

**Нелинейная динамика контура первичных колебаний
МЭМС-гироскопа при действии систем фазовой автоподстройки
частоты и автоматической регулировки усиления**

В.С. Игумнова¹, А.В. Лукин¹, И.А. Попов¹, Н.В. Кузнецов^{2,3}, М.Ю.
Лобачев², Я.В. Беляев⁴

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
Россия

³ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

⁴ ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург,
Россия

luikin_av@spbstu.ru

Аннотация. В настоящей работе проводится исследование динамики первичных колебаний высокочастотного микромеханического резонатора - чувствительного элемента МЭМС-гироскопа RR-типа - при действии различных реализаций системы фазовой автоподстройки частоты, работающей совместно с системой автоматической регулировки усиления электростатического привода. Исследование динамики объекта выполняется как численно, так и аналитически - с применением метода осреднения. Получены условия устойчивости стационарного режима в линейном приближении. Рассмотрены вопросы точности различных методов численного решения дифференциальных уравнений контура первичных колебаний. Исследовано влияние механической нелинейности резонатора на динамику резонатора и системы управле-

ния. Предложена реализация схемы ФАПЧ пониженного порядка, не содержащая паразитного сигнала двойной частоты на выходе фазового детектора. Проанализированы выходные характеристики систем управления (быстродействие, полоса захвата и др.) и сделаны качественные выводы об особенностях взаимодействия динамики механического колебательного звена и контура ФАПЧ-АРУ.

Ключевые слова: МЭМС-гироскоп, первичные колебания, ФАПЧ, АРУ.

1 Введение

Принцип работы микромеханического вибрационного гироскопа состоит в передаче механической энергии между двумя формами колебаний чувствительного элемента (ЧЭ), вызванной действием сил инерции Кориолиса. В простейшем случае ЧЭ состоит из одной подвижной массы - твердого тела на упругих подвесах - с двумя ортогональными рабочими формами колебаний. В режиме измерения угловой скорости электростатическим двигателем возбуждаются гармонические колебания по первичной оси. В линейном приближении амплитуда вызванных силой Кориолиса вторичных колебаний пропорциональна величине компоненты угловой скорости подвижного объекта вдоль оси чувствительности датчика.

Высокие требования к стабильности работы резонансных датчиков (в частности - чувствительных элементов микроэлектромеханических вибрационных гироскопов) приводят к необходимости применения систем управления с обратной связью, обеспечивающих постоянство амплитуды колебаний резонатора и его частотную настройку на резонанс. Первая из названных задач, как правило, решается с помощью системы автоматической регулировки усиления [1, 2, 3, 4]. Для решения второй задачи широкое распространение получили системы фазовой автоподстройки частоты [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

Математическое моделирование динамики МЭМС резонаторов в условиях работы подобных систем управления представляет значительный теоретический и прикладной интерес. Различным аспектам этой проблемы посвящено большое число научных работ. В [17] проведено аналитическое исследование стационарных колебательных процессов для механически линейного резонатора с учетом действия системы АРУ. В [18] изучена динамика резонатора при действии системы ФАПЧ. Найдена область устойчивости требуемого резонансного режима колебаний в пространстве параметров системы управ-

ления. Прямым численным методом выполнены расчеты динамики резонатора при учете нелинейности упругой восстанавливающей силы. Качественное исследование динамики механически линейного резонатора при совместном действии систем АРУ и ФАПЧ выполнено в [19, 20, 21]. Одним из наиболее перспективных и современных решений для борьбы с острыми пиками амплитудно-частотных характеристик, а именно с амплитудными срывами, является использование параметрического возбуждения, которое характеризуется плавным пологим откликом резонансной кривой [22, 23].

Настоящая работа посвящена исследованию динамики чувствительного элемента высокочастотного вибрационного микромеханического гироскопа в контуре ФАПЧ и АРУ, а также исследованию вопросов подбора параметров управления с точки зрения ряда критериев качества работы контура генерации колебаний. Для построения системы в медленных переменных использован метод осреднения. Получены условия устойчивости найденных стационарных режимов. Приведены выводы по основным характеристикам системы: быстродействие, полоса захвата, а также устойчивость к изменению параметров системы управления.

В разделе 2 даётся описание и принцип действия рассматриваемого микромеханического гироскопа RR-типа. В разделе 3 построена полная система уравнений движения ЧЭ в контурах ФАПЧ-АРУ, к которой применён метод усреднения для получения системы в медленных переменных. В разделе 4 динамика ЧЭ рассмотрена в контуре оригинальной ФАПЧ-АРУ в геометрически линейной и нелинейной постановках. Введение модифицированной схемы ФАПЧ-АРУ и соответствующие результаты приведены в разделе 5. Сравнительный анализ выбора параметров и выходных характеристик двух систем управления приведён в разделе 6.

2 Постановка задачи

В наиболее простом случае микромеханический вибрационный гироскоп (ММВГ) содержит одну подвижную массу (ПМ), динамика которой позволяет определить действующую на систему силу инерции Кориолиса и, следовательно, компоненту угловой скорости подвижного объекта вдоль оси чувствительности. Электростатическим приводом возбуждаются колебания по первичной оси Z , при возникновении угловой скорости из-за сил Кориолиса возникают вторичные колебания вокруг оси X . Амплитуда вторичных колебаний по оси X , вызванных силой Кориолиса, пропорциональна угловой

скорости вокруг оси чувствительности Y .

В качестве примера конкретной конструкции ММВГ приведем датчик с двумя крутильными степенями свободы, разработанный АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» [24, 25, 26, 27, 28]. Чувствительный элемент гироскопа RR-типа совершает крутильные движения вокруг осей первичных колебаний (ПК) и вторичных колебаний (ВК). Схемы датчика и чувствительного элемента представлены на рисунках 1а и 1б.

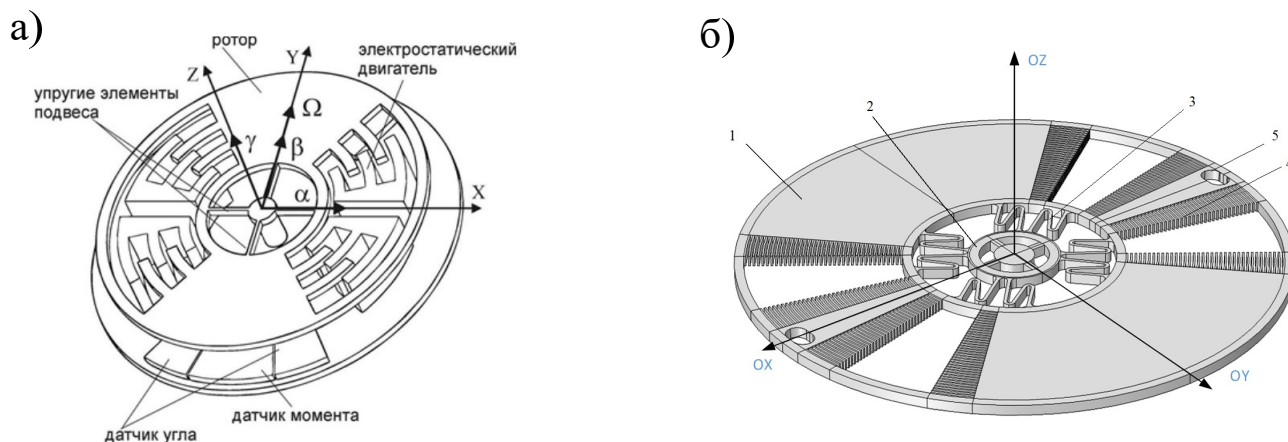


Рис. 1: Схема ММВГ (а) и чувствительный элемент (ротор): 1- ротор; 2 - анкер; 3 – упругий подвес; 4 – электродная структура (ЭС) первичной оси; 5 - отверстия для стопперов (б)

Системы генерации первичных колебаний, в частности, системы ФАПЧ-АРУ могут иметь различные реализации [29]. Рассматриваемая схема контуров ФАПЧ и АРУ имеет вид, представленный на рисунке 2.

