НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ, СПОРТА И ЗДОРОВЬЯ
ИМЕНИ П.Ф. ЛЕСГАФТА, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

А.Б. ЯКОВЛЕВ, В.В. АЗАНЧЕВСКИЙ,
Ф.Е. ЗАХАРОВ, О.В. ТИХОНЕНКОВА

БИОМЕХАНИКА ДВИГАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: МЕХАНИКА

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2017

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ, СПОРТА И ЗДОРОВЬЯ
ИМЕНИ П.Ф. ЛЕСГАФТА, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

А.Б. ЯКОВЛЕВ, В.В. АЗАНЧЕВСКИЙ,
Ф.Е. ЗАХАРОВ, О.В. ТИХОНЕНКОВА

БИОМЕХАНИКА ДВИГАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: МЕХАНИКА

Учебное пособие

Рекомендовано учебно-методическим советом НГУ им. П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург в качестве учебного пособия по направлениям 49.03.01 «Физическая культура» и 49.03.02 «Физическая культура для лиц с отклонениями в состоянии здоровья (адаптивная физическая культура)»

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2017

УДК 796.012
ББК 75.0я73
Я47

Рецензенты:

Г.П. Иванова – д-р биол. наук, профессор НГУ им. П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург;
П.И. Бегун – д-р техн. наук, профессор кафедры прикладной механики и инженерной графики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета.

Яковлев, А. Б.

Я47 Биомеханика двигательной деятельности: механика : учебное пособие / А. Б. Яковлев, В. В. Азанчевский, Ф. Е. Захаров, О. В. Тихоненкова ; Национальный государственный университет физической культуры, спорта и здоровья имени П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург. – СПб.: [б.и.], 2017. – 94 с.

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом НГУ им. П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург, протокол № 18 от 29 июня 2017 г.

Общая концепция пособия и формулировка задач разработаны Яковлевым А.Б. Материалы по разделам 1 и 2 подготовлены А.Б. Яковлевым, В.В. Азанчевским и Ф.Е. Захаровым, разделы 3 и 4 – А.Б. Яковлевым, В.В. Азанчевским и О.В. Тихоненковой.

Рекомендовано учебно-методическим советом НГУ им. П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург в качестве учебного пособия по направлениям 49.03.01 «Физическая культура» и 49.03.02 «Физическая культура для лиц с отклонениями в состоянии здоровья (адаптивная физическая культура)».

УДК 796.012
ББК 75.0я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие, посвященное рассмотрению основных задач классической механики является необходимой подготовительной частью общего учебного курса по дисциплине «Биомеханика двигательных действий», которая позволит обучающимся овладеть достаточными навыками для освоения основного курса Пособие разработано для подготовки бакалавров по направлениям 49.03.01 – «Физическая культура» и 49.03.02 – «Физическая культура для лиц с отклонениями в состоянии здоровья (АФК)».

Предлагаемое учебное пособие является оригинальным по предлагаемому подходу к формулировке и методике решения задач, ориентированных на максимальную наглядность изучаемых методов и представления результатов. Пособие является естественным продолжением учебного пособия «Математический аппарат биомеханики», подготовленного тем же коллективом авторов.

Данное пособие содержит все необходимые для самостоятельной работы студента материалы: краткие теоретические сведения, порядок выполнения практических заданий, контрольные вопросы для закрепления материала и варианты для самостоятельных работ.

Данное издание состоит из четырех разделов, включающих все основные сведения из классической механики, которые необходимы для изучения учебного курса по дисциплине «Биомеханика двигательных действий». Практические работы посвящены вычислению и графическому представлению векторов перемещения, скорости, силы, угловой скорости и других кинематических и динамических характеристик поступательного и вращательного движений. Отдельные работы посвящены вычислению таких важнейших для биомеханики характеристик как положение центра масс и момент инерции. Методика подачи материала предполагает, что практические работы могут выполняться студентами как в учебном помещении, так и самостоятельно.

РАЗДЕЛ № 1
КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
(ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ 1 и 2)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая те причины, которые это движение обуславливают.

Основным свойством механического движения является его относительность. Как известно, движение тел происходит в пространстве и во времени. Мы можем говорить только о взаимном перемещении тел относительно друг друга. Произвольно выбранное тело, которое условно считается неподвижным и по отношению, к которому определяется положение материальной точки, называется **телом отсчета**. Тело отсчета, связанная с ним система координат и часы для измерения времени образуют **систему отсчета** (СО) положений материальной точки.

Движение тела называется **поступательным**, если любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельна самой себе в процессе движения (Рис. 1.1).

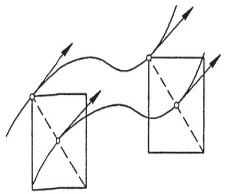


Рис. 1.1. Поступательное движение

Для описания перемещения тела в пространстве вводят систему отсчета и используют модель материальной точки.

Материальная точка – тело, обладающее конечной массой, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Понятие материальной точки – абстрактное понятие, но его введение облегчает решение конкретных задач.

По отношению к системе отсчета положение точки А в данный момент времени в декартовой системе координат, используемой наиболее часто, определяется тремя координатами: x_A, y_A, z_A или радиус – вектором $\vec{r}$, проведенным из точки начала отсчета в данную точку.

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. Уравнения, выражающие зависимость радиус – вектора движущийся точки от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или эквивалентная ему система трех скалярных уравнений,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

называются уравнениями движения точки или **законом движения.**

Траектория – это геометрическое место точек, последовательно занимаемых телом в процессе движения.

Пусть движение материальной точки по некоторой траектории и отсчет времени начинается с момента, когда точка находилась в положении А (Рис. 1.2).

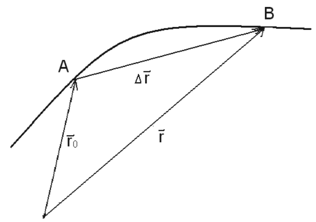


Рис. 1.2. Вектор перемещения

Перемещением называется вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r_0}$.

Средней скоростью $\langle\vec{v}\rangle$ движения за интервал времени $\Delta t = t - t_0$ называется физическая величина

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (1.2.).$$

Здесь нами используется стандартный способ обозначения средних величин с помощью треугольных скобок $\langle\ \rangle$. Необходимо отметить, что средняя скорость определяется для заданного интервала времени, а не его конкретного значения. Направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$.

Мгновенной скоростью в момент времени t называется физическая величина, равная пределу, к которому стремится средняя скорость при бесконечном уменьшение интервала времени Δt

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\langle\vec{v}\rangle = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (1.3).$$

В математике такой предел называется производной, поэтому

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.4).$$

Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.

Средним ускорением неравномерного движения за интервал времени $\Delta t = t - t_0$ называется физическая величина

$$<\vec{a}>=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.5).$$

Мгновенным ускорением материальной точки в момент времени t называется физическая величина, равная пределу, к которому стремится среднее ускорение при бесконечном уменьшении интервала времени Δt

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{a}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.6).$$

Процедура определения скорости и ускорения по заданному закону движения называется **прямой задачей кинематики.**

Указанная задача решается с помощью операции дифференцирования.

Задачу определения скорости и закона движения по заданному ускорению естественно называть **обратной задачей кинематики.**

Естественно, что эта задача решается с помощью операции интегрирования

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t)dt \qquad (1.7)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (1.8)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t)dt \qquad (1.9)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1.10)$$

Здесь $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ – положение и скорость в начальный момент времени.

Формулы (1.7) и (1.9) соответствуют решению в общем случае, а (1.8) и (1.10) - для постоянного ускорения.

Указанное решение обратной задачи справедливо только в том случае, когда ускорение является функцией только времени.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
«КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного задания является освоение методов построения траектории и вычисления кинематических характеристик поступательного движения материальной точки.

Задача

По заданной зависимости координат от времени

$x(t)= t^2 +1$

$y(t)= -0{,}2\cdot t^3 +1{,}7\cdot t^2 -2$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

Решение

1 шаг. Для приблизительного построения траектории движения необходимо определить координаты нескольких точек. Так как, в данном примере исследуемое перемещение материальной точки совершается на интервале времени от 0 до 5 секунд, в первую очередь, узнаем координаты *x* и *y* в каждую секунду. Для этого построим таблицу зависимости координат материальной точки от времени (таблица 1).

t	0	1	2	3	4	5
x						
y						

Строку времени (t) заполняем в зависимости от того, какой интервал времени задан. В данном примере: от 0 до 5 секунд. Каждый столбец соответствует определенному моменту времени.

Для того чтобы найти координаты *x* и *y* , необходимо подставить данное значение времени в уравнения зависимости x(*t*) и y(*t*):

$x(0)= 0^2 +1=1$ $y(0)= -0{,}2\cdot 0^3 +1{,}7\cdot 0^2 -2= -2$

$x(1)= 1^2 +1=2$ $y(1)= -0{,}2\cdot 1^3 +1{,}7\cdot 1^2 -2= -0{,}5$

$x(2)= 2^2 +1=5$ $y(2)= -0{,}2\cdot 2^3 +1{,}7\cdot 2^2 -2=3{,}2$

$x(3)= 3^2 +1=10$ $y(3)=-0{,}2\cdot 3^3 +1{,}7\cdot 3^2 -2= 7{,}9$

$x(4)= 4^2 +1=17$ $y(4)=-0{,}2\cdot 4^3 +1{,}7\cdot 4^2 -2= 12{,}6$

$x(5)= 5^2 +1=26$ $y(5)=-0{,}2\cdot 5^3 +1{,}7\cdot 5^2 -2= 15{,}5$

Полученные значения занести в таблицу:

t	0	1	2	3	4	5
x	1	2	5	10	17	26
y	-2	-0,5	3,2	7,9	12,6	15,5

2 шаг. Далее, по расчётным координатам *x* и *y* построим траекторию движения.

Вначале отметим 6 точек координат, а затем соединим их плавной кривой линией (Рис. 1.3).

3 шаг. Так как вектор перемещения – это направленный отрезок прямой, соединяющий начальное положение тела с его последующим положением, то, соединив на траектории движения соответствующие данным интервалам времени точки, изобразим векторы перемещения. Обозначим перемещение на интервале [0, 1] как $\Delta\overrightarrow{r_1}$; на интервале [1, 3] – $\Delta\overrightarrow{r_2}$; на интервале [3, 5] – $\Delta\overrightarrow{r_3}$ (Рис. 1.4).

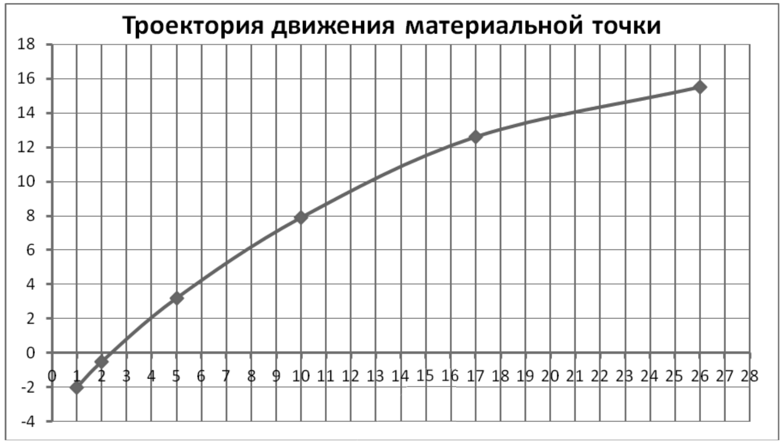


Рис. 1.3. Траектория движения материальной точки

<u>4 шаг.</u> Для того, чтобы найти перемещения на заданных интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5], необходимо из координат концов интервалов вычесть координаты начал.

