Демьянович Ю.К. [1], Иванцова О.Н.[1], Мирошниченко И.Д.[1]

УТОЧНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ

Данная работа посвящена апостериорному улучшению аппроксимации в проекционном методе решения линейного уравнения с самосопряженным положительно определенным оператором. Улучшение получается за счет расширения проекционного пространства. Упомянутое расширение представляет собой линейную оболочку исходного проекционного пространства и добавляемого элемента энергетического пространства. Рассмотрение априори заданного параметризованного класса таких элементов позволяет построить адаптивный метод упомянутого улучшения. Предлагаемый подход применен к методу конечных элементов для одномерной краевой задачи второго порядка.

Последовательное применение такого подхода позволяет оптимизировать процесс уточнения численного решения краевой задачи без существенного увеличения требований к ресурсам вычислительной системы. Предлагаемый подход приводит к построению адаптивной последовательности объемлющих пространств. Эти пространства образуют телескопическую систему вложенных пространств, на основе которой строится адаптивный вэйвлетный пакет для экономной передачи информации.

Рассмотрим гильбертово пространство H со скалярным произведением (u, v). Пусть $\boldsymbol{A}$ самосопряженный положительно определенный оператор с областью определения $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{A})$. Рассмотрим энергетическое пространство H_A оператора $\boldsymbol{A}$. Норму и скалярное произведение в пространстве H_A обозначим $\mathrm{I}u\mathrm{I}$ и $[u, v]$ соответственно, так что $\mathbf{I}u\mathbf{I} = \sqrt{[u, u]}$. Здесь $u, v \in H_A$.

В рассматриваемых условиях решение задачи

$$\boldsymbol{Au = f}, \qquad \boldsymbol{f \in H} \tag{1}$$

эквивалентно (см. [1]) решению задачи

$$\min_{u \in H_A} \boldsymbol{F}(u) \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F}(u)$ функционал энергии оператора $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{F}(u) = \mathrm{I}u\mathrm{I}^2 - 2(u, f).$$

Решение задачи (1) обозначим u_*.

Пусть $\boldsymbol{S}$ подпространство пространства H_A. Рассмотрим решение $\tilde{u}_*$ задачи

$$\min_{\tilde{u} \in S} \boldsymbol{F}(\tilde{u}) \tag{3}$$

Предположим, что φ элемент энергетического пространства H_A, не принадлежащий пространству $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{\varphi} \notin S$. Пусть S_1 линейная оболочка пространства $\boldsymbol{S}$ и элемента φ,

$$S_1 \overset{def}{=} \boldsymbol{L}\{\boldsymbol{S}, \varphi\}.$$

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9.

Для функции $$\text{F}(t) \overset{def}{=} \boldsymbol{F}(\tilde{u}_* + t\varphi)$$

поставим вопрос об отыскании точки t_* минимума этой функции,

$$\min_{t \epsilon \boldsymbol{R}^1} \text{F}(t)$$

Теорема 1. *Точка* t_* *минимума функции* $F(t)$ *существует и единственна. Справедливо соотношение*

$$\boldsymbol{F}(\tilde{u}_* + t\varphi) = \boldsymbol{F}(\tilde{u}_*) - \frac{\{(f,\varphi) - [\tilde{u}_*, v]\}^2}{\mathrm{I}\varphi\mathrm{I}^2}. \tag{4}$$

Формула (4) означает, что при $\boldsymbol{\varphi} \notin \mathrm{S}$ энергию исходного приближения $\tilde{u}_*$, вообще говоря, можно уменьшить за счет перехода к новому приближению $\tilde{u}_* + t\boldsymbol{\varphi}$.

Из (4) следует равенство

$$\mathbf{I}\tilde{u}_* + t_*\,\varphi\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}\tilde{u}_* + u_*\,\mathbf{I}^2 - \boldsymbol{E},$$

где

$$\mathrm{E} \overset{\boldsymbol{def}}{=} \frac{\{[\tilde{u}_*,\varphi] - (f,\varphi)\}^2}{\mathbf{I}\varphi\mathbf{I}^2} \tag{5}$$

Элемент φ называется *уточняющим элементом*, а число *E локальным энергетическим уточнением.*

Теперь поставим вопрос о максимальном энергетическом уточнении за счет выбора уточняющего элемента φ. В этом случае необходимо выбрать класс П уточняющих элементов, среди которых ищется

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Pi}) \overset{def}{=} \sup_{\varphi \epsilon \Pi} \mathrm{E}(\varphi) \tag{6}$$

Заметим, что для эффективной реализации задачи (6) элементы класса П должны иметь явное представление. Общим примером такой ситуации может служить класс

$$\boldsymbol{\Pi} = \{\varphi_\xi \mid \varphi_\xi \,\epsilon H_A,\ \xi \,\epsilon\, [0, 1],\ \varphi_0 = \varphi_1 = 0\},$$

где φ_ξ непрерывно дифференцируемая (в некотором смысле) абстрактная функция от ξ. Полагая $\varphi = \varphi_\xi$ в (5) и приравнивая нулю производную (по ξ) от выражения (5), можно надеяться найти критические точки и определить $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Pi})$.

Примером неэффективного выбора класса **П** служит **П** = H_A. В этом случае $\tilde{u}_* + t_*\varphi_* = \tilde{u}_*$, так что найти новое приближение к решению $\tilde{u}_*$ не удается.

В качестве иллюстрации применения предлагаемого подхода рассмотрена задача об определении добавляемой координатной функции в методе конечных элементов для первой краевой задачи в случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

В рассматриваемом случае эта задача эквивалентна задаче об определении положения нового узла ξ в элементарном сеточном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$. Оптимальное положение нового узла определяется поведением коэффициентов на упомянутом промежутке. В случае постоянства коэффициентов на этом промежутке наилучшим положением оказывается середина промежутка, $\xi = (x_k + x_{k+1})/2$.

Ключевые слова: вэйвлетный пакет, аппроксимация в проекционном методе, метод конечных элементов, одномерная краевая задача второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант Pure ID 93852135, 92424538).

1. С.Г. Михлин. Вариационно-сеточная аппроксимация // Зап. науч. семин. Ленингр. отделения Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.1974. Т.50.