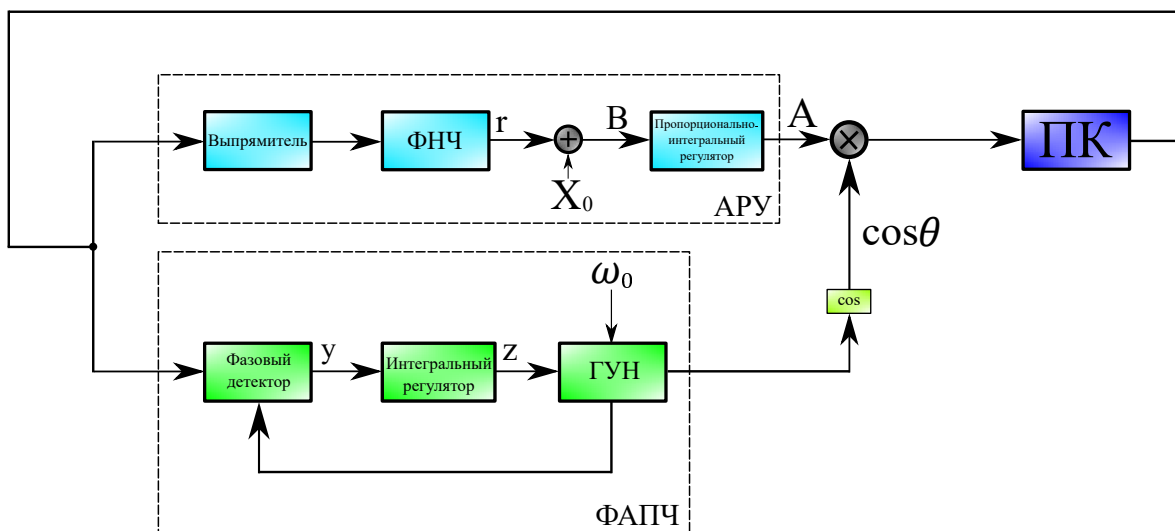


Рис. 2: Схема ФАПЧ и АРУ

Схема ФАПЧ содержит фазовый детектор, который внутри себя имеет фильтр нижних частот (ФНЧ), регулятор и опорный генератор, управляемый напряжением (ГУН) [7, 30, 31, 32]. Схема представляет собой замкнутую систему управления, задача которой состоит в обеспечении требуемой разности фаз между выходным сигналом преобразователя емкость-напряжение датчика перемещений резонатора и опорным сигналом ГУН. Амплитудный канал, реализующий схему АРУ, состоит из амплитудного детектора, ФНЧ и ПИ-регулятора.

3 Математическая модель системы в контурах ФАПЧ и АРУ

Рассмотрим ось первичных колебаний гироскопа с учётом т.н. геометрической нелинейности, вызванной конечностью поля деформаций элементов упругого подвеса при движении подвижной массы. Уравнение движения первичных колебаний имеет вид [21]:

$$J_\gamma \ddot{\gamma} + b_\gamma \dot{\gamma} + k_{\gamma 1} \gamma + k_{\gamma 3} \gamma^3 = F_e. \quad (1)$$

где γ - амплитуда первичных колебаний (ПК), J_γ - момент инерции вокруг оси Z, b_γ - коэффициент демпфирования системы по оси ПК, $k_{\gamma 1}, k_{\gamma 3}$ - линейные и кубические компоненты жесткости упругого подвеса, F_e - момент сил электростатического гребенчатого привода - генератора первичных колебаний. Параметры механической системы, полученные путем математического моделирования и натурных испытаний для гироскопа разработки АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», приведены в таблице 1 [21].

Таблица 1: Параметры механической системы

Параметр	Величина	Единицы измерения
Момент инерции относительно оси Oz, J_γ	$6.9573 \cdot 10^{-13}$	$kg \cdot m^2$
Собственная частота вращения вокруг оси Oz, f_γ	8093.7772	Hz
Добротность вокруг оси Oz, Q_γ	60000	dimensionless
Коэффициент демпфирования, b_γ	$4.4226 \cdot 10^{-13}$	kg/s
Линейная компонента жесткости, $k_{\gamma 1}$	0.0018	kg/s^2
Кубическая компонента жесткости, $k_{\gamma 3}$	0.0044	kg/s^2

Математическая модель динамики по оси ПК в системе ФАПЧ-АРУ описывается следующей системой уравнений [19, 33]:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\gamma} + c_d \dot{\gamma} + \omega_\gamma^2 \gamma + \beta \gamma^3 &= A \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= \omega_0 + K_{VCO} z \\
 \dot{z} &= K_I^{PLL} y \\
 \dot{y} &= \lambda^{PLL} (K_G \gamma \cos \theta - y) \\
 A &= K_p^{AGC} (X_0 - r) + B \\
 \dot{B} &= K_I^{AGC} (X_0 - r) \\
 \dot{r} &= \lambda^{AGC} \left(\frac{\pi}{2} |\gamma| - r \right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $c_d = \frac{b_\gamma}{J_\gamma}$, $\omega_\gamma^2 = \frac{k_{\gamma 1}}{J_\gamma}$, $\beta = \frac{k_{\gamma 3}}{J_\gamma}$. Параметры контуров ФАПЧ и АРУ: θ - фаза ГУН ($\omega = \dot{\theta}$ - мгновенная частота ГУН), z - сигнал управления ГУН, y - выходной сигнал фазового детектора, ω_0 - собственная (свободная) частота ГУН, K_{VCO} - пропорциональный коэффициент усиления ГУН, K_I^{PLL} - интегральный коэффициент усиления регулятора, K_G, λ^{PLL} - коэффициент передачи и частота полюса ФНЧ ФАПЧ, A - выходной сигнал схемы АРУ, B - сигнал управления АРУ, r - оценка текущей амплитуды колебаний, K_p^{AGC}, K_I^{AGC} - пропорциональный и интегральный коэффициенты регулятора схемы АРУ, λ^{AGC} - частота полюса ФНЧ АРУ, X_0 - требуемая (заданная) амплитуда стационарных колебаний.

Для качественного (параметрического) исследования динамики системы применим метод усреднения [19]. Представим искомое решение для механического звена в виде:

$$\gamma = a(t) \cos [\theta(t) + \phi(t)], \tag{3}$$

где $a(t)$ - амплитуда, $\theta(t) + \phi(t)$ - мгновенная фаза колебаний. Мгновенная фаза ГУН равна θ , поэтому ϕ - разность фаз между резонатором и ГУН.

Дифференцируя (3), получим

$$\dot{\gamma} = -a\dot{\theta} \sin(\theta + \phi) + \dot{a} \cos(\theta + \phi) - a\dot{\phi} \sin(\theta + \phi). \tag{4}$$

Потребуем

$$\dot{a} \cos(\theta + \phi) - a\dot{\phi} \sin(\theta + \phi) = 0, \tag{5}$$

тогда

$$\ddot{\gamma} = -\dot{a}\dot{\theta} \sin(\theta + \phi) - a\ddot{\theta} \sin(\theta + \phi) - a\dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\theta + \phi). \quad (6)$$

Отметим, что динамика фазы ГУН описывается простым уравнением:

$$\ddot{\theta} = K_{VCO}K_I^{PLL}y. \quad (7)$$

Переменная θ является «быстрой» и может рассматриваться как нормализованное время. Следуя процедуре метода усреднения, подставим (3), (4) и (6) в (2), выразим из первого уравнения (2) и (5) \dot{a} , $\dot{\phi}$ и усредним правые части системы по явно входящему «времени» θ . Таким образом мы придем к автономной системе дифференциальных уравнений, описывающей эволюцию медленных переменных \tilde{a} , $\tilde{\phi}$, \tilde{z} , \tilde{y} , \tilde{B} , \tilde{r} :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= -\frac{\tilde{B} \sin \tilde{\phi} + K_p^{AGC} (X_0 - \tilde{r}) \sin \tilde{\phi} + c_d (\omega_0 + K_{VCO}\tilde{z}) \tilde{a} + K_{VCO}K_I^{PLL}\tilde{y}\tilde{a}}{2(\omega_0 + K_{VCO}\tilde{z})} \\ \dot{\tilde{\phi}} &= -\frac{[(\omega_0 + K_{VCO}\tilde{z})^2 - \omega_\gamma^2] \tilde{a} + [\tilde{B} + K_p^{AGC} (X_0 - \tilde{r})] \cos \tilde{\phi} - \frac{3}{4}\beta\tilde{a}^3}{2\tilde{a}(\omega_0 + K_{VCO}\tilde{z})} \\ \dot{\tilde{z}} &= K_I^{PLL}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= -\lambda^{PLL} \left(\tilde{y} - \frac{K_G}{2}\tilde{a} \cos \tilde{\phi} \right) \\ \dot{\tilde{B}} &= K_I^{AGC} (X_0 - \tilde{r}) \\ \dot{\tilde{r}} &= \lambda^{AGC} (\tilde{a} - \tilde{r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Возможным стационарным периодическим режимам системы (2) соответствуют неподвижные точки (положения равновесия) динамической системы (8):

$$\tilde{y}_0 = 0, \quad \tilde{r}_0 = X_0, \quad \tilde{a}_0 = X_0, \quad \tilde{\phi}_0 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Стационарные значения \tilde{z} определяются из уравнения

$$(\omega_0 + K_{VCO}\tilde{z}_0)^2 - \omega_\gamma^2 - \frac{3}{4}\beta X_0^2 = 0. \quad (10)$$

Наконец,

$$\tilde{B}_0 = c_d X_0 [\omega_0 + K_{VCO} \tilde{z}_0]. \quad (11)$$

Основной интерес представляет решение, для которого $\tilde{\phi}_0 = -\frac{\pi}{2}$ и \tilde{z}_0 имеет знак $sgn(\omega_\gamma - \omega_0)$.