Следовательно,

$\Delta\overrightarrow{r_1}$= (2-1; -0,5-(-2)) = (1; 1,5)

$\Delta\overrightarrow{r_2}$= (10-2; 7,9-(-0,5)) = (8; 8,4)

$\Delta\overrightarrow{r_3}$= (25-10; 15,5-7,9) = (15; 7,6)

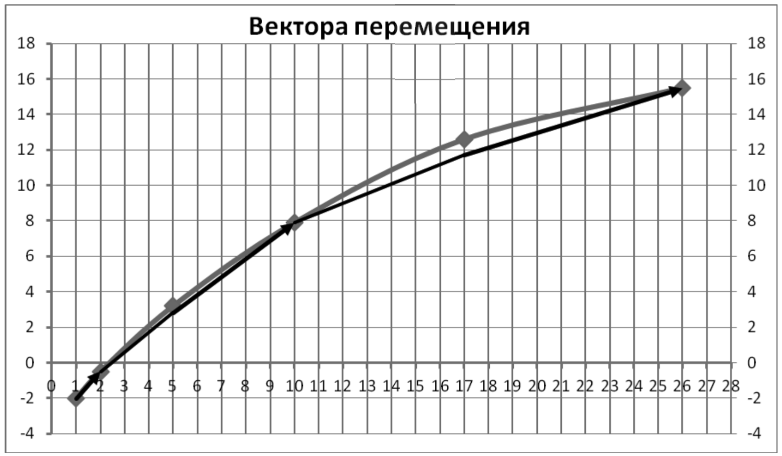


Рис. 1.4. Вектора перемещения на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]

<u>5 шаг.</u> Найдя перемещение $\Delta\overrightarrow{r_1}$, $\Delta\overrightarrow{r_2}$ и $\Delta\overrightarrow{r_3}$, мы можем найти средние скорости $\langle\vec{v}\rangle$ на данных интервалах. Для этого необходимо перемещение каждого интервала (как *x*, так и *y*) разделить на время перемещения Δt в соответствии с определением средней скорости

$\langle\vec{v}_1\rangle$– средняя скорость на интервале [0, 1];

$\langle\vec{v}_2\rangle$– средняя скорость на интервале [1, 3];

$\langle\vec{v}_3\rangle$– средняя скорость на интервале [3, 5].

Δt_1– время перемещения на интервале [0, 1]; Δt_1=*1-0=1с.*

Δt_2– время перемещения на интервале [1, 3]; Δt_2=*3-1=2с.*

Δt_3– время перемещения на интервале [3, 5]; Δt_3=*5-3=2с.*

Таким образом, получим

$\langle\vec{v}_1\rangle$ = $\Delta\overrightarrow{r_1}/\Delta t_1$ = (1/1; 1,5/1) = (1; 1,5)

$\langle\vec{v}_2\rangle$ =$\Delta\overrightarrow{r_2}/\Delta t_2$ =(8/2; 8,4/2) = (4;4,2)

$\langle\vec{v}_3\rangle$ =$\Delta\overrightarrow{r_3}/\Delta t_3$ =(15/2; 7,6/2) = (7,5;3,8)

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы поместилась вся траектория. Установленный условиями задачи масштаб соответствует одному метру в одном сантиметре. Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Является ли предложенный способ построения траектории точным?
2. Как иначе можно построить траекторию движения тела?
3. Ели известны перемещения $\Delta\overrightarrow{r_1}$, $\Delta\overrightarrow{r_2}$ и $\Delta\overrightarrow{r_3}$, то как найти $\Delta\vec{r}$ за весь промежуток времени?

4. Что такое закон движения?
5. Что такое перемещение?
6. Как направлен вектор средней скорости?
7. Как направлен вектор мгновенной скорости?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 «ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного задания является освоение методов вычисления кинематических характеристик поступательного движения материальной точки.

Задача

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, \ 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, \ t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, \ t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

$a_1 = 2, \ldots b_1 = 2, \ldots t_1 = 2$

где $a_2 = 1, \ldots b_2 = 4, \ldots t_2 = 4$

$a_3 = -1, \ldots b_3 = 12, \ldots t_3 = 6$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата $x_0 = -1$.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

Решение

1 шаг. Запишем выражения для скорости на заданных интервалах. Для этого необходимо в функцию скорости подставить значения, данные условием задачи.

$$V_x = \begin{cases} 2t + 2, \ 0 \le t \le 2 \\ t + 4, \ 2 \le t \le 4 \\ -t + 12, \ 4 \le t \le 6 \end{cases} \quad (1.11)$$

На каждом из трех временных интервалов скорость линейно зависит от времени (кусочно-линейной функция). Подставив в указанные выражения для скорости граничные значения временных интервалов, получим координаты точек по которым будем строить график кусочно-линейной функции:

$(0,2)\ (2,6)$
$(2,6)\ (4,8)$
$(4,8)\ (6,6)$

2 шаг. По полученным координатам скорости строим график (Рис. 1.5):

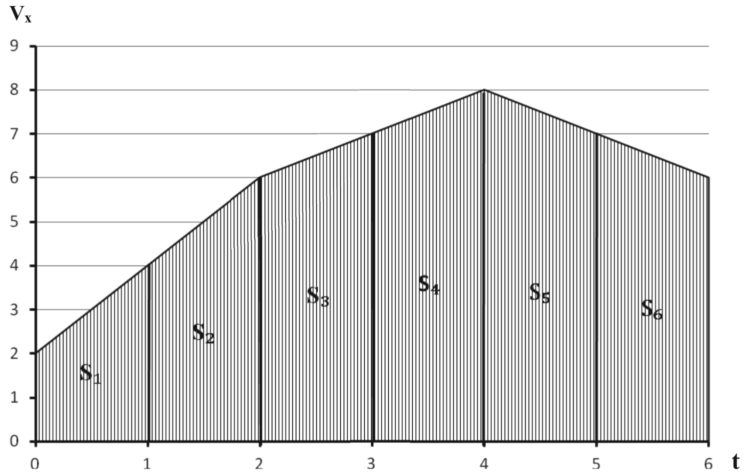


Рис. 1.5. Зависимость V_x от времени

3 шаг. В соответствии с формулами, определяющими решение обратной задачи кинематики, для определения перемещения материальной точки необходимо вычислить определенный интеграл. Согласно геометрическому смыслу интеграла его величина численно равна площади криволинейной трапеции под графиком функции. В случае линейной зависимости криволинейная трапеция становится обыкновенной трапецией. Для возможности более точного построения графика зависимости координаты от времени разделим фигуру на шесть частей (т.к. общий интервал времени составляет от 0 до 6 с) и найдем площадь каждой полученной трапеции.

Площадь трапеции равна половине суммы оснований умноженной на высоту:

$$S = \frac{(a+b)}{2}h$$

Следовательно, $S_1 = \frac{(2+4)*1}{2} = 3$ - перемещение за 1-ую секунду движения;

$S_2 = \frac{4+6}{2} = 5$ - перемещение за 2-ую секунду движения;

$S_3 = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$ - перемещение за 3-ую секунду движения;

$S_4 = \frac{7+8}{2} = 7{,}5$ - перемещение за 4-ую секунду движения;

$S_5 = \frac{8+7}{2} = 7{,}5$ - перемещение за 5-ую секунду движения;

$S_6 = \frac{7+6}{2} = 6{,}5$ - перемещение за 6-ую секунду движения;

4 шаг. Полученные значения площади показывают на сколько переместилась точка за каждую секунду движения. В связи с этим, мы можем определить координаты точки в зависимости от времени. Для этого необходимо последовательно складывать площади трапеций. Так как, в данной задаче начальная координата точки x_0 = -1, то координаты материальной точки в моменты времени 1, 2, 3, 4, 5 и 6 секунд следующие:

$x(1)=x_1=x_0+S_1= -1+3 = 2$

$x(2)=x_2=x_1+S_2=2+5=7$

$x(3)=x_3= x_2+S_3=7+6{,}5=13{,}5$

$x(4)=x_4= x_3+S_4=13{,}5+7{,}5=21$

$x(5)=x_5= x_4+S_5=21+7{,}5=28{,}5$

$x(6)=x_6= x_5+S_6=28{,}5+6{,}5=35$

5 шаг. По полученным координатам строим график зависимости координаты материальной точки от времени.

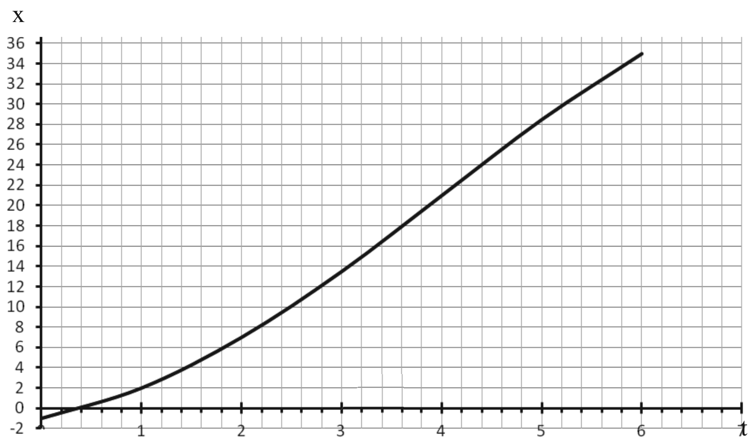


Рис. 1.6. Зависимость координаты x от времени

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы поместились два графика, не мешая друг другу. Необходимо учитывать, что установленные условиями задачи масштабы для разных величин разные:

для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Можно ли сказать, что вычисление перемещения на каждом из интервалов точное?

2. Какую математическую операцию необходимо выполнить в общем случае для вычисления перемещения?

3. Если компонента скорости V_x будет отрицательной, как будет изменяться координата материальной точки?

4. Как изменится график зависимости координаты от времени, если значение начальной координаты x_0 увеличится на единицу?

5. Что такое закон движения?

6. Как направлен вектор мгновенной скорости?

РАЗДЕЛ № 2

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(практические работы 3 и 4)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамика изучает законы движения тел и те причины, которые вызывают или изменяют это движение.

В основе классической механики лежат законы Ньютона. Начнем последовательно рассматривать законы Ньютона, используя для этого более современный способ изложения, введенный последователями Ньютона.

2.1. Первый закон Ньютона

Существуют такие системы отсчета, которые называются инерциальными, в которых если на тело не действует сила, то тело или покоится или движется прямолинейно-равномерно.

2.2. Второй закон Ньютона

Ускорение, приобретаемое материальной точкой в инерциальной системе отсчета, совпадает по направлению с действующей на нее результирующей силой и прямо пропорционально этой силе и обратно пропорционально массе материальной точки

$$\vec{F}_{рез} = m\vec{a} \qquad (2.1),$$

где $\vec{F}_{рез} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - сумма всех сил, действующих на материальную точку.

2.3. Третий закон Ньютона

Если два тела взаимодействуют друг с другом, то сила, действующая на первое тело со стороны второго, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей на второе тело со стороны первого.

В виде формулы третий закон записывается так $\overrightarrow{F_{12}} = \overrightarrow{F_{21}}$.

Здесь $\overrightarrow{F_{12}}$ - сила, действующая на первое тело со стороны второго, а $\overrightarrow{F_{21}}$ - сила, действующая на второе тело со стороны первого.

2.4. Работа силы

Для постоянной силы и прямолинейного перемещения **работой силы** *называется скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения.*

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

Используя определение скалярного произведения — это определение можно записать иначе

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha \qquad (2.2).$$

Здесь α - угол между векторами силы и перемещения. Однако в большинстве случаев движения тел не соблюдаются оба условия справедливости формулы (2.2), поэтому необходимо обобщить определение на случай переменной силы и криволинейной траектории движения.

Если рассмотреть перемещение материальной точки под действием переменной по величине или по направлению силы, то работа силы в этом случае вычисляется так

$$A = \int_B^C F\cos\alpha ds \qquad (2.3).$$

Так как согласно геометрическому смыслу интеграла его значение численно равно площади под графиком подынтегральной функции (площади криволинейной трапеции), то работу можно определить как на рис.2.1.

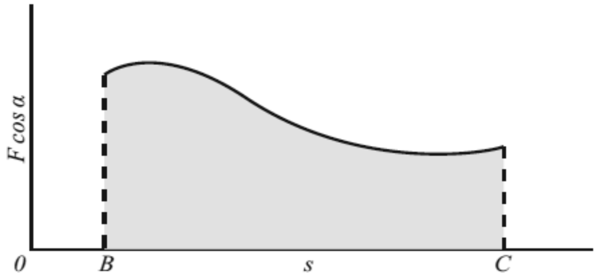


Рис. 2.1. Вычисление работы силы

Связь между кинетической энергией материальной точки и работой задается следующей теоремой (о связи энергии и работы).

Теорема. *Работа результирующей силы равна изменению кинетической энергии на концах траектории.*

$$A_{рез} = \int_B^C \vec{F}_{рез} d\vec{s} = K_C - K_B$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 «ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного задания является освоение методов построения траектории и вычисления динамических характеристик поступательного движения материальной точки.

Задача

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2.

$x(t)=t^2 + 1$

$y(t)=0{,}1\cdot t^3 + 5$

m = 2кг, t_1 = 1с, t_2 = 3с.

