

УДК 519.837

ББК 22.18

МНОГОШАГОВАЯ МОДЕЛЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА ИГРОКАМИ ДВУХ ТИПОВ *

ДЕНИС В. КУЗЮТИН

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

НАДЕЖДА В. СМИРНОВА

Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

ИГОРЬ Р. ТАНТЛЕВСКИЙ

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: d.kuzyutin@spbu.ru, nvsmirnova@hse.ru, i.tantlevsky@spbu.ru

В работе исследована бесконечношаговая игра использования возобновляемого ресурса игроками двух типов, различающихся коэффициентами дисконтирования будущих выигрышей. С использованием метода динамического программирования построено некооперативное решение – абсолютное равновесие по Нэшу в стационарных позиционных стратегиях, а также кооперативное (Парето-оптимальное) решение для случая полной кооперации всех игроков. Проведен анализ полученных решений на чувствительность по отношению к изменениям параметров модели, в частности, найден диапазон изменения коэффициента естественного возобновления ресурса,

©2024 Д.В. Кузютин, Н.В. Смирнова, И.Р. Тантлевский

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-01221, <https://rscf.ru/project/22-28-01221>, СПбГУ

при котором некооперативное решение ведет к полному истощению ресурса, а кооперативная схема поведения позволяет избежать такого негативного сценария. Приведен численный пример, демонстрирующий полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: многошаговая игра, возобновляемые ресурсы, асимметричные игроки, равновесие по Нэшу, кооперативное решение, анализ на чувствительность.

Поступила в редакцию: 31.10.23 *После доработки:* 25.12.23 *Принята к публикации:* 01.03.24

1. Введение

Теоретико-игровые динамические модели использования общедоступного возобновляемого ресурса, начиная с пионерской статьи [15], активно изучаются специалистами в области динамических игр, экономики и экологии. Отметим лишь некоторые из работ в указанном направлении – [1, 4, 5, 10, 13, 14, 17, 18, 25, 26, 29], а также обзоры [16, 28]. Наиболее распространенной интерпретацией подобного класса моделей является динамическое управление объемами вылова рыбы, осуществляемое несколькими конкурирующими странами в общей территориальной зоне рыболовецкого промысла (так называемые модели «рыбных войн»). Сразу отметим, что разработанные методы, а также полученные результаты применимы и в других областях, например при изучении динамических моделей мировоззренческих / политических дискуссий, где в качестве «меры» общего возобновляемого ресурса может выступать степень доверия или лояльности со стороны целевой аудитории / электората (см., например, [32, 11]).

В статье рассмотрена бесконечношаговая игра $n + m$ игроков двух (асимметричных) типов, мы используем достаточно общие предположения о логарифмической зависимости пошаговых выигрышей игроков от интенсивностей использования ресурса (см. [15, 5, 12, 13, 14, 26]), линейном законе изменения ресурса (см. [3, 29, 9, 12, 13]), а также об использовании игроками позиционных стратегий [15, 4, 9, 3, 29, 12, 14] (точнее – интенсивность использования ресурса на каждом шаге прямо пропорциональна текущему объему ресурса). Единственным аспектом асимметричности игроков разных типов является

ся коэффициент дисконтирования будущих выигрышей (для определенности мы полагаем, что игроки второго типа более «терпеливы»), аналогичный подход рассмотрен в работах [5, 28]. Другие источники асимметричности игроков изучаются в статьях [6, 12, 14, 19, 27, 30]. Используемая в статье постановка задачи наиболее близка к [5] (однако мы предполагаем другой закон изменения запаса ресурса и фокусируем внимание на игроках двух типов), а также к [3] (где исследуется конечношаговая многокритериальная модель с игроками двух типов с использованием концепции решения, основанной на применении арбитражной схемы Нэша).

Для представленной в статье бесконечношаговой игры с игроками двух типов с использованием метода динамического программирования построено некооперативное решение – абсолютное равновесие по Нэшу [21, 31, 9, 2] в стационарных позиционных стратегиях, а также кооперативное решение (рассмотрен случай полной кооперации, когда гранд-коалиция максимизирует сумму полезностей, взвешенную коэффициентами относительной важности отдельных игроков). Проведен анализ полученных решений на чувствительность по отношению к изменениям параметров модели, в частности, найден диапазон изменения коэффициента естественного возобновления ресурса, при котором некооперативное решение ведет к полному истощению ресурса, а кооперативная схема поведения позволяет избежать такого негативного сценария. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы численным примером.

