^2+p^2}\right) \psi^1\left(\sqrt{m^2+p^2}, x\right) dp, \quad (*)$$

где интегралы сходятся абсолютно и равномерно по x. Воспользуемся тем, что, как известно [18], существует система функций $\cos px$, $\sin px$, по которой можно разложить любую функцию $u(x) \in H_1$:

$$u(x) = \int_0^\infty \alpha(p) \cos px \, dp + \int_0^\infty \beta(p) \sin px \, dp,$$

эти интегралы сходятся абсолютно и равномерно. Определим функцию $u_\omega(x)$ $(\omega > 0)$ формулой

$$u_\omega(x) = \int_0^\omega \alpha(p) \cos px \, dp + \int_0^\omega \beta(p) \sin px \, dp.$$

Определим коэффициенты $A^0_n(\omega)$, $A^1_n(\omega)$ и функции $\zeta^0(\omega, p)$ и $\zeta^1(\omega, p)$ из равенства

$$u_\omega(x) = \sum_{n=N_0+1}^{N_0+K_0} A^0_{n=N_0+1}(\omega) \psi^0_{n=N_0+1}(x) + \sum_{n=N_1+1}^{N_1+K_1} A^1_n(\omega) \psi^1_{n=N_1+1}(x) + \\ + \int_0^\omega \zeta^0(\omega, p) \psi^0\left(\sqrt{m^2+p^2}, x\right) dp + \int_0^\omega \zeta^1(\omega, p) \psi^1\left(\sqrt{m^2+p^2}, x\right) dp.$$

Используя ортонормированность системы решений нашей задачи, соответствующих значениям энергии $\varepsilon > 0$, получаем

$$A_n^i(\omega) = (\psi_n^i, u_\omega)_{-\infty}^{\infty},\ n = N_i + 1,\ \ldots,\ N_i + K_i,$$
$$\zeta^i(\omega, p) = \left(\psi^i(\varepsilon(p), x), u_\omega(x)\right)_{-\infty}^{\infty},\ i = 0,\ 1,\ \forall p \geqslant 0,$$

где $\varepsilon(p) = \sqrt{m^2 + p^2}$.

Так как при $\omega \to \infty$ $u_\omega(x)$ стремится к $u(x)$ равномерно по x, то $A_n^i(\omega) \to A_n^i$, $\zeta^i(\omega, p) \to \zeta^i(p)$, $i = 0,\ 1,\ \forall p \geqslant 0$. Поэтому формула $(*)$ действительно справедлива. Отсюда следует, что система собственных функций дискретного и непрерывного решений нашей задачи полна в пространстве H непрерывных функций, которые можно представить в виде

$$v(x) = u(x) + \vartheta(a - |x|) \left[\sum_{n=1}^{N_0} C_n^0 \cos q_n^0 x + \sum_{n=1}^{N_1} C_n^1 \sin q_n^1 x \right],$$

где $u(x) \in H_1$,

$$\vartheta(\xi) = \begin{cases} 0, & \forall \xi < 0, \\ 1, & \forall \xi > 0. \end{cases}$$

Литература

1. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М., 1981.
2. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1. 448 с.
3. *Klein O.* Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativististischen Dynamic von Dirac // Zs. f. Phys. 1929. Bd. 53. S. 157.
4. *Бьёркен Дж., Дрелл С.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика / пер. с англ. М.: Наука, 1978. 294 с.
5. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики / пер. с англ. М.: Наука, 1979, 408 с.
6. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. М., 1984. 360 с.
7. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М., 1964, 394 с.
8. *Дубинский Ю. Н.* Алгебра псевдодифференциальных операторов и её приложение к математической физике // Усп. мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 97.
9. *Gara A., Durand L.* Matrix method for the numerical solution of relativistic wave equation // J. Math. Phys. 1990. Vol. 31. P. 2237.
10. *Durand B., Durand L.* Analitic solution of the relativistic Coulomb problem for spinless Salpeter equation // Phys. Rev. (D). 1983. Vol. 28. P. 396.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1966, 576 с.
12. *Лагодинский В. М.* Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2005. 110 с.
13. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Задача об S-состояниях пионного атома в релятивистской квантовой механике без учёта сильного взаимодействия // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия. 2009. Вып. 2. С. 143–155.
14. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Релятивистское уравнение Шрёдингера со ступенчатым потенциалом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия. 2011. Вып. 2. С. 3–14.
15. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Задача о столкновении бесспиновой частицы с идеальным зеркалом конечной массы в релятивистской квантовой механике // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия. 2012. Вып. 4. С. 3–13.
16. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Модельный дельта-потенциал в релятивистской квантовой механике // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия. 2014. Т. 1 (59), вып. 2. С. 156–165.
17. *Базь А. В., Зельдович Я. Б., Переломов А. И.* Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1971. 544 с.
18. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970. 671 с.