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

Решение

1 шаг. Для построения траектории движения вычислим координаты *x* и *y* нескольких точек на заданном интервале времени от 0 до 5 секунд. Для этого подставим значения времени в 0, 1, 2, 3, 4 и 5 секунд в уравнения зависимости x(*t*) и y(*t*). После этого построим таблицу.

$x(0)= 0^2 +1=1$	$y(0)= 0{,}1\cdot 0^3 +5= 5$
$x(1)= 1^2 +1=2$	$y(1)= 0{,}1\cdot 1^3 +5= 5{,}1$
$x(2)= 2^2 +1=5$	$y(2)= 0{,}1\cdot 2^3 +5=5{,}8$
$x(3)= 3^2 +1=10$	$y(3)=0{,}1\cdot 3^3 +5= 7{,}7$
$x(4)= 4^2 +1=17$	$y(4)= 0{,}1\cdot 4^3 +5= 11{,}4$
$x(5)= 5^2 +1=26$	$y(5)=0{,}1\cdot 5^3 +5= 17{,}5$

Таблица зависимости координат материальной точки от времени

t	0	1	2	3	4	5
x	1	2	5	10	17	26
y	5	5,1	5,8	7,7	11,4	17,5

<u>2 шаг.</u> Далее, по расчётным координатам *x* и *y* построим траекторию движения (Рис. 2.2).

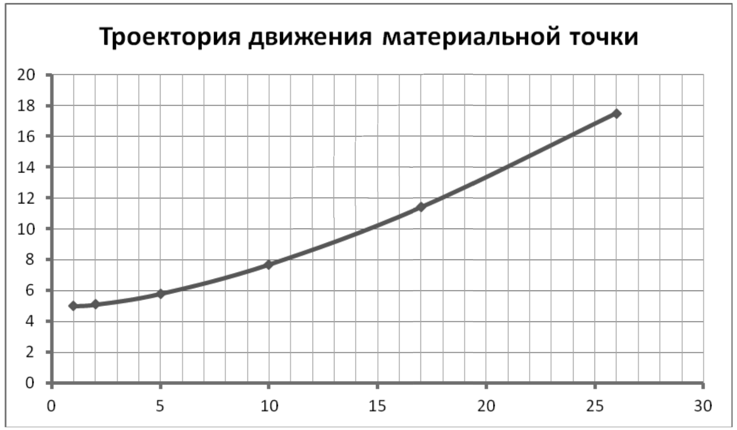


Рис. 2.2. Траектория движения материальной точки

<u>3 шаг.</u> Для определения вектора скорости (V_x, V_y) в заданные моменты времени t_1 и t_2 найдем производные от функций зависимости координат от времени:

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Согласно условию задачи

x(t) = t² + 1

y(t) = 0,1·t³ + 5

тогда
$$\begin{cases} V_x = 2\cdot t \\ V_y = 0,3\cdot t^2 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Далее, подставим в (2.4) заданные задачей моменты времени:

$V_x(t_1) = V_x(1) = 2\cdot 1 = 2\ м/с$ $\qquad V_x(t_2) = V_x(3) = 2\cdot 3 = 6\ м/с$

$V_y(t_1) = V_y(1) = 0,3\cdot 1^2 = 0,3\ м/с$ $\qquad V_y(t_2) = V_y(3) = 0,3\cdot 3^2 = 2,7\ м/с$

<u>4 шаг.</u> Для определения вектора ускорения (a_x, a_y) в заданные моменты времени t_1 и t_2 найдем производные от полученных выражений компонент скорости по времени:

$$\begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 0,6\cdot t \end{cases} \qquad (2.5).$$

Далее, подставим в (2.5) заданные задачей моменты времени:

$a_x(t_1) = a_x(1) = 2 = 2\ м/с^2$ $\qquad a_x(t_2) = a_x(3) = 2 = 2\ м/с^2$

$a_y(t_1) = a_y(1) = 0,6\cdot 1 = 0,6\ м/с^2$ $\qquad a_y(t_2) = a_y(3) = 0,6\cdot 3 = 1,8\ м/с^2$

<u>5 шаг.</u> Для того, чтобы определить значения силы в заданные моменты времени t_1 и t_2 используем формулу второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Следовательно,

$F_x(t_1) = F_x(1) = 2\cdot 2 = 4\ Н$ $\qquad F_x(t_2) = F_x(3) = 2\cdot 2 = 4\ Н$

$F_y(t_1) = F_y(1) = 2\cdot 0,6 = 1,2\ Н$ $\qquad F_y(t_2) = F_y(3) = 2\cdot 1,8 = 3,6\ Н$

Так как m=2 кг.

<u>6 шаг</u>. Полученные значения скорости и силы изобразим на графике в виде векторов.

Вектора скорости (2; 0,3) и силы (4; 1,2) должны выходить из точки траектории (2; 5,1) которая соответствует моменту времени t_1 = 1с, и, соответственно, вектора скорости (6; 2,7) и силы (4; 3,6) должны выходить из точки траектории (10; 7,7), которая соответствует моменту времени t_2 = 3с.

Рис. 2.3. Построение векторов скорости и силы

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы поместилась вся траектория и вектора скорости и силы. Установленный условиями задачи масштаб соответствует одному метру в одном сантиметре для координат. Масштабы для построения векторов скорости и силы другие. Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Какое предположение необходимо сделать, чтобы вычислять силу, используя второй закон Ньютона?
2. Как направлен вектор скорости относительно траектории материальной точки?
3. Какие характеристики траектории определяют компоненты вектора силы?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
«ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ И ТЕОРЕМА О СВЯЗИ ЭНЕРГИИ И РАБОТЫ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного задания является освоение методов аналитического и численного расчета работы силы и применения теоремы о связи энергии и работы для вычисления динамических характеристик поступательного движения материальной точки.

Задача

Тело, массой $m=2$ кг, движется по траектории под действием силы величиной $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Здесь s обозначает расстояние, пройденное вдоль криволинейной территории. Построить на миллиметровой бумаге график $F\cdot\cos\alpha$ на интервале $[0,s_2]$, определить аналитически и численно работу силы на $[0,s_2]$ и определить скорость тела в конце интервала.

Для рассматриваемого варианта

$$F(s)=3\cdot s^2-6\cdot s+10$$

$$\alpha=\begin{cases}0^0,....0\le s\le s_1\\ 60^0,..s_1\le s\le s_2\end{cases}$$

$s_1=3$, $s_2=5$. Начальная скорость $v_0=5$ м/с.

Решение

<u>1 шаг</u>. Поскольку в условии задачи два угла $\alpha=0^0$ и $\alpha=60^0$, интервал для вычисления произведения $F\cdot\cos\alpha$ разбиваем на 2 участка - [0, 3] и [3, 5].

Так как $\cos 0^0=1$, то на первом интервале

$$F\cdot\cos\alpha=(3\cdot s^2-6\cdot s+10)\cdot 1=3\cdot s^2-6\cdot s+10$$

Так как $\cos 60^0=0,5$, то на втором интервале

$$F\cdot\cos\alpha=(3\cdot s^2-6\cdot s+10)\cdot 0,5=1,5\cdot s^2-3\cdot s+5$$

<u>2 шаг</u>. Для построения графика вычислим значения $F\cdot\cos\alpha$ в нескольких точках на интервале [0;5].

На интервале [0, 3] используем для $F \cdot \cos\alpha$ выражение $3 \cdot s^2 - 6 \cdot s + 10$. Представим функцию в табличном виде. Для этого в каждое выражение вместо s подставим последовательно числа 0, 1, 2 и 3 и получим:

	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
$F \cdot \cos\alpha ... (\alpha = 0^0)$	10	7	10	19

На интервале [3, 5] используем для $F \cdot \cos\alpha$ выражение $1{,}5 \cdot s^2 - 3 \cdot s + 5$. Представим функцию в табличном виде. Для этого в каждое выражение вместо s подставим последовательно числа 3, 4и 5 и получим:

	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
$F \cdot \cos\alpha ... (\alpha = 60^0)$	9,5	17	27,5

<u>3 шаг</u>. Из полученных данных строим зависимость $F \cdot \cos\alpha$ от s. Так как выражения представляют собой квадратичные функции точки соединяем двумя параболами:

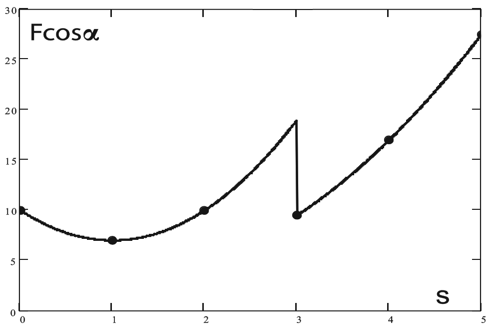


Рис. 2.4. График зависимости $F \cdot \cos\alpha$ от s

Для приближенного вычисления работы соединяем точки на полученном графике прямыми линиями:

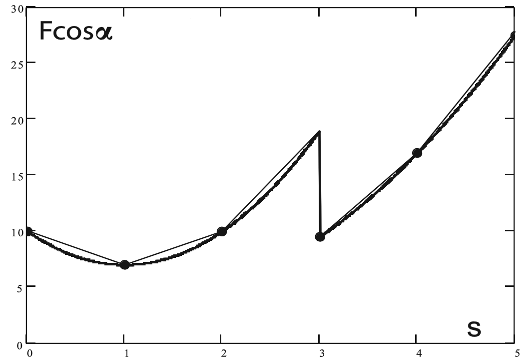


Рис. 2.5. График зависимости $F \cdot \cos\alpha$ от s

Из каждой фиксированной точки опускаем перпендикуляр на ось S и полученные фигуры нумеруем:

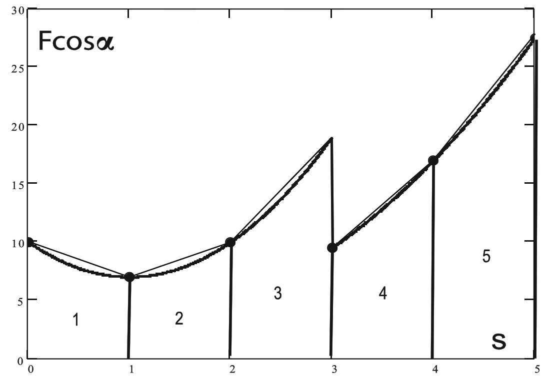


Рис. 2.6. Линеаризованный график зависимости $F \cdot \cos\alpha$ от s и разбиение на трапеции

<u>4 шаг</u>. Находим площадь каждой полученной фигуры S_i (в данном случае трапеции) и рассчитываем работу, исходя из геометрического смысла интеграла $A = \sum_{i=1}^{5} S_i$

По формуле площади трапеции $S_i = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где *(см рис. 2.7.)*

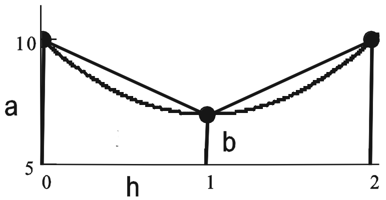


Рис. 2.7. К вычислению площади трапеции

При рассматриваемом разбиении все h равны единице. Поэтому

$$S_1 = \frac{10+7}{2} \cdot 1 = 8,5 \qquad S_4 = \frac{9,5+17}{2} \cdot 1 = 13,25$$

$$S_2 = \frac{7+10}{2} \cdot 1 = 8,5 \qquad S_5 = \frac{17+27,5}{2} \cdot 1 = 22,25$$

$$S_3 = \frac{10+19}{2} \cdot 1 = 14,5$$

Подставив полученные значения в формулу, получаем А=67.

<u>5 шаг</u>. Для аналитического расчета работы силы на интервале [0, 5] воспользуемся полученными выражениями $F \cdot \cos\alpha$ для интервалов [0, 3] и [3, 5] : $3 \cdot s^2 - 6 \cdot s + 10$ и $1,5 \cdot s^2 - 3 \cdot s + 5$.

$$\int_0^5 F \cdot \cos\alpha ds = \int_0^3 (3 \cdot s^2 - 6 \cdot s + 10) ds + \int_3^5 (1,5 \cdot s^2 - 3 \cdot s + 5) ds =$$

$$= \left(\frac{3}{3}s^3 - 3s^2 + 10s\right)\Bigg|_0^3 + \left(\frac{3}{6}s^3 - \frac{3}{2}s^2 + 5s\right)\Bigg|_3^5 \approx 65$$

Сравнивая значения работы силы ,вычисленные численно и аналитически ,видим, что погрешность небольшая. Причем, как видно из рисунка 2.5, приближенное значение превосходит полученное аналитическим путем.