2. Модель. Некооперативное поведение

Рассмотрим бесконечношаговую динамическую игру с $(n + m)$ игроками двух типов, $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков 1 типа, $M = \{1, \dots, m\}$ – множество игроков 2 типа, с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \dots$. На каждом шаге t игроки используют общедоступный возобновляемый ресурс, текущий объем которого $s(t) > 0$, $u_i(t, s(t))$, $i \in N$ и $v_j(t, s(t))$, $j \in M$ – позиционные стратегии (интенсивности использования ресурса) игроков на шаге $t \geq 0$, $(u(\cdot), v(\cdot)) = (u_1(t, s(t)), \dots, u_n(t, s(t)); v_1(t, s(t)), \dots, v_m(t, s(t)))_{t=0}^{\infty}$ – профиль стратегий (ситуация).

Линейная динамика изменения ресурса имеет вид

$$\begin{aligned} s(t+1) &= f(s(t), u(t, s(t)), v(t, s(t))) = \\ &= \alpha \cdot s(t) - \sum_{i=1}^n u_i(t, s(t)) - \sum_{j=1}^m v_j(t, s(t)), \quad s(0) = s_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\alpha > 1$ – коэффициент естественного возобновления ресурса, при условии, что $s(t+1) > 0$.

Используем классический подход (см., например, [15, 5, 12, 13, 14, 26]) к определению целевых функций (функций выигрыша) игроков в подобных моделях:

$$\begin{aligned} H_i(u(\cdot), v(\cdot)) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta_1^\tau \ln(u_i(\tau, s(\tau))), \quad i \in N, \\ H_j(u(\cdot), v(\cdot)) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta_2^\tau \ln(v_j(\tau, s(\tau))), \quad j \in M, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где δ_1 и δ_2 – коэффициенты дисконтирования, используемые всеми игроками первого и второго типа соответственно. Положим, для определенности, что $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$, то есть игроки второго типа – более «терпеливые».

Отметим, что внутри каждого типа $k = 1, 2$ все характеристики игроков одинаковы (игроки одного типа «симметричны», а игроки разных типов отличаются коэффициентом дисконтирования).

Обозначим $G(n, m, t, s(t))$ подыгру с игроками двух типов, $|N| = n$, $|M| = m$, с начальным моментом времени t и начальным объемом ресурса $s(t) > 0$, с функциями выигрыша в подыгре

$$\begin{aligned} H_i^t(\cdot) &= \sum_{\tau=t}^{\infty} \delta_1^\tau \ln(u_i(\tau, s(\tau))), \quad i \in N, \\ H_j^t(\cdot) &= \sum_{\tau=t}^{\infty} \delta_2^\tau \ln(v_j(\tau, s(\tau))), \quad j \in M, \end{aligned} \quad (2.3)$$

и линейной динамикой изменения запаса ресурса (2.1).

Определение 2.1. [21]. *Профиль стратегий $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ является равновесием по Нэшу (NE) в игре $G(n, m, 0, s_0)$, если для каждого игрока $i \in N$ и $j \in M$*

$$\begin{aligned} H_i(u_i, \bar{u}_{-i}, (\bar{v}_j)_{j \in M}) &\leq H_i((\bar{u}_i)_{i \in N}, (\bar{v}_j)_{j \in M}), \\ H_j((\bar{u}_i)_{i \in N}, v_j, \bar{v}_{-j}) &\leq H_j((\bar{u}_i)_{i \in N}, (\bar{v}_j)_{j \in M}) \end{aligned}$$

для всех допустимых стратегий $u_i(\cdot)$ и $v_j(\cdot)$.

Множество всех равновесий по Нэшу в игре G обозначим $NE(G)$.

Определение 2.2. [31]. Профиль стратегий $((u_i)_{i \in N}, (v_j)_{j \in M})$ является абсолютным равновесием (SPE) в игре $G(n, m, 0, s_0)$, если для любого $t = 1, 2, \dots$ и объема ресурса $s(t) > 0$ усечения стратегий $u_i(\cdot)$, $i \in N$ и $v_j(\cdot)$, $j \in M$ в (текущей) подыгре $G(n, m, t, s(t))$ образуют равновесие по Нэшу данной подыгры $G(n, m, t, s(t))$.

Для построения SPE в позиционных стратегиях используем метод динамического программирования (см., например, [9, 2, 33]). А именно, выберем функцию Беллмана $V_i^{SPE}(t, s(t))$ (значение выигрыша игрока $i \in N$ в ситуации равновесия по Нэшу $((\bar{u}_i)_{i \in N}, (\bar{v}_j)_{j \in M})$ в подыгре $G(n, m, t, s(t))$) в форме

$$V_i^{SPE}(t, s(t)) = A_i \cdot \ln s(t) + B_i, \quad i \in N. \quad (2.4)$$

Аналогично,

$$V_j^{SPE}(t, s(t)) = A_j \cdot \ln s(t) + B_j, \quad j \in M. \quad (2.5)$$

С учетом симметричности игроков одного типа обозначим:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \bar{u}_1(\tau, s(\tau)) = \bar{u}_i(\tau, s(\tau)), \quad i \in N; \\ \bar{v}_1 &= \bar{v}_1(\tau, s(\tau)) = \bar{v}_j(\tau, s(\tau)), \quad j \in M; \\ V_1^{SPE}(\cdot) &= A_1 \cdot \ln s(t) + B_1 = V_i^{SPE}(\cdot), \quad i \in N, \\ V_2^{SPE}(\cdot) &= A_2 \cdot \ln s(t) + B_2 = V_j^{SPE}(\cdot), \quad j \in M. \end{aligned}$$

