

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Российская академия наук

Российский национальный комитет
по теоретической и прикладной механике

ХІІІ ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Сборник тезисов докладов в 4 томах

21–25 августа 2023 года
Санкт-Петербург

Том 1

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2023

УДК 531/534
ББК 22.2
Д23

ХIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов докладов в 4 томах, 21–25 августа, 2023 г. В 4 т. Т. 1. Общая и прикладная механика. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 668 с.

Том 1 содержит расширенные тезисы пленарных докладов съезда, устных и стендовых докладов секции I.

ISBN 978-5-7422-8280-8 (т. 1)
ISBN 978-5-7422-8279-2
doi:10.18720/SPBPU/2/id23-627

© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2023

ОРГАНИЗАТОРЫ СЪЕЗДА

Российский национальный комитет по теоретической и прикладной
механике
Российская академия наук

ПРИ ПОДДЕРЖКЕ

Министерства науки и высшего образования Российской Федерации
Правительства Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургского государственного бюджетного учреждения
«Конгрессно-выставочное бюро»

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ПАРТНЕР

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого»

ПАРТНЕРЫ

ПАО «Газпром нефть»
МГУ
СПбГУ
ИПМаш РАН
ФАУ «Центральный аэрогидродинамический институт
имени профессора Н.Е. Жуковского»
ООО «АСКОН-Системы проектирования» (Консорциум «Развитие»)

СПОНСОРЫ

АО «НПО Спецматериалов»
АО «Институт новых углеродных материалов и технологий»
ООО «ФИДЕСИС»
ООО «ФИАНУМ ЛАБ»

ОРГКОМИТЕТ

Горячева Ирина Георгиевна, Рудской Андрей Иванович – сопредседатели
Боровков Алексей Иванович, Кривцов Антон Мирославович – заместители председателя
Арсеньев Дмитрий Германович, Бабешко Владимир Андреевич, Беляев Александр Константинович, Гайфуллин Александр Марксович, Гильманова Асия Тагировна, Губайдуллин Дамир Анварович, Карев Владимир Иосифович, Климов Дмитрий Михайлович, Козлов Валерий Васильевич, Корнеев Сергей Евгеньевич, Левин Владимир Алексеевич, Матвеев Валерий Павлович, Морозов Никита Федорович, Мулюков Радик Рафикович, Нигматулин Роберт Искандерович, Пешехонов Владимир Григорьевич, Полянский Владимир Анатольевич, Сергеев Виталий Владимирович, Сильников Михаил Владимирович, Суржиков Сергей Тимофеевич, Сыпало Кирилл Иванович, Федоров Михаил Петрович, Фомин Василий Михайлович, Черноусько Феликс Леонидович, Чернышев Сергей Леонидович, Хасанов Марс Магнавиевич, Хомич Владислав Юрьевич, Шмотин Юрий Николаевич

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Горячева Ирина Георгиевна – председатель
Кривцов Антон Мирославович – заместитель Председателя
Кузькин Виталий Андреевич – ученый секретарь
Аннин Б.Д., Афанасьев А.А., Бабешко В.А., Бауэр С.М., Беляев А.К., Васильев В.В., Ганиев Р.Ф., Гайфуллин А.М., Губайдуллин Д.А., Ерофеев В.И., Журавлев В.Ф., Индейцев Д.А., Карев В.И., Климов Д.М., Куликовский А.Г., Козлов В.В., Левин В.А., Ломакин Е.В., Матвеев В.П., Морозов Н.Ф., Мулюков Р.Р., Нигматулин Р.И., Павленко А.Н., Петров Ю.В., Порубов А.В., Полянский В.А., Ребров А.К., Решмин С.А., Романов А.Е., Садовский В.М., Сильников М.В., Смирнов Н.Н., Сыпало К.И., Суржиков С.Т., Фомин В.М., Черноусько Ф.Л., Чернышев С.Л., Якуш С.Е.

ЛОКАЛЬНЫЙ ОРГКОМИТЕТ

Княгинин В.Н., Боровков А.И. – сопредседатели
Кривцов А.М. – заместитель председателя
Кузькин В.А. – секретарь
Азаренков С.С., Арсеньев Д.Г., Беляев А.К., Владимиров С.С., Гильманова А.Т., Греков М.А., Иванова В.С., Карпов Д.А., Корнеев С.Е., Кустова Е.В., Максимов А.С., Микушев С.В., Пашоликов М.А., Полянский В.А., Селюгин А.С., Сергеев В.В., Сильников М.В., Соколов А.Ю., Сорокин П.П., Тихонов А.А., Фролов М.Е.

Краткое содержание

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ.....	6
СЕКЦИЯ I. Общая и прикладная механика	28
Подсекция I-1. Аналитическая механика и устойчивость движения	65
Подсекция I-2. Управление и оптимизация в механических системах	148
Подсекция I-3. Колебания механических систем	251
Подсекция I-4. Механика систем твердых и деформируемых тел	381
Подсекция I-5. Механика машин и роботов	466
Подсекция I-6. Механика космических аппаратов и систем	524

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

КЛИМАТ, ОЗОНОВЫЙ СЛОЙ, ЭНЕРГЕТИКА

Алексеев С.В.

*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
asvasus@yandex.ru*

Аннотация. Энергетика – базис экономики любой страны вне зависимости от технологического уклада. Однако сегодня возникла беспрецедентная ситуация, когда необходимо безотлагательно принимать принципиальные решения по дальнейшему развитию мировой энергетики. Причины обусловлены изменениями климата и разрушением озонового слоя Земли, преобладающий вклад в которые вносит деятельность человека, прежде всего, в сфере энергетики. В докладе дан анализ существующей ситуации и сформулированы следующие заключения.

Заключение 1: Изменения климата.

Обнаружен рост температуры поверхности Земли, который связывается с глобальным потеплением. Его главной причиной является антропогенная эмиссия парниковых газов – прежде всего, CO₂. Основной вклад вносит энергетика на органическом топливе.

При любых реальных сценариях развития энергетики глобальное потепление продолжится и уровень в 1,5 °C будет достигнут в середине столетия, но далее прогнозы расходятся, и результат может зависеть от действий человеческого сообщества.

Парижское соглашение не может быть реализовано в полной мере, но глобальная декарбонизация энергетики неизбежна.

В России потепление климата идет более высокими темпами (в 2,5 раза быстрее) и ведет к значительному сокращению потребности в топливе (до 15%), в основном из-за снижения расходов на теплоснабжение.

Необходимо сосредоточить усилия на повышении интенсивности биосферного стока (карбоновые полигоны, лесоразведение, борьба с лесными пожарами и др.).

Необходимо дальнейшее развитие климатических моделей Земли с одновременной организацией систем климатического мониторинга.

В силу неизбежности изменений климата необходимо разрабатывать адекватные меры по адаптации человеческого общества к существованию в новых условиях.

Заключение 2: Разрушение озонового слоя Земли.

Показано, что антропогенные выбросы ОРВ (озоноразрушающих веществ) типа фреонов приводят к разрушению озонового слоя Земли и образованию озоновых «дыр» в Антарктике.

Показано, что разрушение озонового слоя и глобальное изменение климата взаимосвязаны, поскольку озоноразрушающие вещества и их заменители являются парниковыми газами. Озон также является парниковым газом.

Снижение выбросов ОРВ благодаря соблюдению Монреальского протокола позволяет избежать глобального потепления примерно на 0,5 – 1 °C к 2050 г. по сравнению с экстремальным сценарием с неконтролируемым увеличением ОРВ на 3 – 3,5% в год.

Соблюдение принятой в 2016 году поправки Кигали к Монреальскому протоколу, которая требует поэтапного сокращения производства и потребления некоторых гидрофторуглеродов (ГФУ) в климатических целях, по оценкам, позволит избежать потепления на 0,3 – 0,5 °C к 2100 году.

Ожидается, что общий объем озонового слоя вернется к значениям 1980 года примерно в 2066 году в Антарктике, примерно в 2045 году в Арктике и примерно к 2040 году для среднемирового значения (60° северной широты – 60° южной широты).

Заключение 3: Энергетические технологии.

Необходимо последовательно осуществлять декарбонизацию энергетики со скоростями, не превосходящими экономические возможности страны.

В сфере энергетики на органичном топливе, прежде всего, необходимо повышать эффективность производства энергии. Радикальным подходом является применение технологий с секвестированием CO₂. В числе наиболее перспективных – цикл Аллама, предусматривающий сжигание топлива в кислороде и использование сверхкритического CO₂ в качестве рабочего тела.

Альтернативными безуглеродными технологиями являются атомная энергетика и возобновляемые источники энергии (ВИЭ). В числе наиболее перспективных ВИЭ видится геотермальная энергетика с переходом в будущем на глубинное тепло.

Поскольку практически все основные рабочие тела (типа фреонов) в тепловых машинах являются либо озоноразрушающими, либо парниковыми (или то и другое), то существует принципиальная проблема выбора рабочих веществ для холодильной техники, тепловых насосов, органического цикла Ренкина. По этой причине,

на переходный период рассматриваются такие озонобезопасные фреоны (но обладающие парниковым эффектом) как R134a , R245fa , а в будущем – фреоны нового поколения без парникового эффекта.

Наиболее подходящими рабочими телами (неводного типа) с точки зрения озонобезопасности и парникового эффекта являются давно известные природные агенты: углеводороды типа пропана и изобутана, углекислый газ, аммиак. У каждого свои особенности, в частности, токсичность и горючесть. Аммиак выглядит особо перспективным, поскольку освоен в глобальных масштабах, кроме того, это лучший способ хранения водорода и он является эффективным топливом для топливных элементов.

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКТЫ ОАО «РЖД»: ПОДВИЖНОЙ СОСТАВ И ИНФРАСТРУКТУРА

Андреев В.Е.

Открытое акционерное общество «Российские железные дороги», Москва, Россия
AndreevVE@center.rzd.ru

Аннотация. Уделяется основное внимание проблемам в сфере технических решений, требующих комплексной научной проработки при реализации долгосрочных проектов. Раскрываются вопросы привлечения компетенций научного сообщества и инженеринговых центров в области решения задач механики для целей развития железнодорожного транспорта на горизонте 2035 – 2050 годов.

Введение

ОАО «РЖД» является холдинговой компанией, которая наряду с основной функцией обеспечения перевозки пассажиров и грузов осуществляет широкий спектр научно-исследовательских работ (включая вопросы экономики транспорта), опытно-конструкторских разработок, а также обеспечивает инженеринг по созданию подвижного состава и железнодорожной инфраструктуры. В число крупнейших проектов входят разработка российского высокоскоростного электропоезда, оптимизация взаимодействия в системе «колесо-рельс», автоматизация управления движением подвижного состава, создание конструкции и технологий содержания железнодорожного пути с максимально достижимыми характеристиками ресурса и надежности, роботизация и автоматизация процессов обработки поездов на сортировочных станциях и ряд других задач.

В сфере проведения научно-технических разработок основную роль играют три научно-исследовательских института – АО «ВНИИЖТ», АО «НИИАС», АО ВНИКТИ и инженеринговый центр АО «ИЦ ЖТ», входящие в контур холдинга «РЖД».

Отечественный высокоскоростной поезд

В настоящее время разработчиками АО «ИЦ ЖТ» сформированы технические требования и характеристики будущего поезда, который будет работать на постоянном и переменном токе, развивать максимальную скорость 360 км/ч в эксплуатации и вмещать не менее 400 пассажиров. Расчеты и конструирование выполняются на таком уровне впервые в отечественной практике.

К концу 2025 года запланировано завершение разработки полного комплекта рабочей конструкторской документации и начало постройки поезда. С 2027 года будет вестись сертификационные испытания для получения в итоге сертификата соответствия требованиям технических регламентов Таможенного союза, что ожидается к концу 2028 года. Российский поезд станет достойной альтернативой разработанному и построенному компанией Сименс высокоскоростному электропоезду «Сапсан», который сегодня составляет основу парка российского высокоскоростного подвижного состава.

Путь с наработкой 2,5 млрд тонн брутто

На базе АО «ИЦ ЖТ» реализуется проект, направленный на создание конструкции и технологий содержания железнодорожного пути, обеспечивающих наработку 2,5 млрд. тонн брутто пропущенного тоннажа. Комплекс работ охватывает все элементы конструкции пути – рельсы, упругие скрепления, шпалы и брусья, балластный слой и защитные подбалластные слои, стрелочные переводы.

Расчеты ведутся с использованием современных систем расчета на основании методов конечных элементов, обеспечивая пространственное моделирование поведения новых конструкций в различных условиях эксплуатации. Конечная цель преследует получение оптимизированной конструкции железнодорожного пути с максимально достижимыми на сегодня показателями ресурса и надежности, обеспечивающего кратное увеличение интервалов капитального ремонта и обслуживания и высокие экономические эффекты на жизненном цикле разработки.

Исследование взаимодействия в системе «колесо-рельс»

Комплексные исследования начаты Компанией в 2021 г. по направлению оптимизации взаимодействия в механической системе «колесо-рельс». Данная работа объединяет классические подходы к наблюдению за физическими процессами (испытания, эксплуатационные наблюдения) и современные технологии обработки данных и моделирования (искусственный интеллект, машинное обучение).

Силы, возникающие при взаимодействии колеса и рельса, являются основными причинами появления износов, неисправностей элементов пути и подвижного состава. В настоящее время наиболее распространенным решением по снижению сил и связанных с ними износов является смазка, что действительно эффективно снижает износы гребней колес и рельсов наружной нити при движении в кривых малого радиуса. Однако интенсивные износы в кривых малого радиуса — это лишь часть проблем, требующих решения. Необходимо снижать интенсивность накопления неисправностей колес и дефектность рельсов.

Причем мероприятия должны учитывать эксплуатационные особенности сети – смешанное движение грузовых и пассажирских поездов, многообразие климатических условий, наличие перевальных участков с затяжными спусками и подъемами в сочетании с кривыми малого радиуса.

Основные усилия ученых сосредоточены на разработке и апробации мероприятий, приводящих к снижению сил взаимодействия и контактных давлений в системе «колесо-рельс», т.е. переходу на одноточечный контакт. Одной из причин повышенного бокового износа рельсов и гребней колес являются высокие значения давлений при их взаимодействии. С помощью оптимизационных процедур на основе компьютерного моделирования в АО «ВНИИЖТ» предложен профиль, который позволяет в 7 раз – до 200 МПа, снизить величину контактных давлений и связанных с этим износов колеса и рельса.

Предиктивная модель путевого хозяйства

Кроме перехода преимущественно на одноточечный контакт планируется внедрение поддержки адресного технического обслуживания участков пути на основе предиктивной модели взаимодействия пути и подвижного состава, и моделей стоимости жизненного цикла железнодорожного пути и подвижного состава.

Разработанные в холдинге «РЖД» предиктивные модели «колесо-рельс», «путь», «вагон» учитывают 56 входных параметров и продолжают развиваться. Предиктивная модель верхнего строения пути и подвижного состава состоит из ряда взаимосвязанных блоков, которые в результате позволяют на выходе получить итог в виде технико-экономической оценки планируемых мероприятий по снижению сил взаимодействия для текущих и перспективных эксплуатационных условий на заданном километре пути. Сформированы расчетные трехмерные модели пути и подвижного состава и данные для их проверки. Для постоянного непрерывного обучения нейросетевых моделей на сети дорог установлены 12 автоматических постов регистрации сил в наиболее нагруженных местах на различных дорогах. С той же целью запущен в обращение опытный сцеп для регистрации сил, передающихся от вагона на рельсошпальную решетку при его движении в составе поезда. Разработано прикладное программное обеспечение для реализации сформированных алгоритмов.

Автоматизация управления движением подвижного состава

Другим важным направлением развития железных дорог является автоматизация управления подвижным составом, обеспечивающая автоматическое либо дистанционное управление движением транспортных средств и другими процессами, минимизируя участие человека в технологии перевозочного процесса. Одним из ключевых пилотных проектов для ОАО «РЖД» является реализация автоматического движения на Московском центральном кольце (МЦК). Для достижения максимального четвертого уровня автоматизации (УА4 по ГОСТ Р 70059-2022) применяется комплексный подход к развитию конструкции электропоезда «Ласточка» и создается большое количество инфраструктурных систем, обеспечивающих безопасность пассажиров и надежность эксплуатации электропоездов.

Система представляет собой иерархическую структуру комплексного взаимодействия бортового и инфраструктурного оборудования. Основой данной системы является Центр дистанционного контроля и управления, в котором агрегируются потоки различных информационных систем, осуществляется контроль движения подвижного состава, а также обеспечивается возможность дистанционного управления при нештатной работе или невозможности движения в автоматическом режиме.

Бортовая и стационарная система обеспечивают возможность автоматического движения с выполнением требований безопасности перевозочного процесса, в особенности пассажиров при переходе с платформенных обустройств в «беспилотную» среду подвижного состава.

С 2015 года ОАО «РЖД» с привлечением АО «НИИАС» и АО «ВНИКТИ» реализует поэтапную автоматизацию производственных процессов при выполнении маневровой работы на станции Лужская Октябрьской железной дороги. Последовательно расширяются функциональные возможности задействованных на станции маневровых локомотивов.

В применяемой на маневровом локомотиве системе машинного зрения применяются датчики разного типа, что позволяет использовать преимущество каждого из них. Установка лидаров позволяет сформировать высокоточное и детализированное цифровое изображение, контроль мертвой зоны обеспечивается ультразвуковыми датчиками. Применение оптических камер и алгоритмов на основе нейронных сетей позволяет классифицировать объекты, расположенные на пути следования подвижного состава.

По результатам успешных испытаний системы «Автомашинист» на локомотиве ТЭМ7А на станции Лужская в 2022 году выполнена работа по интеграции системы «Автомашинист» во вновь создаваемые локомотивы ТЭМ14М и ТЭМ23 для дальнейшего запуска на станциях, оснащенных необходимой инфраструктурой. Первым объектом, который примет новые локомотивы, будет станция Челябинск Южно-Уральской железной дороги.

Инфраструктура станции Лужская является основой внедрения беспилотных локомотивов. Центральным звеном в разработанной системе «Автомашинист» является центр автоматизации маневровой работы (ЦАМР). ЦАМР представляет собой безопасный вычислительный комплекс, обеспечивающий сбор информации от МПЦ и реализующий автоматизацию более 12 технологических сценариев работы беспилотного маневрового локомотива. Для движения вагонами вперед беспилотный локомотив получает

информацию от инновационного стационарного комплекса контроля свободности пути. Все узлы станционной инфраструктуры защищены от киберугроз за счет применения общего контура подсистемы защиты информации, выполняются работы по замене иностранной системы горочной автоматизации MSR-32 на российский аналог КСАУ СП.

Цифровизация технологии работы сортировочной станции

Еще один наукоемкий проект холдинга «РЖД» – создание станции, автоматически выполняющей полный цикл технологических операций, с минимальным участием человека и рисками влияния человеческого фактора на безопасность и перерабатываемую мощность станций.

Пилотный проект цифровой железнодорожной станции (ЦЖС) реализуется на сортировочной станции Челябинск. Разработчиками системы моделируются и создаются технические решения полного цикла технологии от поступления задачи до ее направления в конкретное исполнительное устройство на станции, а также обратное взаимодействие, включая контроль исполнения задачи устройствами и непрерывный мониторинг информации о состоянии инфраструктуры и подвижного состава.

Автоматическое расцепление обрабатываемых на станции вагонов будет осуществляться промышленным роботом, диагностирование технического состояния вагонов и их учет – интеллектуальными системами технического зрения и сканирующими устройствами.

Начало тиражирования намечено на 2026 год, которому предстоит работа по созданию технических проектов и опытных образцов. Конечная цель проекта ЦЖС – связать перевозки в единый поток, контролируемый и организуемый на основе цифровой модели.

Заключение

Реализация проектов по развитию железнодорожного транспорта, проводимая под эгидой ОАО «РЖД», предусматривает широкий спектр исследовательских работ, углубленную теоретическую проработку и моделирование с использованием новейших достижений методов и средств вычислений, с последующим выходом на создание российских конструкций, материалов и технологий, максимальное импортозамещение и локализацию производственных и логистических цепочек, широкое взаимодействие с российскими научными, научно-образовательными, производственно-техническими организациями и институтами развития.

РОЛЬ МЕХАНИКИ И ПЕРЕДОВЫХ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В РАЗВИТИИ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ ОТРАСЛЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Боровков А.И.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург
borovkov@compmechlab.com

Аннотация. В работе уделено внимание взаимосвязи фундаментальных основ механики и прикладной математики и последующему формированию на их основе парадигмы цифрового инжиниринга (Digital Engineering). Развитие передовых цифровых и производственных технологий на основе механики и прикладной математики следует рассматривать как «**эволюционирующее знание**», которое охватывает все виды инжиниринга, концепцию мультидисциплинарности, совершенствование высокопроизводительных вычислительных средств, тенденцию увеличения инженерных расчетов, вычислительных экспериментов и цифровых испытаний, зарождение цифровой экономики и формирование концепции «Индустрия 4.0» (Industry 4.0), в которой ключевой технологией, драйвером развития высокотехнологичной промышленности выступает технология разработки цифровых двойников (Digital Twins).

Введение

Основой всей промышленности, в первую очередь, машиностроения, драйвером развития и становления парадигмы цифрового инжиниринга (Digital Engineering) выступает наука **механика**. Развитие ключевых областей механики – общей механики, механики деформируемого твердого тела, механики жидкости и газа, экспериментальной механики, – а также математики способствовало формированию новых вычислительных наук – вычислительной математики, вычислительной физики, вычислительной механики и др. Именно вычислительные науки составляют основу современного инжиниринга, на них основываются в том числе программные системы инженерного анализа, широкое применение которых способствует разработке конкурентоспособных изделий высокотехнологичной промышленности.

Ключевые тезисы

Одним из наиболее эффективных методов численного решения инженерных задач с применением вычислительных машин, решения задач математического и компьютерного моделирования выступает метод конечных элементов (МКЭ) [1]. Метод был предложен А.П. Хрениковым (1940 год) для решения плоских задач теории упругости и изгиба пластин и немного позднее был развит выдающимися учеными Р. Курантом, Дж. Аргирисом, О. Зенкевичем, Р. Клафом, Р. Галлагером, внесшими значительный вклад в развитие МКЭ и его применение для решения разнообразных инженерных задач, а также многими другими учеными [2]. Именно метод конечных элементов способствовал развитию CAE-систем (систем инженерного анализа, или систем компьютерного инжиниринга, Computer-Aided Engineering) и заложил основу для развития нового научного направления – вычислительной механики (Computational Mechanics) [1].



XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике >> 21-25 августа 2023 >> Санкт-Петербург
А. И. Боровков. Роль механики и передовых цифровых технологий в развитии высокотехнологичных отраслей промышленности

27

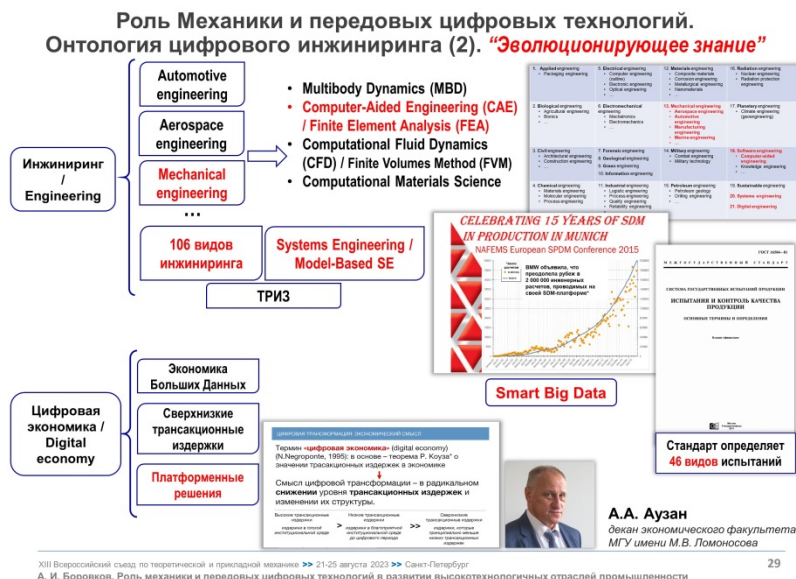
Рис. 1. Онтология цифрового инжиниринга. Часть 1
(Источник: ПИШ СПбПУ «Цифровой инжиниринг»)

Стоит отметить также А.А. Самарского, работы которого внесли неоценимый вклад в развитие вычислительной математики, заложили основы современного математического моделирования и вычислительных экспериментов [3]. Программная реализация МКЭ привела к созданию программных систем конечно-элементного анализа (FEA, Finite Element Analysis). Таким образом, совершенствование компьютерного инжиниринга неотрывно связано с развитием численных методов и увеличением потребности в инженерных расчетах для решения сложных мультидисциплинарных задач. Эти тенденции отражают развитие M³-концепции «MultiDisciplinary & MultiScale / MultiStage & MultiTechnology (MultiCAD & MultiCAE)», в рамках которой проводятся мультидисциплинарные, многоуровневые и многостадийные исследования и инжиниринг на основе меж- / мульти- / и трансдисциплинарных, иногда называемых “мультифизическими” (“MultiPhysics”), знаний и компьютерных технологий, в первую очередь, наукоемких технологий компьютерного инжиниринга (CAE) [4].

Кроме того, следует отметить формирование теории решения изобретательских задач (ТРИЗ), разработанной Г.С. Альтшуллером, которая направлена на устранение технических противоречий системы [5]. Следом за ТРИЗ сформировался подход системного инжиниринга (Systems Engineering), который впоследствии сконцентрировался на моделировании (модельно-ориентированный системный инжиниринг, MBSE, Model-Based Systems Engineering).

Применение вычислительных технологий в решении современных инженерных задач сопровождается преобразованиями высокотехнологичной промышленности и экономической сферы, которые способствовали переходу к новому типу экономики – цифровой экономике (Digital Economy). Цифровая экономика базируется на генерации больших данных, сверхнизких транзакционных издержках и платформенных решениях, в том числе платформенных решениях для проведения инженерного анализа, вычислительных экспериментов, цифровых испытаний.

В связи с развитием и широким применением вычислительных технологий и CAE-систем возникла необходимость в разработке решений для осуществления интеграции различных инструментов и управления результатами их применения. Решением подобного рода являются SPDM-платформы (Simulation Process and Data Management) для управления данными, процессами и результатами компьютерного моделирования, первые из которых возникли в начале 2000-х годов.



XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике >> 21-25 августа 2023 >> Санкт-Петербург
А. И. Воробков. Роль механики и передовых цифровых технологий в развитии высокотехнологичных отраслей промышленности

29

Рис. 2. Онтология цифрового инжиниринга. Часть 2
(Источник: ПИИШ СПбПУ «Цифровой инжиниринг»)

Наконец, смена парадигмы проектирования изделий в сторону повсеместного внедрения и применения математического и компьютерного моделирования, развитие концепции «Индустрия 4.0», формирование ряда «сквозных» технологий и возрастающая потребность в совершенствовании методов разработки изделий для ускоренного вывода высокотехнологичной продукции на рынок способствовали смене традиционного подхода к компьютерному инжинирингу, когда инженерные расчеты проводились, как правило, на стадии конструкторской проработки изделия, и переходу к современному подходу, согласно которому компьютерный инжиниринг участвует на всех этапах разработки, производства и эксплуатации изделия, другими словами, на всех этапах жизненного цикла изделия.

Именно на этом основывается концепция цифрового инжиниринга высокотехнологичной продукции. В соответствии с подходом Инжинирингового центра «Центр компьютерного инжиниринга» (CompMechLab[®]) СПбПУ и Передовой инженерной школы СПбПУ «Цифровой инжиниринг» (ПИИШ СПбПУ) **цифровой инжиниринг** – это высокотехнологичный мультидисциплинарный наукоемкий подход к созданию объектов

(изделий), который предполагает обеспечение жизненного цикла объекта (изделия) с поддержанием непрерывной IT-связи между физическим (реальным) миром и цифровым (виртуальным) пространством, включая разработку на основе многоуровневой матрицы требований, целевых показателей и ресурсных ограничений, программно-технологической платформы (цифровой платформы по разработке и применению цифровых двойников CML-Bench® [6–8]), предназначенных для разработки цифровых двойников изделий на стадиях разработки (ЦД-Р), производства (ЦД-П), эксплуатации (ЦД-Э), проведения цифровых (виртуальных) испытаний на цифровых (виртуальных) стендах и полигонах [2].

Цифровой инжиниринг объединяет ряд технологий, инструментов и методов, способствующих разработке конкурентоспособной продукции в кратчайшие сроки, что соответствует задачам по обеспечению импортозамещения и импортонезависимости, технологического суверенитета, глобальной конкурентоспособности экономики государства и национальной безопасности страны.

**Роль Механики и передовых цифровых технологий.
Онтология цифрового инжиниринга (3). “Эволюционирующее знание”**



Рис. 3. Онтология цифрового инжиниринга. Часть 3
(Источник: ПИИ СПбПУ «Цифровой инжиниринг»)

Неотъемлемой частью цифрового инжиниринга является технология разработки цифровых двойников изделий (Digital Twins). В рамках ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения» дано определение **цифрового двойника изделия** – это система, состоящая из цифровой модели изделия и двусторонних информационных связей с изделием (при наличии изделия) и (или) его составными частями [9].

Кроме того, в рамках пленарного доклада кратко были рассмотрены следующие вопросы:

- история создания физико-механического факультета в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого (СПбПУ), среди ключевых фигур которого А.Ф. Иоффе, С.П. Тимошенко, А.Н. Крылов, П.Л. Капица, Н.Н. Семёнов, Ю.Б. Харитон и другие;
- выполнение атомного проекта под руководством трижды Героев Социалистического Труда и трижды лауреатов Сталинской премии первой степени И.В. Курчатова, Ю.Б. Харитона, К.И. Щёлкина, Я.Б. Зельдовича, Н.Л. Духова, которые тесно связаны с Ленинградским политехническим институтом (ныне – СПбПУ);
- выдающиеся достижения ученых-механиков-политехников С.П. Тимошенко, Л.Г. Лойцянского, А.И. Лурье, В.А. Пальмова и других;
- развитие основ метода конечных элементов советскими учеными-политехниками (И.Г. Бубнов, Б.Г. Галёркин, Л.А. Розин и другие) и эволюция основных концепций и парадигм компьютерного инжиниринга и цифрового инжиниринга для решения сложных задач высокотехнологичной промышленности.

Заключение

Основы фундаментальных наук – механики и математики – служат драйвером развития многих новых научных областей, среди которых вычислительная математика, вычислительная физика, вычислительная механика. Именно эти науки и научные направления способствовали развитию передовых цифровых и производственных технологий и формированию нового направления – цифрового инжиниринга, основу которого составляет разработка и применение цифровых двойников и применение платформенных решений. Механика по-прежнему является основой для решения сложных наукоемких задач промышленности и определяет ключевые направления развития методов и технологий, применяемых при разработке

высокотехнологичных изделий, обладающих высоким уровнем конкурентоспособности, что необходимо для достижения технологического суверенитета.

Литература

1. А. И. Боровков [и др.] // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. Задачи теплопроводности и теории упругости. 2019. 162 с.
2. А. И. Боровков [и др.] // Цифровые двойники в высокотехнологичной промышленности: монография. 2022. 492 с.
3. А. А. Самарский // Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Вестник АН СССР, 5. 1979. 38–49.
4. А. И. Боровков [и др.] // Компьютерный инжиниринг. 2012. 93 с.
5. Г. С. Альтшуллер, Р.Б. Шапиро // О психологии изобретательского творчества, Вопросы психологии, 6. 1956. 37–49.
6. А. И. Боровков [и др.] // Цифровая платформа по разработке и применению цифровых двойников (Digital Twins) CML-Bench® (часть 1), САПР и графика, 8. 2023. 42–51.
7. А. И. Боровков, В. В. Бураков // Цифровая платформа по разработке и применению цифровых двойников (Digital Twins) CML-Bench® (часть 2), САПР и графика, 9. 2023. 54–64.
8. А. И. Боровков [и др.] // Цифровая платформа по разработке и применению цифровых двойников (Digital Twins) CML-Bench® (часть 3), САПР и графика, 10. 2023. 50–62.
9. ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения».

ПРОБЛЕМА СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ

Васильев В.В.¹, Лурье С.А.²

1 - Центральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

2 - Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

vvvsal@bk.ru

Аннотация. Рассматривается проблема сингулярных решений традиционных уравнений в прикладной механике и физике, которые не имеют физической природы и не наблюдаются экспериментально. Для получения регулярных решений рассматриваемых проблем предлагается использовать обобщенную постановку задачи, включающую наряду с традиционными уравнениями уравнения Гельмгольца, устанавливающие связь между нелокальными и актуальными физическими несингулярными, гладкими переменными:

Введение

Предметом прикладной математики является применение математических методов для решения практических задач. Отметим, что в прикладной математике используется как правило математический аппарат, основанный на классическом дифференциальном исчислении, т.е. на анализе бесконечно малых величин. Это обстоятельство является причиной появления сингулярных решений и вызывает возражения, так как получаемые сингулярные решения, оказываются лишены физического смысла.

Основной текст

Сингулярные задачи, решения которых обращаются в бесконечность или имеют разрывы в отдельных точках, образуют достаточно широкий класс задач прикладной механики и математики. К ним, в частности, относятся задачи о локальном нагружении, контактные задачи, задачи о трещинах, задачи со смешанными граничными условиями и угловыми точками. Являющиеся строгими в математическом смысле, сингулярные решения не имеют физического смысла и не подтверждаются экспериментально. Такое положение является результатом использования для решения подобных задач классического анализа бесконечно малых величин.

Предлагается модифицированная форма дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы, основанные на рассмотрении поведения элемента сплошной среды, обладающими малыми, но конечными размерами. Вводятся нелокальные функции, являющиеся результатом осреднения традиционных функций по объему элемента, которые в отличие от традиционных, зависят не только от значения аргумента в точке, но и от значения второй производной функции в этой точке. В результате, для рассматриваемых задач получены уравнения, которые по форме совпадают с классическими уравнениями, но включают в качестве неизвестных нелокальные функции. Эти уравнения дополняются уравнениями Гельмгольца, которые устанавливают связь между нелокальными и традиционными функциями и включают дополнительную константу, которая в зависимости от характера задачи определяется аналитически или экспериментально и является масштабным параметром. Решение уравнения Гельмгольца вырождается, если традиционное решение является регулярным или позволяет устранить сингулярность при условии, что традиционное решение является таковым. Существенно, что сингулярность устраняется, только если традиционное решение является физически обусловленным, т.е. метод не является универсальным в математическом отношении.

Приложение предлагаемого подхода к решению сингулярных задач иллюстрируется на задачах о мембране, полуплоскости и полупространстве, нагруженных сосредоточенными силами, контактной задаче и плоской задаче о трещине. Все полученные решения подтверждены экспериментально. Установлено, что применительно к задачам упругости, дополнительная константа обобщенной модели, являющаяся масштабным параметром, обладает свойством инвариантности по отношению к длине и ориентации дефекта, являющегося причиной сингулярности в классической упругости и концентрации напряжений в обобщенной модели. Следовательно, например, после определения экспериментальным путем дополнительной постоянной для конкретной трещины появляется возможность оценки прочности полосы с трещинами другой длины. Это фундаментальное свойство подтверждено проведенными экспериментальными исследованиями и позволяет предложить новую концепцию концентрации напряжений в механике трещин, которая позволяет оценивать прочность пластин с трещинами по критериям прочности и характеристике масштаба.

Обсуждается сингулярность Шварцшильда в релятивистской механике (общей теории относительности – ОТО), служащая математическим обоснованием существования так называемых Черных Дыр. Отмечается, что традиционная теория характеризуется двумя принципиальными недостатками. Во-первых, система уравнений ОТО не является полной в отношении компонент метрического тензора и не позволяет в принципе получить решение без привлечения дополнительных координатных условий, общая форма которых в настоящее время неизвестна. Обсуждаются решения К. Шварцшильда и В.А. Фока, соответствующие различным координатным условиям и иллюстрирующие неоднозначность решений ОТО. Во-вторых, ОТО, в отличие от гравитационной теории Ньютона, не позволяет определить напряженное состояние, порождаемое гравитацией в сплошной среде, так как в Римановом пространстве не существуют используемые в теории упругости уравнения

совместности деформаций. Для устранения этих недостатков предлагается новая модель 4-мерного Риманова пространства-времени, согласно которой пространство является Евклидовым в отношении трех пространственных координат и Римановым только в отношении времени. Эта модель, во-первых, снижает число неизвестных компонент метрического тензора и не требует привлечения координатных условий и, во-вторых, позволяет дополнить уравнения ОТО уравнениями совместности деформаций и найти напряжения. Предлагаемый подход демонстрируется на примере сферически симметричной статической задаче ОТО (задаче Шварцшильда). Полученное решение не является сингулярным, не подтверждает возможность существования в пространстве сингулярных объектов и позволяет определить напряженное состояние, порожаемое гравитацией в рамках ОТО.

Заключение

Сингулярные и разрывные решения предлагается считать формальными математическими результатами, не имеющими физического содержания. Регулярные решения строятся с привлечением обобщенной постановки задачи, включающей наряду с традиционными уравнениями, уравнения Гельмгольца, которые содержат масштабный параметр, определяемый экспериментально [1–9].

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда (№ 23-11-00275) за 2023 год, выданного ИПРИМ РАН.

Литература

1. В. В. Васильев, С. А. Лурье // Обобщенная теория упругости. Изв. РАН. Механика твердого тела, 4 2015. 4. 16 – 27.
2. В. В. Васильев, С. А. Лурье // Новое решение осесимметричной контактной задачи теории упругости, Изв. РАН. Механика твердого тела. 5 2017. 12 – 21.
3. В. В. Васильев, С. А. Лурье // Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики, ПММ. 18:2 2018. 459 – 471.
4. V.V. Vasiliev, S.A. Lurie // New Method for Studying the Strength of Brittle Bodies with Cracks, Russian Metallurgy (Metally), Allerton Press Inc., 4 2020, 291-297
5. В. В. Васильев, С. А. Лурье, В.А. Салов // 2020 Определение нагрузки, вызывающей появление пластической деформации в растягиваемой пластине с трещиной, Изв. РАН. Механика твердого тела, 4 2020.43-49.
6. V.V. Vasiliev, S.A. Lurie, L. B. Volkov-Bogorodskii // Nonsingular Gradient Solutions in Crack Mechanics and the Concept of Stress Concentration, Int. J. of Mathem. Models and Methods in Applied Sciences, 14 2020 38-40
7. В. В. Васильев, С. А. Лурье, В.А. Салов // Новое решение задачи о трещине в растягиваемой ортотропной пластине, Изв. РАН. Механика твердого тела, 6 2021, 23-32
8. V.V. Vasiliev, S.A. Lurie, V.A. Salov // On the Flamant problem for a half-plane loaded with a concentrated force, Acta Mechanica. 232:5 2021. 1761-1771
9. V.V. Vasiliev, S.A. Lurie, Yu.O. Solyaev // New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity, Engineering Fracture Mechanics, 258 2021 108080

ВКЛАД ШКОЛЫ Д.Е. ОХОЦИМСКОГО В ТЕОРИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДЕФИЦИТОМ УПРАВЛЕНИЯ

Голубев Ю.Ф.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
golubev@keldysh.ru

Аннотация. Представлен обзор исследований Д.Е. Охоцимского и его сотрудников по оптимальному управлению механическими системами, а также системами, содержащими степени свободы, не имеющие приводов. Сюда входят теория систем с полостями, частично заполненными жидкостью, теория управления входом в атмосферу со второй космической скоростью, теория формирования последовательностей многократных гравитационных маневров для полетов в дальний космос, теория взаимодействия робототехнических систем с маятниками в реальном времени. Предложен новый метод поиска оптимального управления амплитудой одномерных колебаний в окрестности положения равновесия для склерономной многомерной механической системы с трением. Колебательная степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На ее движение влияют другие, непосредственно управляемые степени свободы. В число непосредственно управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не использует сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. На примерах конкретных колебательных механических моделей с сухим и вязким трением продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Введение

Механические системы с дефицитом управления встречаются повсеместно. Примером могут служить различные варианты перемещения с помощью конечностей, например, ходьба, бег, раскачивание на качелях, работа воздушных гимнастов, работа в аварийных ситуациях и др. Изменение собственной конфигурации систем происходит при помощи внутренних сил, обеспечиваемых соответствующими приводами, и само по себе не может повлиять на изменение положения центра масс системы в пространстве. Для того, чтобы вызвать требуемое движение центра масс, нужна опора о внешнюю среду, и если опора меняется, то в точках контакта практически невозможно обеспечить непосредственное управляющее воздействие. Тем самым естественно возникают системы с недостаточным набором приводов для всех степеней свободы (неполноприводные системы). В теории управления их ещё называют системами с дефицитом управления. Они возникают и при создании гибридных систем. Примером могут служить тела, частично или полностью наполненные жидкостью. В них жидкость не поддается непосредственному управлению, но система в целом должна двигаться, как положено. Другим примером может служить проблема управления входом космического аппарата в атмосферу по углу крена. В ней требуется выполнить множество фазовых ограничений при наличии только одной управляющей функции. Еще один пример – это траектории космического полета с многократными гравитационными манёврами.

Теория управления такими системами встречается с трудностями, связанными с тем, что требуемое влияние на степени свободы с отсутствующими приводами достигается опосредовано, за счет перекрестных связей, и потому не всегда очевидно. Ниже приводятся некоторые примеры решения достаточно сложных прикладных проблем для систем с дефицитом управления, выполненных школой Д.Е. Охоцимского, а также предложен простой и экономный метод оптимизации колебаний для голономных консервативных систем с дефицитом управления по одной степени свободы. В нём в качестве управляющих функций выбираются непосредственно координаты управляемых степеней свободы. Этот метод не использует сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. В данной работе представлено дальнейшее развитие этого метода для систем с сухим и вязким трением. Показывается, что наличие трения в системе не влияет на стратегию оптимального раскачивания (торможения). Оно влияет лишь на фактическую зависимость управляющих функций от времени, а также на результат применения этой стратегии, затрудняя и замедляя процедуру раскачивания, а при большом вязком трении ограничивая достижимую амплитуду.

Проблемы дефицита управления в космических и мехатронных системах

Школа Д.Е. Охоцимского начала формироваться в МИ АН СССР им. В.А. Стеклова практически сразу после окончания ВОВ в связи с необходимостью разработки ракетных средств доставки полезной нагрузки на большие расстояния. Вокруг Д.Е. Охоцимского сформировался сильный научный коллектив. Лидерами были Т.М. Энеев, В.А. Егоров, Э.Л. Аким, А.К. Платонов, В.А. Сарычев, В.В. Белецкий, М.Л. Лидов. Было много задач, связанных с оптимизацией движения крылатых ракет и их теплозащитой. Развивалась космическая программа СССР, и был создан Институт прикладной математики АН СССР под руководством М.В. Келдыша. Туда перешел коллектив, возглавляемый Д.Е. Охоцимским. К 70-м годам прошлого века Отдел «Механика космического полёта и управление движением», которым руководил Д.Е. Охоцимский, насчитывал уже более 60 человек. Возникали новые проблемы, связанные с необходимостью освоения планет Солнечной системы с

помощью автономных аппаратов. Остановимся лишь на нескольких решённых коллективом отдела проблемах, для которых специфика механических систем с дефицитом управления проявляется особенно ярко. Для исследования таких задач в то время не существовало регулярных методов, но коллектив отдела успешно решал их, а разработанные при этом новые методы активно применяются и в настоящее время для развития современных направлений науки об управлении движением механических систем.

Основу баллистических ракет большой дальности составляли ЖРД, и актуальной была задача об оптимальном в смысле расхода топлива выводе ракеты на орбиту. Д.Е. Охоцимскому совместно с Т.М. Энеевым удалось на основе формализма множителей Лагранжа впервые получить регулярный метод вычисления первой вариации функционала для вырожденных и невырожденных задач оптимального управления, на многие годы предвосхитивший появление знаменитого принципа максимума Л.С. Понтрягина. Была разработана методика расчёта оптимального управления составной ракетой в неоднородной атмосфере, учтена неоднородность поля тяготения Земли. Полученные в работе формулы для расчёта управления и сегодня применяются в теории и практике ракетостроения [1].

Решена была задача о динамике колебаний топлива в баках ракет, из-за которых в случае возникновения резонанса, могло произойти разрушение ракеты. Д.Е. Охоцимский исследовал безвихревое движение жидкости при удовлетворении условия постоянного давления на свободной поверхности и при сообщении твёрдому телу некоторого вынужденного движения вблизи исходного положения. Он разработал эффективный метод учёта подвижности жидкости в баках ракеты в условиях полёта при наличии свободной поверхности и рассмотрел конкретный случай гармонических (не малых) колебаний тела с полостью цилиндрической формы [2]. При этом он получил простые формулы для расчёта давления жидкости на стенки и дно бака, прочно вошедшие в практику проектирования ракет и позволившие исключить вредные резонансные явления.

Работа над задачей автономного управления при входе в атмосферу шла в рамках проекта лунной экспедиции с посадкой космонавтов на Луну и последующим возвращением их на Землю. Вход в атмосферу должен был происходить со второй космической скоростью $\sim 11,2$ км/с, дальность полёта – 10 тыс. км. Предполагалось два погружения в атмосферу. Управление осуществлялось только по углу крена. В процессе полёта измерялись компоненты перегрузки по трём осям гиростабилизированной платформы. Требовалось обеспечить высокую точность приземления, приемлемые значения перегрузки и теплового потока при действии возмущений плотности атмосферы, ветра, инструментальных и исполнительных погрешностей. В ходе полёта плотность атмосферы могла раза в 1,5–2 отклоняться от номинальной. Учитывая возможности БЦВМ, следовало разработать цифровой алгоритм управления, успешно работающий в широком диапазоне разброса начальных условий, получаемого при подлёте к Земле. Впервые в мире был разработан метод, впоследствии получивший название прогноза-коррекции, который предусматривал автономное решение навигационной задачи, адаптацию к возмущениям атмосферы, учёт запаздывания информации и ограничения, возникающие из-за особенностей БЦВМ. Обеспечиваемая точность посадки составляла 1,5–2 км [3].

Решена была непростая задача о поиске подходящей траектории КА для фотографирования обратной стороны Луны. Нужно было запустить ракету так, чтобы она облетела вокруг Луны, сфотографировала её обратную сторону, а потом подлетела к Земле и передала по линии связи фотографию. При этом были ограничения. Принимающая аппаратура находилась на территории СССР, а Луна и Земля движутся по своим орбитам, к тому же Земля ещё вращается вокруг собственной оси. Сам процесс передачи фотографии занимает некоторое время. Надо было найти такую траекторию полёта, чтобы в ходе передачи фотографий космический аппарат достаточно долго находился над территорией СССР. Найденная траектория [4] была удивительной. Космический аппарат должен был поднырнуть под плоскость эклиптики, а при подлёте к Луне силы гравитации Луны должны были “выдернуть” его на другую сторону этой плоскости. По сути, это был первый сознательно выполненный гравитационный манёвр. В настоящее время работы по применению гравитационных маневров для малозатратных дальних космических экспедиций успешно развиваются [5].

Начиная с 1970-х годов, Д.Е. Охоцимский вместе с сотрудниками Института прикладной математики АН СССР, Института механики МГУ и студентами кафедры теоретической механики механико-математического факультета МГУ развернул широкий фронт научных исследований по созданию интеллектуальных роботов. В частности, был выполнен выдающийся цикл работ по взаимодействию робота с движущимися объектами. Был собран стенд, состоящий из горизонтального стержня, подвешенного на двух нитях, манипулятора, видеокамеры, дающей обзор сцены сверху, и, конечно, компьютера. Трудность состояла в том, что манипулятору предстояло взять движущийся стержень, и, следовательно, система управления должна была работать в реальном времени. Этот барьер был преодолен [6]. Удалось также решить до сих пор не превзойдённую по красоте задачу взаимодействия робота-манипулятора со сферическими маятниками. На нитке к потолку подвешивался шарик. Робот должен был ударить ракеткой по движущемуся шару. После найденного решения задачу усложнили: независимо подвешенные два шарика приводили в движение произвольным образом; робот должен был ударить ракеткой по одному из них так, чтобы один шар попал в другой. Затем появилась новая цель: попасть вторым шариком в стакан, стоящий на подставке [7]. Демонстрация опытов неизменно вызывала восхищение аудитории.

Метод оптимального раскачивания (успокоения) колебаний

Среди колебательных систем особый интерес вызывают механические устройства, способные управляемо раскачиваться в поле естественных сил (таких как поле силы тяжести, электрические, магнитные поля) за счет целенаправленного изменения собственной конфигурации. Увеличение амплитуды качаний таких систем достигается за счет соответствующим образом организованного накопления энергии. С этой целью возможно применение методов оптимального управления для организации движения по свободным от приводов степеням свободы.

Рассматривается склерономная голономная механическая система с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n – число степеней свободы системы, q_i – обобщённые координаты, \dot{q}_i – обобщённые скорости, а положительно определённая симметричная матрица (a_{ij}) зависит от обобщённых координат. Уравнения движения системы записываются в форме уравнений Лагранжа 2 рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

в которых t – время, Q_i – обобщённые силы. Пусть первая обобщённая координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщённые силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщённую координату, обозначив её буквой x : $q_1 = x$. Представим обобщённую силу Q_1 в виде суммы

$$Q_1 = Q_x = F(x, q_2, \dots, q_n) + R(\dot{x}, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, x, q_2, \dots, q_n), \quad (2.2)$$

где позиционная сила F зависит только от x и других обобщённых координат. Сила трения R препятствует изменению координаты x и зависит как от обобщённых скоростей, так и от обобщённых координат.

Предположим, что первыми в наборе (q_2, \dots, q_n) идут $s-1$ координат, от которых обобщённая сила F зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат, не входят явно в выражение для F . Все координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1, s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1, n-s}$, причём $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ – вектор координат, непосредственно влияющих на значение F , $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$ – вектор координат, от которых F явно не зависит, так что, $\partial F / \partial w_k = 0$, $k = \overline{1, n-s}$. В число w -координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{x}^2 + 2\dot{x} \left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где

$$T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,k+s} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{k+s,r+s} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

Следуя работам [8,9], в системе (2.1) выделим уравнение для координаты x :

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}) + R(\dot{x}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, x, \mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

(2.3)

Приняв $\dot{x} \neq 0$, обозначим $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$, вектор управляющих координат и их производных по координате x , и

$$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k.$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\left| u_j^m \leq u_j(t) \leq u_j^M \right|, \quad \left| w_k^m \leq w_k(t) \leq w_k^M \right|, \quad j = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{1, n-s},$$

$$\left| \dot{u}_j^m \leq \dot{u}_j(t) \leq \dot{u}_j^M \right|, \quad \left| \dot{w}_k^m \leq \dot{w}_k(t) \leq \dot{w}_k^M \right|, \quad (2.4)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщённые силы Q_2, \dots, Q_n вычисляются в соответствии с уравнениями (2.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ реализовались.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ – следующее значение координаты x , когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{w}(t)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0.$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J .

Участок, где $\dot{x} < 0$ (монотонное убывание координаты x), вполне аналогичен участку монотонного возрастания этой координаты с той лишь разницей, что вместо максимума (минимума) функционала J надо искать его минимум (максимум).

В предположении, что $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$, справедливы следующие теоремы.

Теорема^o1. (Принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (2.3) и существуют две точки x_0 и x_1 , причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (2.4), при фиксированном значении x_0 обеспечивают максимум величины x_1 , служат уравнения

$$\mathbf{u}_M(x) = \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_M(x_1) = \arg \min_{\mathbf{w}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right],$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (2.4), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0 , служат уравнения

$$\mathbf{u}_m(x) = \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_m(x_0) = \arg \max_{\mathbf{w}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right],$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Теорема^o2. (Принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (2.3) и имеются две точки x_0 и x_1 , такие, что $x_0 < x_1$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1 , выражается равенствами

$$\mathbf{u}_m(x) = \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_m(x_1) = \arg \max_{\mathbf{w}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right],$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (2.4), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0 , выражаются уравнениями

$$\mathbf{u}_M(x) = \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_M(x_0) = \arg \min_{\mathbf{w}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right],$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Заключение

В докладе дается краткий обзор практически важных задач механики, стимулировавших развитие теории управления системами с дефицитом управления. Для колебательных систем с дефицитом управления по одной степени свободы предложены новые условия оптимальности, которые не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Показано, что наличие трения не влияет на правило выбора оптимального управления. Трение влияет лишь на результат применения этого правила в каждом конкретном случае. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний. В качестве примеров представлены: задача о раскачивании маятника с точкой опоры, скользящей по циклоиде с трением, и задача о перевороте шестиногого робота из аварийного положения на спине. Рассмотренные примеры иллюстрируют особенности применения предложенного метода в системах с трением и демонстрирует технику учета трения покоя в колебательных системах. Отмечено, что линейное по скорости вязкое трение ограничивает достижимые значения амплитуды, а сухое Кулоновское трение такой особенностью не обладает, но замедляет развитие процесса, а при значительном коэффициенте трения препятствует возникновению требуемых колебаний. Предложен метод, использующий трение для поддержания амплитуды колебаний в окрестности её заданного значения.

Литература:

1. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // *Успехи физических наук*. 1957. № 1а. С. 5-32.
2. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // *Прикладная математика и механика*. 1956. № 1. С. 3–20.
3. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М: Наука, 1975.
4. Власова З.П., Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К. Исследование траекторий облёта Луны и анализ условий фотографирования и передачи информации // М.В. Келдыш. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 261–309.
5. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонений орбит космических аппаратов с использованием гравитационных маневров. ДАН, 2017, том 472, № 4, с. 403–406.
6. Белоусов И.Р., Охоцимский Д.Е., Сазонов В.В. и др. Захват подвижного объекта роботом-манипулятором // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. 1998. № 4. С. 102–116.
7. Белоусов И.Р., Охоцимский Д.Е., Сазонов В.В. и др. Взаимодействие робота-манипулятора со сферическими маятниками // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. № 1. 2001. С. 194–204.
8. Голубев Ю.Ф. Оптимизация колебаний механических систем // *Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, ISSN (PRINT): 2686-9543, 2022, том 502, с. 52–57. DOI: 10.31857/S2686954322010040
9. Голубев Ю.Ф. Управление амплитудой колебаний механических систем // *Известия РАН. Теория и системы управления*, ISSN: 0002-3388, 2022, № 4, с. 22 – 30. DOI: 10.31857/S0002338822040084

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ: КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СИНГУЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ

Козлов В.В.

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

vvkozlov@mi-ras.ru

Установлено, что линейная система n дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, допускающая первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы, приводится к канонической системе уравнений Гамильтона [1]. В частности, n четно, фазовый поток сохраняет стандартную меру; если индекс инерции i^- квадратичного интеграла нечетен, то нулевое равновесие неустойчиво и т.д. Пусть u – степень неустойчивости (количество собственных значений в правой комплексной полуплоскости) и i^+ – положительный индекс квадратичного интеграла ($i^- + i^+ = n$). Тогда $u \leq \min(i^-, i^+)$. Равновесие такой линейной системы устойчиво тогда и только тогда, когда она допускает положительно определенный квадратичный интеграл.

Если спектр линейной системы простой, то предьявляются в явной форме $n/2$ независимых квадратичных интегралов (одной и той же сигнатуры), находящихся попарно в инволюции [2]. Спектральные характеристики линейной системы выражаются через свойства изотропного конуса – поверхности в \mathbb{R}^n , где одновременно обращаются в нуль $n/2$ инволютивных квадратичных интегралов. Вообще, вычисление спектра сводится к изучению топологии пересечения квадрик и операции интегрирования.

Все эти результаты переносятся на линейные преобразования с квадратичным инвариантом, а также на линейные системы в бесконечномерных гильбертовых пространствах [3]. В качестве основных примеров рассматриваются колебания упругой среды, статистическое уравнение Лиувилля, уравнения Максвелла и Шредингера.

Литература

1. Козлов В.В., Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ, 1992, 56:6, с. 900-906.
2. Kozlov V.V., Linear Hamiltonian Systems: Quadratic Integrals, Singular Subspaces and Stability // Regular and Chaotic Dynamics, 2018, 23:1, pp. 26-46.
3. Козлов В.В., Квадратичные законы сохранения уравнений математической физики // УМН, 2020, 75:3, с. 55-106.

МЕХАНИКА СПЕЦМАТЕРИАЛОВ ПРИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Сильников М.В.

*АО «НПО Спецматериалов», Санкт-Петербург, Россия
director@npo-sm.ru*

В докладе рассматриваются воздействия высокоэнергетических средств поражения с защитными структурами. Общеизвестно, что возможности простых решений и однородных материалов давно исчерпаны. Повышение защитных характеристик от высокоэнергетических средств поражения перестало быть задачей материаловедения и требует учета волновых процессов и, следовательно, является задачей волновой механики.

Разработка и оптимизация современных инженерных решений в настоящее время всё чаще опирается на результаты компьютерного моделирования. При этом, с помощью подгонки формальных параметров используемой модели под ограниченное количество экспериментальных данных, часто удаётся построить расчётную модель, дающую детальную информацию о процессе, и значительно сократить объём экспериментов.

В то же время, формальный характер используемых в расчётной модели параметров оставляет открытым вопрос об их физическом смысле и границах области применимости модели. Это особенно важно для приложений, использующих те или иные структурные особенности, стали и усложнённые схемы нагружения.

Так, показано что высокая анизотропия брони может влиять на защитные характеристики путем формирования оптимальной кристаллографической структурой. Так, совмещая технологический процесс прокатки листов бронестали с закалкой от температуры прокатки, удаётся получить и закрепить в листовой заготовке оптимальную текстуру. Это, в свою очередь, приводит к росту прочностных свойств бронестали и повышению её бронестойкости. Другим примером оптимизации инженерных решений на основе бронестали является применение разнесённой защиты с перфорированным лицевым слоем.

Известно, что металлы имеют несколько структурных уровней – макро-, мезо- и микроскопический, причём эти уровни тесно связаны. При ударном нагружении материала происходит обмен импульсом и энергией между уровнями в процессе деформирования. Эксперименты по ударно-волновому деформированию материалов показывают, что подобный обмен действительно имеет место и может быть зарегистрирован в реальном масштабе времени. Количественной характеристикой энергообмена между масштабными уровнями является так называемый «дефект» скорости на плато импульса сжатия. Он появляется вследствие потерь импульса и энергии при структурных превращениях материала в процессе динамического деформирования. Вместе с динамическим пределом текучести, порогом структурной неустойчивости и откольной прочностью дефект массовой скорости является важнейшей характеристикой динамического деформирования и разрушения материалов.

Характеристика сопротивления материала высокоскоростному прониканию имеет конкретный физический смысл – ее величина определяет порог структурной неустойчивости материала при испытаниях в условиях одноосной деформации. Более того, структурная неустойчивость при ударном сжатии инициируется только в том случае, когда распределение мезочастиц по скоростям на мезоуровне, как средство релаксации внутренних напряжений, полностью исчерпывается.

Реализация разработок, учитывающих механические процессы, происходящих в защитных структурах, позволяет получить существенное повышение защитных свойств разработанных изделий.

ЦИФРОВОЙ ИНЖИНИРИНГ И ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ В НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ

Хасанов М.М.

*ПАО "Газпром нефть", Россия
Khasanovmm22@gmail.com*

Аннотация: В работе рассмотрены актуальные проблемы современного нефтяного инжиниринга, связанные с ускоряющимся снижением качества запасов нефти и продуктивности скважин. В настоящее время важнейшими задачами являются: (1) создание цифрового системного инжиниринга, усиленного искусственным интеллектом; (2) создание условий для тесного взаимодействия инженеров-нефтяников и ученых в области механики, прикладной математики, исследования операций, проектирования материалов, аддитивных технологий и информатики; (3) внедрение междисциплинарных подходов при решении инженерных задач.

Введение

Фундаментальные основы нефтяного инжиниринга были заложены учеными-механиками В. Г. Шуховым, Л. С. Лейбензоном, Морисом Маскетом, С.А. Христиановичем, В. Н. Щелкачевым, А. Х. Мирзаджанзаде и многими другими. Но в наше время классический нефтяной инжиниринг требует дальнейшего развития за счёт внедрения современных достижений механики, прикладной математики и информационных технологий.

Это является необходимым, поскольку эра легких запасов и высокопродуктивных пластов закончилась [1, 2, 3]. Месторождения, открытые в Советское время, истощились, поэтому требуется осваивать новые регионы с неразвитой инфраструктурой и с крайне сложными характеристиками (нефтяные оторочки, нефтегазо-конденсатные месторождения с аномально высокими пластовыми давлениями и т.д.). Вследствие этого, при принятии технологических решений уже нельзя полагаться только на прежний опыт и прежние подходы к проектированию процессов нефтегазодобычи.

Каждое новое решение должно быть обосновано фактически «с нуля», путём системного многоуровневого моделирования процессов добычи нефти с целью радикального увеличения их технико-экономической эффективности с учетом всех возможных ограничений.

Цифровой Инжиниринг

И. Кант говорил, что «В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики». Поэтому важнейшей задачей современного нефтяного инжиниринга является создание новых классов математических моделей, позволяющих адекватно учесть нелинейность, недетерминированность, неопределённость и повышенную структурную сложность процессов, связанных с разработкой месторождений с трудноизвлекаемыми запасами.

Полное исследование таких моделей аналитическими методами невозможно, поэтому современный нефтяной инжиниринг с неизбежностью является Цифровым. Отметим, что цифровизация нефтяного инжиниринга не означает отказ от аналитических методов исследования и применение для моделирования процессов нефтегазодобычи только цифровых моделей. Для адекватного моделирования необходим разумный баланс между аналитическими и численными моделями различной сложности.

Цифровой инжиниринг представляет собой синтез алгоритмов из области исследования операций и теории принятия решений с современными цифровыми инструментами, такими как цифровые двойники и Искусственный интеллект.

Необходимость мультидисциплинарных подходов

Из краткого описания вызовов, стоящих перед нефтяным инжинирингом, становится понятно, что ответ на них может быть только мультидисциплинарным. Поэтому современный инженер должен быть настоящим Леонардо да Винчи, обладающим фундаментальными знаниями в области механики, физики, химии, общей теории систем, исследования операций, кибер-физических систем и т. д. В Таблице 1 представлен свод знаний, необходимых для современного нефтяного инжиниринга.

Фундаментальные науки	Исследование Операций	Цифровой интегрированный инжиниринг
<ul style="list-style-type: none"> • Механика; • Физико-химическая гидродинамика; • Материаловедение; • Нелинейная механика; • Самоорганизация; • Общая теория систем; • Идентификационные модели; • Теория некорректно поставленных задач. 	<ul style="list-style-type: none"> • Прикладная математика; • Теория моделирования; • Распознавание образов; • Планирование экспериментов; • Оптимизация сложных систем; • Теория информации; • Теория управления; • Робастные решения в условиях неопределённости; • Многокритериальные задачи; • Теория игр; • Нечёткие множества; • Учёт априорной информации и аналогов. 	<ul style="list-style-type: none"> • Кибер-физические системы; • Мульти- агентные технологии; • Инжиниринг знаний, экспертные системы; • Нейронные сети, глубокое обучение; • Искусственный интеллект.

Таблица 1: Свод знаний современного нефтяного инжиниринга

Инженерный Искусственный интеллект

Построение полноценной экосистемы Цифрового Инжиниринга требует привлечения технологий Искусственного интеллекта. Но при решении инженерных задач слабый Искусственный интеллект (Narrow Artificial Intelligence, ANI: нейронные сети, машинное зрение, распознавание образов, предиктивный анализ, Big Data) имеет ограниченное применение.

Существенно повысить эффективность системы возможно на стадии разведки, определения основных технологических решений и проектирования. Но на данном этапе ANI является слабым помощником, так как в нефтегазовом инжиниринге чаще всего отсутствуют большие объемы данных (Big Data). Поэтому нашей целью является построение систем, включающих в себе элементы, приближенные к Общему искусственному интеллекту [4, 5] (Artificial General Intelligence, AGI).

В нефтяной отрасли и сейчас наблюдается высокая степень цифровизации. Все данные хранятся в больших базах данных и обрабатываются большим набором инженерных программных продуктов, с использованием которых проводятся все инженерные расчеты.

Данная цифровая экосистема является человеко-центричной. Всегда нужны люди, которые загружают в программу информацию, анализируют результаты расчетов, затем загружают информацию в следующую программу и т. д.

Для повышения эффективности комплексной системы ансамбль программных продуктов должен быть интегрирован в одну большую экосистему, которой управляли бы компьютерные системы высокого уровня, использующие технологии AGI. Эта система должна уметь решать большие комплексные задачи, реализуя тем самым не концепцию «Big Data», а парадигму «Big Goals».

Таким образом, говоря об Инженерном Искусственном интеллекте, мы имеем в виду AGI, но AGI в достаточно узкой области - в области Системного инжиниринга [6, 7]. Для обозначения такой концепции ИИ в ПАО «Газпромнефть» используется аббревиатуру AGI.E.

Необходимость в Искусственном интеллекте объясняется растущей сложностью систем нефтегазодобычи, которые требуется моделировать и оптимизировать с помощью интегрированных моделей типа «пласт- скважины- наземное обустройство- транспорт нефти -экономика», целостно описывающих месторождения во всей их полноте.

Интегрированные модели представляют собой иерархию взаимосвязанных цифровых двойников, каждый из которых является моделью некоторого индивидуального объекта или процесса. С точки зрения проектирования, интегрированные модели реализуются в виде мультиагентных систем, в которых отдельные агенты являются моделями подсистем (например модели пласта, скважин, элементов обустройства). А модели подсистем объединяются и частично управляются некоторой центральной программой - оркестратором, который и содержит в себе элементы Искусственного интеллекта.

Оптимизация технологического оборудования

Ещё один рычаг радикального повышения эффективности производства за счёт Цифрового инжиниринга - это создание высокотехнологичного оборудования. Многократные математические эксперименты, проведённые на Цифровых двойниках проектируемых объектов, позволяют осуществить комплексную оптимизацию конструкции оборудования в отношении тепломасообменных, прочностных, ресурсных и энергетических характеристик.

Полученные при этом конструкции могут иметь такую топологическую сложность, что с помощью обычных станков их невозможно будет изготовить. В таком случае нужно использовать аддитивные технологии и 3D принтеры, на которых можно создавать объекты со сложной геометрией.

При создании Цифровых двойников используется множество симуляторов технологических процессов, но практически все они имеют Западное происхождение. Поэтому очень остро стоит вопрос о создании отечественной линейки технологических симуляторов, что потребует активного участия ученых-механиков.

Список литературы

1. Yakovlev V.V., Khasanov M.M. Technology Development in Upstream Division of Gazprom Neft // Journal of Petroleum Technology. – 2017. – Т. 69. – № 4. – С. 56–60.
2. Легкоконец В. А., Нехаев С. А., Хасанов М. М. Системный подход к выбору оптимальной мощности инфраструктуры отгрузки жидких углеводородов и последовательности до изучения группы перспективных месторождений //ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти. – 2021. – Т. 6. – №. 2. – С. 67-74.
3. Легкоконец В.А., Василенко А.А., Хасанов М.М. Выбор оптимальной стратегии разработки группы новых активов в условиях геологических неопределенностей и инфраструктурных ограничений SPE-201985-RU. М.: Российская Нефтегазовая техническая конференция SPE, 2020.
4. Madni A. M. Exploiting augmented intelligence in systems engineering and engineered systems //Insight. – 2020. – Т. 23. – №. 1. – С. 31-36.
5. Adams K. M., Mun J. H. The application of systems thinking and systems theory to systems engineering //Proceedings of the 26th National ASEM Conference: Organizational Transformation: Opportunities and Challenges. – Rolla, MO : American Society for Engineering Management, 2005. – Т. 10. – С. 493-500.
6. Холл А. Д. Опыт методологии для системотехники. – Рипол Классик, 1975.
7. Blanchard B. S., Fabrycky W. J., Fabrycky W. J. Systems engineering and analysis. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice hall, 1990. – Т. 4.

СЕКЦИЯ I

Общая и прикладная механика

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Баландин Д.В.¹, Бирюков Р.С.¹, Коган М.М.²

1 - Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия

2 - Нижегородский архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород,
Россия

dbalandin@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются задачи многокритериального минимаксного управления динамическими системами с критериями, представленными как индуцированные нормы линейных операторов динамической системы, отображающих входы системы и/или ее начальное состояние в выходы. Показано, что замена трудновыполнимой минимизации линейной свертки таких критериев на минимизацию максимума линейной свертки соответствующих им функционалов приводит к субоптимальным решениям с оценкой степени субоптимальности по отношению к оптимальным по Парето решениям. Указанный подход применяется к синтезу субоптимальных по Парето законов управления линейными нестационарными на конечном горизонте и стационарными на бесконечном горизонте непрерывными и дискретными системами при неопределенных начальных состояниях и/или возмущениях. Приводятся примеры решения задач оптимального управления механическими системами: оптимальная защита объектов от вибрационных и ударных воздействий; оптимальное гашение колебаний вращающегося в электромагнитных подшипниках ротора; отслеживание заданной траектории мобильного сферическим роботом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSWR-2023-0034) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Введение

Реальные задачи управления всегда многокритериальны. Нахождение множества Парето, а следовательно, и оптимальных по Парето решений, т.е. неуплощаемых одновременно для всех критериев, представляет собой сложную задачу. Известно, что замена многокритериальной задачи на однокритериальную с критерием в виде линейной комбинации исходных критериев обеспечивает в общем случае нахождение некоторого подмножества множества Парето. Но и такая замена в многокритериальных минимаксных задачах, в которых отдельные критерии являются максимумами некоторых функционалов по неопределенным переменным или функциям, приводит к трудной задаче оптимизации линейной комбинации максимумов некоторых функционалов.

Синтез субоптимальных по Парето управлений

Рассмотрим линейную непрерывную нестационарную систему на конечном горизонте

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B_u(t)u + B_v(t)v, & x(t_0) &= x_0, & t &\in [t_0, t_f], \\ z_1 &= C_1(t)x + D_{u,1}(t)u + D_{v,1}(t)v, \\ z_2 &= C_2(t)x + D_{u,2}(t)u + D_{v,2}(t)v,\end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – возмущение и $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевые выходы. Также введем в рассмотрение два функционала

$$J_1(\Theta(t)) = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_1\|^2 + x^T(t_f)S_1x(t_f)}{x_0^T R^{-1}x_0 + \|v\|^2}, \quad J_2(\Theta(t)) = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_2\|^2 + x^T(t_f)S_2x(t_f)}{x_0^T R^{-1}x_0 + \|v\|^2},$$

здесь весовые матрицы $R = R^T \geq 0$, $S_1 = S_1^T \geq 0$ и $S_2 = S_2^T \geq 0$ отражают компромисс при учёте неопределённости в начальных условиях, терминальном состоянии и внешнем возмущении. Отметим, что данные функционалы представляют собой квадраты обобщённых H_∞ норм системы от входа v к целевому выходу z_1 и z_2 соответственно. Требуется найти оптимальное по Парето управление в виде линейной нестационарной обратной связи $u = \Theta(t)x$, минимизирующее функционалы J_1 и J_2 .