Предполагая, что рассматриваемая сила является результирующей, применим теорему о связи энергии и работы для вычисления скорости в

конце пути v_k. *Из формулы* $A = \frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ *получим, что* $v_k^2 = \frac{2A}{m} + v_0^2$. *Подставив в формулу значения, получим, что* $v_k = \sqrt{\frac{2 \cdot 65}{2} + 5^2} \approx 9,5 \ м/с$.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы поместился график зависимости $F \cdot \cos\alpha$ от s в максимально возможном масштабе по обоим осям. Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Почему мы можем считать рассматриваемую в задаче силу результирующей?
2. Почему в случае численного расчета работы силы был получен больший результат по сравнению с аналитическим?
3. Всегда ли в случае численного расчета работы силы будет получен больший результат по сравнению с аналитическим? Приведите пример.

Раздел № 3

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

(практические работы 5 и 6)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Абсолютно твердым телом называется тело, форма и размер которого при наличии внешних воздействий могут считаться неизменными, а расстояние между двумя частицами этого тела остается постоянным в процессе движения.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все точки его движутся по окружностям, и центры этих окружностей расположены на одной прямой, которая называется *осью вращения* (Рис. 3.1).

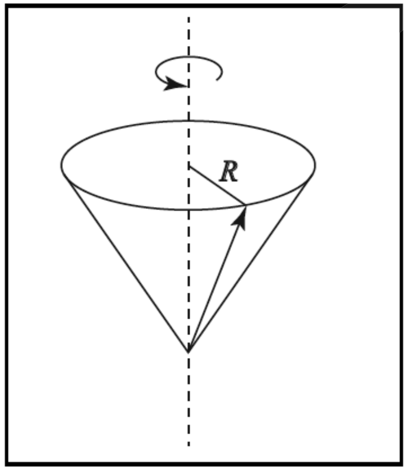


Рис. 3.1. Угол поворота

В случае модели абсолютно твердого тела все его точки сохраняют неизменное взаимное расположение и радиусы вращения всех точек описывают одинаковые углы за одно и то же время. Это обстоятельство позволяет ввести характеристики, единые для всех точек тела, что принципиально облегчает описание вращательного движения.

Углом поворота называется угол φ, который описывает радиус вращения R за некоторое время t.

Кинематическое уравнение вращательного движения задается функцией времени $\varphi = \varphi(t)$.

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется **угловой скоростью** и определяется производной от угла поворота φ по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (3.1).$$

В отличие от φ угловую скорость можно ввести как вектор.

Угловая скорость тела представляет собой вектор $\vec{\omega}$, который направлен вдоль оси вращения тела таким образом, чтобы, смотря вдоль вектора видеть вращение тела, совершающимся по часовой стрелке. Модуль этого вектора равен абсолютной величине $|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ угловой скорости $\vec{\omega}$, точка его приложения выбирается на оси вращения произвольно, т.е. вектор угловой скорости есть скользящий вектор.

Угловым ускорением называется векторная величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости тела с течением времени и равная первой производной угловой скорости тела по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (3.2).$$

Моментом силы относительно точки O называется вектор $\vec{M}$, задаваемый соотношением

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3.3),$$

где $\vec{r}$- радиус вектор точки приложения силы относительно точки O, а знак × обозначает векторное умножения (Рис. 3.2).

Модуль вектора моменты силы, согласно определению векторного произведения, равен

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\alpha \qquad (3.4).$$

Как видно из рис 3.2 модуль вектора момента силы равен удвоенной площади заштрихованного треугольника, которая в свою очередь равна произведению стороны треугольника на высоту. Таким образом, величина момента силы равна произведению величины силы F на плечо этой силы $r_\perp$ (расстоянию от точки O до линии действия силы) $M = F \cdot r_\perp$.

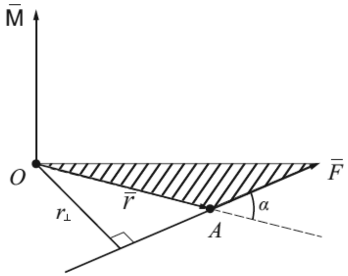


Рис. 3.2. Момент силы относительно точки

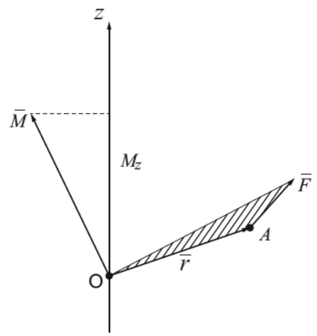


Рис. 3.3. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси M_z *называется проекция момента силы относительно точки, расположенной на этой оси, на рассматриваемую ось* (рис 3.3).

Справедливость этого определения обусловлена следующей теоремой.

Теорема. Для заданной силы $\vec{F}$ и любых двух точек O_1 и O_2 на оси проекции на рассматриваемую ось для моментов силы относительно точек O_1 и O_2 равны.

Если на тело (или систему материальных точек) действуют несколько моментов сил, то их геометрическая сумма называется **результирующим моментом силы.**

Аналогом второго закона Ньютона для вращательного движения является основной закон динамики вращательного движения.

Обычно рассматривают 3 формулировки этого закона. Первая формулировка – экспериментальная. Для случая движения относительно закрепленной (не изменяющей свое направление) оси справедлив следующий закон.

Закон. *Величина углового ускорения прямо пропорциональна результирующему моменту силы относительно оси.*

$$\varepsilon \sim M_{z\ рез}$$

Так как пропорциональности не позволяют проводить с собой математические преобразования, запишем закон в виде равенства, введя для этого коэффициент пропорциональности I

$$I\varepsilon = M_{z\ рез} \qquad (3.5).$$

I называется моментом инерции системы точек (тела) относительно оси вращения. Момент инерции характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении, то есть показывает насколько тяжело раскрутить или затормозить вращающееся тело. Можно показать, что момент инерции системы точек - скалярная физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (3.6).$$

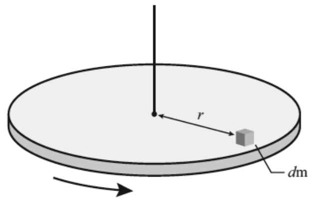


Рис. 3.4. Вычисление момента инерции

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу, где интегрирование производится по всему объему тела (рис.3.4).

$$I = \int r^2 dm \qquad (3.7).$$

Как видно из формул (3.6) и (3.7) момент зависит от распределения массы внутри тела и расположения оси вращения. Таким образом, при смене оси вращения необходимо пересчитывать величину I. Однако есть два обстоятельства, облегчающих процесс определения момента инерции.

Для однородных тел простой формы и осей вращения, проходящих через их центры масс, моменты инерции посчитаны и размещены в специальных справочниках. В таблице 3.1 можно увидеть результаты некоторых таких расчетов.

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то может помочь применение следующей теоремы.

Теорема Штейнера. *Момент инерции тела относительно любой оси вращения равен сумме его момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения его массы на квадрат расстояния между осями* (рис 3.5).

$$I' = I + ml^2 \qquad (3.8).$$

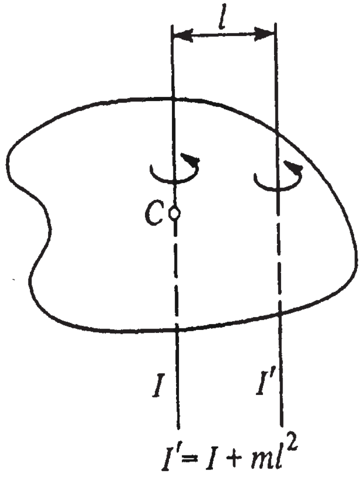


Рис. 3.5. Теорема Штейнера

Моментом импульса материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется вектор

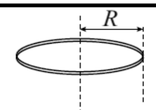
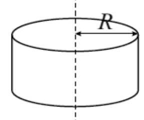
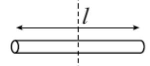
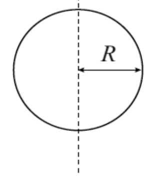
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс материальной точки.

Момент импульса твердого тела определяется как сумма моментов импульса его частей. Можно доказать, что при вращении относительно постоянной оси момент импульса тела равен

$$\vec{L}_{тела} = I\vec{\omega} \qquad (3.9).$$

Таблица 3.1. Моменты инерции простейших тел

Тело	I	
Обруч или кольцо	mR^2	
Диск или цилиндр	$\frac{1}{2} mR^2$	
Стержень	$\frac{ml^2}{12}$	
Твердый шар	$\frac{2}{5} mR^2$	
Сферическая оболочка	$\frac{2}{3} mR^2$	

Используя третий закон Ньютона и модель абсолютно твердого тела, можно получить *основной закон динамики вращательного движения* в общем случае.

Производная момента импульса твердого тела относительно неподвижной точки равна результирующему моменту силы относительно той же точки.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{рез} \qquad (3.10).$$

При этом формула (3.9) в общем случае перестает быть справедливой, так как вектора момента импульса и угловой скорости – не параллельны. Закон вращательного движения в форме (3.10) особенно важен для описания сложно-координированных спортивных движений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5
«ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного задания является освоение методов определения момента инерции плоской фигуры.

Задача

Определить моменты инерции плоской фигуры (рисунок 3.6) относительно перпендикулярных к плоскости рисунка осей, проходящих через точки O и O_1, если поверхностная плотность тела $\rho=1\ ^{кг}/_{м^2}$, стороны квадрата по 2 см.

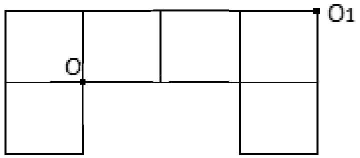


Рис. 3.6.

Сравните результаты и сделайте вывод.

Решение

Для системы материальных точек момент инерции равен сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний до прямой.

$$I = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \cdot m_i \qquad (3.11),$$

где m_i – масса i – ой материальной точки, r_i – расстояние от точки до оси вращения. Приведем сплошную фигуру к системе материальных точек и найдем координаты и массы данных точек.

Массу каждой из материальных точек находим по формуле

$$m_i = S_i \cdot \rho \qquad (3.12),$$

где S_i - площадь i – ого элемента разбиения, ρ – плотность тела.

<u>1 шаг</u>. Рассчитываем момент инерции относительно оси, проходящей через точку O. Проводим оси координат, проходящие через точку O. В качестве элементов разбиения будем рассматривать квадраты, изображенные

на рисунке 3.6. Определим центры масс квадратов, поместим в них соответствующие пронумерованные точечные массы и изобразим на рисунке линии, соответствующие расстояниям r_i (рисунок 3.7).

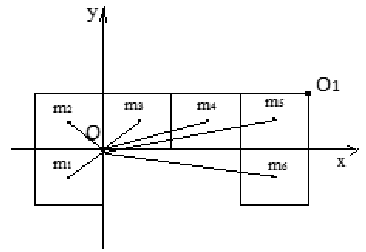


Рис. 3.7. Сведение к системе точек

<u>2 шаг</u>. Для того чтобы не использовать расстояние, рассчитывая момент инерции, преобразим формулу (3.11) к виду:

$$I = \Delta m \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) \qquad (3.13),$$

где x_i , y_i – координаты центра масс i – ой фигуры, Δm - масса каждого из квадратов.

<u>3 шаг</u>. Заполним следующую таблицу в соответствии с рисунком 3.8

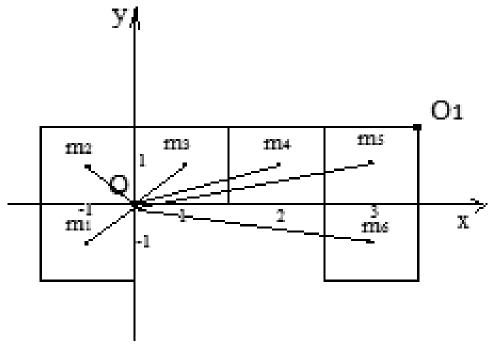


Рис. 3.8.

№квадр	1	2	3	4	5	6
x_i						
y_i						
x_i^2						
y_i^2						
$x_i^2+y_i^2$						

Рассмотрим заполнение таблицы на примере второго столбца:

3.1. Определяем координаты x_i и y_i для каждой фигуры (в данном случай квадрат 1).