Введем обозначение $\beta_i = \frac{\delta_i}{1-\delta_i}$, где $\beta_i \in (0, +\infty)$.

Теорема 2.1. В предположении, что стратегии игроков $u_i(\cdot)$ и $v_j(\cdot)$ линейно зависят от текущего запаса ресурса $s(t)$, а функции Беллмана имеют вид (2.4), (2.5), единственное абсолютное равновесие $((\bar{u}_i)_{i \in N}, (\bar{v}_j)_{j \in M})$ в позиционных стратегиях в игре $G(n, m, 0, s_0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(t, s(t)) &= \alpha \frac{\beta_2}{\beta_1 \beta_2 + n \beta_2 + m \beta_1} \cdot s(t), \\ \bar{v}_1(t, s(t)) &= \alpha \frac{\beta_1}{\beta_1 \beta_2 + n \beta_2 + m \beta_1} \cdot s(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Соответствующая SPE траектория изменения ресурса задается рекуррентным соотношением

$$s(t+1) = s^{SPE}(t+1) = \alpha \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 \beta_2 + n \beta_2 + m \beta_1} \cdot s(t), \quad s(0) = s_0, \quad (2.7)$$

а соответствующие выигрыши игроков в подыгре $G(n, m, t, s(t))$ вдоль траектории (2.7) равны

$$\begin{aligned} V_1^{SPE}(t, s(t)) &= \frac{1}{1-\delta_1} \cdot \ln(s(t)) + B_1, \\ V_2^{SPE}(t, s(t)) &= \frac{1}{1-\delta_2} \cdot \ln(s(t)) + B_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= (1 + \beta_1) \left\{ (1 + \beta_1) \ln \frac{\alpha\beta_2}{\beta_1\beta_2+n\beta_2+m\beta_1} + \beta_1 \ln \beta_1 \right\}, \\ B_2 &= (1 + \beta_2) \left\{ (1 + \beta_2) \ln \frac{\alpha\beta_1}{\beta_1\beta_2+n\beta_2+m\beta_1} + \beta_2 \ln \beta_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Доказательство. Запишем уравнение Беллмана для игроков первого и второго типа, обозначив $u_1 = u_1(t, s(t))$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(t, s(t))$, $v_1 = v_1(t, s(t))$, $\bar{v}_1 = \bar{v}_1(t, s(t))$:

$$\begin{aligned} V_1^{SPE}(t, s(t)) &= A_1 \ln s(t) + B_1 = \max_{0 \leq u_1 < s(t)} \{ \ln u_1 + \\ &+ \delta_1 [A_1 \ln(\alpha \cdot s(t) - u_1 - (n-1)\bar{u}_1 - m \cdot \bar{v}_1) + B_1] \}, \\ V_2^{SPE}(t, s(t)) &= A_2 \ln s(t) + B_2 = \max_{0 \leq v_1 < s(t)} \{ \ln v_1 + \\ &+ \delta_2 [A_2 \ln(\alpha \cdot s(t) - n \cdot \bar{u}_1 - v_1 - (m-1) \cdot \bar{v}_1) + B_2] \}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Разрешив необходимые условия первого порядка для внутреннего решения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{u}_1} - \frac{\delta_1 A_1}{\alpha \cdot s(t) - n \cdot \bar{u}_1 - m \cdot \bar{v}_1} &= 0, \\ \frac{1}{\bar{v}_1} - \frac{\delta_2 A_2}{\alpha \cdot s(t) - n \cdot \bar{u}_1 - m \cdot \bar{v}_1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

получим

$$\bar{u}_1 = \alpha \frac{\delta_2 A_2}{\Theta} \cdot s(t), \quad \bar{v}_1 = \alpha \frac{\delta_1 A_1}{\Theta} \cdot s(t), \quad (2.12)$$

где $\Theta = \delta_1 A_1 \delta_2 A_2 + n \delta_2 A_2 + m \delta_1 A_1$.