Самым распространённым методом нахождения оптимальных по Парето решений многокритериальной задачи является метод скаляризации, т.е. выбора одного критерия в виде, например, линейной свертки этих критериев:

$$J_\alpha(\Theta) = \alpha J_1(\Theta) + (1 - \alpha) J_2(\Theta), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Как известно, параметры Θ_α , для которых выполняется

$$\min_{\Theta} J_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta_\alpha),$$

являются оптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Непосредственное нахождение параметров Θ_α в рассматриваемом случае представляется затруднительным, так как оптимальная целевая функция для этой задачи оказывается линейной комбинацией максимумов разных функционалов. В связи с этим введем в рассмотрение вспомогательный функционал $\hat{J}_\alpha(\Theta)$, представляющий собой оценку снизу

для $J_\alpha(\Theta)$:

$$J_\alpha(\Theta) = \alpha J_1(\Theta) + (1 - \alpha) J_2(\Theta) \geq \sup_{x_0, v} \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\|z_i\|^2 + x^T(t_f) S_i x(t_f)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|^2} = \hat{J}_\alpha(\Theta).$$

Назовем $\hat{J}_\alpha(\Theta)$ субоптимальной целевой функцией, а параметры $\hat{\Theta}_\alpha$, оптимальные по отношению к $\hat{J}_\alpha(\Theta)$, при которых

$$\min_{\Theta} \hat{J}_\alpha(\Theta) = \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha),$$

назовем субоптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Следующая теорема позволяет указать границы области критериального пространства, в которой находится подмножество Парето, и тем самым оценить степень субоптимальности решений $\hat{\Theta}_\alpha$.

Теорема 1 ([1, 2]). В задаче двукритериальной оптимизации с функционалами J_1 и J_2 множество точек критериального пространства, которые соответствуют оптимальным по Парето параметрам Θ_α , принадлежит области Σ_0 , нижней и верхней границами которой в пространстве критериев (J_1, J_2) , являются «огнивающие» семейства прямых:

$$\alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2 = \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha), \quad \alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2 = \alpha J_1(\hat{\Theta}_\alpha) + (1 - \alpha) J_2(\hat{\Theta}_\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Количественная оценки близости значений функционалов при найденных субоптимальных решениях $\hat{\Theta}_\alpha$ и неизвестных оптимальных решениях Θ_α определяется показателем субоптимальности:

$$\eta = \max_{\alpha \in S} \frac{J_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha) - \hat{J}_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha)}{J_\alpha(\hat{\Theta}_\alpha)}.$$

Чем ближе η к нулю, тем точнее оценка множества Парето и тем ближе друг к другу значения соответствующих критериев при субоптимальных и оптимальных решениях.

Результаты математического моделирования

В качестве примера рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, показанную на рис. 1 и представляющую собой упругий объект, который моделируется двумя материальными точками 2 и 3, связанными между собой линейными упругим и диссипативным элементами. Этот объект связан упругим и диссипативным элементами и управляемым элементом (называемым далее виброизолятором) с другим телом 1, которое является подвижным основанием. Динамика данной механической системы (в безразмерных переменных и параметрах) описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 + v + u, \\ \ddot{x}_2 &= -\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - x_2 + x_1 + v, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 – координаты материальных точек 2 и 3 относительно подвижного основания; u – усилие, создаваемое виброизолятором при его деформации (т.е. при смещении точки 2 относительно точки 1); v – с точностью до знака ускорение основания (материальной точки 1); $\beta = 0,1$ – заданный положительный параметр демпфирования. Задача виброизоляции состоит в поиске нестационарного управления $u = \theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_2 + \theta_3(t)\dot{x}_1 + \theta_4(t)\dot{x}_2$, обеспечивающего как наименьшую возможную деформацию механической системы, так и минимальную силу, противодействующую смещению упругого объекта относительно основания. С этой целью выберем выходы

$$z_1 = (x_1, x_2 - x_1)^T, \quad z_2 = -x_1 - \beta\dot{x}_1 + u,$$

и в качестве критериев возьмем обобщенные H_∞ нормы относительно этих выходов.

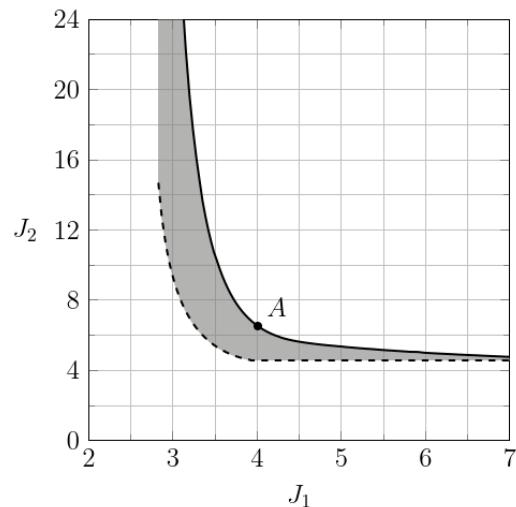
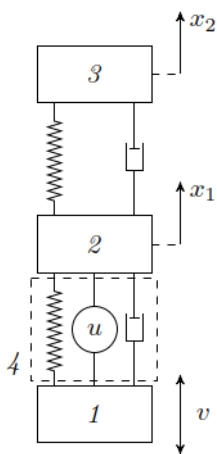


Рис. 1. Схематическое изображение механической системы с двумя степенями свободы (слева) и множество Парето на плоскости критериев (справа).

Зададим на интервале времени длительностью $T = 10$ равномерную сетку с шагом $h = 0,05$. Положим $R = I$ и $S_1 = S_2 = I$ и найдем множество Σ_0 (см. рис. 1). Отметим, что точки верхней границы множества Σ_0 соответствуют субоптимальным по Парето регуляторам с показателем субоптимальности $\eta = 0,2303$. Точка A на верхней границе множества Σ_0 имеет координаты $(4,006; 6,536)$ и соответствует свертке с $\alpha = 0,7$.

Заключение

Рассмотрены многокритериальные задачи минимаксной оптимизации, критериями в которых являются обобщенные H_∞ нормы. В критериальном пространстве строятся границы области, содержащей точки множества Парето, в которых линейная свертка критериев принимает минимальные значения. Тем самым появляется возможность сравнивать значения отдельных критериев при выбираемых тем или иным способом решениях многокритериальных задач и при оптимальных по Парето решениях. Рассмотрены примеры двукритериальных задач управления, в которых находятся субоптимальные по Парето решения и строятся области, содержащие точки множества Парето.

Литература

1. Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган // Автоматика и телемеханика, 8. 2021. 39–59.
2. Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган // Известия РАН. Теория и системы управления, 2. 2022. 43-57.

НЕЛИНЕЙНОЕ УСКОРЕНИЕ В НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКЕ

Бизяев И.А.¹, Мамаев И.С.²

1 - Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

2 - Ижевский государственный университет им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия
mamaev@rcd.ru

Аннотация. Исследуется неголономная система с параметрическим возбуждением, представляющая собой колесный экипаж (роллер-рейсер) с переменным гиростатическим моментом. Подробно рассмотрена проблема существования режимов с неограниченным ростом энергии. Найден критерий существования траекторий, для которых одна из компонент скорости неограниченно возрастает.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-71-10039.

Проблема ускорения при параметрическом возбуждении

Разгон механической системы посредством перераспределения масс, достаточно известное явление – так, например, спортсмены при помощи движения тела могут достаточно сильно разогнать скейтборд, снейкборд, роликовые коньки и т.п. Однако важной особенностью такого типа разгона является то, что он осуществляется посредством использования положительной обратной связи, зависящей от координат и скоростей системы, так например, спортсмен (водитель) достаточно долго учится, чтобы очень хорошо чувствовать каким образом в каждую из фаз движения снаряда расположить свое тело (так, одно неверное движение и вместо ускорения получим замедление).

В то же время разгон системы посредством периодического возбуждения без использования обратной связи, как правило, оказывается крайне нетривиальной проблемой вследствие того, что отсутствует механизм когерентной подкачки энергии (периодическое возбуждение с равной вероятностью может, как ускорить, так и затормозить систему). Примером может служить проблема Ферми об ускорении частиц периодическим полем. В работах [1–4] рассмотрена динамика саней Чаплыгина и системы Сулова с изменяющимся распределением масс. Различные асимптотики роста скорости для этих систем приведены в табл. 1.

Асимптотика	Сани Чаплыгина	Система Сулова
$\frac{1}{t^3}$	Один ротор или прямолинейное движение материальной точки (осциллятор)	Один ротор
$\frac{1}{t^2}$	Движение точки по окружности (ротатор)	Два ротора
t	Отсутствует	Движение нескольких точек по окружности

Таблица 1. Асимптотика роста скорости от времени в зависимости от изменения распределения масс.

Как известно, простота данных систем приводит к тому, что их существенно проще анализировать теоретически, то реализовать подобную конструкцию на практике достаточно сложно. В связи с этим проблема обнаружения неголономного ускорения в колесных системах, которые могут быть реализованы на практике оставалась нерешенной. В работе [5] рассмотрена конструкция колесного экипажа (роллер-рейсер), состоящая из двух соединенных между собой платформ с жестко закрепленными колесными парами, при этом на каждой платформе находится колесная пара. Опишем подробнее основные результаты этой работы.

Уравнения движения

Рассмотрим движущийся по горизонтальной плоскости роллер-рейсер (см. рис. 1), для него мы будем полагать выполненными следующие несколько естественных предположений, позволяющих построить математическую модель системы:

1. Две тележки (платформы), соединены между собой шарниром так, что могут свободно вращаться вокруг вертикальной оси.
2. На каждой платформе установлен уравновешенный ротор с вертикальной осью вращений, причем далее будем полагать, что угловая скорость каждого ротора является заданной (периодической) функцией времени.
3. На каждой платформе жестко закреплена колесная пара. Обе колесные пары уравновешены так, что их центр масс находится в середине оси, соединяющей колеса.
4. Каждое колесо касается опорной плоскости в одной точке, и при этом отсутствует проскальзывание.

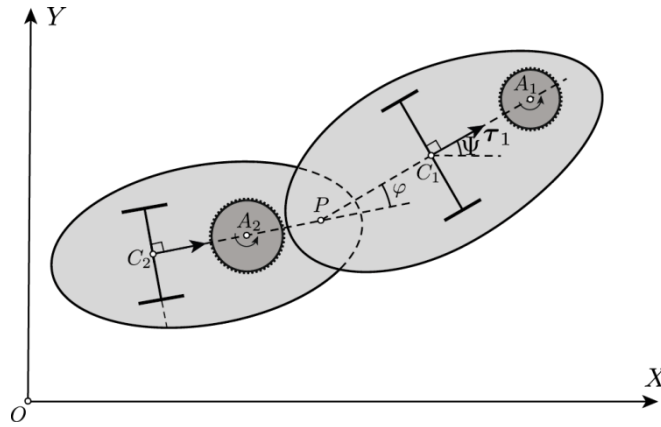


Рис. 1. Возможная схема уравновешенного роллер-рейсера с роторами на плоскости (вид сверху).

Определим неподвижную (инерциальную) систему координат OXY . Пусть $\mathbf{r} = (X, Y)$ - радиус-вектор точки соединения тележек P . Ориентацию первой тележки будем определять с помощью угла Ψ между осью OX и прямой PA_1 , а ориентацию второй тележки с помощью угла φ между прямыми PA_1 и PA_2 .

Рассматриваемая система сводится к анализу неавтономной редуцированной системы, описывающей эволюцию квазискоростей v , u и угла φ :

$$\frac{dv}{dt} = uW + \sin \varphi f(t, \varphi), \quad \frac{du}{dt} = -vW + g(t, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{J(\varphi)}}{\sqrt{\Phi(\varphi)}} u,$$

$$W = \frac{\sin \varphi \Delta v}{\sqrt{J(\varphi)\Phi(\varphi)}} - \frac{Z(\varphi)u}{\Phi(\varphi)\sqrt{J(\varphi)}},$$

где введены следующие функции:

$$f(t, \varphi) = \frac{\dot{k}_1 + \dot{k}_2}{(A-B)\sqrt{J(\varphi)}}, \quad g(t, \varphi) = \frac{J_2(\varphi)\dot{k}_1(t) - J_1(\varphi)\dot{k}_2(t)}{(A-B)^2\sqrt{J(\varphi)\Phi(\varphi)}},$$

$$Z(\varphi) = \frac{DJ_1(\varphi) - GJ_2(\varphi)}{A-B} \cos \varphi + \frac{\Gamma - AB}{A-B} J_1(\varphi) + \frac{\Gamma - \Delta}{A-B} J_2(\varphi)$$

$$J_1(\varphi) = A^2 + G \sin^2 \varphi - AB \cos \varphi, \quad J_2(\varphi) = B^2 + D \sin^2 \varphi - AB \cos \varphi, \quad J(\varphi) = J_1(\varphi) + J_2(\varphi) > 0,$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{(A^2 + G)(B^2 + D)}{(A-B)^2} - \frac{GD}{(A-B)^2} \cos^2 \varphi > 0,$$

здесь $A, B, G, D, \Gamma, \Delta$ - параметры, $k_1(t), k_2(t)$ - гиостатические моменты, возникающие за счет заданного вращения роторов.

Критерий ускорения

Если $k_1 = k_2 = 0$, то фазовое пространство редуцированной системы расслаивается на двумерные торы, на которых всегда присутствует асимптотически устойчивая неподвижная точка. В результате этого в фазовом пространстве редуцированной системы возникает вырожденное однопараметрическое семейство асимптотически устойчивых неподвижных точек. Для траекторий с начальными условиями из окрестности этого семейства справедлив следующий критерий ускорения.

Пусть

$$c = -\frac{3Q_0^3}{\Delta(A-B)^3 T} \int_0^T (Ak_2^2 + Bk_1^2 + (A+B)\dot{k}_1\dot{k}_2) dt > 0, \quad Q_0 = A^2B - AD - A\Gamma - B\Delta - BG + B\Gamma.$$

тогда существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, и также постоянные u_0, φ_0 , что для траекторий редуцированной системы с начальными условиями $\frac{1}{\varepsilon} < vQ_0$, $|u| < u_0\varepsilon^2$, $|\varphi| < \varphi_0\varepsilon^2$, имеем $v(t) \rightarrow +\infty$, $u(t) \rightarrow 0$, $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ как

$$v(t) = \frac{(ct)^{\frac{1}{3}}}{Q_0} + o(t^{\frac{1}{3}}), \quad \varphi(t) = -\frac{Q_0^2 \dot{k}(t)}{\Delta(A-B)} (ct)^{-\frac{2}{3}} + o(t^{-\frac{2}{3}}),$$

$$u(t) = -\frac{Q_0^2(A^2B^2 + A^2D + B^2G)^2 \dot{\kappa}(t)}{\Delta(A-B)^3} (ct)^{-\frac{2}{3}} + o(t^{-\frac{2}{3}}), \quad \kappa(t) = Ak_2(t) + Bk_1(t).$$

Если ротор с переменным моментом несет только одна из платформ (т. е. $\dot{k}_1\dot{k}_2 = 0$), то предыдущие соотношения сводится к условию $Q_0 < 0$, то есть наличие разгоняющихся траекторий не зависит явно от гиростатического момента, а определяется только параметрами колесного экипажа. Численные эксперименты показывают, что найденные соотношения хорошо описывают поведение траекторий (см. рис. 2).

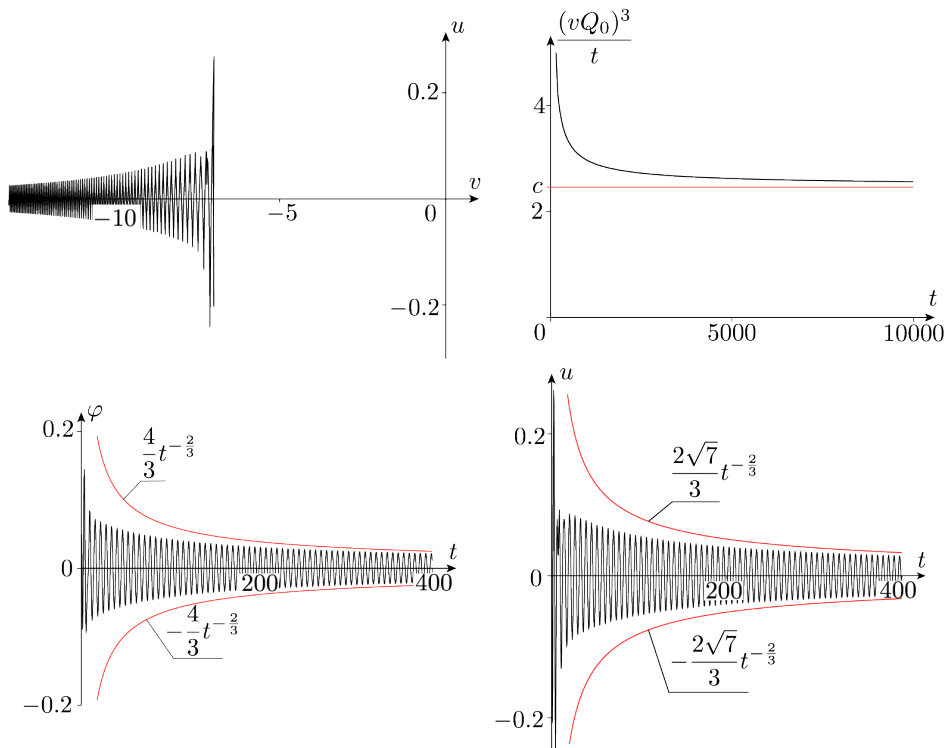


Рис. 2. Траектории редуцированной системы для фиксированных параметров $A = 3, B = 1, D = 2, G = 1, \Delta = 0.5, \Gamma = 1.2$ и $k_1 = 3 \sin t, k_2 = 0$ при начальных условиях $v(0) = -7, u(0) = 0.1, \varphi(0) = 0.05$. Красным цветом выделены кривые, описываемые полученными выше асимптотиками.

Литература

1. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S., The Chaplygin Sleigh with Parametric Excitation: Chaotic Dynamics and Nonholonomic Acceleration, Regular and Chaotic Dynamics, 2017, vol. 22, no. 8, pp. 955–975.
2. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S., Fermi-like acceleration and power-law energy growth in nonholonomic systems, Nonlinearity, 2019, vol. 32, pp. 3209–3233.
3. Bizyaev I. A., Mamaev I. S., Dynamics of the nonholonomic Suslov problem under periodic control: unbounded speedup and strange attractors, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2020, vol. 53, 185701, 17 pp.
4. Bizyaev I. A., Bolotin S. V., Mamaev I. S., Normal forms and averaging in an acceleration problem in nonholonomic mechanics, Chaos, 2021, vol. 31, 013132, 16 pp.
5. Bizyaev I. A., Mamaev I. S., Roller Racer with Varying Gyrostatic Momentum: Acceleration Criterion and Strange Attractors Regular and Chaotic Dynamics, 2023, vol. 28, no. 1, pp. 107–130.

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ ВДОЛЬ ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ В БЕЗРЕВЕРСНОМ РЕЖИМЕ

Болотник Н.Н., Фигурин Т.Ю.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
bolotnik@ipmnet.ru

Аннотация. Рассматривается система тел (материальных точек), движущихся по прямой на горизонтальной шероховатой плоскости за счет сил взаимодействия между телами. Между телами и плоскостью действует сухое кулоново трение. Получены необходимые и достаточные условия, при которых возможно безреверсное перемещение всех тел системы на одно и то же расстояние в предположении, что в начальном и конечном положениях скорости всех тел равны нулю. Под безреверсным движением понимается движение, при котором ни одно из тел не изменяет направления своей скорости в процессе перемещения.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием № 123021700055-6 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-12004-ННИО).

Введение

Объект исследования данной работы – локомоционные системы, выполненные в виде цепочек тел, последовательно соединенных друг с другом призматическими (поступательными) шарнирами. Тела системы взаимодействуют между собой и с внешней средой. Силы взаимодействия тел, внутренние по отношению к рассматриваемой механической системе, играют роль управляющих переменных. Силы взаимодействия тел со средой (силы трения) являются внешними силами. Управляющие силы изменяют скорости тел системы относительно среды, благодаря чему изменяются силы трения, действующие на эти тела. Таким образом, управляя внутренними силами, можно управлять внешними силами, что позволяет контролировать движение системы тел как целого, перемещая ее на произвольное расстояние в различных режимах, в частности так, что расстояния между телами и скорости этих тел относительно среды изменяются периодически.

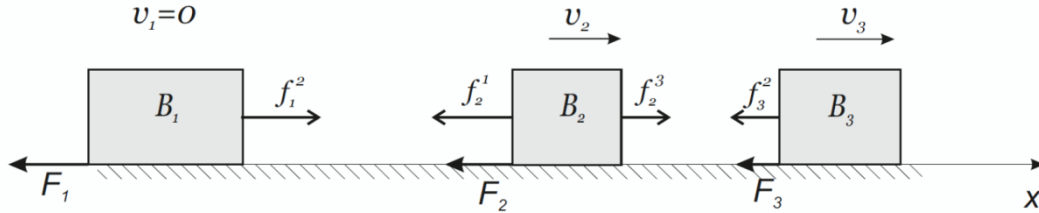
Рассматриваемые системы относятся к классу локомоционных (мобильных) систем с управляемой конфигурацией, которые могут перемещаться в сопротивляющихся средах без специальных движителей (ног, колес, гусениц, гребных винтов и т.п.) за счет изменения относительного положения тел, составляющих систему, при неизменных областях контакта этих тел со средой. Многие системы с управляемой конфигурацией имитируют движение животных, которые не имеют конечностей и перемещаются за счет изменения формы своего тела (змеи, черви, некоторые виды рыб и земноводных). К системам этого класса в настоящее время наблюдается растущий интерес ученых в области механики (в частности, биомеханики) и управления, а также инженеров, занимающихся созданием мобильных роботов. Проблемам динамики мобильных систем с управляемой конфигурацией посвящены монографии [1, 2], в которых, в частности, даны достаточно полные обзоры публикаций по данной тематике.

В статье рассматривается цепочка из произвольного конечного числа тел, перемещающаяся поступательно вдоль прямой по шероховатой горизонтальной плоскости. Между телами и плоскостью перемещения действует сухое кулоново трение. Массы тел и коэффициенты их трения о плоскость перемещения в общем случае различны. Для цепочек тел, перемещающихся вдоль прямой с сухим трением, важна возможность движения в безреверсном режиме, при котором ни одно из тел системы не изменяет направление скорости своего движения. Основное преимущество безреверсного движения состоит в том, что оно обеспечивает абсолютный минимум затрат энергии на компенсацию работы сил сухого трения при перемещении цепочки между любыми двумя заданными положениями на прямой. Проблема существования безреверсного движения была поставлена и решена в [3] для системы двух тел при дополнительном условии, что расстояние между телами и их скорости изменяются периодически. В настоящей работе для цепочки, состоящей из произвольного конечного числа тел, решается задача о безреверсном перемещении всех тел на одно и то же расстояние, при условии, что в начальном и конечном положениях скорости всех тел равны нулю. Доказываются необходимые и достаточные условия реализуемости требуемого режима перемещения. Для системы тел, имеющих одинаковые массы и одинаковые коэффициенты трения о плоскость перемещения, в [4] доказана возможность безреверсного перемещения на заданное расстояние и построено оптимальное по быстрдействию безреверсное движение.

Постановка задачи

Рассматривается система n взаимодействующих тел B_1, \dots, B_n , $n \geq 3$, движущихся поступательно вдоль прямой по горизонтальной плоскости при наличии сухого кулонова трения между телами и плоскостью. Тела моделируются материальными точками. Будем считать, что каждое из тел B_i , $i = \overline{2, n-1}$,

взаимодействует с двумя телами B_{i-1} и B_{i+1} , тело B_1 взаимодействует только с телом B_2 , а тело B_n – только с телом B_{n-1} . Данную систему можно представлять в виде цепочки тел, каждое из «внутренних» тел которой взаимодействует только с двумя соседними телами, а крайние тела – только с одним соседним телом. Обозначим: m_i – масса тела B_i ; x_i – координата тела B_i на прямой движения системы; v_i – скорость тела B_i ; f_i^{i+1} – сила, приложенная к телу B_i телом B_{i+1} ; F_i – сила сухого кулонова трения, действующая на тело B_i ; k_i – коэффициент сухого трения между плоскостью и телом B_i ; g – ускорение силы тяжести. Описанная механическая система изображена на рисунке для случае трех тел, $n = 3$.



Согласно третьему закону Ньютона, для сил взаимодействия между телами имеет место равенство $f_i^{i+1} = -f_{i+1}^i$, $i = \overline{1, n-1}$. В дальнейшем будем считать, что хотя бы один коэффициент трения k_i не равен нулю. Если все $k_i = 0$, то внутренними силами невозможно вывести центр масс системы из состояния покоя.

Динамика описанной механической системы подчиняется совокупности дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v_i, \quad m_i \dot{v}_i = f_i^{i-1} + f_i^{i+1} + F_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Здесь формально доопределены величины f_1^0 , f_n^{n+1} :

$$f_1^0 = f_n^{n+1} = 0. \quad (2)$$

Сила сухого кулонова трения подчиняется соотношениям

$$F_i = \begin{cases} -k_i m_i g \operatorname{sign} v_i, & v_i \neq 0, \\ -(f_i^{i-1} + f_i^{i+1}), & v_i = 0, |f_i^{i-1} + f_i^{i+1}| \leq k_i m_i g, \\ -k_i m_i g \operatorname{sign}(f_i^{i-1} + f_i^{i+1}), & v_i = 0, |f_i^{i-1} + f_i^{i+1}| > k_i m_i g. \end{cases} \quad (3)$$

Задача. Управляя силами взаимодействия тел $f_i^{i+1}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, привести систему (1) – (3) из начального состояния

$$x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

за конечное (заранее не фиксированное) время T в терминальное состояние

$$x_i(T) = L, \quad v_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad L > 0, \quad (5)$$

при условии, что тела не изменяют направления своего движения:

$$v_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Ограничений на управляющие силы $f_i^{i+1}(t)$ не налагается, допускается мгновенное (ударное) взаимодействие тел, при котором скорости тел меняются скачком.

Таким образом, в задаче требуется перевести систему тел в безреверсном режиме (ни одно из тел не изменяет направления своего движения) из начального состояния покоя в конечное состояние покоя при условии тождественности ее конфигурации в начальном и конечном состояниях (все тела перемещаются на одно и то же расстояние L). Предположение о равенстве нулю координат всех тел в начальном состоянии не ограничивает общности.

Безреверсный режим движения возможен не всегда. Так, в [3] показано, что при $n = 2$ периодический безреверсный режим возможен, если и только если $m_1 k_1 > m_2 k_2$ и $m_1 \leq m_2$ или $m_1 k_1 < m_2 k_2$ и $m_1 \geq m_2$.

Основные результаты

Л е м м а. Решение задачи существует тогда и только тогда, когда оно существует в классе попеременных движений тел, таких, что в каждый момент времени одно из тел движется, а все остальные покоятся.

Доказательство леммы опускается.

Рассмотрим вспомогательную задачу о максимизации импульса системы p для попеременных движений.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть существует движение, приводящее систему (1) – (3) из начального состояния

$$x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

за конечное (заранее не фиксированное) время T_1 в терминальное состояние

$$x_i(T_1) = a_i, \quad a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

при условии, что тела движутся поочередно и не изменяют направления своего движения:

$$v_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T_1]. \quad (9)$$

Тогда максимальный импульс системы p_{\max} в конечный момент движения системы, берущийся по всем таким возможным движениям, удовлетворяет соотношению

$$p_{\max}^2 = 2g \sum_{i=1}^n m_i a_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right). \quad (10)$$

Опуская доказательство, отметим, что полученное значение максимального импульса достигается при попеременном движении тел, таком, что во все моменты времени движущееся тело разгоняется с максимально возможным ускорением, и импульс системы передается между движущимися телами мгновенно.

У т в е р ж д е н и е 2. Решение задачи существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right) \geq 0. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (10) все значения a_i одинаковыми и равными L , получаем необходимость выполнения этого неравенства. Доказательство достаточности опускается.

Заметим, что если $\sum_{s \neq i} k_s m_s > k_i m_i$ или $\sum_{s \neq i} m_s > m_i$, $i = \overline{1, n}$, то решение задачи существует.

Для иллюстрации критерия (11) рассмотрим случай, в котором массы всех тел, кроме B_1 , одинаковы и равны m , тело B_1 имеет массу M , коэффициенты трения всех тел о плоскость перемещения одинаковы и равны k . Положив в (11) $m_1 = M$, $m_i = m$, $i = \overline{2, n}$, $k_i = k$, $i = \overline{1, n}$, и обозначив $\mu = M/m$, получим неравенство $\mu \leq n - 1 + \sqrt{2(n-1)(n-2)}$, выражающее необходимое и достаточное условие разрешимости задачи при сделанных допущениях.

Заключение

Решена задача о перемещении системы взаимодействующих тел из начального состояния покоя в конечное состояние покоя вдоль прямой на горизонтальной шероховатой плоскости при условии, что каждое тело перемещается на одно и то же расстояние и не изменяет направления движения (безреверсный режим). Трение между плоскостью перемещения и телами системы считается кулоновым. Управление осуществляется силами взаимодействия тел, которые являются внутренними силами по отношению к системе. Ограничения на управляющие силы не налагаются. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором такое перемещение возможно. Данное условие выражено неравенством, в которое входят массы тел и коэффициенты трения между этими телами и плоскостью перемещения.

Литература

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022..
2. Zimmermann K., Zeidis I., Behn C. Mechanics of Terrestrial Locomotion with a Focus on Nonpedal Motion Systems. Heidelberg: Springer, 2010.
3. Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 2. С. 138-148.
4. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 5. С. 3-9.

ШАГАЮЩИЕ МИКРОРОБОТЫ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНСПЕКЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Болотник Н.Н.¹, Дмитриев А.С.², Жуков А.А.³, Чащухин В.Г.¹

1 - Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

2 - МЭИ, Москва, Россия

*3 - Московский авиационный институт, Москва, Россия
and_zhukov@mail.ru*

Аннотация. Предложена концепция шагающего микроробота, предназначенного для осуществления инспекционных и иных операций на орбитальных космических аппаратах, как внутри герметичных отсеков, так и снаружи. В качестве шагающих движителей используются термомеханические актюаторы. Рассматриваются физические принципы ходьбы в условиях невесомости, особое внимание уделяется способам фиксации опорных стоп на поверхности перемещения. Описывается конструкция транспортной платформы микроробота и состав бортового оборудования, необходимого для автономного функционирования микроробота. Дана оценка потребляемой микророботом мощности.

Введение

При ходьбе в условиях невесомости необходимо использовать специальные устройства, обеспечивающие прижатие опорных стоп к поверхности перемещения, как это делается для роботов вертикального перемещения на Земле. Известны различные способы прижатия: с помощью электростатических, магнитных, капиллярных сил, межмолекулярных сил (сил Ван-дер-Ваальса), сил механического взаимодействия, аэродинамических сил, статических сил избыточного атмосферного давления. Аэродинамические силы и силы избыточного атмосферного давления могут быть использованы только внутри герметичных отсеков космического аппарата (КА), где имеется атмосфера. Использование капиллярных сил обычно требует наличия сложной системы подачи жидкости на контактные поверхности схвата. Альтернативой является конденсация на контактных поверхностях влаги из окружающей атмосферы, что делает возможным функционирование этого механизма только внутри герметичного отсека КА, или использование низкотемпературных жидких металлов. Использование сил механического взаимодействия требует либо внедрения схвата в опорную поверхность, что неприемлемо для КА, либо обхвата некоторого элемента, например, поручня, имеющего искривленную поверхность. Фиксация с помощью обхвата жестко связывает конструкцию схвата с формой обхватываемого объекта и может приводить к усложнению конструкции схвата за счет увеличения числа подвижных элементов. Использование электростатических сил возможно на диэлектрических поверхностях, требует высоких напряжений и приводит к электризации поверхности, что зачастую нежелательно. Для эффективного использования электромагнитных схватов поверхности перемещения должны быть ферромагнитными. В открытом космосе, где атмосферы нет, наиболее перспективным и универсальным представляется использование «сухих» адгезивов, взаимодействующих с поверхностью контакта посредством ван-дер-ваальсовых сил. Такой механизм осуществим для широкого класса поверхностей различной формы.

Для перемещения механизмов по твердой поверхности используются различные типы движителей: колесные, гусеничные, шагающие. Колесные и гусеничные движители предполагают наличие механических передач с вращающимися элементами, способными совершать много оборотов, что требует наличия смазки. Для адгезионного сцепления с поверхностью существенна площадь соприкосновения, поэтому колесные движители обладают тем недостатком, что одновременно с поверхностью перемещения контактирует только небольшая часть контактной поверхности движителя. Дополнительный недостаток гусеничного движителя заключается в том, что при поворотах неизбежно проскальзывание контактирующих поверхностей, а адгезивы зачастую обладают повышенным трением с поверхностью перемещения. Шагающие механизмы могут не нуждаться в смазке, например, в случае использования термоактюаторов. Термоактюатор представляет собой биморфную балку, которая сгибается при нагревании в одну сторону, а при охлаждении в другую. Термоактюаторы не содержат трущихся деталей и не требуют применения смазок, нежелательных для использования в открытом космосе. Таким образом, шагающие механизмы на основе термоактюаторов в космосе могут оказаться перспективными.

В [1] рассмотрены различные «сухие» адгезивы, имеющие иерархическую структуру, и численно промоделировано влияние структуры материала на величины адгезии и трения при взаимодействии материала с шероховатой поверхностью. В [2] рассматривается возможность использования роботов со схватами на основе «сухих» адгезивов для обследования и ремонта КА. Прототип робота с адгезионными схватами для инспекции Международной космической станции, способного функционировать в отсутствие гравитации, представлен в работе [3]. В [4] описан прототип адгезионного схвата, испытанный в условиях микрогравитации. Гусеничный движитель с электроадгезионным устройством фиксации описан в [5]. Исследовательский центр Эймса по заданию NASA разработал микроробот, имеющий три или более пар ног, который может перемещаться по

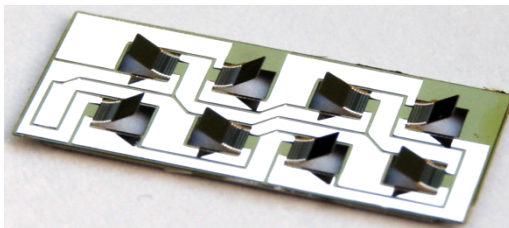
поверхности космического корабля в условиях нулевой гравитации с помощью ног, снабженных адгезивом [6]. В [7–9] предложена ступня ноги шагающего микроробота в виде пластины, предназначенной для управляемого закрепления на поверхности перемещения и соединенная с ногой пяточным шарниром с одной степенью свободы. Пластина выполнена гибкой с переменной конструкционной жесткостью за счет размещенных на ней с промежутками жестких элементов, при этом расстояние между соседними элементами монотонно возрастает от пятки к носку. В качестве материала пластины может использоваться полиимид, полиэфирамид, полисульфон или подобный полимер. На поверхность контакта пластины с поверхностью перемещения нанесен слой «сухого» адгезива или адгезива с постоянной липкостью [7]. Адгезия может достигаться также за счет электростатического прижима, для чего предусмотрено средство фиксации, выполненное в виде отдельных, не контактирующих между собой и покрытых слоем диэлектрика проводников, подключенных к разным полюсам источника напряжения [8].

Шагающий микроробот-инспектор и его транспортная платформа

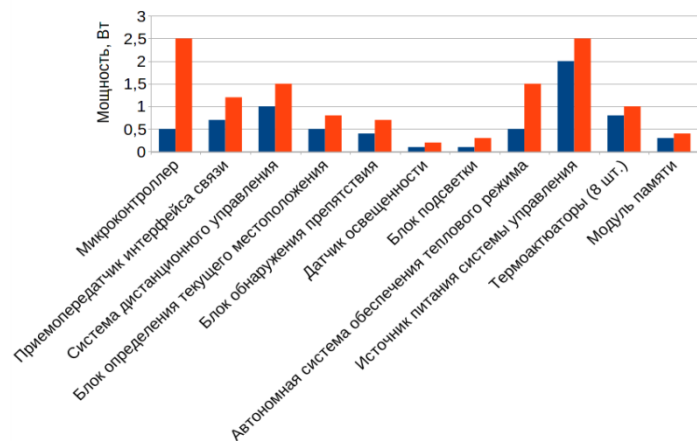
Для осуществления инспекционных работ на солнечных батареях космических аппаратов предложен мобильный микроробот-инспектор, входящий в состав робототехнической системы. Робот включает в свой состав несущую платформу, служебную и целевую аппаратуру: микроконтроллер, приемопередатчик интерфейса связи, систему дистанционного управления, блок определения текущего местоположения, блок обнаружения препятствия, содержащий излучатель инфракрасного сигнала и приемник отраженного инфракрасного сигнала, датчик освещенности, блок подсветки, автономную систему обеспечения теплового режима, экранно-вакуумную теплоизоляцию космического робота-инспектора. Система дистанционного управления включает выносной блок, размещаемый на внешней поверхности станции и содержащий базовый блок беспроводного приема и передачи данных с выносной антенной, автономную систему обеспечения теплового режима выносного блока и экранно-вакуумную теплоизоляцию выносного блока, а также источник питания системы управления и блок управления и контроля, размещаемые в герметичном отсеке станции.

Предусматриваются два режима функционирования робота – интерактивный (с участием космонавта) и автономный. В интерактивном режиме осуществляются перемещение робота и оценка состояния инспектируемой поверхности в режиме реального времени; космонавт управляет роботом с помощью блока управления и контроля, размещенного в герметичном отсеке станции. В автономном режиме робот передвигается по заданной траектории и производит сбор информации с возможностью накопления и хранения данных в энергонезависимом запоминающем устройстве микроконтроллера космического робота-инспектора с их последующим считыванием и вводом в блок управления и контроля на рабочем месте оператора-космонавта для анализа и отображения данных [10].

Транспортная платформа микроробота представляет собой твердую пластину, на которой находятся восемь термоактюаторов, расположенных попарно противоположно (рис.1(а)). В выключенном состоянии термоактюатор деформирован. При пропускании тока через термоактюатор он нагревается и распрямляется. Перемещение осуществляется последовательным распрямлением термоактюаторов, которые, остывая, приходят в первоначальное деформированное состояние.



(а)



(б)

Рис. 1. Транспортная платформа микроробота (а), потребляемая отдельными блоками микроробота мощность (б).

Анализ потребляемой мощности

Проведен анализ мощности отдельных блоков микроробота-инспектора. Методика отвечает обычным оценкам стандартной силовой системотехники на базе имеющихся электронных и оптоэлектронных

компонентов и блоков. Минимальные значения мощности отвечают стандартным коэффициентам усиления блоков и элементов компьютерного и телекоммуникационного оборудования на рабочих частотах от 2,5 МГц до 2,5 ГГц. Допустимые коэффициенты усиления телекоммуникационных компонент предполагают устойчивую доступность сигналов на расстояниях от базы до микроробота от 100 м до 0,5 км.

Расчеты проведены в предположении, что работают все блоки сразу (рис. 2(б)). Из анализа полученных данных можно сделать вывод, что потребляемая как минимальная, так и максимальная мощность вполне реализуемы при сегодняшнем развитии компонентной электронной и оптоэлектронной базы и схемотехники.

Предварительные оценки энергопотребления термоактюаторов дают величину мощности от 0,8 до 1 Вт. Оценки получены при условии одновременной работы половины термоактюаторов в течение 1–3 с. Оценка энергозатрат на отрыв ступней актюатора от поверхности перемещения дает максимальную величину мощности около 0,6 Вт.

Расчет времени функционирования микроробота для одного цикла зарядки и максимальной дистанции перемещения 10 м оценивается для источника энергии, обладающего энергоемкостью равной 5 Вт·час/г. В качестве источника энергии рассматривались топливный элемент, литий-ионный аккумулятор и тепловой аккумулятор. Исследование показало, что все три вида источников энергии приемлемы, однако наибольшей эффективностью обладает тепловой аккумулятор на базе материалов с фазовыми переходами (нанокompозит – графен+парафин+специальные добавки). Таким образом, для существующей электронной компонентной базы предложенная конструкция шагающего микроробота является реализуемой в случае регулярной подзарядки аккумуляторной батареи от док-станции.

Заключение

Предложена концепция шагающего микроробота, предназначенного для осуществления инспекционных и иных операций на орбитальных космических аппаратах, как внутри герметичных отсеков, так и снаружи. В качестве шагающих движителей используются термомеханические актюаторы. Рассмотрены физические принципы ходьбы в условиях невесомости, особое внимание уделяется способам фиксации опорных стоп на поверхности перемещения. Описываются конструкция транспортной платформы микроробота и состав бортового оборудования, необходимого для автономного функционирования микроробота. Дана оценка потребляемой микророботом мощности. Наиболее сложная задача при проектировании робота-инспектора – размещение бортовой аппаратуры на транспортной платформе робота. При этом основной и обязательной тенденцией остается миниатюризация узлов и блоков служебной и целевой аппаратуры с одновременным увеличением гарантированного срока активного существования.

Литература

1. Попов В.Л., Филиппов А.Э., Горб С.Н. Биологические структуры с высокой адгезией и трением. Численный подход. // УФН. 2016. Т. 186. № 9. С. 913–930.
2. Menon C., Murphy M., Angrilli F., Sitti M. Waalbots for space applications. //In 55th IAC Conference, Vancouver, Canada, 2004.
3. Kalouche S., Wiltsie N., Su H., Parness A. Inchworm style gecko adhesive climbing robot. //In Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems, pages 2319–2324, September 2014.
4. Jiang H., Hawkes E.W., Fuller C., Estrada M.A., Suresh S.A., Abcouwer N., Han A.K., Wang S., Ploch C.J., Parness A., Cutkosky M.R. A robotic device using gecko-inspired adhesives can grasp and manipulate large objects in microgravity. //Science Robotics, 2(7):eaan4545, jun 2017.
5. Hongqiang Wang, Akio Yamamoto and Toshiro Higuchi A Crawler Climbing Robot Integrating Electroadhesion and Electrostatic Actuation //Int J Adv Robot Syst, 2014, 11:191 | doi: 10.5772/59118
6. Sticky-footed space walking robot and gaiting method. US2007173973
7. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г., Жуков А.А., Смирнов И.П. Ступня ноги шагающего космического микромеханизма. Оpubл.: 21.09.2018. Бюл. № 27. Патент РФ 2667593
8. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г., Жуков А.А., Смирнов И.П. Ступня ноги шагающего космического микроробота. Оpubл.: 21.09.2018 Бюл. № 27. Патент РФ 2667594
9. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г., Жуков А.А., Смирнов И.П. Ступня ноги шагающего космического микроробота. Оpubл.: 18.12.2018. Бюл. № 35 Патент РФ 2675327
10. Жуков А.А., Калитурин В.Н. Космический мобильный робот-инспектор. Оpubл.: 15.11.2022 Бюл. № 32 Патент РФ 2783640

МЕХАНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ. КОНЦЕПЦИИ, ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА

**Валиуллин А.А.¹, Васильченко Л.Б.², Данилин А.Н.³, Денисов Е.А.¹, Онучин Е.С.²,
Фельдштейн В.А.^{2,1}**

1 - Московский физико-технический институт, Москва, Россия

*2 - АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения», Королёв,
Россия*

*3 - Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия
andanilin@yandex.ru*

Аннотация. Разработаны и верифицированы математические модели и алгоритмы, на основе которых сформулированы условия и механизмы возникновения колебаний проводов ВЛЭ в различных диапазонах частот (эолова вибрация, субколебания, пляска), предложены научно-методические основы и практические рекомендации по способам подавления (гашения) колебаний с использованием специальных технических устройств. Для описания феномена пляски проводов предложена и обоснована термомеханическая концепция, что может привести к переоценке существующих средств борьбы с этим явлением.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-19-00678.

Введение

Системы электропередачи являются одними из наиболее значимых объектов современной техники, от которых зависит устойчивость систем энергоснабжения. Надежность функционирования и ресурс воздушных линий электропередачи (ВЛЭ) напрямую зависят от того, как решены проблемы вибрации проводов ВЛЭ. В механическом отношении провод представляет собой достаточно гибкую систему с широким и плотным спектром собственных частот, подверженную воздействию электрических, тепловых, ветровых, климатических факторов.

В эксплуатационной практике выделяют три основных вибрационных режима:

- колебания с амплитудой порядка диаметра провода на частотах 5...50 Гц, обусловленные периодическим сходом вихревой цепочки Кармана;
- субколебания с амплитудами порядка расстояния между отдельными проводами на частотах 0,7...5 Гц. Эти колебания свойственны исключительно проводам расщепленных фаз ВЛЭ, и возникают вследствие пространственной неравномерности воздушного потока за наветренным проводом фазы;
- галопирование (пляска) – колебания с частотами ~1 Гц и с амплитудами порядка стрелы статического провисания провода.

Несмотря на практическую важность проблемы и достаточно большое к ней внимание, ее решение на уровне, характерном для наиболее продвинутых областей техники, до сих пор не получено.

Моделирование колебаний проводов ВЛЭ

В данном сообщении приводится обзор результатов, полученных авторами.

1. Общие вопросы теории колебаний тяжелой упругой нити, моделирующей провод.
2. Эолова вибрация. Разработана базовая модель пролета ВЛЭ с гасителями вибрации типа Стокбриджа. В преобладающей части пролета провод моделируется гибкой струной, в области граници и установки гасителей – растянутой балкой и переходными участками типа краевых эффектов (погранслоев). Гасители типа Стокбриджа: инерционные элементы с шестью степенями свободы с упругими кронштейнами. Система, состоящая из цепочки последовательных элементов, «завязывается» на основе метода начальных параметров в матричной форме. Разыскиваются наиболее эффективные параметры системы парирования вибраций.
3. Субколебания. Исследовано самовозбуждение автоколебаний проводов расщепленной фазы в ветровом потоке. Разработаны модели, ориентированные на численную реализацию, и двухмодовые модели, на базе которых получены условия мягкого самовозбуждения автоколебаний.
4. Галопирование представляет собой наименее исследованный тип колебаний проводов. Господствующая точка зрения состоит в том, что пляска носит характер флаттера и возникает при отложении на проводах гололеда, придающего сечению провода аэродинамическое качество, и создает динамическую связь вертикальных и крутильных колебаний. Предложена модель самовозбуждения аэроупругих колебаний, связывающая крутильные и поступательные моды, в результате чего возникает поперечная сила (эффект Магнуса), раскачивающая провод. Вместе с тем, эксплуатационная практика знает примеры пляски проводов при практически равномерном обледенении, не изменяющем аэродинамического сопротивления провода, а также при полном его отсутствии. В связи с этим предложена концепция пляски, как термомеханических колебаний, обусловленных взаимосвязью тепловых и механических процессов. Возможность самовозбуждения

поперечных колебаний провода при пропускании по нему электрического тока была продемонстрирована А.Ф. Иоффе в курсе лекций по физике в Петроградском Политехническом институте. Авторами проведено экспериментальное исследование эффекта Иоффе и предложена термомеханическая концепция пляски. Согласно этой концепции, обледенение, которое считается причиной возбуждения колебаний по аэроупругому типу, изменяет не аэродинамические характеристики провода, а его тепловой режим, сближая характерные времена тепловых и механических процессов.

Заключение

Разработаны методы математического моделирования основных видов колебаний проводов высоковольтных линий электропередачи, которые эксплуатационная практика относит к числу значимых факторов, определяющих надежность и ресурс ВЛЭ. Предложена термомеханическая модель самовозбуждения наиболее опасного типа колебаний – пляски проводов; эта концепция позволяет объяснить случаи самовозбуждения пляски, не укладывающиеся в общепринятую концепцию аэроупругих колебаний. В совокупности разработанные научные основы и методики могут быть рекомендованы предприятиям энергетической отрасли для использования при проектировании ВЛЭ и средств подавления колебаний проводов.

Литература

1. Фельдштейн В.А. Термомеханические колебания токонесущих проводников, ПМТФ, 2007, Т. 58, № 6. С. 158–166.
2. Danilin A.N., Kurdyumov N.N., Shavnya R.A. Wake-Induced Oscillations of Two Bundle Conductors Connected at Intervals by Spacers // AIP Conference Proceedings 2343, 120005 (2021).
3. Valiullin A.A., Danilin A.N., Feldshteyn V.A. Normal vibrations of sagging conductors of overhead power lines // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022, V. 18, No. 3, P. 203-222. DOI:10.22337/2587-9618-2022-18-3-147-158.
4. Danilin A.N., Onuchin E.S., Feldshteyn V.A. Model of thermomechanical vibrations of current-carrying conductors // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022, № 4, P. 39-48. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-4-39-48

ЭФФЕКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЕМ ТЯГИ ПРИ СКОРОСТНОМ МАНЁВРЕ В ПЛОСКОСТИ

Решмин С.А.¹, Бектыбаева М.Т.²

1 - Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

2 - Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

reshmin@ipmnet.ru

Аннотация. Рассматривается движение инерционного объекта при управляемом скоростном манёвре в вертикальной плоскости. Решается задача максимизации горизонтальной проекции скорости в заданный конечный момент времени. Предложены способы построения оптимального и двух субоптимальных управлений. Исследуется условие разрешимости, связанное с минимально возможным временем движения, которое требуется для выполнения граничных условий. Проводится сравнительный анализ траекторий при разных управлениях и начальных условиях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

Введение

В данной работе в качестве объекта управления рассматривается материальная точка постоянной массы в плоскости при выведении её на прямолинейную траекторию (рис. 1). В общем случае начальные скорости не равны нулю. Задача состоит в управлении направлением тяги таким образом, чтобы перевести объект на указанную выбранную прямую и по возможности максимизировать продольную скорость. Поэтому при решении целесообразно использовать принцип максимума [1]. Ранее задачи оптимального управления с переменной реактивной тягой рассматривались в [2]. Оптимальное решение аналогичной задачи в случае нулевой начальной скорости приведено в [3, 4]. Далее предложено несколько видов управления объектом: непрерывное оптимальное и два релейных субоптимальных.

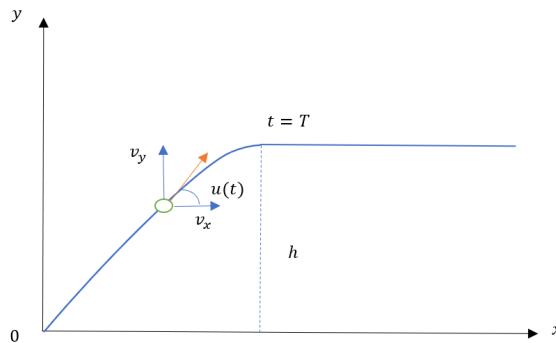


Рис. 1. Схема движения.

Основной текст

Рассматривается система уравнений (1) совместно с граничными условиями (2), моделирование траектории движения проводилось путём численного решения этой системы. Функционал, который надо максимизировать, задан выражением (3).

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u(t), \quad \dot{v}_y = a \sin u(t), \quad (1)$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad v_y(0) = v_{y0}, \quad y(T) = h, \quad v_y(T) = 0, \quad (2)$$

$$J = v_x(T) \rightarrow \max, \quad (3)$$

где a – постоянное ускорение системы, $u(t)$ – направление тяги (искомая кусочно-непрерывная функция времени), v_{x0} – начальная горизонтальная проекция скорости, v_{y0} – начальная вертикальная проекция скорости, h – требуемая высота подъёма, $v_x(T)$ – значение функционала в конечный момент времени T . Считаем, что тяга велика, поэтому влиянием силы тяжести на динамику пренебрегаем.

В (1), (2) перейдем к безразмерным переменным:

$$x = hx', \quad y = hy', \quad v_x = \sqrt{hav_x'}, \quad v_y = \sqrt{hav_y'}, \quad t = t'\sqrt{h/a}, \quad T = T'\sqrt{h/a}.$$

Если в полученной системе опустить штрих, то она совпадет с (1), (2), но будут выполнены дополнительные равенства $h = 1, a = 1$. Поэтому далее считаем существенными только два параметра: v_{y0}, T .

В ходе решения соотношений принципа максимума установлена связь между константами интегрирования в законе оптимального управления №1 (т.е. в так называемом законе дробно-линейного тангенса [2–4]):

$$u(t) = \arctan(-Ct + u_0), \quad C = \frac{2a(aT \sin u_0 + v_{y0})}{\cos u_0 (a^2 T^2 - v_{y0}^2)}, \quad (u(0) = u_0).$$

Показано, что определение параметра u_0 сводится к численному решению всего лишь одного трансцендентного уравнения, как и в случае начальной нулевой скорости [3]. Получено условие разрешимости задачи в виде неравенства $T \geq T_{\min}(h, v_{y0}, a)$, где T_{\min} – минимальное время, необходимое для выполнения граничных условий. Так как в предельном случае, когда $T = T_{\min}$, тяга направлена вдоль вертикали, то выражение для функции T_{\min} определяется так же (аналогично), как и выражение для функции Беллмана в задаче быстрогодействия для одномерного объекта, движущегося вдоль прямой и приводимого в начало координат фазовой плоскости при помощи ограниченного по модулю управления [5].

Субоптимальное управление №2 релейное (максимум с двумя переключениями) и представляет собой синтез двух управлений: сначала за время T_{\min} система наискорейшим образом переводится в требуемое состояние $y(T_{\min}) = h, v_y(T_{\min}) = 0$ ($u(t) = \pm\pi/2, t \in [0, T_{\min}]$), причем на этом этапе может быть максимум одно переключение, а потом, после дополнительного переключения в нуль, обеспечивается равноускоренный разгон вдоль горизонтальной оси ($u(t) = 0, t \in [T_{\min}, T]$). Результаты численных расчётов представлены на рис. 2 в виде графика зависимости функционала J_2 от начальной вертикальной проекции скорости и времени движения. При этом начальная горизонтальная проекция скорости предполагалась нулевой; синяя линия – граница области допустимых значений аргументов, которая определяется равенствами $T = T_{\min}, J_2 = 0$.

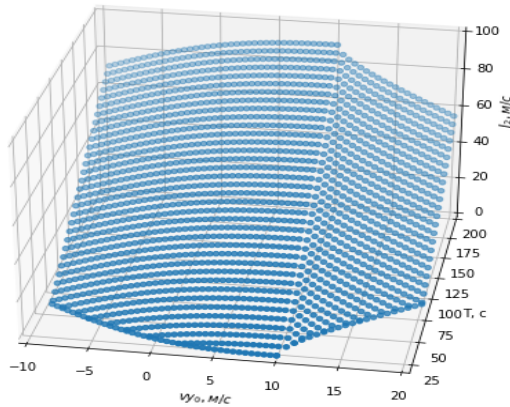


Рис. 2. Зависимость J_2 от параметров v_{y0}, T при субоптимальном управлении №2 ($a = 0.5 \text{ м/с}^2$, $h = 100 \text{ м}, T = 200 \text{ с}$).

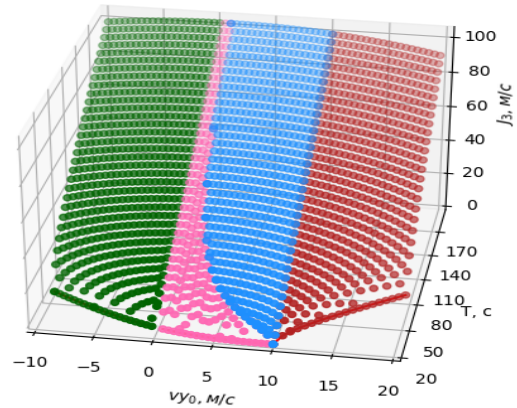


Рис. 3. Зависимость J_3 от параметров v_{y0}, T при субоптимальном управлении №3 ($a = 0.5 \text{ м/с}^2$, $h = 100 \text{ м}, T = 200 \text{ с}$).

Субоптимальное управление №3 релейное (максимум с одним переключением):

$$u(t) = \begin{cases} \pm u_1, & 0 < t \leq \tau, \\ \mp u_1, & \tau < t < T, \end{cases} \quad 0 < u_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

позволяет ограничить проекцию тяги на вертикальную ось и обеспечить равноускоренный разгон вдоль горизонтальной оси в течение всего процесса. Предложена процедура для определения параметров u_1, τ и

нужных знаков управления (4) в трёх разных случаях: $0 < v_{y,0} \leq \sqrt{-2a(y(0)-h)}$ (малые положительные скорости), $v_{y,0} > \sqrt{-2a(y(0)-h)}$ (большие положительные скорости), $v_{y,0} \leq 0$ (отрицательные скорости).

- В случае малых положительных начальных скоростей доказано существование порогового времени $T_* = -2(y(0)-h)/v_{y,0}$, разбивающего полубесконечный интервал $T \geq T_{\min}$ на две части $T_{\min} \leq T \leq T_*$ и $T > T_*$ с разными вариантами переключения: $u(0) = u_1$ для первого диапазона и $u(0) = -u_1$ – для второго диапазона.
- В случае больших положительных начальных скоростей существует только один вариант переключения: $u(0) = -u_1$.
- В случае отрицательных начальных скоростей существует только один вариант переключения: $u(0) = u_1$.

Результаты численных расчётов представлены на рис. 3 в виде графика зависимости функционала J_3 от начальной вертикальной проекции скорости и времени движения. Зелёная область описывается пунктом с), красная область – пунктом б), случай малых положительных скоростей состоит из розовой области ($T_{\min} \leq T \leq T_*$) и голубой области ($T > T_*$).

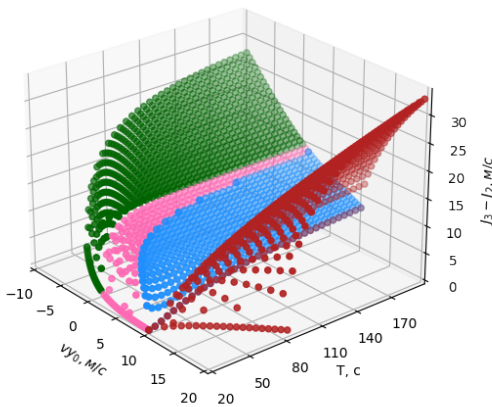


Рис. 4. Зависимость $J_3 - J_2$ от параметров $v_{y,0}, T$
($a = 0.5 \text{ м/с}^2, h = 100 \text{ м}, T = 200 \text{ с}$).

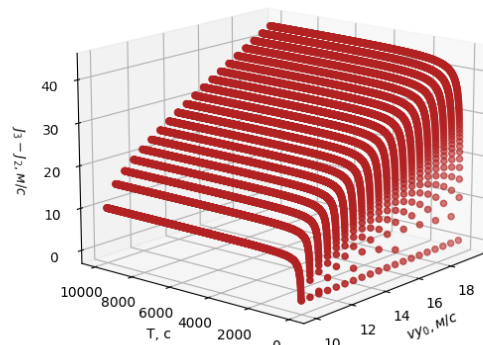


Рис. 5. Зависимость $J_3 - J_2$ от параметров $v_{y,0}, T$
($a = 0.5 \text{ м/с}^2, h = 100 \text{ м}, T = 10000 \text{ с}$).

Заключение

Исследовано движение инерционного объекта при скоростном манёвре в вертикальной плоскости, при этом предложены дополнительные субоптимальные управления. В уравнениях проварьированы основные параметры (скорость $v_{y,0}$, время движения $T \geq T_{\min}$), исследовано допустимое время движения, зависящее от начальных условий, найдены значения горизонтальной проекции скорости в конце процесса. Аналогичные результаты могут быть получены в общем случае для безразмерных величин, предложенных выше.

В результате сопоставления двух субоптимальных управлений было выяснено, что второе имеет более сложную структуру, зависящую от выбора отрезка времени движения и начальной скорости $v_{y,0}$. При всех равных условиях оно более эффективно (рис. 4) и является обобщением управления, указанного в [3]. Отличие состоит в исследовании движения при ненулевой начальной скорости. При рассмотрении разности функционалов оказалось, что при больших временах предел стремится к конечному значению (рис. 5). Аналогично при сравнении оптимального и субоптимальных управлений предел отношений стремится к конечному значению, единице. Работа выполнена с помощью численного моделирования на языке Python с использованием встроенных математических и научных пакетов. В дальнейшем планируется учёт внешних сил.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Исаев В.К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автомат. и телемех., 1961, Т. 22, Вып. 8, с. 986–1001.
3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
4. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396 с.

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСОВ СРЕДНИХ ДВИЖЕНИЙ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Сидоренко В.В.

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия
vvsidorenko@list.ru*

Аннотация. Если в планетной или спутниковой системе отношение периодов обращения двух тел вокруг основного тела (звезды или планеты соответственно) приблизительно равно отношению двух небольших целых чисел, то такую ситуацию характеризуют как резонанс средних движений (РСД). РСД достаточно распространены как в Солнечной системе, так и в планетных системах других звезд. Аналитические исследования РСД проводятся преимущественно в рамках ограниченной или неограниченной задачи трех тел. В 1985 г. Дж. Уиздом предложил подход, позволяющий изучать свойства резонансных движений небесных тел без каких-либо ограничений на эксцентриситеты и наклоны их орбит. Так как применение данного подхода связано с построением специального приближенного интеграла уравнений движения (адиабатического инварианта), его часто называют адиабатическим приближением. Доклад предполагает краткое описание похода Дж. Уиздома к анализу РСД и его последующего развития, иллюстрируемое результатами систематического использования этого подхода в исследованиях докладчика.

Введение

Исследования резонансных движений в спутниковых и планетных системах являются важным элементом изучения их динамического «скелета», свойства которого определяют свойства многих других физических процессов в этих системах. Классические подходы ориентированы прежде всего на построение и изучение периодических решений уравнений движения (см., например, [1]). В 1985 г. Дж. Уиздом, опираясь на теорию адиабатических инвариантов (АИ), показал, как в фазовом пространстве задачи трех тел в окрестности резонансных решений формируются области с хаотической динамикой [2]. Строгое обоснование построений Уиздома и оценки скорости диффузии АИ при РСД 3:1 были даны А.И.Нейштадтом [3].

Адиабатическое приближение при исследовании резонансов

Описание РСД в подходе Уиздома полностью эквивалентно той картине резонансных эффектов, которая приводится в руководствах по современной теории гамильтоновых систем (например, [3]). Поведение системы при РСД характеризуется наличием динамических процессов трех временных шкал: «быстрых», «полубыстрых» и «медленных». «Быстрым» динамическим процессом является орбитальное движение резонансных тел. «Полубыстрый» процесс – изменение резонансной фазы (комбинации средних долгот и части оскулирующих элементов тел). «Медленный» динамический процесс состоит в вековой эволюции формы и ориентации орбит небесных тел.

Для качественного анализа вековых эффектов в рамках подхода Уиздома используется двукратное усреднение уравнений движения. Усреднение проводится в два этапа. Первый этап состоит в усреднении по «быстрым» процессам. После ряда преобразований в усредненных уравнениях можно выделить подсистему, описывающую «полубыстрый» процесс, и подсистему, описывающую «медленные» процессы. Если зафиксировать значения «медленных» переменных, «полубыстрая» система превращается в интегрируемую гамильтонову систему с одной степенью свободы (допускающую переход к переменным «действие-угол»). Усреднение вдоль ее решений правых частей уравнений «медленной» подсистемы завершает построение эволюционных уравнений, используемых для изучения вековых эффектов.

В общем случае «полубыструю» подсистему можно рассматривать как гамильтонову систему с медленно изменяющимися параметрами. Из такой интерпретации вытекает, что переменная «действие», соответствующая данной подсистеме, будет приближенным интегралом задачи – адиабатическим инвариантом. Принимая во внимание существование этого АИ, Уиздом охарактеризовал свой подход как адиабатическое приближение.

Важным отличием адиабатического приближения от других подходов к анализу РСД является то, что оно допускает рассмотрение возможных переходов между резонансными режимами движения (в которых резонансная фаза осциллирует) и нерезонансными (резонансная фаза вращается). Каждый такой переход сопровождается квазислучайным скачкообразным изменением АИ и отклонением истинного движения от того, что предсказывают усредненные уравнения движения. Многократная смена режима приводит к диффузии АИ – фазовая траектория исходной системы постепенно заполняет некоторую область в фазовом пространстве, именуемую областью адиабатического хаоса.

Примеры применения адиабатического приближения при изучении РСД

Дж. Уиздом предложил свой подход, занимаясь изучением вполне конкретного РСД – резонанса 3:1. Применение этого подхода для исследования других резонансов потребовало внесение разнообразных модификаций, учитывающих их специфику.

Интересным примером использования адиабатического приближения можно считать анализ условий формирования и разрушения квазиспутникового режима (QS-режима) движения малых небесных тел в Солнечной системе [4, 5]. Такое движение сочетает движение по кеплеровской орбите вокруг Солнца с длительным пребыванием в окрестности одной из планет без вхождения в ее сферу Хилла (рис. 1). Необходимым условием для реализации QS-режима является наличие резонанса средних движений астероида и планеты вида 1:1 (случай близких значений периодов их обращения вокруг Солнца). Указанием на движение астероида в QS-режиме служат колебания в окрестности 0 резонансной фазы $\varphi = \lambda - \lambda'$, где λ и λ' – средние долготы астероида и планеты соответственно. Усреднением по «быстрым» и «полубыстрым» процессам были построены эволюционные уравнения, позволяющие изучить вековые эффекты в динамике астероида (в частности, предсказать момент выхода из QS-режима).

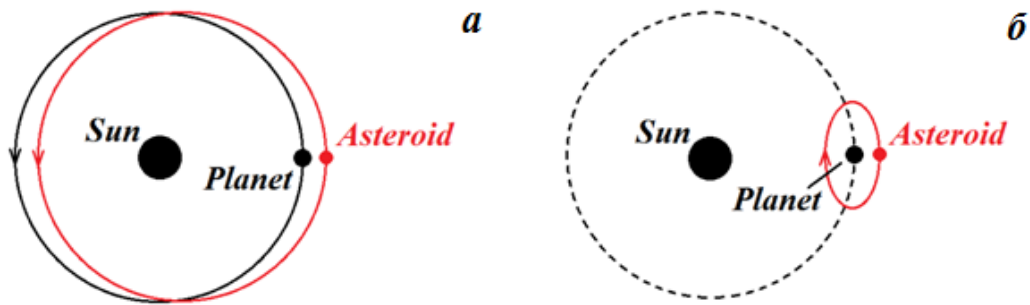


Рис. 1. Орбитальное движение планеты и ее квазиспутника: (а) – движение в гелиоцентрической системе отчета, оси которой сохраняют ориентацию в абсолютном пространстве; планета движется вокруг Солнца по круговой орбите, квазиспутник – по эллиптической; (б) – движение планеты и квазиспутника во вращающейся системе координат, сохраняющей неизменным направление «Солнце-планета»

Астероиды-тройцы, располагающиеся в окрестности одной из треугольных точек либрации некоторой планеты, тоже движутся в РСД 1:1 с этой планетой. Если у гамильтоновой системы при резонансе возможны несколько режимов движения, то при определенных условиях могут наблюдаться переходы из одного режима в другой. В [6] был приведен пример перехода $T_L \rightarrow T_T$ (здесь T_L и T_T обозначают орбиты, охватывающие «ведущую» точку либрации L_4 и «отстающую» точку L_5 соответственно) у реального резонансного астероида (1868) Thersites. Подобные астероиды, пребывающие достаточно длительное время в окрестности одной треугольной точки либрации, а затем перемещающиеся в окрестность другой треугольной точки либрации, получили название «прыгающих» тройцев. Анализ причин таких прыжков в рамках адиабатического приближения был проведен в [7].

Если в ограниченном варианте задачи трех тел «звезда-планета-астероид» за то время, за которое астероид совершает p оборотов вокруг звезды, планета совершает $p+1$ оборот, то такую ситуацию называют «внешним» РСД первого порядка. Характеристика этого РСД как «внешнего» отражает то обстоятельство, что величина большой полуоси орбиты астероида больше большой полуоси орбиты планеты. В Солнечной системе во внешнем РСД первого порядка с Нептуном находятся объекты пояса Койпера, образующие семейства «тутино» (резонанс 1:2) и «плутино» (резонанс 2:3). В [8] адиабатическое приближение позволило провести подробное исследование модельной гамильтоновой системы, описывающей основные свойства динамики небесных тел при РСД первого порядка. Дана полная классификация возможных вариантов вековой эволюции. Найдены критические значения гамильтониана системы, при которых происходит изменение характера вековой эволюции. Описаны стохастические эффекты, проявляющиеся в системе, и найдены соответствующие им вероятности.

Литература

1. А. Д. Брюно // Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
2. J. Wisdom // A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability. Icarus, 63, 1985. 272-286
3. А. И. Нейштадт // Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису и происхождение люка Кирквуда 3:1. ДАН, 295, 1987. 47-50
4. В. В. Сидоренко, А. И. Нейштадт, А. В. Артемьев, Л. М. Зеленый // Формирование и разрушение квазиспутникового режима движения малых небесных тел. ДАН, 450, 2013. 286-290.

5. V. V. Sidorenko, A. I. Neishtadt, A. V. Artyemyev, L. M. Zelenyi // Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance: perturbative treatment. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 120, 2014. 209-231.
6. K. Tsiganis, R. Dvorak, E. Pilat-Lohinger // Thersites: a 'jumping' Trojan? *Astron. Astrophys.*, 354, 2000, 1091-1100.
7. V. V. Sidorenko // Dynamics of "jumping" Trojans: a perturbative treatment. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130, 2018. 18 p.
8. S. S. Efimov, V. V. Sidorenko // An analytically treatable model of long-term dynamics in a mean motion resonance with coexisting resonant modes. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 132, 2020. 38 p.

ВОЛНОВАЯ ТЕХНИКА: ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ, СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

Стрекалов С.Д.

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия
strekalov_sergey@mail.ru

Аннотация. В материале рассматривается история создания, современное состояние и перспективы развития волновой техники, основанной на теории многозвенной волновой поверхности. В качестве основы этого направления явились работы по созданию волнового транспортера. Дальнейшим развитием волновой техники явилось создание волновых ветродвигателей и волновых преобразователей энергии потока воды. В качестве волновых движителей рассмотрены технические системы для перемещения в различных типах сред: твердой, жидкой и газообразной. Рассмотрены кинетические скульптуры, созданные на основе волновых систем.

Введение

При создании технических средств нового поколения следует использовать принципы экономии, заложенной в природе. Основным видом движения в живой природе является волновое. Это движение позволяет решить широкий спектр технических задач как в области перемещения в различных типах сред, так и в области получения энергии. Технические системы, созданные на основе волновых принципов, могут иметь показатели, превышающие традиционные аналоги. Помимо этого волновое движение гармонично, что позволяет создавать на его основе в том числе и кинетические скульптуры.

Основной текст

Волновая техника или техника, созданная на основе механической бегущей волны, берет свое начало от волнового транспортера. Это устройство было создано для дозировки и перемещения тел округлой формы. Первоначально такие транспортеры использовались в линиях по инспекции и загрузки арбузов [1]. Для создания таких устройств были использованы шарнирно соединенные между собой звенья, которые были связаны с генератором колебаний. Генераторы колебаний обеспечивают концам звеньев смещенные по фазе колебания.

Были исследованы свойства этого транспортера, основу которого составляла многозвенная волновая поверхность (МВП). К числу основных свойств МВП можно отнести:

- бинарность – способность МВП создавать два противоположных движения. Внутреннее, благодаря которому тела, размеры которых меньше длины волны, перемещаются в сторону распространения волны и внешнее, обеспечивающее движение тел, размеры которых больше длины волны, в сторону, противоположную направлению волны;
- индивидуальность, заключающаяся в том, что каждая точка МВП имеет свою, свойственную только ей траекторию, эти траектории могут повторяться у звеньев соседних волн;
- комфортность – сущность этого свойства состоит в том, что на звене существует одна точка, амплитуда которой минимальна;
- пульсация – МВП совершают волновое движение под действием вертикальных колебаний, но помимо вертикальных колебаний у таких волн существуют и продольные колебания. Продольные колебания МВП и являются пульсацией.