№квадр	1	2	3	4	5	6
x_i	-1					
y_i	-1					
x_i^2						
y_i^2						
$x_i^2+y_i^2$						

3.2. Возводим координаты в квадрат

№квадр	1	2	3	4	5	6
x_i	-1					
y_i	-1					
x_i^2	1					
y_i^2	1					
$x_i^2+y_i^2$						

3.3. Складываем квадраты x и y

№квадр	1	2	3	4	5	6
x_i	-1					
y_i	-1					
x_i^2	1					
y_i^2	1					
$x_i^2+y_i^2$	2					

Повторяем п. 3.1-3.3 для остальных пяти квадратов. Получается заполненная таблица.

№квадр	1	2	3	4	5	6
x_i	-1	-1	1	3	5	5
y_i	-1	1	1	1	1	-1
x_i^2	1	1	1	9	25	25
y_i^2	1	1	1	1	1	1
$x_i^2+y_i^2$	2	2	2	10	26	26

Рассчитываем момент инерции по формуле (3.13). Следует помнить, что масса $\Delta m = 1000 \cdot (0,02)^2 = 0,4$ гр.

$$I = 0,4 \cdot (2+2+2+10+26+26) = 0,4 \cdot 68 = 27,2 г \cdot см^2 = 27,2 \cdot 10^{-7} = 2,72 \cdot 10^{-6} кг \cdot м^2$$

<u>**4 шаг**</u>. Рассчитываем момент инерции относительно оси, проходящей через точку O_1.

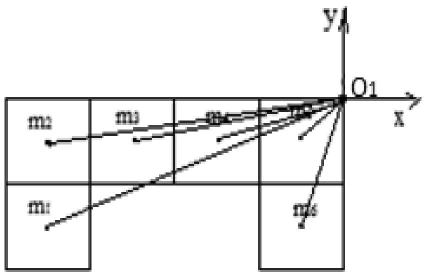


Рис. 3.9.

Повторяем шаги 1 - 3. После расчетов получается

№квадр	1	2	3	4	5	6
x_i	-7	-7	-5	-3	-1	-1
y_i	-1	-3	-1	-1	-1	-3
x_i^2	49	49	25	9	1	1
y_i^2	1	9	1	1	1	9
$x_i^2+y_i^2$	50	58	26	10	2	10

Рассчитываем момент инерции по формуле (3.13). Напомним, что масса $\Delta m = 0,4$ гр.

$$I = 0,4\cdot(50+58+26+10+2+10) = 0,4\cdot 156 = 62,4 г\cdot см^2 = 6,24\cdot 10^{-6} кг\cdot м^2$$

Вывод: Момент инерции относительно оси, проходящей чрез точку O_1, больше чем момент инерции относительно оси, проходящей чрез точку O. Т.к точка O_1 находится дальше относительно общего центра масс, чем точка O.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы удобно разместить обе плоские фигуры вместе с их системами координат. Фигуру изображать в соответствии с указанными в условии задачи размерами. Это позволяет

контролировать правильность вычисления координат центров масс простых фигур. Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Как выяснить, без вычислений, в какой точке будет момент инерции больше, а в какой меньше?
2. Почему можно вынести массу за знак суммы при преобразовании от формулы (3.11) к формуле (3.13)?
3. Почему мы вынуждены проводить приближенное вычисление момента инерции, а не используем формулу (3.7)?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6
«ВЫЧИСЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данной работы является освоение взаимосвязей между основными кинематическими и динамическими характеристиками вращательного движения.

Задача

Диск массой $m=1$ кг и радиусом $R=0{,}6$ м вращается относительно его оси симметрии по закону $\varphi(t)=2t^2-t-1$, где $\varphi(t)$ - угол поворота диска, t - время. Вычислить значения угловой скорости $\omega(t)$ и углового ускорения $\varepsilon(t)$. На одной координатной плоскости построить графики трех функций $\varphi(t), \omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ на интервале $t \in [0;4]$. На рисунке изобразить вектор угловой скорости в моменты времени $t_1=0$ и $t_2=3$. Определить величину результирующего момента сил, действующих на диск в момент времени $t_3=2$.

Решение

<u>1 шаг</u>. Вычислим угловую скорость $\omega(t)$ по формуле:

$$\omega(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$\omega(t)=\frac{d(2t^2-t-1)}{dt}=2\cdot\frac{dt^2}{dt}-\frac{dt}{dt}-\frac{d1}{dt}=2\cdot 2t-1-0=4t-1$$

<u>2 шаг</u>. Вычислим угловое ускорение $\varepsilon(t)$ по формуле:

$$\varepsilon(t)=\frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$\varepsilon(t)=\frac{d(4t-1)}{dt}=4\cdot\frac{dt}{dt}-\frac{d1}{dt}=4\cdot 1-0=4$$

заметим, что тело вращается с постоянным угловым ускорением 4 $^{рад}/_{c^2}$, т. е. в любой момент времени $\varepsilon(t)$ равно 4.

<u>3 шаг</u>. Представим функции $\varphi(t), \omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ в табличном виде на интервале $[0,4]$. Для этого в каждое выражение вместо буквы t подставим последовательно числа 0, 1, 2, 3 и 4.

3.1. Значения угла поворота

$\varphi(0)=2\cdot 0^2-0-1=-1$, $\varphi(2)=2\cdot 2^2-2-1=5$, $\varphi(4)=2\cdot 4^2-4-1=27$.

$\varphi(1)=2\cdot 1^2-1-1=0$, $\varphi(3)=2\cdot 3^2-3-1=14$,

Занесем полученные значения в таблицу

t	0	1	2	3	4
φ	-1	0	5	14	27

3.2. Значения угловой скорости

$\omega(0)=4\cdot 0-1=-1$, $\omega(2)=4\cdot 2-1=7$, $\omega(4)=4\cdot 4-1=15$.

$\omega(1)=4\cdot 1-1=3$, $\omega(3)=4\cdot 3-1=11$,

Занесем полученные значения в таблицу

t	0	1	2	3	4
ω	-1	3	7	11	15

3.3. Значения углового ускорения

$\varepsilon(0)=4$, $\varepsilon(2)=4$, $\varepsilon(4)=4$

$\varepsilon(1)=4$, $\varepsilon(3)=4$,

Занесем полученные значения в таблицу

t	0	1	2	3	4
ε	4	4	4	4	4

<u>4 шаг</u>. С помощью полученных таблиц на одной координатной плоскости построим графики трех функций $\varphi(t), \omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ в масштабе

$t: 1c \rightarrow 2см$

$\phi, \omega, \varepsilon: 2единицы \rightarrow 1см$

При построении графиков нужно обратить внимание на то, что:

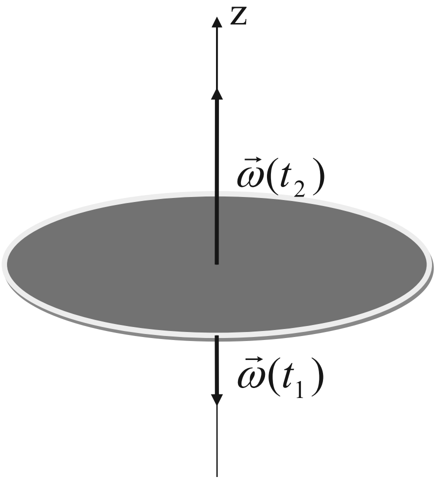
- функция $\varepsilon(t)$ постоянна и ее графиком будет прямая линия параллельная оси t.
- функция $\omega(t)$ линейная и ее графиком будет прямая линия для построения которой достаточно двух точек.
- функция $\varphi(t)$ квадратичная и ее графиком будет парабола. Поскольку угловая скорость $\omega(t)$ является производной от $\varphi(t)$ горизонтальная координата вершины параболы совпадает с точкой пересечения графика $\omega(t)$ и оси t.

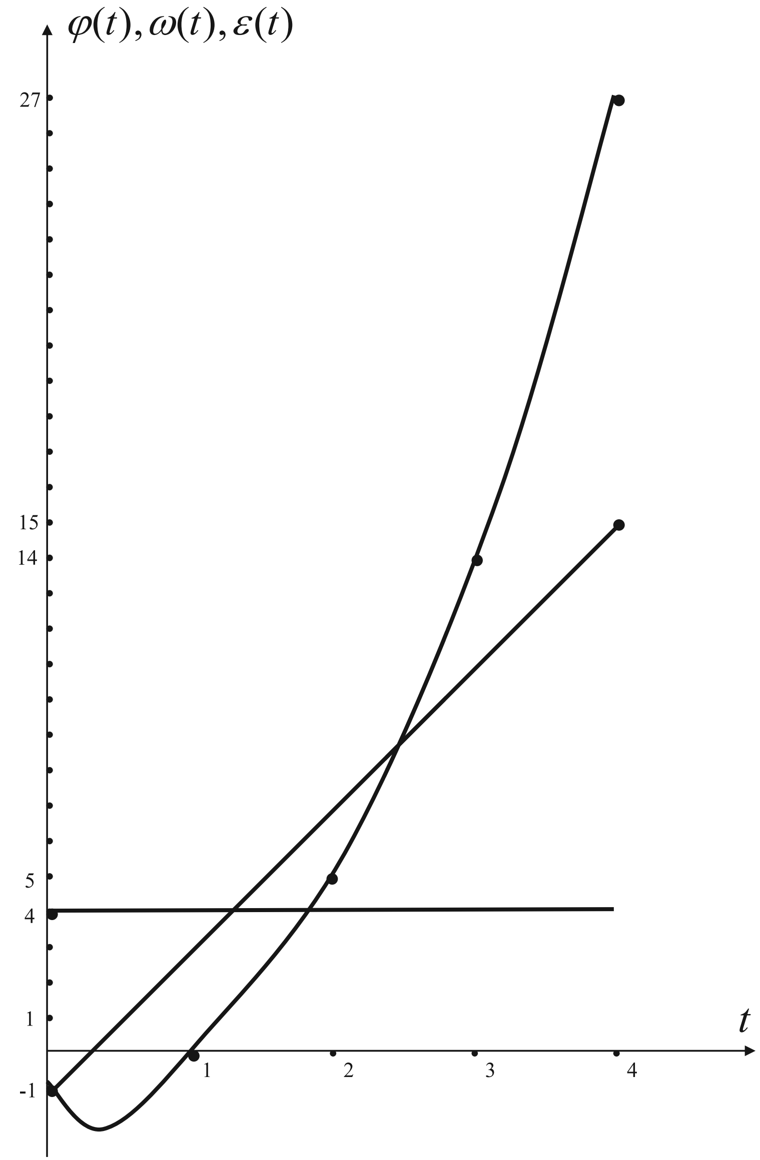
<u>**5 шаг**</u>. Согласно условию задачи сплошной диск вращается относительно его оси симметрии, вдоль которой направим ось z. Изобразим на рисунке вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Вначале определим их координаты вдоль оси вращения z. Для этого подставим $t_1 = 0$ и $t_2 = 3$ в функцию $\omega(t)$:

$$\omega(t_1) = \omega(0) = 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\omega(t_2) = \omega(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 11 > 0$$

Направление векторов будет зависеть от знака их координаты. Если координата положительна, то направление вектора совпадает с направлением оси вращения z, если отрицательно, то противоположно оси z.





<u>6 шаг</u>. Определим величину результирующего момента в момент времени $t_3 = 2$ с. Согласно основному закону вращательного движения

$$M_{рез}(t_3) = I \cdot \varepsilon(t_3),$$

где в соответствии с выражением для момента инерции сплошного диска $I = \frac{mR^2}{2} = \frac{1 \cdot 0{,}6^2}{2} = 0{,}18 \quad кг \cdot м^2$ и $\varepsilon(t_3) = 4 \ {}^1\!/_{c^2}$, так как в данном случае угловое ускорение постоянно. Подставив значения, получим

$$M_{рез}(t_3) = 0{,}18 \cdot 4 = 0{,}72 \quad Н \cdot м.$$

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы удобно разместить систему координат и все три графика в указанных масштабах. Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи. При проверке будет учитываться правильное расположение точек экстремумов графиков.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Почему мы можем использовать формулу $I = {}^{mR^2}\!/_2$ для вычисления момента инерции?

2. Докажите, что вычисленный нами результирующий момент силы действительно измеряется в $Н \cdot м$.

РАЗДЕЛ № 4
СТАТИКА
(практическая работа 7)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Статика изучает равновесие материальных точек, твердых тел или систем тел.

4.1. Момент силы.