Подставим (2.12) в правые части уравнений (2.1) и (2.10) и сравним коэффициенты при $\ln s(t)$ и свободные члены в левой и правой частях уравнений Беллмана. Получим, что $A_i = \frac{1}{1-\delta_i}$, $i = 1, 2$, а также формулы (2.9). Подставив коэффициенты A_i в (2.12), (2.1) и (2.4), получим справедливость формул (2.6), (2.7) и (2.8). \square

Следствие 2.1. *Использование стационарных позиционных SPE стратегий в игре $G(n, m, 0, s_0)$ ведет к полному истощению ресурса ($\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$), если*

$$\alpha < 1 + \frac{n}{\beta_1} + \frac{m}{\beta_2} = \bar{\alpha}^{SPE}. \quad (2.13)$$

Отметим, что различные методы предотвращения полного истощения ресурса рассмотрены в работах [7, 20] (временный / периодический мораторий на использование ресурса) и в [8, 17, 18] (выделение отдельных охраняемых зон, в которых использование ресурса запрещено либо ограничено).

Замечание 2.1. Найденные *SPE* стратегии (интенсивности использования ресурса) игроков типа $k = 1, 2$ (2.6) убывают по числу игроков каждого типа n и m , убывают по β_k и возрастают по β_{3-k} . Более терпеливые игроки (игроки типа 2 с бóльшим значением δ_2 и β_2) в равновесии будут использовать ресурс менее интенсивно.

3. Кооперативное поведение

Следуя [33, 5], при поиске кооперативного решения в игре $G(n, m, 0, s_0)$ сначала найдем Парето оптимальные исходы в игре как решение следующей задачи

$$\max_{(u_i, v_j)} \left\{ \sum_{i \in N} \gamma_1 \cdot V_i^C(\cdot) + \sum_{j \in M} \gamma_2 \cdot V_j^C(\cdot) \right\}, \quad (3.1)$$

где V_i^C (V_j^C) — выигрыши одного игрока первого (второго) типа в условиях полной кооперации (согласованного выбора профиля стратегий всеми игроками), а γ_1 (γ_2) — коэффициент относительной значимости одного игрока первого (второго) типа, $\gamma_i > 0$.

Пусть $u = u(t, s(t))$ — совокупный объем использования ресурса всеми игроками на шаге t , а вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_1; \lambda_2, \dots, \lambda_2)$ размерности $n + m$ задает распределение этого объема между игроками двух типов, т. е.

$$u_i(t, s(t)) = \lambda_1 \cdot u(t, s(t)), i \in N; v_j(t, s(t)) = \lambda_2 \cdot u(t, s(t)), j \in M, \quad (3.2)$$

где

$$n\lambda_1 + m\lambda_2 = 1, \lambda_j \geq 0. \quad (3.3)$$

Снова выберем подходящую функциональную форму для функций Беллмана:

$$V_i^C(t, s(t)) = A_i^C \cdot \ln s(t) + B_i^C, \quad i = 1, 2,$$

где $V_i^C(t, s(t))$ — индивидуальный выигрыш одного игрока i -го типа в подыгре $G(n, m, t, s(t))$ при полной кооперации всех игроков, т. е. использовании набора кооперативных стратегий $u_i^C = u_1^C, i \in N$, и $v_j^C = v_1^C, j \in M$, решающих задачу (3.1).

Теорема 3.1. *В предположении линейной зависимости стратегий $u_1(\cdot)$ и $v_1(\cdot)$ от текущего запаса $s(t)$ единственное кооперативное решение в позиционных стратегиях для заданного вектора (γ_1, γ_2) имеет вид:*

$$u^C(t, s(t)) = \alpha \frac{n\gamma_1 + m\gamma_2}{\Delta} \cdot s(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

где $\Delta = n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2 + n\gamma_1 + m\gamma_2$.

При этом кооперативные стратегии игроков равны

$$\begin{aligned} u_i^C(\cdot) &= u_1^C(\cdot) = \alpha \frac{\gamma_1}{\Delta} \cdot s(t), \quad i \in N, \\ v_j^C(\cdot) &= v_1^C(\cdot) = \alpha \frac{\gamma_2}{\Delta} \cdot s(t), \quad j \in M, \end{aligned} \quad (3.5)$$

а соответствующая кооперативная траектория изменения ресурса задается рекуррентным соотношением

$$s(t+1) = s^C(t+1) = \alpha \frac{n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2}{\Delta} \cdot s(t), \quad s(0) = s_0. \quad (3.6)$$