С учетом этих свойств были созданы и испытаны волновые транспортеры на основе МВП, которые показали свою работоспособность в различных технологических процессах.

Дальнейшее развитие волновой техники, техники, созданной на основе МВП, получило в волновых ветродвигателях. Волновые ветродвигатели – это устройства, в которых преобразование энергии воздуха в механическую происходит за счет использования одного звена МВП. Это звено за счет кинематических связей совершает волновое движение, приводящее в действие генераторы. Генераторы могут быть линейного типа, совершающие возвратно-поступательное движение или вращательное. Были созданы различные конструкции волновых ветродвигателей, испытания которых показали их эффективность и предпочтительность в некоторых случаях по сравнению с традиционными лопастными ветродвигателями [3, 4].

Генерирование энергии волновыми системами нашло применение при использовании их в качестве гидроэлектростанций. В этом режиме на реке Хопер была построена и испытана мини-ГЭС, обеспечивающая электроэнергией понтонную переправу в районе станицы Михайловская Урюпинского района.

Волновые системы, используемые в режиме движителей, применялись при создании гидродвигателей для привода водных транспортных систем.

Волновые системы с жестким недеформируемым крылом использовались в качестве движителя летательных средств. Жесткие недеформируемые крылья позволяют сообщать высокочастотные смещенные по фазе колебания, создающие тяговую силу машущим крыльям в широком диапазоне частот.

Были разработаны и изготовлены шагающие системы на основе МВП. Испытания этих систем показали их работоспособность, они нашли применение при создании шагающих роботов [4].

Одним из применений волновой техники, созданной на основе МВП, являются кинетические скульптуры волнового типа. Эти системы успешно моделируют движение птиц, рыб, что позволяет на их основе создавать кинетические скульптуры, прообразы живой природы и позволяют прививать у детей стремление изучать волновые механизмы [5].

Заключение

Волновая техника, созданная на основе теории МВП и испытанная в различных режимах, в том числе в режиме генерации энергии и в режиме движителей, показала перспективность этого направления развития механических систем, волновую технику можно рассматривать, как новое поколение техники.

Литература

1. С.Д. Стрекалов, Г.М. Мишарев, Л.П. Стрекалова // Волновая техника. Изд. Перемена Волгоград 2004 с.98.
2. П.Р. Андронов, Д.А. Григоренко, М.З. Досаев, Г.Я. Дынникова, С.Д. Стрекалов. Исследование эффективности преобразования энергии в ветродвигателях волнового типа. / Тезисы докладов XV школы-семинара «Современные проблемы аэродинамики». М.: Изд-во Моск. Ун-та. 2007. С.13
3. С.Д. Стрекалов. К разработке методов аэродинамики волновых ветродвигателей. / Тезисы Мат. Пятнадцатой междушколы-семинара: Модели и методы аэродинамики, г.Евпатория.-М.: МЦНМО, 2015.- с.140-142.
4. С.Д. Стрекалов, В.А. Камаев, В.Ю. Гришин. Использование многозвенных волновых поверхностей в создании шагающих машин. / Тез. докл. 1-ой Всесоюзной конференции по механике и управлению шаг. машин. Политехн. институт, г.Волгоград 1988. С.33.
5. С.Д. Стрекалов, А.С. Стрекалова, Л.П. Стрекалова. Инновационно-демонстрационные площадки на основе экологичных волновых ветродвигателей: структура и роль в устойчивом развитии территории. - Ж. «Альтернативная энергетика и экология» №13-14(177-178), 2015. – С.66-71.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ИСЗ: НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Тихонов А.А.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
a.tikhonov@spbu.ru*

Аннотация. Рассматриваются задачи управления угловым движением ИСЗ, базирующиеся на использовании моментов, порождаемых взаимодействием ИСЗ с магнитным полем Земли: лоренцева стабилизация ИСЗ в прямом и непрямом положениях равновесия в орбитальной системе координат; сглаживание переходных процессов и ускорение сходимости в задачах угловой стабилизации ИСЗ; угловая стабилизация ИСЗ в условиях нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями; угловая стабилизация ИСЗ в естественной магнито-лоренцевой системе координат. Обсуждается мотивация к исследованию, методы решения упомянутых задач, полученные результаты. Формулируются выводы об актуальности полученных результатов.

Лоренцева стабилизация ИСЗ в прямом и непрямом положениях в орбитальной системе координат

Проблема управления вращательным движением ИСЗ относительно центра масс является одной из важнейших в космодинамике. Для ее решения могут быть использованы моменты сил различной природы. В частности, электродинамический эффект, вызванный лоренцевым взаимодействием заряженного ИСЗ с геомагнитным полем, рассматривается с 1988 г. как основа для специального класса систем управления ориентацией ИСЗ [1]. Управляемый лоренцев момент, действующий на заряженный ИСЗ или эквивалентный ему ИСЗ с двойным электростатическим слоем, может быть достаточно большим, чтобы использоваться в качестве восстанавливающего момента в окрестности положения относительного равновесия ИСЗ [2]. Поскольку недавние исследования в области активного электростатического экранирования ИСЗ выявляют тенденцию к увеличению размеров заряженных экранов, управляющий лоренцев момент особенно подходит для стабилизации углового положения больших экранированных ИСЗ. Применение управляемого лоренцева момента не требует перемещения каких-либо масс и не требует расхода рабочего вещества. Эти преимущества делают лоренцев момент похожим на момент магнитного взаимодействия, широко используемый в магнитных системах управления угловым движением ИСЗ. При этом лоренцева система управления имеет некоторые преимущества по сравнению с магнитной системой управления ориентацией ИСЗ [3].

В докладе рассматриваются задачи трехосной лоренцевой стабилизации ИСЗ в прямом и непрямом положениях в орбитальной системе координат. Учитывается возмущающее воздействие гравитационного момента. Ненулевое наклонение орбиты и мультипольные составляющие индукции геомагнитного поля приводят к тому, что нелинейная математическая модель усложняется появлением коэффициентов, периодически зависящих от времени. При этом правые части дифференциальных систем не являются быстро изменяющимися функциями времени. Возникает проблема исследования таких задач с использованием приема усреднения, который, как известно, хорошо разработан только для случаев быстро изменяющихся нестационарностей. В качестве решения возникшей проблемы предложено развитие приема усреднения для его последующего применения в описанных выше существенно более сложных ситуациях. Для исследования таких дифференциальных систем предложены варианты развития метода усреднения, позволяющие получать достаточные условия асимптотической устойчивости движения с использованием новых оригинальных подходов к построению нестационарных функций Ляпунова. При этом сначала строится функция Ляпунова для усредненных уравнений, а затем она достраивается с учетом нестационарных возмущений, действующих на систему. Далее получающаяся функция Ляпунова применяется к исходной нестационарной дифференциальной системе. В результате дано оригинальное и строгое математическое обоснование, позволяющее рассматривать ИСЗ с неравными моментами инерции и получать конкретные оценки параметров управления, которые обеспечивают угловую стабилизацию ИСЗ с использованием одного только лоренцева восстанавливающего момента при наличии некоторого диссипативного момента. Эти условия на параметры управления сформулированы в явном виде в терминах простых неравенств. Таким образом, предлагается конструктивный подход к разработке стабилизирующего управления. Результаты моделирования подтверждают эффективность и реализуемость предлагаемой схемы управления ориентацией ИСЗ [4].

Сглаживание переходных процессов и ускорение сходимости в задачах угловой стабилизации ИСЗ

Во многих задачах космодинамики важно не только удовлетворить условиям стабилизации ИСЗ, но и не допустить возникновения неприемлемых вибраций ИСЗ, вызванных работой системы управления. Например, большой космический телескоп нуждается в подавлении вибраций в процессе его наведения. Одним из известных способов сглаживания переходных процессов и подавления вибраций является использование ПИД-регулятора. Однако, этот способ не является универсальным, поскольку интегральный член, вводимый в

управление, может с течением времени сыграть негативную роль. В частности, этот недостаток ограничивает использование ПИД-регуляторов для высокоточного слежения. Для преодоления указанного недостатка предлагается использовать управление, построенное по типу ПИД-регулятора, но с распределенным запаздыванием. Сравнение такой модификации ПИД-регулятора со стандартным ПИД-регулятором, а также с ПД-регулятором, дано в [5] для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Там же отмечаются значительные трудности аналитического исследования и обоснования эффективности данного метода управления.

В докладе представлен ряд новых результатов исследований по проблеме устойчивости механических систем управления с распределенным запаздыванием (интегральная часть ПИД-регулятора) на основе метода декомпозиции. Дано распространение подхода В.И. Зубова на системы с распределенным запаздыванием. Установлено, что вместо исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка можно рассматривать две вспомогательные изолированные подсистемы первого порядка, одна из которых не содержит запаздывания, а для второй подсистемы, содержащей распределенное запаздывание, условия устойчивости формулируются в терминах разрешимости систем линейных матричных неравенств. Разработанный подход применен к задачам об одноосной и трехосной угловой стабилизации ИСЗ, оснащенного электродинамической системой ориентации, генерирующей одновременно лоренцев и магнитный управляющие моменты [6]. Найденны условия, при которых электродинамическая система ориентации с распределенным запаздыванием решает задачи одноосной и трехосной стабилизации ИСЗ при наличии возмущающего гравитационного момента. Эффективность построенного управления ориентацией с распределенным запаздыванием подтверждена численным моделированием. Показано, что в каждой из этих задач введение в систему управления интегральной составляющей позволяет существенно повысить гладкость процесса управления и ускорить его сходимость к асимптотически устойчивому решению. Таким образом предложено и обосновано развитие концепции электродинамического управления, включающее использование восстанавливающих лоренцева и магнитного моментов с распределенным запаздыванием (интегральный член).

Угловая стабилизация ИСЗ в условиях нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями

Как известно, в реальных условиях вращательное движение ИСЗ находится под воздействием множества возмущающих моментов. Большинство этих моментов можно моделировать почти периодическими функциями времени с нулевыми средними значениями. В частности, уточнение условий движения ИСЗ путем учета мультипольных составляющих в потенциалах геофизических полей приводит к усложнению математических моделей вращательного движения ИСЗ и переходу от нелинейных нестационарных дифференциальных систем с постоянными или периодическими коэффициентами к нелинейным нестационарным дифференциальным системам с почти периодическими коэффициентами. С математической точки зрения задача обоснования электродинамического метода управления вращательным движением ИСЗ приводит к необходимости изучения упомянутых систем управления с почти периодическими коэффициентами, в том числе с коэффициентами, имеющими нулевые средние значения. Дополнительным усложняющим фактором является то, что величины возмущающих моментов часто близки друг к другу и, как правило, не пренебрежимо малы. По этой причине использование известных методов возмущений в таких задачах сопряжено с трудностями, тогда как методы, основанные на функциях Ляпунова, оказываются эффективными.

В докладе предложен конструктивный подход к анализу робастности в задаче управления ориентацией ИСЗ, находящегося под действием нестационарных возмущающих моментов с нулевыми средними значениями. Предложенный подход, использующий принципиально нелинейное управление, основан на методе декомпозиции, принципе сравнения и методе усреднения для дифференциальной системы управления динамикой углового движения ИСЗ. Показано, что метод усреднения, известный как мощный инструмент исследования различных динамических систем, может быть успешно применен для построения функций Ляпунова для нестационарных дифференциальных систем. По сравнению с известными условиями устойчивости, установленными на базе усредненных уравнений, принципиальная новизна полученных результатов заключается в том, что достаточные условия асимптотической устойчивости найдены без предположения о том, что правые части дифференциальных систем являются быстро изменяющимися функциями времени. Получены условия, при которых возмущающие моменты не нарушают асимптотическую устойчивость программного вращательного движения ИСЗ [7]. Предлагаемый подход применим в задачах, где возмущающие моменты не малы по величине и может быть использован для различных инженерных приложений от наномеханического генератора до большого космического телескопа, поскольку на потенциал этих устройств существенно влияет их повышенная чувствительность к внешним возмущениям.

Угловая стабилизация ИСЗ в естественной магнито-лоренцевой системе координат

Анализ задач динамики ИСЗ, взаимодействующих с геомагнитным полем, свидетельствует о том, что для некоторых приложений оказывается удобной специальная естественная система координат в околоземном пространстве, связанная с направлениями вектора геомагнитной индукции и вектора силы Лоренца, которая ортогональна как геомагнитной индукции, так и относительной скорости ИСЗ. В частности, такая

магнито-лоренцева система координат удобна для стабилизации углового положения ИСЗ, работающего в режиме сканирования поверхности Земли и обладающего электрическим зарядом и собственным магнитным моментом.

Проанализированы свойства траектории движения оси ИСЗ на поверхности Земли. Получен тензор вращения, связывающий естественную магнито-лоренцеву и орбитальную системы координат. Найдена угловая скорость естественного трехгранника магнито-лоренцевой системы координат. Получены кинематические дифференциальные уравнения для ортов естественной магнито-лоренцевой системы координат [8].

Исследована новая задача об угловой стабилизации ИСЗ с помощью электродинамической системы управления в естественной магнито-лоренцевой системе координат. Рассматривается общий случай распределения масс ИСЗ. Поэтому учитывается возмущающее действие гравитационного момента. Применяется нелинейный анализ устойчивости, основанный на прямом методе Ляпунова. Предлагаемый подход дает допустимые области управляющих параметров, при которых гарантируется стабилизация ИСЗ в магнито-лоренцевой системе координат без ограничений на модель магнитного поля Земли [9]. Условия стабилизации формулируются в виде явных неравенств для управляющих параметров.

Заключение

Рассмотрен ряд актуальных задач динамики вращательного движения ИСЗ относительно центра масс. Все рассмотренные задачи являются новыми, как по своим постановкам, так и по методам, используемым для их решения.

Литература

1. А.А. Тихонов Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические Исследования, 41:1 2003. 69-79
2. К.Г. Петров, А.А. Тихонов Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн. С.- Петербург. ун-та. Сер.1, 3(15) 1999. 81-91
3. D.K. Giri, M. Sinha, Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // International Journal of Dynamics and Control, 5:3 2017. 644-652
4. A.Yu. Aleksandrov, A.A. Tikhonov Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerospace Science and Technology, 104 2020. 105963
5. A.M. Formal'sky On a modification of the PID controller // Dynamics and Control, 7(3) 1997. 269-277
6. А.Ю. Александров, А.А. Тихонов Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космические Исследования, 60:5 2022. 404-412
7. A.Yu. Aleksandrov, A.A. Tikhonov Attitude stabilization of a rigid body under disturbances with zero mean values // Acta Mechanica, 233 2022. 1231-1242
8. A.A. Tikhonov Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: The Concept and Kinematic Analysis // Journal of Applied and Computational Mechanics, 7:4 2021. 2113-2119
9. A.Yu. Aleksandrov, A.A. Tikhonov Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: Dynamics and Stability Analysis // Journal of Applied and Computational Mechanics, 9:2 2023. 513-520

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАЯТНИКОМ, НАХОДЯЩИМСЯ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Ушаков В.Н.¹, Измestьев И.В.^{1,2}, Ухоботов В.И.^{1,2}, Ушаков А.В.¹

1 - *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

2 - *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
ushak@imm.uran.ru

Аннотация. В докладе рассматривается управляемая система, состоящая из двухзвенного маятника, находящегося на тележке, которая движется вдоль прямой. Решается задача о сближении данной управляемой системы с целевым множеством в фазовом пространстве системы в фиксированный момент времени. Используется схема приближенного вычисления множеств разрешимости задачи о сближении, в основе которой лежат попятные во времени пошаговые построения. Для конкретных значений параметров системы проведены модельные расчеты множеств разрешимости и соответствующих программных управлений, обеспечивающих приведение в фиксированный момент времени фазового вектора системы в малую окрестность целевого множества.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-11-00105.

Постановка задачи

В докладе рассматривается задача управления двухзвенным маятником, состоящим из стержней АВ и ВС, который находится на движущейся вдоль оси ОХ тележке (см. рис. 1.).

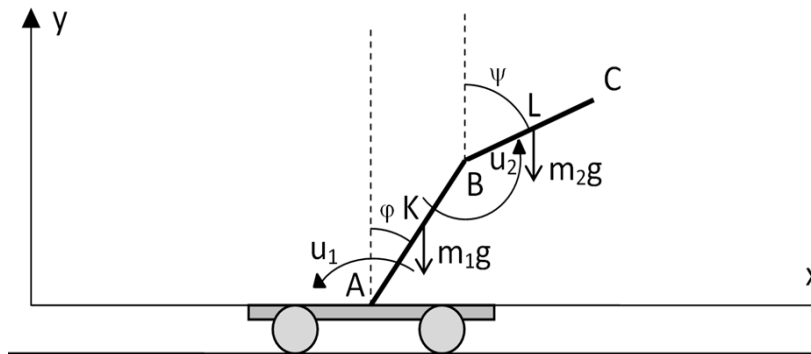


Рис. 1. Двухзвенный маятник на тележке.

Стержни АВ и ВС – однородные, их длина равна $2l_1$ и $2l_2$ соответственно; K и L – их середины; J_1 и J_2 – их моменты инерции относительно середины; m_0 – масса тележки, m_1 – масса стержня АВ, m_2 – масса стержня ВС; φ – угол, который образуют стержень АВ и ось ОУ; ψ – угол, который образуют стержень ВС и ось ОУ. На тележку действуют силы, суммарная составляющая которых в проекции на ось ОХ равна F . В суставах А и В приложены пары сил с моментами u_1 и u_2 .

Параметры F , u_1 и u_2 являются управлениями. На них накладываются геометрические ограничения $|F| \leq F_{\max}$, $|u_1| \leq u_{\max}^1$, $|u_2| \leq u_{\max}^2$, где F_{\max} , u_{\max}^1 , u_{\max}^2 – заданные положительные константы.

Цель выбора управления заключается в выводе системы в заданное положение в фиксированный момент времени. Например, привести маятник в верхнее вертикальное положение, сделав $\varphi = 0$ и $\psi = 0$.

Формализация задачи

Выведем уравнения движения рассматриваемой управляемой системы.

Координату точки А обозначим буквой x . Тогда

$$x_K = x + l_1 \sin \varphi, \quad y_K = l_1 \cos \varphi; \quad x_L = x + 2l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi, \quad y_L = 2l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_K = \dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_K = -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \dot{x}_L = \dot{x} + 2l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l_2 \dot{\psi} \cos \psi, \quad \dot{y}_L = -2l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - l_2 \dot{\psi} \sin \psi. \quad (1)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 + \frac{J_1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{J_2}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{m_1}{2} \left((\dot{x} + l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + l_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \right) + \\ + \frac{m_2}{2} \left((\dot{x} + 2l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l_2 \dot{\psi} \cos \psi)^2 + (2l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + l_2 \dot{\psi} \sin \psi)^2 \right).$$

Преобразовывая это выражение, получим

$$T = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{J_1 + (m_1 + 4m_2)l_1^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{J_2 + m_2 l_2^2}{2} \dot{\psi}^2 + \\ + (m_1 + 2m_2)l_1 \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{x} + m_2 l_2 \cos \psi \dot{\psi} \dot{x} + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi) \dot{\varphi} \dot{\psi}.$$

Вычислим обобщенные силы. С этой целью посчитаем элементарную работу сил на возможных перемещениях

$$\delta A = F \delta x - u_1 \delta \varphi - u_2 \delta(\pi - \psi + \varphi) - m_1 g \delta y_K - m_2 g \delta y_L.$$

Отсюда и из формул (1), в которых заменяем \dot{z} на δz , где $z = x, \varphi, \psi, y_K, y_L$, получим

$$\delta A = F \delta x + (-u_1 - u_2 + g l_1 (m_1 + 2m_2) \sin \varphi) \delta \varphi + (u_2 + m_2 g l_2 \sin \psi) \delta \psi.$$

Таким образом, обобщенные силы имеют вид

$$Q_x = F; \quad Q_\varphi = -u_1 - u_2 + g l_1 (m_1 + 2m_2) \sin \varphi; \quad Q_\psi = u_2 + m_2 g l_2 \sin \psi.$$

Введем следующие обозначения

$$c_1 = m_0 + m_1 + m_2, \quad c_2 = (m_1 + 2m_2)l_1, \quad c_3 = m_2 l_2, \quad c_4 = J_1 + (m_1 + 4m_2)l_1^2, \quad c_5 = 2m_2 l_1 l_2, \quad c_6 = J_2 + m_2 l_2^2.$$

Затем переобозначим переменные

$$x_1 = x, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = \psi.$$

Тогда кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{c_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{c_4}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{c_6}{2} \dot{x}_3^2 + c_2 \cos x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + c_3 \cos x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3 + c_5 \cos(x_2 - x_3) \dot{x}_2 \dot{x}_3. \quad (2)$$

Обобщенные силы равны

$$Q_1 = F, \quad Q_2 = -u_1 - u_2 + g c_2 \sin x_2, \quad Q_3 = u_2 + g c_3 \sin x_3. \quad (3)$$

Уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Введем гамильтоновы переменные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = x_4, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = x_5, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = x_6.$$

Из формул (2) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \cos x_2 \dot{x}_2 + c_3 \cos x_3 \dot{x}_3 = x_4, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = c_2 \cos x_2 \dot{x}_1 + c_4 \dot{x}_2 + c_5 \cos(x_2 - x_3) \dot{x}_3 = x_5, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = c_3 \cos x_3 \dot{x}_1 + c_5 \cos(x_2 - x_3) \dot{x}_2 + c_6 \dot{x}_3 = x_6.$$

Выразим из этих соотношений переменные \dot{x}_i , применяя правило Крамера. Получим

$$\dot{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dot{x}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (5)$$

где

$$\Delta = c_1 c_4 c_6 - c_1 c_5^2 \cos^2(x_2 - x_3) + 2c_2 c_3 c_5 \cos x_2 \cos x_3 \cos(x_2 - x_3) - c_6 c_2^2 \cos^2 x_2 - c_4 c_3^2 \cos^2 x_3, \\ \Delta_1 = (c_4 c_6 - c_5^2 \cos^2(x_2 - x_3)) x_4 + (c_3 c_5 \cos x_3 \cos(x_2 - x_3) - c_2 c_6 \cos x_2) x_5 + (c_2 c_5 \cos x_2 \cos(x_2 - x_3) - c_3 c_4 \cos x_3) x_6, \\ \Delta_2 = (c_3 c_5 \cos x_3 \cos(x_2 - x_3) - c_2 c_6 \cos x_2) x_4 + (c_1 c_6 - c_3^2 \cos^2 x_3) x_5 + (c_2 c_3 \cos x_2 \cos x_3 - c_1 c_5 \cos(x_2 - x_3)) x_6, \\ \Delta_3 = (c_2 c_5 \cos x_2 \cos(x_2 - x_3) - c_3 c_4 \cos x_3) x_4 + (c_2 c_3 \cos x_2 \cos x_3 - c_1 c_5 \cos(x_2 - x_3)) x_5 + (c_1 c_4 - c_2^2 \cos^2 x_2) x_6.$$

Из уравнений Эйлера (4) и из формул (2), (3) следует, что

$$\dot{x}_4 = F, \quad (6) \\ \dot{x}_5 = \frac{\partial T}{\partial x_2} + Q_2 = -c_2 \sin x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 - c_5 \sin(x_2 - x_3) \dot{x}_2 \dot{x}_3 - u_1 - u_2 + g c_2 \sin x_2,$$

$$\dot{x}_6 = \frac{\partial T}{\partial x_3} + Q_3 = -c_3 \sin x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3 + c_5 \sin(x_2 - x_3) \dot{x}_2 \dot{x}_3 + u_2 + gc_3 \sin x_3.$$

Отсюда и из уравнений (5) получим, что

$$\dot{x}_5 = -c_2 \sin x_2 \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta^2} - c_5 \sin(x_2 - x_3) \frac{\Delta_2 \Delta_3}{\Delta^2} - u_1 - u_2 + gc_2 \sin x_2, \quad (7)$$

$$\dot{x}_6 = -c_3 \sin x_3 \frac{\Delta_1 \Delta_3}{\Delta^2} + c_5 \sin(x_2 - x_3) \frac{\Delta_2 \Delta_3}{\Delta^2} + u_2 + gc_3 \sin x_3. \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (5)–(8) описывают движение рассматриваемой управляемой системы.

Решение задачи о сближении

Рассмотрим задачу о сближении системы (5)–(8) с целевым множеством в фазовом пространстве системы в заданный конечный момент времени. Предлагается использовать подход к конструированию приближенного решения задачи о сближении, который включает, в частности, конструирование программных управлений, обеспечивающих приведение в конечный момент времени фазового вектора системы в малую окрестность целевого множества. Такое приведение возможно не из любых начальных позиций. В связи с этим актуален вопрос о выделении множества тех позиций, из которых как из исходных возможно приведение системы на целевое множество.

Множество W , составленное из всех таких позиций, – множество разрешимости задачи о сближении – невозможно описать точно с помощью каких-либо аналитических соотношений, приводящих к эффективному приближенному вычислению этого множества.

В рамках доклада используется схема приближенного вычисления множества W [1, 2]. В ее основе лежат попятные во времени пошаговые построения, которые можно рассматривать как пошаговые приближенные вычисления интегральной воронки управляемой системы, представленной в терминах так называемого «обратного времени». Приближенное вычисление W реализуется как вычисление некоторого конечного множества точек \tilde{W} в пространстве позиций (t, x) системы. В докладе также описана процедура конструирования программного управления, обеспечивающего приведение фазового вектора системы из начальной позиции $(t_0, x_0) \in \tilde{W}$ в некоторую малую окрестность целевого множества. Для конкретных значений параметров системы (5)–(8) проведены модельные расчеты множеств разрешимости и соответствующих программных управлений.

Литература

1. В. Н. Ушаков, В. И. Ухоботов, А. В. Ушаков, Г.В. Паршиков // К решению задач о сближении управляемых систем, Труды МИАН, 291, 2015. 276–291
2. В. Н. Ушаков, А. А. Ершов // К решению задач управления с фиксированным моментом окончания, Вестн. Удмуртск. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Компьютерные науки, 26:4, 2016. 543–564

КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ: ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ОРБИТАЛЬНОЕ (ТРАЕКТОРНОЕ) ДВИЖЕНИЕ

Челноков Ю.Н.

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
chelnokovyun@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены в рамках возмущённой пространственной задачи двух тел проблемы регуляризации дифференциальных уравнений абсолютного и относительного орбитальных движений небесных и космических тел. Получены новые общие регулярные кватернионные уравнения возмущённого движения спутника Земли относительно системы координат, связанной с Землёй, в четырёхмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в новых модифицированных переменных. В уравнениях учтены все гармоники гравитационного поля Земли, в состав переменных входят энергия движения спутника и время (использовано преобразование времени Зундмана).

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-21-00218.

Введение

В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полёта) лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущённой пространственной задачи двух тел в декартовых координатах. Эти уравнения вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название «регуляризация» (Леви-Чивита, 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными.

Среди методов регуляризации и регулярных моделей небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных – кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырёхмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменные). Эти методы и модели имеют ряд качественных преимуществ аналитического и вычислительного характеров перед другими методами и моделями.

1. Регуляризация моделей небесной механики и астродинамики

1.1. Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущённой задачи двух тел, восходит к Эйлеру (1765) [1] и Леви-Чивита (Levi-Civita, 1920) [2], которые дали решения одномерной и двумерной задач о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущённой пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем (Kustaanheimo, Stiefel, 1964-1965). В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спиноров: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. В регуляризации Штифеля использована введенная им специальная четырёхмерная матрица, названная им *KS*-матрицей. Регуляризация Кустаанхеймо–Штифеля наиболее полно изложена в широко известной книге Штифеля и Шейфеле (Scheifele) [3] (1971).

В основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела (*KS*-преобразование), обобщающее преобразование Леви-Чивита. Причем это преобразование состоит в переходе от трёхмерного пространства декартовых координат к четырёхмерному пространству новых координат (к четырёхмерным *KS*-переменным). Неоднозначность этого преобразования делает, по мнению Штифеля и Шейфеля, прямой вывод регулярных уравнений в трёхмерном (т.е. пространственном) случае невозможным [3]). Поэтому в своей книге [3] они постулируют матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел, записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита плоского движения, и с помощью нескольких теорем доказывают, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение.

1.2. Вскоре после открытия *KS*-преобразования было рассмотрено использование кватернионов (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) и четырёхмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Однако в своей книге [3] Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав, что «Любая попытка заменить теорию *KS*-матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму». Это утверждение было впервые опровергнуто автором доклада [4–6] (Челноков, 1981, 1984), показавшим, что в действительности кватернионный подход к регуляризации уравнений возмущённой пространственной задачи

двух тел, основанный на использовании кватернионных матриц [4] или кватернионов Гамильтона [5], в отличие от подхода, использующего аппарат KS -матриц Штифеля, позволяет дать ясные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризирующему преобразованию Кустаанхеймо–Штифеля, раскрывает геометрический смысл его неоднозначности и позволяет дать прямой и наглядный вывод более общих регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Так, было показано, что переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от трёхмерных декартовых координат второго тела к четырёхмерным KS -переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся (неголономной) системе координат с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырёхмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), являющихся компонентами кватерниона поворота этой системы координат, с дальнейшей их нормировкой посредством множителя, равного квадратному корню из расстояния от второго тела до центра притяжения. Также было показано, что билинейное соотношение, играющее по словам Штифеля и Шейфеле «основную роль в нашем построении небесной механики», имеет ясный геометрический и механический смысл. Отказ от выполнения этого соотношения позволил автору доклада получить [4, 5] более общие регулярные уравнения.

Позднее (Челноков, 1985, 1992, 1993) идеи кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел были использованы автором доклада для разработки теории кватернионной регуляризации векторного дифференциального уравнения возмущённого центрального движения материальной точки. Так, им были получены регулярные дифференциальные уравнения возмущённого центрального движения материальной точки осцилляторного вида, регулярные для потенциала, являющегося полиномом четвертой отрицательной степени расстояния до центра притяжения (уравнения Кустаанхеймо–Штифеля регулярны лишь для полинома первой отрицательной степени этого расстояния).

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущённой пространственной задачи двух тел с использованием KS -переменных посвящены работы многих учёных: Velte (1978), Vivarelli (1983, 1988, 1991), Шагов (1990); Deprit, Elipe и Ferrer (1994), Vrbik (1995, 1998), Waldvogel (2006, 2008), Saha (2009), Zhao (2015), Roa, Urrutxua и Pelaez (2016), Roa and Pelaez (2016), Breiter и Langner (2017–2019), Ferrer и Crespo (2018), а также работы автора доклада (Челноков 1981–2022).

Отметим статьи известного западного учёного Вальдфогеля (Waldvogel, 2006, 2008), посвящённые кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел. Так, в 2008 году им была опубликована статья [7] под названием «Кватернионы для регуляризации небесной механики: верный (истинный) путь», в которой говорится, что кватернионы «являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике». Отметим, что Вальдфогель [7] признает приоритет автора доклада в области кватернионной регуляризации, говоря об этом в своей статье.

1.3. В работах Штифеля и Шейфеле (1971) [3], Бордовицыной (1984), Бордовицыной и Авдюшева (2007), Fukushima (2005, 2007), Pelaez, Hedo и Rodriguez (2007), Bau, Bombardelli, Pelaez и Lorenzini (2015), Amato, Bombardelli, Bau, Morand и Rosengren (2019), а также Bau и Roa (2020) приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в KS -переменных, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования KS -переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Логиновым и автором доклада (2021) проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трёх тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором доклада (2017, 2018) регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в KS -переменных, принимающих вид регулярных кватернионных уравнений возмущённой пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Эти уравнения показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущённых эллиптических орбит со средним эксцентриситетом – на 4 порядка, для возмущённой эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом – на 7 порядков. Сравнение этих результатов с результатами, приведёнными в книге Бордовицыной, показало, что они в целом согласуются между собой.

2. Регулярные кватернионные уравнения возмущённой пространственной задачи двух тел: относительное движение

Во всех работах по проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущённой пространственной задачи двух тел, известных автору доклада, рассматривается регуляризация уравнений движения второго (изучаемого) тела, описывающих движение этого тела относительно системы координат, движущейся относительно инерциальной системы координат поступательно, т.е. рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения изучаемого тела.

В докладе развиваются результаты, полученные в [8] (Челноков, 2018). Излагаются полученные в рамках возмущённой пространственной задачи двух тел (с использованием теории относительного движения материальной точки) регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущённого движения изучаемого тела относительно системы координат, вращающейся в инерциальной системе координат по произвольно заданному закону, т.е. излагается регуляризация уравнений относительного орбитального

движения изучаемого тела. Также излагаются регулярные кватернионные уравнения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей, принимаемой за первое (центральное) тело. Получены первые интегралы и решение регулярных кватернионных дифференциальных уравнений невозмущенного движения изучаемого тела относительно Земли с использованием функций Штумпфа.

3. Регулярные кватернионные уравнения возмущенного относительного орбитального движения ИСЗ

В докладе предложены регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли (или космического тела) относительно системы координат, связанной с Землей, в KS -переменных и в модифицированных переменных, предложенных докладчиком. В полученных уравнениях относительного возмущенного движения учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Эти уравнения удобны для изучения движения спутника, поскольку многие силы, действующие на спутник, и в первую очередь сила притяжения Земли (потенциал гравитационного поля Земли), зависят от относительных координат местоположения спутника: от географических координат (широты и долготы) спутника, а не от его абсолютных координат в инерциальной системе координат.

Полученные уравнения имеют вид уравнений относительного движения четырехмерного возмущенного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для движения спутника в ньютоновском гравитационном поле Земли под действием возмущающих сил. В этих уравнениях помимо основных переменных, которыми являются KS -переменные или наши модифицированные переменные, используются дополнительные переменные: энергия движения спутника и время. Новая независимая переменная связана с временем дифференциальным соотношением, содержащим расстояние от спутника до центра масс Земли (преобразованием времени Зундмана).

Полученные кватернионные уравнения относительного возмущенного движения спутника в гравитационном поле Земли, в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота, фигурирующая в формуле, описывающей тессеральные и секториальные гармоники потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам, используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время t , а по формулам, не содержащим времени t .

Уравнения возмущенного движения спутника относительно Земли в наших модифицированных переменных имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями этого движения спутника в KS -переменных. Это обусловлено тем, что выражения геоцентрической широты, от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные представляются в двух различных, более компактных симметричных формах в сравнении с ее представлением в KS -переменных.

Заключение

Кватернионный метод регуляризации особенностей типа сингулярностей уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами, с помощью использования для описания орбитального движения переменных Кустаанхеймо–Штифеля или их модификаций уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для возмущенных трёхмерных кеплеровских систем. Новые предложенные регулярные кватернионные уравнения относительного движения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов при исследовании орбитального движения спутника или другого космического тела относительно Земли и прогнозе его относительного движения.

Наш обзор работ в области регуляризации моделей небесной механики и астродинамики дан в [9].

Литература

1. L. Euler. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. 11. 144–151.
2. T. Levi-Civita. Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. 42. 99–144.
3. E.L. Stiefel, G. Scheifele. Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
4. Ю.Н. Челноков. К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. 6. 12–21.
5. Ю.Н. Челноков. О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. 1. 151–158.
6. Ю.Н. Челноков. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
7. J. Waldvogel. Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. 102:1. 149–162.
8. Ю.Н. Челноков. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. 82:6. 721–733.
9. Yu.N. Chelnokov. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). 2022. 43:1. 21–80.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА КОСМИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Яскевич А.В.¹, Леонтьев В.А.²

1 - ПАО Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева, Россия

2 - Центральный НИИ робототехники и технической кибернетики (ЦНИИ РТК), Россия

andrey.yaskevich@rsce.ru

Аннотация. В докладе рассматриваются уравнения динамики исполнительного механизма космического манипулятора, которые описывают движение его звеньев как системы твердых тел, а упругие деформации каждого звена моделируются с помощью цепочек абсолютно твердых тел, связанных вращательными псевдо-шарнирами с сосредоточенной жесткостью. Первый тип уравнений интегрируется явным методом, в жесткие уравнения второго типа – неявным линейным методом. Такие уравнения отличаются относительной простотой, вычислительной эффективностью и достаточной точностью моделирования упругих деформаций звеньев, не зависящей от изменения граничных условий при изменении конфигураций манипулятора в процессе его движения.

Введение

Исполнительный механизм космического манипулятора приводится в движение электродвигателями и редукторами в его шарнирах. Управляющие моменты создаются за счет угловых деформаций редукторов с люфтами, передающих вращение к звеньям от электродвигателей, управляемых по скорости цифровыми регуляторами. Сигналы на входы регуляторов формируются программой управления верхнего уровня, которая преобразует требуемые декартовы скорости в обобщенные. При моделировании динамики космического манипулятора на расчет движения его исполнительного механизма затрачивается основной объем вычислений. Это определило большое количество публикаций, посвященных разработке конечномерных математических моделей, которые описывают динамику деформации отдельных звеньев и механизма в целом обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).

Наиболее распространенный подход при описании упругих свойств отдельных звеньев основан на использовании обобщенных координат, определенных на некоторой системе базисных функций, предварительно полученной при фиксированных граничных условиях. Если используются динамические модели звеньев на основе метода конечных элементов, то базисные функции не изменяются, но размерность и жесткость дифференциальных уравнений требуют большого объема вычислений. Часто упругие деформации звеньев описываются линейной комбинацией функций формы собственных колебаний балки с одним зажатым и одним свободным концом или балки с обоими зажатými концами. Набор этих собственных форм может быть дополнен независимыми от инерции функциями квазистатических деформаций. В этом случае число базисных функций, применяемых для описания деформаций каждого звена, обычно невелико, что позволяет сформировать экономичные и нежесткие ОДУ. Однако коррекция вида функций формы звеньев при изменении конфигурации манипулятора не производится из-за необходимости выполнения большого объема вычислений. Эти факторы в принципе ограничивают точность моделирования.

Другой подход основан на представлении распределенных упругих свойств деформируемого механизма манипулятора в виде твердотельных конечных элементов (ТКЭ) – цепочки абсолютно твердых тел, связанных псевдо шарнирами с сосредоточенной жесткостью. При этом матричные коэффициенты уравнений динамики (УД) м.б. рассчитаны с помощью известных алгоритмов для систем тел. Получаемые таким способом динамические модели являются нелинейными и имеют широкий спектр частот собственных колебаний. Для их интегрирования необходимо использовать нелинейные неявные методы. Тем не менее, их существенным достоинством является возможность учета деформаций практически всех звеньев вне зависимости от их длины, а также их соединений с основанием и переносимым полезным грузом.

В докладе рассматривается модель динамики исполнительного механизма космического манипулятора с деформируемыми звеньями, основанная на комбинации этих двух подходов.

Расчетная схема исполнительного механизма

В данной работе расчетная схема динамики исполнительного механизма манипулятора представляет собой совокупность $N + 1$ простых кинематических цепей (ПКЦ). Первая из них, с индексом 0, описывает движение звеньев как системы N твердых тел. В ее управляемых реальных шарнирах действуют внутренние активные моменты, обусловленные угловыми деформациями редукторов. На ее последнее звено, например, полезный груз действуют внешние контактные силы и моменты. Изгибные и крутильные деформации звеньев при передаче сил и моментов вдоль 0-й ПКЦ описываются с помощью цепочек твердых тел, соединенных фиктивными вращательными шарнирами с сосредоточенной жесткостью. Они представляются собой ПКЦ с индексами $k = 1, N$. На первый ТКЭ каждой из них действует момент редуктора привода соответствующего звена как твердого тела, а на конец последнего – сила и момент, действующие на звено со стороны

последующего шарнира. УД деформаций звеньев являются жесткими, но входящие в них инерционные моменты, определяемые квадратами скоростей, на несколько порядков меньше, чем моменты реакций в фиктивных шарнирах с сосредоточенной жесткостью. Это позволяет использовать для их интегрирования линейные неявные методы. Достоинством предлагаемого подхода является независимость моделей деформаций звеньев от изменяющихся граничных условий и относительная простота их создания на основе единого алгоритма расчета УД систем тел.

Декартовы перемещения и скорости движения звеньев как твердых тел относительно основания и декартовы перемещения и скорости их ТКЭ вычисляются на основе обобщенных координат и скоростей в реальных и фиктивных шарнирах, получаемых в результате интегрирования УД всех ПКЦ. Суммы этих величин определяют движение всего исполнительного механизма с деформируемыми звеньями.

Параметры ТКЭ-моделей деформаций звеньев получаются на основе разбиения их конструкции на однородные участки. Эти параметры м.б. приведены в фирменных описаниях изготовителя [1] или в открытых публикациях [2, 3]. Если в длинных звеньях манипулятора корпуса входного и выходного шарниров соединены однородными трубами, то деформации последних на изгиб и кручение при совместном действии на их конце момента и поперечной силы с хорошей точностью описываются на основе квадратурных дискретных моделей с тремя 3-степенными фиктивными шарнирами вращения [4].

Уравнения динамики ПКЦ и их интегрирование

Динамика N_0 звеньев манипулятора как твердых тел ($k=0$) и динамика N_k ТКЭ k -го звена манипулятора ($k=\overline{1, N_0}$) описываются уравнениями в замкнутой форме

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{A}_k \ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}_k \dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{q}_k = \mathbf{b}_k, \quad (1)$$

в которых \mathbf{q}_0 – вектор угловых перемещений в управляемых шарнирах манипулятора, а \mathbf{q}_k – векторы угловых деформаций в фиктивных шарнирах, соединяющих твердотельные КЭ. Матрицы коэффициентов демпфирования \mathbf{C}_k и жесткости \mathbf{K}_k в фиктивных шарнирах являются диагональными. Матрица \mathbf{A}_k обобщенной инерции и вектор \mathbf{b}_k обобщенных инерционных и активных сил вычисляются по рекуррентному алгоритму составного тела [5, 6], представленному ниже в компактной форме с помощью блочных матриц

$$j = \overline{1, N_k} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{j,k}^l = \mathbf{P}_{j,k}^{rel} \\ \mathbf{f}_{j,k}^{l,l} = \mathbf{M}_{j,k} \mathbf{a}_{j,k}^l \\ i = \overline{j+1, N_k} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{i,k}^l = \mathbf{B}_{i,k} \mathbf{a}_{j-1,k}^l \\ \mathbf{f}_{i,k}^l = \mathbf{M}_{i,k} \mathbf{a}_{i,k}^l \end{array} \right. \\ i = \overline{N_k, j} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_k(i, j) = \mathbf{P}_{i,k}^{rel T} \mathbf{f}_{i,k}^{l,l} \\ \mathbf{f}_{i-1,k}^{l,l} = \mathbf{f}_{i-1,k}^{l,l} + \mathbf{B}_{i,k}^T \mathbf{f}_{i,k}^{l,l}, i > j \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad j = \overline{1, N_k} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{j,k}^n = \mathbf{B}_{j,k} \mathbf{a}_{j-1,k}^n + \boldsymbol{\eta}_{j,k} \\ \mathbf{f}_{j,k}^{l,n} = -\mathbf{M}_{j,k} \mathbf{a}_{j,k}^n - \mathbf{s}_{j,k}, \mathbf{f}_{j,k}^{n,0} = \mathbf{f}_{j,k}^{l,n} \\ \mathbf{f}_{N_k,k}^{l,n} = \mathbf{f}_{N_k,k}^{l,n} + \mathbf{f}_k^E \\ j = \overline{N_k, 1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_k(j) = \mathbf{P}_{j,k}^{rel T} \mathbf{f}_{j,k}^{l,n} + m_{j,k}^J \\ \mathbf{f}_{j-1,k}^{l,n} = \mathbf{f}_{j-1,k}^{l,n} + \mathbf{B}_{j,k}^T \mathbf{f}_{j,k}^{l,n}, j > 1 \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad (2)$$

где j – тело характеризуют блочные $\mathbf{a}_j = [\dot{\mathbf{v}}_j^T, \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^T]^T - (6 \times 1)$ – вектор ускорений, $\mathbf{f}_{j,k}^l - (6 \times 1)$ – вектор инерционных сил и моментов (верхние индексы l и n обозначают линейные и нелинейные компоненты); $\mathbf{P}_{j,k}^{rel} = [\mathbf{0}, \mathbf{R}_{j,k}^{rel T}]^T - (6 \times 1)$ – матрица парциальных скоростей; $\mathbf{M}_{j,k} - (6 \times 6)$ – матрица инерции; $\boldsymbol{\eta}_j - (6 \times 1)$ – вектор ускорений, обусловленных скоростями предшествующих тел; $\mathbf{s}_j - (6 \times 1)$ – вектор инерционных сил и моментов, обусловленных угловой скоростью текущего тела; $\mathbf{B}_j - (6 \times 6)$ – матрица перехода от СК предшествующего тела к СК текущего; $\mathbf{f}_k^E - (6 \times 1)$ – вектор внешних сил и моментов, действующих на конце последнего N_k -го тела k -й ПКЦ; $m_{j,0}^J$ – активный момент в j -м управляемом шарнире, создаваемый деформируемым редуктором (скалярная величина), для фиктивных шарниров $m_{j,k}^J = 0, k > 0$.

Для определения суммарного (6×1) – вектора $\mathbf{f}_{j,0}^S$ сил и моментов, действующих в шарнирах звеньев манипулятора, используются прямой и обратный рекуррентные алгоритмы

$$j = \overline{1, N_0} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{j,0}^l = \mathbf{B}_{j,0} \mathbf{a}_{j-1,0}^l + \mathbf{P}_{j,0}^{rel} \ddot{\mathbf{q}}_{j,0} \\ \mathbf{f}_{j,0}^l = -\mathbf{M}_{j,0} \mathbf{a}_{j,0}^l + \mathbf{f}_{j,0}^{n,0} \end{array} \right. , \quad j = \overline{N_0, 1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_{j-1,0}^{S(j)} = -\mathbf{P}_{j,0}^{rel} m_{j,0}^J + \mathbf{N}_{j,0}^R (\mathbf{f}_{j,0}^l + \mathbf{f}_{j,0}^S) \\ \mathbf{f}_{j-1,0}^S = \mathbf{B}_{j,0}^T \mathbf{f}_{j,0}^{S(j)} \end{array} \right. , \quad (3)$$

где $\mathbf{N}_{j,k}^R$ – постоянная (6×6) – матрица, определяемая типом шарнира; вектор $\mathbf{f}_{j,0}^{n,0}$ вычислен ранее при расчете вектора \mathbf{b}_0 в (2).

Интегрирование УД исполнительного механизма с твердыми звеньями выполняется явным методом Эйлера, а УД ТКЭ отдельных звеньев неявным 2-шаговым линейным методом [7] с величиной шага h

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k,t+h} &= \mathbf{q}_{k,t} + h \left(\frac{7-\lambda}{6} \dot{\mathbf{q}}_{k,t} + \frac{\lambda-1}{6} \dot{\mathbf{q}}_{k,t-h} \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{4-\lambda}{6} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t+h} + \frac{\lambda}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t} \right), \\ \dot{\mathbf{q}}_{k,t+h} &= \frac{4-\lambda}{3} \dot{\mathbf{q}}_{k,t} + \frac{\lambda-1}{3} \dot{\mathbf{q}}_{k,t-h} + h \left(\frac{4-\lambda}{6} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t+h} + \frac{\lambda}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В результате подстановки (4) в (1) получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора $\ddot{\mathbf{q}}_{k,t+h}$ ускорений деформации k -го звена

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_k + \mathbf{C}_k h \frac{4-\lambda}{6} + \mathbf{K}_k \frac{h^2(4-\lambda)}{12} \right\} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t+h} &= \\ = \mathbf{b}_{k,t+h} - \mathbf{C}_k \left[\frac{4-\lambda}{3} \dot{\mathbf{q}}_{k,t} + \frac{\lambda-1}{3} \dot{\mathbf{q}}_{k,t-h} + \frac{h\lambda}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t} \right] - \mathbf{K} \left[\mathbf{q}_{k,t} + h \left(\frac{7-\lambda}{6} \dot{\mathbf{q}}_{k,t} + \frac{\lambda-1}{6} \dot{\mathbf{q}}_{k,t-h} \right) + \frac{h^2\lambda}{4} \ddot{\mathbf{q}}_{k,t} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Матричные множители перед $\ddot{\mathbf{q}}_{k,t+h}$ являются постоянными и м.б. обращены до начала интегрирования, что сокращает объем вычислений на каждом шаге. После определения ускорений в соответствии с (4) вычисляются деформации $\mathbf{q}_{k,t+h}$ и их скорости $\dot{\mathbf{q}}_{k,t+h}$.

В ТКЭ-моделях деформаций отдельных звеньев углы в фиктивных шарнирах м.б. только малыми величинами. Управляющие моменты, создаваемые редукторами, определяются их переменной жесткостью и разностью больших углов поворота валов электродвигателей и звеньев в реальных управляемых шарнирах. Линеаризованные модели электродвигателей и редукторов с переменным коэффициентом жесткости м.б. введены в ТКЭ-модель всего исполнительного механизма, в которой малые углы деформации редукторов определяются как разности больших углов. Но численное интегрирование таких УД с помощью соотношений (4), (5) является неустойчивым. Вследствие этого УД механизма как твердых тел и УД деформаций звеньев рассматриваются и интегрируются раздельно.

В докладе демонстрируется применение описанных выше УД исполнительного механизма в составе модели космического манипулятора, подобного манипулятору SSRMS Международной космической станции. Расчетная схема механизма имеет 7 управляемых и 52 деформационных степени свободы. Разработанная модель является развитием работы [8] и м.б. применена при воспроизведении в реальном времени динамики причаливания космических аппаратов в составе гибридных [9] или математических стендов.

Заключение

В докладе представлены уравнения динамики исполнительного механизма космического манипулятора, которые отличаются относительной простотой, вычислительной эффективностью и достаточной точностью моделирования упругих деформаций звеньев, не зависящей от изменения граничных условий при изменении конфигураций манипулятора в процессе его движения.

Литература

1. Payload Deployment and Retrieval System Simulation Database. SPAR-RMS-TM.2163. – Bramton: SPAR Aerospace Ltd., 1996. 389.
2. Nguen P.K., Ravindran R., Carr R., Gossain D.M. Structural flexibility of the Shuttle Remote Manipulator System mechanical arm. // AIAA Guidance and Control Conference. AIAA Paper 82-1536-CP, 1982.
3. Nguen P.K., Hughes P.C. Teleoperation: from the Space Shuttle to the Space Station // Progress in Astronautics and Aeronautics: Teleoperation and Robotics in Space. – Washington: AIAA Inc., 161, 1997. 353-410.
4. В.А. Леонтьев. Квадратурные дискретные модели протяженных звеньев манипуляторов. Часть 1. Разработка моделей с сосредоточенными параметрами. // Робототехника и техническая кибернетика, 1, 2019. 34-45.
5. Степаненко Ю.А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью. – В сб. «Механика машин», 44., 1974. 77 – 88.
6. Walker M.W., Orin D.E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms. Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 104, 1982. 205 – 211.
7. V.A. Leontyev. Direct time integration algorithm with controllable numerical dissipation for structural dynamics: Two-step Lambda method. // Applied Numerical Mathematics. 60, 2010. 277-292.
8. Яскевич А.В. Математическая модель космического манипулятора для полунатурной отработки операций причаливания полезного груза. // Изв. РАН. Теория и системы управления, 4, 2004. 157-176.
9. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Гибридное моделирование причаливания космических аппаратов. // Изв. РАН. Теория и системы управления. №4. 2020 г. С 136 – 150.

СЕКЦИЯ I

Подсекция I-1

Аналитическая механика и устойчивость движения

УЛУЧШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ ТОРМОЖЕНИЕМ НА ОПОРНЫХ ЭЛАСТИЧНЫХ КОЛЕСАХ НЕОДИНАКОВЫХ СВОБОДНЫХ РАДИУСОВ ПО ОСЯМ

Балакина Е.В., Сергиенко И.В., Сарбаев Д.С., Кочетов М.С.

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

fahrgestell2011@yandex.ru

Аннотация. Цель исследования – совершенствование подходов к выбору свободных радиусов опорных эластичных колес по осям транспортного средства с автоматизированной системой управления торможением для расширения возможностей улучшения его устойчивости движения в режиме торможения. Установлено, что для улучшения устойчивости движения машины значения свободных радиусов передних управляемых колес должны быть минимальными с учетом ограничений по их нагрузочной способности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00004, <https://rscf.ru/project/23-21-00004/>.

Введение

Большинство транспортных средств (ТС) на эластичных колесах движутся с высокими скоростями по твердой опорной поверхности (легковые и грузовые автомобили, автобусы). Они в первую очередь должны удовлетворять требованиям активной безопасности, т.е. в их конструкцию должны быть заложены свойства уменьшать вероятность столкновений. Эти свойства объединяют в себе устойчивость движения (траекторную и курсовую), управляемость и тормозную динамику. Для улучшения этих свойств в наиболее опасных режимах – прямолинейного и криволинейного торможения – скоростные ТС снабжают автоматическими системами управления торможением. Эти системы по заданному алгоритму поддерживают величину продольного скольжения в пятне контакта каждого колеса с опорной поверхностью в пределах критического значения (0,15...0,25), при котором коэффициент сцепления пары трения колесо-опорная поверхность имеет большее значение по сравнению с коэффициентом трения скольжения, приближенное к максимально возможному для движущегося эластичного колеса.

Скоростные ТС управляются передними колесами и имеют все колеса с одинаковыми свободными радиусами. При этом существуют некоторые тихоходные машины с колесами неодинаковых свободных радиусов по передней и задней осям с целью улучшения свойства проходимости. Однако на скоростных ТС, для которых одной из главных задач при их создании является обеспечение не проходимости, а устойчивости движения на высоких скоростях, опорные колеса разных свободных радиусов не используют. При этом одинаковый свободный радиус всех колес проектируемого ТС выбирают только на основе требуемых размеров, соответствующих заданной нагрузочной способности колеса. Такая унификация конструкции оправдана на машинах, не снабженных автоматизированной системой управления торможением, в связи с быстрым нарастанием продольного скольжения в контактах и блокирования опорных колес при торможении.

Авторами выявлено, что при автоматическом торможении ТС, вследствие искусственного ограничения нарастания продольного скольжения и отсутствия блокирования колес, некоторые факторы, связанные с радиусами колес, успевают повлиять на параметры траектории машины. Это открывает резервы для улучшения устойчивости движения ТС с автоматизированной системой управления торможением за счет выбора эластичных колес с неодинаковыми свободными радиусами по осям машины. Возможность использования этих резервов обеспечивается существованием 30%-го разброса радиусов эластичных колес одной и той же нагрузочной способности.

Цель исследования – совершенствование подходов к выбору свободных радиусов опорных эластичных колес по осям ТС с автоматизированной системой управления торможением для расширения возможностей улучшения его устойчивости движения в режиме торможения.

Методы и подходы

Для достижения цели исследования авторами была создана математическая модель движения двухосного ТС в разных режимах с учетом источников [1–10] и создана ее программная реализация в виде программного продукта Stabauto4 для оценки параметров устойчивости движения машины с колесами разных свободных радиусов при выполнении стандартных испытательных маневров. Проведены расчетные эксперименты, учитывающие явления увода эластичных колес, колебаний управляемых колес (УК), сцепного взаимодействия колес с опорной поверхностью, а также продольного и поперечного перераспределения нормальных нагрузок в режимах движения. Объектом исследования было ТС категории М1 с колесами со свободными радиусами 0,308 м.

Были рассмотрены следующие стандартные маневры: «вход в поворот радиуса 35м», «прямолинейное торможение на поверхности с высоким коэффициентом сцепления», «прямолинейное торможение на поверхности с пониженным коэффициентом сцепления», «прямолинейное торможение на поверхности с разными коэффициентами сцепления («микст»)», «торможение в повороте». При указанных маневрах

присутствуют силы, нарушающие устойчивое и управляемое движение ТС. Причина влияния неодинаковости свободных радиусов опорных колес по осям скрыта в характере перераспределения нагрузок на колеса при выполнении маневра «Торможение в повороте». Имеет место как продольное, так и поперечное перераспределение нормальных нагрузок на колеса. Боковые силы распределяются по опорным колесам пропорционально нормальным нагрузкам. Поскольку передние колеса являются управляемыми, то на них действуют моменты M_x и M_y от соответствующих продольных и боковых реакций опорной поверхности на плечах l_0 и λ , как показано на рисунках 1 и 2.

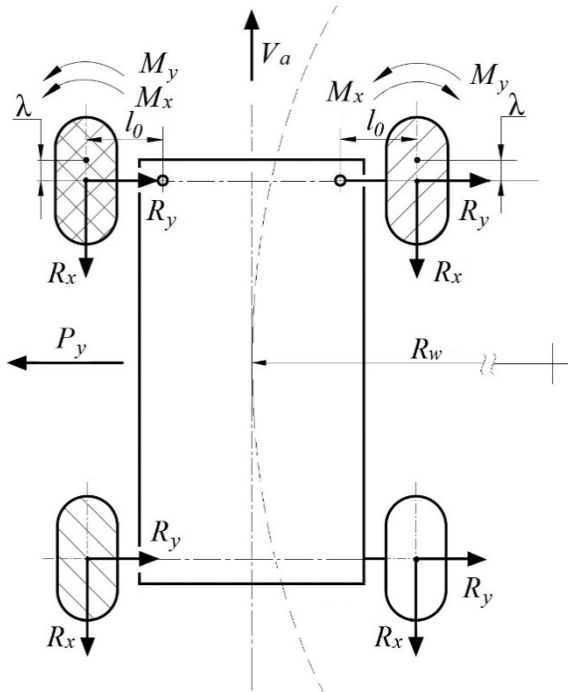


Рис. 1. Схема действия сил и моментов на нагруженные и разгруженные колеса ТС.

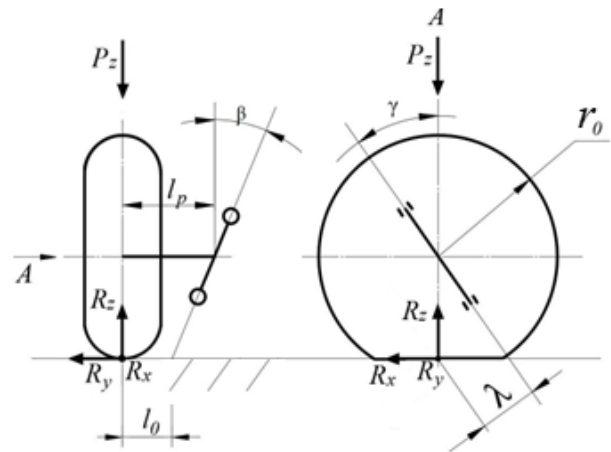


Рис. 2. Схемы появления моментов сил на УК ТС.

Указанные моменты зависят от значений свободных радиусов r_0 :

$$M_x = P_z \cdot \varphi_x \cdot l_0; \quad M_y = R_y \cdot \lambda; \quad l_0 \approx l_p - r_0 \cdot \sin \beta; \quad \lambda \approx r_0 \cdot \sin \gamma,$$

где P_z – нормальная реакция опорной поверхности; φ_x – коэффициент сцепления в продольном направлении; l_0 – плечо обкатки; R_y – боковая реакция опорной поверхности; λ – плечо; l_p – длина цапфы; β – угол поперечного наклона оси поворота УК; r_0 – свободный радиус колеса; γ – угол продольного наклона оси поворота УК.

Таким образом, момент M_x с увеличением свободного радиуса УК уменьшается, а момент M_y – наоборот, растет. Какой из этих процессов идет быстрее, тот и определяет влияние свободного радиуса УК на отклонения машины от заданной траектории движения. Моменты M_x на УК направлены в противоположные стороны и компенсируют друг друга. Моменты M_y на УК направлены в одну стороны, стремясь возвратить повернутые колеса в исходное, нейтральное положение (шинная стабилизация УК).

При выполнении ТС одновременно торможения и поворота самым нагруженным оказывается переднее колесо, внешнее по отношению к центру поворота. Следовательно, в его контакте с опорной поверхностью самые большие как нормальная, так и боковая реакции. При этом моменты M_x и M_y на нем складываются, что ухудшает ситуацию по отклонению машины от заданной траектории движения. При этом момент M_x имеет в процессе торможения всегда большое значение, а момент M_y все время падает вследствие уменьшения боковой силы центробежного происхождения, зависящей от скорости ТС.

Это объясняет влияние значения величины свободного радиуса УК на устойчивость движения ТС.

В процессе торможения ТС его скорость все время уменьшается, и боковая сила центробежного происхождения, зависящая от этой скорости, также уменьшается. Вследствие этого доля участка с трением

покоя в пятне контакта, которая расходуется на реализацию боковой реакции опорной поверхности, тоже убывает. В результате коэффициент сцепления в продольном направлении Φ_x увеличивается, что должно уменьшать тормозной путь ТС S_b . Но этого не происходит при увеличении свободных радиусов УК. Объясняется это следующим. Коэффициент сцепления в продольном направлении в наибольшей степени зависит от продольного скольжения колеса s_x : $\Phi_x = f(s_x)$. При торможении $0 < s_x \leq 1$. Как известно, при торможении принимают

$$s_x = \frac{V_a - \omega \cdot r_r}{V_a},$$

где V_a – скорость ТС; ω – угловая скорость колеса; r_r – радиус качения колеса.

При увеличении свободного радиуса колеса s_x нарастает медленнее, что приводит к уменьшению текущих значений коэффициента сцепления и росту тормозного пути ТС. А поскольку при одновременном торможении и повороте ТС, вследствие указанного ранее перераспределения нагрузок, «главным» оказывается переднее колесо, внешнее по отношению к центру поворота, а следующим – другое переднее колесо, то уменьшение их свободного радиуса приводит к снижению тормозного пути машины.

На основании разработанной методики получены целевые функции для расчета относительных линейных отклонений и пути проектируемого ТС:

$$LO^* = 1,627 - 0,711 \cdot e^{-0,11188 \cdot K_{r0}^{36,13}}; S^* = \frac{0,9822324 + 0,0008241 \cdot K_{r0}^{107,989}}{1 + 0,000667 \cdot K_{r0}^{107,989}},$$

где K_{r0} – коэффициент конструктивного изменения свободных радиусов передних колес; LO^* , S^* – относительные линейные отклонения и путь ТС.

Выводы

1. Для улучшения устойчивости движения и тормозной динамики ТС значения свободных радиусов передних УК должны быть минимальными с учетом ограничений по их нагрузочной способности.
2. Значения свободных радиусов задних колес ТС не оказывают видимого влияния на его устойчивость движения и тормозную динамику.
3. Применение разработанной методики для рассматриваемого объекта позволило улучшить его устойчивость движения на 10%.

Литература

1. Балабин, И.В. Колеса и шины для мобильных машин / И.В. Балабин, И.С. Чабунин. – М.: Издательство «Спутник +», 2019. – 948с.
2. Балакина, Е.В. Колеса разного радиуса на разных осях автомобиля / Е.В. Балакина, И.В. Сергиенко // Автомобильная промышленность. - 2021. - № 7. - С. 12-15.
3. Балакина, Е.В. Методика выбора размеров колес на разных осях автомобиля с АБС по критерию улучшения тормозной динамики / Е.В. Балакина, И.В. Сергиенко // Автомобильная промышленность. - 2022. - № 2. - С. 23-27.
4. Балакина, Е.В. Методика выбора размеров колес на разных осях автомобиля с АБС по критерию улучшения траекторной устойчивости при торможении / Е.В. Балакина, И.В. Сергиенко // Автомобильная промышленность. - 2022. - № 1. - С. 12-15.
5. Балакина, Е.В. Расчет коэффициента сцепления устойчивого эластичного колеса с твердой опорной поверхностью при наличии боковой силы / Е.В. Балакина // Трение и износ. – 2019. – Т. 40, №6. – С. 756-765.
6. Петрушов, В.А. Автомобили и автопоезда: Новые технологии исследования сопротивлений качения и воздуха. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2008. – 352 с.
7. Пожидаев, С.П. Экспериментальная проверка взаимосвязи крутящего момента и полной окружной силы эластичного колеса / С.П. Пожидаев, Г.В. Шкаровский // Автомобильная промышленность. – 2019. – №9 – С.8-13.
8. Тарасик, В.П. Теория движения автомобиля: Учебник для вузов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2022. – 576 с.
9. Pacejka H.B. (2012) Tire and Vehicle Dynamics (Published by Elsevier Ltd, USA), 632 p.
10. Reza N. Jazar. (2008) Vehicle Dynamics: Theory and Application (Springer Science + Business Media), LLC, 2008, 1015 p.

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Бардин Б.С.^{1,2}

1 - Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

2 - Институт машиноведения им. А.А. Благодярова РАН, Москва, Россия
bsbardin@yandex.ru

Аннотация. Предложен метод построения канонического преобразования, позволяющего ввести локальные переменные в окрестности периодической траектории автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Указан алгоритм построения данного канонического преобразования в виде сходящихся рядов по степеням локальных переменных. Рассмотрен вопрос о применении данного алгоритма в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений.

Работа выполнена в Московском авиационном институте за счет средств гранта РФФИ № 22-21-00729.

Введение

Для исследования движения гамильтоновой системы в окрестности ее периодической траектории удобно использовать подходящим образом выбранные *локальные канонические переменные*, описывающие касательное и нормальное возмущения этой траектории. Известно, что такие переменные всегда существуют [1, 2]. Однако, в конкретных задачах механики построение канонической замены, позволяющей ввести локальные переменные, часто представляет собой непростую задачу. Одним из возможных способов введения локальных переменных является переход к таким каноническим координатам и импульсам, которые на многообразии периодических движений системы являются переменными действие-угол. Этот подход был предложен в [3] и позволил решить целый ряд задач об орбитальной устойчивости маятниковых движений в динамике твердого тела [4–7]. Вместе с тем, применение указанного метода, как правило, возможно в случаях, когда исследуемое периодическое решение имеет явное аналитическое представление. В [8] был разработан более общий метод введения локальных переменных, основанный на построении линейной по нормальным возмущениям канонической замены переменных. Хотя данный метод позволяет решать значительно более широкий круг задач об орбитальной устойчивости, в ряде случаев и его применение не представляется возможным из-за появления сингулярности в коэффициентах линейной замены. Чтобы избежать сингулярности, можно попытаться искать подходящую замену переменных в классе нелинейных канонических преобразований. Такой подход применялся в [9] для случая, когда исследуемое периодическое решение принадлежит двумерной инвариантной гиперплоскости в фазовом пространстве гамильтоновой системы.

В данной работе предложен метод построения канонического преобразования, позволяющего ввести локальные переменные в окрестности периодической траектории автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Этот метод может применяться для исследования движения в окрестности любой регулярной периодической орбиты.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Гамильтона, которая описывает движение механической системы с двумя степенями свободы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i} \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Предполагается, что функция Гамильтона H явно от времени не зависит.

Пусть система (1) допускает периодическое решение

$$q_i = f_i(t), \quad p_i = g_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

В общем случае период решения (2) зависит от начальных условий. Без ограничения общности можно считать, что этот период равен 2π . Решение (2) задает в фазовом пространстве системы (1) замкнутую траекторию – *периодическую орбиту*. Далее будем считать, что гамильтониан H является аналитической функцией в окрестности периодического решения (2).

В окрестности периодического решения (2) можно ввести новые переменные ξ, x, η, y так, что это решение запишется в виде [1,2]

$$\xi = t + \xi(0), \quad x = \eta = y = 0. \quad (3)$$

Введенные таким образом переменные описывают поведение траекторий системы (1) вблизи

исследуемой периодической орбиты и называются *локальными переменными*.

Локальные переменные можно ввести не единственным образом. Замену переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow \xi, x, \eta, y$ будем искать в классе канонических, 2π -периодических по ξ и аналитических по x, η, y замен переменных. Ниже будет кратко изложен алгоритм построения такой канонической замены.

Введение локальных переменных

Обозначим через $\mathbf{z} = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T$ вектор исходных канонических переменных. Учитывая, что в новых переменных периодическое решение (2) принимает вид (3), искомую замену следует искать в виде

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_*(\xi) + \mathbf{Z}(\xi, x, \eta, y), \quad (4)$$

где $\mathbf{z}_*(\xi) = (f_1(\xi), f_2(\xi), g_1(\xi), g_2(\xi))^T$, а вектор-функция $\mathbf{Z}(\xi, x, \eta, y)$ обращается в ноль при $x = \eta = y = 0$. Из последнего следует, что в окрестности периодического решения (3) вектор-функцию $\mathbf{Z}(\xi, x, \eta, y)$ можно представить в следующей форме

$$\mathbf{Z}(\xi, x, \eta, y) = \mathbf{z}_x(\xi)x + \mathbf{z}_\eta(\xi)\eta + \mathbf{z}_y(\xi)y + \tilde{\mathbf{Z}}(\xi, x, \eta, y), \quad (5)$$

где разложение $\tilde{\mathbf{Z}}(\xi, x, \eta, y)$ в ряд по степеням переменных x, η, y не содержит членов ниже второй степени.

Коэффициенты при линейных членах в (5) нужно выбрать так, чтобы не нарушить каноничности замены (4) и при этом избежать сингулярности. Можно показать, что следующие выражения для коэффициентов $\mathbf{z}_x(\xi), \mathbf{z}_\eta(\xi), \mathbf{z}_y(\xi)$ удовлетворяют этим требованиям

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_x(\xi) &= \frac{1}{V(\xi)} \left(\frac{df_2}{d\xi}, -\frac{df_1}{d\xi}, -\frac{dg_2}{d\xi}, \frac{dg_1}{d\xi} \right)^T, \\ \mathbf{z}_\eta(\xi) &= \frac{1}{V^2(\xi)} \left(-\frac{dg_1}{d\xi}, -\frac{dg_2}{d\xi}, \frac{df_1}{d\xi}, \frac{df_2}{d\xi} \right)^T, \\ \mathbf{z}_y(\xi) &= \frac{1}{V(\xi)} \left(\frac{dg_2}{d\xi}, -\frac{dg_1}{d\xi}, \frac{df_2}{d\xi}, -\frac{df_1}{d\xi} \right)^T, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$V^2(\xi) = \frac{d\mathbf{z}_*^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{z}_*}{d\xi} = \left(\frac{df_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{df_2}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dg_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dg_2}{d\xi} \right)^2. \quad (7)$$

Выражение (7) очевидно не обращается в ноль, поэтому выражения (6) не содержат сингулярности.

Нелинейную вектор-функцию $\tilde{\mathbf{Z}}(\xi, x, \eta, y)$ нужно выбрать так, чтобы удовлетворить условию каноничности замены (4). С этой целью будем искать ее в виде, аналогичном виду линейной части (5)

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\xi, x, \eta, y) = \mathbf{z}_x(\xi)X(\xi, x, \eta, y) + \mathbf{z}_\eta(\xi)G(\xi, x, \eta, y) + \mathbf{z}_y(\xi)Y(\xi, x, \eta, y), \quad (8)$$

где разложения скалярных функций X, Y, G ряды по степеням x, η, y не содержат членов ниже второй степени.