Моментом силы относительно точки O называется вектор $\vec{M}$, задаваемый соотношением $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r}$ - радиус вектор точки приложения силы относительно точки O.

Моментом силы относительно оси M_z *называется проекция момента силы относительно точки, расположенной на этой оси, на рассматриваемую ось* (рис 4.1).

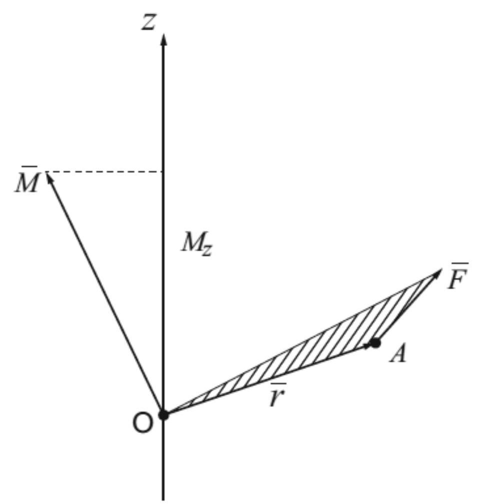


Рис. 4.1. К определению момента силы относительно точки и момента силы относительно оси

Справедливость этого определения обусловлена следующей теоремой.

Теорема. Для заданной силы $\vec{F}$ и любых двух точек O_1 и O_2 на оси проекции на рассматриваемую ось для моментов силы относительно точек O_1 и O_2 равны.

Как видно из рис 4.1 модуль вектора момента силы относительно точки равен удвоенной площади заштрихованного треугольника, которая в свою очередь равна произведению стороны треугольника на высоту. Таким образом, величина момента силы относительно оси равна произведению величины перпендикулярной оси компоненты силы $F_\perp$ на плечо этой силы $r_\perp$ (расстоянию от точки O до линии действия силы) $M_z = F_\perp \cdot r_\perp$. Знак M_z (плюс или минус) выбирается по правилу моментов (если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, то используем знак плюс, в противном случае - минус).

4.2. Равновесие тел.

Механическим равновесием называется состояние тела, когда оно находится в покое или движется равномерно прямолинейно.

Равновесие абсолютно твердого тела зависит не только от величины и направления действующих на тело сил, но и от точки их приложения. Точка приложения силы к абсолютно твердому телу может быть перенесена вдоль линии действия силы. Это возможно из-за того, что при рассмотрении абсолютно твердого тела пренебрегают его деформацией. Тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела, называются **связями**, а силы, действующие со стороны связей на рассматриваемое тело, называются **силами реакции связей**. Связями являются, например, различные опоры или подвесы.

Так как в состоянии равновесия абсолютно твердого тела отсутствуют линейное и угловое ускорения можно сформулировать *условия равновесия.*

1) Если связи допускают только поступательное движение абсолютно твердого тела, то оно будет находиться в равновесии при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j = 0$$

или в проекциях на оси прямоугольной системы координат

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{jx} = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{jy} = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{jz} = 0$$

Все силы $\vec{F}_j$ считаются приложенными в центре масс тела; n - число сил, действующих на тело.

2) Абсолютно твердое тело с закрепленной (неподвижной) осью вращения находится в равновесии при условии равенства нулю векторной суммы всех сил и равенства нулю алгебраической суммы проекций на ось вращения всех моментов внешних сил относительно этой оси:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} M_{jz} = 0$$

Значения M_{jz} можно рассчитать, как произведение величины силы на плечо силы, а знак определяется по следующему правилу: проекция момента силы, стремящейся повернуть тело против часовой стрелки, считается положительной, а по часовой стрелке – отрицательной.

3) В общем случае абсолютно твердое тело находится в равновесии при условии равенства нулю векторной суммы всех сил и равенства нулю векторной суммы всех моментов внешних сил относительно произвольной точки:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_j = 0$$

Для заданных внешних сил записанные условия равновесия позволяют определить неизвестные силы реакции связей. Если это удается осуществить, то рассматриваемая система тел называется статически определимой. В противном случае - статически неопределимой системой.

В статике рассматривают три вида равновесия: устойчивое, неустойчивое и безразличное.

Равновесие тела в некотором положении называется **устойчивым**, если при любых малых отклонениях тела от этого положения, допускаемых связями, возникают силы или моменты сил, стремящиеся возвратить тело в исходное состояние.

Равновесие тела в некотором положении называется **неустойчивым**, если при некоторых малых отклонениях тела от этого положения, допускаемых связями, возникают силы или моменты сил, стремящиеся еще больше отклонить тело от начального положения.

Равновесие тела в некотором положении называется **безразличным**, если при любых малых отклонениях тела от этого положения, допускаемых связями, не возникает сил или моментов сил, стремящихся возвратить тело в исходное состояние или еще больше отклонить тело от начального положения.

4.3. Центр масс

Центром масс *(центром инерции) системы материальных точек называется воображаемая точка С, радиус-вектор, которой равен*

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{I=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (2.1),$$

где m_i и r_i - масса и радиус – вектор i – ой материальной точки. В случае сплошных тел суммы заменяются интегралами по объему тела.

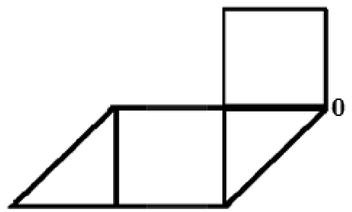
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7 «ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЩЕГО ЦЕНТРА МАСС ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного задания является освоение методов вычисления общего центра масс плоской фигуры.

Задача

Определить положение центра масс изображенной (см. рисунок) однородной плоской фигуры с плотностью ρ=1 г/см^2. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку «О». Длины сторон квадратов и катетов треугольника равны 2 см. Сделать заключение о существовании равновесия тела.



Решение

<u>1 шаг</u>. Приведем сплошную фигуру к системе материальных точек и найдем координаты данных точек. Для этого:

из произвольной точки проводим оси координат (рисунок 4.2)

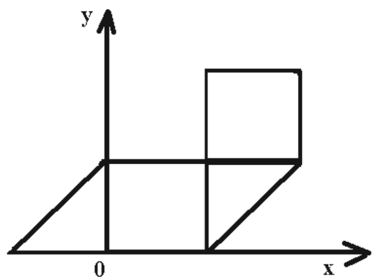


Рис. 4.2. Введение системы координат

и нумеруем простые фигуры, составляющие тело (рисунок 4.3)

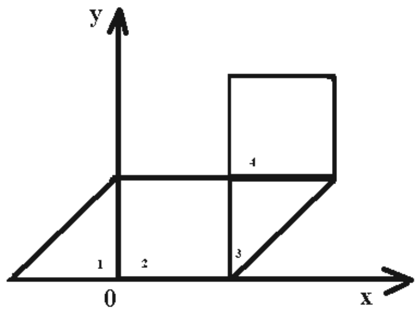


Рис. 4.3. Разбиение на простые фигуры

<u>2 шаг</u>. Находим центр масс каждой фигуры. У треугольника центр масс будет в точке пересечения медиан (медиана - отрезок внутри треугольника, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны); у квадрата центр масс будет в точке пересечения диагоналей. (рисунок 4.4).

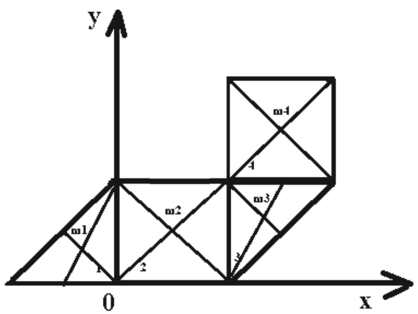


Рис. 4.4. Положение центров масс простых фигур

<u>3 шаг</u>. Заменим пронумерованные фигуры точечными массами, расположенными в определенных точках центров масс простых фигур.

Изобразим вектора силы тяжести каждой массы (рисунок 4.5)

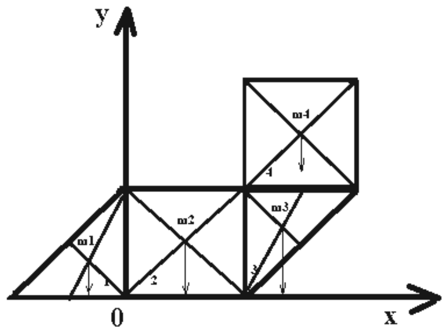


Рис. 4.5. Система точечных масс

<u>4 шаг</u>. Найдем координаты общего центра масс, воспользовавшись формулой для точечных масс

$$x_c = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i} \qquad (4.2),$$

$$y_c = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} \qquad (4.3),$$

где m_i –масса фигуры с номером 'i', x_i, y_i –координаты центра масс соответствующей 'i-ой' простой фигуры.

Примечание. Расчет координат центра масс треугольника. Рассмотрим треугольник (рисунок 4.6). Так как треугольник - равнобедренный и прямоугольный, то сторона AO=BO=a. Найдем координаты точки C. Из рисунка видно, что x=a/3 , y=a/3. Т.о. чтобы найти координаты центра масс любого треугольника, необходимо добавить указанные величины к координатам вершины O.

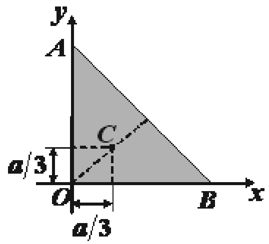


Рис. 4.6. Определение положения центра масс треугольника

Найдем координаты центра масс отдельных фигур в соответствии с рисунком 4.7.

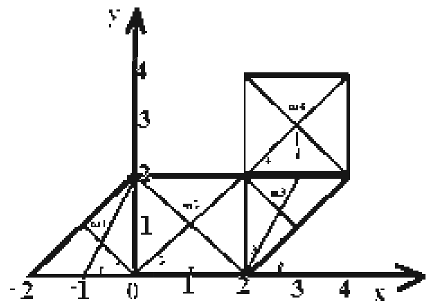


Рис. 4.7. К определению координат центров масс простых фигур

а) координаты фигуры 1 (треугольник).

Учитывая, что длина стороны равна 2 см, и воспользовавшись соотношением сторон (*см. примечание*), получаем

$x_1 = - 2/3$ $y_1 = 2/3$

б) координаты фигуры 2.

$x_2=1$ $y_2 =1$

в) координаты фигуры 3.

$x_3 =2\frac{2}{3}$ $y_3 =1\frac{1}{3}$

г) координаты фигуры 4

$x_4=3$ $y_4=3$

5 шаг. Найдем массу каждой фигуры.

$$m = S \cdot \rho \qquad (4.4),$$

где S – площадь фигуры, ρ –плотность (масса единицы площади).

Площадь треугольника рассчитывается по формуле

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \qquad (4.5),$$

где a и b - катеты треугольника.

Площадь квадрата рассчитывается по формуле:

$$S = a^2 \qquad (4.6),$$

где a - сторона квадрата.

Т.о. подставив соответствующие значения размеров сторон для каждой фигуры в формулы, получаем

$$S_1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$S_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$S_3 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$S_4 = 2 \cdot 2 = 4$$

6 шаг. Найдем координаты общего центра масс тела x_c и y_c, подставив соответствующие значения в формулы (4.2) и (4.3) соответственно:

$$x_c = \frac{2 \cdot (-\frac{2}{3}) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot 3}{2+4+2+4} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$y_c = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{3} + 4 \cdot 3}{2+4+2+4} = \frac{5}{3}$$

Отметим общий центр масс на рисунке (рисунок 4.8) – точка С

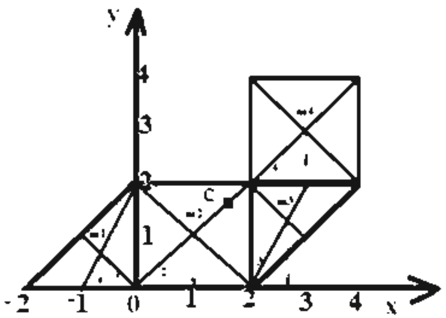


Рис. 4.8. Положение общего центра масс

7 шаг. Определим результирующий момент силы тяжести относительно оси проходящей через точку О.

Момент силы тяжести относительно оси, проходящей через точку О находим по формуле

$$M_Z = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (\pm L_i) \qquad (4.7),$$

где F-сила тяжести, L-расстояние от оси вращения до линии действия силы тяжести, знак плюс или минус выбирается по правилу моментов

$$F = m \cdot g \qquad (4.8),$$

где m-масса тела, g-ускорение свободного падения.