Соответствующие выигрыши игроков в подыгре $G(n, m, t, s(t))$ вдоль кооперативной траектории (3.6) равны

$$\begin{aligned} V_1^C(t, s(t)) &= \frac{1}{1-\delta_1} \cdot \ln(s(t)) + B_1^C, \\ V_2^C(t, s(t)) &= \frac{1}{1-\delta_2} \cdot \ln(s(t)) + B_2^C, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} B_1^C &= \frac{n\gamma_1}{n\gamma_1 - \delta_1} \cdot \left(\ln \frac{\alpha\gamma_1}{\Delta} + \beta_1 \ln \frac{\alpha(n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2)}{\Delta} \right), \\ B_2^C &= \frac{n\gamma_2}{n\gamma_2 - \delta_2} \cdot \left(\ln \frac{\alpha\gamma_2}{\Delta} + \beta_2 \ln \frac{\alpha(n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2)}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство. Запишем уравнение Беллмана для взвешенной суммарной прибыли всех игроков в подыгре $G(n, m, t, s(t))$:

$$\begin{aligned} n \cdot \gamma_1 \cdot V_1^C(t, s(t)) + m \cdot \gamma_2 \cdot V_2^C(t, s(t)) &= \max_{u(\cdot)} \{ n\gamma_1 \ln(\lambda_1 \cdot u) + \\ &+ m\gamma_2 \ln(\lambda_2 \cdot u) + \delta_1 [n\gamma_1 (A_1^C \ln(\alpha \cdot s(t) - u) + B_1^C)] + \\ &+ \delta_2 [m\gamma_2 (A_2^C \ln(\alpha \cdot s(t) - u) + B_2^C)] \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя необходимые условия первого порядка, получим

$$u^C = u^C(s(t)) = \alpha \frac{n\gamma_1 + m\gamma_2}{n\gamma_1\delta_1 A_1^C + m\gamma_2\delta_2 A_2^C + n\gamma_1 + m\gamma_2} \cdot s(t) \quad (3.10)$$

Подставим (3.10) в правые части уравнений (2.1) и (3.9) и сравним коэффициенты в левой и правой частях уравнения Беллмана. Непосредственной проверкой можно убедиться, что значения коэффициентов $A_j^C = \frac{1}{1-\delta_j}$, $j = 1, 2$, и (3.8) обращают уравнение (3.9) в тождество для выбранной функциональной формы $V_j^C(t, s(t))$, $j = 1, 2$. Следовательно, кооперативное управление (3.4) решает задачу (3.1) для заданного вектора весовых коэффициентов (γ_1, γ_2) , независимо от λ_1 и λ_2 .

Далее для поиска коэффициентов λ_1 и λ_2 , максимизирующих не зависящую от $u(t, s(t))$ часть взвешенной суммарной прибыли игроков, решим задачу условной оптимизации

$$\begin{cases} \max_{\lambda_1, \lambda_2} (n\gamma_1 \ln \lambda_1 + m\gamma_2 \ln \lambda_2) \\ \lambda_1 n + \lambda_2 m = 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Решение данной задачи имеет вид

$$\lambda_j = \frac{\gamma_j}{n\gamma_1 + m\gamma_2}, \quad j = 1, 2. \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.2), получим итоговый вид оптимальных кооперативных стратегий игроков (3.5). Справедливость закона изменения ресурса (3.6) вдоль кооперативной траектории проверяется подстановкой (3.4) в формулу (2.1). \square

Следствие 3.1. *Использование кооперативных стационарных позиционных стратегий (3.5) в игре $G(n, m, 0, s_0)$ ведет к полному истощению ресурса ($\lim_{t \rightarrow \infty} s^C(t) = 0$), если*

$$\alpha < 1 + \frac{n\gamma_1 + m\gamma_2}{n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2} = \bar{\alpha}^C. \quad (3.13)$$

Следствие 3.2. *Для всех допустимых значений коэффициентов γ_j и β_j , $j = 1, 2$, существует непустой промежуток $[\bar{\alpha}^C, \bar{\alpha}^{SPE})$ такой, что для любого $\alpha \in [\bar{\alpha}^C, \bar{\alpha}^{SPE})$ некооперативное поведение игроков в игре $G(n, m, 0, s_0)$ ведет к полному истощению ресурса, а полная кооперация позволяет этого избежать.*

Доказательство. Проверим справедливость следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^C < \bar{\alpha}^{SPE} &\iff \frac{n\gamma_1 + m\gamma_2}{n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2} < \frac{n}{\beta_1} + \frac{m}{\beta_2} \iff \\ &\iff (n^2 - n)\gamma_1\beta_1\beta_2 + (m^2 - m)\gamma_2\beta_1\beta_2 + n \cdot m(\gamma_1\beta_1^2 + \gamma_2\beta_2^2) > 0. \end{aligned}$$