References

1. Akhiezer A. I., Berestetskii V. B. *Kvantovaia elektrodinamika* [*Quantum electrodynamics*]. Moscow, 1981. (In Russian)

2. Itzykson C., Zuber J.-B. *Quantum field theory.* McGraw-Hill, 1980, vol. 1, 448 p. [Russ. ed.: Itsikson K., Ziuber Zh.-B. *Kvantovaia teoriia polia.* Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 1. 448 p.]

3. Klein O Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativististischen Dynamic von Dirac. *Zs. f. Phys.* 1929, vol. 53, p. 157.

4. Bjorken J. D., Drell S. D. *Relativistic quantum fields.* Mcgraw-Hill, 1965, vol. 1, 396 p. [Russ. ed.: B'erken Dzh., Drell S. *Reliativistskaia kvantovaia teoriia.* Moscow, Nauka Publ., 1978, vol. 1, 294 p.]

5. Dirac P. A. M. *The principles of quantum mechanics.* Oxford, Clarendon Press, 1958. [Russ. ed.: Dirak P. A. M. *Printsipy kvantovoi mekhaniki.* Moscow, Nauka Publ., 1979, 408 p.]

6. Trev F. *Vvedenie v teoriiu psevdodifferentsial'nykh operatorov i integral'nykh operatorov Fur'e* [*Introduction to the theory of pseudo-differential operators and Fourier integral operators*]. Moscow, 1984, vol. 1, 360 p. (In Russian)

7. Von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [*Mathematical foundations of quantum mechanics*]. Berlin, Springer Verlag, 1932. [Russ. ed.: fon Neiman I. Matematicheskie osnovy kvantovoi mekhaniki. Moscow, 1964, 394 p.]

8. Dubinskii Iu. N. Algebra psevdodifferentsial'nykh operatorov i ee prilozhenie k matematicheskoi fizike [Algebra of pseudo-differential operators and its application to mathematical physics]. *Usp. mat. nauk.* [*Russian Mathematical Surveys*], 1982, vol. 37, no 5, pp. 97. (In Russian)

9. Gara A., Durand L. Matrix method for the numerical solution of relativistic wave equation. *J. Math. Phys.*, 1990, vol. 31, pp. 2237.

10. Durand B., Durand L. Analitic solution of the relativistic Coulomb problem for spinless Salpeter equation. *Phys. Rev. (D)*, 1983, vol. 28, pp. 396.

11. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [*Theory of matrices*]. Moscow, 1966, 576 p. (In Russian)

12. Lagodinski V. M. *Golomorfnye funktsii differentsial'nykh operatorov i differentsial'nye uravneniia beskonechnogo poriadka* [*Holomorphic functions of differential operators and differential equations of an infinite order. PhD phys. and math. sci. thesis*]. St. Petersburg, 2005. 110 p. (In Russian)

13. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Zadacha ob S-sostoianiiakh pionnogo atoma v reliativistskoi kvantovoi mekhanike bez ucheta sil'nogo vzaimodeistviia [S-states problem in pion atom without strong nuclear forces in relativistic quantum mechanics]. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2009. iss. 2, pp. 143–155. (In Russian)

14. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Reliativistskoe uravnenie Shredingera so stupenchatym potentsialom [Relativistic Shrödinger equation for step potential]. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2011. iss. 2, pp. 3–14. (In Russian)

15. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Zadacha o stolknovenii besspinovoi chastitsy s ideal'nym zerkalom konechnoi massy v reliativistskoi kvantovoi mekhanike [A problem of spin-zero particle collision with a perfect mirror of finite mass]. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2012. iss. 4, pp. 3–13. (In Russian)

16. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Model'nyi del'ta-potentsial v reliativistskoi kvantovoi mekhanike [Model delta-potential in relativistic quantum mechanics]. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2014, vol. 1 (59), iss. 2, pp. 156–165. (In Russian)

17. Baz' A. V., Zel'dovich Ia. B., Perelomov A. I. *Rasseianiia, reaktsii i raspady v nereliativistskoi kvantovoi mekhanike* [*Dispersion, reactions and disintegrations in the nonrelativistic quantum mechanics*]. Moscow, 1971. 544 p. (In Russian)

18. Levitan B. M., Sargsian I. S. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu* [*Introduction to the spectral theory*]. Moscow, 1970. 671 p. (In Russian)

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2015 г.

Контактная информация

Головин Александр Викторович — кандидат физико-математических наук; e-mail: golovin50@mail.ru

Лагодинский Владимир Меерович — кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: lagodinskiy@mail.ru

Golovin Alexander Victorovich — PhD; e-mail: golovin50@mail.ru

Lagodinski Vladimir Meerovich — PhD, Associate Professor; e-mail: lagodinskiy@mail.ru