Найдем расстояния от оси вращения до линий действия сил. Так как все силы параллельны оси y, то указанные расстояния равны модулям разности абсцисс (координат x) точки О и центра масс каждой фигуры.

Определим расстояние для фигуры 1. На рисунке 4.9 обозначено это расстояние «*».

$L_1 = 4\frac{2}{3}$

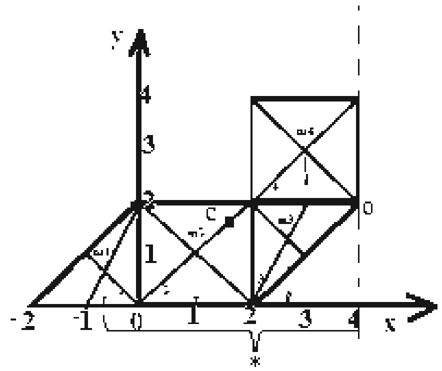


Рис. 4.9. Определение расстояния L1

Расстояние для фигур 2, 3, 4 рассчитывается аналогично.

$L_2 = 3$

$L_3 = 1\frac{1}{3}$

$L_4 = 1$

Как видно из рисунка 4.9 все слагаемые в формуле (4.7) берутся со знаком плюс (стремятся повернуть тело против часовой стрелки). Подставив в формулу (4.7) значения получим:

$$M_z = m_1 \cdot g \cdot L_1 + m_2 \cdot g \cdot L_2 + m_3 \cdot g \cdot L_3 + m_4 \cdot g \cdot L_4 = g \cdot 2 \cdot 4\frac{2}{3} + g \cdot 4 \cdot 3 + g \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{3} + g \cdot 4 \cdot 1$$

$$= g \cdot 28 = 280\, г \cdot м/с^2 \cdot см = \frac{280}{1000} Н \cdot см = 0{,}28 Н \cdot см = \frac{0{,}28}{100} = 0{,}0028 Н \cdot м \qquad (4.8)$$

8 шаг. Так как результирующий момент ненулевой, то равновесие отсутствует.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Работа выполняется на миллиметровой бумаге. Построение осуществляется на лицевой стороне, а расчеты на оборотной. При построении лист миллиметровой бумаги располагаем так, чтобы удобно разместить плоскую фигуру и вектора сил. Фигуру изображать в соответствии с указанными в условии задачи размерами. Это позволяет контролировать правильность вычисления координат центров масс простых фигур. Записи следует делать подробно, чтобы был понятен ход решения задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

4. Как рассчитываются координаты центра масс треугольника?
5. Почему для определения положения центра масс сплошной фигуры можно использовать формулу для системы материальных точек?
6. Почему необходимо для вычисления M_z производить деление на 1000 и 100 (смотри (4.8))?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

«АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ»

1. Установить область определения функции (ООФ) и есть ли у нее разрывы. Для каждого бесконечного разрыва учесть знак $f(x)$ справа и слева; получим вертикальные асимптоты графика.

2. Установить область изменения функции (ОИФ).

3. Выявить существование периодичности функции.

4. Установить четность или нечетность функции, что позволит использовать симметрию при построении графика функции.

5. Определить точки пересечения с осями координат. Точки пересечения с осью OX определяются решением уравнения $f(x)=0$. Точку пересечения с осью OY определяем подстановкой $x=0$ в выражение для функции $y=f(x)$.

6. Найти первую и вторую производные $f'(x)$, $f''(x)$, а также определить, есть ли точки, где $f'(x)$ или $f''(x)$ не существуют.

7. Найти все локальные экстремумы функции $f(x)$.

8. Найти все точки перегиба.

9. Если ООФ бесконечна, то установить, нет ли горизонтальных и наклонных асимптот.

10. Вычислить значение функции также еще в нескольких дополнительных точках и построить график.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Варианты к самостоятельной работе 1

1 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = t^2 + 1$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

2 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = 1.5 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 6$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

3 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = 2 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 5$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

4 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = 2 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 6$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 6$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

5 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = -0.2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

6 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = -0.2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.1 \cdot t^3 + 4 \cdot t + 5$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

7 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = -0.2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.1 \cdot t^3 + 5 \cdot t + 2$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

8 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = -0.2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.1 \cdot t^3 + 6 \cdot t - 1$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

9 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = -0.2\cdot t^2 + 6\cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.2\cdot t^3 + 1.7\cdot t^2 - 2$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

10 вариант

По заданной зависимости координат от времени

$$x(t) = -0.4\cdot t^2 + 7\cdot t$$
$$y(t) = -0.2\cdot t^3 + 1.7\cdot t^2 - 2$$

построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд, найти перемещения и средние скорости на интервалах времени [0, 1], [1, 3], [3, 5]. Масштаб: *x(y)=1см→1м.*

Варианты к самостоятельной работе 2

1 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где
$$a_1 = 0, \ldots b_1 = 2, \ldots t_1 = 2$$
$$a_2 = 2, \ldots b_2 = -2, \ldots t_2 = 4$$
$$a_3 = -2, \ldots b_3 = 14, \ldots t_3 = 6$$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

2 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где
$$a_1 = -1, \ldots b_1 = 6, \ldots t_1 = 2$$
$$a_2 = 0, \ldots b_2 = 4, \ldots t_2 = 4$$
$$a_3 = 2, \ldots b_3 = -4, \ldots t_3 = 6$$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

3 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где
$$a_1 = -2, ...b_1 = 6, ...t_1 = 2$$
$$a_2 = -1, ...b_2 = 4, ...t_2 = 4$$
$$a_3 = 1, ...b_3 = -4, ...t_3 = 6$$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

4 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где
$$a_1 = 1, ...b_1 = -2, ...t_1 = 2$$
$$a_2 = 2, ...b_2 = -4, ...t_2 = 4$$
$$a_3 = 0, ...b_3 = 4, ...t_3 = 6$$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

5 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где
$$a_1 = 3, ...b_1 = 2, ...t_1 = 2$$
$$a_2 = 0, ...b_2 = 8, ...t_2 = 4$$
$$a_3 = -2, ...b_3 = 16, ...t_3 = 6$$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

6 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где
$$a_1 = 2, ...b_1 = 2, ...t_1 = 2$$
$$a_2 = -1, ...b_2 = 8, ...t_2 = 4$$
$$a_3 = -2, ...b_3 = 12, ...t_3 = 6$$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

7 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где $\begin{array}{l} a_1 = 0, \ldots b_1 = 2, \ldots t_1 = 2 \\ a_2 = 1, \ldots b_2 = 0, \ldots t_2 = 4 \\ a_3 = 2, \ldots b_3 = -4, \ldots t_3 = 6 \end{array}$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

8 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где $\begin{array}{l} a_1 = -1, \ldots b_1 = 6, \ldots t_1 = 2 \\ a_2 = 1, \ldots b_2 = 2, \ldots t_2 = 4 \\ a_3 = 0, \ldots b_3 = 6, \ldots t_3 = 6 \end{array}$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

9 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где $\begin{array}{l} a_1 = -2, \ldots b_1 = 6, \ldots t_1 = 2 \\ a_2 = 0, \ldots b_2 = 2, \ldots t_2 = 4 \\ a_3 = 2, \ldots b_3 = -6, \ldots t_3 = 6 \end{array}$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

10 вариант

Для одномерного движения материальной точки скорость задана функцией:

$$V_x = \begin{cases} a_1 t + b_1, & 0 \le t \le t_1 \\ a_2 t + b_2, & t_1 \le t \le t_2 \\ a_3 t + b_3, & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

где $\begin{array}{l} a_1 = 1, \ldots b_1 = -2, \ldots t_1 = 2 \\ a_2 = 2, \ldots b_2 = -4, \ldots t_2 = 4 \\ a_3 = 0, \ldots b_3 = 4, \ldots t_3 = 6 \end{array}$

Построить график скорости, а по нему график координаты. Начальная координата x_0 = -1.

Масштаб: для времени 2см → 1с

для скорости 1см → 1м/с

для координаты 1см → 2м

Варианты к самостоятельной работе 3

1 вариант

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 .

$$x(t) = -0.2 \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + 1$$
$$y(t) = -0.4 \cdot t^2 + 6 \cdot t$$

$m = 2кг, ... t_1 = 1с, ... t_2 = 3с$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

2 вариант

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 .

$$x(t) = 1.5 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 6$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

$m = 3кг, ... t_1 = 2с, ... t_2 = 3с$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

3 вариант

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5]

секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2

$$x(t) = 2 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 5$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

$m = 2кг, ... t_1 = 1с, ... t_2 = 4с$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

4 вариант

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 .

$$x(t) = 2 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 6$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 6$$

$m = 2кг, ... t_1 = 1с, ... t_2 = 3с$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

5 вариант

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 .

$$x(t) = -0.2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$$
$$y(t) = 0.1 \cdot t^3 + 5$$

$m = 2кг, ... t_1 = 1с, ... t_2 = 3с$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

<u>6 вариант</u>

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2.

$$x(t) = -0.2\cdot t^2 + 6\cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.1\cdot t^3 + 4\cdot t + 5$$

$$m = 3кг,\ldots t_1 = 1c,\ldots t_2 = 3c$$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

<u>7 вариант</u>

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2.

$$x(t) = -0.2\cdot t^2 + 6\cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.1\cdot t^3 + 5\cdot t + 2$$

$$m = 2кг,\ldots t_1 = 1c,\ldots t_2 = 3c$$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

<u>8 вариант</u>

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2.

$$x(t) = -0.2\cdot t^2 + 6\cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.1\cdot t^3 + 6\cdot t - 1$$

$$m = 2кг,\ldots t_1 = 1c,\ldots t_2 = 3c$$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

<u>9 вариант</u>

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2.

$$x(t) = -0.2\cdot t^2 + 6\cdot t + 1$$
$$y(t) = -0.2\cdot t^3 + 1.7\cdot t^2 - 2$$

$$m = 2кг,\ldots t_1 = 1c,\ldots t_2 = 3c$$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

<u>10 вариант</u>

Определить соответствующие компоненты скорости и ускорения тела массой m по заданной зависимости координат от времени, построить на миллиметровой бумаге траекторию движения на интервале времени [0, 5] секунд и вектора скорости и силы в точках траектории, соответствующих моментам времени t_1 и t_2.

$$x(t) = -0.4 \cdot t^2 + 7 \cdot t$$
$$y(t) = -0.2 \cdot t^3 + 1.7 \cdot t^2 - 2$$

$m = 2кг, ... t_1 = 1с, ... t_2 = 3с$

Масштаб: *для координаты x(y) 1см→1м*

для силы F 2см→1Н

для скорости V_x (V_y) 2см→1м/с

Варианты к самостоятельной работе 4

1 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$$F(s) = 2 \cdot s^2 - 3 \cdot s + 1$$
$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 6 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \rightarrow 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \rightarrow 1Н$

2 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$$F(s) = 2 \cdot s^2 - 6 \cdot s + 2$$
$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 6 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \rightarrow 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \rightarrow 1Н$

3 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$F(s) = s^2 - 3 \cdot s + 1$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 5 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1H$

4 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$F(s) = 3 \cdot s^2 - 2 \cdot s - 10$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 5 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1H$

5 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$F(s) = 2 \cdot s^2 - 4 \cdot s + 3$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 6 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1H$

6 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$F(s) = s^2 - 2 \cdot s + 3$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 5 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1H$

7 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$F(s) = 3 \cdot s^2 - 4 \cdot s + 2$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость v_0= 5 м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1H$

8 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$$F(s) = 2 \cdot s^2 - 5 \cdot s + 2$$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость $v_0 = 6$ м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1Н$

9 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$$F(s) = 1.5 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 3$$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость $v_0 = 5$ м/с.

Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1Н$

10 вариант

Тело массой m движется по траектории под действием силы $F(s)$, составляющей с траекторией угол α. Построить на миллиметровой бумаге график $F \cdot \cos\alpha$ на интервале $[0,\ s_2]$. Определить аналитически и численно работу силы на интервале $[0,\ s_2]$ и скорость тела в конце интервала.

$$F(s) = 2 \cdot s^2 - 8 \cdot s + 2$$

$$\alpha = \begin{cases} 0^0, 0 \le s \le s_1 \\ 60^0, s_1 \le s \le s_2 \end{cases}$$

$m = 2кг, ... s_1 = 3м, ... s_2 = 5м$ Начальная скорость $v_0 = 5$ м/с.