□

Следствие 3.3. Для произвольных коэффициентов $\gamma_j > 0$, $j = 1, 2$,

$$u^C(t, s) < n \cdot \bar{u}_1(t, s) + m \cdot \bar{v}_1(t, s), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

$$s^C(t) > s^{SPE}(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Доказательство. Используя (3.4) и (2.6), запишем цепочку равносильных неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^C(t, s)} > \frac{1}{n\bar{u}_1(\cdot) + m\bar{v}_1(\cdot)} &\iff \frac{n\gamma_1\beta_1 + m\gamma_2\beta_2}{n\gamma_1 + m\gamma_2} > \frac{\beta_1\beta_2}{n\beta_1 + m\beta_2} \iff \\ &\iff \gamma_1\beta_1\beta_2(n^2 - n) + \gamma_2\beta_1\beta_2(m^2 - m) + n \cdot m(\gamma_1\beta_1^2 + \gamma_2\beta_2^2) > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено для любых $n \geq 1$, $m \geq 1$ и всех допустимых γ_j и β_j , значит, (3.14) справедливо для любого заданного значения текущего запаса ресурса $s > 0$.

Проверка условия (3.15) проводится аналогично. □

Отметим, что на начальных шагах игры, с учетом относительно малого расхождения траекторий $s^{SPE}(t)$ и $s^C(t)$ из (3.14) следует, что при кооперации ресурс будет использоваться игроками менее интенсивно, чем при некооперативном поведении. Однако в дальнейшем более высокий уровень текущего запаса ресурса $s^C(t)$ (см. (3.15)) позволяет игрокам при кооперации использовать ресурс более интенсивно, чем это было бы возможно при использовании некооперативных равновесных стратегий (см., в частности, численный пример в разделе 4 ниже).

Замечание 3.1. Найденные кооперативные стратегии (3.5) игроков типа $k = 1, 2$ ($u_i^C(\cdot)$ и $v_j^C(\cdot)$ соответственно) убывают по числу игроков n и m , убывают по β_1 и β_2 , возрастают по коэффициенту относительной значимости γ_k и убывают по γ_{3-k} . Чем более терпеливы

игроки обоих типов, тем менее интенсивно они будут использовать ресурс при кооперативном поведении.

4. Численный пример

Для иллюстрации полученных результатов приведем численный пример со следующими значениями параметров: число игроков первого типа $n = 2$, второго типа $m = 3$, коэффициенты дисконтирования $\delta_1 = 0.9$, $\delta_2 = 0.98$, начальный запас ресурса $s_0 = 100$ у. е., коэффициент естественного возобновления ресурса $\alpha = 1.1$. При построении кооперативного решения используем коэффициенты относительной значимости игроков $\gamma_1 = 1.2$ и $\gamma_2 = 0.8(6)$.

На рис. 1 с использованием формул (2.7) и (3.6) представлены траектории изменения запаса ресурса при некооперативном (светлая линия) и кооперативном (темная линия) сценарии.

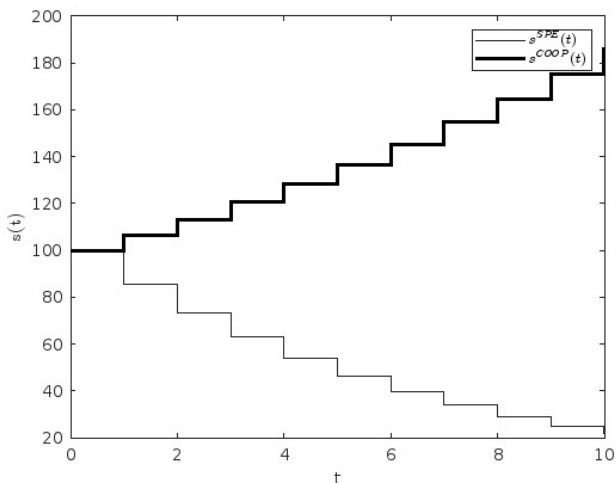


Рисунок 1. Запас ресурса: светлая линия – SPE , темная – кооперативный сценарий

Отметим, что в условиях примера $\bar{\alpha}^{SPE} \approx 1.2834$, $\bar{\alpha}^C \approx 1.0336$, $\alpha = 1.1$, $\alpha \in [\bar{\alpha}^C, \bar{\alpha}^{SPE})$. В соответствии со следствиями 2.1, 3.1 и 3.2, использование некооперативных стратегий ведет к полному истощению ресурса, а кооперативная схема поведения позволяет этого избежать.

На рис. 2 представлены стратегии игроков (интенсивности использования ресурса): светлые линии — *SPE* стратегии, полученные по формуле (2.6), темные — кооперативные стратегии (3.5). Пунктиром показаны стратегии менее терпеливых игроков первого типа. Можно заметить, что с ростом t потребление ресурса при некооперативном поведении снижается, поскольку в целом происходит уменьшение запаса ресурса. При кооперативном поведении на начальных шагах игроки используют меньше ресурса, чем при *SPE* сценарии, но с учетом того, что текущий запас ресурса растет, игроки имеют возможность использовать ресурс все более интенсивно. В некоторый момент времени кооперативные значения стратегий игроков (каждого типа) начинают превосходить соответствующие показатели в *SPE*.