Можно показать, что условие каноничности замены (4) будет выполнено, если положить $X = Y = 0$, а функция $G(\xi, x, \eta, y)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A(\xi)G^2(\xi, x, \eta, y) + [V^4(\xi) + V(\xi)(B(\xi)x + C(\xi)y) + A(\xi)\eta]G(\xi, x, \eta, y) + \\ + V(\xi)(B(\xi)x + C(\xi)y)\eta + \frac{1}{2}A(\xi)\eta^2 - \frac{1}{2}A(\xi)V^2(\xi)(x^2 + y^2) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \frac{dg_1}{d\xi} \frac{d^2f_1}{d\xi^2} + \frac{dg_2}{d\xi} \frac{d^2f_2}{d\xi^2} - \frac{df_1}{d\xi} \frac{d^2g_1}{d\xi^2} - \frac{df_2}{d\xi} \frac{d^2g_2}{d\xi^2}, \\ B(\xi) &= \frac{df_1}{d\xi} \frac{d^2f_2}{d\xi^2} + \frac{dg_2}{d\xi} \frac{d^2g_1}{d\xi^2} - \frac{df_2}{d\xi} \frac{d^2f_1}{d\xi^2} - \frac{dg_1}{d\xi} \frac{d^2g_2}{d\xi^2}, \\ C(\xi) &= \frac{df_1}{d\xi} \frac{d^2g_2}{d\xi^2} + \frac{dg_1}{d\xi} \frac{d^2f_2}{d\xi^2} - \frac{df_2}{d\xi} \frac{d^2g_1}{d\xi^2} - \frac{dg_2}{d\xi} \frac{d^2f_1}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, канонические локальные координаты в окрестности периодической орбиты могут быть введены при помощи следующей замены

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_*(\xi) + \mathbf{z}_x(\xi)x + \mathbf{z}_\eta(\xi)\eta + \mathbf{z}_y(\xi)y + \mathbf{z}_\eta(\xi)G(\xi, x, \eta, y), \quad (11)$$

где функция $G(\xi, x, \eta, y)$ является решением уравнения (9). Эта функция является аналитической по переменным x, η, y и 2π -периодической по переменной ξ . Из (9) нетрудно получить разложение этой функции в ряд по степеням x, η, y до членов сколь угодно высокого порядка.

Об исследовании орбитальной устойчивости периодических движений

Периодические решения автономных гамильтоновых систем, как правило, неустойчивы по Ляпунову. Однако, они могут быть *орбитально* устойчивы. Задача об орбитальной устойчивости периодических движений представляет большой интерес для теоретической и прикладной механики. Современные методы теории устойчивости гамильтоновых систем, основанные на технике нормальных форм и теории КАМ [10–14], позволяют получать строгие выводы об орбитальной устойчивости движений, описываемых решением вида (2). Для применения указанных методов необходимо ввести возмущения в окрестности периодической орбиты. Это можно сделать при помощи замены переменных (11). После выполнения указанной замены разложение функции Гамильтона задачи в ряд по степеням переменных x, η, y имеет вид

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \tilde{\Gamma}, \quad (12)$$

где

$$\Gamma_2 = \eta + \varphi_2(\xi, x, y), \quad \Gamma_3 = \varphi_3(\xi, x, y) + \psi_1(\xi, x, y)\eta, \quad \Gamma_4 = \chi(\xi)\eta^2 + \psi_2(\xi, x, y)\eta + \varphi_4(\xi, x, y). \quad (13)$$

Функции $\varphi_i(\xi, x, y)$ и $\psi_j(\xi, x, y)$ представляют собой формы порядков i и j соответственно. Коэффициенты этих форм 2π -периодически зависят от ξ . В разложении (12) через $\tilde{\Gamma}$ обозначены члены выше четвертого порядка. Заметим еще, что переменная η имеет второй порядок малости, а переменные x, y – первый.

В локальных переменных задача об орбитальной устойчивости периодического решения (2) свелась к задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (12) по отношению к переменным x, η, y . Исследование данной задачи можно выполнить на основании методики, разработанной в [8, 12, 15].

Заключение

Изложенный выше метод позволяет ввести локальные переменные в окрестности регулярного периодического решения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями. При применении данного метода нет необходимости накладывать какие-либо ограничения на тип периодической орбиты. Его можно применять для изучения поведения системы вблизи периодических орбит, полученных как в явном аналитическом виде, так и найденных численно. Это позволяет решать широкий круг новых задач об орбитальной устойчивости периодических движений в классической и небесной механике, а также в их приложениях.

Литература

1. А. Пуанкаре // Избранные труды. Т.1. М.: Наука, 1971. 771с.; Т.2. М.: Наука, 1971. 999 с.
2. Дж. Д. Биркгоф // Динамические системы. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
3. А.П.Маркеев // Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите, Космические исследования, 13:3 2001. 322–326
4. А.П.Маркеев // Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской, Прикладная математика и механика. 65: 1. 2001. 51–58
5. Б.С.Бардин // Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева-Стеклова, Нелинейная динамика. 5:4. 2009. 535–550
6. B.S. Bardin, A.A Savin // On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations and Rotations of a Symmetric Rigid Body with a Fixed Point, Regular and Chaotic Dynamics. 17: 3–4 2012. 243–257
7. Б.С.Бардин, А.А.Савин // Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой, Прикладная математика и механика. 77: 6 2013. 806–821
8. А.П.Маркеев // Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений, Прикладная математика и механика, 66:6 2002. 929–938
9. B.S. Bardin // On a Method of Introducing Local Coordinates in the Problem of the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body, Russian J. Nonlinear Dyn., 16:4 2020. 581–594
10. В.И.Арнольд // Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике, Успехи мат. наук, 18:6. 1963. 91–192
11. J. Moser, C. Siegel // Lectures on Celestial Mechanics, New York: Springer, 1971. 290 p.
12. А.П.Маркеев // Точки либрации в небесной механике и космодинамике, М.: Наука, 1978. 312 с.
13. В.И.Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт // Математические аспекты классической и небесной механики, Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т.3. М.;ВИНИТИ, 1985. 304 с.
14. А.Д. Брюно // Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
15. А.П.Маркеев // Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс, М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ ВИБРАЦИЙ ТОЧКИ ПОДВЕСА

Беличенко М.В.

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Москва, Россия
tuzemec1@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается приближенная задача динамики твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса. Ранее в рамках приближенной задачи проведено множество исследований существования и устойчивости различных частных случаев движения тела: положений равновесия, стационарных вращений, маятниковых движений. Рассматривались различные случаи геометрии масс тела и различные случаи вибраций. В данной работе проводится качественное описание влияния вибраций на динамику твёрдого тела. Получено, что влияние произвольных вибраций в трёхмерном пространстве эквивалентно влиянию вибраций точки подвеса вдоль эллипса, что в свою очередь эквивалентно совокупности влияний вибраций вдоль двух перпендикулярных прямых. Описано влияние вибрации точки подвеса вдоль прямой на динамику тела с центром масс на главной оси инерции. С помощью полученного представления вибрационного потенциала была решена задача о стабилизации произвольного положения центра масс тела с центром на главной оси инерции в трёхмерном пространстве.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-11-00116.

Введение

Исследование динамики твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса берёт начало с 1908 г., когда А. Стефенсоном была показана возможность стабилизации верхнего положения математического маятника с помощью вертикальных вибраций точки подвеса [1]. В дальнейшем наиболее подробно исследовано движение математического маятника при наличии вибраций точки подвеса [2]. А. П. Маркеевым [3] была получена приближенная автономная система дифференциальных уравнений динамики твёрдого тела с вибрирующим в трёхмерном пространстве подвесом, где влияние вибраций имеет вид дополнительного вибрационного потенциального поля. В рамках такого представления влияния вибраций было проведено множество исследований, посвящённых вопросам существования и устойчивости различных типов движения (положения равновесия, стационарные вращения, маятниковые движения) тел различной геометрии масс (от волчка Лагранжа до тела произвольной геометрии масс) при различных случаях вибраций точки подвеса (от вибраций вдоль прямой до ряда трёхмерных случаев вибраций) [4–6]. Однако, данные исследования представляют собой исследование влияния некоторых частных случаев вибраций на динамику тела. В данной работе проведено качественное описание влияния вибрационного потенциала на динамику тела, выявлен ряд его свойств, и с помощью полученного представления рассмотрена задача о стабилизации произвольного положения центра масс твёрдого тела в трёхмерном пространстве.

Исследование вибрационного потенциала и стабилизация положения тела

Рассмотрим движение тяжёлого твёрдого тела с центром масс на главной оси инерции, точка подвеса O которого совершает высокочастотные вибрации в трёхмерном пространстве относительно фиксированной точки пространства O_* . Зададим движение точки подвеса в неподвижной системе координат O_*XYZ , ось O_*Z которой вертикальна, в виде вектора $O_*O = (u(t), v(t), w(t))^T$, функции $u(t), v(t), w(t)$ – периодичны по времени с периодом $2\pi/\Omega$ (Ω – частота вибраций). Будем полагать, что амплитуда вибраций точки подвеса мала по сравнению с приведённой длиной тела, а частота вибраций велика по сравнению с частотой колебаний тела, как математического маятника. В рамках приближенной задачи, дополнительное вибрационное потенциальное поле, описанное в работе [3], зависит от шести параметров – средних значений попарных произведений компонент скорости точки подвеса за период вибрации

$$\langle \dot{u}^2 \rangle = a_x, \langle \dot{v}^2 \rangle = a_y, \langle \dot{w}^2 \rangle = a_z, \quad \langle \dot{u}\dot{v} \rangle = a_{xy}, \langle \dot{u}\dot{w} \rangle = a_{xz}, \langle \dot{v}\dot{w} \rangle = a_{yz}$$

причём вибрационный потенциал имеет вид

$$\Pi_v = f_1(\varphi, \psi, \theta)a_x + f_2(\varphi, \psi, \theta)a_y + f_3(\varphi, \psi, \theta)a_z + f_4(\varphi, \psi, \theta)a_{xy} + f_5(\varphi, \psi, \theta)a_{xz} + f_6(\varphi, \psi, \theta)a_{yz}$$

Здесь функции $f_i(\varphi, \psi, \theta), i = 1 \dots 6$ зависят от углов Эйлера, описывающих положение тела.

Рассмотрена задача о минимальном наборе параметров, задающих вибрационное поле. Получено, что с помощью выбора системы координат O_*XYZ (поворота вокруг вертикали) можно добиться равенства $a_{xy} = 0$. Если же не привязывать неподвижную систему координат к вертикали, то с помощью пространственного поворота можно добиться равенства нулю всех средних значений смешанных произведений $a_{xy} = 0, a_{xz} = 0, a_{yz} = 0$. Также, было отмечено, что в случае равенства интенсивности вибраций вдоль всех трёх

осей $a_x = a_y = a_z = a$ вибратонный потенциал $\Pi_v = \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \theta)a + \tilde{f}_2(\varphi, \psi, \theta)a + \tilde{f}_3(\varphi, \psi, \theta)a = \text{const}$. Вычитая это выражение с множителем $\min(a_x, a_y, a_z)$ (пусть, для определённости, минимальной будет интенсивность вибраций a_z), получим

$$\Pi_v = \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \theta)(a_x - a_z) + \tilde{f}_2(\varphi, \psi, \theta)(a_y - a_z)$$

Таким образом, влияние произвольных вибраций точки подвеса в трёхмерном пространстве на динамику твёрдого тела эквивалентно влиянию вибраций точки подвеса вдоль наклонного эллипса, что также эквивалентно совокупности влияния вибраций вдоль двух перпендикулярных прямых (осей этого эллипса) с интенсивностями $a_x - a_z$ и $a_y - a_z$.

Влияние вибраций точки подвеса вдоль прямой на несимметричное твёрдое тело можно представить в виде совокупности двух качественно различных вибратонных моментов. Первый вибратонный момент стремится привести центр масс тела к линии действия вибраций. Влияние второго вибратонного момента связано с тем, что рассматриваемые движения приближенной системы в полной системе являются малыми пространственными колебаниями в окрестности тех движений. Второй вибратонный момент стремится развернуть тело таким образом, чтобы эти малые дрожания происходили вокруг оси, перпендикулярной радиус-вектору центра масс, отвечающей наибольшему моменту инерции.

Таким образом, вибрации точки подвеса вдоль эллипса стремятся привести центр масс тела в плоскость эллипса (а именно, в направлении его большей оси), и развернуть тело так, чтобы не содержащая центр масс главная ось инерции, отвечающая большему моменту инерции, была перпендикулярна плоскости эллипса.

С помощью такого представления влияния вибраций на динамику тела были построены законы движения точки подвеса, стабилизирующие произвольное положение центра масс тела. Рассмотрен случай тела с центром масс на главной оси инерции.

Получено, что для стабилизации произвольного положения центра масс тела достаточно введения вибраций точки подвеса вдоль наклонной прямой, лежащей в вертикальной плоскости, содержащей требуемое положение. При этом главная ось инерции, не содержащая центр масс, отвечающая большему моменту инерции, перпендикулярна этой вертикальной плоскости.

Для стабилизации положений, при которых указанной вертикальной плоскости перпендикулярна главная ось, отвечающая меньшему моменту инерции, построен закон вибраций вдоль наклонного эллипса, малая ось которого горизонтальна, а большая лежит в вертикальной плоскости, содержащей центр масс тела. Полученное движение точки подвеса стабилизирует большую часть положений центра масс из нижнего полупространства.

Литература

1. A. Stephenson // On a new type of dynamical stability, Mem. and Proc. of the Manchester Literary and Phil. Soc. – 1908. V. 52. – Pt. 2. № 8. – P. 1-10.
2. О. В. Холостова // Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2016. 308 с.
3. А. П. Маркеев // Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса, Прикладная математика и механика, 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
4. М. В. Беличенко, О. В. Холостова // Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса, Нелинейная динамика, 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104.
5. Е. А. Вишенкова, О. В. Холостова // О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции, Вестник Удмуртского университета. Механика, 2017. Вып. 1. С. 98–120.
6. O. V. Kholostova // On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point, Rus. J. Nonlin. Dyn, 2020. Vol. 16. № 1. pp. 59–84.

УПРАВЛЕНИЕ УСКОРЕНИЕМ ДЛЯ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛЕЖКИ С ТРОЙНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ

Бондаренко С.О., Юшков М.П.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург
sergey.bondarenko.051@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача о гашении колебаний горизонтально движущейся тележки с тройным математическим маятником. Требуется переместить тележку на заданное расстояние за заданное время из положения покоя в новое состояние покоя. При решении рассматриваемой задачи в случае использования принципа максимума Понтрягина во всё время движения системы непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка. Это позволяет использовать для решения той же задачи обобщённый принцип Гаусса. В данной работе в виде управления рассматривается ускорение, приобретаемое тележкой, проводится сравнение полученных результатов с управлением силой, найденным с помощью обобщённого принципа Гаусса.

Введение

Гашение колебаний механических систем является одной из ключевых задач в различных технических приложениях, включающих в себя, в частности, робототехническую, производственную и авиакосмическую промышленности. Например, в робототехнике управление роботизированными руками имеет решающее значение для точного и эффективного манипулирования объектами [1].

В данной работе рассматривается проблема гашения колебаний тележки с тройным маятником. Колебания возникают вследствие движения системы из начального состояния покоя и требования покоя в конечный момент времени. При этом будет задаваться расстояние, на которое должна переместиться тележка, и время, за которое данный переход совершается. Для достижения этой цели мы будем управлять горизонтальным ускорением тележки, рассматривая его как неизвестное управление.

Переход к управлению ускорением был описан в монографии [2]. Преимущество данного способа управления системы заключалось в отсутствии вычисления собственных форм и собственных частот системы для отыскания управляющей силы. Это справедливо для системы, в которой маятники соединены с тележкой параллельно. Если же мы рассмотрим систему с последовательно соединёнными маятниками, то данная проблема остаётся актуальной. В монографии был рассмотрен случай последовательного соединения двух маятников. В данной работе эта задача расширена до рассмотрения тройного математического маятника.

Основная часть

Имеется тележка массы m_0 с укрепленным на ней тройным маятником, имеющим массы m_1, m_2, m_3 и длины нитей l_1, l_2, l_3 (см. рис. 1). Тележка перемещается вдоль оси Ox . Необходимо найти горизонтальную управляющую силу, перемещающую тележку на расстояние S за время T . Будем считать, что система в начальном и конечном положениях находится в покое. Таким образом, нашей целью является нахождение управления, которое, кроме перемещения тележки на заданное расстояние за заданное время, также погасит колебания механической системы в конечный момент времени.

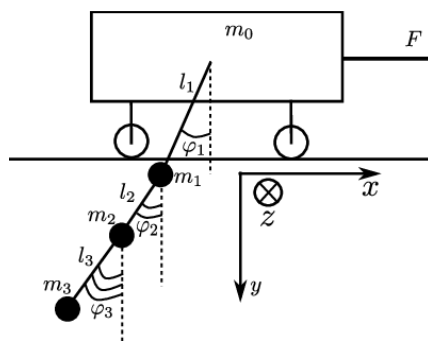


Рис. 1. Тележка с тройным маятником

В качестве обобщённых координат берем горизонтальное смещение тележки $x(t)$ и углы поворотов маятников $\varphi_i (i=1, 2, 3)$. Начальные краевые условия в этих координатах имеют вид:

$$x(0)=0; \dot{x}(0)=0; x(T)=S; \dot{x}(T)=0; \varphi_i(0)=0; \dot{\varphi}_i(0)=0; \varphi_i(T)=0; \dot{\varphi}_i(T)=0 (i=1, 2, 3). (1)$$

Для данной системы при учёте малости углов поворота уравнения Лагранжа второго рода записываются следующим образом:

$$M_{0,0}\ddot{x} - \sum_{j=1}^3 M_{0,j}l_j\ddot{\varphi}_j = F; M_{i,0}(g\varphi_i - \ddot{x}) + \sum_{j=1}^3 M_{i,j}l_j\ddot{\varphi}_j = 0, i=1, 3; M_{i,j} = \sum_{k=\max(i,j)}^3 m_k; i, j=0, \overline{3}. (2)$$

Здесь F - управляющая сила, которая переведёт нашу систему из одного фазового состояния в другое. При классическом решении поставленной задачи нам нужно сначала найти управляющую силу, после чего мы можем найти изменение координат системы под её действием. Для этого, например, можно воспользоваться принципом максимума Понтрягина [3,4], являющегося одним из принципов теории управления, или же обобщённым принципом Гаусса из неголономной механики [5]. Использование принципа неголономной механики в данной задаче возможно из-за наличия неголономной связи высокого порядка в случае решения задачи с привлечением принципа максимума Понтрягина [5].

Рассмотрим теперь другой способ управления с помощью отыскания требуемого ускорения. В трёх последних уравнениях системы (1) имеется искомое ускорение \ddot{x} , которое можно заменить искомым управлением. Для удобства сразу перейдём к безразмерной координате $\xi_0 = x/l_1$, описывающей горизонтальное перемещение тележки. Уравнения движения в этом случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_0 &= \widetilde{F}; k^2 \varphi_i + \sum_{j=1}^3 \overline{M_{i,j}} \alpha_j \ddot{\varphi}_j = \widetilde{F}, i = \overline{1,3}. \quad (3) \\ k &= \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \alpha = \frac{l_j}{l_1}, \overline{M_{i,j}} = M_{i,j}/M_{i,0}, i, j = \overline{0,3}. \end{aligned}$$

Во второй группе уравнений (3) перейдем к главным безразмерным координатам $\xi_i, i = \overline{1,3}$. Дополнительно введем безразмерные время и постоянные:

$$\tau = \Omega_1 t, \widetilde{T} = T \Omega_1, \xi_0 = \frac{x}{l_1}, a = \frac{S}{l_1}, u = \frac{\widetilde{F}}{\Omega_1^2}, \omega_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_1}, i = \overline{1,3}.$$

Теперь краевая задача запишется следующим образом:

$$\xi_0'' = u, \xi_i'' + \omega_i^2 \xi_i = u, i = \overline{1,3}. \quad (4)$$

$$\xi_0(0) = 0; \dot{\xi}_0(0) = 0; \xi_0(\widetilde{T}) = a; \dot{\xi}_0(\widetilde{T}) = 0; \xi_i(0) = 0; \dot{\xi}_i(0) = 0; \xi_i(\widetilde{T}) = 0; \dot{\xi}_i(\widetilde{T}) = 0 (i = \overline{1,2,3}). \quad (5)$$

Здесь и далее штрихи обозначают дифференцирование по безразмерному времени τ . Система уравнений (4) представляет собой безразмерные уравнения движения в главных координатах с безразмерным управлением u . Размерные граничные условия (1) имеют в безразмерном виде запись (5). Для отыскания непосредственно размерной горизонтальной силы F , прилагаемой к тележке, воспользуемся её выражением из первого уравнения системы (2).

Решая поставленную краевую задачу (4), (5) с помощью применения обобщённого принципа Гаусса, получаем выражение для u в виде:

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^7 C_i \tau^i.$$

Здесь произвольные постоянные C_i можно найти из граничных условий (5), если выразить функции ξ_i через интегралы Дюамеля. Для системы с параметрами

$$m_0 = 100 \text{ кг}, m_1 = 3 \text{ кг}, m_2 = 3 \text{ кг}, m_3 = 5 \text{ кг}, l_1 = 8 \text{ м}, l_2 = 8 \text{ м}, l_3 = 8 \text{ м}, S = 36 \text{ м}, T = 15 \text{ с}. \quad (6)$$

можем получить график для искомой управляющей силы, отмеченный цифрой 1 на рис. 2.

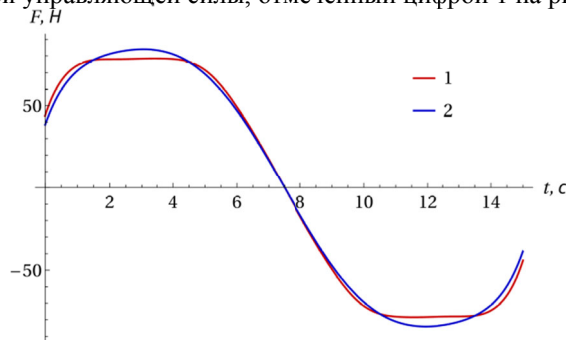


Рис. 2. Сравнение управляющих сил

Для сравнения на рис. 2 с цифрой 2 приведено решение краевой задачи (1), (2) при тех же параметрах (6), полученное с помощью обобщённого принципа Гаусса при отыскании непосредственно управляющей силы, приложенной к тележке.

При решении поставленной задачи важное место занимает время, за которое мы хотим переместить систему в новое состояние. При его увеличении скачки управляющей силы в начале и конце движения постепенно уменьшаются и доходят до нулевых значений, при этом решения, полученные обоими методами, почти совпадают. Для построения графиков было выбрано время движения, при котором различия в решениях более заметны.

Заключение

В работе было продолжено исследование гашения колебаний механических систем с помощью принципа неголономной механики при связях высокого порядка, описанное в монографии [2]. Рассмотрено гашение колебаний тележки, несущей тройной математический маятник за счёт управления её ускорением. Сравнивая решения этой задачи, полученные с помощью обобщённого принципа Гаусса для нахождения управляющей силы и для управления ускорением тележки, можно утверждать, что искомые управляющие силы, прикладываемые к тележке, довольно близки, а при увеличении заданного времени движения практически совпадают. Управление ускорением помогает нам немного сократить выкладки, что может быть полезным для дальнейшего аналитического исследования задачи.

Литература

1. Yushkov, M.P., Bondarenko, S.O // Suppression of Oscillations of a Loaded Flexible Robotic “ARM” as a Generalized Chebyshev Problem. In: Advanced Structured Materials, vol 180. Springer, Cham. (2022)
2. Зегжда С.А., Юшков М.П., Солтаханов Ш.Х., Шатров Е.А. // Неголономная механика и теория управления. М.: Физматлит, 2018
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. // Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983
4. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б. Н. // Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
5. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. // Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков. Доклады АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328-1330.

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.

ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
vicveden@yahoo.com

Аннотация. В классических работах (см. [1–4]), уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия [5–11]. Получающийся вывод уравнений типа Власова даёт уравнения Власова–Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее [12–15]. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям [5–8], как это делалось раньше уже самим А.А. Власовым [4]. В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона–Якоби, как это делалось уже в квантовой механике [16] и в общем гамильтоновом подходе [17–21]. Таким образом получаются в нерелятивистском случае решения Милна–Маккри, нерелятивистский аналог решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет проанализировать Лямбду Эйнштейна и темную энергию [22–24].

1. Действие в общей теории относительности и уравнения для полей. Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Рассмотрим действие:

$$S = -c \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d^3 x d^3 v dm de dt - \\ - \frac{1}{c} \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) A_\mu u^\mu d^3 x d^3 v dm de dt + \\ + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1)$$

где c – скорость света; $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ ($i = 1, 2, 3$) – трехмерная скорость; $x^0 = ct$ и x^i ($i = 1, 2, 3$) – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ – метрика ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \partial A_\nu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\mu - \partial A_\mu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\nu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -c^3/16\pi\gamma$ и $k_2 = -1/16\pi c$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ . Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5–11]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\ = \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2 \sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} u^\mu u^\nu d^3 v dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [9–11] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [5–15]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется уравнением Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d^3 v dm de \quad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1–4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ - функции для одной частицы:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'(t)) \delta(m - m') \delta(e - e'). \quad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1–4] выражения для всех слагаемых:

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\mathbf{x}, t) u^\mu dt \\ + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4 x. \quad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное

действие [1–4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

2. Уравнения движения частиц в заданных полях, уравнение Лиувилля и уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна. Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (5), относительно замены $t = \phi(\lambda)$, где λ – произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [1–4]. Перепишем первые два слагаемых из действия (5):

$$S = -ct \int \sqrt{g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu w^\mu d\lambda. \quad (6)$$

Варируя по $x(\lambda)$ и учитывая, что $w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, получаем уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$ct \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{g_{\mu\nu} w^\nu}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}} + \frac{e}{c} A_\mu \right] = ct \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} w^\alpha w^\beta + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} w^\nu \quad (7)$$

Учитывая, что величина $I = g_{\eta\xi} \frac{\partial x^\eta}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial \lambda}$ является интегралом движения по λ для уравнения (7), (обоснование этого см. в [9, 10]) приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\eta}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\eta}{d\lambda} = \frac{e}{mc^2} \sqrt{I} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (8)$$

где $\Gamma_{\nu\eta}^\mu$ – символ Кристоффеля:

$$\Gamma_{\nu\eta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\zeta} \left(\frac{\partial g_{\zeta\nu}}{\partial x^\eta} + \frac{\partial g_{\zeta\eta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^\zeta} \right).$$

Уравнение (8) отличается от приведенных в руководствах [1–4] наличием \sqrt{I} в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени $ds = d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее понижаем порядок уравнений, избавляясь от лишнего параметра лямбды. Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s . Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к времени t необходимо, так как наша цель получить замкнутую систему уравнений для полей и частиц, а значит, получить уравнение на функцию распределения $f(t, x, v, m, e)$, которая была в уравнениях для полей.

Мы получим систему уравнений для гравитации и электродинамики Власова–Максвелла–Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистских электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они 1) позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова–Максвелла) и гравитации (уравнение Власова–Эйнштейна) и 2) вывести их из принципа наименьшего действия.

Литература

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 стр.
4. Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 стр.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. ---2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.
8. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
9. Веденяпин В.В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 188. 20 с.
10. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D, 2020. V. 29. № 1. 23 p.
11. Vedenyapin, V., Fimin, N., Chechetkin, V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 с.
12. Cercignani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. Choquet–Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.
14. Rein G., Rendall A.D. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data, Commun. Math. Phys. 150, 561–583, (1992).
15. Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form), Z Phys, 40 (1926), 322–326.
17. Аржаных И.С. Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.; англ. пер.: Arzhanykh I.S., Momentum fields, Nat. Lending Lib., Boston Spa, Yorkshire, 1971. 222 pp.
18. Долматов К.И. Поле импульсов аналитической динамики, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Ташкент. 1950. 84 с.
19. Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. №6. 10–22; англ. пер.: Kozlov V.V. The hydrodynamics of Hamiltonian systems // Moscow Univ. Mech. Bull., 38:6 (1983), 9–23.

20. Козлов В.В. Общая теория вихрей. Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998. 239 с.
21. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995. 429 с.; англ. пер.: V.V. Kozlov, Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics, *Ergeb. Math.Grenzgeb.* (3), 31, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+378 pp.
22. Gurzadyan V.G. On the common nature of Dark Energy and Dark Matter // *Eur. Phys. J. Plus* 134, 14 (2019).
23. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov-Poisson equations system // *European Physical Journal Plus*. 136. № 670 (2021).
24. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–13.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В РЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ

Волков Е.В.^{1,2}

1 - Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

2 - Институт машиноведения им. А.А. Благодярова РАН, Москва, Россия
evvolkov94@mail.ru

Аннотация. Рассматривается плоская круговая ограниченная задача четырех тел. Изучается движение тела малой массы в гравитационном поле трех притягивающих тел. Притягивающие тела образуют устойчивую Лагранжеву конфигурацию, все четыре тела движутся в одной плоскости. В такой постановке задачи существует три центральные конфигурации, которые могут быть устойчивыми в линейном приближении. Для значений параметров, отвечающих их линейной устойчивости при резонансах второго, третьего и четвертого порядков был проведен строгий нелинейный анализ устойчивости и получены строгие выводы об их устойчивости по Ляпунову.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта РФФИ № 19-11-00116.

Введение

В ограниченной задаче четырех тел рассматривается движение тела малой массы в гравитационном поле трех основных тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Предполагается, что тело малой массы не влияет на движение основных тел, движущихся по известным орбитам, которые получаются из решения задачи трех тел. В частном случае, когда орбиты тел являются круговыми, данная задача называется ограниченной круговой задачей трех тел. Если движение тела малой массы происходит в плоскости трех основных тел, то задача называется плоской.

Исследованию движения в ограниченной задаче четырех тел посвящено множество работ. Особый интерес представляют решения, описывающие так называемые центральные конфигурации. В ограниченной задаче четырех тел центральная конфигурация возможна, когда основные тела движутся по кеплеровским орбитам вокруг своего центра масс и располагаются в треугольных или коллинеарных точках либрации.

В данной работе рассматривается плоская круговая ограниченная задача четырех тел, т.е. предполагается, что три основных тела движутся по круговым орбитам вокруг своего центра масс, образуя равносторонний треугольник, а тело малой массы все время располагается в плоскости движения основных тел. В движущейся вместе с основными телами системе координат существует положение относительного равновесия тела малой массы, когда оно образует вместе с основными телами плоский четырехугольник неизменной формы и размеров. Вопросы о существовании, классификации и устойчивости центральных конфигураций проводились в работах [1–4]. Линейный анализ устойчивости центральных конфигураций проведен в работах [4–6]. В работе [7] проведен нелинейный анализ устойчивости при равных массах двух основных тел. В данной работе проводится нелинейный анализ устойчивости центральных конфигураций в случаях резонансов второго, третьего и четвертого порядков.

Постановка задачи

Рассмотрим три основных тела взаимодействующих по закону всемирного тяготения и движущихся по известным круговым орбитам, образуя треугольную Лагранжеву конфигурацию. С Лагранжевой конфигурацией свяжем подвижную систему координат $Oxuz$. Начало этой системы находится в середине отрезка соединяющего тела M_2 и M_3 . Ось Ox проходит через этот отрезок, а ось Oy перпендикулярна Ox и проходит через притягивающее тело M_1 . Ось Oz дополняет систему координат до правой ортогональной тройки, как показано на рис. 1.

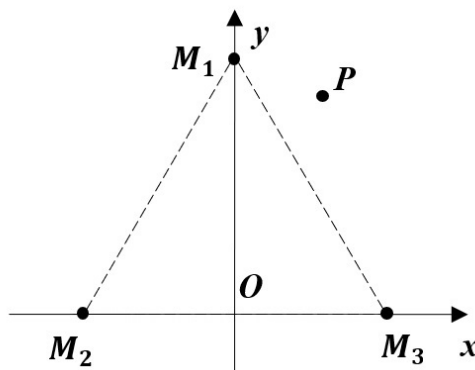


Рис. 1. Система координат.

Для описания движения тела малой массы P введем безразмерные координаты ξ, η по формулам

$$x = r\xi, \quad y = r\eta,$$

где x и y – координаты тела малой массы в системе координат $Oxyz$; $r = const$ – расстояние между основными телами. Безразмерное время τ вводится по формуле $\tau = \omega t$, где $\omega^2 = f(m_1 + m_2 + m_3)r^{-3}$; f – гравитационная постоянная; ω – угловая скорость треугольной конфигурации Лагранжа. Тогда уравнения движения тела малой массы можно записать в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - \frac{\sqrt{3}(1 - \mu_2 - \mu_3)}{2} p_\xi - \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} p_\eta - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\mu_3}{\rho_3},$$

где

$$\rho_1 = \left(\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_2 = \left(\left(\xi + \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_3 = \left(\left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right)^{1/2}.$$

Через μ_2 и μ_3 обозначены параметры задачи, которые вводятся по следующим формулам

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mu_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

где m_i ($i = 1, 2, 3$) – массы основных тел M_i . Предполагается, что значения параметров μ_2 и μ_3 удовлетворяют неравенству Рауса [8]

$$1 + 27(\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3^2 - \mu_2 - \mu_3) > 0.$$

В этом случае треугольная конфигурация Лагранжа устойчива в линейном приближении.

Уравнения движения тела малой массы допускают стационарные решения следующего вида

$$\xi = \xi_*, \quad \eta = \eta_*, \quad p_\xi = -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3), \quad p_\eta = \xi_* + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3),$$

где ξ_*, η_* находятся из решения алгебраических уравнений

$$\xi + \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^3} \xi - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu_3}{\rho_3^3} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) = 0,$$

$$\eta - \frac{\sqrt{3}(1 - \mu_2 - \mu_3)}{2} - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^3} \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \eta - \frac{\mu_3}{\rho_3^3} \eta = 0.$$

Стационарные решения описывают положения относительного равновесия тела P во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат $Oxyz$. В абсолютной системе координат этим частным решениям соответствуют центральные конфигурации. В рассматриваемой системе при выполнении условия устойчивости, в зависимости от значений параметров рассматриваемая система может иметь до восьми центральных конфигураций. Предельным будем называть случай, когда одна из масс обращается в ноль и задача вырождается в ограниченную задачу трех тел, а центральная конфигурация вырождается в эйлерову или лагранжеву конфигурацию. Пять из восьми центральных конфигураций неустойчивы при всех возможных значениях параметров задачи, а три могут быть устойчивыми в линейном приближении [4–6]. Обозначим через P_{ij} положение относительного равновесия тела мало массы, которое при $\mu_2 = 0$ переходит в точку либрации L_2^i , а при $\mu_3 = 0$ в точку либрации L_j^3 . Поставим задачу исследовать вопрос об устойчивости данных центральных конфигураций по Ляпунову при резонансах второго, третьего и четвертого порядков.

Результаты исследования устойчивости

Исследования проводились на основании метода нормальных форм и теории КАМ. Задача об устойчивости изучаемых центральных конфигураций сводится к исследованию устойчивости Гамильтоновой системы с нормализованной функцией Гамильтона, для которой можно применить известные достаточные условия устойчивости и неустойчивости [9–11], которые представляют собой неравенства относительно коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона. На основе данного подхода при всех значениях параметров, отвечающих резонансам второго, третьего и четвертого порядков, были получены выводы об устойчивости и неустойчивости по Ляпунову исследуемых центральных конфигураций. Каждый из резонансов рассматривался отдельно, так как нормальная форма функции Гамильтона имеет в каждом резонансном случае свой уникальный вид.

Результаты исследования представлены на рис. 2 и 3 для положения равновесия P_{45} и P_{55} соответственно. В плоскости параметров μ_2, μ_3 построены резонансные кривые, отвечающие резонансам второго, третьего и четвертого порядков, которые обозначены через Γ_2, Γ_3 и Γ_4 соответственно. Синим цветом обозначены участки кривых, на которых имеет место устойчивость, красным цветом неустойчивость. Положение равновесия P_{54} является симметричным P_{45} , поэтому результаты устойчивости приведены только для положения равновесия P_{45} .

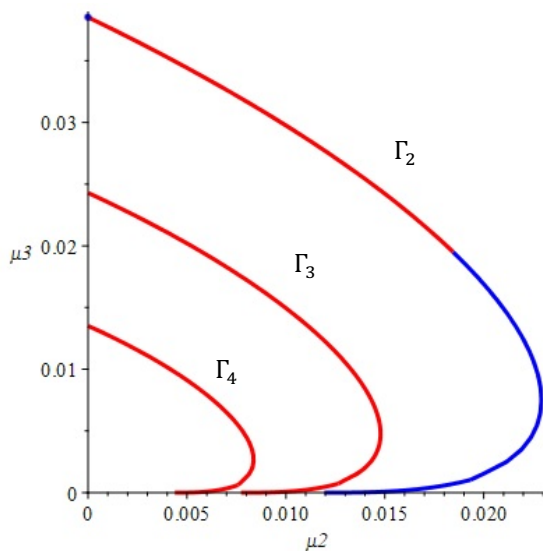


Рис. 2. Диаграмма устойчивости положения равновесия P_{45} при резонансах.

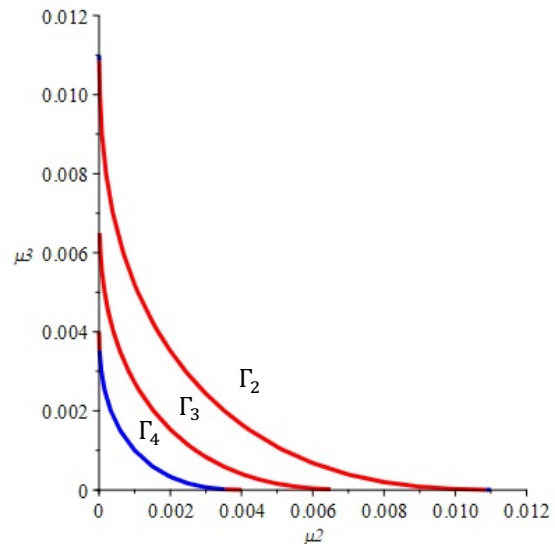


Рис. 3. Диаграмма устойчивости положения равновесия P_{55} при резонансах.

При малых значениях параметров задачи исследование устойчивости выполнено аналитически. Результаты исследования хорошо согласуются с результатами исследования, основанного на численном нахождении коэффициентов нормальной формы Гамильтониана задачи. Также при малых значениях задачи были получены аналитические выражения для резонансных кривых в виде рядов по степеням малого параметра.

Заключение

Проведен строгий нелинейный анализ устойчивости центральных конфигураций в случаях резонансов второго, третьего и четвертого порядков. В случае резонанса третьего порядка выявлено, что при всех возможных значениях параметров задачи центральные конфигурации неустойчивы по Ляпунову. В случае резонансов второго и четвертого порядков найдены области устойчивости и области неустойчивости. При малых значениях параметров задачи исследование устойчивости проведено аналитически.

Литература

1. В. А. Брумберг, Постоянные конфигурации в задаче четырех тел и их устойчивость. *Астрономический журнал*, 34:1 1957. 55-74.
2. C. Simo, Relative equilibrium solutions in the four body problem. *Celestial Mechanics* 18, 1978.
3. M. Alvarez-Ramírez, J. A. Zepeda Ramírez, Equilibrium points and their linear stability in the planar equilateral restricted four-body problem: a review and new results. *Astrophysics and Space Science* 367, 2022.
4. D. A. Budzko, A. N. Prokopenya, Symbolic-numerical analysis of equilibrium solutions in a restricted four-body problem. *Programming and Computer Software* 36, 2010. 68-74
5. B. S. Bardin, E. V. Volkov, Analysis of Linear Stability and Bifurcations of Central Configurations in the Planar Restricted Circular Four-Body Problem. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 1191, 2021.
6. B. S. Bardin, E. V. Volkov, On bifurcations and stability of central configurations in the planar circular restricted four-body problem. *J. Phys.: Conference Series* 1959, 2021.
7. B. S. Bardin, E. V. Volkov, Stability Study of a Relative Equilibrium in the Planar Circular Restricted Four-Body Problem. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 927, 2020.
8. E. J. Routh // *Proc. London Math. Soc.*, 6 1875. 86-97
9. А. П. Маркеев // *Точки либраций в небесной механике и космодинамике*, М.: Наука, 1978.
10. В. И. Арнольд *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, *Успехи Математических Наук*, 18:6 1963. 91-192
11. C. L. Siegel, J. K. Moser // *Lectures on Celestial Mechanics* (New York: Springer), 1971.

ОСОБЕННОСТИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ ОДНОЙ ТОЧКОЙ НА ШЕРОХОВАТУЮ НАКЛОННУЮ ПЛОСКОСТЬ

Журавлёв В.Ф.¹, Розенблат Г.М.^{1,2}

1 - Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

2 - Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
(МАДИ)

gr51@mail.ru

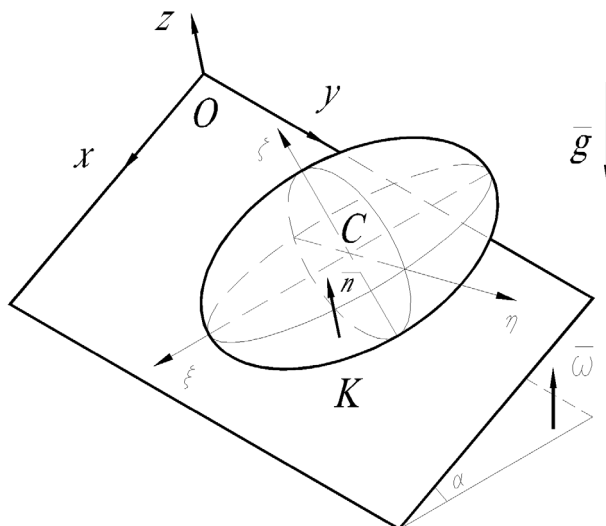
Аннотация. Рассматривается задача о равновесиях тяжелого твердого тела (в частности, эллипсоида), опирающегося на наклонную абсолютно шероховатую плоскость одной точкой. Для тела-эллипсоида найдены все такие положения. Исследована устойчивость этих положений равновесия в плоском и пространственном случаях. Показано, что в общем пространственном случае любое положение равновесия тела является неустойчивым. Исследована система линейного приближения колебаний эллипсоида в окрестности положения равновесия на наклонной плоскости. Исследована задача о существовании стационарных движений твердого тела на наклонной абсолютно шероховатой плоскости. Показано, что в общем пространственном случае таких движений не существует.

Введение

Задача о равновесии и движении тяжелого твердого тела, контактирующего одной точкой с шероховатой опорой, рассматривается, как правило, в предположении, что опора является горизонтальной [1,2]. В данной работе опорная плоскость, с которой контактирует тело, является наклонной. Это предположение вносит определенные особенности при изучении равновесий тела, устойчивости этих равновесий и динамики движения тела.

Основной текст

Рассмотрим твердое тело, представляющее собой тяжелый уравновешенный (центр масс совпадает с геометрическим центром) трехосный эллипсоид, который помещается на шероховатую наклонную плоскость (см. рис. 1). Требуется определить все возможные положения равновесия эллипсоида и исследовать их устойчивость.



$Oxyz$ - неподвижная система координат, C - центр масс эллипсоида, K - точка контакта, $C\xi\eta\zeta$ - система координат, жестко связанная с телом, \vec{n} - единичный вектор нормали наклонной плоскости, \vec{w} - единичный вектор восходящей вертикали.

Рис. 1. Эллипсоид на наклонной плоскости.

Поставим задачу найти все положения равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α , а затем исследовать их устойчивость. Кроме того, в данной работе исследуется вопрос о существовании стационарных вращений тела на шероховатой наклонной плоскости.

На тяжелый эллипсоид действует только одна активная сила - сила тяжести mg , которая приложена в центре масс C и направлена строго противоположно вектору восходящей вертикали w . В точке контакта K

поверхности эллипсоида с наклонной плоскостью Π действует сила реакции, состоящая из нормальной реакции N и касательной силы трения покоя F_{fr} . Если предполагать, что коэффициент трения достаточно большой (напомним, что необходимым условием равновесия тяжелого тела на шероховатой наклонной плоскости с конечным коэффициентом трения f и углом наклона α является известное неравенство $tg\alpha < f$, а предельное значение $\alpha = \alpha_0 = arctgf$ называется углом трения), то равновесие тела будет обеспечено тогда и только тогда, когда сила тяжести проходит через точку опоры K (в противном случае, будет нарушено условие равенства нулю моментов всех внешних сил относительно точки контакта K). Следовательно, при равновесии радиус-вектор CK направлен строго противоположно вектору восходящей вертикали w .

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ следующим образом. Начало системы O — произвольная точка плоскости Π , координатная плоскость Oxy совпадает с плоскостью Π , причем ось Ox направлена вниз по линии наибольшего ската наклонной плоскости Π , ось Oy — параллельно откосу, т. е., прямой пересечения плоскостей Π и Γ . Ось Oz направлена вверх по нормали к наклонной плоскости Π так, что система координат $Oxyz$ является правой. Далее, введем подвижную правую систему координат $C\xi\eta\zeta$, которая жестко связана с телом, где C — центр масс тела, который совпадает с центром эллипсоида. Оси этой системы координат выбраны таким образом, что уравнение поверхности эллипсоида в системе $C\xi\eta\zeta$ имеет следующий канонический вид

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 + k_3\zeta^2 = 1, \quad (1)$$

$$k_1 = 1/a^2, \quad k_2 = 1/b^2, \quad k_3 = 1/c^2, \quad a \geq b \geq c \quad (k_1 \leq k_2 \leq k_3)$$

В уравнении (1) a, b, c — полуоси эллипсоида. Ориентацию подвижной системы $C\xi\eta\zeta$ относительно неподвижной системы $Oxyz$ будем задавать тремя углами Эйлера φ, ψ, θ , причем: 1) φ — угол собственного вращения тела вокруг оси $C\zeta$, 2) ψ — угол прецессии, т. е., угол, образуемый линией узлов с неподвижной осью Ox , в данном случае, линия узлов — это линия пересечения плоскости $C\xi\eta$ с наклонной плоскостью Π (т. е., с плоскостью Oxy), 3) θ — угол нутации, т. е., угол, образуемый осью $C\zeta$ с нормалью к плоскости Π , являющейся также осью Oz .

Утверждение 1. Пусть наклонная абсолютно шероховатая плоскость имеет угол наклона $\alpha \neq 0$. Тогда все положения равновесия тяжелого эллипсоида на этой плоскости находятся из соотношения (2) для углов $\{\varphi, \theta\}$ и первого или второго из уравнений системы (3), определяющих ориентацию, угол прецессии, ψ эллипсоида относительно линии наибольшего ската опорной плоскости. Эти положения равновесия образуют одномерное многообразие, представляющее собой кривую на поверхности эллипсоида, параметризованную углом прецессии ψ . Причем, это многообразие равновесий не пусто тогда и только тогда, когда угол наклона α опорной плоскости удовлетворяет неравенствам (4).

$$\mu^2 = \nu \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mu^2 &= (k_1^{-1} \sin^2 \varphi + k_2^{-1} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-1} \cos^2 \theta, \\ \nu^2 &= (k_1^{-2} \sin^2 \varphi + k_2^{-2} \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + k_3^{-2} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cos \psi &= [(k_2^{-1} - k_1^{-1}) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta] / (\nu \sin \alpha), \\ \sin \psi &= \sin \theta \cos \theta (k_1^{-1} \sin^2 \varphi + k_2^{-1} \cos^2 \varphi - k_3^{-1}) / (\nu \sin \alpha), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{4k_1^{-1}k_3^{-1}}{(k_1^{-1} + k_3^{-1})^2} = \frac{4(ac)^2}{(a^2 + c^2)^2} \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = \arccos \frac{2ac}{a^2 + c^2} \quad (4)$$

Будем предполагать, что все возможные движения тела происходят без проскальзывания, т. е., выполнено условие равенства нулю скорости точки контакта K : $v_K = 0$. Любое положение эллипсоида на наклонной плоскости может быть задано пятью независимыми координатами: $x, y, \theta, \varphi, \psi$, где x, y —

координаты точки контакта K в системе $Oxyz$ (отметим, что при безотрывном движении $z \equiv 0$). Три последние переменные суть углы Эйлера для системы $C\xi\eta\zeta$, которые были введены выше.

Условие отсутствия проскальзывания точки контакта $v_K = 0$ приводит к двум неинтегрируемым уравнениям дифференциальных связей, из которых \dot{x}, \dot{y} однозначно выражаются через $\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$. Поэтому устойчивость рассматриваемого положения равновесия тела, при указанной неголономной связи, можно определить следующим образом.

Пусть определена функция $H = H(x, y, \theta, \varphi, \psi)$ – возвышение центра тяжести тела над горизонтальной плоскостью. Ясно, что от y (для введенной системы координат $Oxyz$) функция H не зависит. Отметим, что при $\alpha = 0$ (тело на горизонтальной плоскости) функция H зависит только от θ и φ . Это и накладывает определенные особенности при изучении устойчивости тела на наклонной плоскости (при $\alpha \neq 0$).

Определение. 1. Положение равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ устойчиво, если при любых бесконечно малых приращениях $\delta x, \delta y, \delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$ этих координат, удовлетворяющих соответствующим уравнениям неголономных связей (т. е., реализуемых без проскальзывания) и совершаемых из этого положения равновесия, соответствующее приращение ΔH функции $H = H(x, y, \theta, \varphi, \psi)$ является положительным.

2. Положение равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ неустойчиво, если существуют такие бесконечно малые приращения $\delta x, \delta y, \delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$ этих координат, удовлетворяющие уравнениям неголономных связей и совершаемых из этого положения равновесия, что соответствующее приращение ΔH функции $H = H(x, y, \theta, \varphi, \psi)$ является отрицательным.

Согласно последнему определению, устойчивость положения равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ эллипсоида эквивалентна следующим условиям

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{d^2H}{dt^2} > 0, \quad \text{для любых } \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$$

Производные в последних уравнениях берутся в точке равновесия $x, y, \theta, \varphi, \psi$ при произвольных значениях $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ и соблюдении неголономных связей для \dot{x}, \dot{y} . Первое из последних соотношений должно соблюдаться в силу условия равновесия тела, а второе обеспечивает локальный минимум потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия. Если одно из этих условий для каких-либо $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ нарушено, то рассматриваемое положение $x, y, \theta, \varphi, \psi$ либо не является положением равновесия, либо это положение равновесия неустойчиво в смысле приведенного определения.

Утверждение 2. Любое положение равновесия эллипсоида на абсолютно шероховатой наклонной плоскости является неустойчивым в смысле приведенного выше определения.

Утверждение 3. На абсолютно шероховатой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha \neq 0$ не реализуются стационарные вращения традиционного типа никакого твердого тела, имеющего гладкую и выпуклую поверхность.

Литература

1. Маркеев А. П. О нелинейных колебаниях трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ, 2022. Т. 86. № 6, с. 784-800.
2. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2014. 496 с.
3. Журавлёв В. Ф. О некорректных задачах механики // Известия РАН. Механика твердого тела. 2016, № 5, с. 36-41.
4. Журавлёв В. Ф., Розенблат Г. М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: ЛЕНАНД, 2017. 240 с.
5. Делоне Н. Б. Курс теоретической механики для техников и инженеров. / Предисл. Г. М. Розенבלата. Изд. 3-е, доп.- М.: ЛЕНАНД. 2021.- 432 с. (Физико-математическое наследие: физика (механика)).
6. Иванов А. П. Об устойчивости равновесия в системах с трением // ПММ, 2007. Т. 71. вып. 3, с. 427-438.
7. Журавлёв В. Ф., Розенблат Г. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского: Системы с качением. Неголономные связи. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 192 с.
8. Bizyaev Ivan A. and Mamaev Ivan S. Permanent Rotations in Nonholonomic Mechanics. Omnirotational Ellipsoid // Regular and Chaotic Dynamics, 2022, Vol. 27, No. 6, pp. 587-612.

О ВОЗМОЖНОСТИ ДИССИПАТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Зубенко В.А., Кугушев Е.И., Шахова Т.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
zoubenkova@gmail.com

Аннотация. Рассматривается консервативная система с одной степенью свободы, допускающая периодическое движение. Система помещается на поступательно движущееся основание, и к силам, действующим на точки системы, добавляются силы линейного вязкого трения. Определяется закон движения основания, при котором периодическое движение исходной системы сохраняется. С использованием неравенства Важевского получены условия, при выполнении которых это движение становится асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Введение

Пусть консервативная механическая система с одной степенью свободы допускает периодическое движение. В общем случае в окрестности этого движения на фазовой плоскости все движения также периодические и выбранное движение неустойчиво по Ляпунову, даже если оно орбитально устойчиво. Добавим к силам, действующим на точки системы, силы линейного вязкого трения. Это разрушит выбранное периодическое движение. Поместим систему на основание, движущееся поступательно по заданному закону. При этом в системе появятся переносные силы инерции. При некоторых условиях можно подобрать такой закон движения основания, что выбранное периодическое движение системы сохранится и даже станет асимптотически устойчивым по Ляпунову. Возникновение такой асимптотической устойчивости будем называть диссипативной стабилизацией. В [1] были получены условия возникновения диссипативной стабилизации для периодического движения в окрестности состояния равновесия с использованием интегрального признака устойчивости Ляпунова. В данной работе решается задача определения условий, при которых будет возникать диссипативная стабилизация выбранного периодического движения с использованием неравенства Важевского.

Система с одной степенью свободы с вязким трением на подвижном основании

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую наложены идеальные голономные связи и действуют консервативные силы. Поместим систему на поступательно движущееся основание, положение которого относительно абсолютной системы координат будем задавать радиус-вектором $\vec{w}(t)$ некоторой точки O основания. Предполагается, что потенциальная энергия системы на подвижном основании и на неподвижном основании одна и та же с точностью до калибровочного слагаемого функции.

Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = a(q)\dot{q}^2/2 - V(q) - M \langle \vec{r}_S, \ddot{\vec{w}} \rangle.$$

Здесь q – обобщенная координата системы; $a(q)\dot{q}^2/2$ – кинетическая энергия системы в отсутствие движений основания; $V(q)$ – потенциальная энергия; M – суммарная масса системы; $\vec{r}_S(q)$ – радиус-вектор центра масс S системы относительно некоторой точки O основания.

Добавим к потенциальным силам, действующим на точки системы, силы линейного вязкого трения, которым соответствует обобщенная сила $Q = -c(q)\dot{q}$, где $c(q) > 0$. Уравнение движение системы имеет вид

$$a(q)\ddot{q} + a'(q)\dot{q}^2/2 + V'(q) + M \langle \vec{r}_S'(q), \ddot{\vec{w}} \rangle = -c(q)\dot{q}, \quad (1)$$

где $(\cdot)'$ – производная функции по q .

Пусть $q = q_*(t)$ – некоторое периодическое движение системы в отсутствие трения при неподвижном основании. Для сохранения этого движения в любой момент времени должно выполняться условие

$$M \langle \vec{r}_S'(q_*(t)), \ddot{\vec{w}}(t) \rangle = -c(q_*(t))\dot{q}_*(t). \quad (2)$$

Для исследования устойчивости периодического движения $q_*(t)$ линеаризуем уравнение (1) в окрестности этого движения. В результате получим

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}(\beta_1 + \beta_2) + \xi(\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6) = 0, \quad (3)$$

где $\beta_1 = \frac{a'(q_*)}{a(q_*)}\dot{q}_*$, $\beta_2 = \frac{c(q_*)}{a(q_*)}$, $\beta_3 = \frac{a'(q_*)}{a(q_*)}\ddot{q}_* + \frac{a''(q_*)}{2a(q_*)}(\dot{q}_*)^2$, $\beta_4 = \frac{M}{a(q_*)} \langle \vec{r}_S''(q_*), \ddot{\vec{w}} \rangle$, $\beta_5 = \frac{V''(q_*)}{a(q_*)}$,
 $\beta_6 = \frac{c'(q_*)}{a(q_*)}\dot{q}_*$.

Приведем (3) к безразмерному виду, перейдя к безразмерным обобщенной координате и времени. При

этом уравнение (3) сохранит свой вид. Оставив старые обозначения, далее будем считать, что уравнение (3) записано в безразмерных переменных. С использованием неравенства Важевского [2] и теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению получим следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть консервативная механическая система с одной степенью свободы допускает периодическое движение. Если добавить в систему линейное вязкое трение и поместить систему на основание, движущееся поступательно так, что периодическое движение сохраняется, и если при всех значениях t выполняются условия

$$\begin{aligned} -(\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6) + \frac{1}{2}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) + \left(1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2}\right)^2 < 0, \\ \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - \frac{1}{2}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) - \left(1 + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2}\right)^2 < 0, \end{aligned}$$

то выбранное периодическое движение будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Исследование условий устойчивости периодического движения в частном случае

В качестве обобщенной координаты q выберем натуральный параметр для траектории движения $\vec{r}_S(q)$ центра масс системы. Вектор ускорения подвижного основания будем искать в виде

$$\ddot{w} = f_\tau(t)\vec{e}_\tau(q_*(t)) + f_\nu(t)\vec{e}_\nu(q_*(t)),$$

где $f_\tau(t), f_\nu(t)$ – неизвестные функции, \vec{e}_τ – единичный касательный вектор, \vec{e}_ν – единичный вектор главной нормали. Из условия (2) сохранения периодического движения $q = q_*(t)$ находим $f_\tau = -\frac{c(q_*)\dot{q}_*}{M}$.

Рассмотрим случай, когда $a(q) = a = const$ и $c(q) = c = const$. Тогда линеаризованное уравнение (3) примет вид

$$\ddot{\xi} + \frac{c}{a}\dot{\xi} + \xi\left(\frac{M}{a}k(q_*)f_\nu + \frac{V''(q_*)}{a}\right) = 0, \quad (4)$$

где $k(q)$ – кривизна траектории центра масс. Перейдем в уравнении (4) к безразмерным переменным, выполнив замену $\xi = L_*s$ и $t = T_*\tau$, где L_* – характерная длина (например, амплитуда колебаний на периодическом движении) и T_* – характерное время (например, период периодического движения). Из утверждения 1 получаем условие для компоненты f_ν вектора ускорения подвижного основания

$$-V''(q_*) + \left(1 - \frac{T_*c}{2a}\right)^2 \frac{a}{T_*^2} < Mf_\nu k(q_*) < -V''(q_*) + \left(1 + \frac{T_*c}{2a}\right)^2 \frac{a}{T_*^2}.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть консервативная механическая система с одной степенью свободы допускает периодическое движение. В качестве обобщенной координаты выберем натуральный параметр для траектории движения центра масс системы. Если при этом система такова, что коэффициент кинетической энергии постоянен, то при добавлении в систему сил линейного вязкого трения с постоянным коэффициентом трения всегда можно подобрать такое движение основания, что выбранное периодическое движение сохранится в системе и станет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Заключение

В работе рассмотрена диссипативная стабилизация периодических движений консервативных механических систем с одной степенью свободы. Получены условия для возникновения диссипативной стабилизации в общем случае с использованием неравенства Важевского. Также для частного случая, когда коэффициент кинетической энергии и коэффициент вязкого трения постоянны, показано, что всегда можно подобрать такой закон движения подвижного основания, что выбранное периодическое движение сохранится в системе и станет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Литература

1. Зубенко В. А., Кугушев Е. И., Шахова Т. В. // Стабилизация периодических движений некоторых механических систем, расположенных на подвижном основании. В сб. Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XVI Международной конференции, 2022. 204–207.
2. Демидович Б. П. // Лекции по математической теории устойчивости. 1967. 472 с.

УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ГИРОСТАТА БЕЗ ДВИГАТЕЛЯ

Иванов А.П.^{1,2}

1 - Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская область,
Россия

2 - Университет «Сириус», Сочи, Россия
a-p-ivanov@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается движение по инерции связки двух твердых тел, соединенных цилиндрическим шарниром. Одно из тел (платформа) произвольно, а второе (ротор) – динамически симметрично, причем ось симметрии совпадает с осью шарнира. В системе отсутствует актюатор, способный управлять угловой скоростью ротора. В качестве управляющего элемента используется «защелка», препятствующая относительному вращению ротора. В отсутствие внешних моментов система первоначально движется относительно центра масс как твердое тело в случае Эйлера. После освобождения ротора он начинает вращаться таким образом, что проекция его абсолютной угловой скорости на ось не изменяется. В тот момент, когда относительная скорость вращения обратится в нуль, защелку можно включить без потери энергии. В результате первоначальная траектория тела может измениться. Изучены возможности переворота платформы и прекращения ее «кувыркания».

Введение

Одна из наиболее известных классических задач механики – динамика твердого тела с неподвижной точкой – восходит к работам Эйлера, Пуассона и Лагранжа. К этой задаче сводится движение свободного тела относительно центра масс, что определяет ее прикладное значение в небесной механике и космодинамике. Гиростатом называют твердое тело, несущее ротор. Это – простейшая 3D система двух тел, имеющая по сравнению с твердым телом единственную дополнительную степень свободы. Впервые такая система была построена Кельвиным [1] для демонстрации влияния ротора на динамику тела, катящегося по горизонтальной плоскости. Вольтерра использовал модель гиростата для исследования вращения Земли [2]. Более общее понятие гиростата включает также тело с полостями, содержащими идеальную жидкость. При этом характеристическим свойством гиростата является неизменность распределения масс в основном несущем теле при произвольном возможном движении его частей. В такой формулировке динамика была подробно исследована Жуковским [3]. В дальнейшем гиростат использовался многими авторами для моделирования задач астродинамики, включая стабилизацию ориентации спутников [4–18]. Другое популярное направление исследований – мобильные роботы, управляемые при помощи роторов [19–26].

Как правило, управление ориентацией при помощи ротора осуществляется за счет изменения его относительной угловой скорости по заданной программе посредством актюатора, что требует наличие дополнительного оборудования и затрат энергии. Случай свободно вращающегося ротора лишен этих недостатков, однако возможности управления ограничены. В данной работе предлагается новый метод управления, основанный на чередовании двух режимов: 1) ротор закреплен (при этом система движется как одно твердое тело) и 2) ротор освобожден. Переход 1-2 возможен в любой момент времени, а для обратного перехода условие сохранения энергии требует, чтобы в момент фиксации относительная угловая скорость ротора была нулевой. Таким образом, система может находиться в одной из двух конфигураций, причем уравнения динамики различаются.

Анализ фазового портрета гиростата

Будем исследовать динамику системы двух твердых тел, связанных цилиндрическим шарниром. Одно из тел (платформа V_0) произвольно, второе (ротор V_1) симметрично относительно оси шарнира; таким образом, распределение масс в системе не зависит от состояния ротора. В системе отсутствуют двигатели, но имеется управляющий элемент – защелка, которая может фиксировать положение ротора. Таким образом, существует два типа динамики: при зафиксированном роторе система движется как твердое тело, а при освобожденном роторе – как простой гиростат. Переключение с первого режима на второй возможно в любой момент времени, а обратный переход без потери энергии – лишь при условии равенства нулю относительной угловой скорости ротора. Считаем, что внешние силы не создают момента относительно центра масс системы G . При сделанных предположениях кинетический момент относительно центра масс \vec{K}_G сохраняется в инерциальном пространстве. В подвижных главных центральных осях инерции $G\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ это свойство выражается формулой

$$\dot{\vec{K}}_G + \vec{\omega} \times \vec{K}_G = 0, \quad \vec{\omega} = (p, q, r), \quad \vec{K}_G = (A_1 p, A_2 q, A_3 r) + \vec{h}, \quad \vec{h} = J \Omega \vec{u} \quad (1)$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость платформы, J - осевой момент ротора, \vec{u} - орт оси ротора, фиксированный в

платформе, Ω_r - угловая скорость ротора относительно платформы, A_1, A_2, A_3 - главные центральные моменты инерции системы. Здесь производная вычисляется в подвижной системе отсчета. В отсутствие диссипации сохраняется также кинетическая энергия движения относительно центра масс.

Если ротор зафиксирован, $\Omega_r \equiv 0$, то система движется как твердое тело в случае Эйлера. Имеется два первых интегралов вида

$$K_G^2 = const, \quad (\vec{K}_G, I^{-1}\vec{K}_G) = const, \quad I = \text{diag}\{A_1, A_2, A_3\} \quad (2)$$

В пространстве $\vec{K}_G \in \mathbf{R}^3$ первое из равенств (2) описывает сферу, второе – гирационный эллипсоид, взаимный к эллипсоиду инерции. Все траектории лежат на пересечении этих поверхностей (геометрическая интерпретация Мак-Куллага). На фиг.1,а изображен гирационный эллипсоид с главными осями $G\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Полодии представляют собой линии, образованные пересечением этого эллипсоида сферами с различными радиусами и тем же центром.

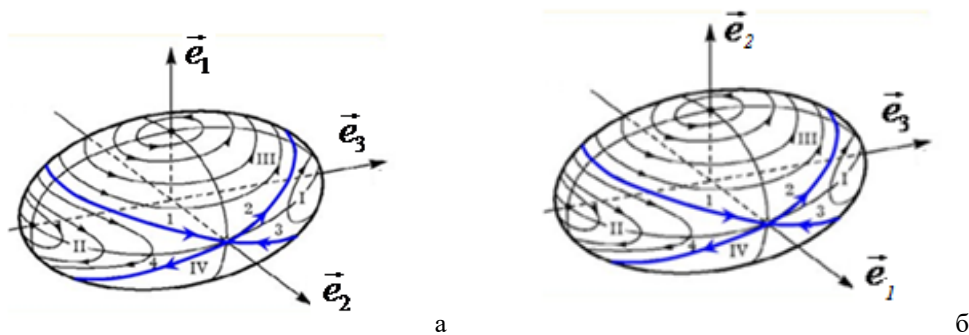


Рис. 1. Разворот фазового портрета: а) ротор зафиксирован; б) ротор освобожден.

Для другого вида конфигурации системы ротор вращается свободно, при этом силы, действующие на него со стороны корпуса, приложены лишь в точках оси. В этом случае проекция кинетического момента ротора на его ось не изменяется. Следовательно, в этом случае имеется дополнительный первый интеграл вида

$$\Omega_r + (\vec{\omega}, \vec{u}) = k = const. \quad (3)$$

В рассматриваемом случае также сохраняются интегралы кинетического момента и кинетической энергии, но данные количества складываются из составляющих для каждого из тел. Простые выражения для них можно получить, умножая уравнение (1) скалярно поочередно на \vec{K}_G и $\vec{\omega}$. В итоге получаем соотношения

$$\vec{K}_G^2 = const, \quad (I_1\vec{\omega}, \vec{\omega}) = const, \quad I_1 = I - J\vec{u}\vec{u}^T, \quad \vec{\omega} = I_1^{-1}(\vec{K}_G - kJ\vec{u}), \quad (4)$$

Первая из формул (4) описывает сферу в пространстве $\vec{K}_G \in \mathbf{R}^3$ с центром в начале координат G , а вторая – эллипсоид с центром в точке $\vec{K}_G^0 = Jk\vec{u}$, причем его главные оси и моменты инерции отличаются от исходных.

Предложение 1. При выполнении условия $k = 0$ центры шара и эллипсоида совпадают. В этом случае фазовый портрет выглядит аналогично рис. 1, а, но с измененными осями и моментами инерции. При этом система (2.1) представляет собой динамические уравнения Эйлера с тензором инерции I_1 .

Случай оси гиригата, параллельной главной оси инерции

Пусть $\vec{u} = (0, 1, 0)$, а момент освобождения ротора выбран так, что $k = 0$. Тогда система (1) примет вид динамических уравнений Эйлера с тензором инерции $I_1 = \text{diag}\{A_1, A_2 - J, A_3\}$. В зависимости от величин моментов инерции, может произойти перестройка фазового портрета. В частности, если $A_1 < A_2 < A_3$ и $A_2 < A_1 + J$, то ось $G\vec{e}_1$ станет средней осью инерции (рис. 1, б).

Предложение 3. Если $A_1 \leq A_2 \leq A_3$, причем $A_2 < A_1 + J$, то для любой траектории, лежащей в области III, существует управление, переводящее ее в симметричную траекторию в области IV.

Пример. $A_1 = 0.93, A_2 = 0.97, A_3 = 1, J = 0.1, \vec{u} = (0, 1, 0)$. Возьмем начальные условия $M_1 = (1, 0, 0.1)$, тело совершает периодическое движение в окрестности оси $O\vec{e}_1$. На рис. 2 представлен график зависимостей $p(t)$ (пунктир) и $\Omega_r(t)$ (сплошная) в условиях освобожденного ротора. В момент $t \approx 94$ величина Ω_r обращается в нуль. При остановке ротора в этот момент мы попадем в точку $M_2 = (-1, 0, 0.1)$, т.е. тело перевернулось. В дальнейшем траектория останется вблизи полуоси $-O\vec{e}_1$.

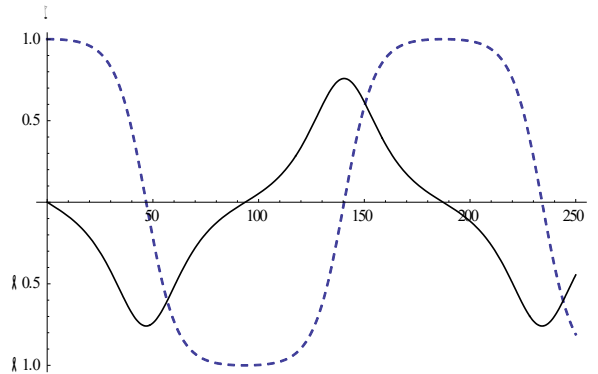


Рис. 2. Переворот относительно оси наименьшего момента инерции.

Выводы

Предложен новый метод управления ориентацией гиростата без использования актуаторов. Вместо этого требуется некоторая «защелка», которая во включенном состоянии превращает гиростат в одно твердое тело, а в выключенном – в тело с ротором. Как известно, в случае симметричного ротора уравнения движения гиростата интегрируемы, хотя фазовый портрет в общем случае довольно сложен. Показано, что можно так выбрать момент выключения защелки, что последующее движение гиростата будет описываться динамическими уравнениями Эйлера с новым тензором инерции. Это обстоятельство можно использовать для решения ряда задач управления ориентацией: переворот платформы, остановка «кувырков» относительно средней оси инерции. Перспективы практического применения этих результатов связаны с проектированием малых спутников без использования двигателей.