Анализ устойчивости рассматриваемого стационарного режима выполняется путем вычисления собственных значений якобиана правой части системы (8) в данной неподвижной точке. Для линейного резонатора ($\beta = 0$) область устойчивости в пространстве параметров характеризуется условиями:

$$K_I^{AGC} < K_{I,MAX}^{AGC} = \omega_\gamma \left(c_d + \frac{K_p^{AGC}}{\omega_\gamma} \right) \cdot \left(\frac{c_d}{2} + \lambda^{AGC} \right), \quad (12)$$

$$K_I^{PLL} < K_{I,MAX}^{PLL} = \frac{c_d \left(\lambda^{PLL} + \frac{c_d}{2} \right)}{K_G K_{VCO} X_0},$$

В реальных расчетах значения K_I^{AGC} и K_I^{PLL} брались внутри области устойчивости, т.е. $K_I^{AGC} = K_C^{AGC} \cdot K_{I,MAX}^{AGC}$ и $K_I^{PLL} = K_C^{PLL} \cdot K_{I,MAX}^{PLL}$, где K_C^{AGC} и K_C^{PLL} находятся в интервале $(0; 1)$, обеспечивая стабильную работу контуров управления.

Подбором параметров контуров управления можно получить различные стратегии настройки совместной работы контуров ФАПЧ и АРУ. Например, возможны следующие комбинации:

- 1) «Быстрый» ФАПЧ (с большими коэффициентами управления) и «медленный» АРУ (с малыми коэффициентами управления);
- 2) «Медленный» ФАПЧ и «быстрый» АРУ;
- 3) Промежуточный вариант, когда процессы в контурах ФАПЧ и АРУ протекают в одном масштабе времени.

Графически проиллюстрируем третий случай настройки контуров ФАПЧ и АРУ. В таблице 3 приведены используемые параметры контуров управления нелинейной системой. Зависимости амплитуды первичных колебаний и частоты ГУН в медленных переменных, построенные на основе уравнений (8), приведены на рисунке 3.

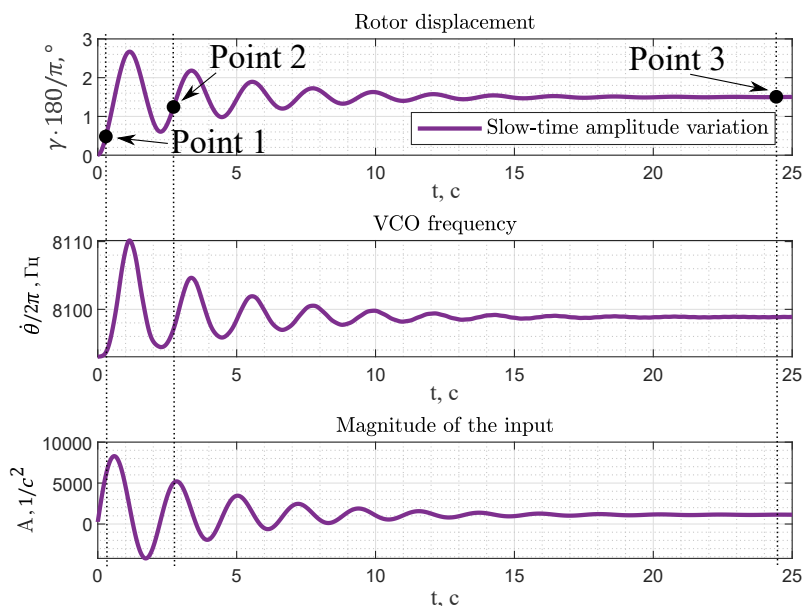


Рис. 3: Амплитуда первичных колебаний и частоты ГУН в медленных переменных

На рисунке 3 отмечены три характерные точки для различных стадий выхода на стационарный режим. Значения амплитуды возбуждения A будут использованы далее в уравнениях (13) и (14) для построения мгновенных резонансных кривых и фазо-частотных характеристик системы.

Для механического звена исследуемой системы, которое представляет собой осциллятор Дуффинга, с помощью метода многих масштабов была получена система уравнений в медленных переменных [34]:

$$\begin{aligned}
 A'_\gamma &= -\frac{c_\gamma}{2\omega_\gamma} A_\gamma + \frac{1}{2} \frac{A\sqrt{\beta}}{\omega_\gamma^3} \sin\chi_\gamma, \\
 A_\gamma \chi'_\gamma &= \left(\frac{\Omega}{\omega_\gamma} - 1\right) A_\gamma - \frac{3}{8} A_\gamma^3 + \frac{1}{2} \frac{A\sqrt{\beta}}{\omega_\gamma^3} \cos\chi_\gamma,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

где A_γ - амплитуда колебаний в медленных переменных, χ_γ - фаза колебаний в медленных переменных, Ω - частота внешнего воздействия.

В итоге уравнение резонансной кривой имеет вид:

$$\frac{c_\gamma^2}{4\omega_\gamma^2} A_\gamma^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_\gamma} - 1 - \frac{3}{8} A_\gamma^2\right)^2 A_\gamma^2 = \frac{1}{4} \frac{A^2 \beta}{\omega_\gamma^6}.
 \tag{14}$$

Численное интегрирование уравнений (13) позволяет получить установив-

шийся стационарный режим, который с позиции теории нелинейных динамических систем является положением равновесия и может быть продолжен по параметру с помощью численной процедуры, реализованной в программном комплексе Matcont [35].

На рисунках 4-5 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и фазо-частотные характеристики (ФЧХ) осциллятора Дуффинга (модели, описывающей механическую часть исследуемой системы) для трёх выбранных моментов времени и положение текущей точки реального динамического процесса на одном графике.

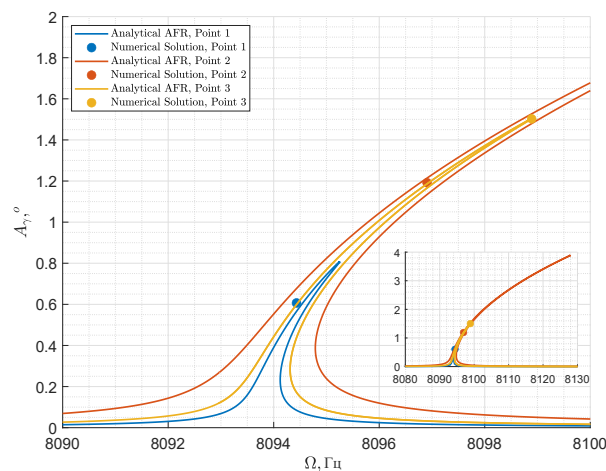


Рис. 4: Мгновенные резонансные кривые системы и соответствующие значения амплитуды колебаний

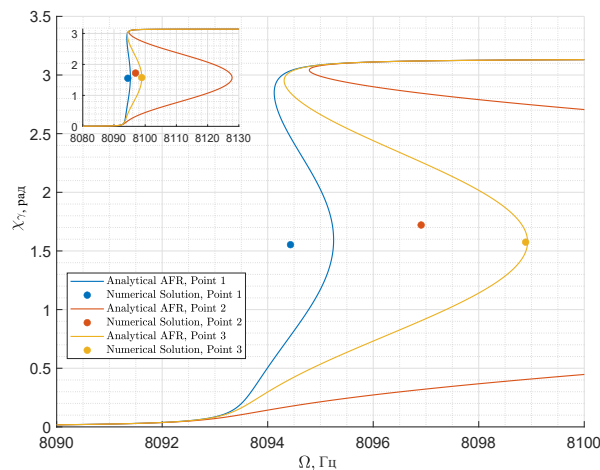


Рис. 5: ФЧХ системы и соответствующие значения фазы колебаний

Как видно из рисунков 4-5 мгновенные резонансные кривые и фазо-частотные характеристики видоизменяются при действии различных значений амплитуды внешнего воздействия. Контуры ФАПЧ и АРУ в каждый момент времени постепенно настраиваются на резонансный пик системы, что можно увидеть для третьей точки графика 3.

В дальнейшем в качестве рабочей принимается стратегия настройки системы управления колебаниями, соответствующая случаю быстрой работы контура АРУ и относительно медленной работы контура ФАПЧ: в этом случае минимизируется сложность динамики замкнутой системы по причине слабости взаимного влияния контуров подстройки амплитуды и фазы воздействия электростатического привода.

4 Динамика системы в оригинальном контуре ФАПЧ

4.1 Механически линейная модель

Рассмотрим колебания первичной оси в механически линейной постановке ($\beta = 0$). В таблице 2 приведём параметры контуров управления линейной системой. Принято, что полюса ФНЧ систем ФАПЧ и АРУ равны друг другу $\lambda_{AGC} = \lambda_{PLL}$:

Таблица 2: Параметры контуров управления

Q_z	f_0	K_G	K_{VCO}	λ_{PLL}	K_C^{AGC}	K_p^{AGC}	K_C^{PLL}
60000	8092	1	10^4	$f_\gamma/10$	0.02	10^6	0.2

Существенной особенностью рассматриваемой системы является высокая добротность механического звена, что, как показано в [33], приводит к росту сложности структуры бассейнов притяжения требуемых стационарных динамических режимов системы «резонатор-контур управления» и связанным с этим трудностям аналитического и численного исследования.