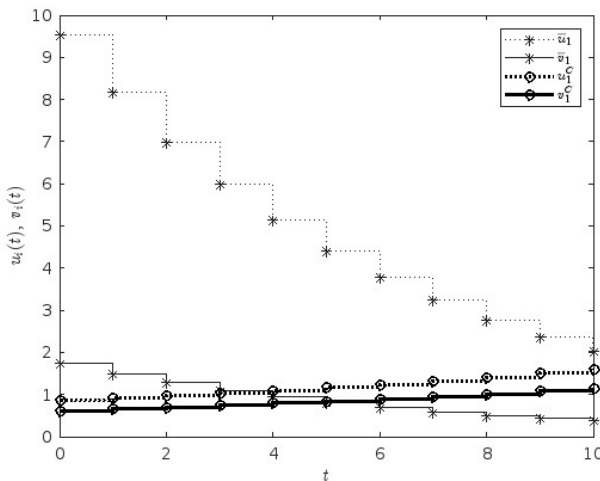


Рисунок 2. Стратегии: светлая линия — *SPE*, темная — кооперативные; пунктир — игроки 1-го типа

5. Заключение

В работе найдены аналитически некооперативное и кооперативное решение в классе позиционных стационарных стратегий для бесконечношаговой игры использования общего возобновляемого ресурса игроками двух типов (отличающихся коэффициентом дисконти-

рования). Заметим, что в данной игре сохраняются установленные в ряде предыдущих работ полезные свойства кооперации: 1) уровень запаса ресурса при кооперативном сценарии выше, чем при некооперативном; 2) суммарный долгосрочный выигрыш игроков при кооперации больше либо равен сумме долгосрочных выигрышей индивидуальных игроков при некооперативном сценарии. Для практических приложений особый интерес представляют результаты анализа найденных решений на чувствительность (зависимость стратегий и траектории изменения запаса ресурса от параметров – числа игроков каждого типа, коэффициентов дисконтирования, коэффициентов относительной важности игроков).

Отметим возможные направления дальнейших исследований рассмотренной в статье динамической модели:

- получить условия «выгодности кооперации» (coalition profitability - см., например [5]) для отдельных игроков в условиях игры без побочных платежей в зависимости от коэффициентов относительной важности γ_i ;
- для конечношаговой игры с побочными платежами изучить различные схемы обеспечения динамически устойчивой кооперации (см., например, [23, 24, 2, 9, 33, 18, 28, 22, 12, 14]);
- рассмотреть условия коалиционной устойчивости, а также различные схемы формирования коалиций при частичной кооперации (см., например, [3, 5, 26, 28, 29]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Ретгиева А.Н. *Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды* // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 5. С. 73–90.
2. Петросян Л.А., Кузютин Д.В. *Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость*. СПб: Изд-во СПбГУ, 2000.
3. Ретгиева А.Н. *Условия коалиционной устойчивости в динамических многокритериальных играх* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 200–216.

4. Breton M., Dahmouni I., Zaccour G. *Equilibria in a two-species fishery* // Math. Biosci. 2019. V. 309. P. 78–91.
5. Breton M., Keoula M. Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Ecological Economics. 2014. V. 97. P. 209–223.
6. Cabo F., Tidball M. *Cooperation in a Dynamic Setting with Asymmetric Environmental Valuation and Responsibility* // Dyn Games Appl. 2022. V. 12. P. 844–871.
7. Dahmouni I., Parilina E.M., Zaccour G. *Great fish war with moratorium* // Math. Biosci. 2023. V. 355. P. 108939.
8. Dahmouni I., Sumaila R. *A dynamic game model for no-take marine reserves* // Ecological Modelling. 2023. V. 481. P. 110360.
9. Haurie A., Krawczyk J.B., Zaccour G. *Games and Dynamic Games*. Singapore: Scientific World, 2012.
10. Kaitala V. T., Lindroos M. *Game Theoretic Applications to Fisheries*. In: Weintraub A., Romero C., Bjørndal T., Epstein R., Miranda J. (eds.) Handbook Of Operations Research In Natural Resources. International Series In Operations Research & Mana, V. 99. Boston, MA: Springer, 2007.
11. Kuzyutin D., Lipko I., Pankratova Y., Tantlevskij I. *Cooperation Enforcing in Multistage Multicriteria Game: New Algorithm and Its Implementation*. In: Petrosyan L., Mazalov V., Zenkevich N. (eds.) Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Cham: Birkhäuser, 2020.
12. Kuzyutin D., Skorodumova Y., Smirnova N. *A Cooperation Scheme in Multistage Game of Renewable Resource Extraction with Asymmetric Players*. In: Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2022). LNCS. 2022. V. 13367. P. 235–249.
13. Kuzyutin D., Smirnova N. *Multi-criteria game with environmentally concerned players* // Economics Letters. 2023. V. 226, P. 111078.