Литература

1. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // *Acta Math.* 1899. V. 22. P. 201-358.
2. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // *Собр. соч.* – 1949. – Т. 1. – С. 31-152.
3. Rumiantsev V.V. On the stability of motion of gyrostats // *J. Appl. Math. Mech.* 1961. V.25 P. 9–19
4. Kane T. R., Likins P. W., Levinson D. A. *Spacecraft dynamics* // New York. – 1983.
5. Hughes P. C. *Spacecraft Attitude Dynamics*. New York: Wiley, 1986
6. Rummyantsev V. V. *Dynamics and stability of rigid bodies* // *Stereodynamics.* – 2011. – С. 165-271.
7. Ovchinnikov, M. Y. et al, Single axis stabilization of a fast rotating satellite in the orbital frame using magnetorquers and a rotor. *Acta Astronautica*, 173, 195-201. 2020.K
8. Amel'kin N. I. The steady motions of a satellite with a two-degree-of-freedom powered gyroscope in a central gravitational field and their stability // *J. Appl. Math. Mech.* – 2009. – V. 73. – №. 2. – P. 169-178.
9. Amel'kin N. I. On steady rotations of a rigid body bearing a single-axis powered gyroscope whose precession axis is parallel to a principal plane of inertia // *Mechanics of solids.* – 2009. – V. 44. – №. 1. – С. 1-13.
10. Gutnik S.A, Sarychev V.A. Dynamics of an axisymmetric gyrostatt satellite. Equilibrium positions and their stability // *J. Appl. Math. Mech.* V. 78. P. 249–257. 2014.
11. Aslanov V. S. Integrable cases in the dynamics of axial gyrostats and adiabatic invariants // *Nonlinear Dynamics.* – 2012. – V. 68. – P. 259-273.
12. Ivanov A. P. Singularities in the rolling motion of a spherical robot // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* – 2022. – V. 145. – P. 104061
13. Bhattacharya S., Agraval S. Spherical Rolling Robot: A design and Motion Planning Studies. // *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2000. V.16. No.6, Pp. 835-839.
14. Borisov, A.V., Kilin, A.A., Mamaev, I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors. // *Regul. Chaot. Dyn.*, 2012. V. 17. Pp. 258–272.
15. Borisov, A.V., Kilin, A.A., Mamaev, I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors: 2. // *Regul. Chaot. Dyn.*, 2013. V. 18. Pp. 59–76.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ АКТИВНОЙ СИЛЫ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛОЙ

Иванов К.С.^{1,2}, Ярославцева Е.К.³

1 - Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева, Алматы, Казахстан

2 - Институт Механики и машиностроения МОН РК им. У. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

3 - Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Санкт-Петербург, Россия
 ivanovgreek@mail.ru

Аннотация. Уравновешивание потенциальной силы внешней активной силой (например, силы тяжести вертолета силой тяги винта зависшего вертолета) связано с расходом энергии. Однако работа внешней активной силы, уравновешивающей потенциальную силу, не может быть вычислена из-за отсутствия перемещения. Теоретически расход энергии на поддержание уровня потенциальной энергии отсутствует. Уравновешивание внутренней потенциальной силы пружины внешним активным моментом (например, в центробежном регуляторе) также связано с расходом энергии, который невозможно подсчитать. Статья посвящена анализу взаимодействия параметров движущейся механической системы, содержащей потенциальную силу, и поиску способа вычисления работы, направленной на поддержание достигнутого уровня этой силы.

Анализ движущейся механической системы, содержащей потенциальную силу

Рассмотрим механическую систему, содержащую пружину 1 с жесткостью c , расположенную вертикально, и звено 2, имеющее массу m . На систему в точке A действует внешняя сила F и в точке B – сила тяжести G . Под действием силы F нижняя точка пружины A начнет двигаться с перемещением z_A и со скоростью V_A . Масса m под действием силы пружины начнет двигаться с перемещением z_B и со скоростью V_B .

Составим уравнение движения системы на основе теоремы об изменении кинетической энергии, считая силу пружины 2 внутренней силой: изменение кинетической энергии системы T при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил [1].

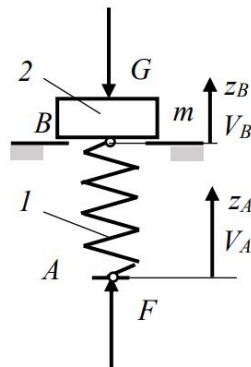


Рис. 1. Подвижная механическая система, обладающая кинетической и потенциальной энергией.

Общее уравнение движения системы с учетом $T=T_1-T_0$, $c=2F/z_A$ – жесткость пружины, $G=mg$ – сила тяжести.

$$T_1 - T_0 = Fz_A - \frac{cz_B^2}{2} - Gz_B. \quad (1)$$

Где T_1 и T_0 – конечное и начальное значение кинетической энергии.

При $T_0 = 0$ получим $mV_B^2/2 = Fz_A - cz_B^2/2$.

Движение системы под действием сил имеет следующие стадии:

1) Старт. Вначале масса 2 опирается на стойку и неподвижна. Сила F перемещает точку приложения A с перемещением z_A и со скоростью V_A , сжимая пружину 2 до достижения равенства движущей силы F силе пружины 1 или силе тяжести $G=mg$ (имеет место равенство $F=G$), после чего начнется перемещение массы 2. Массой пружины пренебрегаем. Изменение кинетической энергии системы $T=0$, сжатие пружины z_A равно перемещению точки A . Уравнение движения системы (1) при $z_B=0$ имеет вид

$$0 = Fz_A - cz_A^2/2. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получим перемещение z_A под действием силы F , создающее запас потенциальной

энергии пружины $\Pi = cz_A^2/2$. $z_A = 2F/c$. (3)

Величина накопленной потенциальной энергии пружины соответствует работе внешней силы $\Pi = Fz_A$. (4)

Для определения величины работы, необходимой для поддержания достигнутого запаса потенциальной энергии при постоянном значении z_A , преобразуем уравнение работ (2) в уравнение мощностей, разделив его на время t создания запаса потенциальной энергии $0 = Fv_A - cz_A V_A/2$. Здесь $Fv_A = P_F$ – мощность силы F , $\Pi/t = cz_A V_A/2$ – мощность потенциальной энергии.

Теперь энергию A_F , затраченную в течение произвольно заданного промежутка времени t' на сохранение достигнутой потенциальной энергии, можно определить, умножив мощность движущей силы на время t' . $A_F = P_F t'$.

2) Разбег. Происходит совместное движение звеньев системы при равенстве перемещений $z'_A = z_B$. Уравнение движения при $T_0 = 0$ примет вид $mV_A^2/2 = F'z'_A - Gz'_A$ (6)

Здесь z'_A – дополнительное перемещение точки A только в режиме разбега. (Общее перемещение точки A равно $z_A = z_A + z'_A$)

При этом запас потенциальной энергии Π , полученной во время старта за счет затраты энергии стартовой движущей силы F , сохраняется и поддерживается соответствующим расходом энергии общей движущей силы разбега F' , включающей стартовую силу F и добавленную силу, непосредственно выполняющую функцию разбега F_p , то есть $F' = F + F_p$. Таким образом стартовая сила F будет продолжать поддерживать достигнутый на старте запас потенциальной энергии пружины в течение всего последующего времени, а сила разбега F_p будет выполнять функции разбега.

Уравнение взаимосвязи параметров

$$\frac{mV_B^2}{2} = F_p z_B - Gz_B + Fz_A - cz_A^2/2.$$

С учетом $Fz_A - cz_A^2/2 = 0$ уравнение взаимосвязи параметров только при разбеге

$$mV_B^2/2 = F_p z_B - Gz_B. (5)$$

С помощью уравнения (5) можно определить достигнутую скорость V_B системы при заданном значении z_B и измененном значении входной силы F' , учитывающей ранее использованное значение F .

При заданном значении z_B можно определить достигнутую постоянную скорость движения (подъема или опускания)

$$V_B = \pm \sqrt{2(F_p - G)z_B/m}. (6)$$

Разделим уравнение (5) на время t . Получим при дальнейшем отсутствии изменения кинетической энергии ($T=0$) выражение мощности сил $F_p V_B = G V_B$. (7) Умножив уравнение (7) на время t поддержания системы в неподвижном потенциальном состоянии, получим расход энергии на поддержание заданного уровня потенциальной энергии массы 2 в течение заданного времени t : $A_{FP} = A_G$. Или $F_p V_B t = G V_B t$. (8)

3) Установившееся движение. Уравнение разбега (5) при отсутствии изменения кинетической энергии $T=0$ переходит в следующий вид

$$F_p z_B = Gz_B. (9)$$

4) Выбег : $-mV_B^2/2 = Gz_B - F_p z_B$. По окончании выбега $z_B = 0$.

5) Разрядка пружины: $-\frac{cz_A^2}{2} = -Fz_A$. По окончании разрядки $z_A = 0$.

Заключение

Доказано, что работа внешней активной силы F , уравнивающей потенциальную энергию массы в состоянии покоя за некоторый промежуток времени, равна работе этой силы, выполненной для достижения указанного уровня потенциальной энергии за тот же промежуток времени. ($A_F = \Pi$). Для определения расхода энергии движущей силы на поддержание заданного уровня потенциальной энергии необходимо мощность движущей силы умножить на время поддержания этого уровня потенциальной энергии.

Переходный режим движения имеет место (при $T \neq 0$), когда работа (мощность) движущей силы не соответствует уровню потенциальной энергии (пружины или массы) системы. Переходный режим превращается в режим установившегося движения (когда изменение кинетической энергии $T=0$) при достигнутом уровне работы движущей силы A_F , равном уровню потенциальной энергии системы Π . $A_F = \Pi$.

Литература

1. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва. «Наука». 1990. 414 с.

О ПОЛОЖЕНИЯХ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ШАРОВОМ ПОДВЕСЕ

Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск,
Россия
titor@icc.ru

Аннотация. Рассматривается вращение вокруг неподвижной точки динамически несимметричного твердого тела, заключенного жестко в сферическую оболочку, к которой примыкает один шар и один диск. Движение системы исследуется как под действием потенциальных сил, так и по инерции. Для уравнений движения в обоих случаях указаны семейства положений равновесия и инвариантные многообразия, которым эти решения принадлежат. Проведен анализ их устойчивости по Ляпунову. Для ряда решений получены достаточные условия устойчивости и сопоставлены с необходимыми.

Введение

Рассматриваемая в докладе задача восходит к работе Чаплыгина [1] о качении без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной плоскости, в которой эта задача сведена к квадратурам. Задаче Чаплыгина и ее интегрируемым обобщениям посвящено немало работ, см., напр., [2]. В [3] представлено обобщение системы [2] и предложена механическая реализация возникающей неголономной связи. Это динамически несимметричное твердое тело, заключенное жестко в сферическую оболочку, к которой примыкает один шар и один диск. Предполагается, что проскальзывание в точке контакта шара с оболочкой отсутствует. Диск – неголономный шарнир – касается внешней поверхности сферической оболочки. Центры шаров и ось диска неподвижны в пространстве. Движение системы описывается уравнениями связей

$$R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} + R_1\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\gamma} = 0, (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}) = 0, \quad (1)$$

и дифференциальными уравнениями

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + R\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{N} + \mu\mathbf{E} + \mathbf{M}_Q, D_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = D_1\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega} + R_1\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{N}, \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, R – угловая скорость тела и радиус сферической оболочки, $\boldsymbol{\omega}_1 = (\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13})$, R_1 – угловая скорость и радиус примыкающего шара, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор оси, соединяющей центры шаров, $\mathbf{E} = (e_1, e_2, e_3)$ – вектор нормали плоскости, содержащей центр шара и ось диска, $\mathbf{I} = \text{diag}(A, B, C)$ – тензор инерции тела, D_1 – тензор инерции примыкающего шара, $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$, μ – неопределенные множители, отвечающие реакциям связей (1), \mathbf{M}_Q – момент внешних сил.

При помощи уравнений связей (1) дифференциальные уравнения (2) приводятся к виду:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{E} + \mathbf{M}, \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \text{где } D = \frac{R^2}{R_1^2} D_1. \quad (3)$$

Неопределенный множитель μ находится из условия равенства нулю производной второго соотношения (1) в силу дифференциальных уравнений (3).

Если на тело действуют потенциальные силы

$$\mathbf{M}_Q = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{E} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}}, \quad \text{где } U = U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{E}),$$

уравнения (3) допускают следующие первые интегралы

$$2H = (\mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{E}) = h, V_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, V_2 = (\mathbf{E}, \mathbf{E}) = 1, V_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{E}) = \text{const}, V_4 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}) = 0 \quad (4)$$

и в общем случае являются не интегрируемыми. Здесь $\mathbf{I}_Q = \mathbf{I} + D - D\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma} = [c_{ij}]$, $c_{11} = \gamma_1^2, c_{12} = \gamma_1\gamma_2, \dots$

Уравнения (3) могут иметь еще два дополнительных первых интеграла, если внешние силы отсутствуют ($U = 0$) и $(\mathbf{E} \times \boldsymbol{\gamma}) \neq 0$:

$$F_1 = (\mathbf{K}, \mathbf{E} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = (\mathbf{K}, \mathbf{E} \times (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\gamma})), \quad (5)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}) \mathbf{E}$.

В докладе исследуются положения равновесия системы (3).

Положения равновесия тела при отсутствии внешних сил

При отсутствии внешних сил уравнения (3) имеют семейства решений

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad e_1 = \pm \sqrt{1 - e_2^{0^2} - e_3^{0^2}}, \quad e_2 = e_2^0, \quad e_3 = e_3^0, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2}}, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0; \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad e_1 = \pm \sqrt{1 - e_2^{0^2} - e_3^{0^2}}, \quad e_2 = e_2^0, \quad e_3 = e_3^0, \quad \gamma_1 = -\sqrt{1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2}}, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0; \end{aligned} \quad (6)$$

элементы которых соответствуют положениям равновесия тела. Здесь $e_2^0, e_3^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ – параметры семейств.

Показано, что решения (6) существуют при любых углах между векторами \mathbf{E} и $\boldsymbol{\gamma}$ и принадлежат инвариантному многообразию (ИМ), определяемому уравнениями:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad e_1 \omega_1 + e_2 \omega_2 + e_3 \omega_3 = 0.$$

Построены линейные и нелинейные комбинации первых интегралов (4), (5), принимающие стационарное значение на решениях (6).

Когда $\mathbf{E} \parallel \boldsymbol{\gamma}$, интеграл $2\Phi_1 = 2H + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 - 2\lambda_3 V_3 - 2\lambda_5 F_1 - 2\lambda_6 F_2$ ($\lambda_i = const$) принимает стационарное значение на элементах подсемейств семейств решений (6), соответствующих этому случаю. В общем случае нелинейная комбинация интегралов $\Phi_2 = H \pm F_1 F_2$ принимает стационарное значение на элементах семейств (6).

Интегралы Φ_1 и Φ_2 используются для получения достаточных условий устойчивости указанных решений.

Положения равновесия тела в потенциальном поле сил

При наличии потенциальных сил $U = (\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma}) + (\mathbf{b}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ – неопределенные множители, уравнения (3) имеют семейства решений:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad e_1 = -\sqrt{1 - 2e_2^{0^2}}, \quad e_2 = e_3 = e_2^0, \quad \gamma_1 = \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 2z_1^2}}{a_1}, \quad \gamma_2 = -\frac{z_1}{a_1}, \quad \gamma_3 = -\frac{z_1}{a_1}; \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad e_1 = \sqrt{1 - 2e_2^{0^2}}, \quad e_2 = e_3 = e_2^0, \quad \gamma_1 = \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 2z_2^2}}{a_1}, \quad \gamma_2 = -\frac{z_2}{a_1}, \quad \gamma_3 = -\frac{z_2}{a_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

элементы которых соответствуют положениям равновесия тела. Здесь $z_1 = b_1 e_2^0 + b_2 \sqrt{1 - 2e_2^{0^2}}$, $z_2 = b_1 e_2^0 - b_2 \sqrt{1 - 2e_2^{0^2}}$, e_2^0 – параметр семейств. Решения получены при условиях $a_2 = a_3 = 0, b_3 = b_2$.

Решения (7) существуют при любых углах между векторами \mathbf{E} и $\boldsymbol{\gamma}$ и принадлежат одномерному ИМ, определяемому уравнениями:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad P_1(\gamma_i, e_i) = 0, \quad P_2(\gamma_i, e_i) = 0 \quad (i=1,2,3), \\ e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad e_1 \omega_1 + e_2 \omega_2 + e_3 \omega_3 = 0, \end{aligned}$$

где P_1, P_2 – полиномы 8-й степени от γ_i, e_i ($i=1,2,3$). Полиномы достаточно громоздкие и здесь не приводятся.

Построены линейные комбинации интегралов H, V_1, V_2, V_3 , которые принимают стационарное значение на решениях (7). Эти комбинации интегралов используются для получения достаточных условий устойчивости решений (7).

Заключение

Представлены семейства положений равновесия в рассматриваемой задаче. В докладе акцент будет сделан на исследовании их устойчивости.

Литература

1. С. А. Чаплыгин // О катании шара по горизонтальной плоскости, Мат. сборник, 24:1 1903. 139-168
2. А. П. Веселов, Л. Е. Веселова // Интегрируемые неголономные системы на группах Ли, Мат. заметки, 44:5 1988. 604-619
3. А. В. Борисов, И. С. Мамаев // Новая интегрируемая система неголономной механики, ДАН, 462:6 2015. 657-659

ДИНАМИКА ОМНИДИСКА С ОДНОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗЬЮ

Килин А.А., Пивоварова Е.Н.

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, Ижевск,
Россия
kilin@rcd.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о качении диска по плоскости в предположении, что отсутствует проскальзывание в направлении, параллельном горизонтальному диаметру диска, а центр масс не движется в горизонтальном направлении. Рассматриваемая задача сведена к исследованию системы трех дифференциальных уравнений первого порядка. Показано, что редуцированная система обратима относительно инволюции коразмерности 1, а также допускает двухпараметрическое семейство неподвижных точек. С помощью численного моделирования показана неинтегрируемость рассматриваемой задачи. Указан ряд динамических эффектов, связанных с существованием инволюции коразмерности 1 и вырождением неподвижных точек приведенной системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00797.

Постановка задачи и реализация связей

Рассматривается движение динамически несимметричного неуравновешенного диска (круглой пластинки) массы m и радиуса ρ по горизонтальной плоскости (рис. 1). При этом предполагается, что:

1. при движении диск касается опорной плоскости одной точкой, лежащей на крае диска, и при этом не теряет контакта с плоскостью;
2. отсутствует проскальзывание между диском и плоскостью в направлении, параллельном горизонтальному диаметру диска;
3. проекция центра масс диска на горизонтальную плоскость неподвижна;
4. центр масс диска лежит в плоскости диска на одной из главных осей инерции на расстоянии a_0 от геометрического центра.

Физически указанные предположения можно реализовать, если рассмотреть качение одиночного омниколеса, по ободу которого располагаются свободно вращающиеся ролики. Мы будем называть такую систему *омнидиск*. При этом третье предположение можно реализовать, нанизав омнидиск с отверстием в его центре масс на неподвижный гладкий вертикальный стержень (рис. 2).

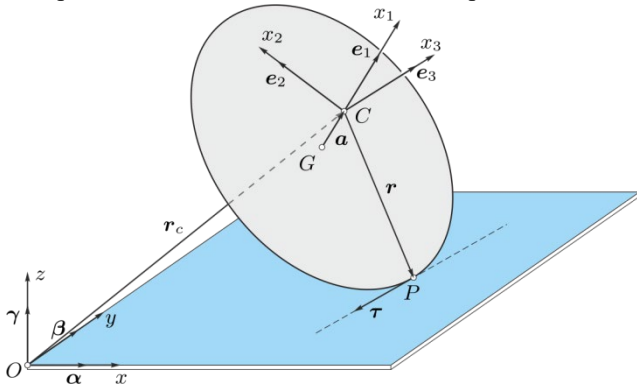


Рис. 1. Схематическое изображение диска на плоскости.

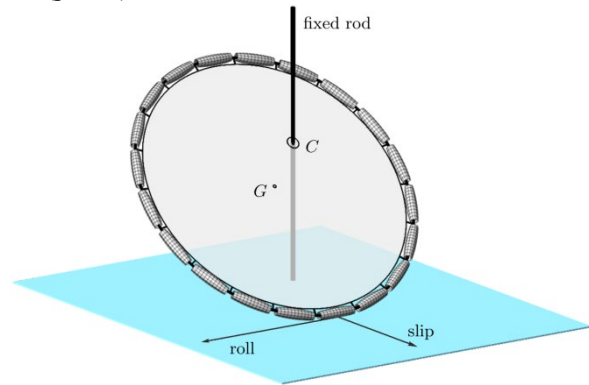


Рис. 2. Пример реализации модели омнидиска.

Уравнения движения

Для описания движения системы используются две системы координат – инерциальная $Oxyz$ и подвижная $Cx_1x_2x_3$, оси которой жестко связаны с телом и направлены вдоль главных осей инерции (рис. 1).

Предположения 1-3 накладывают на систему ряд связей

$$f = (v + \omega \times r) = 0, \quad f_\mu^\alpha = (v, \alpha) = 0, \quad f_\mu^\beta = (v, \beta) = 0, \quad f_\nu = \omega_3 = 0, \quad (1)$$

где v, ω – скорость центра масс и угловая скорость диска, r – радиус-вектор точки контакта, α, β, γ – орты неподвижной системы координат, записанные в проекциях на подвижные оси. Учитывая связи (1) и вводя переменные

$$\gamma_1 = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta, \quad \omega_1 = \omega \cos\xi, \quad \omega_2 = \omega \sin\xi,$$

уравнения движения рассматриваемой системы сводятся к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{Nm}{D} \cot\vartheta (i_2 \rho \cos\varphi \cos\xi - i_1 (a_0 + \rho \sin\varphi) \sin\xi), & \dot{\xi} &= -\frac{Nm}{D\omega} \cot\vartheta (i_2 \rho \cos\varphi \sin\xi + i_1 (a_0 + \rho \sin\varphi) \cos\xi), \\ \dot{\varphi} &= -\omega \cot\vartheta \sin(\varphi + \xi), & \dot{\vartheta} &= \omega \cos(\varphi + \xi), \end{aligned} \quad (2)$$

где N, D - функции переменных и параметров системы, i_1, i_2 - главные моменты инерции диска.

Уравнения движения (2) допускают интеграл энергии

$$E = \frac{\omega^2}{2} (i_1 \cos^2 \xi + i_2 \sin^2 \xi) + \frac{m}{2} \cos^2 \vartheta \omega^2 (\rho \cos(\varphi + \xi) - a_0 \sin \xi)^2 + mg \sin \vartheta (\rho + a_0 \sin \varphi).$$

Таким образом, на фиксированном уровне первого интеграла система уравнений (2) генерирует трехмерный фазовый поток. Кроме того, рассматриваемая система обратима относительно инволюции коразмерности 1

$$R^{(1)} : t \rightarrow -t, \quad \vartheta \rightarrow \pi - \vartheta, \quad (3)$$

существование которой приводит к интересным динамическим эффектам.

Устойчивость перманентных вращений

В рассматриваемой системе существует два двухпараметрических семейства неподвижных точек

$$\begin{aligned} \sigma_0 : \quad & \omega = \omega_0, \quad \xi = \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \\ \sigma_1 : \quad & \omega = \omega_0, \quad \xi = \frac{3\pi}{2} - \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

где φ_0, ω_0 - параметры семейства. Данные неподвижные точки соответствуют вращению диска вокруг вертикальной оси со скоростью ω_0 , при которых плоскость диска также вертикальна, а вектор \mathbf{a} отклонен на постоянный угол $\pi/2 - \varphi_0$ от вертикали. При этом центр масс неподвижен, а точка контакта (как и геометрический центр диска) описывает на плоскости окружность радиуса $a_0 \sin \varphi_0$.

В работе показано, что в зависимости от параметров системы – смещения центра масс диска $\kappa = a_0 / \rho$ и отношения моментов инерции δ , плоскость параметров можно разделить на четыре области. Каждой из областей при изменении параметров семейства φ_0, ω_0 соответствует свой сценарий потери устойчивости. На рисунке 3 изображены зависимости критического значения угловой скорости ω_0^2 от угла φ_0 , где заштрихованные области соответствуют устойчивым перманентным вращениям. Справа от каждого рисунка изображены диски с закрашенным сегментом, при расположении центра масс внутри которого перманентные вращения являются устойчивыми.

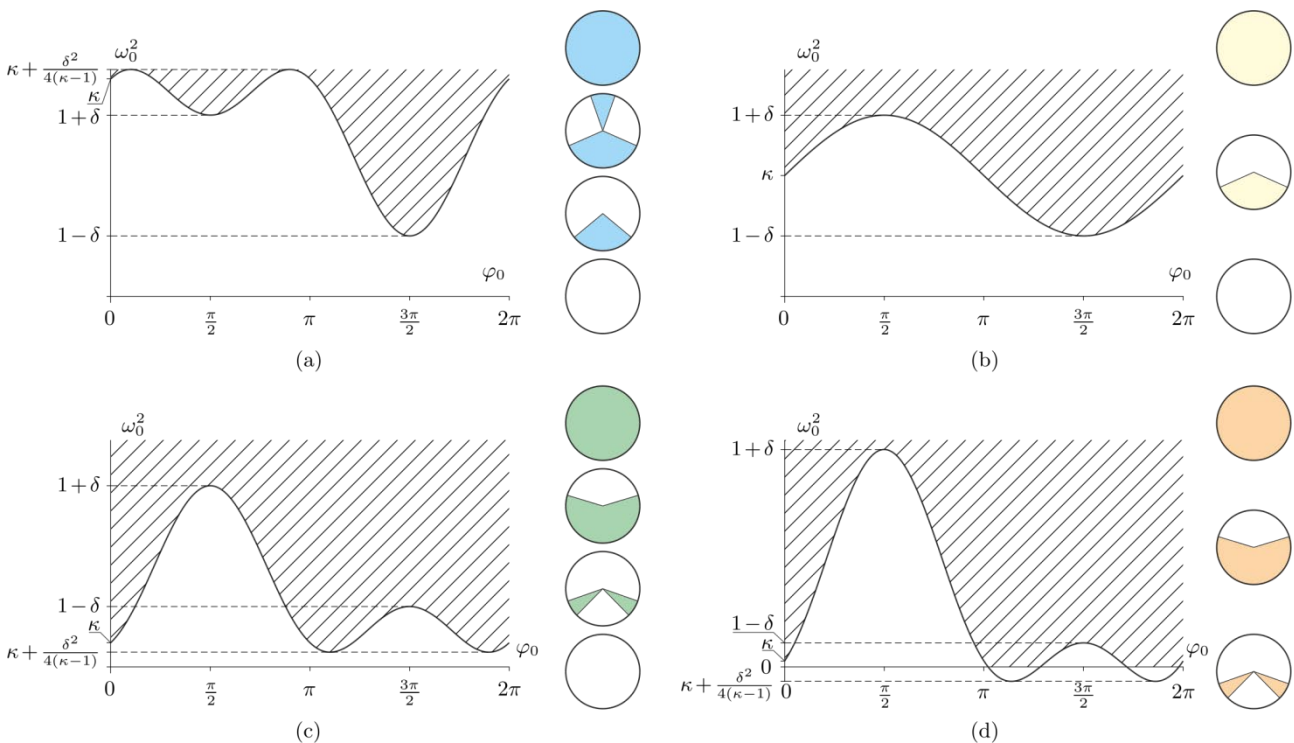


Рис. 3. Разные сценарии потери устойчивости и соответствующие области положения центра масс на диске, при которых вращения устойчивы.

Анализ динамики

В работе показано, что в частном динамически симметричном случае ($a_0 = 0, i_1 = i_2$) рассматриваемая система является интегрируемой и сводится к задаче о движении диска по гладкой плоскости на нулевом уровне интеграла Лагранжа $\omega_3 = 0$. При этом в системе существуют еще четыре неподвижные точки, а все остальные траектории являются периодическими.

В общем случае ($a_0 \neq 0, i_1 \neq i_2$) в зависимости от значения энергии системы, ее динамика демонстрирует существенно разное поведение.

По отношению к инволюции (3) все фазовые траектории системы (не лежащие в плоскости инволюции) могут быть разделены на три основных типа:

1. периодические траектории, пересекающие плоскость инволюции два раза. В общем случае (особенно при малых энергиях) данные траектории могут иметь достаточно сложный вид;
2. асимптотические траектории, пересекающие плоскость инволюции только один раз. В общем случае такие траектории могут стремиться к многообразиям падения, к неустойчивым неподвижным точкам, к неустойчивым периодическим решениям седлового типа, либо к аттракторам различного типа (в случае несуществования инвариантной меры);
3. траектории, которые не пересекают плоскость инволюции. Данные траектории лежат, в основном, на малых уровнях энергии, всегда имеют симметричную относительно плоскости инволюции пару и могут демонстрировать как регулярное, так и хаотическое поведение.

В частности, при больших значениях полной энергии $E > mg(\rho + a_0)$ система демонстрирует поведение, близкое к интегрируемому.

Гипотеза. При $E > mg(\rho + a_0)$ двухпараметрические семейства периодических решений системы (2) заполняют собой все фазовое пространство, исключая множество нулевой меры.

При малых энергиях ($E < mg(\rho + a_0)$) ОВД системы является двусвязной областью, а сама система демонстрирует поведение, характерное для неинтегрируемых систем с инвариантной мерой. При средних значениях энергии $mg(\rho - a_0) < E < mg(\rho + a_0)$ две части ОВД сливаются, но еще не заполняют все фазовое пространство. Примеры фазовых траекторий системы для этих случаев изображены на рисунке 4.

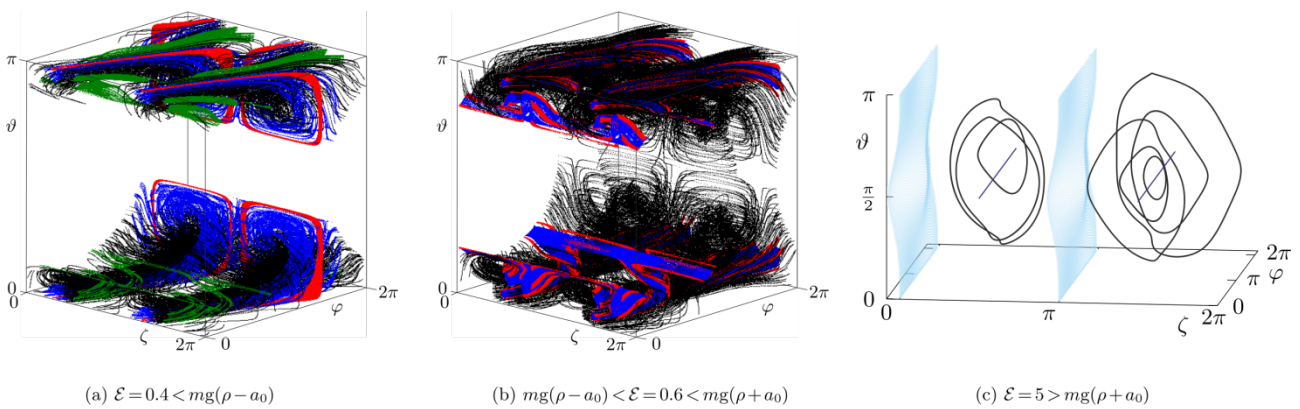


Рис. 4. Примеры фазовых траекторий системы (2) при малых (а), средних (б) и больших (с) значениях энергии.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели задачу о качении омнидиска по плоскости в предположении, что его центр масс не движется в горизонтальном направлении. Данная задача может рассматриваться также как задача о движении омнидиска со связью Сулова. Оказалось, что в рассмотренной системе существует двухпараметрическое семейство перманентных вращений, которым соответствуют вертикальные вращения диска на любой точке его края.

С помощью редукции на уровень первых интегралов рассматриваемая система может быть сведена к трехмерной автономной системе дифференциальных уравнений. Эта система обладает инволюцией коразмерности 1 и двухпараметрическим семейством неподвижных точек. Это приводит к тому, что в рассматриваемой системе наблюдаются интересные динамические эффекты, такие как существование двухпараметрических семейств периодических решений и локальная интегрируемость.

Литература

1. Kilin A. A., Pivovarova E. N. Dynamics of an Unbalanced Disk with a Single Nonholonomic Constraint // Regular and Chaotic Dynamics, 2023, vol. 28, no. 1, pp. 78-106

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЭЛЕКТРОМОТОРОМ

Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.

Государственное бюджетное учреждение *Институт прикладной математики и механики,*
Донецк, Россия
konos.donetsk@yandex.ru

Аннотация. На основе модели синхронного электромотора, включающей дифференциальные уравнения для электрических токов, получено легко проверяемое достаточное условие глобальной устойчивости такого электромотора при нелинейном моменте нагрузки. В рамках такой же модели электромотора рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести гироскопа в кардановом подвесе, имеющего вертикальную наружную ось подвеса. Предполагается, что гироскоп является ротором электромотора, а его статор является частью внутреннего элемента подвеса. Доказано, что необходимым и достаточным условием устойчивости стационарных движений является здесь наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии.

1. Глобальная устойчивость многотоковой модели синхронного электромотора

Предложенная в [1] многотоковая модель синхронного электромотора при нелинейном диссипативном моменте нагрузки описывается системой дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -m\dot{\gamma} + \Delta M_d(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_1} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_1}\right) - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ L_1 \dot{x} &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma, \\ L_2 \dot{i}_n &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_1}\right), \quad n = 1, 2, \dots, n_1 \end{aligned} \quad (1)$$

с фазовым вектором $(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_1})$. Здесь $\gamma = \varphi - \omega t$, φ — угол поворота ротора относительно статора, $\omega > 0$ — постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре, x, i_1, \dots, i_{n_1} — электрические токи, $C > 0$ — осевой момент инерции ротора, $M_d(\dot{\gamma})$ — диссипативный момент, $m, a_1, a_2, b_0, c_0, L_1, L_2, R_1, R_2 > 0$ — постоянные параметры.

При $c_0/b_0 < 1$ система (1) имеет два счетных набора стационарных решений

$$\begin{aligned} (\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_1}) &= (\gamma_{1s}, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ (\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_1}) &= (\gamma_{2s}, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Они описывают равномерные вращения ротора с угловой скоростью ω при нулевых токах x, i_1, \dots, i_{n_1} . Здесь значения γ_{1s}, γ_{2s} угла γ определены уравнением $b_0 \sin \gamma + c_0 = 0$ и выражаются формулами

$$\begin{aligned} \gamma_{1s} &= \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad \gamma_{2s} = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \gamma^{(0)} &= -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (\pi, -\pi/2). \end{aligned} \quad (3)$$

На основе метода сведения Г.А. Леонова [3, 4] в следующей теореме для системы уравнений (1) установлено достаточное условие глобальной устойчивости [2], которое, в отличие от такого рода теорем в [4], не содержит частотных неравенств.

Теорема 1. Пусть нелинейный диссипативный момент $M_d(\dot{\gamma})$ удовлетворяет оценке $\dot{\gamma} M_d(\dot{\gamma}) \leq -k\dot{\gamma}^2$ ($k > 0$), и для эталонного уравнения $C\ddot{\gamma} + d_0\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0$, в котором коэффициент демпфирования d_0 определен формулами

$$d_0 = \begin{cases} m + k, & 0 < \lambda_1 \leq 2\lambda_2; \\ 2\sqrt{\varepsilon_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) / \lambda_1}, & \lambda_1 > 2\lambda_2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = (m + k)C, \quad \lambda_1 = (m + k)C^{-1}, \quad \lambda_2 = \min(R_1/L_1, R_2/L_2),$$

выполнено условие глобальной устойчивости Ф. Трикоми $d_0/\sqrt{b_0 C} > a_{cr}(c)$, где $a_{cr}(c)$ — критическое значение безразмерного коэффициента демпфирования, $c = c_0/b_0 < 1$.

Тогда любое решение системы уравнений (1) с течением времени стремится к одному из ее стационарных решений, определенных формулами (2), (3).

2. Устойчивость стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного синхронным электромотором

2.1. Уравнения движения. Рассматривается обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе, согласно которой элементы подвеса имеют произвольную форму, внутренняя ось подвеса, вообще говоря, неортогональна наружной оси подвеса и оси ротора, и эти три оси не пересекаются в одной точке. Диссипативные или управляющие моменты на осях подвеса отсутствуют. Предполагается, что наружная ось подвеса вертикальна, динамически и статически уравновешенный гироскоп является ротором синхронного электромотора, а его статор является частью внутреннего элемента подвеса.

Положение прибора определяют углы α , β поворота наружного и внутреннего элементов подвеса и угол φ поворота ротора. Удвоенная кинетическая энергия выражается формулой

$$2T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta) = G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}. \quad (4)$$

Здесь $C > 0$ – осевой момент инерции ротора, коэффициенты $G(\beta)$, $N(\beta)$, $Q(\beta)$ и потенциальная энергия силы тяжести $U(\beta)$ являются тригонометрическими полиномами по отношению к углу β . При любом значении β коэффициенты квадратичной формы (4) удовлетворяют неравенствам Сильвестра.

Движение рассматриваемой электромеханической системы описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений Лагранжа для ее механической части и входящих в (1) уравнений для электрических токов. Обобщенные силы для углов α и β равны нулю и $-dU(\beta)/d\beta$. Обобщенной силой для угла φ является правая часть первого из уравнений (1). Вместо угла φ используется угол $\gamma = \varphi - \omega t$. Эта система уравнений имеет фазовый вектор $y = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_1})$. Она допускает интеграл $\dot{\alpha} G(\beta) + \dot{\beta} N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) = p$ ($p = \text{const}$).

Принимая постоянную p в качестве фазовой переменной вместо $\dot{\alpha}$, получаем преобразованную систему дифференциальных уравнений движения с фазовым вектором $z = (p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_1})$.

2.2. Стационарные решения. Далее предполагается, что $c_0/b_0 < 1$ в (1). Тогда преобразованная система уравнений имеет стационарные решения

$$p = p^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, \quad i_{n_1} = 0. \quad (5)$$

Они описывают регулярные прецессии ротора относительно наружной оси подвеса с угловой скоростью $\Omega^0 = (p^0 - \omega Q(\beta^0))/G(\beta^0)$ и, в частности, равномерные вращения ротора. Условиями существования стационарного решения (5) являются соотношения

$$dU_*(p^0, \beta^0)/d\beta = 0, \quad dU_1(\gamma^0)/d\gamma = 0, \quad (6)$$

где через

$$U_*(p, \beta) = U(\beta) + [p - \omega Q(\beta)]^2/[2G(\beta)], \quad U_1(\gamma) = \int_0^\gamma (b_0 \sin\sigma + c_0) d\sigma = b_0(1 - \cos\gamma) + c_0\gamma$$

обозначены приведенная механическая потенциальная энергия и потенциальная энергия, связанная с электромотором. Первое условие (6) определяет по крайней мере два стационарных значения β^0 угла β на каждом 2π -периоде — это точки экстремума функции $U_*(p, \beta)$, второе условие (6) определяет указанные в (3) точки γ_{1s} и γ_{2s} минимума и максимума функции $U_1(\gamma)$.

При выполнении этих условий для функции $U_*(p^0, \beta)$ переменной β существуют четыре возможности: эта функция при стационарном значении $\beta = \beta^0$ имеет: А) изолированный минимум; В) изолированный максимум; С) перегиб с горизонтальной касательной; D) $U_*(p^0, \beta) \equiv \text{const}$. Для функции $U_1(\gamma)$ существуют две возможности: эта функция при стационарном значении $\gamma = \gamma^0$ имеет: а) изолированный минимум; б) изолированный максимум. Комбинируя эти возможности, получаем 8 типов стационарных решений преобразованной системы.

2.3. Критерий устойчивости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. При использовании многофазовой модели синхронного электромотора наличие изолированного минимума функции $U_*(p^0, \beta)$ при $\beta = \beta^0$ и изолированного минимума функции $U_1(\gamma)$ при $\gamma = \gamma^0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного решения (5) преобразованной системы уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе, снабженного синхронным электромотором, исключая, быть может, особую ситуацию, когда в случае D в качестве γ^0 выбрана точка минимума функции $U_1(\gamma)$, а в качестве β^0 выбрана точка минимума функции $U_p(\beta, \gamma)$, существующая при возмущенных значениях постоянной p .

Этот результат установлен в [5, 6]. Доказательство устойчивости в случае изолированного минимума функций $U_*(p^0, \beta)$ и $U_1(\gamma)$ основано на теореме Рауса–Ляпунова–Сальвадори (см. [7, 8]). В случаях, когда изолированного минимума нет, но $U_*(p^0, \beta) \not\equiv \text{const}$, применяется теорема Барбашина–Красовского о неустойчивости [9].

Случай D, когда механическая приведенная потенциальная энергия постоянна по отношению к β при специальном значении постоянной p , является критическим в рамках используемого здесь энергетического подхода. Для доказательства неустойчивости в этом случае с помощью принципа инвариантности Ла-Салля ([10], теорема VI) устанавливается, что сколь угодно малое ненулевое возмущение постоянной p и сколь угодно малые начальные возмущения остальных переменных в преобразованной системе, как правило, можно выбрать так, что возмущенная начальная точка попадет в область притяжения асимптотически устойчивой стационарной точки, которая удалена от начальной на конечное расстояние. В случае D такой подход позволяет установить неустойчивость всех невозмущенных стационарных решений, существующих при невозмущенном значении постоянной p при всех значениях β^0 , за исключением единственного значения β^0 на 2π -периоде.

Критерий устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, полученный в теореме 2 на основе многофазовой модели синхронного электромотора, совпадает с таким критерием, установленным ранее с помощью бестоковой модели электромотора. В бестоковой модели для момента сил, действующих относительно оси ротора, вместо правой части первого уравнения (1) используется выражение $M = -b_0 \sin\gamma - c_0$. Такое совпадение говорит об адекватности бестоковой модели.

Случай D невозможен для общепринятой конструкции гироскопа в кардановом подвесе. Поэтому для

такой конструкции наличие одновременного изолированного минимума функций $U_*(p^0, \beta)$ и $U_1(\gamma)$ является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного движения, то есть вопрос об устойчивости решен полностью.

Литература

1. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 18-27.
2. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 74-85.
3. Леонов Г.А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 238-244.
4. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
5. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многоугольной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 1 // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 124-141.
6. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многоугольной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 2 // Известия РАН. Механика твердого тела. 2021. № 1. С. 50-68.
7. Сальвадори Л. Об устойчивости движения // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1970. Т. 6 (124). С. 3-19.
8. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Теорема Рауса-Ляпунова и ее обобщения // Журнал теоретической и прикладной механики (ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", Донецк). 2017. № 3-4 (60-61). С. 3-10.
9. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука. 1967. 224 с.
10. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.

ОБ АНАЛОГАХ КЛАССИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ В ДИНАМИКЕ ГИРОСТАТА

Косов А.А.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М.Матросова СО РАН, Россия
kosov_idstu@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки при действии момента потенциальных и гироскопических сил. Получены аналоги случаев Лагранжа и Гесса. Для гиростата Горячева–Сретенского с нелинейным потенциалом получены семейства перманентных вращений и найдены условия их устойчивости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-29-00819.

Введение

В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости, так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить дополнительный частный интеграл [1]. Исследования динамических свойств гиростатов с использованием первых интегралов остаются актуальными и продолжаются [2]. В докладе будут представлены аналоги некоторых классических случаев для гиростата при действии момента потенциальных и гироскопических сил.

Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим уравнения движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda) \times \omega + M; \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \quad (2)$$

Здесь ω – вектор угловой скорости; γ – единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат; $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3) > 0$ – матрица тензора инерции относительно неподвижной точки; λ – вектор гиростатического момента; $M = M(t, \gamma, \omega)$ – вектор момента сил, действующих на гиростат. Будем рассматривать в качестве первых интегралов следующие функции

$$J_1 = J_1(\gamma, \omega) = \omega^T I \omega + 2U(\gamma) = c_1 = \text{const}, \quad (3)$$

$$J_2 = J_2(\gamma, \omega) = \gamma^T (I\omega + \lambda) + V(\gamma) = c_2 = \text{const}, \quad (4)$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T \gamma = 1. \quad (5)$$

где $U(\gamma)$ и $V(\gamma)$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции.

Отметим, что геометрический интеграл (5) имеет место при любом выборе момента $M = M(t, \gamma, \omega)$. Но для того, чтобы у системы (1), (2) существовали интеграл энергии (3) и интеграл площадей (4), момент $M = M(t, \gamma, \omega)$ не может быть произвольным, а должен удовлетворять определенным условиям. Эти необходимые и достаточные условия даются следующим утверждением.

Утверждение 1. Для того, чтобы функции (3) и (4) были первыми интегралами для системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы момент M был представим в виде

$$M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \omega + L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma, \quad (6)$$

где $L(t, \gamma, \omega)$ – произвольная функция.

Данное утверждение показывает, что первые интегралы (3) и (4) определяют момент M в правой части (1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей $L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$. Первые два слагаемых в формуле момента (6) представляют собой соответственно момент потенциальных сил $\gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$ с потенциалом $U(\gamma)$ и момент гироскопических сил $\frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \omega$, определяемый функцией $V(\gamma)$.

Аналог случая Лагранжа

Утверждение 2. Пусть для системы (1), (2), (6) выполняются условия:

1. $I_1 = I_2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0;$

2. $U(\gamma) = U(\gamma_1^2 + \gamma_2^2, \gamma_3);$

3. $V(\gamma) = 0.5s(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \varphi(\gamma_3)$, где s – некоторая постоянная, а $\varphi(\gamma_3)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция;

4. $L = L(\gamma_3)$ – произвольная непрерывная функция.

Тогда система (1), (2), (6) кроме интегралов (3)-(5) имеет дополнительный интеграл $J_4 = I_3 \omega_3 + \int_0^{\gamma_3} L(y) dy - s\gamma_3$ и полностью интегрируема.

Аналог случая Гесса

Утверждение 3. Пусть для системы (1), (2), (6) выполняются условия:

1. Функция $U(\gamma)$ имеет вид $U(\gamma) = F(a\gamma_1 + c\gamma_3)$, где a, c – ненулевые постоянные, а $F(\theta)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента $\theta = a\gamma_1 + c\gamma_3$;

2. Компонента λ_2 вектора гиросtatического момента $\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ удовлетворяет равенству $\lambda_2 = 0$;

3. $I_1 > I_2 > I_3$, $a^2 I_1 (I_2 - I_3) = c^2 I_3 (I_1 - I_2)$;

4. Функция $V(\gamma)$ имеет вид $V(\gamma) = \Phi(a\gamma_1 + c\gamma_3) + 0,5\gamma^T S \gamma$, где $\Phi(\theta)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента $\theta = a\gamma_1 + c\gamma_3$, а $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$;

5. $L(t, \gamma, \omega) \equiv L = \frac{I_1 s_{11} - I_2 s_{22}}{I_1 - I_2} = \text{const}$;

6. $a^2 (s_{22} - s_{33}) = c^2 (s_{11} - s_{22})$.

Тогда функция $J_5 = aI_1\omega_1 + cI_3\omega_3 + b_1\gamma_1 + b_3\gamma_3 + d$, где $d = \frac{aI_1(c\lambda_1 - a\lambda_3)}{c(I_1 - I_2)}$, $b_1 = \frac{aI_1(s_{11} - s_{22})}{I_1 - I_2}$, $b_3 = \frac{cI_1(s_{11} - s_{22})}{I_1 - I_2}$,

удовлетворяет равенству $\dot{J}_5 = \left. \frac{dJ_5}{dt} \right|_{(1),(2),(6)} = K\omega_2 J_5$, где $K = \frac{c(I_1 - I_2)}{aI_1} = \frac{a(I_2 - I_3)}{cI_3}$, и система (1), (2), (6) имеет

помимо интегралов (3)–(5) дополнительный частный интеграл $J_4 = aI_1\omega_1 + cI_3\omega_3 + b_1\gamma_1 + b_3\gamma_3 + d = 0$.

Устойчивость перманентных вращений гиростата Горячева–Сретенского с нелинейным потенциалом

Рассмотрим гиростат Горячева–Сретенского в случае нелинейного потенциала $U = U(\gamma_1)$, где $U(\gamma_1)$ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Уравнения движения (1) записываются так

$$4I_3\dot{\omega}_1 = 3I_3\omega_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \quad 4I_3\dot{\omega}_2 = -3I_3\omega_1\omega_3 + \lambda_3\omega_1 + U'(\gamma_1)\gamma_3, \quad I_3\dot{\omega}_3 = -U'(\gamma_1)\gamma_2. \quad (7)$$

Рассмотрим уравнение $U'(z) = 0$ и будем далее предполагать, что оно имеет вещественные корни с модулем не более 1.

Утверждение 4. Для каждого вещественного корня $z = \eta$ уравнения $U'(z) = 0$ с модулем $|\eta| \leq 1$ система (7), (2) имеет семейство состояний покоя

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \eta, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi, \quad \bar{\gamma}_3 = \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi, \quad (8)$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Утверждение 5. Для каждого вещественного корня $z = \eta$ уравнения $U'(z) = 0$ с модулем $|\eta| < 1$ система (7), (2) имеет семейство перманентных вращений

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\lambda_3 \eta}{3I_3 \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi}, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{\lambda_3 \cos \varphi}{3I_3 \sin \varphi}, \quad \bar{\omega}_3 = \frac{\lambda_3}{3I_3}, \quad \bar{\gamma}_1 = \eta, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi, \quad \bar{\gamma}_3 = \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi \quad (9)$$

где $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi$.

Утверждение 6. Каждое состояние покоя из семейства (8), для которого выполняется условие $U''(\bar{\gamma}_1) > 0$, устойчиво по Ляпунову.

Таким образом, при выполнении условия $U''(\eta) > 0$ устойчивыми будут сразу все состояния покоя из соответствующего этому корню η однопараметрического семейства (8).

Утверждение 7. Каждое состояние покоя из семейства (8), для которого выполняется условие $U''(\bar{\gamma}_1) < 0$, неустойчиво по Ляпунову.

Утверждение 8. Каждое перманентное вращение из однопараметрического семейства (9), для которого выполняется условие $U''(\bar{\gamma}_1) > 0$, устойчиво по Ляпунову.

Утверждение 9. Каждое перманентное вращение из семейства (9), для которого выполняется условие $U''(\bar{\gamma}_1) < 0$, неустойчиво по Ляпунову.

Литература

1. А.В.Борисов, И.С.Мамаев // Динамика твердого тела. 2001. 384 с.
2. V.Lanchares, M.İñarrea, A.Pascual, A.Elipse // Stability Conditions for Permanent Rotations of a Heavy Gyrostat with Two Constant Rotors. Mathematics. 2022. 10. 1882. <https://doi.org/10.3390/math10111882>

О ДВИЖЕНИИ ШАРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛОСКОСТЯМИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Кошелев А.А.^{1,2}, Кугушев Е.И.¹, Шахова Т.В.¹

1 - Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

2 - Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

koshelev030698@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача о движении шара между горизонтальными плоскостями, равномерно вращающимися вокруг неподвижных вертикальных осей. В точках контакта шара с плоскостями действуют силы линейного вязкого трения. Центр масс шара совпадает с его геометрическим центром, центральный тензор инерции шаровой. Найдены стационарные движения шара и указаны параметры системы, при которых эти движения устойчивы или же неустойчивы. Также рассмотрен случай малоинерционного шара, уравнения движения которого имеют тихоновский тип, что позволяет изучить динамику шара на конечном отрезке времени в пределе при стремлении центрального момента инерции шара к нулю.

Введение

На динамику механических систем, содержащих шарнирные соединения, может заметным образом влиять то, что шарниры этих систем работают в неидеальных условиях. Одна из причин нарушения идеальности шарнира состоит в наличии небольших инородных тел между рабочими поверхностями шарнира. При этом интересным является вопрос о миграции таких инородных тел, когда рабочие поверхности шарнира совершают относительные перемещения. В простейшей постановке этой задачи изучается динамика шара, стесненного двумя параллельными движущимися плоскостями. В данной работе шар находится между равномерно вращающимися вокруг неподвижных осей плоскостями с линейным вязким трением. Задача о движении шара по вращающейся плоскости с линейным вязким трением рассматривалась в [1].

Постановка задачи и уравнения движения

Рассмотрим задачу о движении шара массы m и радиуса a между двумя горизонтальными плоскостями. Каждая плоскость вращается с постоянной угловой скоростью величины Ω_i вокруг некоторой неподвижной вертикальной оси. В точке контакта шара с плоскостью действует сила линейного вязкого трения $\mathbf{F}_i = -c_i \mathbf{u}_i$, где c_i – коэффициент вязкого трения; \mathbf{u}_i – скорость точки контакта относительно вращающейся плоскости ($i = 1, 2$). Расстояние между осями вращения плоскостей равно $2l$. Центр масс шара совпадает с его геометрическим центром, центральный тензор инерции шаровой, главный центральный момент инерции шара равен $I = \sigma m a^2$.

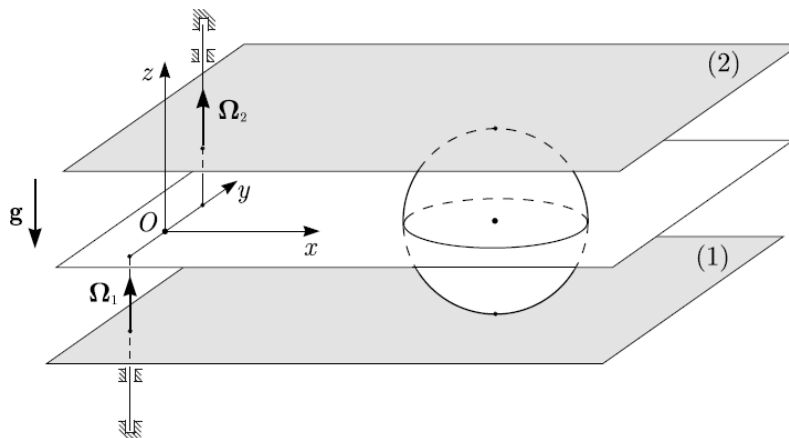


Рис. 1. Шар между горизонтальными вращающимися плоскостями.

Центр масс шара движется в горизонтальной плоскости. Введем неподвижную систему координат $Oxuz$ с началом O в середине отрезка, соединяющего точки пересечения осей вращения плоскостей с плоскостью движения Oxu центра масс шара, ось Oy направлена вдоль этого отрезка, ось Oz вертикальна (рис. 1).

Уравнения движения шара имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}, & m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\alpha\mathbf{v} + [\mathbf{e}_z, (-\beta a\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \gamma\mathbf{r} + \delta\mathbf{l})], \\ I \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\parallel}}{dt} &= \beta a[\mathbf{e}_z, \mathbf{v}] - \alpha a^2 \boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \delta a\mathbf{r} + \gamma a\mathbf{l}, & \frac{d\omega_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r} , \mathbf{v} – радиус-вектор и скорость центра масс шара; $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \omega_z \mathbf{e}_z$ – угловая скорость шара, $\mathbf{l} = l\mathbf{e}_y$, $\alpha = c_1 + c_2$, $\beta = c_1 - c_2$, $\gamma = c_1\Omega_1 + c_2\Omega_2$, $\delta = c_1\Omega_1 - c_2\Omega_2$. Из последнего уравнения системы следует, что проекция угловой скорости шара на вертикаль постоянна: $\omega_z = \text{const}$. Далее это уравнение рассматриваться не будет. В безразмерных переменных $\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{a}$, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{a\Omega_1}$, $\mathbf{w} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{\parallel}}{\Omega_1}$, $\tau = \Omega_1 t$ уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau} &= \mathbf{u}, & \mu \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= -(1+k)\mathbf{u} + [\mathbf{e}_z, (-(1-k)\mathbf{w} + (1+k\chi)\boldsymbol{\rho} + (1-k\chi)\mathbf{s})], \\ \sigma\mu \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} &= (1-k)[\mathbf{e}_z, \mathbf{u}] - (1+k)\mathbf{w} + (1-k\chi)\boldsymbol{\rho} + (1+k\chi)\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k = \frac{c_2}{c_1}$, $\chi = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, $\mu = \frac{m\Omega_1}{c_1}$, $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{l}}{a} = \frac{l}{a}\mathbf{e}_y$.

Стационарные движения шара

Стационарные решения уравнений (2), отвечающие стационарным движениям шара, имеют вид

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\chi - 1}{1 + \chi} \mathbf{s}, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{w} = \frac{2\chi}{1 + \chi} \mathbf{s} \quad \text{при} \quad \chi \neq -1 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\rho} = \text{const}, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{w} = \boldsymbol{\rho} \quad \text{при} \quad \chi = -1, \quad \mathbf{s} = 0.$$

Проверим характер устойчивости найденных стационарных решений. Система уравнений (2) является линейной неоднородной системой уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому она устойчива (асимптотически устойчива, неустойчива) тогда и только тогда, когда нулевое решение соответствующей линейной однородной системы устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво). Характеристическое уравнение однородной системы имеет вид

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0,$$

$$\text{где} \quad a_1 = \frac{2(1+\sigma)(1+k)}{\sigma\mu}, \quad a_2 = \frac{(1+\sigma)^2(1+k)^2}{\sigma^2\mu^2} + \frac{8k}{\sigma\mu^2}, \quad a_3 = \frac{8k(1+\sigma)(1+k)}{\sigma^2\mu^3}, \quad a_4 = \frac{(1+k\chi)^2}{\mu^2} + \frac{16k^2}{\sigma^2\mu^4},$$

$$a_5 = \frac{4k(1+\chi)(1+k\chi)}{\sigma\mu^3}, \quad a_6 = \frac{4k^2(1+\chi)^2}{\sigma^2\mu^4}.$$

Если $a_5 < 0$, то всегда имеет место неустойчивость. В этом случае параметры k и χ системы удовлетворяют неравенству $(1+\chi)(1+k\chi) < 0$. При $\chi \neq -1$ ($\Omega_1 \neq -\Omega_2$) с использованием критерия Гурвица численно было показано существование асимптотически устойчивых стационарных решений. В частности, асимптотическая устойчивость возможна при $\chi = -0,99$, $\sigma = 0,5$, $\mu = 20$, $k \in [0,6; 0,9]$.

При $\chi = -1$ ($\Omega_1 = -\Omega_2$) коэффициенты a_5 и a_6 характеристического уравнения равны нулю, поэтому оно имеет нулевой корень кратности 2. Значит, в этом случае асимптотическая устойчивость стационарных решений невозможна. Нулевой корень является кратным корнем с простыми элементарными делителями. Применив критерий Гурвица к многочлену $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$, согласно теореме об устойчивости линейной однородной системы [2], получим условие устойчивости стационарного решения при $\chi = -1$:

$$2\sqrt{k}(1+\sigma)(1+k) - |1-k|\sqrt{\sigma}\mu > 0.$$

Малоинерционный шар

Рассмотрим два случая, при которых главный центральный момент инерции I шара мал (малоинерционный шар) [3]. Пусть масса шара постоянна и сосредоточена вблизи его центра. Тогда $\sigma = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. В этом случае третья группа уравнений (2) имеет малый параметр ε в левой части. С использованием теоремы Тихонова [4] доказано утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\boldsymbol{\rho}(\tau, \varepsilon)$, $\mathbf{u}(\tau, \varepsilon)$, $\mathbf{w}(\tau, \varepsilon)$ – решение уравнений (2) с начальными условиями $\boldsymbol{\rho}(0) = \boldsymbol{\rho}_0$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$ на некотором конечном отрезке времени $\tau \in [0, T]$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\boldsymbol{\rho}(\tau, \varepsilon)$, $\mathbf{u}(\tau, \varepsilon)$ сходятся на отрезке $\tau \in [0, T]$ к решению $\boldsymbol{\rho}^*(\tau)$, $\mathbf{u}^*(\tau)$ уравнений

$$\frac{d\rho^*}{d\tau} = \mathbf{u}^*, \quad \mu \frac{d\mathbf{u}^*}{d\tau} = \frac{2k}{1+k} (-2\mathbf{u}^* + [\mathbf{e}_z, ((1+\chi)\rho^* + (1-\chi)\mathbf{s})]) \quad (3)$$

с начальными условиями $\rho^*(0) = \rho_0$, $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{u}_0$, а функция $\mathbf{w}(\tau, \varepsilon)$ сходится на промежутке $\tau \in (0, T]$ к функции

$$\mathbf{w}^*(\tau) = \frac{1}{1+k} ((1-k)[\mathbf{e}_z, \mathbf{u}^*(\tau)] + (1-k\chi)\rho^*(\tau) + (1+k\chi)\mathbf{s}).$$

Уравнения (3) имеют вид уравнений движения материальной точки, находящейся между двумя горизонтальными равномерно вращающимися плоскостями с линейным вязким трением. Эти уравнения являются линейными неоднородными уравнениями с постоянными коэффициентами и интегрируются путем введения комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ (ξ, η – координаты центра масс шара в безразмерных переменных). Среди решений этих уравнений есть такие решения, что центр масс шара в любой момент времени находится на окружности с центром на оси Oy , причем радиус этой окружности стремится к нулю.

Пусть теперь масса шара мала. Тогда $\mu = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. В этом случае вторая и третья группы уравнений (2) имеют малый параметр ε в левой части.

Утверждение 2. Пусть $\rho(\tau, \varepsilon)$, $\mathbf{u}(\tau, \varepsilon)$, $\mathbf{w}(\tau, \varepsilon)$ – решение уравнений (2) с начальными условиями $\rho(0) = \rho_0$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$ на некотором конечном отрезке времени $\tau \in [0, T]$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\rho(\tau, \varepsilon)$ сходится на отрезке $\tau \in [0, T]$ к решению $\rho^*(\tau)$ уравнения

$\frac{d\rho^*}{d\tau} = \frac{1}{2} [\mathbf{e}_z, ((1+\chi)\rho^* + (1-\chi)\mathbf{s})]$ с начальными условиями $\rho^*(0) = \rho_0$, а функции $\mathbf{u}(\tau, \varepsilon)$, $\mathbf{w}(\tau, \varepsilon)$ сходятся на промежутке $\tau \in (0, T]$ к функциям

$$\mathbf{u}^*(\tau) = \frac{1}{2} [\mathbf{e}_z, ((1+\chi)\rho^*(\tau) + (1-\chi)\mathbf{s})], \quad \mathbf{w}^*(\tau) = \frac{1}{2} ((1-\chi)\rho^*(\tau) + (1+\chi)\mathbf{s}).$$

В случае, когда масса шара мала, движение шара в пределе совпадает с движением однородного шара, находящегося между двумя абсолютно шероховатыми вращающимися плоскостями. Если $\chi \neq -1$ ($\Omega_1 \neq -\Omega_2$), то центр масс шара движется по окружности с центром на оси Oy , если $\chi = -1$ ($\Omega_1 = -\Omega_2$), то по прямой, параллельной оси Oy или совпадающей с ней.

Заключение

Изучены некоторые вопросы динамики шара, находящегося между двумя горизонтальными равномерно вращающимися плоскостями с линейным вязким трением. Найдены стационарные движения шара, получены условия, при которых эти движения являются устойчивыми или же неустойчивыми. Исследовано движение малоинерционного шара на произвольном конечном отрезке времени в пределе при стремлении главного центрального момента инерции шара к нулю.

Литература

1. Ivanova T. B. // The Rolling of a Homogeneous Ball with Slipping on a Horizontal Rotating Plane, Rus. J. Nonlin. Dyn., 15:2, 2019. 171–178.
2. Карапетян А. В. // Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2020. 188 с.
3. Koshelev A., Kugushev E., Shahova T. // Dynamics of a low-inertia ball located between two rotating planes with viscous friction. 16th International Conference Dynamical Systems – Theory and Applications. Abstracts. Politechnika Łódzka Łódz, 2021. 137–138.
4. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. // Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.

УСРЕДНЕННАЯ КРУГОВАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ: ВНУТРЕННИЙ ВАРИАНТ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Красильников П.С., Доброславский А.В.

Московский авиационный институт, Москва, Россия
krasil06@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Исследована эволюция орбиты спутника на основе схемы Гаусса, когда невозмущенная орбита – кеплеровский эллипс с фокусом в основном теле (Солнце), большая полуось эллипса меньше радиуса орбиты внешней планеты. Показано, что дважды усредненная силовая функция задачи допускает явное аналитическое представление с помощью рядов из гипергеометрических функций Гаусса, Клаузена. Исследовано поведение этой функции на кривых неаналитичности: ряды являются расходящимися, но асимптотическими. Для редуцированной системы с одной степенью свободы построены фазовые портреты колебаний во втором и четвертом приближениях.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00560.

Введение

Исследуется классическая задача об эволюции кеплеровской орбиты тела бесконечно малой массы, находящегося в гравитационном поле двух массивных небесных тел (Солнца и Юпитера). Предполагается, что орбита Юпитера является круговой.

Известно, что в такой классической постановке задача исследована достаточно подробно. Так, в статье [1] решения возмущенных уравнений движения представлены в виде рядов Линдштедта, исследовано поведение усредненной силовой функции задачи, когда орбита малого тела «цепляется» с орбитой Юпитера, исследованы ее стационарные точки. В статьях [2], [3] исследовано первое (хилловское) приближение для дважды усредненной силовой функции задачи, подробно проведен количественный и качественный анализ уравнений движения в указанном приближении. В работе [4] исследованы усредненные уравнения второго приближения, делается вывод о топологической эквивалентности фазового портрета хилловскому случаю. В статье [5] приводится подробный численный анализ редуцированных уравнений движения.

Цель исследований – получить новые результаты в двукратно усредненной задаче Гаусса, используя явное компактное представление усредненной силовой функции в виде степенного ряда, либо в виде ряда Фурье. Постановка задачи и результаты исследований отличаются от численных исследований [5], в которых силовую функцию рассматривают в виде квадратуры, неприводимой в конечном виде.

Постановка задачи

Введем неинерциальную гелиоцентрическую систему координат S . Ось Sx направим в точку весеннего равноденствия, ось Sz направим по нормали к плоскости движения возмущающего тела, ось Sy дополняет систему до правой. Пусть r – радиус-вектор тела P , r_j – радиус вектор тела J ; Ω – долгота восходящего узла невозмущенной орбиты спутника на плоскости Π_0 ; e , ω – эксцентриситет и аргумент перицентра этой орбиты, λ_j – долгота тела J , а λ – долгота тела P в плоскости Π_0 (рис. 1).

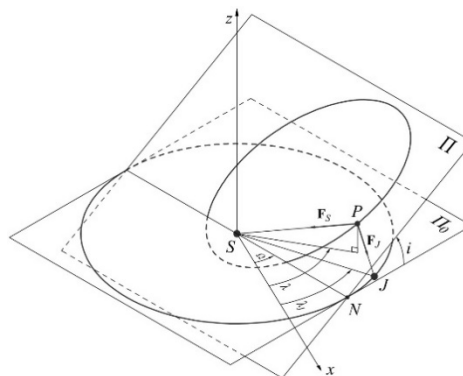


Рис. 1. Невозмущенные траектории небесных тел. Угловые переменные.

Считаем, что a – большая полуось траектории малого тела, при этом $a < r_j$ (внутренняя задача). Тогда, учитывая, что γ – угол между r_j и r , P_n – полиномы Лежандра, возмущенная силовая функция примет вид

$$R = \frac{f m_j}{r_j} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_j} \right)^n P_n(\cos \gamma).$$

Необходимо описать эволюцию кеплеровских элементов орбиты под действием притяжения возмущающего тела.

Усредненная силовая функция

Считаем, что частота ω_j ($\lambda_j = \omega_j t + \lambda_{j0}$) не резонирует с частотой n невозмущенного движения спутника. Результат усреднения по долготе λ_j известен. Представим результат двукратного усреднения по двум быстрым переменным λ_j, λ в виде ряда Фурье:

$$R^{**} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\lambda_j d\lambda = \frac{f m_j}{r_j \sqrt{1-e^2}} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n \omega \right]$$

Здесь

$$a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right), \quad a_n = (-1)^n \left(2 \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k} A_{2n}^{(2k)} \right)$$

$$A_m^{(2n)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) (m \leq 2n)$$

$$B_{2n} = \left(\frac{a}{r_j} \right)^{2n} (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0)$$

Здесь $F_{2,1}, F_{3,2}^{reg}$ – функции Гаусса и Клаузена; ω – аргумент перицентра орбиты спутника; i – наклонение его орбиты; P_{2n} – полиномы Лежандра.

Выпишем также усредненную силовую функцию в виде степенного ряда по малому параметру (a/r_j) :

$$R^{**} = \frac{f m_j}{r_j \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{a}{r_j} \right)^{2k} \quad (1)$$

$$D_k = (1+e)^{2k+2} P_{2k}(0) \left(P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2k+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + 2 \sum_{n=1}^k (-1)^n A_{2n}^{(2k)} \cos 2n \omega \right)$$

Асимптотическое поведение усредненной силовой функции на кривых неаналитичности

Кривые неаналитичности усредненной силовой функции R^{**} известны [5, 6]:

$$f_1(a, e, \omega) \equiv \frac{a}{r_j} (1-e^2) - 1 + e \cos \omega = 0, \quad f_2(a, e, \omega) \equiv \frac{a}{r_j} (1-e^2) - 1 - e \cos \omega = 0$$

Этим кривым соответствуют пересечения орбит спутника (астероида) и внешнего тела (Юпитера). Указанные кривые выделяют в плоскости e, ω область, в которой орбиты указанных тел топологически «зацеплены». Аналитические выражения для R^{**} внутри этой области и вне ее существенно различны. В окрестности этих кривых метод усреднения неприменим, так как не существует равномерного среднего. На этот факт впервые обратили внимание в статьях [7, 8], где рассмотрен также вопрос модификации метода усреднения в окрестности кривых неаналитичности.

На рис. 2, 3 можно видеть зависимость значения силовой функции и ее производной по ω в фиксированной точке фазового пространства оскулирующих элементов от числа удерживаемых членов ряда. Частичная сумма первых 40 членов степенного ряда (1) хорошо приближает силовую функцию R^{**} , и только удержание большего количества членов ряда приводит к его расходимости. Таким образом, ряд (1) является асимптотическим по Пуанкаре. Этот факт подтверждается многочисленными расчетами вдоль кривых неаналитичности.

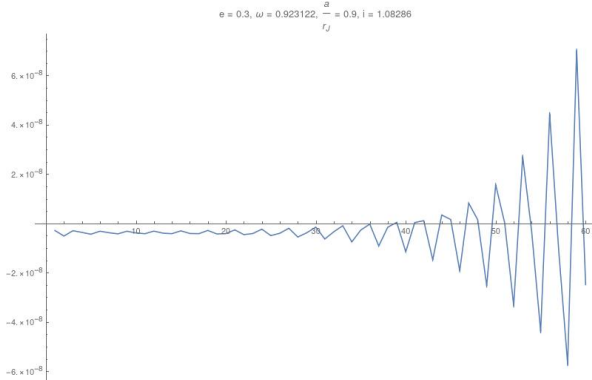


Рис. 2. Расходимость ряда (1).

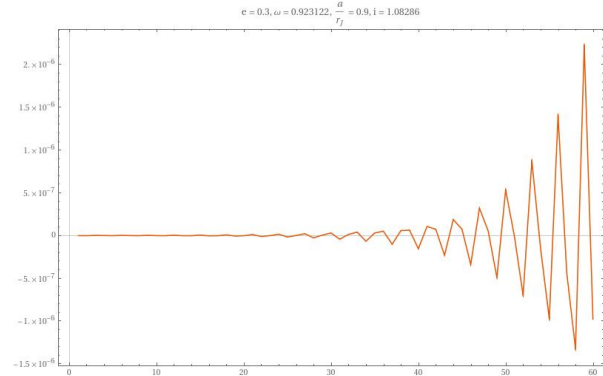


Рис. 3. Расходимость производной от ряда (1).

Усредненные уравнения движений. Фазовые портреты колебаний

С помощью известных первых интегралов

$$a = c_0, \quad (1 - e^2)\cos^2 i = c_1$$

усредненные уравнения в оскулирующих элементах приводятся – путем исключения i – к редуцированным уравнениям с одной степенью свободы:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e},$$

где $\hat{R}(e, \omega) = c_2$ – дополнительный первый интеграл. Раскладывая функцию $\hat{R}(e, \omega)$ в ряд по (a/r_1) и удерживая члены до восьмого порядка малости (a/r_1) , получим фазовые портреты колебаний по e, ω (рис. 4, 5)

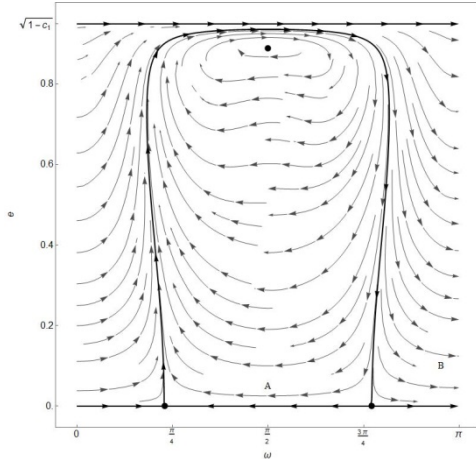


Рис. 4. Фазовый портрет второго приближения.