На рисунке 6 представлено сравнение результатов моделирования изначальной системы уравнений (2) с решением системы уравнений в медленных переменных (8) с помощью метода Рунге-Кутты 4-5 порядков, который реализован встроенной функцией ode45 в Matlab.

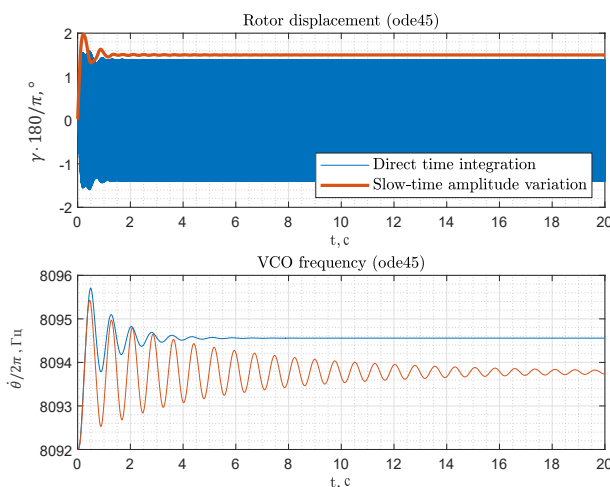
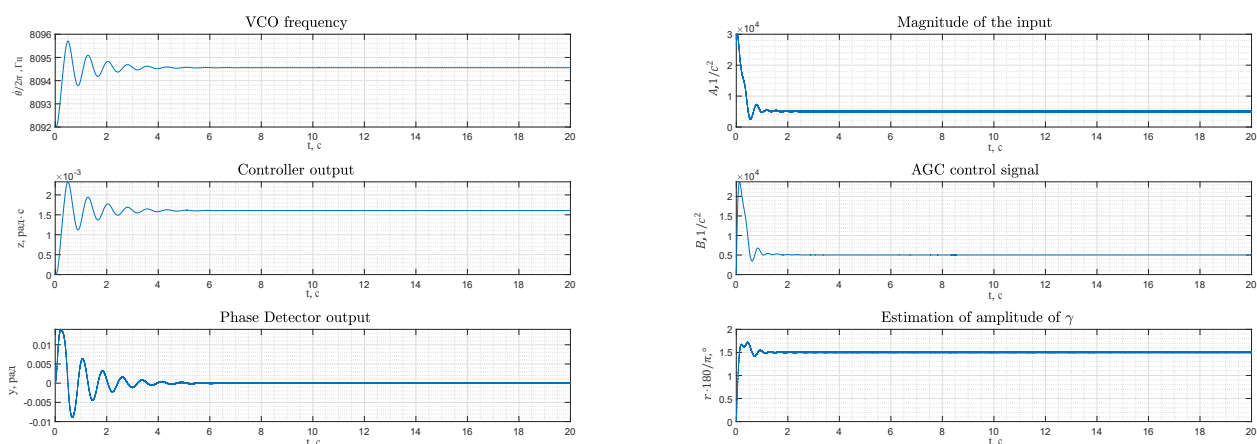


Рис. 6: Сравнение прямого численного интегрирования и асимптотического решений

Соответствующие параметры контуров ФАПЧ и АРУ представлены на рисунке 7.



а) Параметры контура ФАПЧ

б) Параметры контура АРУ

Рис. 7: Параметры контура ФАПЧ и АРУ

Из рисунка 6 видно, что результаты сравнения двух методов решения имеют определённое расхождение. Вопросам точности численного решения подобных систем посвящен ряд работ [36, 37, 38]. В версии Matlab2022 [39] появилась реализация метода Рунге-Кутты 8-9 порядков с повышенной точностью функцией ode89. Результаты моделирования с использованием этого решателя представлены на рисунке 8.

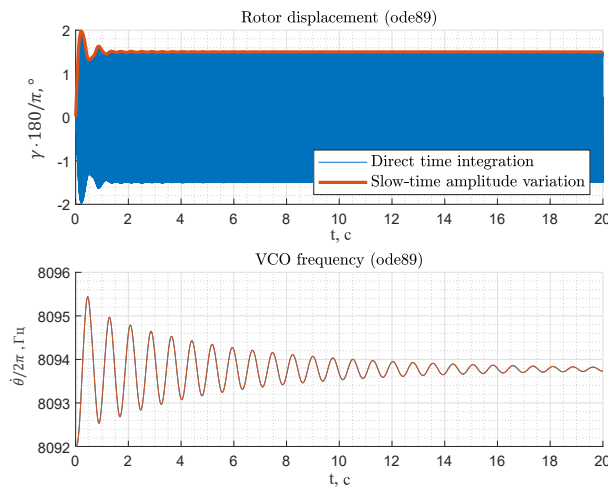
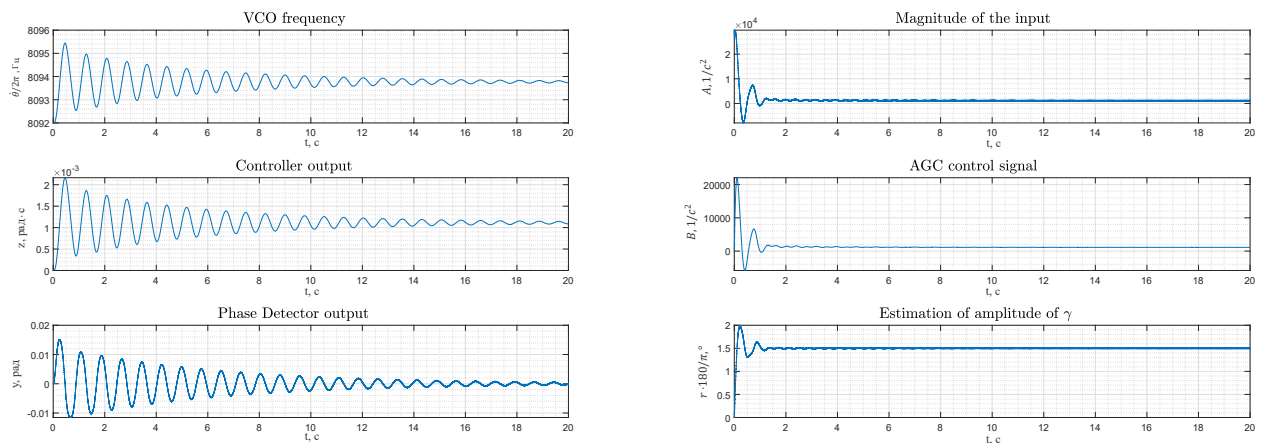


Рис. 8: Сравнение прямого численного интегрирования и асимптотического решений

Соответствующие параметры контуров ФАПЧ и АРУ представлены на рисунке 9.



а) Параметры контура ФАПЧ

б) Параметры контура АРУ

Рис. 9: Параметры контура ФАПЧ и АРУ

Видно, что повышение точности численного решения дифференциальных уравнений даёт полное соответствие результатов прямого интегрирования изначальной системы уравнений (2) и решения системы уравнений в медленных переменных (8). Установлено, что полоса захвата для линейной модели от отсчётного значения свободной частоты $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке $[-17$ Гц; $+13$ Гц].

4.2 Механически нелинейная модель

Как показано в работе [21] упругий подвес ММВГ обладает определенной нелинейностью упругой характеристики. Важность этого фактора особенно сильно проявляется для высокочастотных резонаторов, к числу которых относится и колебательный контур первичной оси ММВГ. Поэтому дальнейшим шагом исследования динамики ЧЭ является учёт нелинейности механического звена ($\beta \neq 0$).

В таблице 3 приведены параметры контуров управления нелинейной системой. Принято, что полюса ФНЧ равны друг другу $\lambda_{AGC} = \lambda_{PLL}$.

Таблица 3: Параметры контуров управления

Q_z	f_0	K_G	K_{VCO}	λ_{PLL}	K_C^{AGC}	K_p^{AGC}	K_C^{PLL}
60000	8093	1	4000	$f_\gamma/10$	0.02	10^4	0.9

Как отмечено выше, схемы низкого порядка численного интегрирования системы дифференциальных уравнений непригодны для интегрирования исходной системы (2), поэтому в дальнейшем будет применяться метод высокого порядка. На рисунке (10) представлено сравнение результатов моделирования изначальной системы уравнений (2) с решением системы уравнений в медленных переменных (8) с помощью метода Рунге-Кутты 8-9 порядков.