14. Kuzyutin D., Smirnova N. *Sustainable cooperation in bicriteria game of renewable resource extraction* // Mathematics. 2023. V. 11. P. 1497.
15. Levhari D., Mirman L. J. *The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot–Nash solution* // The Bell Journal of Economics. 1980. V. 11. N. 1. P. 322–334.
16. Long N. V. *Dynamic Games in the Economics of Natural Resources: A Survey* // Dyn Games Appl. 2011. V. 1. P. 115–148.
17. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *The discrete-time bioresource sharing model* // J. Appl. Math. Mech. 2011. V. 75. P. 180–188.
18. Mazalov V. V., Rettieva A. N. *Cooperation maintenance in fishery problems*. In: Fishery Management. Nova Science Publishers, 2012. P. 151–198.
19. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Asymmetry in a cooperative bioresource management problem*. In: Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology. Nova Science Publishers, 2015. P. 113–152.
20. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Exploitation and recovery periods in dynamic resource management problem*. In: Khachay et al. (Eds.): MOTOR 2023, LNCS 13930, 2023. P. 288–299.
21. Nash J.F. *Equilibrium points in n -person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.
22. Parilina E.M., Zaccour G. *Payment schemes for sustaining cooperation in dynamic games* // J. Econ. Dyn. Control. 2022. V. 139. P. 104440.
23. Petrosyan L. *Time-consistency of solutions in multi-player differential games* // Astronomy. 1977. V. 4. P. 46–52.
24. Petrosyan L.A., Danilov N.N. *Stability of solutions in non-zero sum differential games with transferable payoffs* // Astronomy. 1979. V. 1, P. 52–59.

25. Pintassilgo P., Finus M., Lindroos M., Munro G. R. *Stability and Success of Regional Fisheries Management Organizations* // Environmental and Resource Economics. 2010. V. 46. P. 377–402.
26. Rettieva A.N. *Stable Coalition Structure in Bioresource Management Problem* // Ecological Modelling. 2012. V. 235-236. P. 102–118.
27. Rettieva A.N. *A discrete-time bioresource management problem with asymmetric players* // Automation and Remote Control. 2014. V. 75. N. 9. P. 1665–1676.
28. Rettieva A. *Cooperation in bioresource management problems*. In: Petrosyan L.A., Zenkevich N.A. (eds) *Contributions to Game Theory and Management*. St. Petersburg: Petersburg State Univ., 2017. V. 10, P. 245–286.
29. Rettieva A. N. *Coalition stability in dynamic multicriteria games* // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11548. P. 697–714. 10.1007/978-3-030-22629-9_49.
30. Rettieva A.N. *Dynamic multicriteria games with asymmetric players* // J Glob Optim. 2022. V. 83. P. 521–537.
31. Selten R. *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games* // Int. J. Game Theory. 1975. V. 4. P. 25–55.
32. Tantlevskij I.R. *Language of enmity and etiology of conflict in a historical and philosophical perspective*. St. Petersburg: Russian Christian Academy for Humanities Press, 2022.
33. Yeung D., Petrosyan L. *Subgame Consistent Economic Optimization: An Advanced Cooperative Dynamic Game Analysis*. New York, NY, USA: Springer, 2012.

MULTISTAGE MODEL FOR RENEWABLE RESOURCE
EXPLOITATION BY THE PLAYERS OF TWO TYPES

Denis V. Kuzyutin, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc.,
associate professor (d.kuzyutin@spbu.ru),

Nadezhda V. Smirnova, HSE University, assistant professor
(nvsmirnova@hse.ru),

Igor R. Tantlevskij, Saint-Petersburg State University, Dr.Sc.,
professor (i.tantlevsky@spbu.ru).

Abstract: The paper examines an infinite-horizon multistage game of renewable resource extraction with two types of players, differing in the discount rates of future payoffs. Using the dynamic programming method, a non-cooperative solution - a subgame perfect Nash equilibrium in stationary positional strategies, as well as a cooperative (Pareto-optimal) solution for the case of complete cooperation of all players were constructed. The resulting solutions were analyzed for sensitivity to changes in the model parameters, in particular, the range for the coefficient of natural resource renewal was found, in which a non-cooperative solution leads to complete depletion of the resource, while a cooperative scheme allows to avoid such a negative scenario. A numerical example is given to demonstrate the theoretical results obtained.

Keywords: multistage game, renewable resources, asymmetric players, Nash equilibria, cooperative solution, sensitivity analysis.