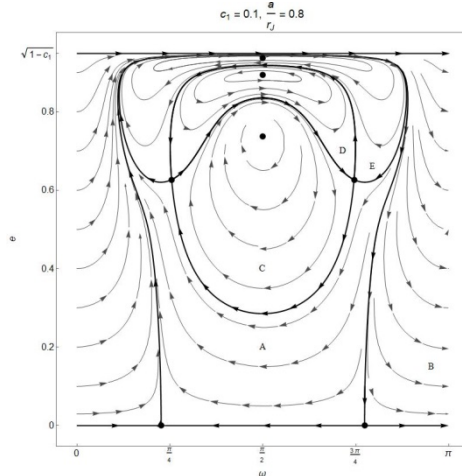


Рис. 5. Фазовый портрет четвертого приближения.

Заметим, что топология фазового портрета третьего приближения совпадает с топологией четвертого приближения за исключением малой окрестности точки $c_1 = 0$.

Заключение

Следующие результаты являются новыми.

1. Получены явные компактные выражения для усредненной силовой функции в виде ряда Фурье и степенного ряда.
2. Доказана расходимость усредненной силовой функции вдоль кривых неаналитичности.
3. Показано, что расходящиеся ряды, описывающие усредненную силовую функцию на кривых неаналитичности, являются асимптотическими по Пуанкаре.
4. Построены фазовые портреты колебаний во втором, четвертом приближениях, при этом кривые неаналитичности не проявляют себя.

Литература

1. von Zeipel, H. Sur l'application des séries de M. Lindstedt a l'etude du mouvement des cometes periodiques // *Astronomische Nachrichten*, v. 183, p. 345 – 418, 1910
2. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. // *Искусственные спутники Земли*, 1961. Т. 8. С. 5–45.
3. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astronomical Journal*. – 1962. – Vol. 67, no. 9. – p. 591–598
4. Brown E.W. The stellar Problem of Three Bodies I, II and III. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1936. V. 97. P. 56–61, P. 62–66, P. 116–127.
5. Вашковыяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование. // *Космические исследования*. 1981. Т. 19. С. 5–18.
6. Lidov M.L., Ziglin S.L. The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits. // *Celestial Mechanics*. 1974. V. 9. P. 151–173.
7. Gronchi, G. F Generalized averaging principle and the secular evolution of planet crossing orbits//*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 83: 97–120, 2002
8. G.F. Gronchi and A. Milani The stable Kozai state for asteroids and comets with arbitrary semimajor axis and inclination//*Astron. Astrophys.* 341, 928–935 (1999)

КОМПЛЕКСНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ИЗБЫТОЧНЫХ КООРДИНАТАХ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ СТАБИЛИЗАЦИИ КОНФИГУРАЦИЙ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

Красинский А.Я.^{1,2}

1 - *Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
(МАИ), Москва, Россия*

2 - *Российский биотехнологический университет (РОСБИОТЕХ), Москва, Россия
krasinsk@mail.ru*

Аннотация. В современной технической практике при рассмотрении динамики конкретных устройств с геометрическими связями, в частности, параллельных манипуляторов, используются не самые эффективные методы моделирования в виде уравнений с множителями связей. Применение таких уравнений зачастую настолько усложняет модель, что затрудняет даже компьютерное моделирование. В данной работе рассмотрен альтернативный способ моделирования динамики систем с геометрическими связями, основанный на переходе к свободным от множителей связей уравнениям в избыточных координатах в форме М.Ф. Шульгина. Такой подход сокращает в сравнении с вышеуказанным размерность модели на удвоенное количество связей. Исследование значительно упрощается за счет исключения из рассмотрения зависимых скоростей и множителей связей, причем создается возможность применения нелинейной теории устойчивости в задачах стабилизации. На основе полученной модели, исходя из полного решения задачи стабилизации стелла Ball and Beam, разработан общий алгоритм решения задач стабилизации конфигураций систем с геометрическими связями до асимптотической устойчивости.

Введение

Аналитическая механика несвободных механических систем представляет собой особый раздел теоретической механики, результаты и методы которого имеют специфические особенности. Значительная часть этих методов разрабатывалась за счет строгого рассмотрения сложных абстрактно-теоретических проблем, причем их эффективность проверялась на примерах решения достаточно далеких от практики академических задач. В современной технике возникли обширные классы устройств, рассмотрение динамики которых невозможно без квалифицированного применения строгих методов аналитической механики несвободных систем. Однако в силу математической сложности и большого разнообразия методов механики несвободных систем этот раздел механики никогда не входил в стандартное инженерное образование. Поэтому, несмотря на наличие альтернативных методов исследования, в современной технической практике для моделирования динамики конкретных устройств с геометрическими связями традиционно используются математические модели в виде уравнений Лагранжа с множителями связей.

Основные общие методы аналитической механики несвободных систем с геометрическими связями и сравнение сложности их применения

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, конфигурация которой определяется параметрами q_1, \dots, q_{n+m} , число которых превышает число степеней свободы n , вследствие того, что на систему наложено m независимых геометрических связей

$$F(q) = 0; F(q) = (F_1(q), \dots, F_m(q)) \quad \det \left\| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right\| \neq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим алгоритм составления уравнений Лагранжа с множителями связей для системы со связями (1), с кинетической энергией наиболее общего вида и условиями, накладываемыми на вариации координат вследствие наличия связей (1) (здесь и далее суммирование производится по повторяющимся индексам).

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + a_i(q) \dot{q}_i + T_0; \quad b_{si}(q) \delta q_i = 0; b_{si}(q) = \frac{\partial F_s}{\partial q_i}; s = \overline{1, m}; i = \overline{1, n+m};$$
$$i, k = \overline{1, n+m};$$

на которую действуют отнесенные к координатам (потенциальные и непотенциальные) силы $Q_i(q, \dot{q})$. Из принципа Даламбера–Лагранжа можно получить [6–10] уравнения движения с множителями связей

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_s b_{si}; s = \overline{1, m}; i = \overline{1, n+m}. \quad (2)$$

В общем случае с помощью строгих методов аналитической механики получена полная нелинейная математическая модель динамики системы с геометрическими связями, включающая $n+m$ дифференциальных уравнений второго порядка (2) и m нелинейных алгебраических уравнений геометрических связей (1). При

переходе к нормальной форме получим $2(n+m)$ дифференциальных уравнений первого порядка и m алгебраических уравнений связей для определения всех $n+m$ координат, всех $n+m$ скоростей и m множителей ограничений, так что общая размерность модели равна $2(n+m)+m$.

Некоторые методы сокращения размерности модели динамики несвободных систем

При рассмотрении динамики конкретных систем большое значение приобретает сложность исследования, и, как правило, нет необходимости определять реакции связей. В этом случае появляется возможность упростить математическую модель, исключив из рассмотрения как можно больше переменных, причем исключаемыми переменными традиционно считаются множители связей. А.М. Ляпунов (стр. 354–357 [1]), Г.К. Сулов (стр. 320–331 [2]), А.И. Лурье (стр. 320–331 [3]), М.Ф. Шульгин [4] разработали общие методы такого исключения, связанные с однократным или двукратным дифференцированием по времени уравнения геометрических связей (1).

Наиболее эффективным, по нашему мнению, способом сокращения размерности модели является альтернативный метод исключения из рассмотрения множителей и зависимых скоростей за счет перехода к продифференцированным уравнениям связей и разрешения относительно зависимых скоростей:

$$b_{si}(q)\dot{q}_i = 0; b_{si}(q) = \frac{\partial F_s}{\partial q_i}; s = \overline{1, m}; i = \overline{1, n+m}; \quad \dot{q}_s = B_{sj}(q)\dot{q}_j; s = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$\|B_{si}(q)\| = \left\| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right\|^{-1} \left\| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right\|.$$

Обозначая результат исключения зависимых скоростей с помощью (3) из кинетической энергии через $T^*(q_1, \dots, q_{n+m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, а из действующих сил через Q_i^* , определяя [4] из (2) множители Лагранжа, можно получить математическую модель динамики системы в виде М.Ф. Шульгина в избыточных координатах

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_j} = Q_j^* + B_{sj}(q) \left(\frac{\partial T^*}{\partial q_s} + Q_s^* \right); \quad \dot{q}_s = B_{sj}(q)\dot{q}_j; s = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; \quad (4)$$

Такой подход существенно снижает размерность математической модели динамики систем с геометрическими связями: кроме множителей из рассмотрения исключаются и скорости зависимых в силу связей координат. Общая размерность модели в нормальной форме включает $2n-m$ дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. сокращается по сравнению с (2) и (1) на $2m$.

Одним из первых объектов, моделирование динамики которого привело автора в 2010 году к необходимости разработки комплексного применения строгих методов аналитической механики несвободных систем [1–5] и нелинейной теории устойчивости к исследованию реальных современных технических устройств, является широко распространенный учебно-лабораторный стенд Ball and Beam (рис. 1).

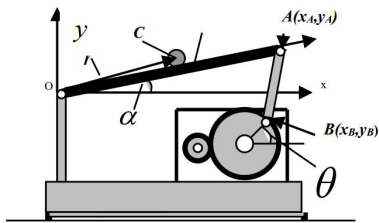


Рис. 1. Схема стенда «Ball and Beam».

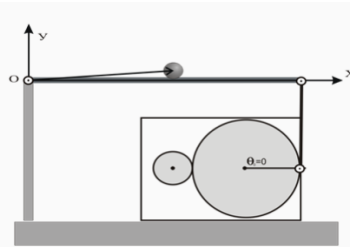


Рис. 2. Нулевое положение равновесия.

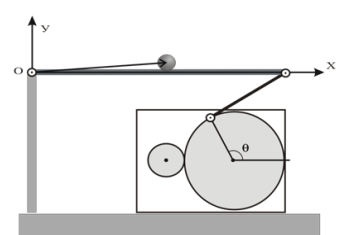


Рис. 3. Новое положение равновесия.

В этой системе электропривод за счет наклона желоба OA может перекатить шар C в любое наперед заданное положение на желобе и стабилизировать это равновесие. Желоб с одной стороны в точке O присоединен к неподвижной поддерживающей стойке, а с другой – к подвижному рычагу AB . Параметры системы таковы, что при $\theta = 0$ угол, а рычаг AB вертикален (рис. 2). Движение рычага управляется двигателем постоянного тока. На систему наложена нелинейная геометрическая связь: расстояние между точками $A(x_A, x_B)$ и $B(x_B, y_B)$ постоянно. Уравнение связи имеет вид ($L=OA$ – длина желоба, $l=AB$ – длина рычага, d – радиус выходного колеса привода):

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2. \quad (5)$$

В большинстве работ по исследованию динамики стенда Ball and Beam с геометрической связью [6–9] (кроме [10]) при построении математической модели сразу, начиная с [6], совершенно не обосновано осуществляется переход к линейной зависимости $\alpha \approx \frac{d}{L}\theta$ (см. [11] с обширной библиографией). Вследствие очевидного для равновесия шара условия $\alpha = 0$ из этого соотношения для угла поворота колеса привода получается только значение $\theta = 0$, а ненулевое положение равновесия (рис. 3) не могло быть получено и, соответственно, до 2014 года не рассматривалось. Более того, попытки приложения к реальному техническому

устройству алгоритмов управления, найденных применением самых разных методов математической теории управления для рассмотрения неадекватных математических моделей приводили к такому его поведению, которое совершенно не соответствовало модельному.

Поэтому потребовалось строгое рассмотрение динамики стенда «Ball and Beam» с учетом полной нелинейной связи (5) с позиций аналитической механики систем с геометрическими связями, нелинейной теории устойчивости и математической теории управления. Для уточненной (с учетом размера шара) нелинейной модели механической компоненты системы в виде свободных от множителей связей векторно-матричных уравнений в избыточных координатах в форме М.Ф. Шульгина было проведено [12–15] полное (с учетом динамики привода) исследование задачи стабилизации заданного положения равновесия шарика. В качестве стабилизирующего управления рассматривалось дополнительное напряжение на якорной обмотке коллекторного двигателя исполнительного привода, коэффициенты которого определены [15] из решения методом Н.Н. Красовского линейно-квадратичной задачи стабилизации. Для заключения об асимптотической (несмотря на наличие нулевого корня характеристического уравнения) устойчивости в замкнутой найденным управлением полной нелинейной системе потребовалось доказательство общей теоремы [13]. Таким образом, при рассмотрении динамики стенда Ball and Beam был полностью разработан универсальный алгоритм, применение которого оказалось эффективным и для общей задачи стабилизации заданных конфигураций манипуляторов с параллельной кинематикой: Ball and Beam по существу является параллельным манипулятором, если в качестве звена, в котором замыкаются две параллельные кинематические цепи рассматривать точку А – конец желоба.

Заключение

Подробно изложен альтернативный метод моделирования динамики систем с геометрическими связями, основанный на переходе к свободным от множителей связей уравнениям Шульгина в избыточных координатах. Такой подход существенно упрощает исследование за счет сокращения размерности модели по сравнению с традиционно применяемыми уравнениями с множителями связей и создает возможность применения результатов нелинейной теории устойчивости и математической теории управления. Эффективность предлагаемого метода продемонстрирована полным решением задачи стабилизации стенда Ball and Beam, который может быть рассмотрен как пример манипулятора с параллельной кинематикой.

Литература

1. А.М. Ляпунов // Лекции по теоретической механике. Киев. «Наукова думка». 1982. 632 с.
2. А. И. Лурье // Аналитическая механика. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. Литературы, 1961. 824 с.
3. Г.К. Суслов // Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ОГИЗ. 1946. 670 с.
4. М.Ф. Шульгин // О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании, Тр. Среднеаз. ун-та им. В.И. Ленина. Вып. 144, 1958.183 с.
5. Л. А. Парс. Трактат по аналитической динамике. Хайнеманн. 1965 год
6. W. Yu // Nonlinear PD regulation for Ball and Beam system. // Int. Journal of Electrical Engineering Education. 46: 2009. 59-73.
7. M.F. Rahmat, H. Wahid, N.A. Wahab // Application of intelligent controller in a Ball and Beam control system// Int. Journal on smart sensing and intelligent systems. 3:1 2010. 45-60.
8. M.S. Koo, H.L. Choi, J.T. Lim // Adaptive nonlinear control of a Ball and Beam system using centrifugal force term. Int. Journal of Innovative Computing, Information and Control,. 8:9. 2012. 5999-6009.
9. M. Keshmiri, A.F. Jahromi A.F., A. Mohebbi, M.H. Amoozgar, W.F. Xie // Modeling and control of Ball and Beamsystem using model based and non-model based control approaches. Int. Journal on smart sensing and intelligent systems, 5:1 2012. 14-35.
10. F. Andreev, D. Auckly, S. Gosavi, L. Kapitanski, A. Kelkar, W. White // Matching, linear systems, and the ball and beam. Automatica. 38. 2002. 2147-2152.
11. A.Q. Al-Dujaili, A.J. Humaidi, D.A. Pereira and I.K. Ibraheem // Adaptive backstepping control design for ball and beam system, Int. Review of Applied Sciences and Engineering, 12:3. 2021. 211–221. <https://doi.org/10.1556/1848.2021.00193>
12. Э.М. Красинская, А.Я. Красинский, К.Б. Обносков // О развитии научных методов школы М.Ф.Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами. Сборник научно-методических статей. Теор. Мех. Вып.28. Под ред. проф. Ю.Г. Мартыненко. М: МГУ. 2012.169-184.
13. Э.М. Красинская, А.Я. Красинский // Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами, Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. Журн. 2013:03. DOI: 10.7463/0313.0541146.
14. Э.М. Красинская, А.Я. Красинский // Моделирование динамики стенда GBV 1005 BALL AND BEAM как управляемой механической системы с избыточной координатой, Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. Журн. 2014:01. DOI: 10.7463/0114.0646446.
15. А.Я. Красинский, Э.М. Красинская // О моделировании динамики системы «Ball and Beam» как нелинейной мехатронной системы с геометрической связью. Вест. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 27:3. 2017. 414-430.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ БИНС

Логинов М.Ю., Челноков Ю.Н.

*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
mike.loginov@gmail.com*

Аннотация. Построены в явном виде точные аналитические решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений ошибок навигации БИНС шестого порядка, описывающей погрешности определения проекций относительной скорости и географических координат местоположения объекта в случаях, когда объект неподвижен по отношению к Земле, движется с постоянной скоростью на постоянной высоте вдоль экватора или вдоль земной параллели с ненулевой широтой. Построенные решения представлены в компактном и удобном для исследования виде, а для корней характеристических уравнений шестой степени, характеризующих собственную динамику БИНС, получены точные явные выражения через параметры невозмущенного движения объекта.

Построены неоднородные полные (нелинейные) и линейные (линеаризованные) дифференциальные уравнения ошибок БИНС (дифференциальные уравнения возмущенного движения БИНС), функционирующей в нормальной географической системе координат (НГСК), образующие системы нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка относительно погрешностей определения северной, вертикальной и восточной составляющих относительной скорости объекта, погрешностей определения высоты, широты, долготы и параметров Родрига-Гамильтона (Эйлера), описывающих собой ориентацию объекта в НГСК.

Изучаемые дифференциальные уравнения ошибок БИНС были построены нами на основе уравнений идеального функционирования БИНС в нормальной географической системе координат [4], которые были использованы нами для построения различных алгоритмов ориентации и навигации, реализованных, в частности, в бесплатформенной инерциальной навигационной системе «БИНС-1000», разработанной в ОАО НПК «Оптолинк» (г. Москва).

В докладе показано, что интегрирование построенной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений ошибок БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат, имеющей десятый порядок, сводится к интегрированию системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений, имеющей шестой порядок. Этой системой уравнений описываются погрешности определения проекций относительной скорости и географических координат местоположения объекта, обусловленные ошибками задания начальных значений этих навигационных параметров и ошибками задания начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат, а также инструментальными погрешностями чувствительных элементов БИНС (акселерометров и гироскопов) [7]. Возможность такого сведения обусловлена интегрируемостью в явном виде дифференциальных уравнений, описывающих ошибки определения ориентации БИНС в инерциальной системе координат (показано В.Д. Андреевым для проекций вектора малого поворота, задающих указанную ошибку ориентации [1], и нами для ошибок определения параметров Родрига-Гамильтона в кватернионных матрицах [4]), что делает возможным строгое разделение проблемы интегрирования общей системы дифференциальных уравнений ошибок БИНС на раздельное интегрирование дифференциальных уравнений ошибок навигации и ориентации (показано в докладе для изучаемых дифференциальных уравнений возмущенного движения БИНС).

Построены в явном виде точные аналитические решения этой системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений ошибок навигации БИНС шестого порядка, описывающей погрешности определения проекций относительной скорости и географических координат местоположения объекта в случаях, когда объект неподвижен по отношению к Земле [8], движется с постоянной скоростью на постоянной высоте вдоль экватора [9] или вдоль земной параллели с ненулевой широтой [10].

Построенные аналитические решения, состоящие из гармонических составляющих, а также нарастающих во времени и затухающих во времени экспоненциальных составляющих, позволяют для любого момента времени t находить погрешности определения с помощью БИНС составляющих относительной скорости, высоты, широты и долготы объекта через ошибки начального задания этих параметров, ошибки задания начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат и инструментальные погрешности чувствительных элементов БИНС. Полученные формулы характеризуют неустойчивость или устойчивость работы каналов БИНС для указанных частных случаев движения объекта. Правильность построенных аналитических решений подтверждена с помощью математического моделирования.

Решения дифференциальных уравнений ошибок БИНС представлены в компактном и удобном для исследования виде, а для корней характеристических уравнений шестой степени, характеризующих собственную динамику БИНС, в отличие от ранее известных работ других авторов, получены точные явные выражения через параметры невозмущенного движения объекта. Кроме того, построенные решения приведены к особой форме, удобной для оценки входящих в его состав амплитуд, частот и начальных фаз гармонических

составляющих, а также для оценки показателей экспоненциальных составляющих погрешностей определения навигационных величин, характеризующих их затухание или нарастание во времени. Полученные формулы для амплитуд, частот, начальных фаз и показателей экспонент характеризуют собственную динамику БИНС.

Из построенных решений линеаризованных дифференциальных уравнений ошибок БИНС следует, что они неустойчивы по всем навигационным параметрам (северной, восточной, вертикальной составляющим относительной скорости объекта, высоте, широте, долготе) в случаях неподвижного относительно Земли объекта и объекта, движущегося вдоль земной параллели с ненулевой широтой, а в случае движения объекта вдоль земного экватора эти решения уравнений ошибок БИНС неустойчивы в отношении восточной и вертикальной составляющих относительной скорости, высоты и долготы объекта, но устойчивы в отношении северной составляющей относительной скорости и широты объекта.

С помощью теоремы Ляпунова о неустойчивости движения по уравнениям первого приближения показано, что для всех трех описанных частных случаев движения объекта решения не только линеаризованных дифференциальных уравнений ошибок, но и нелинейных уравнений ошибок БИНС неустойчивы независимо от членов выше первого порядка малости.

Даны численные примеры использования построенных аналитических решений для расчета погрешностей определения с помощью БИНС составляющих относительной скорости, высоты, широты и долготы объекта через ошибки начального задания этих параметров и ошибки задания начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат, а также через инструментальные погрешности чувствительных элементов БИНС в случаях неподвижного относительно Земли объекта, а также в случаях его движения с постоянной скоростью на постоянной высоте вдоль экватора или вдоль земной параллели.

Результаты, изложенные в докладе, уточняют, развивают и обобщают ранее полученные нами результаты, опубликованные в работах [7–11].

Литература

1. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Физматгиз, 1966. 579 с.
2. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Захарин М.И. Кинематика инерциальных систем навигации. М.: Машиностроение, 1968. 236 с.
4. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
5. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
6. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 320 с.
7. Логинов М.Ю., Челноков Ю.Н. Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 64–72.
8. Логинов М.Ю., Челноков Ю.Н. Аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок БИНС для случая неподвижного объекта // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 10. С. 55–63.
9. Логинов М.Ю., Ткаченко М.Г., Челноков Ю.Н. Аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат, для случая движения вдоль экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. № 1. С. 69–84.
10. Логинов М.Ю., Челноков Ю.Н. Аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат, для случая движения вдоль земной параллели с постоянной скоростью и на постоянной высоте // Авиакосмическое приборостроение. 2013. № 6. С. 34–47.
11. Логинов М.Ю., Челноков Ю.Н. Аналитическое и численное исследование дифференциальных уравнений ошибок автономной БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат // XXV Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. докл. Санкт-Петербург. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2018.
12. Андреев В.Д. Интегрирование уравнений ошибок системы инерциальной навигации для кеплеровых движений объекта // Прикладная математика и механика, 1965, т. 24, вып. 2.
13. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 280 с.
14. Анучин О.Н., Емельянцева Г.И. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / под общ. ред. академика РАН В.Г. Пешехонова. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 357 с.
15. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем: учебное пособие для специальности «Приборостроение» / под общ. ред. В.Я. Распопова. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. 280 с.
16. Titterton D. H., Weston J. L. Strapdown Inertial Navigation Technology. 1997.
17. Gosiewski Z., Ortyl A. Strapdown Inertial Navigation System. Part 2: Error Models. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1998, Vol. 36, Issue 4, pp. 937–962.
18. Nassar S. Improving the Inertial Navigation System (INS) Error Model for INS and INS/DGPS Applications. Ph.D. Thesis, University of Calgary, 2003.
19. Weinred A., Bar-Itzhack I.Y. The Psi-Angle Error Equation in Strapdown Inertial Navigation Systems. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1978, Vol. AES-14, Issue 3, pp. 539–542.

АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПРИ УСЛОВИИ ГОРЯЧЕВА-ЧАПЛЫГИНА

Максимов Б.А.

МАИ, Москва, Россия
badmamaksimov1@gmail.com

Аннотация. Исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести. Предполагается, что главные моменты инерции тела для неподвижной точки удовлетворяют условию Горячева – Чаплыгина, т.е. находятся в отношении 1:4:1. Выписаны уравнения возмущенного движения, выполнена их редукция на нулевом изоэнергетическом уровне, и задача об орбитальной устойчивости сведена к задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы второго порядка с периодическими коэффициентами. Получены строгие выводы об орбитальной устойчивости.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта РФ № 19-11-00116.

Введение

Исследованию устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести посвящено множество работ. В общем случае задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой содержит четыре параметра. С целью ограничить количество параметров задачи часто рассматривают наиболее интересные частные случаи. В частности, рассматривались случаи Ковалевской и Горячева – Чаплыгина, когда в задаче об орбитальной устойчивости имеется один параметр, а также случай динамически симметричного тела и случай Бобылева – Стеклова, когда в задаче имеется два параметра.

В случае Ковалевской устойчивость маятниковых колебаний на основе различных подходов рассматривалась в [1, 2]. Случай Горячева – Чаплыгина изучался в [3, 4]. Случай Бобылева – Стеклова был рассмотрен в [5, 6]. Результаты были представлены в виде диаграммы устойчивости в плоскости параметров задачи. Для динамически симметричного твердого тела был исследован случай, когда центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [7]. Частный случай динамически симметричного тела рассматривался в [8], в предположении, что центр масс не лежит в экваториальной плоскости, а главные моменты инерции тела для неподвижной точки находятся в отношении 1:2:1.

В данной работе рассматривается случай, когда главные моменты инерции тела для неподвижной точки удовлетворяют условию Горячева – Чаплыгина, т.е. находятся в отношении 1:4:1. В отличие от интегрируемого случая Горячева – Чаплыгина никаких ограничений на положение центра масс не накладывается.

Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела массой m вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Для описания движения тела введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат $Oxyz$, жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O . Кроме того, будем предполагать, что главные моменты инерции A, B, C тела для неподвижной точки O удовлетворяют равенству $A = C = 4B$.

В силу динамической симметрии тела направления осей Ox, Oz можно выбрать так, что центр масс тела будет лежать в плоскости Oxy . При таком выборе осей положение центра масс тела будет определяться расстоянием до начала координат, которое будем обозначать l , и углом α между радиусом-вектором центра масс и положительным направлением оси Ox . Далее, без ограничения общности, можно считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Стоит отметить, что при $\alpha = 0$ имеет место случай интегрируемости Горячева – Чаплыгина, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ – случай Лагранжа.

Положение твердого тела в пространстве будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Тогда уравнения движения тела можно записать в виде канонических уравнений с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{(p_\theta \cos \varphi - p_\varphi \cot \theta \sin \varphi)^2}{A} + \frac{(p_\theta \sin \varphi + p_\varphi \cot \theta \cos \varphi)^2}{B} + \frac{p_\varphi^2}{C} \right) + mgl \sin \theta \sin(\varphi + \alpha), \quad (1)$$

где $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — импульсы, соответствующие углам Эйлера. Угол ψ является циклической координатой, поэтому $p_\psi = \text{const}$. Далее будем предполагать, что $p_\psi = 0$.

Уравнения движения допускают решение, описывающее плоское движение твердого тела, при котором ось Oz сохраняет постоянное горизонтальное положение, а само тело совершает плоские движения относительно этой оси. В зависимости от начальных условий, в плоском движении тело либо совершает

периодические колебания или вращения, либо асимптотически приближается к неустойчивому положению равновесия. Периодические маятниковые движения неустойчивы по Ляпунову. Однако, с теоретической точки зрения и для приложений представляет интерес задача об их орбитальной устойчивости.

Введем безразмерное время $\tau = \mu t, \mu^2 = mgl/C$. Для описания поведения тела в окрестности его периодических маятниковых движений удобно ввести следующие координаты и безразмерные импульсы

$$\varphi = q_1 - \alpha + 3\pi/2, \quad \theta = q_2 + \pi/2, \quad p_1 = p_\varphi/C\mu, \quad p_2 = p_\theta/C\mu. \quad (2)$$

В новых переменных гамильтониан задачи принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \left[(p_2 \sin(q_1 - \alpha) - p_1 \tan q_2 \cos(q_1 - \alpha))^2 + 4(p_2 \cos(q_1 - \alpha) + p_1 \tan q_2 \sin(q_1 - \alpha))^2 + p_1^2 \right] - \cos q_2 \cos q_1. \quad (3)$$

На маятниковых движениях твёрдого тела $q_2 = p_2 = 0$, а эволюция переменных q_1, p_1 описывается канонической системой с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1. \quad (4)$$

Характер маятниковых движений зависит от величины константы интеграла энергии $H_0 = h$: при $|h| < 1$ тело совершает маятниковые колебания, при $h > 1$ – маятниковые вращения относительно своей оси Oz .

Локальные переменные и изоэнергетическая редукция

Следуя методике работы [6], введем в окрестности невозмущённого периодического движения локальные переменные по формулам

$$q_1 = f + \frac{\sin f}{V^2} \eta - \frac{\sin f}{2V^4} \eta^2 + O(\eta^3), \quad p_1 = g + \frac{g}{V^2} \eta - \frac{g \cos f}{2V^4} \eta^2 + O(\eta^3), \quad (5)$$

где $V^2 = g^2 + \sin^2 f$. В зависимости от типа периодических движений функции f, g вводятся по-разному: в случае колебаний по формулам

$$f = \arcsin[k_1 \operatorname{sn}(\xi, k_1)], \quad g = 2k_1 \operatorname{cn}(\xi, k_1), \quad k_1^2 = (h + 1)/2, \quad (6)$$

в случае вращений

$$f = 2am(\xi, k_2), \quad g = 2k_2^{-1} dn(\xi, k_2), \quad k_2^2 = 2(h + 1)^{-1}. \quad (7)$$

Здесь используются общепринятые обозначения для эллиптических функций.

В новых переменных задача об орбитальной устойчивости сводится к исследованию устойчивости по отношению к переменным q_2, η, p_2 . Выполним ещё одну каноническую замену переменных по формулам

$$\xi = w/\omega, \quad \eta = \omega r \quad (8)$$

и разложим функцию Гамильтона в окрестности $q_2 = p_2 = \eta = 0$

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots \quad (9)$$

Коэффициенты в (9) являются 2π -периодическими функциями переменной w .

Рассмотрим движение на нулевом изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущённому периодическому движению. Эволюция переменных q_2, p_2 на уровне $\Gamma = 0$ может быть описана с помощью редуцированной канонической системы (уравнения Уиттекера)

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad (10)$$

где K является результатом решения уравнения $\Gamma = 0$ относительно r , определяющего эволюцию переменной r . Гамильтониан K можно представить в виде ряда по степеням q_2, p_2

$$K = K_2 + K_4 + \dots \quad (11)$$

При учете членов до четвертой степени включительно в разложении гамильтониана задача об орбитальной устойчивости периодических движений твёрдого тела эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (10). На основании исследования устойчивости положения равновесия системы (10) были получены строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости исходной задачи.

Результаты анализа устойчивости

Кратко опишем результаты исследования орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений. На основе линейного анализа было установлено, что маятниковые вращения орбитально неустойчивы. Маятниковые колебания в зависимости от значений параметров могут быть как орбитально

устойчивы, так и орбитально неустойчивы. На диаграмме устойчивости (см. рис.1) серым цветом показаны области орбитальной неустойчивости маятниковых колебаний, полученные на основании анализа линейной системы. Вне этих областей маятниковые колебания орбитально устойчивы в линейном приближении (не закрашенные области на диаграмме). В областях устойчивости в линейном приближении на основании метода нормальной формы и КАМ теории был выполнен нелинейный анализ. Для всех значений параметров из области устойчивости в линейном приближении функция Гамильтона приводилась к нормальной форме до членов четвертого порядка включительно. Коэффициенты нормальной вычислялись численно. Резонансные и нерезонансный случаи рассматривались отдельно. Установлено, что вне резонансных кривых четвертого порядка γ_1, γ_2 и вне кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ маятниковые колебания орбитально устойчивы в строгом нелинейном смысле. В случае резонансов четвертого порядка потребовался дополнительный анализ. Почти всюду на кривых γ_1, γ_2 имеет место орбитальная устойчивость маятниковых колебаний. Исключение составляют лишь небольшие сегменты кривых γ_1, γ_2 , расположенные вблизи точек пересечения этих кривых с кривыми вырождения I_1, I_2, I_3 , где имеет место орбитальная неустойчивость. На границе α_1 ниже точки O_1 и на всей границе α_2 маятниковые колебания орбитально устойчивы. На границе α_3 маятниковые колебания орбитально устойчивы лишь на участке между точками O_2, O_3 . В точках O_1, O_2, O_3 , где происходит смена устойчивости, и на кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ необходимо дополнительное исследование орбитальной устойчивости с учетом членов более высокой степени в разложении функции Гамильтона.

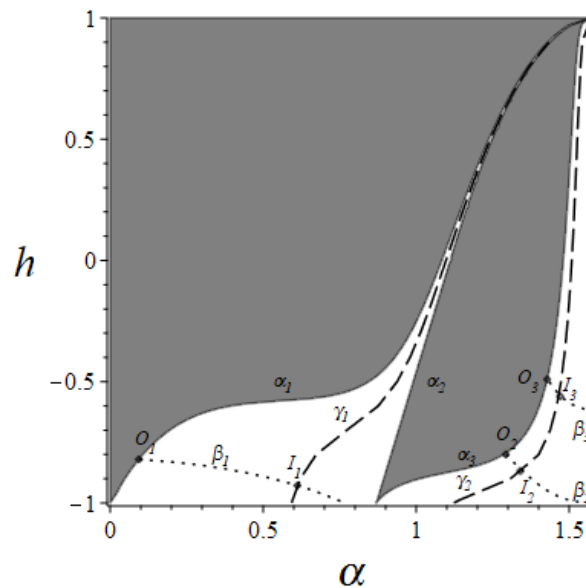


Рис. 1. Диаграмма устойчивости маятниковых колебаний.

В случае малых амплитуд колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой исследование их орбитальной устойчивости можно выполнить аналитически. В данной задаче аналитически были получены границы областей параметрического резонанса $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости. Результаты исследования, основанные на численном вычислении коэффициентов нормальной формы, полностью согласуются с аналитическим исследованием.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору РАН Б.С. Бардину за постановку задачи и полезное обсуждение.

Литература

1. А.П. Маркеев // Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской, Прикладная математика и механика, 65:1 2001. 51-58
2. А.П. Маркеев., С.В. Медведев, Т.Н. Чеховская // К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской, Изв. РАН. МТТ, 1 2003. 3-9.
3. Б.С. Бардин // К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина, Изв. РАН. МТТ, 2 2007. 14-21.
4. А.П. Маркеев // О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина, Прикладная математика и механика, 68:2 2004. 282-293
5. Б.С. Бардин, Т.В. Руденко, А.А. Савин // On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case, Regular and Chaotic Dynamics, 17:6 2012. 533-546.
6. Б.С. Бардин // Local coordinates in problem of the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case, Rus. J. Nonlin. Dyn, 16:4 2020. 581-594.
7. Б.С. Бардин, А.А. Савин // On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point, Regular and Chaotic Dynamics, 17:3-4 2012. 243-257.
8. Б.С. Бардин, А.А. Савин // Устойчивость плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой, Прикладная математика и механика, 77:6 2014. 806-821.

ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМ ОМНИ-ЭКИПАЖЕМ

Моисеев Г.Н., Зобова А.А.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
moiseev.georgii@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается динамика управляемого мобильного экипажа, движущегося по горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из горизонтальной платформы и трёх омни-колес, независимо вращающихся вокруг своих горизонтальных осей. Система управляется тремя двигателями постоянного тока, которые установлены в осях колес. Решается задача построения программных движений экипажа из одного положения на плоскости в другое с произвольно заданными начальными и конечными скоростями. Исследуются условия безотрывного движения экипажа.

Введение

Рассматривается динамика управляемого мобильного экипажа, движущегося по горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из горизонтальной платформы и трёх омни-колес, независимо вращающихся вокруг своих горизонтальных осей (рис. 1) [1–4]. Омни-колесо представляет собой колесо, на ободе которого установлены свободно вращающиеся ролики так, что оно может двигаться как обычное колесо, перекачиваясь с ролика на ролик, а может двигаться перпендикулярно своей плоскости. Для омни-колес используются простейшие модели омни-колес, не учитывающие инерционные свойства роликов, в которых колесо представляет собой абсолютно твердый диск [2, 3]. Экипаж управляется тремя двигателями постоянного тока, которые установлены в осях колес [5].

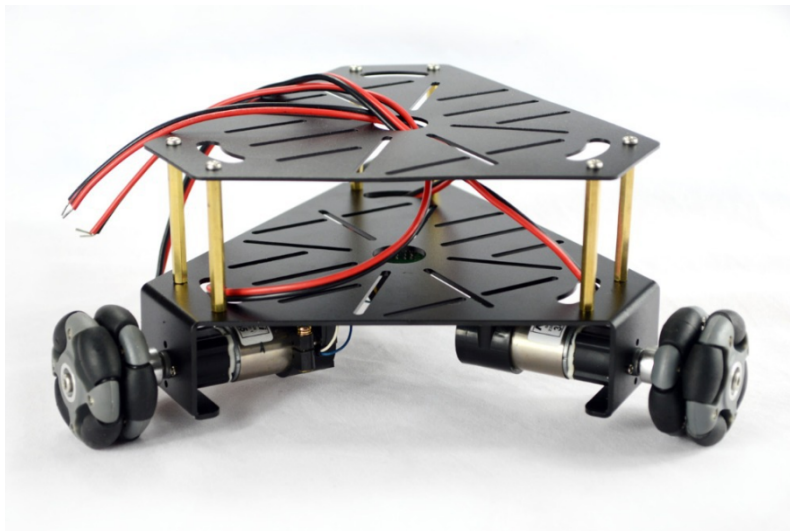


Рис. 1. Симметричный омни-экипаж.

Построение программных движений

Рассматривается движение экипажа произвольной конфигурации по абсолютно шероховатой плоскости. Для получения уравнений динамики неголономной системы используются уравнения Я.В. Татаринова [6].

Решается задача построения программных движений экипажа из одного положения на плоскости в другое с произвольно заданными начальными и конечными скоростями при кусочно-постоянном управлении с одним переключением [7, 8]. Для этого в случае некоторой конфигурации экипажа (т.н. «симметричный» экипаж, колеса которого установлены в вершинах правильного треугольника перпендикулярно биссектрисам, см. рис. 1) получено общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение системы, решена возникающая краевая задача.

Исследуются свойства полученных решений: возможность оптимизации затрат энергии, ограниченность управлений. Рассматривается вопрос применимости решения к системам, учитывающим вязкое трение в осях колёс и роликов. На основе аналитических результатов, полученных для экипажа симметричной конфигурации, построен численный алгоритм, решающий задачу для произвольного трёхколёсного экипажа.

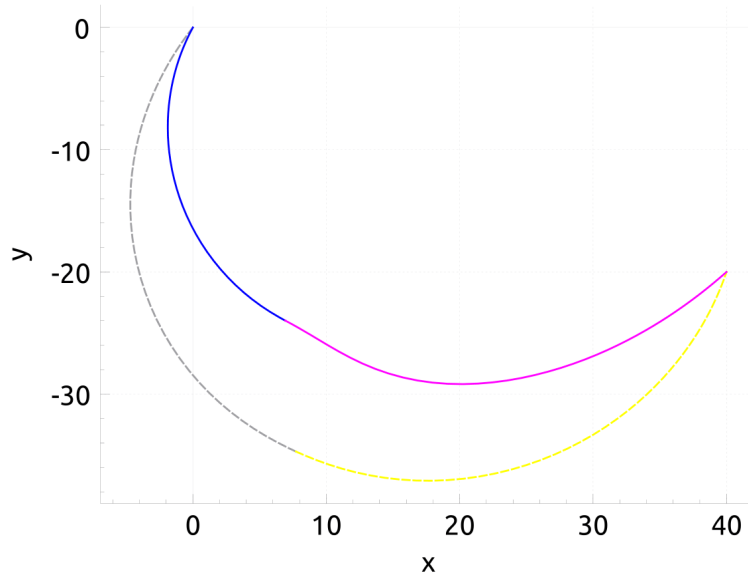


Рис. 2. Траектории симметричного омни-экипажа (пунктирная линия) и экипажа с параллельными колёсами (сплошная линия).

Условия безотрывности движения

Исследуется вопрос о реакциях связи во время движения экипажа при различных моделях контакта с горизонтальной плоскостью (движение без проскальзывания в продольном направлении, вязкое трение, регуляризованное сухое трение). Изучена зависимость нормальных реакций опорной плоскости от угловой скорости платформы экипажа и скорости центра масс системы и управлений. Сформулированы достаточные условия, гарантирующие выполнение условий безотрывного движения экипажа, с прозрачным механическим смыслом.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы при решении актуальных задач построения энергосберегающих программных движений для маневренных экипажей, применяемых для автоматизации работ в промышленности. Исследование условий безотрывности позволяет выбирать из класса программных движений те, которые не приведут к аварийным ситуациям при перемещении.

Литература

1. Champion G., Bastin G., D'Andrea-Novet B. // Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, IEEE Transactions on robotics and automation, 12:1 1996, 47–62.
2. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. // О движении мобильного робота с роликонесущими колёсами, Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 6 2007, 142–149.
3. Зобова А.А. // Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов, Нелинейная динамика, 7:4 2011, 771–783
4. Зобова А.А., Татаринов Я.В. // Динамика экипажа с роликонесущими колёсами, Прикладная математика и механика, 73:1 2009, 13–22
5. Буданов В. М., Девянин Е. А. // О движении колесных роботов, Прикладная математика и механика, 67:2 2003, 244–277
6. Татаринов Я.В. // Уравнения классической механики в лаконичных формах, Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. 2005. 88 с.
7. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. // Тележка с омниколесами на плоскости и сфере, Нелинейная динамика, 7:4 2011, 785–801.
8. Килин А. А., Бобыкин А. Д. // Управление тележкой с омниколесами на плоскости, Нелинейная динамика, 10:4 2014 473–481.

ДИНАМИКА ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПРИ МАЛОМ ТРЕНИИ

Муницына М.А.^{1,2}

1 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

2 - Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

munitsyna@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о движении неоднородного динамически симметричного шара по горизонтальной плоскости. Предполагается, что центр масс шара не совпадает с его геометрическим центром, но лежит на оси динамической симметрии. Считается также, что в точке контакта с плоскостью на шар действует сила и/или момент трения. Хорошо известный качественный анализ динамики шара [1], основанный на методе обобщенных диаграмм Смейла [2, 3], дополняется приближенными уравнениями движения, описывающими динамику шара в случаях классического сухого или вязкого трения, а также в случае их поликомпонентных обобщений.

Глобальный качественный анализ динамики волчка тип-топ представлен в работе [1]: множество параметров волчка делится на семь областей, каждой из которых соответствует своя обобщенная диаграмма Смейла.

Наиболее типичный (соответствующий натурным моделям волчка) случай представлен на рис. 1. Здесь на плоскости значений квадрата величины Джеллета k и полной энергии h представлены инвариантные множества Σ_{\pm} , соответствующие равномерным вращениям волчка вокруг вертикальной оси динамической симметрии с наивысшем (наинизшем) расположением центра масс, и Σ_0 – соответствующие регулярным прецессиям волчка вокруг центра масс. Жирным кривым III, IV и V соответствуют устойчивые движения. В случае только трения скольжения имеет место интеграл Джеллета $k = \text{const}$, и при движении волчка соответствующая точка на диаграмме Смейла движется в областях I и II вдоль оси ординат в сторону уменьшения величины энергии h до тех пор, пока не приходит к соответствующему множеству III, IV или V. Например, при начальном движении из окрестности множества Σ_{+} в области II и достаточно большим значением k , когда в начальном положении волчок с низким положением центра масс быстро закручен вокруг своей оси, расположенной почти вертикально (в окрестности неустойчивого стационарного движения) происходит переход к множеству III, соответствующему устойчивому вращению вокруг вертикальной оси волчка с наивысшим расположением центра масс.

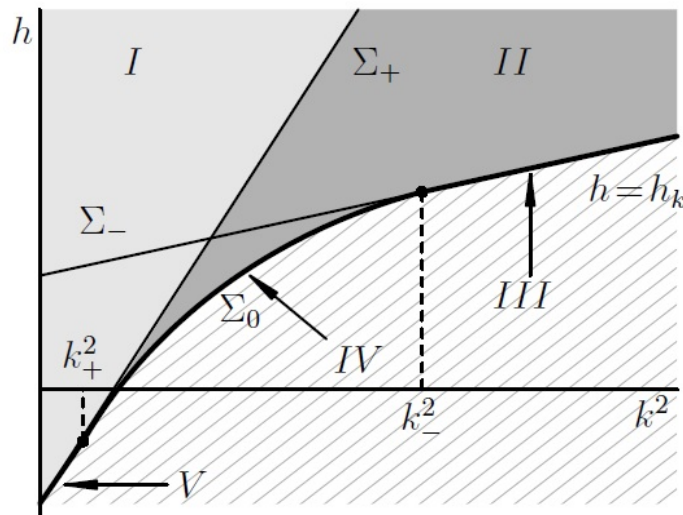


Рис. 1. Диаграмма Смейла:

h, k – значения полной энергии и величины Джеллета,

Σ_{\pm}, Σ_0 – соответствующие стационарным движениям инвариантные множества.

Динамика указанного переходного процесса определяется уже конкретной моделью трения скольжения и будет рассмотрена в докладе. Например, в случае малого сухого трения, когда сила трения F определяется равенством

$$\mathbf{F} = -f |N| \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|},$$

где f – коэффициент трения ($f \ll 1$); N – величина нормальной реакции опорной плоскости; а \mathbf{u} – скорость точки контакта шара с плоскостью, при указанном выше движении в области II, зависимость косинуса x угла между осью симметрии шара и вертикалью от времени t приближенно описывается законом

$$t = \int_{x(0)}^x F(\gamma, \omega(\gamma)) d\gamma, \text{ где}$$

$$\omega(x) = \frac{k(x^2 - 2\delta x + 1) + (1 - x^2) \sqrt{4\alpha\delta\beta(1 - \delta x)(x - \delta) + k^2}}{2(1 - \delta x)(x - \delta)},$$

$$F(x, \omega) = \frac{(3x^2 + 1)((k + \delta\omega)^2 + \omega^2) - 2x(x^2 + 3)(k + \delta\omega)\omega}{f\beta(1 - x^2)[k(x^2 - 2\delta x + 1) - 2(1 - \delta x)(x - \delta)\omega]},$$

а α , β и δ – отношение экваториального момента инерции шара к осевому, отношение произведение веса шара на его радиус к осевому моменту инерции и отношение смещения центра масс шара к его радиусу соответственно. Результаты численного интегрирования точных уравнений движения шара представлены на рис. 2 тонкой кривой, а полученная приближенная зависимость – жирной кривой.

Аналогичные результаты для этого и других переходных процессов будут представлены в случае моделей сухого и вязкого трения скольжения, а также их поликомпонентных обобщений.

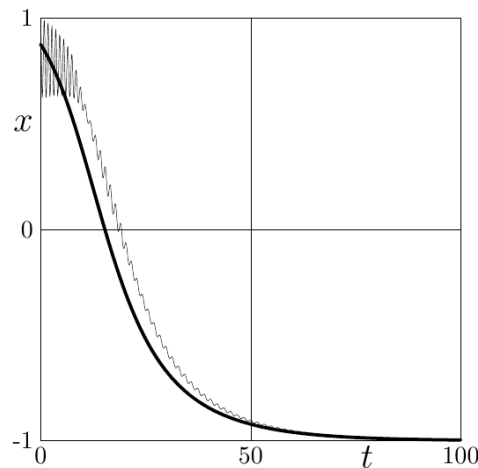


Рис. 2. Результаты численных экспериментов в случае

$$f = 0.12, \alpha = 1.141, \beta = 0.85, \delta = 0.3, x(0) = 0.9, k^2 = 2k_-^2$$

Литература

1. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 33–41.
2. Карапетян А.В. Качественный анализ динамики диссипативных систем с симметрией на основе метода обобщенных диаграмм Смейла // Современные проблемы математики и механики. Том 2. Механика. Выпуск 2. Москва : Изд-во МГУ, 2009. С. 192–200.
3. Карапетян А.В. Обобщенные диаграммы Смейла и их применение к задачам динамики систем с трением // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. 10-й Междунар. Четаевской конф. Т. 1. Секц. 1. Аналитическая механика. Казань, 2012. Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 247–258.
4. Муницына М.А. Переходные процессы в динамике волчка тип-топ // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 433–441.
5. Карапетян А. В., Муницына М. А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Том 13, №1, С. 114–121.

НОВЫЕ СЛУЧАИ ПРЕЦЕССИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ БЕЗ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Ольшанский В.Ю.

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
olshanskiy_vlad@mail.ru

Аннотация. Найлены новые случаи прецессий механических систем без осевой симметрии. Для твердого тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью, получены условия полурегулярной прецессии, указаны системы инвариантных соотношений; найдены условия регулярной прецессии, получены выражения для скоростей прецессии и собственного вращения. Изучена регулярная прецессия гиростата в суперпозиции двух или трех однородных полей. Получено обобщение известного случая с равными скоростями прецессии и собственного вращения. Найден новый случай прецессии гиростата со скоростью прецессии вдвое большей скорости собственного вращения и осью собственного вращения, не ортогональной оси прецессии.

Введение

Важным простым и одновременно нетривиальным случаем, встречающимся при описании движения технических объектов и естественных космических тел, является прецессия. Ниже рассматриваются прецессии гиростатов и твердых тел с полостью, заполненной жидкостью. Прецессии систем с осевой симметрией достаточно хорошо изучены. Возможность регулярной прецессии несимметричного твердого тела вокруг оси, отклоненной от вертикали, была показана Гриоли [1]. Первые примеры регулярных прецессий гиростата в двух и трех однородных полях приведены Яхья [2, 3]. Один случай регулярной прецессии несимметричной системы тело + жидкость впервые отмечен в нашей работе [4]. Полное описание условий регулярных прецессий и их анализ для таких механических систем, а также условия полурегулярной прецессии приведены в работах автора [5–7]. Найлены [8, 9] новые случаи регулярных прецессий гиростата в суперпозиции однородных полей.

Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением

Для описания вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, используются уравнения Пуанкаре – Хафа – Жуковского:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S}), \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times (\mathbf{B}'\mathbf{K} + \mathbf{C}'\mathbf{S}) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S}, \quad A_i = A_i^s + A_i^{eq}, \quad i = 1, 2, 3, \quad A_1^{eq} = \frac{\mu}{5} \frac{(d_2^2 - d_3^2)^2}{d_2^2 + d_3^2}, \quad S_1 = -\frac{2}{5} \mu d_2 d_3 \Omega_1 \quad (1 \ 2 \ 3).$$

Здесь \mathbf{K} – кинетический момент системы; \mathbf{A}^s и $\boldsymbol{\omega}$ – тензор инерции и угловая скорость твердого тела; d_i – полуоси эллипсоида, заполненного жидкостью с завихренностью $\boldsymbol{\Omega}$ и массой μ . Элементы a_i, b_i, c_i диагональных матриц $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ задаются равенствами

$$a_i = A_i^{-1}, \quad b_i = \beta_i a_i, \quad c_i = \gamma_i + \beta_i^2 a_i, \quad \beta_1 = \frac{2d_2 d_3}{d_2^2 + d_3^2}, \quad \gamma_1 = \frac{5}{\mu(d_2^2 + d_3^2)} \quad (1 \ 2 \ 3).$$

Угловая скорость прецессирующего тела имеет два компонента, один из которых сохраняет постоянное направление $\boldsymbol{\rho}$ в инерциальном пространстве, а другой не изменяет свое направление \mathbf{m} в теле

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \boldsymbol{\rho}. \quad (2)$$

Для полурегулярной прецессии ($\omega_p = \text{const}, \omega_r = d\varphi/dt$) с осью $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{K}^0$ получены конфигурационные условия [7] и периодические решения системы (1) в двух возможных случаях; условия имеют вид:

Случай 1. $m_2 = 1, m_1 = m_3 = 0$, ось собственного вращения совпадает с главной осью инерции. Условие одно:

$$b_1^2 \Delta c_1 + b_3^2 \Delta c_3 + b_2^2 \Delta a_2 + \Delta c_1 \Delta c_3 \Delta a_2 = 0, \quad \Delta a_i \stackrel{\text{def}}{=} a_2 - a_3 \quad (1 \ 2 \ 3).$$

Случай 2. $m_2 = 0, m_1 m_3 \neq 0$. Два конфигурационных условия:

$$(b_1^2 + \Delta a_2 \Delta a_3)(b_1^2 + \Delta c_2 \Delta c_3) = (b_2 \Delta a_2 - b_1 b_3)(b_2 \Delta c_2 - b_1 b_3) = (b_3 \Delta a_3 + b_1 b_2)(b_3 \Delta c_3 + b_1 b_2).$$

Показано [7], что при выполнении условий прецессии существуют линейные инвариантные системы (ЛИС) уравнений Пуанкаре – Жуковского (1). При $m_2 = 1, m_1 = m_3 = 0$ существует ЛИС (F_1, F_2, F_3)

$$F_1 = x_1 K_1 - S_1, \quad F_2 = K_2, \quad F_3 = x_3 K_3 - S_3, \quad x_1 = -\frac{b_1 \Delta c_1 + b_2 b_3}{b_2^2 + \Delta c_1 \Delta c_3}, \quad x_3 = \frac{b_3 \Delta c_3 - b_1 b_2}{b_2^2 + \Delta c_1 \Delta c_3}, \quad x_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_{\psi}^{-a_i}}{b_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При $m_2 = 0, m_1 m_3 \neq 0$ существуют ЛИС $(F_2, F_3), (F_1^+, F_2, F_3), (F_1^-, F_2, F_3)$, где

$$F_1^{\pm} = S_1 - x_1 K_1 \pm \eta K_3, \quad F_2 = S_2 - x_2 K_2, \quad F_3 = S_3 + \frac{x_2}{x_1} K_3, \quad x_1 = \frac{b_1 b_2 + b_3 \Delta a_3}{b_2 \Delta a_2 - b_1 b_3}, \quad x_2 = \frac{b_1^2 + \Delta a_2 \Delta a_3}{b_2 \Delta a_2 - b_1 b_3}$$

Если в начальный момент $F_2 = F_3 = 0$ и $F_1 = 0$ (или $F_1^+ = 0$, или $F_1^- = 0$), то движение твердой оболочки – полурегулярная прецессия.

Новые случаи регулярной прецессии несимметричного твердого тела с жидким наполнением

Для системы без динамической симметрии указаны [5, 6] два возможных нетривиальных случая регулярной прецессии, когда ось собственного вращения равна совпадает либо нет с главной осью инерции.

Случай 1. $m_2 = 1, m_1 = m_3 = 0$. Конфигурационное условие одно, его можно записать в двух формах

$$(b_3 \mp b_1)^2 = (a_3 - a_1)(c_3 - c_1) \Leftrightarrow A_3^s - A_1^s = \frac{\mu}{5}(d_3^2 - d_1^2)\left(1 - \frac{4d_2^2}{(d_3 \pm d_1)^2}\right)$$

Найдены выражения для скоростей прецессии и собственного вращения:

$$\omega'_\psi = \frac{2}{A_1^s + A_3^s + \frac{\mu}{5}(d_1^2 + d_3^2 - 2d_2^2)} = \frac{2}{A_1^s + A_3^s + 2A_2^s \alpha_c^d}, \quad \omega'_\varphi = \frac{1}{A_2} - \omega'_\psi - \frac{\beta_2}{A_2} \frac{A_2 \omega'_\psi + \beta_2 - 1}{\beta_2(\beta_2 - 1) + A_2 r}$$

$$A_1^c = \frac{\mu}{5}(d_2^2 + d_3^2)(1 \ 2 \ 3), \quad \alpha_c^d = \frac{2A_2^s - A_1^c - A_3^c}{2A_2^s}, \quad r = \frac{5}{\mu} \frac{d_2^2 - d_1^2 - d_3^2 - d_1 d_3}{(d_2^2 - d_3 d_1)(d_1^2 + d_3^2)}, \quad \omega'_p = \omega_p / |\mathbf{K}|, \quad \omega'_r = \omega_r / K_2$$

Здесь A_i^c – главные моменты инерции ядра; α_c^d – динамическое полярное сплющивание ядра.

Был рассмотрен случай, когда ядро мало отличается от шара $d_i - d = O(\varepsilon)$. Показано, что отношение скоростей отличается от значения для твердой оболочки на величину $O(\varepsilon^2)$: $\omega'_\varphi / \omega'_\psi = (A_3^s - A_2^s) / A_2^s + O(\varepsilon^2)$. При этом каждая из скоростей отличается от соответствующего значения для оболочки на величину $O(\varepsilon)$.

Случай 2. $m_2 = 0, m_1 m_3 \neq 0$. Два конфигурационных условия [5] позволяют записать множество допустимых значений главных моментов инерции преобразованного тела в виде [6] (η – произвольный параметр):

$$A_i = \eta(1 + \beta_i x_i) / (x_1 x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad x_1 = (\Delta \gamma_1 \eta - \beta_2) / \beta_3, \quad x_3 = -(\Delta \gamma_3 \eta + \beta_2) / \beta_1, \quad x_2 = -x_1 x_3$$

В случае, когда ось собственного вращения не совпадает ни с одной из главных осей, приведены примеры удлинённых тел, для которых возможна регулярная прецессия и показано, что регулярная прецессия тела с жидким ядром, форма которого мало отличается от сферической, невозможна.

Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции однородных полей

Примеры [2, 3] регулярных прецессий гиростата в двух и трех однородных полях сохраняют многие свойства прецессии Гриоли [1], в частности, скорости прецессии и собственного вращения совпадают, оси прецессии и собственного вращения ортогональны, ось собственного вращения ортогональна круговому сечению эллипсоида инерции. В работах [8, 9] описаны все возможные случаи регулярной прецессии при вращении твердого тела и гиростата в двух или трех однородных полях. Получено обобщение условий Яхья [2, 3]. Найден новый случай регулярной прецессии, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения и ось прецессии не ортогональна оси собственного вращения.

Движение гиростата описывается системой уравнений

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{u}_3, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{I} и $\boldsymbol{\omega}$ – тензор инерции тела в неподвижной точке и угловая скорость тела, $\boldsymbol{\sigma}$ – гиростатический момент, $\boldsymbol{\alpha}_i$ – единичные векторы направлений сил каждого из полей, C_i – центры приведения сил, $\mathbf{u}_i = p_i \mathbf{O}C_i$, p_i – суммарная сила действия на тело поля номер i , \mathbf{M} – суммарный момент внешних сил.

В случае регулярной прецессии из уравнений (2) и (3) получаем ([8], $\mathbf{R}(t)$ – оператор поворота)

$$\boldsymbol{\rho} = \cos\theta \mathbf{l}_1 + \sin\theta \mathbf{n} \mathbf{l}, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_r + \omega_p \cos\theta) \mathbf{l}_1 + \omega_p \sin\theta \mathbf{l}, \quad \tau = \omega_r t + \text{const}, \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{l} = \sin\tau \mathbf{l}_2 + \cos\tau \mathbf{l}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\mathbf{R} \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{s}_i = \cos\theta_i \mathbf{l}_1 + \sin\theta_i (\cos\varphi_i \mathbf{l}_2 + \sin\varphi_i \mathbf{l}_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{R} \mathbf{l}_1.$$

Для анализа условий прецессии момент внешних сил удобно представить в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{R} \mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{R} \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{R} \mathbf{l}_3, \quad \mathbf{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} s^{(i)} \mathbf{u}_1 + s^{(i)} \mathbf{u}_2 + s^{(i)} \mathbf{u}_3, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{u}_i = n_i^{(1)} \mathbf{v}_1 + n_i^{(2)} \mathbf{v}_2 + n_i^{(3)} \mathbf{v}_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{n}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_2 \times s_3}{(s_1, s_2, s_3)} (1 \ 2 \ 3)$$

Показано, что регулярная прецессия в трех однородных полях возможна, только если скорость прецессии равна или вдвое больше скорости собственного вращения. Примеры прецессий при равных скоростях известны [2, 3]. Возможность прецессии в случае $\omega_p / \omega_r = 2$ впервые указана в работах [8, 9].

Случай $\omega_p = \omega_r$. Конфигурационные условия прецессии

$$I_{22} = I_{33}, \quad I_{23} = 0 \quad (4)$$

$$\sigma^{(2)} = -3\Omega \cos\theta I_{12}, \quad \sigma^{(3)} = -3\Omega \cos\theta I_{13} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_i = \nu \mathbf{n}_i + \Omega^2 (\cos\theta - 1) \mathbf{I} \mathbf{n}_i + n_i^{(1)} \Omega (\boldsymbol{\sigma} + \Omega (\mathbf{I} \mathbf{l}_1 + (I_{11} - I_{22}) \mathbf{l}_1)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Здесь ν – произвольный параметр.

Случай $\omega_p = 2\omega_r$. Необходимо выполнение условий (4) и условий

$$\sigma^{(2)} = \Omega(1 - 6\cos\theta)I_{12}, \quad \sigma^{(3)} = \Omega(1 - 6\cos\theta)I_{13}. \quad (7)$$

В случае, когда гиристатический момент направлен по оси собственного вращения ($\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0$), либо равен нулю (прецессия твердого тела), условия упрощаются. В случае $\omega_p = \omega_r$ условия (5) для тела без осевой динамической симметрии могут быть выполнены (как в известном случае Гриоли) при $\cos\theta = 0$. В случае $\omega_p = 2\omega_r$ из условия (7) получим, что регулярная прецессия в трех полях возможна, только если оси прецессии и собственного вращения не ортогональны и угол между осями задан равенством

$$\cos\theta = 1/6 \quad (8)$$

Приведенный анализ выполнен [8] для случая трех неприводимых полей. Случай двух неприводимых полей был рассмотрен отдельно [9]. Получено обобщение условий Яхья и условия прецессии для твердого тела с динамической симметрией. Показано, что регулярная прецессия асимметричного твердого тела возможна и в том случае, когда скорость прецессии вдвое больше скорости его собственного вращения и угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством (8).

Заключение

Изучена возможность прецессий некоторых механических систем, не обладающих осевой симметрией.

В задаче о вращении свободного твердого тела с жидким ядром найдены условия полурегулярной прецессии и показано, что при их выполнении существуют линейные инвариантные системы. Найдены конфигурационные условия регулярной прецессии и скорости собственного вращения и прецессии; при совпадении оси собственного вращения с главной осью инерции условие одно, при несовпадении осей условий два. Выполнен анализ случая, когда ядро мало отличается от шара. Приведены примеры удлинённых тел, допускающих прецессию с осью собственного вращения, отклонённой от главной оси инерции.

Для регулярной прецессии гиристата в суперпозиции двух или трех однородных полей получено обобщение известного случая с равными скоростями прецессии и собственного вращения. Найден новый случай прецессии гиристата, для которого скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения и ось собственного вращения не ортогональна оси прецессии.

Литература

1. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura e appl. 1947. V.26. Fasc. 3–4. P. 271–281.
2. H.M. Yehia. On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2(3) (2015) 200 – 205.
3. H.M. Yehia. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 25 (2) (2017) 216 – 219.
4. Ольшанский В.Ю. О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. Т.82 №5, 2018. С.559 – 571.
5. Ol'shanskii V. Yu. New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy (2019) 131:57.
6. Ol'shanskii V. Yu. Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy (2020) 132:46.
7. Ольшанский В.Ю. Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. Т.85. №5, 2021. С. 547 – 564.
8. Ольшанский В.Ю. Регулярная прецессия гиристата в суперпозиции трех однородных полей // ПММ. Т.86. №6, 2022. С. 872 – 886.
9. Ol'shanskii V. Yu. Regular precession of a rigid body in two uniform fields // Mechanics Research Communications, 2023. Vol.127, article 104041.

ОТ МАЯТНИКА ФУКО ДО БЕСКАРДАННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Переляев С.Е.

ИПМех им. А.Ю.Ишлинского, Москва, Россия
pers2030@yandex.ru

Аннотация. Механика гироскопических и инерциальных навигационных систем, как общая наука механики систем, восходит к открытию Леона Фуко (1852), который установил уникальное свойство быстро вращающегося твердого тела сохранять ориентацию оси вращения по направлению к неподвижным звездам. Возникшая в конце XIX века острая потребность в курсовом указателе, отличным от магнитного компаса, для военных кораблей с металлическим корпусом определила начальный этап интенсивного развития соответствующего раздела современной механики. Следующий бурный этап развития механики гироскопических навигационных систем связан с созданием современной ракетной техники. Система управления немецкими ракетами базировалась на гироскопических системах, основанных на использовании в качестве чувствительных элементов роторных механических гироскопов и акселерометров. В советских ракетах эти системы были значительно усовершенствованы. В результате появились инерциальные навигационные системы (ИНС) на высокоточных поплавковых гироскопах. В докладе рассмотрены две реализации изотропного осциллятора для целей построения бесплатформенной инерциальной системы принципиально нового типа [1]. Первая реализация осуществляется в виде неконтактного подвеса электропроводящего шара, используемого для практической реализации электростатических гироскопов, вторая в виде пространственной комбинации упругих связей, удерживающих точечную массу. Инерциальная система нового типа обладает минимально возможной размерностью. Она отличается от известных инерциальных систем – платформенного типа (имеет карданов подвес) и бесплатформенного (бескарданного) типа (БИНС).

Введение

Опыты, проведенные в 1852 году французским механиком и астрономом Леоном Фуко [1,2], а также опыты его многочисленных последователей дали только качественные результаты, подтверждающие факт вращения Земли. Количественное исследование всех источников погрешностей классического маятника Фуко и новое аналитическое доказательство вращения Земли вокруг своей оси дал в своей докторской диссертации в 1879 году нидерландский физик-экспериментатор Хайкес Каммерлинг-Оннес [2].

Известно, что изотропный осциллятор с двумя степенями свободы, выполняющий в современных гироскопах роль маятника Фуко, реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно абсолютного (инерциального) пространства. В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве принципиальные вопросы теории нового датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. По этой причине весь этот класс гироскопов может быть назван новыми инерциальными датчиками семейства «обобщенный» маятник Фуко [2]. В современной практике мировой гироскопии появился целый класс новых гироскопических приборов, в которых фактически реализована идея «обобщенного» маятника Фуко: струнный гироскоп [2], кольцевой гироскоп [3, 4], полусферический кварцевый резонатор (волновой твердотельный гироскоп) [4], ВТГ с металлическим цилиндрическим резонатором [2], двойной камертон («квапазон») [2], сферический кварцевый резонатор [5]. Все указанные новые инерциальные датчики ориентации весьма успешно конкурируют с известными классическими гироскопами, однако их теория существенно отличается от фундаментальной теории механических гироскопов. Например, кинетический момент, который в механических гироскопах стремятся сделать как можно большим, в перечисленных выше новых датчиках инерциальной ориентации должен быть равен нулю [2, 4]. «Обобщенный» маятник Фуко является математическим маятником, гомеоморфным реальному физическому маятнику, плоскость колебаний которого медленно поворачивается относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Многие исследователи предполагают, что Земля не вовлекает плоскость колебаний маятника во вращение вокруг местной вертикали. Между тем благодаря нелинейным эффектам маятник Фуко обладает собственной скоростью прецессии вокруг местной вертикали.

Модифицированные уравнения Ван-дер-Поля, описывающие автоколебания в квазилинейном одномерном осцилляторе, обобщаются на случай, когда порождающий изотропный осциллятор имеет произвольное число степеней свободы. Конкретно рассмотрены двумерный (плоский) и трехмерный (пространственный) случаи.

1. Трехмерный осциллятор Ван-дер-Поля – БИНС маятникового типа

Идея инерциальной навигации в свободном пространстве крайне проста: на борту движущегося объекта достаточно разместить гиросtabilизированную платформу, оси которой параллельны осям какой-либо инерциальной системы координат, на платформе закрепить три взаимно ортогональных акселерометра и сигналы с них, пропорциональные компонентам абсолютного ускорения подвижного объекта, дважды

проинтегрировать. Это дает абсолютную скорость и координаты объекта в абсолютном пространстве. Естественный шаг в развитии этой идеи состоял в том, что блок акселерометров можно крепить неподвижно на самом объекте, обходясь без гиросtabilизированной платформы. Тогда показания акселерометров будут пропорциональны компонентам абсолютного ускорения в проекциях на связанные с объектом оси, и перед тем как осуществлять интегрирование этих показаний, необходимо их перепроектировать на оси инерциальной системы отсчета. Для этого следует предварительно измерить угловую скорость объекта в проекциях на подвижные оси, после чего проинтегрировать уравнения Пуассона, позволяющие вычислить матрицу направляющих косинусов между осями подвижной и инерциальной систем координат.

Технически реализация бесплатформенной (бескарданной) инерциальной навигационной системы (БИНС) проще, чем платформенной с известным классическим кардановым подвесом. Для этого требуется три акселерометра, три гироскопа и интеграторы линейных ускорений и кинематических уравнений Пуассона. БИНС можно еще более упростить, если удастся наблюдать оси, параллельные инерциальным осям непосредственно на самом объекте, не прибегая к помощи гиросtabilизированной платформы. Это позволит строить матрицу поворота, обходясь без гироскопов и блока интегрирования уравнений Пуассона. Реализовать эту идею принципиально нетрудно. Для этого достаточно наблюдать на борту подвижного объекта применения БИНС колебания пространственного изотропного осциллятора. Пространственный изотропный осциллятор – это точечная масса, закрепленная на объекте посредством трех взаимно ортогональных пружинок одинаковой жесткости. Если предположить вначале, что подвижный объект совершает только вращение вокруг неподвижной точки, то любое свободное движение этого осциллятора представляет собой эллиптическую траекторию, не меняющую свою ориентацию по отношению к инерциальным осям, как бы ни двигался подвижный объект (рис. 1). Если снять показание осциллятора в момент его нахождения в максимально удаленной от точки подвеса точке эллипса M и в ближайшей к центру точке N и вычислить векторное произведение соответствующих единичных векторов $e_1 \times e_2 = e_3$, то матрица $A = \|e_1, e_2, e_3\|$, составленная из этих векторов, и будет искомым матрицей поворота, переводящей подвижную систему отсчета y_1, y_2, y_3 в неподвижную – инерциальную x_1, x_2, x_3 . В общем случае ускоренного движения центр рассматриваемого эллипса будет смещаться в сторону, противоположную ускорению, и перед выполнением указанных выше процедур следует выделить из показаний осциллятора гармоническую часть. Оставшаяся непериодическая часть, пропорциональная абсолютному ускорению, может быть использована для построения информации о движении точки подвеса осциллятора, т.е. изотропный осциллятор может использоваться не только для построения матрицы поворота, но и для построения вектора абсолютного ускорения. Далее приводятся два конкретных примера реализации описанного изотропного осциллятора и в конце излагаются реальные алгоритмы управления осциллятором и наблюдения за его траекторией на подвижном борту. Навигация в окрестности Земли, как известно, [2–4] требует знания гравитационного поля в окрестности подвижного объекта.