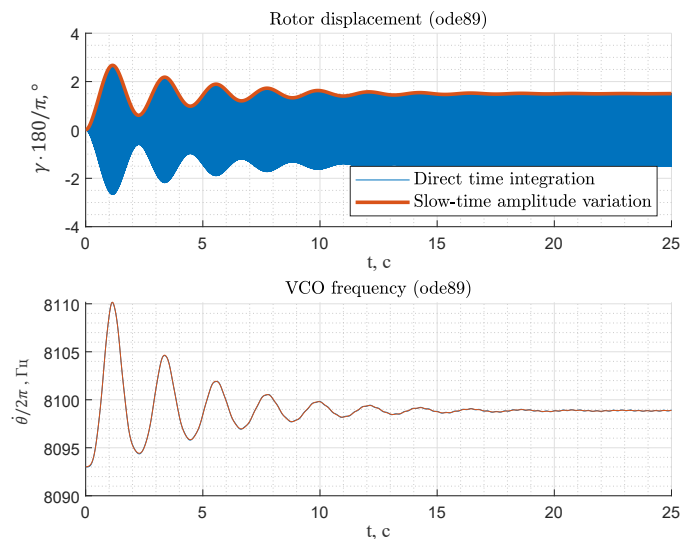
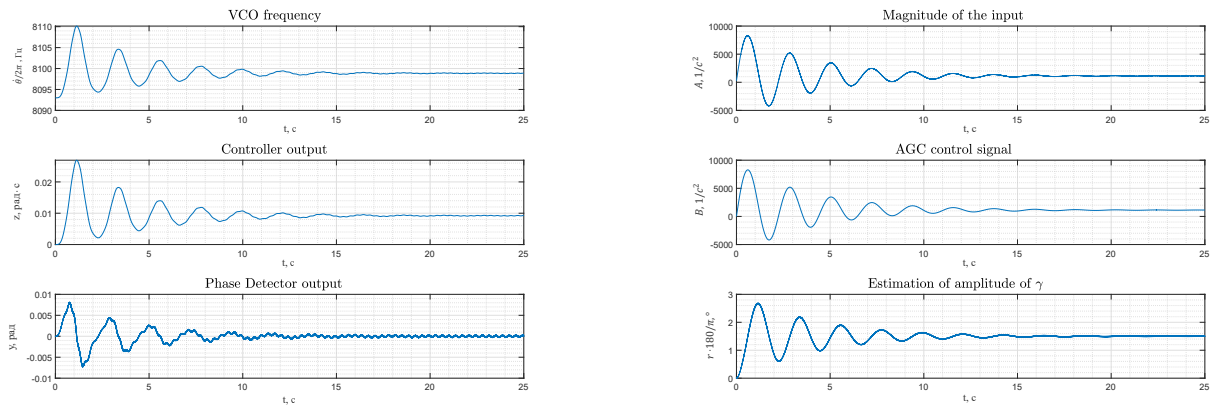


Рис. 10: Сравнение прямого численного интегрирования и асимптотического решений

Соответствующие параметры контуров ФАПЧ и АРУ представлены на рисунке 11.



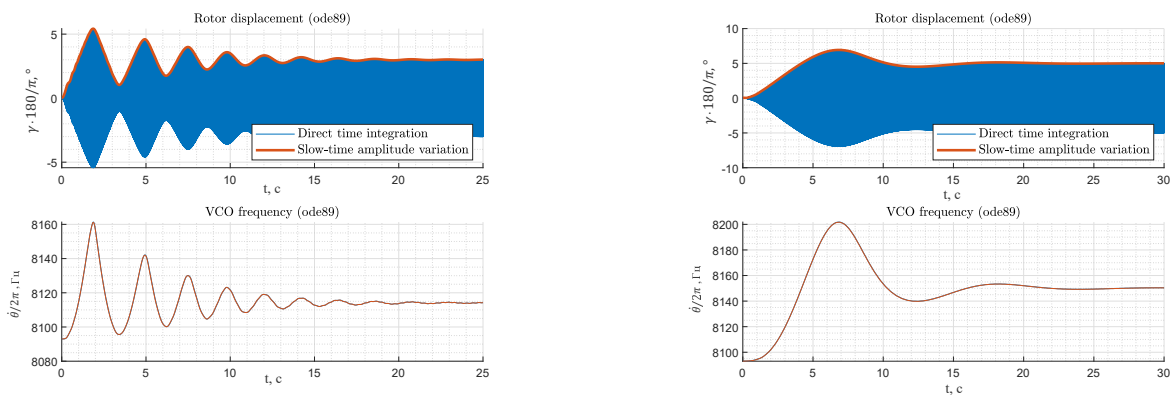
а) Параметры контура ФАПЧ

б) Параметры контура АРУ

Рис. 11: Параметры контура ФАПЧ и АРУ

Наблюдается полное соответствие результатов прямого интегрирования изначальной системы уравнений (2) и решения системы уравнений в медленных переменных (8). Установлено, что полоса захвата для нелинейной модели при отсчётном значении собственной частоты $f_0 = 8093$ Гц составляет диапазон $[-7$ Гц; $+5$ Гц].

С практической точки зрения выход на большие углы первичных колебаний позволяет получить более сильный сигнал с вторичной оси колебаний, что значительно упрощает обработку этого сигнала для извлечения угловой скорости подвижного объекта. На рисунке 12 показаны результаты моделирования для требуемых значений амплитуды первичных колебаний 3° и 5° . Для достижения амплитуды первичных колебаний 5° возникла необходимость изменить два параметра $K_C^{AGC} = 0.001$, $K_p^{AGC} = 10^3$ от референсных значений таблицы 3.



а) Выход амплитуды на 3°

б) Выход амплитуды на 5°

Рис. 12: Сравнение прямого численного интегрирования и асимптотического решений

Механически нелинейная система является существенно более сложной с точки зрения управления колебаниями [40]. Как видно из рисунков 10 и 12 в выходной характеристике частоты ГУН наблюдаются небольшие нежелательные остаточные осцилляции, которые влияют на точность измерения угловой скорости объекта. Несмотря на рост вклада «паразитных» нелинейных слагаемых механической природы, наблюдается стабильная работа контура управления.

В таблице 4 приведена оценка эффективности работы контуров управления АРУ и оригинальной ФАПЧ с точки зрения быстродействия, точности выхода частоты ГУН и диапазона полосы захвата в рабочий режим.

Таблица 4: Оценка эффективности работы контуров управления АРУ и оригинальной ФАПЧ

Параметр сравнения	Линейная модель	Механически нелинейная модель
Минимальный размах по частоте ГУН	± 0.02 Гц	± 0.07 Гц
Время выхода в рабочий режим	20 с	25 с
Полоса захвата в рабочий режим от заданного значения f_0	[-17 Гц; +13 Гц]	[-7 Гц; +5 Гц]

Величина минимального размаха по частоте оценивается на основании остаточных осцилляций в характеристике частоты ГУН, которая равняется разнице между максимальным и минимальным значением частоты в почти установившемся режиме. Из сравнения двух схем можно сделать следующие выводы: при учете свойственной системе механической нелинейности наблюдаем рост амплитуды остаточных осцилляций вокруг резонансного значения частоты, большее время выхода на стационарный режим и значительно меньшую полосу захвата системы ФАПЧ в рабочий режим [41, 42].

Из представленных выше результатов можно увидеть, что для систем с высокой добротностью наблюдается длительный выход на установившийся режим работы с нужной частотой ГУН и амплитудой колебаний. Это связано с двумя факторами: во-первых, в рассмотренной модели контура ФАПЧ отсутствует пропорциональное звено в регуляторе, которое позволяет ускорить работу контура управления; во-вторых, в выходном сигнале фазового детектора помимо полезного сигнала, используемого для настройки требуемой разности фаз, также присутствует паразитная гармоника в виде синуса двойной частоты, которая нивелируется ФНЧ, но полностью исключить это высокочастотное колебание не удаётся. В связи с этим, далее будет представлена модифицированная схема ФАПЧ, которая позволяет избавиться от

нежелательной высокочастотной составляющей в выходном сигнале фазового детектора и при этом не использовать ФНЧ.

5 Динамика системы в модифицированном контуре ФАПЧ

Отличием модифицированной схемы являются явное вычитание синуса двойной частоты, что даёт возможность не использовать ФНЧ в составе фазового детектора, и введение ПИ-регулятора в состав контура ФАПЧ. Преимуществами данной схемы является понижение порядка системы на единицу и, как покажут результаты далее, частота ГУН сходится к заданному значению значительно быстрее за счёт введения пропорционального звена в регулятор.

Схема с модифицированной схемой ФАПЧ представлена на рисунке 13.