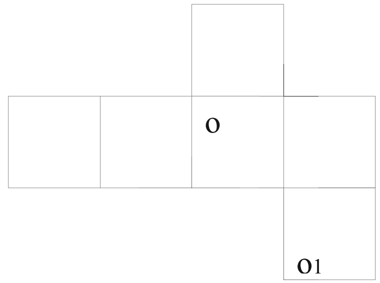
Масштаб: 1) $t = 2см \to 1с$

2) $F \cdot \cos\alpha = 1см \to 1Н$

Варианты к самостоятельной работе 5

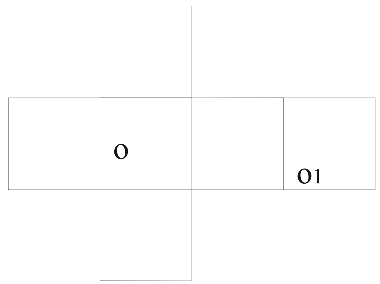
Вариант 1

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 кг/м^2$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



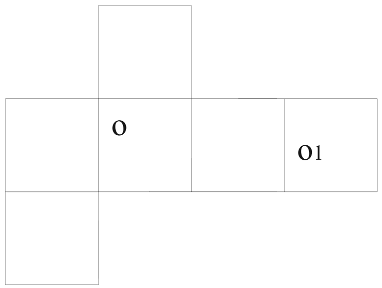
Вариант 2

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 кг/м^2$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



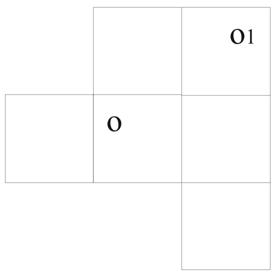
Вариант 3

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



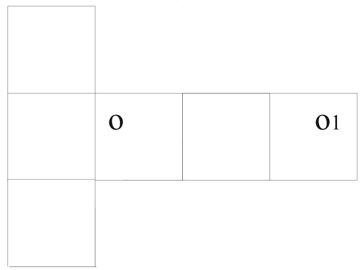
Вариант 4

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



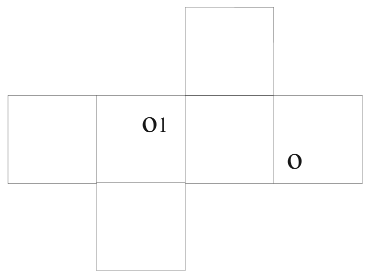
Вариант 5

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



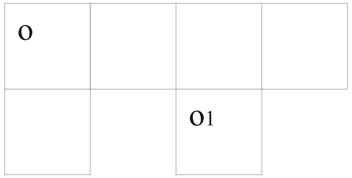
Вариант 6

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



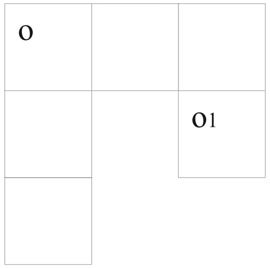
Вариант 7

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



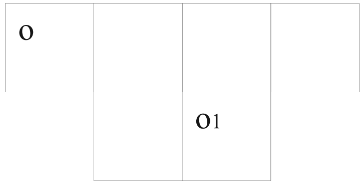
Вариант 8

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



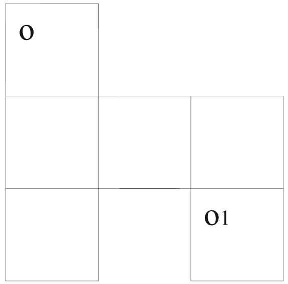
Вариант 9

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



Вариант 10

Определить моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных ей осей, проходящих через точки O и O_1. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \,{}^{кг}\!/_{м^2}$. Длина стороны 2 см. Сделать выводы.



Варианты к самостоятельной работе 6

Вариант 1

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = -t^2 + 3 \cdot t + 1$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,5] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.5\text{м}, ...m = 2\text{кг}, ...\text{t}_1 = 0, ...t_2 = 4c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2\text{см} \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1\text{см} \to 1 \end{array}$

Вариант 2

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = -2 \cdot t^2 + 5 \cdot t - 1$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,4] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.6\text{м}, ...m = 1\text{кг}, ...\text{t}_1 = 1, ...t_2 = 3c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2\text{см} \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1\text{см} \to 1 \end{array}$

Вариант 3

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = -0.5 \cdot t^2 + 6$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,5] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.5\text{м}, ...m = 1\text{кг}, ...\text{t}_1 = 2, ...t_2 = 4c, ...t_3 = 3c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2\text{см} \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1\text{см} \to 1 \end{array}$

Вариант 4

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = t^2 - 2 \cdot t + 2$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,5] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.6\text{м}, ...m = 2\text{кг}, ...\text{t}_1 = 0, ...t_2 = 4c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2\text{см} \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1\text{см} \to 1 \end{array}$

Вариант 5

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = 2 \cdot t^2 - 2 \cdot t - 2$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,4] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.6м, ...m = 2кг, ...\mathrm{t}_1 = 0, ...t_2 = 3c, ...t_3 = 4c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2см \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1см \to 1 \end{array}$

Вариант 6

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = t^2 + t - 3$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,5] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.7м, ...m = 2кг, ...\mathrm{t}_1 = 0, ...t_2 = 3c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2см \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1см \to 1 \end{array}$

Вариант 7

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = t^3 - 2$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,3] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.6м, ...m = 2кг, ...\mathrm{t}_1 = 0, ...t_2 = 2c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2см \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1см \to 1 \end{array}$

Вариант 8

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = -0.5 \cdot t^3 + 2 \cdot t - 1$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,4] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.6м, ...m = 3кг, ...\mathrm{t}_1 = 0, ...t_2 = 2c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2см \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1см \to 1 \end{array}$

Вариант 9

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = -t^3 + t + 4$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,3] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

$$R = 0.6м, ...m = 2кг, ...\mathrm{t}_1 = 0, ...t_2 = 2c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $\begin{array}{l} 1) t = 2см \to 1c \\ 2) \varphi, \omega, \varepsilon = 1см \to 2 \end{array}$

Вариант 10

Сплошной диск радиуса R и массой m вращается вокруг оси z, проходящей через центр масс тела, согласно следующему закону

$$\varphi = t^3 - 2\cdot t^2 - 2$$

Построить графики $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ на интервале [0,4] секунд. Рассчитать $\omega(t)$ для 2 моментов времени t_1 и t_2. Изобразить на рисунках вектора $\vec{\omega}(t_1)$ и $\vec{\omega}(t_2)$. Рассчитать величину результирующего момента силы относительно оси z в момент времени t_3.

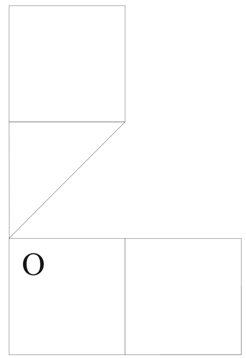
$$R = 0.7м, ...m = 2кг, ...t_1 = 0, ...t_2 = 3c, ...t_3 = 2c.$$

Масштаб: $1) t = 2см \to 1c$

$2) \varphi, \omega, \varepsilon = 0.5см \to 1$

Варианты к самостоятельной работе 7

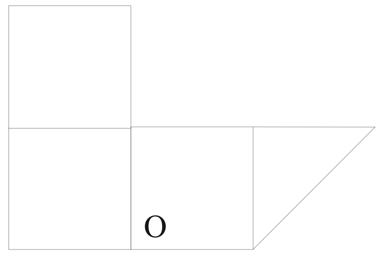
Вариант 1



Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\, г/см^2$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку O. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.

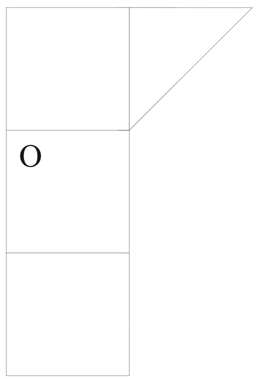
Вариант 2

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\, г/см^2$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку O. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.



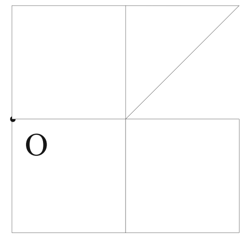
Вариант 3

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \, ^{г}/_{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2см.



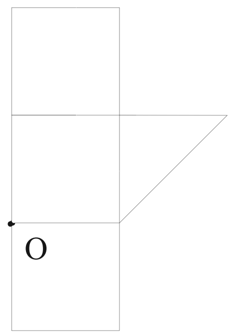
Вариант 4

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \, ^{г}/_{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2см.



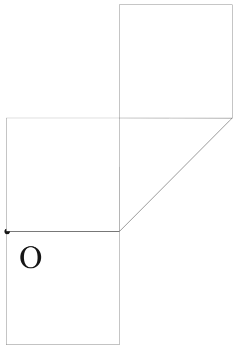
Вариант 5

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1 \, ^{г}/_{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.



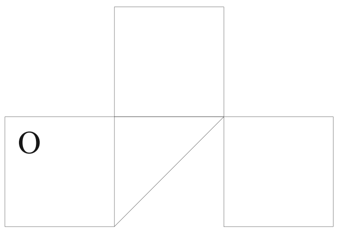
Вариант 6

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\ {г}/{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.



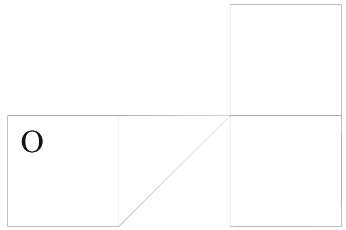
Вариант 7

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\ {г}/{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.



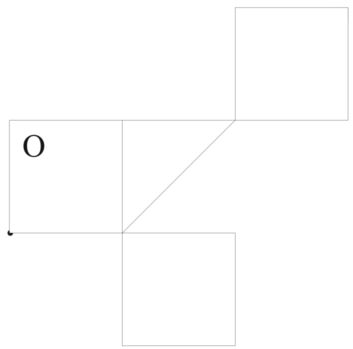
Вариант 8

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\ {г}/{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.



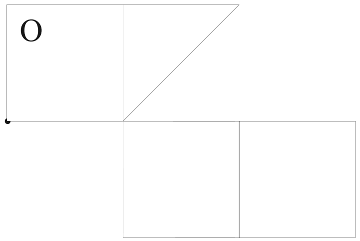
Вариант 9

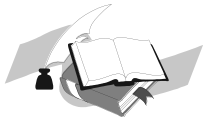
Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\ {г}/{см^2}$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.



Вариант 10

Определить положение центра масс изображенной на рисунке однородной плоской фигуры. Поверхностная плотность тела $\rho = 1\, г/см^2$. Определить результирующий момент силы тяжести относительно перпендикулярной плоскости рисунка горизонтальной оси, проходящей через точку О. Длины сторон квадратов и катетов треугольников равны 2 см.





РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Естественно-научные основы физической культуры и спор-та / Под ред. А. В. Самсоновой, Р. Б. Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2013. – 456 с.
2. Бухман, Н.С. Элементы физической механики/ Н.С. Бухман - СПб.: Лань, 2008. - 160 с.
3. Бабаев, В.С. Корректирующий курс физики/ В.С. Бабаев, Ф.Ф. Легуша - СПб.: Лань, 2011. - 160 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Трофимова, Т.И. Основы физики. Механика/ Т.И. Трофимова - М.: Кнорус, 2011. - 224 с.
2. Орир, Дж. Физика: в двух томах/ Дж. Орир - М.: Мир, 1981.
3. Яковлев, А.Б. Физика для студентов, обучающихся по индивидуаль-ному графику: учебно-методическое пособие/ А.Б. Яковлев, В.В. Ивакин, М.В. Котцова; СПб ГАФК им. П.Ф.Лесгафта. – СПб., 2003. – 70 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Св. план, 2017

ЯКОВЛЕВ АНДРЕЙ БОРИСОВИЧ
АЗАНЧЕВСКИЙ ВЛАДИМИР ВЛАДИСЛАВОВИЧ
ЗАХАРОВ ФЕДОР ЕВГЕНЬЕВИЧ
ТИХОНЕНКОВА ОКСАНА ВЛАДИМИРОВНА

БИОМЕХАНИКА ДВИГАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор И.С. Солдатов
Корректор Е.В. Шаврина

Сдано в набор 01.08.2017. Подписано в печать 04.09.2017.
Объем 5,8 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 17. Цена свободная

Типография НГУ им. П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург
Санкт-Петербург, ул. Декабристов, 35