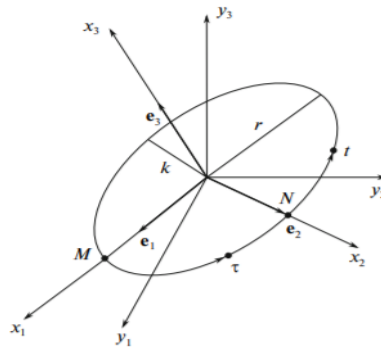


Рис. 1.

2. Трехмерный осциллятор Ван-дер-Поля – 3D сферический резонансный гироскоп

Кроме указанного выше способа определения ориентации подвижного объекта в пространстве в докладе рассмотрены основы фундаментальной теории «обобщенного» маятника Фуко, реализованного на основе принципиально нового 3D сферического резонансного гироскопа. Модель трехмерного осциллятора Ван-дер-Поля используется для изучения функционирования пространственного (3D) сферического резонансного гироскопа (СРГ) или трехмерного волнового твердотельного гироскопа на основе полого сферического высокочастотного кварцевого резонатора. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля в данном случае используется для описания функционирования сферического резонансного гироскопа (СРГ) или пространственного ВТГ (3D-HRG). На поверхности такого сферического высокочастотного резонатора на одной из низших мод колебаний возбуждается и поддерживается пространственная механическая стоячая волна, которая обладает для нового гироскопа всеми необходимыми инерционными свойствами. (СРГ/СРГ), базовым чувствительным элементом, которого является высокочастотный сферический кварцевый резонатор. Описан физический эффект, лежащий в основе функционирования принципиально нового 3D гироскопа, входящего в рассматриваемый класс гироскопов и сформулированы общие принципы построения законов

управления его фазовым состоянием. Рассмотрены прикладные аспекты реализации фундаментальной теории «обобщенного» маятника Фуко в высокоточных трехмерных инерциальных датчиках типа СРГ/SG.

Представлены основные инженерно-конструкторские решения на базе современных подходов практической конструкторской реализации сферических волновых твердотельных гироскопов нового поколения на основе 3D сферических резонаторов из аморфных материалов для низко-динамичных и высоко-динамичных объектов авиационно-космического назначения.

Следует отметить, что в случае упругого кольца и в случае упругой полусферической оболочки физический эффект инерции стоячих волн имеет одномерный характер: угловая скорость $\omega(t)$ является скаляром, характеризующим вращение упругого твердого тела вокруг неподвижной в пространстве оси чувствительности прибора. Теоретически выполнено обобщение известного эффекта на произвольный пространственный случай, когда в неподвижном трехмерном твердом теле (кварцевом сферическом полем упругом резонаторе) возбуждается стоячая волна колебаний с каким-то известным рабочим тоном. После этого трехмерное твердое тело приводится во вращение с произвольной угловой скоростью $\omega(t)$ и определяется реальная угловая скорость пространственной стоячей волны, возбуждаемой на поверхности сферического резонатора (например, эллипса вращения). Такой эллипс вращения будет вращаться относительно тела, отставая от его движения строго по определенному закону. В данном исследовании получены дифференциальные уравнения, определяющие эволюцию m -волновой моды колебаний свободного сферического твердого тела, обусловленную наличием произвольного вращения. Анализ полученных уравнений подтверждает, что вектор угловой скорости вращения пространственной стоячей волны относительно твердого тела пропорционален вектору угловой скорости тела относительно самого инерционного пространства: $\Omega(t) = -k\omega(t)$, или же вектор угловой скорости волны относительно инерционного пространства: $\Omega(t) = (1-k)\omega(t)$. Показано, что для полной тонкой сферической оболочки коэффициент Брайана $k=0,25$, что меньше его известных значений для упругого кольца, цилиндра и полусферы. Следует особо подчеркнуть, что для полной сферической оболочки масштабный коэффициент Брайана имеет трехмерное значение. Он определяет пропорциональность векторов угловых скоростей друг другу, в отличие от случая кольца (цилиндра, полусферы), когда учитываются угловые скорости вращения плоскости. В трехмерном пространстве трехмерная механическая стоячая волна в виде, например, эллипса вращения перемещается относительно тела с вектором угловой скорости, пропорциональным вектору вращения самого упругого твердого тела относительно абсолютного (инерционного) пространства.

Литература

1. V.F. Zhuravlev. On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol., *Mechanics of Solids*, vol.55, p.926-931 (2020).
2. Журавлёв В.Ф. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. № 2. С.211–222.
3. V.F. Zhuravlev. On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol. // *Прикладная математика и механика*. 2020, том 84, № 2, с. 151–157
4. Журавлёв В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа. // *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, No. 3, p. 6–19. [Mech. Solids (Engl. Transl.1993.)].
5. A. Matthews. «The Operation and Mechanization of the Hemispherical Resonator Gyroscope», 978-1-5386-1647-5/18/©2018 IEEE. – pp. 7 – 14.
6. S.E. Perelyaev, V.P. Zhuravlev, S.B. Bodunov, B.P. Bodunov. «New Gyroscopes of the “Generalized Foucault Pendulum” Family: Some Fundamental Issues of Theory and Applied Aspects of Its Implementation in the Engineering Practice of Modern Gyroscopy». 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, IEEE, Publication Year: 2020.
7. V. Ph. Zhuravlev. «A Strapdown Inertial System of Minimum Dimension (A 3D Oscillator as a Complete Inertial Sensor)», *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, No.5, 5–10 (2005) [Mech. Solids (Engl. Transl.) 40 (5), 1–5 (2005)].
8. A.Yu. Ishlinskii, *Orientation, Gyroscopes, and Inertial Navigation* (Nauka, Moscow, 1976, 670.P.) [in Russian].
9. K.Magnus, *Kreisel: Theorie und Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, 527 P.
10. Журавлёв В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система маятникового типа (БИНС МТ) // *Изв. РАН. МТТ*. 2014. № 1. С. 6–17.
11. V.Zhuravlev , S.Perelyaev , D.Borodulin. «Strapdown Inertial Navigation System of Minimum Dimension (3D oscillator as a complete inertial sensor) », *DGON Inertial Sensors and Systems Symposium*. IEEE. Publication Year: 2018, Page(s): 1 – 12.
12. В.Ф.Журавлев, Д.М.Климов. «Прикладные методы в теории колебаний». ISBN:5-02-006627-3, - М.: Наука. 1988. – 325с.
13. D.M. Klimov, V.Ph. Zhuravlev, Y.K. Zhanov, «Quartz hemispherical resonator (wave solid-state gyroscope)», ISBN: 978-5-9909668-5-7, Moscow. 2017. – pp. 40 – 45.
14. V. Zhuravlev, S. Perelyaev. The Generalized Foucault Pendulum is a 3D Integrating Gyroscopes Using the Three-Dimensional Precession of Standing Waves in a Rotating Spherically Symmetric Elastic Solid. *DGON Inertial Sensors and Systems Symposium*. IEEE. Publication Year: 2019, Page(s): 1 – 12.
15. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Пространственный эффект инертности упругих волн на сфере // *Изв. РАН. МТТ*. 2021. № 3. С. 3-6.

КАЧЕНИЕ ЭЛЛИпсоИДА ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Пивоварова Е.Н., Килин А.А.

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, Ижевск,
Россия
archive@rtd.ru

Аннотация. В работе рассматривается динамика эллипсоида вращения (сфероида), катящегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости. При этом предполагается, что опорная плоскость совершает вертикальные колебания по периодическому закону. В общем случае данная задача сводится к исследованию системы с полутора степенями свободы. В настоящей работе при помощи процедуры усреднения был получен вибропотенциал, приближенно описывающий динамику эллипсоида на вибрирующей плоскости. Показано, что в случае тела с осесимметричным распределением масс данный потенциал зависит только от проекции оси симметрии на вертикаль и, как следствие, полученная задача с дополнительным вибрационным потенциалом является интегрируемой. Подробно проанализировано влияние вибропотенциала на устойчивость вертикальных вращений эллипсоида.

Работа выполнена в Уральском математическом центре (соглашение № 075-02-2023-933).

Постановка задачи

Рассматривается движение осесимметричного эллипсоида вращения массы m с полуосями b_1 и b_3 по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 1). Мы будем исследовать эту задачу в рамках следующих допущений:

- при движении эллипсоид касается опорной плоскости одной точкой, и при этом не теряет контакта с плоскостью;
- скорость точки контакта P эллипсоида с опорной плоскостью равна нулю;
- центр масс эллипсоида в общем случае смещен и лежит на его оси симметрии на расстоянии a от геометрического центра;
- опорная плоскость совершает вертикальные периодические колебания по закону $\xi(t)$.

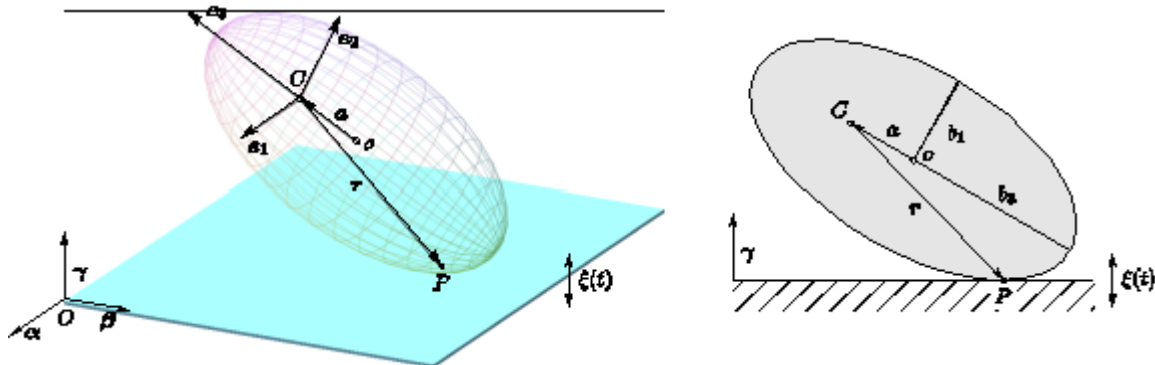


Рис. 1. Схематическое изображение эллипсоида на вибрирующей плоскости.

Уравнения движения и первые интегралы

Для описания движения системы используются две системы координат – инерциальная $Oxyz$ и подвижная $Sx_1x_2x_3$, оси которой жестко связаны с телом и направлены вдоль главных осей инерции (рис. 1).

Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта описывается неголономной связью вида

$$f = v + \omega \times r + \dot{\xi}(t)\gamma = 0, \quad (1)$$

где v, ω – скорость центра масс и угловая скорость эллипсоида; γ – вектор нормали к опорной плоскости; r – радиус-вектор точки контакта, который можно выразить через вектор γ при помощи соотношения

$$r = -\frac{\mathbf{B}\gamma}{\sqrt{(\gamma, \mathbf{B}\gamma)}} - ae_3, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1^2, b_1^2, b_3^2).$$

Уравнения движения, описывающие динамику данной системы, после исключения реакции связей принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{J}\omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \dot{r}) + m(g - \ddot{\xi}(t))\gamma \times r &= 0, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{J}\omega = \mathbf{I}\omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})$, $\mathbf{I} = \text{diag}(i_1, i_1, i_3)$ – центральный тензор инерции эллипсоида, \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

Следуя работам [1, 2], в которых выполнялось усреднение уравнений движения, получим усредненный вибропотенциал рассматриваемой системы в виде

$$M_v = m^2 \Xi^2 \gamma \times (\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r} \times \gamma) \times \mathbf{r}), \quad (3)$$

где $\Xi^2 = \langle \dot{\xi}(t)^2 \rangle$ – усредненная скорость колебаний плоскости.

Вводя угловой момент относительно точки контакта в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{I}\omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}),$$

можно переписать уравнения движения (4) следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \gamma + \mathbf{M}_v, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где угловая скорость ω выражается через угловой момент в виде $\omega = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}$.

Уравнения движения (4) допускают геометрический интеграл $F_0 = (\gamma, \gamma) = 1$ и интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega) - m\mathbf{g}(\mathbf{r}, \gamma) + \frac{m^2 \Xi^2}{2} (\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r} \times \gamma), \mathbf{r} \times \gamma),$$

а также сохраняют инвариантную меру $\mu_0 d\mathbf{M}d\gamma$ плотностью [3]

$$\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{i_1 i_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I}\mathbf{r})}}. \quad (5)$$

Кроме того, уравнения (4) допускают еще два линейных по угловым моментам интеграла, связанных с наличием осевой симметрии тела и инвариантностью вращения относительно вертикали¹. Для случая качения эллипсоида по абсолютно шероховатой плоскости эти интегралы не выражаются в элементарных функциях.

Таким образом, рассматриваемая усредненная система (4) является интегрируемой и может быть сведена к квадратурам.

Устойчивость вертикальных вращений

Как известно [4], для любого тела вращения существуют два частных решения, которые соответствуют вертикальным вращениям тела относительно оси симметрии. Под вертикальными вращениями мы понимаем такие вращения, при которых ось симметрии эллипсоида вертикальна и неподвижна, а само тело вращается вокруг этой оси. Верхними вертикальными вращениями мы называем вращения, при которых центр масс, лежащий на оси симметрии, находится выше геометрического центра эллипсоида (этому случаю соответствует $\gamma_3 = 1$), а нижними – вращения, при которых центр масс находится ниже геометрического центра ($\gamma_3 = -1$). Данные решения представляют собой два однопараметрических семейства неподвижных точек системы (4)

$$\sigma^\pm: \mathbf{M} = (0, 0, c), \quad \gamma = (0, 0, \pm 1), \quad (6)$$

где c – параметр семейства. Далее рассмотрим, как влияет наличие вибропотенциала на устойчивость вертикальных вращений эллипсоида.

Напомним [4, 5], что вертикальные вращения тела с осесимметричным распределением масс устойчивы в случае, когда проекция углового момента на ось симметрии удовлетворяет соотношению

$$c^2 > c_0^2 = \frac{4v^2(1 + \eta\rho^2)(\rho - \beta^2)}{\eta(v + \eta\beta^2\rho)^2}, \quad (7)$$

где введены безразмерные параметры: $\rho = |\mathbf{r}|/b_3$ – расстояние от центра масс до точки контакта; $\beta = b_1/b_3$ – радиус сферы, аппроксимирующей поверхность тела в точке контакта, $v = i_3/i_1$, $\eta = mb_3^2/i_1$. Для верхних вращений $\rho = 1 + \alpha$, для нижних – $\rho = 1 - \alpha$.

При наличии вибропотенциала условие устойчивости вертикальных вращений принимает вид

$$c^2 > c_*^2 = c_0^2 - \frac{4v^2(\rho - \beta^2)^2}{(v + \eta\beta^2\rho)^2} \Theta^2, \quad (8)$$

где $\Theta = \Xi/\sqrt{b_3 g}$. Данное неравенство задает в пространстве параметров задачи поверхность $c^2 = c_*^2$, которая разделяет область устойчивых (неподвижная точка типа центр-центр) и неустойчивых (неподвижная точка типа фокус-фокус) вращений. Как видно из данного выражения, при $\beta^2 > \rho$ правая часть неравенства отрицательна,

¹ Более того, данные интегралы не разрушаются и в точных уравнениях, т.е. уравнения (2) также сохраняют два линейных по угловым моментам \mathbf{M} первых интеграла, как и инвариантную меру (5).

следовательно, такие вращения устойчивы независимо от значения углового момента c и наличия вибропотенциала.

При $\beta^2 < \rho$, как видно из неравенства (8), под действием вибропотенциала вертикальные вращения эллипсоида становятся устойчивыми при меньших значениях углового момента. Так, на рис. 2 изображены поверхности $c^2 = c_0^2$ в пространстве параметров (α, c_0^2, β^2) , разделяющие области устойчивых и неустойчивых вертикальных вращений в случае отсутствия вибраций, а на рис. 3 – поверхности $c^2 = c_*^2$ в пространстве параметров $(\Theta^2, c_*^2, \beta^2)$ при фиксированном значении параметра α .

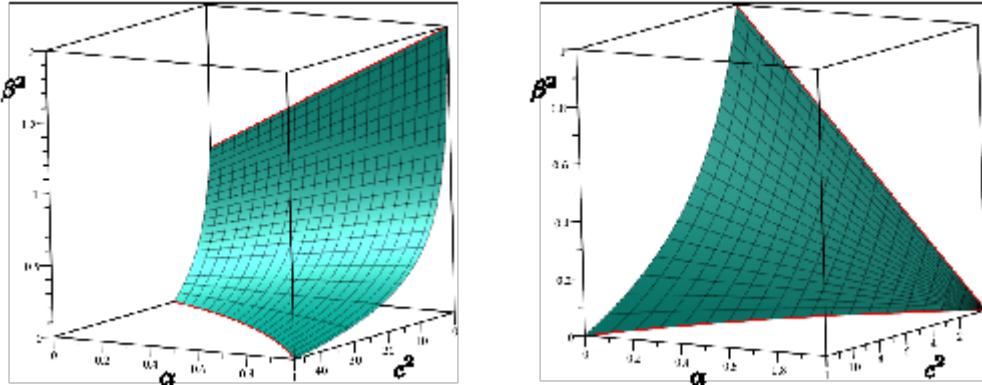


Рис. 2. Поверхности $c^2 = c_0^2$ для случая верхних (слева) и нижних (справа) вращений.

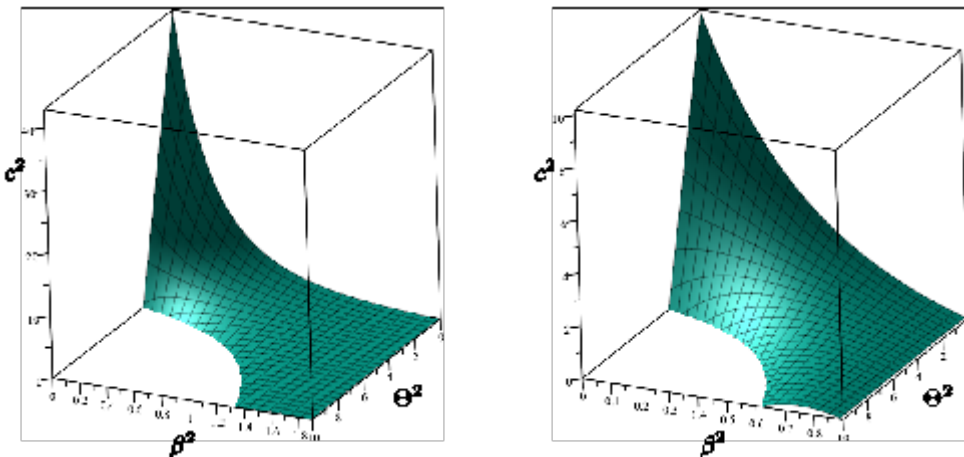


Рис. 3. Поверхности $c^2 = c_*^2$ при фиксированном α для случая верхних (слева) и нижних (справа) вращений.

Заключение

В работе получены уравнения движения, приближенно описывающие динамику эллипсоида вращения (сфероида) на абсолютно шероховатой плоскости, совершающей периодические вертикальные колебания. Показано, вследствие наличия вибропотенциала, инвариантного относительно вращения вокруг вертикали, данная система является интегрируемой и сводится к квадратурам. Подробно проанализирована устойчивость вертикальных вращений эллипсоида. Показано, что наличие вибропотенциала способствует устойчивости вертикальных вращений. То есть при наличии вибраций опорной плоскости для устойчивости вертикальных вращений требуется меньший угловой момент, чем в их отсутствии.

Литература

1. А. П. Маркеев // Прикладная математика и механика, 75:2 2011. 193–203
2. A. V. Borisov, A. P. Ivanov // Regular and Chaotic Dynamics, 27:1 2022. 2–10
3. A. V. Borisov, I. S. Mamaev // Regular and Chaotic Dynamics, 7:2 2002. 177–200
4. А. П. Маркеев. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
5. И. М. Миндлин // Инженерный журнал, 6:2 1964. 225–230

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АТЛАС ДВУХПОЛЕВОГО ОБОБЩЕННОГО ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ

Рябов П.Е.^{1,2}, **Соколов С.В.**^{2,3}

1 - Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

2 - Институт машиноведения им. А. А. Благоданова РАН, Москва, Россия

3 - Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия
peryabov@fa.ru

Аннотация. В докладе рассматривается интегрируемая система с тремя степенями свободы, для которой В.В. Соколовым и А.В. Цыгановым указано представление Лакса. Представление Лакса обобщает $L - A$ пару для гиростата Ковалевской в двойном поле, найденную А.Г. Рейманом и М.А. Семеновым-Тян-Шанским. Приводятся явные формулы двух независимых почти всюду дополнительных первых интегралов, с которыми функционально связаны коэффициенты спектральной кривой $L - A$ пары В.В. Соколова и А.В. Цыганова. Для построения топологического атласа и описания фазовой топологии всей системы в целом используется метод критических подсистем.

Введение

В докладе представлены результаты исследования фазовой топологии интегрируемой модели с тремя степенями свободы на ко-алгебре Ли $e(3,2)^*$, которая описывает динамику двухполевого обобщенного гиростата при наличии двух силовых полей (случай интегрируемости Соколова-Цыганова) [1]. Это один из наиболее общих найденных на сегодня случаев интегрируемости гиростата в двойном поле с условиями типа Ковалевской и гироскопическими силами с непостоянным гироскопическим моментом. Основной топологический анализ такой интегрируемой системы послужили работы М.П. Харламова по фазовой топологии волчка Ковалевской в двойном поле сил и понятие топологического атласа, введенное М.П. Харламовым в начале 2000-х гг. [2]. Топологический атлас включает аналитическое описание критических подсистем полного отображения момента, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является почти всюду гамильтоновой системой с меньшим числом степеней свободы; классификацию оснащенных изоэнергетических диаграмм Смейла с полным описанием регулярных торов Лиувилля и их бифуркаций; определение типов всех критических точек полного отображения момента и программы-конструктора построения топологических инвариантов. Для некоторых интегрируемых задач динамики твердого тела (волчок Ковалевской в двойном поле сил, интегрируемый случай Ковалевской-Соколова, интегрируемый случай Ковалевской-Яхья) удалось эффективно реализовать программу построения топологического атласа [3–5].

Модель

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned} \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) + \\ &+ 2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь трехмерные векторы $\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жестко связанные с твердым телом; λ – параметр гиростатического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии; ε_1 и ε_2 – параметры деформации. Если параметр деформации ε_1 и параметр гиростатического момента λ обращаются в нуль, то функция (2) совпадает с гамильтонианом в задаче о движении волчка Ковалевской в системе двух полей [2].

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \\ \{M_i, \beta_j\} &= \varepsilon_{ijk} \beta_k, \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \\ \{\alpha_i, \beta_j\} &= 0, \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

Функциями Казимира являются выражения $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta}^2$. Относительно скобки Ли–Пуассона,

заданной соотношениями (3), систему (1) можно представить в гамильтоновом виде. Фазовое пространство системы уравнений (1) задается общим уровнем функций Казимира

$$\alpha^2 = a^2, \quad \beta^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab).$$

Для гамильтониана (2) необходимые для интегрируемости по Лиувиллю два дополнительных интеграла K и G имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} K &= Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)] + \\ &\lambda \varepsilon_1^2 (\alpha^2 + \beta^2) M_3 + 2\lambda \varepsilon_1 [\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2) M_1 M_2] - 2\lambda \varepsilon_1^2 \omega_\gamma, \\ G &= \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\alpha^2 \beta_2 + \beta^2 \alpha_1) + \\ &+ 2\varepsilon_1 [\beta^2 (M_2 \alpha_3 - M_3 \alpha_2) - \alpha^2 (M_1 \beta_3 - M_3 \beta_1)] + \\ &+ 2(\alpha \cdot \beta) [\varepsilon_2 (\alpha_2 + \beta_1) + \varepsilon_1 (\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) + \\ &+ \varepsilon_1 [M_3(\alpha_2 + \beta_1) - M_2 \alpha_3 - M_1 \beta_3] + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 (\beta^2 - \alpha^2), \\ Z_2 &= M_1 M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) - \\ &- \varepsilon_1 [M_3(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_3 M_2 - \alpha_3 M_1] - \varepsilon_1^2 (\alpha \cdot \beta), \\ \omega_\alpha &= M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3, \quad \omega_\beta = M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + M_3 \beta_3, \\ \omega_\gamma &= M_1(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + M_2(\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + M_3(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1). \end{aligned}$$

Заключение

Благодаря предложенной форме дополнительных интегралов K, G и параметрической редукции М.П. Харламова, удалось выделить аналитически два инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая О.И. Богоявленского вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Для системы (1) в явном виде описываются критические подсистемы с указанием бифуркаций торов Лиувилля [6–8], а также оснащенные изоэнергетические диаграммы. На сегодняшний день для указанной системы определены порядка 150 оснащенных изоэнергетических диаграмм полного отображения момента с указанием всех камер, семейств регулярных 3-мерных торов и их 4-мерных бифуркаций.

Литература

1. Sokolov V.V., Tsiganov A.V. Lax Pairs for the Deformed Kowalevski and Goryachev-Chaplygin Tops // Theoretical and Mathematical Physics. 2002. Vol. 131, № 1. P. 543–549.
2. Kharlamov M.P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10, № 4. P. 381–398.
3. Kharlamov M.P., Ryabov P.E. Topological atlas of the Kovallevskaya top in a double field // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. Vol. 223, № 6. P. 775–809.
4. Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushkin A.Y. Topological Atlas of the Kowalevski-Sokolov // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, № 1. P. 24–65.
5. Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Kharlamova I.I. Topological Atlas of the Kovalevskaya-Yehia Gyrostat // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. Vol. 227, № 3. P. 241–386.
6. Ryabov P.E. Phase topology of one irreducible integrable problem in the dynamics of a rigid body // Theoretical and Mathematical Physics. 2013. Vol. 176, № 2. P. 1000–1015.
7. Ryabov P.E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 415–421.
8. Sokolov S.V. New invariant relations for one critical subsystem of a generalized two-field gyrostat // Doklady Physics. 2017. Vol. 62, № 12. P. 567–570.

ФИНАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ (ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ) ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Сальникова Т.В., Кугушев Е.И.

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, Москва
tatiana.salnikova@gmail.com

Аннотация. Рассматривается возможность захвата космических масс в рамках плоской гиперболической задачи трех тел, а также плоской параболической задачи трех тел. Предлагаются математическая модель, объясняющая образование несферических спутников планет, подобных марсианским спутникам Фобосу и Деймосу. Эта модель позволяет также понять, почему отсутствует космический мусор внеземного происхождения в околоземном и окололунном пространстве. Настоящее исследование базируется на численном и аналитическом анализе некоторых схем классификации Шази финальных движений в задаче трех тел.

Введение

Классификация финальных движений в задаче трех тел Ж. Шази имела симметрию в прошлом и будущем [1]. Численные примеры, появившиеся позже у ряда авторов, утверждали возможность обмена и захвата в асимметричном случае. Наконец, В.М. Алексеевым было доказано с помощью качественных методов, что существует открытое множество начальных условий положительной меры, приводящее к обмену для систем как с положительной, так и с отрицательной полной энергией: гиперболо-эллиптические движения имеют различные тела, удаляющиеся в бесконечность в прошлом и в будущем [2]. При этом ненулевая вероятность обмена в общем случае должна обсуждаться отдельно в конкретных реальных ситуациях [3].

Основной текст

В нашем исследовании мы рассматриваем возможный захват космических масс в рамках плоской гиперболической задачи трех тел, как и в плоской параболической задаче трех тел, в следующей постановке. Пусть два массивных тела движутся по своим гиперболическим или параболическим траекториям под действием взаимного гравитационного притяжения. Спутник движется вокруг первого тела по эллиптической орбите в прошлом. В момент наибольшего сближения массивных тел он выходит на эллиптическую орбиту относительно второго тела. Такой сценарий возможен, если скорость спутника относительно второго тела в момент сближения становится меньше параболической. Это происходит, если скорость спутника направлена противоположно скорости первого тела. Мы называем такие схемы обмена перехватом. Покажем, что существует довольно много возможных начальных условий, при которых перехват происходит как в ограниченной, так и в неограниченной задаче.

Для обоснования возможности обмена (перехвата) обсуждаются следующие вопросы.

1. Мобильность – возможность произвольных перемещений системы трех тел.
2. Соотношение скоростей при сближении.
3. Компьютерный анализ на средних расстояниях.
4. Достаточные условия устойчивости орбиты спутника после перехвата.

Численное моделирование начинается с ограниченной задачи трех тел с нулевой массой спутника. При переходе к неограниченной задаче трех тел с учетом гравитационного притяжения спутника с достаточно малой массой эффект перехвата сохраняется. Параболо-эллиптический случай является предельным случаем гиперболо-эллиптического.

Цель настоящего исследования состоит в том, чтобы обсудить гипотезу формирования спутниковых систем с несферическими спутниками для планет Солнечной системы в рамках предлагаемой модели. Также эта модель может быть использована для описания возможных областей скопления космического мусора в околоземном пространстве.

Мы рассматриваем вероятность захвата космических объектов в околопланетное пространство и дальнейшего перемещения этих объектов и предлагаем математическую модель образования неправильных (типа Фобоса) спутников планеты. Эта модель обосновывает гипотезу появления несферических спутников планет за счет перехвата (обмена) космическими массами. Обсуждается также устойчивость финальных движений этого типа – эллиптическое движение спутника относительно второго тела не нарушается при отлете первого.

Заключение

В плоской ограниченной задаче трёх тел перехват (или обмен спутниками) – это реально реализуемая конструкция, вероятность такого эффекта существенно ненулевая, может достигать более 40% (вследствие проделанных численных экспериментов).

В качестве приложения рассмотрена возможность захвата и дальнейшего движения космических объектов в околопланетном пространстве, а также предложена математическая модель как формирования неправильных (типа Фобоса) спутников планет, так и уход космических масс из окрестности планеты.

Литература

1. J. Chazy // Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps. J. Math. Pures et Appl., 1929, 8. 353-380..
2. В. М. Алексеев // Лекции по небесной механике. Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 39-54
3. Т. Salnikova, E. Kugushev, A. Pestrikov // Possible appearing of the asteroid origin celestial bodies in near-Earth orbits. Acta Astronautica , V. 204, 2022. 912-919

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА С МНОГОПОЛОСТНЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ

Сидиков М.Н.

*Алмалыкский филиал Национального технологического исследовательского университета
(МИСиС) г.Алмалык (Республика Узбекистан)
mansur106@mail.ru*

Аннотация. В работе предложена модель автобалансирующего устройства с балансирующими шариками, которая установлена с эксцентricностью относительно оси симметрии ротора, а беговые дорожки обладают определенной горизонтальной осью вращения. Исследован вопрос существования стационарных движений при различных комбинациях установки балансирующей системы, учитывающих как определенную эксцентricность и угловую погрешность, так и вращение беговых дорожек вокруг горизонтальной оси. В частных случаях получены аналитические решения и проделан анализ полученных результатов.

Математическая модель

Рассматривается модель ротора в виде абсолютно твердого цилиндра, закрепленного по вертикальной продольной оси с помощью упругого вала на двух опорах (рис. 1). В качестве математической модели принимается модель, рассмотренная в работах [1, 2], с дополнением, что круговые беговые линии (трубки) могут совершать вращательное движение вокруг одной определенной горизонтальной оси. При этом предполагается, что ротор представляет собой цилиндр небольшой высоты и совершает плоское движение (в рамках модели Джеффкогга).

Получены уравнения движения ротора в форме уравнений Лагранжа в обобщенных координатах.

Во вращающейся системе координат, связанной с ротором, необходимые условия стационарности $\zeta = Ae^{i\phi_0}$, $\dot{\theta} = v$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ji}^0$, $\alpha_j = \alpha_j^0$, $A = A_0$ движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & [((k - Mv^2)\xi_0 - cv\eta_0) + ((k - Mv^2)\eta_0 + cv\xi_0)i] = [m_p s_1 + (m_{oc} + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji}) s_2 e^{i\gamma} - \\
 & - \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j (\cos \varphi_{ji}^0 e^{i(\gamma+\beta)} - i \sin \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 e^{i(\gamma+\beta)})] v^2, (\zeta = (\xi + i\eta) e^{i\theta}) \\
 & \sin \varphi_{ji}^0 (\operatorname{Re}(\ddot{z} e^{-i\delta}) + \cos \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 \operatorname{Im}(\ddot{z} e^{-i\delta})) + (s_2 (\sin \varphi_{ji}^0 \cos \beta + \cos \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 \sin \beta) - \\
 & - r_j \sin^2 \alpha_j^0 \sin 2\varphi_{ji}^0) = -\frac{g}{v^2} \cos \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0, (i = 1, \dots, n) \\
 & - m_{ji} r_j \operatorname{Im}(\ddot{z} e^{-i\delta}) \sin \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 - \frac{1}{2} (J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha_j^0 + m_{ji} (s_2 r_j \sin \beta \sin \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 + \\
 & + r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 \cos \alpha_j^0) = -m_{ji} \frac{g}{v^2} r_j \sin \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0. (j = 1, \dots, s).
 \end{aligned} \tag{1}$$

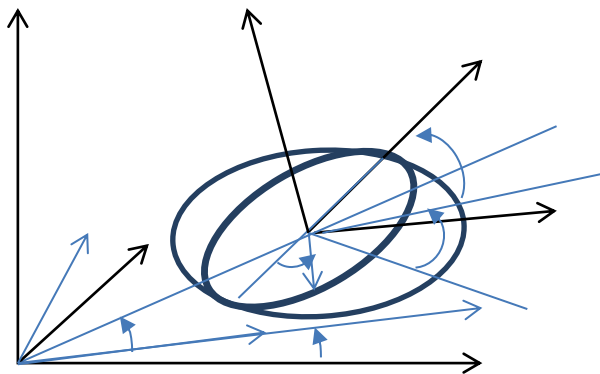


Рис. 1.

Рассмотрим некоторые частные случаи. В системе АБУ все беговые дорожки расположены в одной плоскости под малым углом α относительно горизонтальной плоскости, то есть учитывается не только эксцентricность, но и малая угловая погрешность установки. Считая, что в автобалансирующее устройство установлена под малым углом $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \dots = \alpha_s^0 = \alpha_0$ и заменяя $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0, \cos \alpha_0 \approx 1$, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{v^2} - M\right)\xi_0 - \frac{c}{v}\eta_0 &= m_p s_1 + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (m_{\bar{oc}} + m_{ji}) s_2 \cos \gamma - \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j \cos(\varphi_{ji}^0 + \Delta), \\ \frac{c}{v}\xi_0 - \left(\frac{k}{v^2} - M\right)\eta_0 &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (m_{\bar{oc}} + m_{ji}) s_2 \sin \gamma - \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j \sin(\varphi_{ji}^0 + \Delta), \quad (\Delta = \beta + \gamma) \quad (2) \\ \xi_0 \sin(\varphi_{ji}^0 + \Delta) - \eta_0 \cos(\varphi_{ji}^0 + \Delta) + s_2 \sin(\varphi_{ji}^0 + \beta) &= \frac{g}{v^2} \cos \varphi_{ji}^0 \alpha_0, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

В случае $i = 1, j = 2$ (i -число шариков, j -число дорожек), то есть в каждой дорожке имеется по одному шарiku, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{v^2} - M\right)\xi_0 - \frac{c}{v}\eta_0 &= m_p s_1 + (m_{\bar{oc}} + m_{11} + m_{21}) s_2 \cos \gamma - (m_{11} r_1 \cos(\varphi_{11}^0 + \Delta) + m_{21} r_2 \cos(\varphi_{21}^0 + \Delta)), \\ \frac{c}{v}\xi_0 - \left(\frac{k}{v^2} - M\right)\eta_0 &= (m_{\bar{oc}} + m_{11} + m_{21}) s_2 \sin \gamma - (m_{11} r_1 \sin(\varphi_{11}^0 + \Delta) + m_{21} r_2 \sin(\varphi_{21}^0 + \Delta)), \quad (3) \\ \xi_0 \sin(\varphi_{11}^0 + \Delta) - \eta_0 \cos(\varphi_{11}^0 + \Delta) + s_2 \sin(\varphi_{11}^0 + \beta) &= \frac{g}{v^2} \cos \varphi_{11}^0 \alpha_0, \\ \xi_0 \sin(\varphi_{21}^0 + \Delta) - \eta_0 \cos(\varphi_{21}^0 + \Delta) + s_2 \sin(\varphi_{21}^0 + \beta) &= \frac{g}{v^2} \cos \varphi_{21}^0 \alpha_0, \quad (\bar{g} = \frac{g}{v^2}). \end{aligned}$$

Последние два соотношения (3) после некоторых преобразований можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_{11}^0 - \varphi_{21}^0)(\eta_0 + \bar{g} \alpha \cos \Delta + s_2 \sin \gamma) &= 0, \\ \sin(\varphi_{11}^0 - \varphi_{21}^0)(\xi_0 - \bar{g} \alpha \sin \Delta + s_2 \cos \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\sin(\varphi_{11}^0 - \varphi_{21}^0) = 0, \quad (4)$$

$$\text{или} \quad \xi_0 = -s_2 \cos \gamma + \bar{g} \alpha_0 \sin \Delta, \quad \eta_0 = -s_2 \sin \gamma - \bar{g} \alpha_0 \cos \Delta. \quad (5)$$

Из (4) получим $\varphi_{11}^0 - \varphi_{21}^0 = k\pi$, что совпадает с результатом расположения шариков, рассмотренным в работах [1-2], то есть

$$\varphi_{11}^0 = \varphi_{21}^0 = 0, \quad \varphi_{11}^0 = 0, \varphi_{21}^0 = \pi \quad \text{и} \quad \varphi_{11}^0 = \pi, \varphi_{21}^0 = \pi.$$

Во втором случае (5) имеет место несбалансированное вращательное движение ротора со смещением геометрического центра на величину

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -s_2 \cos \gamma + \bar{g} \alpha_0 \sin \Delta, \\ \eta_0 &= -s_2 \sin \gamma - \bar{g} \alpha_0 \cos \Delta. \end{aligned}$$

Для определения расположения шариков по дорожке подставим (5) в первые два уравнения (3).

$$m_{11} r_1 \cos(\varphi_{11}^0 + \Delta) + m_{21} r_2 \cos(\varphi_{21}^0 + \Delta) = \left[\left(\frac{k}{v^2} - M\right)\xi_0 - \frac{c}{v}\eta_0\right] - m_p s_1 - (m_{\bar{oc}} + m_{11} + m_{21}) s_2 \cos \gamma, \quad (6)$$

$$m_{11} r_1 \sin(\varphi_{11}^0 + \Delta) + m_{21} r_2 \sin(\varphi_{21}^0 + \Delta) = \left[\frac{c}{v}\xi_0 - \left(\frac{k}{v^2} - M\right)\eta_0\right] - (m_{\bar{oc}} + m_{11} + m_{21}) s_2 \sin \gamma.$$

Если $m_{11} r_1 = m_{21} r_2$, то из (6) получим следующие значения для углов $\varphi_{11}^0, \varphi_{21}^0$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_{11}^0 - \varphi_{21}^0) &= \frac{A_1^2 + A_2^2 - 2}{2}, \quad (7) \\ \operatorname{tg} \frac{\varphi_{11}^0 + \varphi_{21}^0 + 2\Delta}{2} &= \frac{A_1}{A_2}, \end{aligned}$$

где $A_1 = \left[\left(\frac{k}{v^2} - M\right)\xi_0 - \frac{c}{v}\eta_0\right] - m_p s_1 - (m_{\bar{oc}} + m_{11} + m_{21}) s_2 \cos \gamma / m_{11} r_1$,

$$A_2 = \left(\left[\frac{c}{v} \xi_0 - \left(\frac{k}{v^2} - M \right) \eta_0 \right] - (m_{\delta c} + m_{11} + m_{21}) s_2 \sin \gamma \right) / m_{21} r_2.$$

Таким образом, положение шариков в беговых дорожках определяется из соотношений (7), аналогично работе [1], со смещением на угол $\Delta = \gamma + \beta$.

При $A = 0$ имеем сбалансированный стационарный режим. Подставляя $\xi_0 = 0, \eta_0 = 0$ в (1), получим:

$$m_p s_1 + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (m_{\delta c} + m_{ji}) s_2 \cos \gamma - \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j \cos(\varphi_{ji}^0 + \Delta) = 0,$$
$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (m_{\delta c} + m_{ji}) s_2 \sin \gamma - \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j \sin(\varphi_{ji}^0 + \Delta) = 0, \quad (\Delta = \beta + \gamma)$$

В общем случае система уравнений не выполняется. Но существуют частные случаи, совпадающие с результатами, полученными в работе [1, 2] с угловой точностью $\Delta = \gamma + \beta$. При конкретных значениях параметров системы выше рассмотренные частные случаи исследованы на устойчивость по Ляпунову с помощью критерия Михайлова.

Выводы

Предлагаемая модель ротора с АБУ позволяет учитывать не только эксцентricность АБУ, а также и угловую погрешность при установке. Дополнительная степень свободы балансировочных шариков расширяет область полубалансированных стационарных движений.

Литература

1. Быков В.Г., Ковачев А.С. Динамика ротора с эксцентricным шаровым автобалансировочным устройством. *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Сер.1. 2014. Том 1. Вып. 4. С. 579-588.
2. Быков В.Г. Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансировочным механизмом. *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Сер.1. 2006. 2 Вып. 4. С. 90-101.

ГЛОБАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Тхай В.Н.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
tkhai@ipu.ru

Аннотация. Для автономной системы общего вида, не стесненной дополнительными ограничениями (гамильтоновость, обратимость, консервативность и т.д.), дается теорема о глобальном семействе – множестве периодических решений с монотонной зависимостью периода от параметра, принимающего все возможные для множества значения. Теорема применяется к задачам механики, управления и нелинейных колебаний. В частности, теоремой решается вопрос о границе применимости ляпуновского семейства периодических движений.

Введение

Задача о глобальном семействе первоначально возникла в многочисленных приложениях теоремы А.М. Ляпунова о центре (1892 г.). В теореме устанавливается существование локального семейства нелинейных периодических движений, примыкающей к равновесию консервативной системы. В конкретных задачах всегда встает вопрос о границе применимости ляпуновского семейства. Прогресс в вопросе о границе начался с исследований А.А. Зевина [1]. Им даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте выход ляпуновского семейства на границу компакта. Сейчас стало понятно, что вопрос о границе в теореме Ляпунова разрешается знанием о глобальном семействе периодических решений, которое включает, как составляющее, локальное ляпуновское семейство. Обратимая механическая система выделяется свойством пространственно-временной симметрии, однако в общем случае не допускает первый интеграл. В ней рассматриваются симметричные периодические движения. Глобальные семейства в этих системах изучались автором (2021–2022 гг.). В докладе излагаются результаты по глобальному семейству в автономной системе общего вида.

Невырожденные периодические решения

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$\dot{z} = Z(z), z \in R^n, \quad (1)$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \dots, z_n^0, t)$, где $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ – начальная точка (при $t = 0$). Необходимое и достаточное условие существования T -периодического решения уравнения (1) записывается в виде равенства

$$f \equiv z(z_1^0, \dots, z_n^0, T) - z^0 = 0. \quad (2)$$

Пусть уравнение (2) допускает решение $z^0 = z^*, T = T^*$, не совпадающее с равновесием. В силу автономности уравнения (1) условие (2) удовлетворяется семейством по γ - сдвигу точки z^0 вдоль траектории. Поэтому для ранга Ra функциональной матрицы A_f для оператора f в точке z^* при $T = T^*$ выполняется неравенство: $Ra \leq n - 1$.

Определение 1. *Случай $Ra = n - 1$ называется невырожденным для периодического решения. При $Ra = n - 1$ периодическое решение называется невырожденным, в противном случае, оно называется вырожденным.*

Уравнение (2) может допускать единственное решение (при фиксированном γ). В этом случае автономное уравнение (1) имеет изолированное периодическое решение – цикл с периодом T^* . Альтернативой будет семейство решений, в котором период T меняется от решения к решению, т.е. является функцией некоторого параметра h : $z^0 = z^0(\gamma, h), T = T(h)$.

Далее рассматривается случай, когда матрица A_f содержит жорданову 2-клетку из нулевых собственных значений.

Определение 2. *Семейство периодических решений уравнения (1) называется невырожденным, если период $T(h)$ на нем монотонно зависит от параметра h .*

Семейство невырожденных периодических решений локально продолжается по h .

Определение 2 справедливо для локального семейства, в котором h меняется в окрестности числа h^* . Оно остается справедливым для любого семейства периодических решений: на нем h меняется в интервале.

Значит, существует интервал изменения параметра h , который отвечает всем периодическим решениям семейства.

Определение 3. *Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр h принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.*

В фазовом пространстве глобальное семейство представляется связным множеством точек. Оно образует двумерное инвариантное многообразие. Интервал изменения h в глобальном семействе может быть конечным (энергия маятника от нижнего до верхнего равновесий) или неограниченным (неограниченные по координате колебания). В уравнении (1) может существовать одно, конечное число или счетное множество глобальных семейств невырожденных периодических решений.

Глобальное семейство невырожденных периодических решений

Теорема. *Пусть уравнение (1) допускает невырожденное периодическое решение, принадлежащее семейству. Тогда оно продолжается по периоду T на глобальное семейство Ξ невырожденных периодических решений. На Ξ период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h . Семейство Ξ заполняет двумерную глобальную область Ω ; Ξ описывается редуцированной системой второго порядка. Для точек области Ω ранг $Ra = n - 1$, на ее границе условие $Ra = n - 1$ не выполняется.*

В случае консервативной системы редуцированная система описывается консервативной системой с одной степенью свободы, для обратимой механической системы получается обратимая механическая система на плоскости.

Следствие. *Ляпуновское семейство продолжается на глобальное семейство невырожденных периодических решений (глобальная теорема Ляпунова о центре).*

Согласно теореме о глобальном семействе, интерес с отдельного периодического решения смещается на глобальное семейство невырожденных периодических решений. На глобальном семействе период может возрастать или убывать, при подходе к границе семейства производная $T'(h)$ может стремиться к нулю или бесконечности.

Некоторые приложения теоремы

Механика. Задача о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Для тела с центром тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции построены глобальные семейства колебаний вращающегося тела, которые связывают устойчивое и неустойчивое перманентные вращения.

Управление. Мехатронная схема стабилизации колебаний. Принцип управления консервативной системой реализуется в рамках связанной системы, в которой генератор сигналов – осциллятор Ван дер Поля, навязывает режим притягивающего (в большом) цикла механической системе, допускающей глобальное семейство колебаний.

Колебания. Обратимая механическая система с параметром. Глобальное семейство невырожденных симметричных периодических движений сохраняется в возмущенной системе.

Заключение

В теории периодических решений выделяется нелокальный объект, который обычно и реализуется в приложениях. Глобальное семейство конструктивно строится, его свойства описаны, возможные границы обозначены. Сценарии перехода глобальных семейств интересны для теории и приложений, но не исследованы.

Литература

1. A. A. Zevin // Nonlocal generalization of Lyapunov theorem . Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 28:9 1997. 1499--1507.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЯХ КРАТНЫХ РЕЗОНАНСОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Холостова О.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
kholostova_o@mail.ru

Аннотация. Рассматривается движение периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении, при наличии кратных резонансов четвертого порядка. Доказано достаточное условие неустойчивости равновесия, для всех вариантов резонансов получены критерии формальной устойчивости. Для случаев, близких к резонансным, решен вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы. Найдены резонансные периодические движения динамически симметричного спутника в окрестности его стационарного вращения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-11-00116 в МАИ (НИУ).

Введение

Рассматриваются движения 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$), устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения чисто мнимые и в системе отсутствуют резонансы до третьего порядка включительно. Пусть при этом реализуется один из случаев кратного резонанса четвертого порядка, для которого величины λ_1 и λ_2 связаны несколькими (двумя или тремя) соотношениями вида $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = \ell$, где $|m_1| + |m_2| = 4$, а m_1, m_2 и ℓ — целые числа. Резонанс назовем основным, если в этом соотношении присутствует только одна частота, и комбинационным, если оно содержит обе частоты. Резонанс будем называть сильным, если при его наличии (и отсутствии других резонансов) исследуемое тривиальное равновесие может быть неустойчивым для некоторого диапазона значений резонансного коэффициента, и слабым, если наличие только этого резонанса не вызывает неустойчивости при всех значениях резонансного коэффициента.

Ранее в статье [1] приведен список пар (λ_1, λ_2) , отвечающих кратным резонансам четвертого порядка, и получено пять качественно различных модельных гамильтонианов, исчерпывающих все возможные случаи рассматриваемых резонансов. В симплектических полярных координатах они представляются в виде

$$\Gamma_{1,2} = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + aR_1^2 \cos 4\Phi_1 + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) + O(R_j^{5/2}), \quad (1)$$

$$\Gamma_3 = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + cR_1^{3/2}R_2^{1/2} \cos(3\Phi_1 + \Phi_2) + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(R_j^{5/2}), \quad (2)$$

$$\Gamma_{4,5} = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) + cR_1^{3/2}R_2^{1/2} \cos(3\Phi_1 \pm \Phi_2) + dR_1R_2 \cos(2\Phi_1 \mp 2\Phi_2 + \kappa) + O(R_j^{5/2}). \quad (3)$$

Гамильтониан T_1 (или T_2) с верхним (или нижним) знаком характерен при наличии в системе сильного основного и сильного (или слабого) комбинационного резонансов четвертого порядка. Гамильтониан T_3 характерен для случаев, когда в системе имеются два комбинационных резонанса четвертого порядка, сильный и слабый. Гамильтониан T_4 (с верхними знаками) отвечает случаям двух сильных и одного слабого комбинационных резонансов, гамильтониан T_5 (с нижними знаками) — случаям двух слабых и одного сильного комбинационных резонансов. Слагаемые $O(R_j^{5/2})$ 2π -периодичны по Φ_j и имеют по времени t период, равный 24π в (1); 10π или 20π , для разных наборов (λ_1, λ_2) , в (2); 16π в (3). Без ограничения общности резонансные коэффициенты a, b, c, d в соотношениях (1)–(3) можно считать положительными,

О неустойчивости тривиального равновесия

Пусть в системе с гамильтонианом T_1 или T_2 резонансный коэффициент a удовлетворяет условию $a > |c_{20}|$, при котором тривиальное равновесие неустойчиво при наличии одного основного резонанса. Докажем, что при этом условии неустойчивость тривиального равновесия сохраняется при добавлении комбинационного резонанса. Используем теорему Четаева о неустойчивости; следуя [3], в качестве функции Четаева выберем функцию

$$V = (R_1^\gamma - R_2^\gamma)R_1^2 \sin(4\alpha\Phi_1) \quad (\alpha = 1 + \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1, 2 < \gamma < 3).$$

Область $V > 0$ (с границей $V = 0$) определим условиями

$$R_2 = \delta R_1^{\gamma/2} \quad (0 < \delta < 1), \quad 0 < \Phi_1 < \pi/(4\alpha).$$

Производная dV/dt в силу уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} dV/dt &= 4R_1^{\gamma+3} \{a\gamma \sin(4\alpha\Phi_1) \sin 4\Phi_1 + 2(1-\delta^2)[a \cos(4\alpha\Phi_1) + \\ &\quad + c_{20} \cos(4\alpha\Phi_1) + \varepsilon \cos(4\alpha\Phi_1)(c_{20} + a \cos 4\Phi_1)] + g\}, \\ 4g &= [\gamma + 2(1-\delta^2)]g_1 \sin(4\alpha\Phi_1) + 4\alpha(1-\delta^2)g_2 \cos(4\alpha\Phi_1) + g_3, \quad g_1 = b\delta^{3/2} R_1^{3(\gamma-2)/4} \sin \Psi + O(R_1^{1/2}), \\ g_2 &= c_{11}\delta R_1^{(\gamma-2)/2} + \frac{1}{2}b\delta^{3/2} R_1^{3(\gamma-2)/4} \cos \Psi + O(R_1^{1/2}), \quad g_3 = \mp 6\delta^{5/2} b R_1^{(\gamma-2)/4} \sin(4\alpha\Phi_1) \sin \Psi + O(R_1^{(3-\gamma)/2}), \\ \Psi &= \Phi_1 \pm 3\Phi_2. \end{aligned}$$

Функция g стремится к нулю при $R_1 \rightarrow 0$. В достаточно малой окрестности начала координат и при достаточно малых ε производная dV/dt положительна в области $V > 0$, если выполнено условие $a > |c_{20}|$, и значит, тривиальное равновесие системы с гамильтонианом T_1 или T_2 неустойчиво.

Достаточные условия формальной устойчивости

При отсутствии в системе резонансов до четвертого порядка включительно тривиальное равновесие устойчиво, если квадратичная форма $c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2$ является знакоопределенной при $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$. Коэффициенты c_{20} и c_{02} должны быть одного знака (считаем их положительными), а условия формальной устойчивости (ФУ) выполнены, если

$$c_{11} > 0 \quad \text{или} \quad c_{11} < 0, \quad \Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} < 0.$$

Пусть коэффициенты c_{ij} гамильтонианов (1)-(3) отвечают одному из этих вариантов. Искались ограничения на резонансные коэффициенты, при которых ФУ сохраняется и при наличии резонансов.

На первом этапе получены условия знакоопределенности (при $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$) приближенных гамильтонианов, получающихся из (1)-(3) при отбрасывании последних слагаемых. Введем функции

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (c_{20} + a\alpha)x^4 + c_{11}x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (c_{20} > a, \quad \alpha = \cos 4\Phi_1, \quad \beta = \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2)), \\ f_2(x) &= c_{20}x^4 + c\gamma x^3 + c_{11}x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (\gamma = \cos(3\Phi_1 + 3\Phi_2), \quad \beta = \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2)), \\ f_3(x) &= c_{20}x^4 + c\gamma x^3 + (c_{11} + d\delta)x^2 + b\beta x + c_{02} \\ &\quad (\gamma = \cos(3\Phi_1 \pm 3\Phi_2), \quad \beta = \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2), \quad \delta = \cos(2\Phi_1 \mp 2\Phi_2 + \kappa)). \end{aligned} \quad (4)$$

Величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ здесь рассматриваются как параметры, принимающие произвольные значения из диапазона $[-1, 1]$. Аналитически и графически искались ограничения на величины a, b, c, d (с учетом наложенных ограничений на c_{ij}), при выполнении которых функции (4) положительны при всех $x \geq 0$ и всех $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из указанного диапазона. Анализ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ привел соответственно к неравенствам

$$b^2 < \frac{2[c_{11}[36c_{02}(c_{20} - a) - c_{11}^2] + [12c_{02}(c_{20} - a) + c_{11}^2]^{3/2}]}{27(c_{20} - a)} \quad \text{и} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 27c_{02}^2c^4 + 2(2b^2 - 9c_{11}c_{02})bc^3 + [(6c_{20}c_{02} - c_{11}^2)b^2 + 4c_{02}c_{11}\Delta_1]c^2 - 2c_{20}[9c_{11}b^2 - 8c_{02}(12c_{20}c_{02} + 5c_{11}^2)]bc + \\ + c_{20}[27c_{20}b^4 + 4c_{11}\Delta_1b^2 - 16c_{02}\Delta^2] < 0, \quad \Delta_1 = c_{11}^2 - 36c_{20}c, \end{aligned}$$

а при анализе функции $f_3(x)$ получено второе из этих условий, в котором сделана замена c_{11} на $c_{11} - d$. Выписанные неравенства задают условия ФУ тривиального равновесия приближенных систем.

Вернемся к полным неавтономным системам с гамильтонианами (1)-(3). Наличие кратных резонансов четвертого порядка означает, что в этих системах есть резонансы, вообще говоря, всех четных порядков выше четвертого. Можно провести нормализацию гамильтонианов в слагаемых всех степеней, начиная с пятой. Замена переменных, уничтожающая время в резонансных слагаемых четвертого порядка, уничтожает его во всех остальных резонансных гармониках. Нормализованные гамильтонианы являются формальными интегралами соответствующих им автономных систем. При достаточно малых неотрицательных значениях R_1 и R_2 они остаются положительно определенными функциями этих величин, если выполнено соответствующее условие из (5) (или указанное условие неотрицательности функции $f_3(x)$). Таким образом, при переходе к полным неавтономным системам условия ФУ тривиального равновесия сохраняются.

Дана графическая интерпретация полученных результатов. Показано, что во всех рассмотренных системах полученные области ФУ целиком содержатся внутри областей устойчивости каждого сильного резонанса, рассматриваемого по отдельности. Если в системе имеются слабые резонансы, то для обеспечения

ФУ отвечающие им резонансные коэффициенты (при наличии других резонансов) должны выбираться из ограниченного диапазона.

Резонансные периодические движения систем

Пусть для рассматриваемых резонансных случаев значения величин $\lambda_j (j=1, 2)$ близки к точным резонансным значениям λ_{j0} . Введем резонансные расстройки μ_j по формулам $\lambda_j = \lambda_{j0} - \varepsilon^2 \mu_j$ ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Положим $R_j = \varepsilon^2 r_j$ и введем новую независимую переменную $\tau = \varepsilon^2 t$. Преобразованные гамильтонианы, соответствующие (1) и (2), имеют вид

$$H_{1,2} = -\mu_1 r_1 - \mu_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + a r_1^2 \cos 4\Phi_1 + b r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) + O(\varepsilon), \quad (6)$$

$$H_3 = -\mu_1 r_1 - \mu_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + c r_1^{3/2} r_2^{1/2} \cos(3\Phi_1 + \Phi_2) + b r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(\varepsilon). \quad (7)$$

В (6) и (7) $O(\varepsilon)$ — совокупность слагаемых, период которых по τ равен $24\pi\varepsilon^2$ и $10\pi\varepsilon^2$ (или $20\pi\varepsilon^2$) соответственно.

Проведено исследование периодических движений систем с гамильтонианами (6) и (7). Сначала искали положения равновесия приближенных автономных систем с гамильтонианами, получаемыми при отбрасывании в (6) и (7) слагаемых $O(\varepsilon)$. Для первой системы в положениях равновесия имеем $\sin 4\Phi_1 = 0$, $\sin(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) = 0$ и

$$-2\nu_1 u_1 + 4C_{20} u_1^3 + 2C_{11} u_1 u_2^2 + u_2^3 = 0, \quad -\nu_2 + C_{11} u_1^2 + (3/2)u_1 u_2 + 2C_{02} u_2^2 = 0, \quad u_j = \sqrt{r_j} \quad (u_j > 0, j=1,2) \quad (8)$$

$$\nu_j = \frac{\mu_j}{b\delta_2} \quad (j=1,2), \quad C_{20} = \frac{c_{20} + a\delta_1}{b\delta_2}, \quad C_{11} = \frac{c_{11}}{b\delta_2}, \quad C_{02} = \frac{c_{02}}{b\delta_2}, \quad \delta_1 = \text{sign} \cos 4\Phi_1, \quad \delta_2 = \text{sign} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) \quad (\delta_j = \pm 1)$$

Для второй системы имеем $\sin(3\Phi_1 + \Phi_2) = 0$, $\sin(\Phi_1 - 3\Phi_2) = 0$ и

$$-2\nu_1 u_1 + 4C_{20} u_1^3 + 2C_{11} u_1 u_2^2 + 3C u_1^2 u_2 + u_2^3 = 0, \quad -2\nu_2 u_2 + C u_1^3 + 2C_{11} u_1^2 u_2 + 3u_1 u_2^2 + 4C_{02} u_2^3 = 0 \quad (9)$$

$$\nu_j = \frac{\mu_j}{b\delta_2} \quad (j=1,2), \quad C_{ij} = \frac{c_{ij}}{b\delta_2}, \quad C = \frac{c\delta_1}{b\delta_2}, \quad \delta_1 = \text{sign} \cos(3\Phi_1 + \Phi_2), \quad \delta_2 = \text{sign} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) \quad (\delta_j = \pm 1)$$

Система (8) зависит от пяти, а система (9) от шести параметров. В случаях точного резонанса ($\nu_j = 0$ ($j=1,2$)) эти системы сводятся к двум однородным уравнениям и могут иметь решения только при специальном соотношении для остальных параметров. В случае $\nu_j \neq 0$ ($j=1,2$) для фиксированных (в каждой конкретной задаче) значений остальных параметров плоскость величин ν_1, ν_2 может быть разбита на ряд областей с различным числом равновесных точек и/или различным характером их устойчивости. Границами областей служат прямые, проходящие через начало координат. Сделан ряд качественных выводов о числе равновесных точек исследуемых систем, предложен алгоритм исследования их устойчивости в линейном приближении.

В соответствии с теорией периодических движений Пуанкаре, каждое нетривиальное положение равновесия приближенных систем порождает аналитическое по ε , периодическое по τ (с периодом $24\pi\varepsilon^2$ для системы (6) и периодом $10\pi\varepsilon^2$ или $20\pi\varepsilon^2$ для системы (7)) движение полной неавтономной системы. В исходных переменных в рассматриваемой ε -окрестности начала координат им соответствуют аналитические по малому параметру движения с периодом по t , равным соответственно 24π и 10π (или 20π). При этом неустойчивые и устойчивые положения равновесия переходят соответственно в неустойчивые и устойчивые в линейном приближении периодические движения.

В качестве приложения рассмотрен ряд резонансных точек исследуемого вида в задаче о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) с геометрией масс пластинки в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета.

Литература

1. О.В. Холостова // Вестник Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 29.2.2019. Т. 29. 275-294.
2. O.V. Kholostova // J. of Physics: Conference Series 1959 (2021) 012028. IOP Publishing.
3. А.П. Маркеев // Точки либрации в небесной механике и космодинамике. 1978. 312 с.

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Шамолин М.В.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
shamolin@rambler.ru

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [1–3], позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных механических систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [4–6]).

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты – это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Некоторые частные случаи систем с конечным числом степеней свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в данном контексте в работах автора [5, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

Для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. Н. Poincaré, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912, 340 pp.
2. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР, 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74, вып. 1. С. 117–148.
4. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209–210.
5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. Шамолин М.В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЯКОБИ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ

Шкапов П.М.¹, Сулимов В.Д.¹, Сулимов А.В.^{1,2}

1 - Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
2 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, филиал в г.

Севастополе
spm@bmstu.ru

Аннотация. Исследования устойчивости динамических систем в современных условиях могут включать в себя применение теории Косамби–Картана–Черна. Вводимое геометрическое описание системы позволяет определить для нее пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по косвенной информации – собственным значениям тензора кривизны отклонения. Приведены результаты численного решения обратной задачи для эллиптического маятника с управлением.

Введение

Отдельное направление в исследованиях динамических систем составляют задачи управления: например, обеспечение робастной устойчивости системы, синтез оптимального управления, поиск оптимальной программы управления в заданном классе аппроксимаций. Анализ устойчивости систем по Якоби основан на применении теории Косамби–Картана–Черна (теории ККЧ), возрастание внимания к которой отражает значительное число публикаций в последнее время [1, 2]. Подобные исследования актуальны в практических приложениях, где требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби. Анализ устойчивости динамической системы в контексте теории ККЧ связан с изучением ее робастности (меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды).

Основной текст

В рамках подхода эволюция системы во времени описывается дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i(x, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где G^i – гладкая функция, определенная в локальной системе координат (x^i, y^i) на открытом связном подмножестве Ω евклидова $(2n + 1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$; $y^i = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right)$; t – время. Вариационное уравнение, соответствующее (1), может быть представлено в ковариантной форме: $\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j$; здесь ξ^j – контравариантное векторное поле, определенное на Ω ; P_j^i – тензор кривизны отклонения (второй ККЧ-инвариант),

$$P_j^i = -2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} - 2G^k G_{jk}^i + y^k \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} + N_k^i N_j^k; \quad (2)$$

N_j^i – локальные коэффициенты нелинейной связности; G_{jk}^i – локальные коэффициенты связности Бервальда.

Имеет место: $N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$; $G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$.

Определение [1]. Траектории системы дифференциальных уравнений (1) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора P_j^i всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби в противном случае.

Подход на основе теории ККЧ реализован применительно к линеаризованной системе дифференциальных уравнений, описывающих динамическую систему с управлением [3]. Исследуется система с двумя степенями свободы – эллиптический маятник, состоящий из ползуна массы $m_1 = M$, жесткого

невесомого стержня длины l , а также материальной точки массы $m_2 = m$ на свободном конце стержня. Для описания движения системы вводятся две обобщенные координаты: x – перемещение ползуна вдоль горизонтальной направляющей; θ – угол отклонения осевой линии стержня от вертикали. Управляющее воздействие представлено активной силой F , приложенной к ползуну, и задано в виде $F = -(K_1 x + K_2 \dot{x} + K_3 \theta + K_4 \dot{\theta})$; здесь K_i – коэффициенты усиления обратной связи, $i = \overline{1, 4}$. После определения (регулярного) лагранжиана полученные с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа дифференциальные уравнения движения системы, линеаризованные в окрестности положения равновесия ($x = 0$; $\theta = 0$), имеют вид:

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}F, \quad \ddot{\theta} = -\frac{(M+m)g}{Ml}\theta + \frac{1}{Ml}F, \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения. В работе [3] показано, что система (3) является управляемой и, следовательно, существуют соответствующие коэффициенты усиления обратной связи. Установлена зависимость собственных значений тензора P_j^i управляемой системы от ее параметров m_1, m_2, l , а также от коэффициентов K_i , $i = \overline{1, 4}$. Компоненты тензора кривизны отклонения системы определены в виде:

$$P_1^1 = \frac{l(K_2)^2 - K_2 K_4 - 4lMK_1}{4lM^2}, \quad P_2^1 = \frac{lK_2 K_4 - (K_4)^2 - 4lM(K_3 - mg)}{4l^2 M^2},$$

$$P_1^2 = \frac{K_2 K_4 - l(K_2)^2 - 4lMK_1}{4lM^2}, \quad P_2^2 = \frac{(K_4)^2 - lK_2 K_4 + 4lM\{K_3 - (M+m)g\}}{4l^2 M^2}.$$

Собственные значения представленного в (2) тензора P_j^i в частном случае системы с двумя степенями свободы могут быть определены из уравнения

$$\lambda^2 - (P_1^1 + P_2^2)\lambda + (P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2) = 0.$$

Выполнен анализ устойчивости по Якоби исследуемой системы. Далее используется предположение о том, что собственные значения тензора кривизны отклонения, определенного для динамической системы, не только дают оценку ее устойчивости в контексте теории ККЧ, но также несут и некоторую существенную информацию о самой системе. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по заданным собственным значениям ее тензора кривизны отклонения. Реализован оптимизационный подход к решению обратной задачи. Скалярная критериальная функция предполагается непрерывной, многомерной, локально липшицевой, не обязательно всюду дифференцируемой. Многоэкстремальность критериальной функции обусловлена неполнотой входной информации, представленной только собственными значениями тензора P_j^i . Численное решение регуляризованной обратной задачи получено с использованием нового гибридного алгоритма глобальной оптимизации. Предложенный алгоритм интегрирует стохастический алгоритм сканирования пространства переменных (версия кратного алгоритма столкновения частиц М-РСА) [4] и детерминированный метод локального поиска – метод линеаризации с построением сглаживающих аппроксимаций и итерационным уточнением [5] (алгоритм QOM-PCALMSI). При численном решении обратной задачи реализуются следующие процедуры: вычисление собственных значений тензора P_j^i (решение прямой задачи); вычисление текущих значений критериальной функции с учетом заданной входной информации; сканирование пространства переменных и определение области, перспективной на глобальный минимум; анализ чувствительности критериальной функции к изменению свободных переменных, локальный поиск в выделенной области и проверка условия завершения поиска глобального минимума.

Эллиптический маятник с управлением рассматривается при следующих значениях его параметров, а также коэффициентов усиления обратной связи: $m_1^* = 0,6 \text{ кг}$; $m_2^* = 0,4 \text{ кг}$; $l^* = 1 \text{ м}$; $K_1^* = 40 \text{ Н/м}$; $K_2^* = 14 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$; $K_3^* = 8 \text{ Н/рад}$; $K_4^* = 10 \text{ Н}\cdot\text{с/рад}$. Входная косвенная информация для решения обратной задачи в указанной постановке представляет собственные значения тензора P_j^i и задана в виде: $\lambda_1^* \approx -54,011$; $\lambda_2^* \approx -5,146$ (система устойчива по Якоби). Относительная погрешность входных данных не превышает 1%. Искомыми переменными являются относительные величины x_1, x_2, x_3 , соответствующие массе m_2 материальной точки маятника и коэффициентам K_1, K_2 усиления обратной связи.

Критериальная функция обратной задачи определена в виде $F(x) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i^2(x) + \alpha \|x\|_2^2$, где $\gamma_i, f_i(x)$ – весовой коэффициент и частный критерий, здесь соответствующие i -му собственному значению λ_i тензора кривизны отклонения: $f_i(x) = (\lambda_i^* - \lambda_i(x))$, $i = 1, 2$; α – параметр регуляризации; $x \in \mathbb{R}^3$.

При численном решении реализован оптимизационный подход с использованием нового гибридного алгоритма глобальной оптимизации QOM-PCALMSI [6]. В заключительной фазе локального поиска при численном решении изменение переменных x_1, x_2, x_3 с ростом числа итераций N_{iter} показано на рис. 1а; соответствующее изменение значений критериальной функции $F(x)$ и нормы вектора $Nr(w)$ (w – вектор направления локального поиска) представлено на рис. 1б.

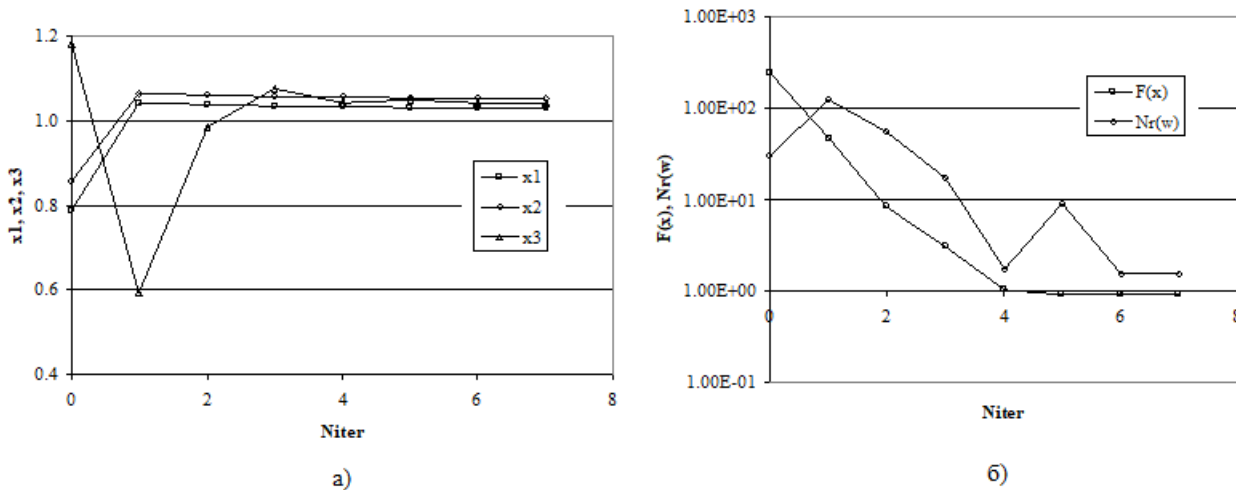


Рис. 1. а) Зависимость переменных x_1, x_2, x_3 от N_{iter} ; б) Зависимость функции $F(x)$ и нормы вектора $Nr(w)$ направления поиска от N_{iter}

В результате восстановлены следующие приближенные значения искомых параметров системы: $m_2 = 0,411 \text{ кг}$; $K_1 = 42,185 \text{ Н/м}$; $K_2 = 14,577 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$. Относительная погрешность решения обратной задачи не превышает 5,5%.