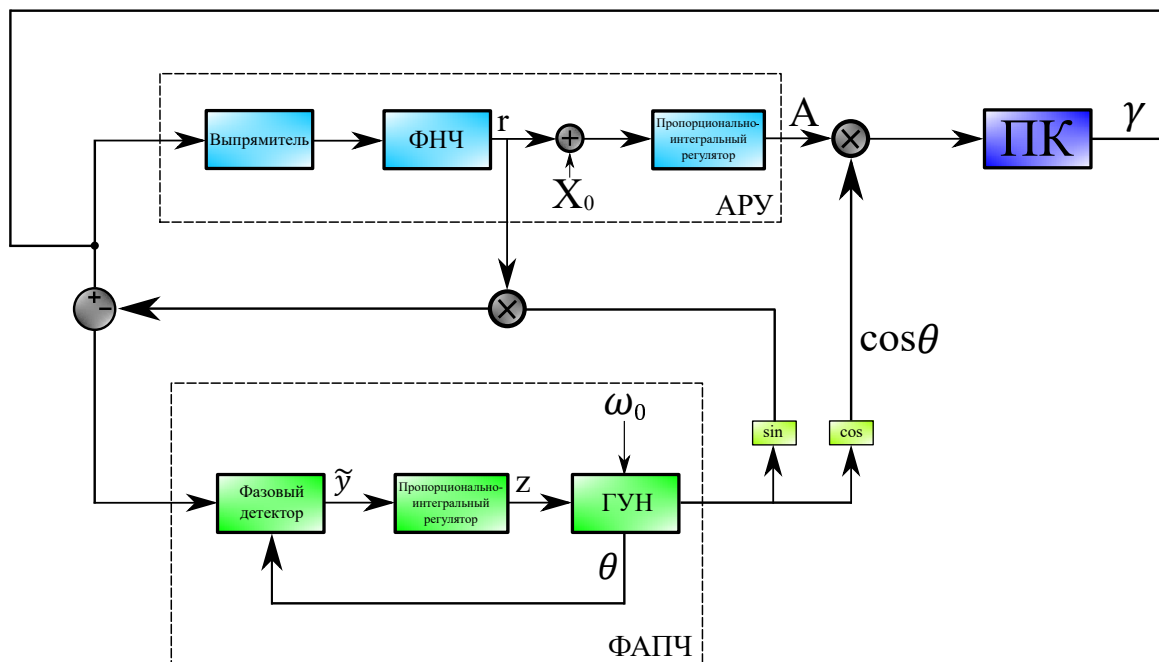


Рис. 13: Схема модифицированной ФАПЧ и АРУ

Математическая модель оси ПК в модифицированной системе ФАПЧ-АРУ описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\gamma} + c_d \dot{\gamma} + \omega_\gamma^2 \gamma + \beta \gamma^3 &= A \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= \omega_0 + K_{VCO}(z + K_p^{PLL} K_G(\gamma - r \sin \theta) \cos \theta) \\
 \dot{z} &= K_I^{PLL} K_G(\gamma - r \sin \theta) \cos \theta \\
 A &= K_p^{AGC} (X_0 - r) + B \\
 \dot{B} &= K_I^{AGC} (X_0 - r) \\
 \dot{r} &= \lambda^{AGC} \left(\frac{\pi}{2} |\gamma| - r \right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где K_p^{PLL} - пропорциональный коэффициент регулятора схемы ФАПЧ, \tilde{y} на схеме означает выход фазового детектора без фильтра нижних частот $\tilde{y} = K_G(\gamma - r \sin \theta) \cos \theta$.

5.1 Механически линейная модель

Рассмотрим колебания первичной оси в линейной постановке ($\beta = 0$). В таблице 5 приведены основные параметры контуров управления, используемые при численных расчётах динамики системы.

Таблица 5: Параметры контуров управления

Q_z	f_0	K_G	K_{VCO}	λ_{AGC}	K_C^{AGC}	K_p^{AGC}	K_p^{PLL}	K_i^{PLL}
60000	8092	1	4000	$f_\gamma/10$	0.9	10^8	2	20

На рисунке 14 представлены результаты моделирования системы уравнений (15) с помощью численной процедуры интегрирования встроенной функцией ode89 в Matlab.

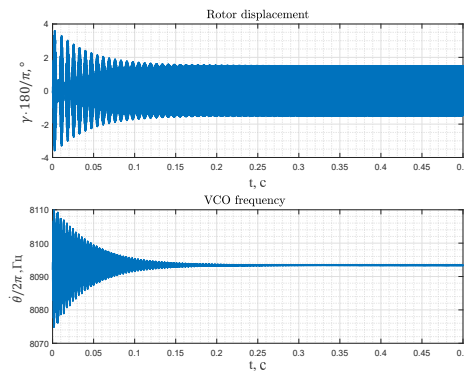
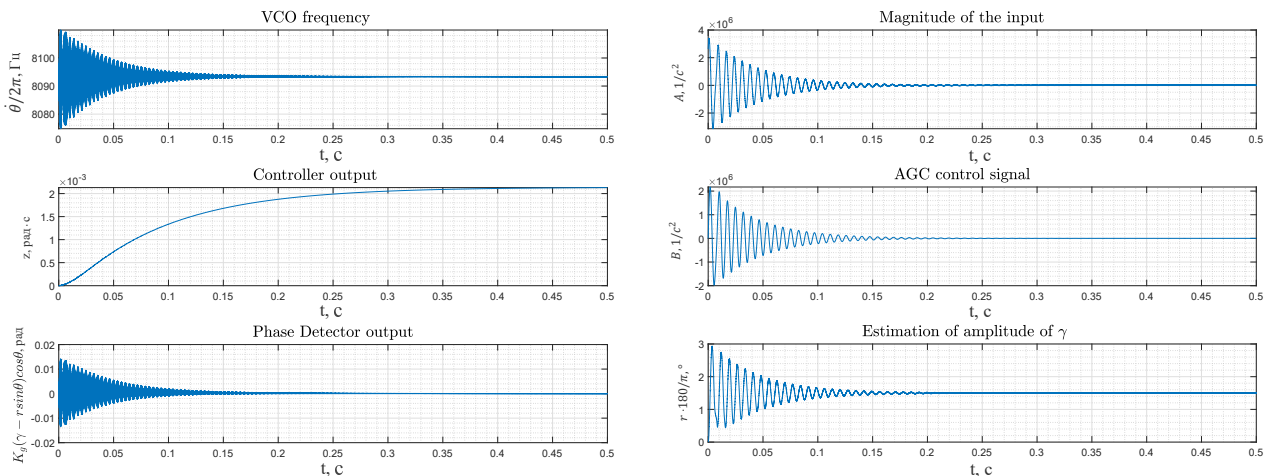


Рис. 14: Амплитуда первичных колебаний и частота ГУН

Соответствующие параметры контуров ФАПЧ и АРУ представлены на рисунке 15.



а) Параметры контура ФАПЧ

б) Параметры контура АРУ

Рис. 15: Параметры контура ФАПЧ и АРУ

Из графиков видно, что выход на заданный установившийся режим наступает через 0.5 с, что значительно быстрее, чем для системы, в которой был использован изначальный контур ФАПЧ. Установлено, что полоса захвата для линейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке $[-4$ Гц; $+8$ Гц].

5.2 Механически нелинейная модель

Теперь рассмотрим колебания первичной оси в нелинейной постановке ($\beta \neq 0$). В таблице 6 приведены основные параметры контуров управления, используемые при численных расчётах динамики системы.

Таблица 6: Параметры контуров управления

Q_z	f_0	K_G	K_{VCO}	λ_{AGC}	K_C^{AGC}	K_p^{AGC}	K_p^{PLL}	K_i^{PLL}
60000	8092	1	10^4	$f_\gamma/10$	0.9	10^8	3.5	20

На рисунке 16 представлены результаты моделирования системы уравнений (15).

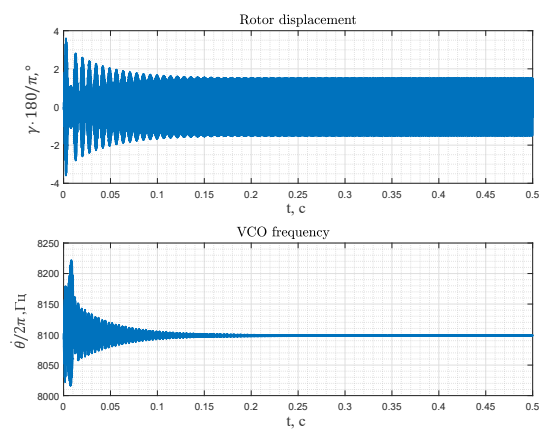
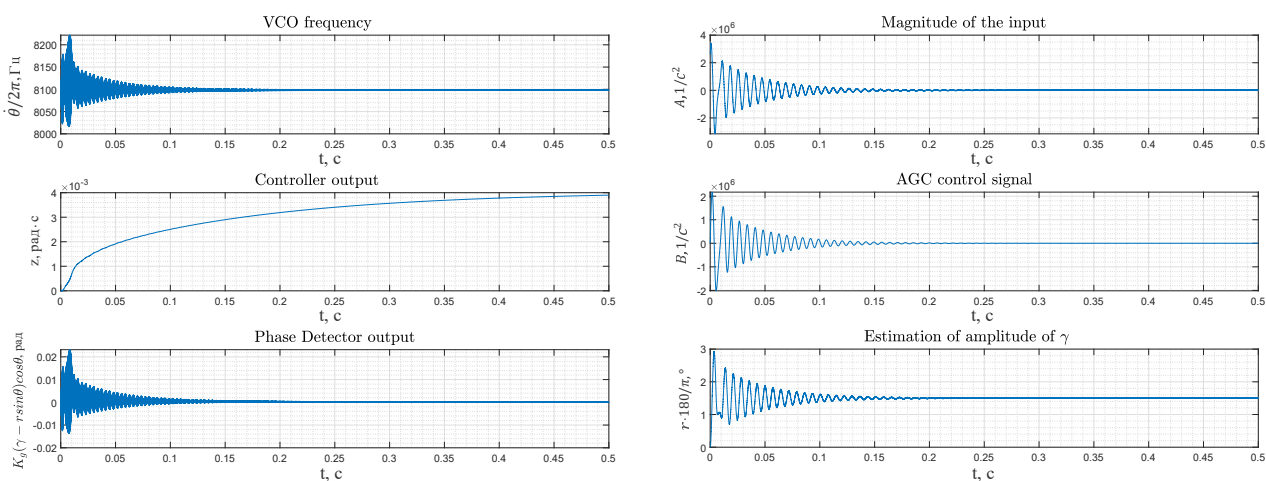


Рис. 16: Амплитуда первичных колебаний и частота ГУН

Соответствующие параметры контуров ФАПЧ и АРУ представлены на рисунке 17.



а) Параметры контура ФАПЧ

б) Параметры контура АРУ

Рис. 17: Параметры контура ФАПЧ и АРУ

Полоса захвата для нелинейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке $[-2 \text{ Гц}; +35 \text{ Гц}]$. На рисунках 18а) и 18б) приведены результаты выхода на рабочий режим 3° и 5° .

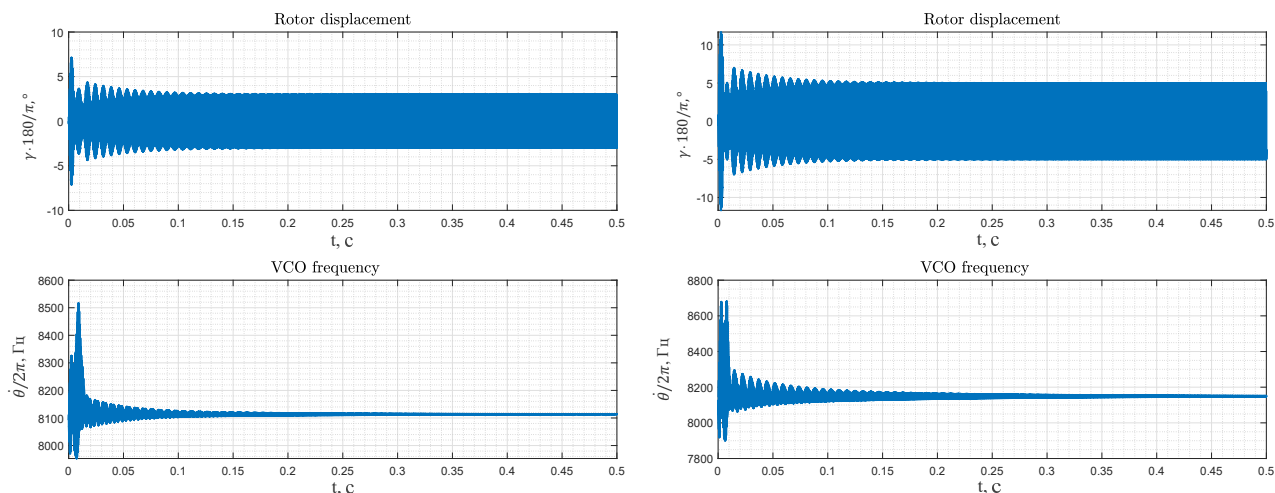
а) Выход амплитуды на 3° б) Выход амплитуды на 5°

Рис. 18: Амплитуда первичных колебаний и частота ГУН

Из графиков видно, что система сохраняет устойчивость при более высоких значениях угла колебаний первичных колебаний. По результатам моделирования были сделаны следующие выводы:

- 1) Увеличение K_i^{PLL} приводит к уменьшению осцилляций вокруг установившегося решения для $\dot{\theta}$.
- 2) Увеличение K_G приводит к уменьшению выходного значения по $\dot{\theta}$.
- 3) Увеличение K_p^{PLL} приводит к увеличению значений по $\dot{\theta}$ в переходном процессе.
- 4) Для стабильной работы контура в нелинейной постановке необходимо увеличить K_{VCO} и K_p^{PLL} .

В таблице 7 приведена оценка эффективности работы контуров управления АРУ и модифицированной ФАПЧ с точки зрения быстродействия, точности выхода частоты ГУН и полосы захвата в рабочий режим.

Таблица 7: Оценка эффективности работы контуров управления АРУ и модифицированной ФАПЧ

Параметр сравнения	Линейная модель	Механически нелинейная модель
Минимальный размах по частоте ГУН	± 0.13 Гц	± 0.44 Гц
Время выхода в рабочий режим	0.5 с	0.5 с
Полоса захвата в рабочий режим от заданного значения f_0	[-4 Гц; +8 Гц]	[-2 Гц; +35 Гц]

По сравнению с контуром управления с оригинальной ФАПЧ для моди-

фицированной схемы контуров управления наблюдается большой размах по частоте ГУН (для линейной модели ± 0.13 Гц, для нелинейной ± 0.44 Гц), меньшее время выхода в рабочий режим - 0.5 с, и ширина зоны затягивания имеет сильно выраженный несимметричный характер диапазона значений свободной частоты.

6 Сравнение двух контуров управления

В таблице 8 приведём основные рекомендации по выбору параметров контуров управления для обеих постановок, а также наблюдения за эволюцией динамики основных выходных характеристик системы.

Таблица 8: Сравнение параметров контуров управления

Оригинальная система ФАПЧ	Модифицированная система ФАПЧ
$Q_z = 60000$	$Q_z = 60000$
$K_C^{PLL} = [0.2; 0.9]$	$K_i^{PLL} = [5; 20], K_p^{PLL} = [2; 10]$
$K_G = [1; 10^6]$	$K_G = [1; 10^2]$
$K_{VCO} = [4 \cdot 10^3; 10^4]$	$K_{VCO} = [4 \cdot 10^3; 10^4]$
$\lambda_{PLL} = f_\gamma/10, \lambda_{AGC} = \lambda_{PLL}$	$\lambda_{AGC} = f_\gamma/10$
$K_C^{AGC} = 0.02$	$K_C^{AGC} = 0.9$
$K_p^{AGC} = 10^6$	$K_p^{AGC} = 10^8$
Полоса захвата для линейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке $[-17$ Гц; $+13$ Гц].	Полоса захвата для линейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке $[-4$ Гц; $+8$ Гц].
Полоса захвата для нелинейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8093$ Гц находится в промежутке $[-7$ Гц; $+5$ Гц].	Полоса захвата для нелинейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке $[-2$ Гц; $+35$ Гц].
Выход на $1.5^\circ, 3^\circ, 5^\circ$	Выход на $1.5^\circ, 3^\circ, 5^\circ$
Время выхода на рабочий режим для линейной модели 20 с	Время выхода на рабочий режим для линейной модели 0.5 с
Время выхода на рабочий режим для нелинейной модели 25 с	Время выхода на рабочий режим для нелинейной модели 0.5 с
Минимальный размах по частоте ГУН для линейной модели ± 0.02 Гц	Минимальный размах по частоте ГУН для линейной модели ± 0.13 Гц
Минимальный размах по частоте ГУН для нелинейной модели ± 0.07 Гц	Минимальный размах по частоте ГУН для нелинейной модели ± 0.44 Гц

В таблице 8 приведены диапазоны изменения параметров систем управления, а также из таблицы можно сделать несколько выводов: контур управления АРУ-оригинальная ФАПЧ имеет практически симметричную полосу

захвата, существенное время выхода в рабочий режим (20 с и 25 с) и небольшой размах по частоте ГУН (для линейной модели ± 0.02 Гц, для нелинейной ± 0.07 Гц), в то время как контур управления АРУ-модифицированная ФАПЧ имеет несимметричную полосу захвата, малое время выхода в рабочий режим (0.5 с) и несколько больший размах по частоте ГУН (для линейной модели ± 0.13 Гц, для нелинейной ± 0.44 Гц).

7 Заключение

В настоящей работе проведено исследование динамики первичных колебаний высокочастотного микромеханического резонатора - чувствительного элемента МЭМС-гироскопа RR-типа - при действии различных реализаций системы фазовой автоподстройки частоты, работающей совместно с системой автоматической регулировки усиления электростатического привода. Исследование динамики объекта выполнено как численно, так и аналитически - с применением метода осреднения. Получены условия устойчивости стационарного режима в линейном приближении. Рассмотрены вопросы точности различных методов численного решения дифференциальных уравнений контура первичных колебаний. Исследовано влияние механической нелинейности резонатора на динамику резонатора и системы управления. Предложена реализация схемы ФАПЧ пониженного порядка, не содержащая паразитного сигнала двойной частоты на выходе фазового детектора. Проанализированы выходные характеристики систем управления (быстродействие, полоса захвата и др.) и сделаны качественные выводы об особенностях взаимодействия динамики механического колебательного звена и контура ФАПЧ-АРУ.

8 Поддержка

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>

Список литературы

- [1] Alper S. E., Sahin K. and Akin T. An Analysis to Improve Stability of Drive-Mode Oscillations in Capacitive Vibratory MEMS Gyroscopes. IEEE 22nd

- International Conference on Micro Electro Mechanical Systems., 2009, pp. 817–820, doi: 10.1109/MEMSYS.2009.4805508.
- [2] Dong L. and Avanesian D. Drive-Mode Control for Vibrational MEMS Gyroscopes. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 4, pp. 956–963, 2009, doi: 10.1109/TIE.2008.2010088.
- [3] Zhu H, Jin Z., Hu S., Ma W., Liu Y. Drive mode control for MEMS gyroscopes with electrostatically tunable structure. *International Conference on Manipulation, Manufacturing and Measurement on the Nanoscale. – IEEE*, 2013. – pp. 273–276, doi: 10.1109/3M-NANO.2013.6737430.
- [4] Nesterenko T. G. et al. Amplitude control system of drive-mode oscillations of MEMS gyroscopes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 516. No. 1. IOP Publishing, 2019. doi: 10.1088/1757-899X/516/1/012009.
- [5] Wu H., Yang H., Yin T., Zhang, H. Stability analysis of MEMS gyroscope drive loop based on CPPLL. *Asia Pacific Conference on Postgraduate Research in Microelectronics and Electronics*, 2011, pp. 45–48.
- [6] Demir A., Hanay M. S. Phase-locked loop based resonant sensors: A rigorous theory and general analysis framework for deciphering fundamental sensitivity limitations due to noise. *arXiv preprint arXiv:1903.06497*. 2019.
- [7] Люкшонков Р. Г. Термокомпенсация в микромеханических гироскопах с контуром стабилизации амплитуды первичных колебаний: дис. – СПб, 2016.
- [8] Leonov G. A. et al. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2015. Vol. 62. no. 10. pp. 2454–2464.
- [9] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Seledzhi S. M. Phase Locked Loops Design and Analysis. *ICINCO-SPSMC*. 2008. pp. 114–118.
- [10] Yuldashev R.V. et al. The conservative lock-in range for PLL with lead-lag filter and triangular phase detector characteristic. *arXiv preprint arXiv:2112.01602*. 2021.
- [11] Aleksandrov K. D. et al. Computation of the lock-in ranges of phase-locked loops with PI filter. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49. no. 14. pp. 36–41.

- [12] Alexandrov K. D. et al. Pull-in range of the classical PLL with impulse signals. *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48. no. 1. pp. 562–567.
- [13] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. *Nonlinear mathematical models of phase-locked loops. Stability and oscillations*. Cambridge University Press, 2014.
- [14] Kuznetsov N. V. et al. Nonlinear analysis of classical phase-locked loops in signal's phase space. *IFAC Proceedings Volumes*. 2014. Vol. 47. no. 3. pp. 8253–8258.
- [15] Kuznetsov N. V. et al. Effects of PLL Architecture on MEMS Gyroscope Performance. *Gyroscopy and Navigation*. 2022. Vol. 13. no. 1. pp. 44–52.
- [16] Kuznetsov N. V. et al. The Gardner Problem on the Lock-In Range of Second-Order Type 2 Phase-Locked Loops. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023.
- [17] M'closkey R. T., Vakakis A. Analysis of a microsensor automatic gain control loop. *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*. IEEE, 1999. Vol. 5. pp. 3307–3311, doi: 10.1109/ACC.1999.782377.
- [18] Sun X., Horowitz R., Komvopoulos K. Stability and resolution analysis of a phase-locked loop natural frequency tracking system for MEMS fatigue testing. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*. 2002. Vol. 124. no. 4. pp. 599–605.
- [19] Park S. et al. Oscillation control algorithms for resonant sensors with applications to vibratory gyroscopes. *Sensors*. 2009. Vol. 9. no. 8. pp. 5952–5967.
- [20] Indeitsev D. A. et al. Nonlinear dynamics of MEMS resonator in PLL-AGC self-oscillation loop. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 104. pp. 3187–3204.
- [21] Indeitsev D. A. et al. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 105. pp. 1273–1296.
- [22] Miller J. M. L. et al. Phase control of self-excited parametric resonators. *Physical Review Applied*. 2019. Vol. 12. no. 4. pp. 044053.
- [23] Perl T. et al. Control of vibratory MEMS gyroscope with the drive mode excited through parametric resonance. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2021. Vol. 143. no. 5.

- [24] Nekrasov Y. A. et al. Improving the performance of the Russian RR-type MEMS gyro. 21st St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Elektropribor: St. Petersburg, 2014. pp. 285–293.
- [25] Nekrasov Y. A., Pavlova S. V., Moiseev N. V. Optimization of electrode structure of RR-type MEMS gyro. 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2015-Proceedings. 2015. pp. 334–337.
- [26] Baranova E. A., Evstifeev M. I., Eliseev D. P. Simulation of translational vibrations effect on torque-to-balance RR-type MEMS gyroscope. Gyroscopy and Navigation. 2018. Vol. 9. pp. 50–56.
- [27] Kovalev A. Phase method for measuring the output signal of a single-mass MEMS gyroscope as a possibility of improving its performance. 2019 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). IEEE, 2019. pp. 1–5.
- [28] Некрасов Я. А. и др. Влияние поступательных вибраций, ударов и акустических помех на характеристики микромеханического гироскопа. Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24. no. 2. С. 56–67.
- [29] Saggin F. Robust Control for MEMS gyroscopes: Diss. – Lyon, 2021.
- [30] Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. Рипол Классик, 1972.
- [31] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. 1978.
- [32] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Seledzhi S. M. Analysis of phase-locked systems with discontinuous characteristics. IFAC Proceedings Volumes. 2006. Vol. 39. no. 8. pp. 107–112.
- [33] Indeitsev D. A. et al. Nonlinear dynamics of MEMS resonator in PLL-AGC self-oscillation loop. Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 104. pp. 3187–3204.
- [34] Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. Т. 456.
- [35] Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A. MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2003. Vol. 29. no. 2. pp. 141–164.

- [36] Kuznetsov N. V. et al. Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 51. pp. 39–49.
- [37] Bianchi G. et al. Limitations of PLL simulation: hidden oscillations in MATLAB and SPICE. 2015 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). IEEE, 2015. pp. 79–84.
- [38] Blagov M. V. et al. Simulation of PLL with impulse signals in MATLAB: Limitations, hidden oscillations, and pull-in range. 2015 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). IEEE, 2015. pp. 85–90.
- [39] Matlab L. Version 9.12. 0.1884302 (R2022a). 2022.
- [40] Kuznetsov N. V. Theory of hidden oscillations and stability of control systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2020. Vol. 59. pp. 647–668.
- [41] Kuznetsov N. V. et al. Harmonic balance analysis of pull-in range and oscillatory behavior of third-order type 2 analog PLLs. *IFAC-PapersOnLine*. 2020. Vol. 53. no. 2. pp. 6378–6383.
- [42] Kuznetsov N. et al. Nonlinear analysis of charge-pump phase-locked loop: the hold-in and pull-in ranges. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2021. Vol. 68. no. 10. pp. 4049–4061.

Nonlinear dynamics of the primary oscillation circuit of a MEMS gyroscope under the action of phase-locked loop and automatic gain control systems

V.S. Igumnova¹, A.V. Lukin¹, I.A. Popov¹, N.V. Kuznetsov^{2,3}, M.Yu. Lobachev², Ya.V. Belyaev⁴.

¹ Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg, 195251
Russia

² St Petersburg State University, St.Petersburg, 199034 Russia

³ Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of
Sciences, St.Petersburg, 199178 Russia

⁴ Concern CSRI Elektropribor, JSC, St.Petersburg, 197046 Russia
lukin_av@spbstu.ru

Abstract. In this work, we study the dynamics of primary oscillations of a high-Q micromechanical resonator - a sensitive element of an RR-type MEMS gyroscope - under the action of various implementations of a phase-locked loop system operating in conjunction with an automatic gain control system for an electrostatic drive. The study of the dynamics of the object is carried out both numerically and analytically - using the averaging method. Conditions for the stability of a stationary regime in a linear approximation are obtained. The questions of accuracy of various methods of numerical solution of differential equations of the circuit of primary oscillations are considered. The influence of the mechanical nonlinearity of the resonator on the dynamics of the resonator and the control system has been studied. An implementation of a low-order PLL circuit that does not contain a double-frequency spurious signal at the output of the phase detector is proposed. The output characteristics of control systems (speed, capture bandwidth, etc.) are analyzed and qualitative conclusions are drawn about the features of the interaction between the dynamics of a mechanical oscillatory link and the PLL-ARC circuit.

Keywords: MEMS gyroscope, primary oscillations, PLL, AGC.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 21-71-10009, <https://rscf.ru/en/project/21-71-10009/>.