Заключение

В рамках теории Косамби–Картана–Черна выполнен анализ устойчивости по Якоби динамической системы – эллиптического маятника с управлением. С этой целью для исследуемой системы определены в явном виде компоненты тензора кривизны отклонения и его собственные значения. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по косвенной входной информации, представленной собственными значениями тензора кривизны отклонения. Проведено модельное восстановление параметров системы. Точность приближенного решения согласована с точностью задания входной информации.

Литература

1. Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 2012. V. 6, № 4. P. 1145-1196.
2. Harko, T. Kosambi-Cartan-Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems / T. Harko, P. Pantaragphong, S.V. Sabau // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2016. V. 13, № 2. 1656014 (24 pp).
3. Yajima T., Yamasaki K. Jacobi stability for dynamical systems of two-dimensional second-order differential equations and application to overhead crane system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2016. V. 13, № 4. 1650045 (16 pp.).
4. Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the multi-particle collision algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization // Selecciones Matemáticas. 2019. V. 6 (2). P. 156-177.

5. Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2021. № 4 (97). С. 40-56.
6. Сулимов В.Д., Сулимов А.В., Шкапов П.М. Программа для ЭВМ, реализующая гибридный алгоритм глобальной недифференцируемой оптимизации QOM-PCALMSI // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022664841. Заявка № 2022663517. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 05 августа 2022.

СЕКЦИЯ I

Подсекция I-2

Управление и оптимизация в механических системах

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Аветисян В.В.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван
vanavet@yahoo.com

Аннотация. Для системы, моделирующей динамику однозвенного электромеханического манипулятора, решается задача построения управляющего напряжения и определения области конечных состояний, переход в которую из начального состояния покоя с помощью построенного управления происходит за конечное время без нарушения заданных ограничений на напряжение и ток в цепи якоря электродвигателя.

Работа выполнена при поддержке гранта № 21Т-2D255 Комитета по науке Республики Армения.

Введение

Рассматривается электромеханическая система второго порядка, которая приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется напряжением, подаваемым электродвигателем независимого привода, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало [1]. Рассматриваемая система отличается той особенностью, что в классе ограниченных управлений она является управляемой к состоянию покоя, но не является управляемой по отношению к произвольному состоянию, отличного от покоя. Для рассматриваемой модели в [1] изучены задачи построения оптимального управления, обеспечивающего перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя, в том числе при дополнительных ограничениях. Для некоторых систем более высокого порядка, в частности, для систем четвертого порядка со смешанными ограничениями, которые представляют собой модели механических и электромеханических систем, содержащих электрический двигатель, в [2–4] исследованы задачи построения ограниченного управления, приводящие систему из произвольного начального состояния в терминальное состояние покоя за конечное время. В данной работе решается задача построения управления перемещением электромеханической системы с одной степенью свободы из начального состояния покоя в заданное конечное состояние при ограничениях на управляющее напряжение и ток в цепи якоря электродвигателя. Получено условие, которое на фазовой плоскости системы образует область конечных состояний, управляемый переход в любую точку которой происходит за конечное время без нарушения заданных ограничений. Наличие ограничения на ток составляет основное отличие данной задачи от задачи, рассмотренной в [5].

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и абсолютно твердого тела (инерционной нагрузки) на его выходном валу. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. В этом случае инерционная нагрузка есть рука манипулятора вместе с грузом, закрепленным в его схвате. Движение описанной системы в безразмерных единицах определяется следующими соотношениями ([1]):

$$\ddot{\varphi} = k^{1/2} j, \quad Rj + k^{1/2} \dot{\varphi} = k^{-1/2} u. \quad (1.1)$$

Здесь φ – угол поворота руки; u и j – входное (управляющее) напряжение и ток в цепи якоря двигателя соответственно, которые ограничены по величине заданными постоянными; R – электрическое сопротивление обмотки якоря двигателя; k – постоянная (параметр электродвигателя).

Рассмотрим следующую задачу. Найти закон изменения управляющего напряжения $u(t)$, который обеспечивает приведение системы (1.1) из начального состояния покоя

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.2)$$

в заданное конечное состояние

$$\varphi(T) = \varphi^1, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}^1 \quad (1.3)$$

в некоторый момент времени $t = T$ при ограничениях на управляющее напряжение и ток

$$|u| \leq 1, \quad |j| \leq j_0. \quad (1.4)$$

Здесь j_0 – заданная постоянная.

Исключив переменную j из уравнений (1.1) и перейдя к новым переменным

$$v = u - k\dot{\varphi}, \quad x_1 = R\varphi, \quad x_2 = R\dot{\varphi}, \quad (1.5)$$

запишем систему (1.1)-(1.4) в следующем виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v \tag{1.6}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \tag{1.7}$$

$$x_1(T) = x_1^1, \quad x_2(T) = x_2^1, \tag{1.8}$$

$$|v + kR^{-1}x_2| \leq 1, \quad |v| \leq \eta, \quad \eta = j_0 kR. \tag{1.9}$$

2. Построение управления

Закон изменения управляющего напряжения $v(t)$, обеспечивающий переход системы (1.6) из начального состояния покоя (1.7) в конечное состояние (1.8) в момент времени T без учета ограничений (1.9), строится с помощью изложенного в [2] метода и имеет следующий вид:

$$v(t) = (-12T^{-3}t + 6T^{-2})x_1^1 + (6T^{-2}t - 2T^{-1})x_2^1. \tag{2.1}$$

Интегрируя уравнения (1.6) с начальными условиями (1.7) при управлении (2.1), найдем

$$x_2 = (-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t)x_1^1 + (3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t)x_2^1. \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1), (2.2), ограничения (1.9) запишем в виде

$$|g_1(t, T)x_1^1 + g_2(t, T)x_2^1| \leq 1, \quad |f_1(t, T)x_1^1 + f_2(t, T)x_2^1| \leq \eta, \quad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t, T) &= -6kR^{-1}T^{-3}t^2 + (6kR^{-1}T^{-2} - 12T^{-3})t + 6T^{-2}, & f_1(t, T) &= -12T^{-3}t + 6T^{-2}, \\ g_2(t, T) &= 3T^{-2}kR^{-1}t^2 + (6T^{-2} - 2T^{-1}kR^{-1})t - 2T^{-1}, & f_2(t, T) &= 6T^{-2}t - 2T^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Проведем оценки сверху левых частей неравенств (2.3):

$$\begin{aligned} |g_1(t, T)x_1^1 + g_2(t, T)x_2^1| &\leq |g_1(t, T)||x_1^1| + |g_2(t, T)||x_2^1| \leq \bar{g}(T)|x_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1})|x_2^1| \leq 1, \\ |f_1(t, T)x_1^1 + f_2(t, T)x_2^1| &\leq |f_1(t, T)||x_1^1| + |f_2(t, T)||x_2^1| \leq 6T^{-2}|x_1^1| + 4T^{-1}|x_2^1| \leq \eta, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\bar{g}(T) = \begin{cases} 6T^{-2}, & 0 < T \leq T' = 2k^{-1}R, \\ [1.5(kR^{-1})^2 T^2 + 6]T^{-3}k^{-1}R, & T' \leq T < \infty. \end{cases} \tag{2.6}$$

Правые соотношения (2.5) рассмотрим в случае равенства, записанные в виде

$$G(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = 1 - kR^{-1}|x_2^1|, \quad 0 < T < \infty, \tag{2.7}$$

$$F(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = \eta, \quad 0 < T < \infty, \tag{2.8}$$

где

$$G(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = \begin{cases} 6T^{-2}|x_1^1| + 4T^{-1}|x_2^1|, & 0 < T \leq T', \\ 6k^{-1}R|x_1^1|T^{-3} + (1.5kR^{-1}|x_1^1| + 4|x_2^1|)T^{-1}, & T' \leq T < \infty, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$F(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = 6T^{-2}|x_1^1| + 4T^{-1}|x_2^1|, \quad 0 < T < \infty. \tag{2.10}$$

Из положительности левой части первого равенства (2.7) следует, что $|x_2^1| < k^{-1}R$. Функции (2.9) и (2.10) по T непрерывны и монотонно убывают от ∞ до 0 при изменении T от 0 до ∞ . Следовательно, для любой пары $(x_1^1, x_2^1) \in X$, где

$$X = \{(x_1^1, x_2^1) : |x_1^1| < \infty, |x_2^1| < k^{-1}R\}, \tag{2.11}$$

неравенства (2.5) будут выполняться для всех $t \in [0, T]$, если время окончания процесса T выбрать из условий (2.7), (2.8).

Если обозначим через T_1 и T_2 решения уравнений (2.7) и (2.8) соответственно, то ограничения (2.3) не нарушатся при любом t из интервала $[0, T^*]$, где

$$T^* = \max(T_1, T_2). \tag{2.12}$$

Рассмотрим две области изменения пары $(x_1^1, x_2^1) \in X$:

$$X_- = \left\{ (x_1^1, x_2^1) \in X : 1.5(kR^{-1})^2 |x_1^1| + 3kR^{-1} |x_2^1| \leq 1 \right\},$$

$$X_+ = \left\{ (x_1^1, x_2^1) \in X : 1.5(kR^{-1})^2 |x_1^1| + 3kR^{-1} |x_2^1| \geq 1 \right\}.$$

Областям X_- и X_+ соответствуют интервалы $(0, T']$ и $[T', \infty)$.

Тогда, если $(x_1^1, x_2^1) \in X_-$, то

$$T_1 = \left(2|x_2^1| + \sqrt{4|x_2^1|^2 + 6(1 - kR^{-1}|x_2^1|)|x_1^1|} \right) / (1 - kR^{-1}|x_2^1|), \quad (2.13)$$

а если $(x_1^1, x_2^1) \in X_+$, то T_1 определяется из уравнения (2.9), приведенного к кубическому уравнению

$$aT^3 + bT^2 + d = 0, \quad a = 2kR^{-1}(1 - kR^{-1})|x_2^1| > 0, \quad b = -(3kR^{-1}|x_1^1| + 8|x_2^1|)kR^{-1} < 0, \quad d = -12|x_1^1| < 0$$

с отрицательным дискриминантом и, следовательно, имеющего один действительный положительный корень, который определяется с помощью формулы Кардано

$$T_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{b}{3a}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0, \quad (2.14)$$

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} = -\frac{3(kR^{-1})^2|x_1^1|^2}{4}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} = -\frac{(kR^{-1})^4|x_1^1|^3 + 24|x_1^1|}{4kR^{-1}}, \quad \frac{b}{3a} = -\frac{kR^{-1}|x_1^1|}{2}.$$

Решение уравнения (2.10) для любой пары $(x_1^1, x_2^1) \in X$ (2.11) имеет вид

$$T_2 = 2\eta^{-1}|x_2^1| + \sqrt{4(\eta^{-1}|x_2^1|)^2 + 6\eta^{-1}|x_1^1|}. \quad (2.15)$$

С учетом (2.13)-(2.15) из (2.12) получаем

$$T^* = \begin{cases} \max\{T_1(2.13), T_2(2.15)\}, & \text{если } (x_1^1, x_2^1) \in X_-, \\ \max\{T_1(2.14), T_2(2.15)\}, & \text{если } (x_1^1, x_2^1) \in X_+. \end{cases} \quad (2.16)$$

Таким образом, в задаче (1.1)–(1.4) искомое управление $u(t)$ строится по следующей последовательности: 1) для заданного конечного состояния $(x_1^1, x_2^1) \in X$ (2.11) определяем время движения T^* (2.16); 2) фиксируя любое $T \geq T^*$, находим вспомогательную управляющую функцию $v(t)$ и фазовую переменную $x_2(t)$ по явным формулам (2.1), (2.2); 3) переходя к исходным переменным по формулам (1.5), находим управление $u(t)$.

Заключение

Путем применения обобщенной схемы Калмана построения управления, распространенной на случай наличия ограничений на управляющее напряжение и ток в цепи якоря электродвигателя электромеханической системы с одной степенью свободы, в явном виде найден закон управления, а также получено условие, образующее на фазовой плоскости системы определенную область конечных состояний, перемещение в каждую точку которой из начального состояния покоя с помощью найденного управления происходит за конечное время без нарушения рассматриваемых ограничений.

Литература

1. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. // Манипуляционные роботы. 1994. 368 с.
2. Черноушко Ф.Л., Аняевский И.М., Решмин С.А. // Методы управления нелинейными механическими системами. 2006. 328 с.
3. Аветисян В. В. // Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость. Изв. НАН РА. Механика. 53:4 2000. 48-55.
4. Аветисян В. В. // Управление электромеханическим манипулятором при ограничениях на напряжение и ток. Изв. НАН РА. Механика. 55:1 2002. 68-74.
5. Аветисян А.С., Аветисян В. В. // О построении ограниченного управления электромеханической системой. Доклады НАН РА. 117:2 2017. 121-131.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Ананьевский И.М.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
anan@ipmnet.ru

Аннотация. Рассматривается система материальных точек, движущихся по горизонтальной прямой за счет сил взаимодействия друг с другом и сил трения, действующих между точками и прямой. Решается задача о скорейшем безреверсном перемещении всей системы из одного состояния покоя в другое.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием АААА-А20-120011690138-6 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 21-51-12004-ННИО).

Введение

Рассматривается система материальных точек, движущихся по шероховатой горизонтальной прямой. Точки взаимодействуют между собой с помощью сил, которые являются внутренними по отношению к рассматриваемой механической системе и выступают в качестве управляющих переменных. Силы сухого кулонова трения, действующие между точками и прямой, являются внешними силами, они зависят от скоростей точек и сил взаимодействия точек между собой. Таким образом, путем изменения внутренних сил можно управлять внешними силами и перемещать всю систему. В данном исследовании рассматриваются только безреверсные движения точек, т.е. движения, при которых все точки могут двигаться только в одном направлении. Преимущество безреверсного движения состоит в том, что оно минимизирует энергию, затрачиваемую на компенсацию работы сил трения, т.е. такое движение наименее энергозатратно. Не ограничивая общности, будем считать, что точки могут либо стоять, либо перемещаться в положительном направлении. При этом допускается изменение порядка расположения точек на прямой в процессе движения, т.е. точки могут «проходить» сквозь друг друга.

Изучаемая механическая система относится к классу так называемых систем с изменяемой конфигурацией [1], активный интерес к которым в последние годы проявляют разработчики мобильных роботов.

Постановка задачи

Пусть m_i – масса i -й точки; $i = 1, \dots, n$, x_i – ее координата на прямой, f_{ij} – сила, с которой j -я точка действует на i -ю, $f_{ij} = -f_{ji}$, $F_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n f_{ij}$ – сумма сил, действующих на i -ю точку со стороны всех остальных точек, k_i – коэффициент сухого трения между прямой и i -й точкой; g – ускорение силы тяжести, q_i – сила сухого кулонова трения, действующая на i -ю точку со стороны прямой:

$$q_i = \begin{cases} -k_i m_i g \operatorname{sign} \dot{x}_i, & \dot{x}_i \neq 0, \\ -F_i, & \dot{x}_i = 0, |F_i| \leq k_i m_i g, \\ -k_i m_i g \operatorname{sign} F_i, & \dot{x}_i = 0, |F_i| > k_i m_i g. \end{cases}$$

Уравнения движения системы примут вид

$$\ddot{x} = F_i + q_i.$$

Задача. С помощью сил взаимодействия f_{ij} перевести все точки системы из начального состояния покоя x_i^0 в состояние покоя $x_i^1 \geq x_i^0$ за минимальное время с соблюдением условия $\dot{x}_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, n$.

Разрешается мгновенное взаимодействие точечных масс, при котором происходит передача импульса одной точкой другой и их скорости меняются скачком.

Перенумеруем точки так, чтобы выполнялись неравенства

$$k_1 m_1 \leq k_2 m_2 \leq \dots \leq k_n m_n.$$

Тогда, как показано в [2], неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i m_i > k_n m_n \quad (1)$$

представляет собой достаточное условие существования управления, переводящего систему в заданное состояние. Будем считать, что это неравенство выполнено.

В [3] сформулированная выше задача оптимального управления решена для случая, когда массы всех точек и их коэффициенты трения одинаковы. В данной работе эти параметры задачи произвольны, они лишь должны удовлетворять условию (1).

Алгоритм оптимального управления

Не ограничивая общность, будем считать, что терминальное состояние всех точек находится в начале координат, т.е. $x_i^1 = 0, i = 1, \dots, n$.

Введем обозначения:

$$Q = g \sum_{j=1}^n k_j m_j, \quad Q_i = g \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n k_j m_j - k_i m_i \right), \quad M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Здесь Q – максимальная по модулю сила трения, которая может действовать со стороны прямой на рассматриваемую систему материальных точек, а Q_i – максимальная сила трения, которая может действовать со стороны прямой на всю систему в положительном направлении в том случае, если точка с номером i движется.

Сформулируем оптимальный по быстродействию алгоритм управления. Он состоит из двух этапов, а каждый этап – из нескольких шагов. В начальный момент центр масс всей системы находится в положении

$$x_c^0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i^0.$$

На первом шаге материальная точка с индексом 1 перемещается из начального положения x_1^0 в нулевое терминальное положение под действием силы Q_1 . При этом все прочие точки остаются неподвижны, разгоняют первую точку силами $f_{1j} = k_j m_j g, j = 2, \dots, n$, и испытывают действие на себя со стороны прямой таких же по величине и направлению сил трения. Кроме того, движущаяся точка испытывает действие силы трения, равной $-k_1 m_1 g$. Таким образом, первая точка движется с ускорением Q_1/m_1 , а центр масс всей системы – с ускорением Q_1/M , поскольку на всю систему со стороны прямой действует суммарная сила трения, равная Q_1 . Когда первая точка достигает нуля, ее скорость v^1 , координата x_c^1 центра масс всей системы и скорость центра масс v_c^1 принимают значения

$$v^1 = \sqrt{-\frac{2Q_1 x_1^0}{m_1}}, \quad x_c^1 = \frac{1}{M} \sum_{i=2}^n m_i x_i^0, \quad v_c^1 = \sqrt{-\frac{2Q_1 x_1^0}{M}}.$$

В нуле первая точка останавливается, происходит мгновенная передача импульса от нее точке 2 и начинается второй шаг. Вторая точка стартует с начальной скоростью $v^2 = m_1 v_1 / m_2$, остальные точки стоят и действуют на вторую точку силами $f_{2j} = k_j m_j g, j = 1, \dots, n, j \neq 2$, а точка 2 испытывает также действие силы трения, равной $-k_2 m_2 g$. Таким образом, вторая точка движется с ускорением Q_2/m_2 , а центр масс системы – с ускорением Q_2/M . Когда вторая точка достигает нуля, происходит мгновенная передача импульса от нее точке 3, начинается третий шаг и т.д.

На $(k+1)$ -ом шаге движется точка с индексом $k+1$, остальные точки неподвижны, причем первые k точек уже пришли в терминальное состояние, а последние $n-k-1$ еще находятся в начальном состоянии. Пусть $x_{k+1}^0 \leq \bar{x} \leq 0$. Когда координата точки с индексом $k+1$ окажется равной \bar{x} , координата и скорость центра масс системы будут удовлетворять соотношениям:

$$\bar{x}_c = \frac{1}{M} \left(m_{k+1} \bar{x} + \sum_{i=k+1}^n m_i x_i^0 \right), \quad \bar{v}_c^2 = -\frac{2}{M} \left(Q_{k+1} \bar{x} + \sum_{i=1}^k Q_i x_i^0 \right).$$

Утверждение. Существуют такие k и \bar{x} , что

$$-2Q\bar{x}_c = M\bar{v}_c^2. \tag{2}$$

В тот момент, когда реализуется данное равенство, начинается второй этап управления. На первом шаге второго этапа точка с индексом $k+1$ продолжает по инерции движение от \bar{x} до нуля, остальные точки

остаются неподвижны и каждая из них тормозит движущуюся точку силой $-k_i m_i g, i \neq k+1$. При этом каждая из точек испытывает действие силы трения, также равной $-k_i m_i g, i = 1, \dots, n$.

В нуле точка с индексом $k+1$ останавливается и происходит мгновенная передача импульса от нее точке $k+2$. На втором шаге точка $k+2$ движется к нулю, остальные точки стоят, каждая из них тормозит движущуюся точку силой $-k_i m_i g, i \neq k+2$, испытывая со стороны прямой действие силы трения, также равной $-k_i m_i g, i = 1, \dots, n$, и т.д. Таким образом, на втором этапе на всю систему со стороны прямой действует максимальная по модулю сила трения $-Q$.

Показано, что такое управление доставляет минимум времени безреверсного перемещения системы в начало координат.

Идея, заложенная в сформулированный алгоритм, состоит в том, что такое управление обеспечивает максимально возможный разгон центра масс системы на первом этапе движения и максимальное его торможение на втором. Условие (2), определяющее момент перехода от разгона к торможению, гарантирует, что когда остановится последняя точка, т.е. точка с индексом n , центр масс системы окажется в нуле. Поскольку, по построению, ни одна точка не переходит через нуль, то это означает, что все точки становились в начале координат.

Заключение

Решена задача оптимального управления перемещением произвольной конечной системы материальных точек вдоль шероховатой горизонтальной прямой. Предполагается, что между точками системы и прямой действует сухое кулоново трение. Управляющими переменными служат внутренние по отношению к системе силы взаимодействия между точками. Рассматриваются только безреверсные движения точек, т.е. движения, при которых все точки могут перемещаться лишь в одном направлении, при этом допускается изменение порядка расположения точек на прямой в процессе движения. Предложен закон изменения сил взаимодействия между точками, позволяющий за минимальное время перемещать систему из одного состояния покоя в другое.

Литература

1. Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник // Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022.
2. Н.Н. Болотник, Т.Ю. Фигурин // Безреверсное движение системы взаимодействующих тел вдоль шероховатой горизонтальной прямой, Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. N 4.
3. Т.Ю. Фигурин // Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением, Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. N 5. С. 3-9.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ПО ОШИБКЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ В УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ СИГНАЛОВ GNSS

Бригаднов И.А., Лутонин А.С., Богданова К.А.

Санкт-Петербургский горный университет
bogdanova_ka@pers.spmi.ru

Аннотация. Рассматривается задача позиционирования роботизированной мобильной платформы в условиях отсутствия сигналов GNSS. Предложена система комплексирования данных инерциального измерительного блока (IMU – Inertial Measurement Unit), магнитометра и энкодеров на основе расширенного фильтра Калмана по погрешности вектора состояния (ESEKF – Error-State Extended Kalman Filter). Построены траектории движения для ESEKF и расширенного фильтра Калмана (EKF – Extended Kalman Filter), рассчитаны абсолютные ошибки линейных отклонений от эталонных траекторий. Показано, что погрешность траектории предложенного алгоритма сопоставима с погрешностью траектории EKF.

Введение

Комплексирование данных нескольких датчиков является стандартным методом для локализации мобильных систем как на открытой местности, так и в помещениях. Этот подход повышает надежность системы наряду с точностью оцениваемых параметров. Сочетание систем спутниковой навигации с инерциальными измерительными устройствами [1] являются одним из наиболее распространенных решений для позиционирования на открытой местности, поскольку сигналы GNSS позволяют корректировать склонные к дрейфу показания IMU. В настоящей работе предложен алгоритм для локализации в средах, где отсутствует возможность использования GNSS, например, таких как подземные горные выработки. Отсутствие сигналов GNSS приводит к использованию альтернативных комбинаций датчиков для позиционирования. Расширенный фильтр Калмана является наиболее распространенным методом оценки положения для нелинейных систем, хотя его сходимость не гарантируется [2]. Формулировка расширенного фильтра Калмана по вектору состояния ошибки для оценки пространственного положения приведена в работе [3].

Основной текст

Основная идея расширенного фильтра Калмана по вектору состояния ошибки состоит в разделении вектора состояния системы на две части: номинальный вектор состояния \vec{x} и ошибка вектора состояния $\delta\vec{x}$:

$$\vec{x}_t = \vec{x} + \delta\vec{x}.$$

Номинальный вектор состояния представлен уравнениями модели движения, которые вычисляются на основании измерений IMU. Ошибки, связанные с накоплением шумов системы и несовершенством модели движения, составляют погрешность вектора состояния. Номинальный вектор состояния имеет следующие компоненты:

$$\vec{x} = [\vec{p} \quad \vec{v} \quad \vec{q}]^T,$$

где $\vec{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z]$ – представляет собой положение системы; $\vec{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]$ – вектор скорости; $\vec{q} = [q_w \quad q_x \quad q_y \quad q_z]$ – ориентация в форме кватернионов. Как правило, IMU содержит трехосевой акселерометр и трехосевой гироскоп, выходными данными которых являются линейные ускорения $\vec{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]$ и угловые скорости $\vec{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$, соответственно. В результате интегрирования показаний акселерометра и гироскопа получают скорости и ориентацию системы. Дискретная модель движения определяется согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} \vec{p}_k &= \vec{p}_{k-1} + \vec{v}_{k-1}\Delta t + (\vec{R}\{\vec{q}_{k-1}\}\vec{a}_k + \vec{g})\frac{\Delta t^2}{2}, \\ \vec{v}_k &= \vec{v}_{k-1} + (\vec{R}\{\vec{q}_{k-1}\}\vec{a}_k + \vec{g})\Delta t, \\ \vec{q}_k &= \vec{q}_{k-1} \otimes \vec{q}(\vec{\omega}_k\Delta t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $k, k-1$ – индексы текущей и предыдущей итерации; $\vec{g} = [0 \quad 0 \quad -9.81]$ – вектор ускорения свободного падения; $\vec{R}\{\vec{q}\}$ – преобразование кватернионов в матрицу вращения.

Уравнения кинематики, которыми определяется вектор состояния ошибки, являются линейными вследствие их малого, по сравнению с номинальным вектором состояния, значения на каждом из этапов итерации. Ошибка вектора состояния состоит из следующих элементов:

$$\delta \vec{x} = \begin{bmatrix} \delta \vec{p} & \delta \vec{v} & \delta \vec{\theta} \end{bmatrix}^T,$$

где $\delta \vec{p} = \begin{bmatrix} \delta p_x & \delta p_y & \delta p_z \end{bmatrix}$ – представляет ошибки положения системы; $\delta \vec{v} = \begin{bmatrix} \delta v_x & \delta v_y & \delta v_z \end{bmatrix}$ – вектор ошибок скорости; $\delta \vec{\theta} = \begin{bmatrix} \delta \theta_x & \delta \theta_y & \delta \theta_z \end{bmatrix}$ – угловые ошибки ориентации. Преобразование между углами Эйлера (ϕ, θ, ψ) и кватернионами осуществляется согласно [4].

Дискретные кинематические уравнения ошибок состояния:

$$\begin{aligned} \delta \vec{p} &= \delta \vec{p}_{k-1} + \delta \vec{v}_{k-1} \Delta t, \\ \delta \vec{v} &= \delta \vec{v}_{k-1} + (-\vec{R}\{\vec{q}_{k-1}\}[\vec{a}_{k-1}]_x \delta \vec{\theta}_{k-1}) \Delta t + \vec{v}_i, \\ \delta \vec{\theta} &= \vec{R}\{\vec{\omega}_{k-1} \Delta t\}^T \delta \vec{\theta}_{k-1} + \vec{\theta}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где \vec{v}_i и $\vec{\theta}_i$ случайные возмущения измеренных данных по скорости и ориентации.

ESEKF, как и классический фильтр Калмана, включает два рекурсивных шага. Первый предполагает прогноз номинального вектора состояния и матрицы ковариации, на втором шаге выполняется обновление вектора состояния.

На шаге экстраполяции вектор состояния рассчитывается в соответствии с дискретной версией уравнений (1):

$$\begin{aligned} \vec{p}_k^- &= \vec{p}_{k-1}^+ + \vec{v}_{k-1}^+ \Delta t + (\vec{R}\{\vec{q}_{k-1}^+\} \vec{a}_k + \vec{g}), \\ \vec{v}_k^- &= \vec{v}_{k-1}^+ + (\vec{R}\{\vec{q}_{k-1}^+\} \vec{a}_k + \vec{g}) \Delta t, \\ \vec{q}_k^- &= \vec{q}_{k-1}^+ \otimes \vec{q}(\vec{\omega}_k \Delta t) \end{aligned}$$

где \vec{x}^- – априорная и \vec{x}^+ – апостериорная оценка состояния для каждого вектора соответственно.

Также на данном этапе рассчитывается матрица ковариации вектора состояния \vec{P}^- . В отличие от стандартного фильтра Калмана, ESEKF при наличии данных с дополнительных сенсоров, выполняет шаг коррекции, иначе продолжает экстраполяцию на основе модели движения.

Ковариационная матрица для вектора состояния рассчитывается в соответствии с уравнением:

$$\vec{P}_k^- = \vec{F}_x \vec{P}_{k-1}^+ \vec{F}_x^T + \vec{F}_i \vec{Q}_i \vec{F}_i^T, \quad (3)$$

где \vec{F}_x – матрица динамической модели системы, которая определяется как матрица Якоби уравнений кинематики состояния ошибок (2); \vec{F}_i – матрица Якоби вектора возмущений, которая находится посредством дифференцирования уравнений (2) по вектору случайных возмущений $\vec{x}_i = \begin{bmatrix} v_i & \theta_i \end{bmatrix}^T$; \vec{Q}_i – матрица ковариации ошибок измерений; \vec{P}_{k-1}^+ – апостериорная матрица ковариации вектора состояния на предыдущем шаге.

На этапе коррекции рассчитывается вектор состояния ошибок через матрицу коэффициентов усиления вместе с обновлением матрицы ковариации. Вместо использования данных IMU в качестве измерений для вычисления отклонений наблюдаемых значений вектора состояния от предсказанных используются данные дополнительных датчиков. В настоящей работе обновление измерений выполняется посредством комбинации данных энкодеров и магнитометра. Вектор измерений определяется следующим образом:

$$\vec{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v_x & v_y & 0 & \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{bmatrix}^T$$

В зависимости от доступности измерений с дополнительных датчиков алгоритм выполняет шаг коррекции или продолжает обновление номинального вектора состояния только на основании данных IMU. В случае наличия измерений матрица коэффициентов усиления рассчитывается согласно уравнению:

$$\vec{K}_k = \vec{P}_k^- \vec{H}_k^T (\vec{H}_k \vec{P}_k^- \vec{H}_k^T + \vec{R})^{-1}$$

где \vec{P}_k^- – матрица ковариации вектора состояния, определяемая уравнением (3); \vec{R} – матрица ковариации шума измерений; \vec{H}_k – матрица измерений.

Обновленный вектор состояния ошибки представляет собой вектор-строку 1×9 , равный разнице между вектором измерений и априорным вектором оценки состояния, умноженной на коэффициент усиления \vec{K} :

$$\delta \vec{x}_k^+ = \vec{K}_k (\vec{y}_k - \vec{x}_k^-) = \begin{bmatrix} \delta \vec{p}_k^+ & \delta \vec{v}_k^+ & \delta \vec{\theta}_k^+ \end{bmatrix}^T,$$

где \vec{x}_k^- – априорный вектор оценки состояния.

Далее осуществляется корректировка текущего вектора состояния посредством соответствующего

суммирования значений элементов априорного вектора оценки состояния и вектора состояния ошибки:

$$\bar{p}_k^+ = \hat{p}_k^- + \delta \bar{p}_k^+, \quad \bar{v}_k^+ = \hat{v}_k^- + \delta \bar{v}_k^+, \quad \bar{q}_k^+ = \bar{q}_k^- \otimes \bar{q} \{ \delta \bar{\theta}_k^+ \}$$

Таким образом, алгоритм ESEKF осуществляет исключительно оценку ошибки данных, полученных с датчиков, таких как магнитометр, лидар, энкодеры и т.п. с последующим их суммированием с предсказанным вектором состояния.

Моделирование произведено в операционной системе Robot Operating System (ROS), в среде Gazebo. В качестве платформы был выбран четырехколесный робот с дифференциальным приводом «Jackal» с установленным на борту датчиком IMU и энкодерами. В результате моделирования были получены две траектории: эталонная и траектория, рассчитанная по результатам работы данного алгоритма (рис. 1). С помощью программного пакета «evo» [5] рассчитаны отклонения между соответствующими точками траекторий. Полученные результаты сравнивались с результатами локализации на основе расширенного фильтра Калмана (EKF) с использованием пакета ROS «robot_localization» [6]. Среднее значение ошибки составляет не более 58 см в обоих случаях, при этом максимальные значения достигают около 1 м. Траектория, построенная с помощью предложенного алгоритма, имеет сопоставимую точность с траекторией, полученной расширенного фильтра Калмана. Однако оба алгоритма нуждаются в уменьшении погрешностей определения координат.

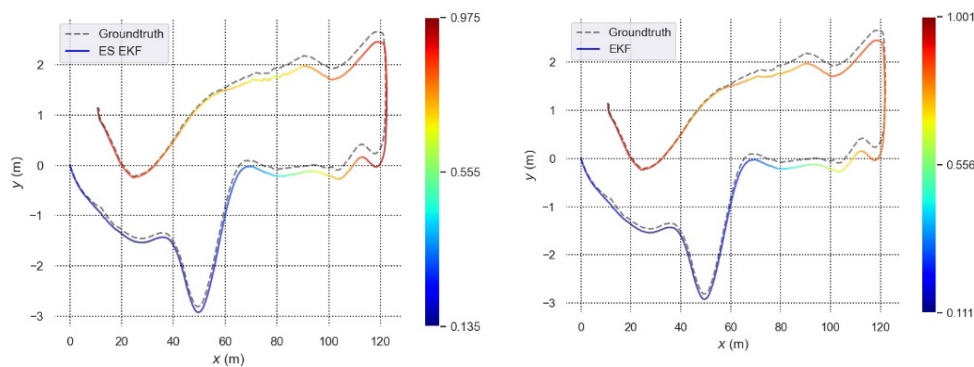


Рис. 1. Сравнение полученных траекторий ES EKF и EKF с эталонной траекторией.

Заключение

В работе предложен алгоритм расширенного фильтра Калмана по погрешности вектора состояния для определения координат в режиме реального времени в условиях отсутствия сигналов GNSS. Для корректировки вектора состояния, вычисленного с помощью уравнений IMU, были добавлены угол поворота вокруг оси z, измеренный магнитометром, и скорость движения, рассчитанная на основании данных энкодеров. Предложенная система протестирована с помощью моделирования в среде Gazebo. Применение данного алгоритма позволяет компенсировать дрейф IMU и тем самым уменьшить погрешность определения положения и ориентации системы. Алгоритм достигает результатов соизмеримых с результатами классического расширенного фильтра Калмана. При этом является более устойчивым к отказам вспомогательных датчиков. Будущие работы будут направлены на уменьшение погрешности определения координат при использовании ESEKF путем интеграции измерений лидара в систему.

Литература

1. Chi C., Zhan X., Wang S., & Zhai Y. // Enabling robust and accurate navigation for UAVs using real-time GNSS precise point positioning and IMU integration. The Aeronautical Journal. Cambridge University Press, 2021. Vol. 125, № 1283. 87–108.
2. Solà J. // Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter. CoRR. 2017. Vol. abs/1711.02508.
3. Roumeliotis S.I., Sukhatme G.S., Bekey G.A. // Circumventing dynamic modeling: evaluation of the error-state Kalman filter applied to mobile robot localization. Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C). 1999. Vol. 2. 1656–1663.
4. Diebel J. // Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. Matrix. 2006. Vol. 58, № 15–16. 1–35.
5. Grupp M. evo: Python package for the evaluation of odometry and SLAM. 2017.
6. Moore T., Stouch D. A // Generalized Extended Kalman Filter Implementation for the Robot Operating System. Proceedings of the 13th International Conference on Intelligent Autonomous Systems (IAS-13). Springer, 2014.

О ТРАЕКТОРИЯХ НА ГРАНИЦЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Бугров Д.И.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва
dmitry.bugrov@math.msu.ru

Аннотация. Рассмотрена задача нахождения траекторий, лежащих на границе предельной области достижимости линейной стационарной системы третьего порядка с одним управляющим воздействием, ограниченным по абсолютной величине. Предполагается, что характеристическое уравнение однородной системы имеет один отрицательный вещественный корень и два комплексно-сопряженных корня с отрицательной вещественной частью. Полученные результаты позволяют построить часть границы предельной области достижимости в виде аналитических выражений от параметров системы.

Введение

В работе [1] рассмотрена задача о построении области достижимости линейной стационарной системы третьего порядка с одним управляющим (возмущающим) воздействием, ограниченным по абсолютной величине. Матрица, задающая систему, имеет одно действительное и два комплексно-сопряженных собственных значения. Предполагается, что система является вполне управляемой, записана в жордановых координатах и безразмерном времени в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + b_1 u(t), \\ \dot{x}_2 = \varepsilon x_2 - x_3 + b_2 u(t), \\ \dot{x}_3 = x_2 + \varepsilon x_3 + b_3 u(t), \end{cases} \quad (1)$$

где управление $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция, о которой известно лишь, что она ограничена по модулю значением $\delta > 0$, $u(t) \in U = \{u(\cdot) \in PC, |u(t)| \leq \delta\}$. Условия полной управляемости системы (1) имеют вид $b_1 \neq 0$, $b_2^2 + b_3^2 \neq 0$ и считаются выполненными. Матрица системы (1) имеет одно действительное собственное число λ и два комплексно-сопряженных собственных числа $\varepsilon \pm i$.

Под множеством достижимости $Q(T)$ системы (1) в момент времени $T > 0$ будем понимать множество состояний системы (1), в которые она может перейти из начала координат под действием какого-либо допустимого управления $u(t) \in U$, т.е. $Q(T) = \{x(T) = (x_1(T), x_2(T), x_3(T))^T : u(t) \in U\}$.

Граничные точки множества достижимости $Q(T)$ могут быть получены путем решения экстремальных задач

$$c^T x(T) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in U}, \quad (2)$$

где $c = (c_1, c_2, c_3)^T$ представляет собой множество векторов единичной сферы,

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \int_0^T b_1 e^{\lambda(T-\tau)} u(\tau) d\tau, \\ x_2(T) &= \int_0^T e^{\varepsilon(T-\tau)} (b_2 \cos(T-\tau) - b_3 \sin(T-\tau)) u(\tau) d\tau, \\ x_3(T) &= \int_0^T e^{\varepsilon(T-\tau)} (b_2 \sin(T-\tau) + b_3 \cos(T-\tau)) u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение каждой такой задачи (2) для фиксированного c имеет вид [1]

$$u(\tau) = \delta \operatorname{sign} [c_1 b_1 e^{\lambda(T-\tau)} + e^{\varepsilon(T-\tau)} (\cos(T-\tau) (c_2 b_2 + c_3 b_3) + \sin(T-\tau) (c_3 b_2 - c_2 b_3))], \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (4)$$

Подставляя управление (4) в соотношения (3), можно получить соответствующую выбранному вектору c точку границы области достижимости $Q(T)$, эта точка принадлежит опорной для множества $Q(T)$ гиперплоскости, перпендикулярной направлению c . Для получения точной границы области достижимости $Q(T)$ нужно перебрать все вектора c единичной сферы, то есть решить бесконечное число экстремальных задач (2). Ограничиваясь конечным набором из k направлений c_i , $i = 1, \dots, k$, можно получить лишь аппроксимацию границы области достижимости $Q(T)$.

Исследованию областей достижимости, изучению их свойств, способов аппроксимации границ областей достижимости и методов численного построения посвящен целый ряд работ [2–5]. Построение множества достижимости динамической системы позволяет оценить возможность перевода системы в заранее заданное состояние, учесть влияние на точность этого перевода действующих на систему возмущений, решать задачи гарантированного оценивания и теории дифференциальных игр.

Траектории на границе предельной области достижимости

В случае $\lambda < 0$, $\varepsilon < 0$ существует предельная область достижимости $Q(\infty)$, соответствующая бесконечному времени T . Известно, что для линейных стационарных систем второго порядка с гурвицевой матрицей и аналогичному рассматриваемой задаче множеству допустимых управлений границы их предельных областей достижимости являются траекториями этих систем [2, 6]. Целью работы является нахождение траекторий системы (1), целиком лежащих на границе предельной области достижимости $Q(\infty)$. Это позволяет строить предельную область достижимости (или часть границы такой области) не путем решения множества экстремальных задач (2), а на основе конечных соотношений.

Прежде всего, выделим случаи, когда управление (4) представляет собой периодическую функцию. Такому управлению будет соответствовать вынужденное периодическое решение системы (1), лежащее на границе предельной области достижимости $Q(\infty)$.

Определим, как выглядит решение экстремальной задачи (2) для направлений $c = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Предположим, что $b_1 > 0$. В этом случае, поскольку функция $e^{\varepsilon t} > 0 \forall t$, управление (4) примет вид

$$u(\tau) = \delta \text{sign}[(\cos(T - \tau)(b_2 \sin \alpha + b_3 \cos \alpha) + \sin(T - \tau)(b_2 \cos \alpha - b_3 \sin \alpha))], \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (5)$$

Используя одно из условий полной управляемости системы (1) $b_2^2 + b_3^2 \neq 0$ и вводя обозначение $\sin \beta = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}$, $\cos \beta = \frac{b_3}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}$, можно представить (5) в виде

$$u(\tau) = \delta \text{sign}[\cos(T - \tau + \alpha - \beta)], \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (6)$$

То есть для любого T (6) представляет собой периодическую функцию с периодом 2π . Соответственно, решение экстремальной задачи (2) при $T \rightarrow \infty$ для направлений $c = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ описывается несобственными интегралами вида (3), где

$$u(\tau) = \delta \text{sign}[\sin(\tau + \varphi)], \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (7)$$

фаза φ зависит от α и β .

Управлению (7) соответствует вынужденное периодическое решение уравнений (1), множество точек, лежащих на этой траектории, может быть представлено параметрически (на основе результатов [7])

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{b_1 \delta (1 - 2e^{\lambda t})}{\lambda(1 + e^{\lambda \pi})} \\ x_2(t) &= (-\varepsilon b_2 - b_3)y_1(t) + b_2 y_2(t) \\ x_3(t) &= (b_2 - \varepsilon b_3)y_1(t) + b_3 y_2(t) \\ y_1(t) &= \frac{\delta(1 - 2e^{\varepsilon t})}{(1 + \varepsilon^2)(1 - e^{\varepsilon \pi})} (-\varepsilon \sin t + \cos t) \\ y_2(t) &= \frac{2\delta e^{\varepsilon t}}{(1 - e^{\varepsilon \pi})} \sin t \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq \pi$ и симметричное ему множество относительно начала координат. Такая траектория принадлежит границе предельной области достижимости $Q(\infty)$. На рис. 1 представлена предельная область достижимости $Q(\infty)$ системы (1) для значений параметров $\lambda = -0,2$, $\varepsilon = -0,1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $\delta = 1$. Черным цветом выделена траектория, лежащая на границе области $Q(\infty)$ и соответствующая вынужденному периодическому решению.

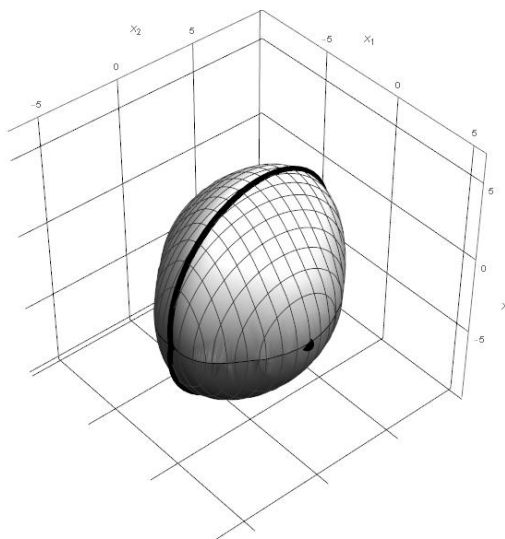


Рис. 1. Предельная область достижимости $Q(\infty)$. Черным цветом выделена периодическая траектория и угловая точка границы.

Управление является периодической функцией также в случае $\lambda = \varepsilon$. В этом случае каждому

постоянному значению c_1 при выполнении условия

$$-1 < \frac{c_1 b_1}{\sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{b_2^2 + b_3^2}} < 1$$

соответствует периодическое решение уравнений (1), соответствующая траектория лежит на границе предельной области достижимости $Q(\infty)$. Приводятся соотношения, задающие множество точек такой траектории в виде функций от параметров системы.

На рис. 2 представлена предельная область достижимости $Q(\infty)$ системы (1) для значений параметров $\lambda = \varepsilon = -0,2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $\delta = 1$. Черным цветом выделены траектории, лежащие на границе области $Q(\infty)$ и соответствующие вынужденным периодическим решениям.

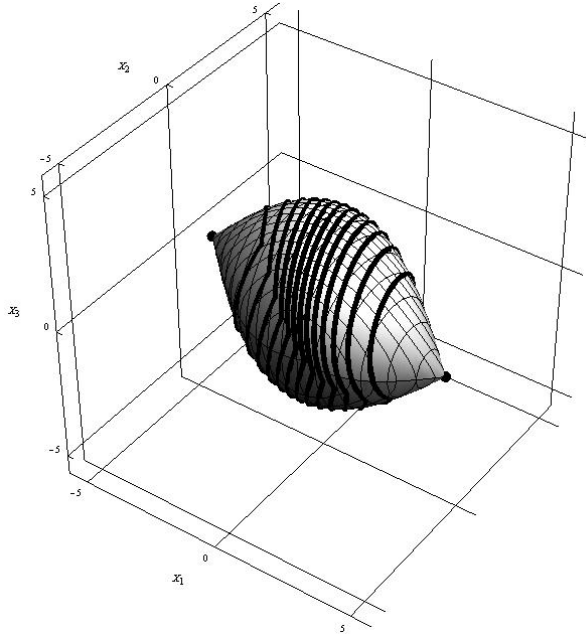


Рис. 2. Предельная область достижимости $Q(\infty)$. Черным цветом выделены периодические траектории.

Заключение

Найдены лежащие на границе предельной области достижимости $Q(\infty)$ периодические траектории системы (1). Для случая $\lambda = \varepsilon$ это позволяет строить часть предельной области достижимости в виде аналитических выражений от параметров системы.

Литература

1. Д. И. Бугров, А. М. Формальский // Зависимость от времени областей достижимости систем третьего порядка, Прикладная математика и механика, 81:2 2017. 154–164
2. А. М. Формальский // Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. 1974. 368 с.
3. F. L. Chernousko, A. I. Ovseevich // Ellipsoidal bounds of reachable sets: overview and new results, J. Optimiz. Theory Appl. 38:2 2004. 223–246
4. В. А. Ушаков // Построение и аппроксимация областей достижимости: обзор существующих решений и выбор программного обеспечения, Региональная информатика и информационная безопасность. 2018. 253–257
5. V. Patsko, A. Fedotov // Three-Dimensional Reachable Set for the Dubins Car: Foundation of Analytical Description, Commun. Optim. Theory, 23 2022. 1–42
6. В. И. Зубов // Колебания в нелинейных и управляемых системах. 1962. 631 с.
7. В. В. Александров, Д. И. Бугров, В. Н. Жермоленко, И. С. Ковеленко // Множество достижимости и робастная устойчивость возмущаемых колебательных систем, Вестник Моск. Ун-та, Серия 1, Математика, Механика, 1 2021. 67–71.

ЗАДАЧА О ПОДСКОКЕ ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА

Гарбуз М.А., Досаев М.З.

НИИ механики МГУ
misha-garbuz@yandex.ru

Введение

Известен класс устройств, способных перемещаться в пространстве за счёт периодического ускоренного движения внутренних масс и сил взаимодействия различной природы между корпусом и внешней средой. Такой способ движения называют виброперемещениями, а соответствующие устройства – вибрационными роботами. Актуальность разработки таких устройств обоснована изолированностью всех движущихся элементов от внешней среды, за счёт чего появляется возможность использования вибрационных роботов на других планетах и при других экстремальных климатических условиях.

Основной текст

Вибрационный робот состоит из корпуса массы m_1 , дебаланса – материальной точки массы m_2 и маховика, представляющего собой однородный диск массы m_3 (схема робота представлена на рис. 1). Дно корпуса — плоская платформа с двумя точками опоры. Дебаланс движется по окружности вокруг точки S , являющейся центром масс корпуса ($SC = l$). Маховик вращается вокруг своей оси динамической симметрии, проходящей через его центр A . Пусть Oxy – неподвижная система координат, ось Oy которой направлена вертикально вверх.

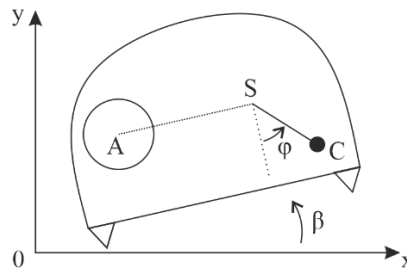


Рис. 1. Схема механической системы.

На систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести на каждый элемент – m_1g , m_2g , m_3g (g – ускорение силы тяжести), а также, в случае контакта с опорой, силы реакций. Внутренние силы F_{12} , F_{13} и моменты M_{12} , M_{13} действуют со стороны корпуса на дебаланс и маховик. Соответственно, со стороны дебаланса и маховика на корпус действуют силы F_{21} , F_{31} и моменты M_{21} , M_{31} . Положение системы описывается следующими обобщенными координатами: x, y – координаты точки S , β – угол тангажа корпуса, ϕ – угол поворота дебаланса относительно корпуса, отсчитываемый от положения, максимально приближенного ко дну, θ_A – угол поворота маховика. За счёт надлежащего управления маховиком можно обеспечить горизонтальную стабилизацию корпуса во время фазы полёта. Предположим, что такое управление организовано, и тогда $\beta(t) \equiv 0$. Задача настоящей работы состоит в описании управления дебалансом, которое обеспечило бы подскок корпуса на некоторую высоту и его смещение в положительном направлении по оси Ox .

По аналогии с работой [1] запишем уравнения движения системы в следующем виде:

$$\begin{cases} M(\dot{x} - \dot{x}_0) + m_2l(\dot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}_0 \cos \phi_0) = 0, \\ M(\dot{y} - \dot{y}_0) + m_2l(\dot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi}_0 \sin \phi_0) = -Mgt, \\ -\frac{d}{dt}(\dot{x}l \cos \phi + \dot{y}l \sin \phi + J_A \dot{\theta}_A) = 0. \end{cases}$$

В этих обозначениях \dot{x}_0 , \dot{y}_0 – начальная скорость центра масс корпуса, $\dot{\phi}_0$ – начальная угловая скорость дебаланса и ϕ_0 – начальное положение дебаланса, M – суммарная масса всех элементов системы и J_A – момент инерции маховика вокруг оси Az .

Будем строить движение робота, состоящее из следующих этапов:

1. Разгон. Корпус покоится за счёт силы трения, а дебаланс набирает количество движения.
2. Подъём. Дебаланс замедляется и передаёт количество движения корпусу. Корпус устремляется за

- дебалансом с постоянным вертикальным ускорением $a = a_1 > 0$.
3. Замедление. Корпус продолжает набирать высоту с постоянным ускорением $a = a_2 < 0$; Этап заканчивается по достижении остановки вертикального движения корпуса.
 4. Полёт. На этом этапе корпус не имеет вертикальной скорости, движение происходит на постоянной высоте h .
 5. Спуск. Корпус опускается к поверхности с ускорением $a = -a_1$.
 6. Приземление. Корпус замедляется с ускорением $a = -a_2$; в момент касания с опорной поверхностью вертикальная скорость корпуса нулевая.

Обозначим через $i: 1 \leq i \leq 6$ — номер этапа движения. Уравнения движения робота на указанных этапах имеют вид:

$$\begin{cases} M(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + m_2 l(\dot{\varphi}_i \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_{i-1} \cos \varphi_{i-1}) = 0, \\ M(g + a)t + m_2 l(\dot{\varphi}_i \sin \varphi_i - \dot{\varphi}_{i-1} \sin \varphi_{i-1}) = 0. \end{cases}$$

Обобщённые скорости $\dot{x}_i(t)$, $\dot{\varphi}_i(t)$ и координата $\varphi_i(t)$ являются функциями времени, а константы \dot{x}_{i-1} , $\dot{\varphi}_{i-1}$, φ_{i-1} вычислены в конце соответствующего этапа.

Зададим параметры системы следующим образом: $M=10$ кг, $m_2=5$ кг, $m_3=1$ кг, $l=1$ м. Этапы подскока вибрационного робота проиллюстрированы на рисунке 2. Пунктиром указана кривая движения корпуса на постоянной высоте. Предположим, что в ходе разгона дебаланс приобрёл значения $\dot{\varphi}_0 = 28,5$ рад/с, $\varphi_0 = \pi/10$ рад, лежащие выше пунктирной кривой. На втором этапе угловая скорость дебаланса уменьшается, корпус отрывается от земли и движется вверх с постоянным ускорением $a_1 = 5$ м/с². Корпус достигает максимальной скорости в конце второго этапа и затем начинает замедляться с ускорением $a_2 = -8$ м/с² (этап замедления указан красным цветом на рис. 2). Затем корпус достигает максимальную высоту $h = 1,5$ см и перемещается только в горизонтальном направлении (режим полёта представлен зелёным цветом; соответствующая часть траектории совпадает с пунктирной кривой). Далее управление дебалансом переключается в режим спуска, в результате чего корпус опускается с ускорением $-a_1$. И на последнем этапе движения осуществляется приземление (на рис. 2 суть красный участок в области $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$). По окончании описанных этапов движения происходит полная остановка корпуса: вертикальная и горизонтальная составляющие скорости отсутствуют.

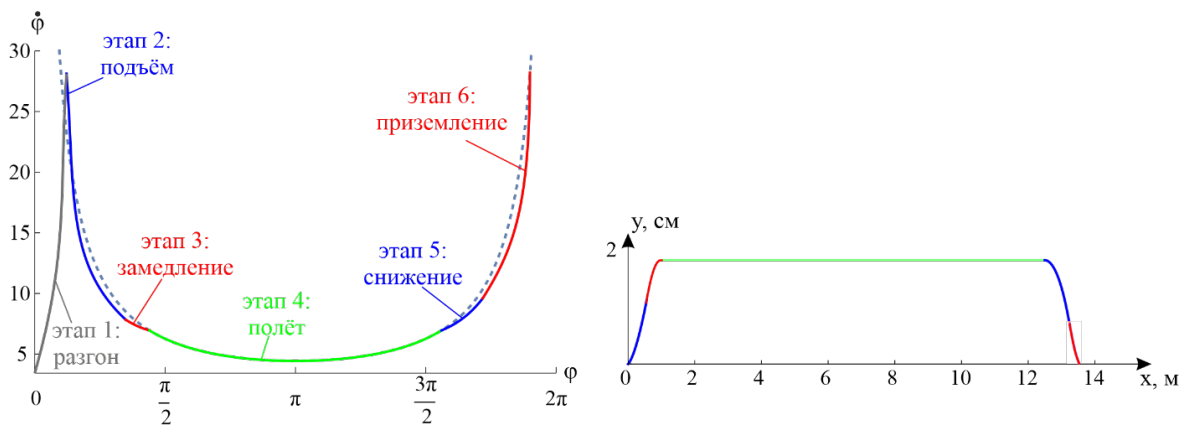


Рис. 2. Фазы движения робота.

Литература

1. М. А. Гарбуз, М.З. Досаев, В.А. Самсонов // Организация поворота корпуса вибрационного робота вокруг вертикали, Изв. РАН: ТИСУ. №1 2023. 164-176.

ЧЕТЫРЁХЗВЕННЫЙ РОБОТ-ГИМНАСТ НА РУКОХОДЕ

Голубев Ю.Ф.^{1,2}, Мелкумова Е.В.²

1 - Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

2 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва

elena_v_m@mail.ru

Аннотация. Тренажёр рукоход часто встречается на детских площадках и в спортивных комплексах. В работе рассматривается задача о перемещении четырёхзвённого робота-гимнаста между перекладинами рукохода. Проблема имеет отношение также к преодолению антропоморфным роботом препятствий. Описываются такие виды движения робота-гимнаста, как раскачивание на перекладине до угла, достаточного для зацепления на следующей перекладине, когда расстояние между перекладинами может быть больше размаха рук, дальнейшее зацепление и успокоение гимнаста, а также частный случай свободного полёта. Вывод уравнений движения следует из теоремы об изменении кинетического момента системы.

Введение

Исследуется задача о перемещении робота-гимнаста между перекладинами снаряда рукоход. Вывод уравнений движения в отличие от [1] следует из теоремы об изменении кинетического момента системы. Тело гимнаста моделируется четырёхзвённым маятником с двойным верхним звеном. При отсутствии контакта с перекладиной руки робота считаются совпадающими. Управление раскачиванием осуществляется за счёт задания межзвённых углов.

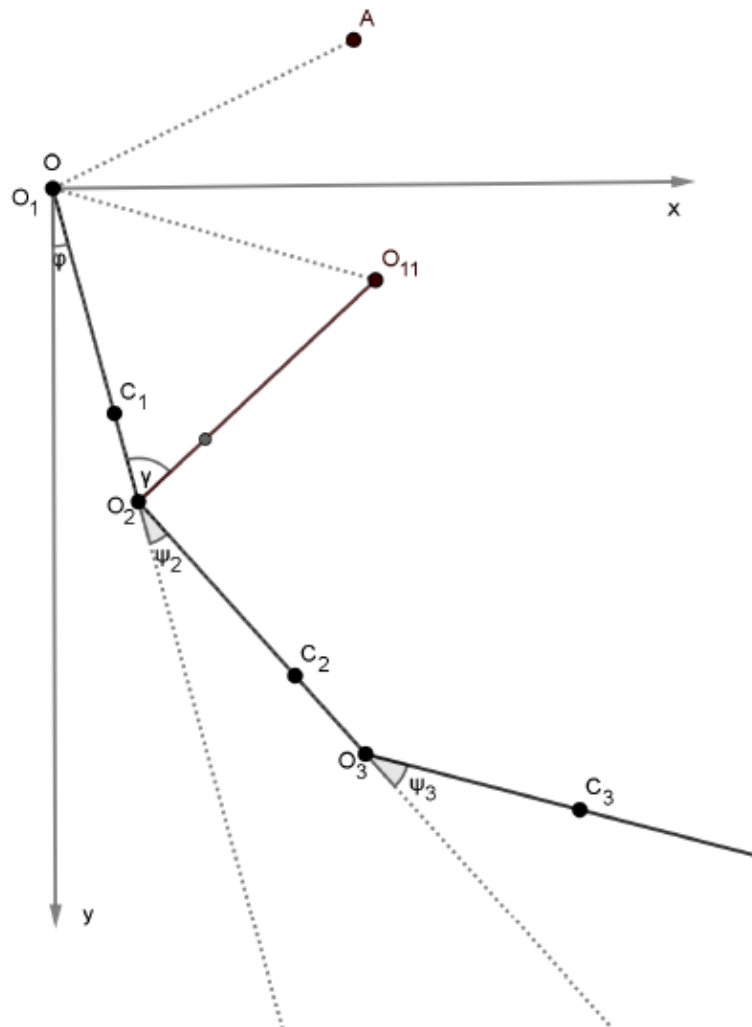


Рис. 1. Робот-гимнаст.

Исследуется оптимальное раскачивание робота-гимнаста до угла, обеспечивающего зацепление за следующую перекладину, в случае, когда она находится на расстоянии не более размаха рук робота. После прикрепления к новой перекладине осуществляется успокоение колебаний. Исследованы варианты с подвижной и неподвижной свободной рукой. Построен алгоритм оптимального управления раскачиванием с максимизацией амплитуды на каждом полупериоде колебаний.

Выполнено численное моделирование процесса раскачивания, подтверждающее эффективность построенного алгоритма управления. Исследован частный случай движения робота в свободном полёте с обеспечением максимально высокого расположения рук. Численное моделирование показывает возможность при некоторых параметрах робота-гимнаста перелёта на расстояния, в несколько раз превышающие длину рук робота 2.

Постановка задачи

Робот-гимнаст (рис. 1) моделируется четырёхзвенным маятником («руки» – «корпус» – «ноги»). Первый стержень («рука») изначально прикреплен к неподвижной точке O . К этому стержню шарнирно прикреплен второй стержень l_1 («корпус») и третий стержень (вторая «рука»), совпадающий по всем параметрам с первым стержнем. Ко второму стержню шарнирно прикреплен четвертый стержень («ноги»). Заданы массы соответствующих стержней, и моменты инерции стержней относительно их центров масс. Положение системы определено углом отклонения первого стержня от нижнего направления вертикали, углом между вторым стержнем и продолжением первого, углом между четвертым стержнем и продолжением второго и углом между руками [3].

Обозначим m_i – массы соответствующих стержней. Рассмотрены два случая. Первый, когда изначально свободная рука робота отклонена на фиксированный угол, чтобы верхний конец этого стержня был удален на заданное расстояние от точки подвеса. И второй, когда этот угол – ограниченная по модулю управляемая величина [4].

На рис. 2 изображены траектории верхней точки руки робота с параметрами $l_1 = 1$, $m_1 = 1$, $\psi_i \leq \pi/2$. Линия при $\dot{\varphi}_0 = 7$ соответствует максимальной скорости раскачивания маятника при выбранных параметрах с помощью полученного алгоритма. Очевидно, что эксперименты с большими скоростями отрыва демонстрируют большую высоту и дальность на коротких промежутках времени [5].

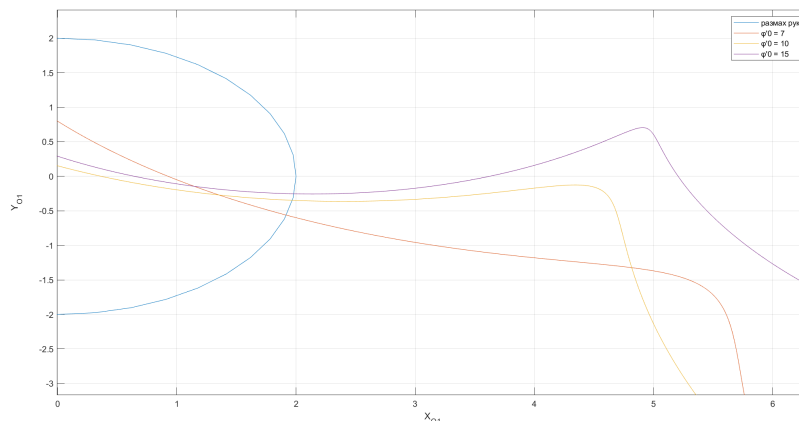


Рис. 2. Положение верхней точки руки в зависимости от скорости отрыва.

На рис. 3 изображены траектории верхней точки руки робота из четырёх одинаковых стержней, но с разными параметрами и достигаемыми при этих параметрах максимальными скоростями [6].

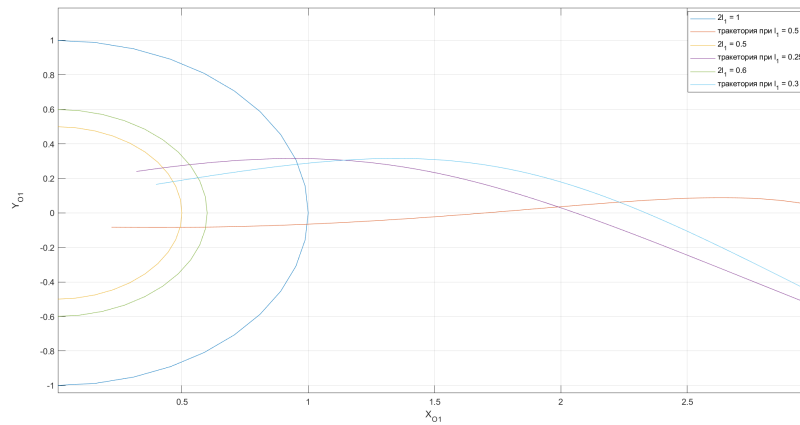


Рис. 3. Положение верхней точки руки в зависимости от длины звеньев.

Заключение

В данной работе построен алгоритм перемещения робота-гимнаста между перекладинами, находящимися на расстоянии не более размаха рук робота в двух случаях: с подвижной и неподвижной свободной рукой. Раскачивание и успокоение при этом происходят оптимально с точки зрения максимизации амплитуды на каждом полупериоде колебаний. Проведено численное моделирование процесса раскачивания, подтверждающее аналитические результаты. Проанализирован частный случай движения робота в свободном полёте, реализующий на коротком промежутке времени максимально высокое поддержание рук. Численное моделирование при некоторых параметрах робота демонстрирует возможности перелёта робота на расстояния, в несколько раз превышающие длину руки робота. Однако предложенный алгоритм не является универсальным, поэтому требует дальнейшего изучения и анализа.

Пользуясь полученным законом управления, получаем увеличение амплитуды колебаний на каждом полупериоде. Таким образом, в определённый момент времени происходит достижение требуемого угла отклонения первого стержня. Считаем, что при достижении этого угла остальные два фиксируются [7]. В этот момент происходит отщепление системы от точки подвеса и закрепление её в верхней точке «отклоненной руки». При этом система представляет собой твёрдое тело и испытывает удар. Определяется угловая скорость после удара. Проведено численное моделирование процесса раскачивания, подтверждающее аналитические результаты. Рассмотрены конфигурации робота-гимнаста с одинаковыми стержнями и с антропоморфными параметрами [8].

Литература

1. В. Д. Куликова // Задача о перемещении робота-гимнаста между перекладинами (по материалам дипломной работы под руководством Ю. Ф. Голубева и Е. В. Мелкумовой) Международная Конференция (Семинар (workshop)): Учебно-научный семинар "Механические задачи с особенностями" 30 апреля 2021 - 30 апреля 2022.
2. Yu. F. Golubev // Controlling the Amplitude of Oscillations of Mechanical Systems, Journal of Computer and Systems Sciences International, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), v. 61, № 4, pp. 496-504, 2022, DOI: 10.1134/S1064230722040086
3. Ю. Ф. Голубев // Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд., переработанное и дополненное. – М.: Издательство Московского университета, 2019. 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7
4. Ю. Ф. Голубев // Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 28. 19 с.
5. Ю. К. Гавердовский // Упражнения на перекладине. – М: ФиС, 1975. – 133 с.
6. М. Л. Журавин, О. В. Загрядская, Н. В. Казакевич [и др.]. // Гимнастика: учебник. – М.: Академия, 2002. – 449 с.
7. В. И. Загревский, О. И. Загревский // Биомеханика. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2007. – 274 с.
8. Э. К. Лавровский // Задача управления движением "гимнаста" в свободном полёте и при переходе в режим контакта с опорой. Российский журнал биомеханики, издательство Перм. нац. исслед. политехн. ун-т (Пермь), 2020, том 24, № 1, с. 64-75

ВЫХОД РОБОТА ИЗ АВАРИЙНОЙ СИТУАЦИИ НА СПИНЕ

Голубев Ю.Ф.^{1,2}, Корянов В.В.¹, Мелкумова Е.В.²

1 - ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, Москва

2 - МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

elena_v_m@mail.ru

Аннотация. Предложен метод раскачивания шестиногого шагающего робота с целью обеспечить его переворот из положения «вверх ногами». В качестве опоры рассмотрена наклонная плоскость с небольшим уклоном в сторону переворота. В области контакта возможно наличие ямки. Показано, что переворот возможен при помощи циклического движения ног, если корпус имеет верхнюю оболочку в виде усечённого цилиндра. Выполнено аналитическое исследование, а также компьютерное моделирование полной динамики робота, контактирующего с опорой, средствами программного комплекса «Универсальный механизм». Приведены изменения, которые необходимо вносить в раскачивание при наличии ямки и бугорка.

Введение

Данная работа развивает результаты, представленные в [1], в части построения алгоритмов управления поведением робота в экстремальных ситуациях с использованием методов компьютерного моделирования. Ситуации, когда требуется переворот из положения «вверх ногами» нередко встречаются в мире животных и особенно среди насекомых и рептилий, у которых имеется широкий твёрдый корпус. Например, жуки или черепахи, все они в процессе эволюции научились преодолевать подобные затруднения. Методы, которые они используют, включают в себя приемы подтягивания и отжимания от опорной поверхности [2–4].

В [5] аналогичные методы используются для переворота робота с корпусом в виде полусферы. В [6] пара ног шестиного робота используется в качестве упора, облегчающего переворот. В [7] для переворота используется вспомогательный стержень. В [8] возможности переворота обеспечивает модульная конфигурация корпуса робота, при которой отдельные части могут вращаться друг относительно друга.

Возможен вариант, когда за счет специальной конструкции ног робот может двигаться как в стандартном, так и в перевернутом положении корпуса [9]. В данной работе предлагается другой метод переворота робота из аварийного в рабочее положение с использованием динамических эффектов, которые возникают, когда робот, оказавшись в перевернутом положении, начинает без опоры ногами о грунт раскачивать корпус за счет специально сформированного движения ног, обеспечивающего увеличение амплитуды качаний. В результате амплитуда достигает такого значения, что робот обязательно переворачивается. Очевидно, что в рассматриваемом случае простой периодический закон движения ног не приведет к успеху, так как период качаний корпуса будет зависеть от амплитуды.

Раскачивание робота

Для облегчения переворота корпус имеет форму выпуклой вверх части цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси цилиндра. В модельной задаче рассматривается раскачивание однородного сегмента круга без проскальзывания на опорной прямой (рис. 1). К правому концу B хорды сегмента плоским шарниром прикреплена нога, стержень массы m_1 , который может вращаться относительно сегмента на угол ψ . На другом конце хорды в точке E расположена точечная масса m_2 , уравнивающая ногу. Аналитически раскачивание в этом случае описывается при помощи теоремы об изменении кинетического момента системы относительно подвижной точки A касания дуги окружности сегмента с опорной прямой [10–12]. Из анализа модельной задачи следует, что управляющий угол отклонения активных ног следует задавать в виде кусочно-постоянной функции. Переключение должно происходить между двумя значениями, соответствующими предельным положениям ног при махах в сторону пассивных ног и обратно, в моменты времени, когда угловая скорость корпуса обращается в ноль.

С помощью компьютерного моделирования выполняется уточнение управления с учетом наличия трения в контакте, а также наклонов опорной поверхности. При задании управляющего угла между постоянными значениями выполняются линейные переходы. Полная динамическая модель робота формируется автоматически средствами комплекса «Универсальный механизм» [13]. Механическая система имеет 24 степени свободы.

При наличии небольшого наклона опорной плоскости в сторону переворота необходимо сокращать мах активных ног в сторону от пассивных ног. При наличии ямки и бугорка необходимо увеличивать массу ног. Структура движения сохраняется, если при этом суммарная масса ног меньше, чем масса корпуса. На рис. 2 приведены фрагменты типичного раскачивания при комбинации помех. Поворот опорной поверхности задается сначала вокруг горизонтальной оси, направленной вправо, на 15° , затем, в повернутой системе координат, вокруг оси, сонаправленной с продольной осью робота, на 10° .

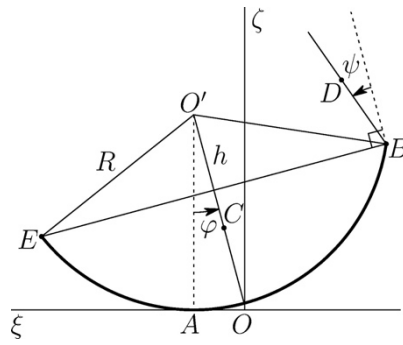


Рис. 1. Перевернутое положение робота.

Соотношение размеров корпуса и звеньев ног имеет вид: $a : b : R : r : l_1 : l_2 = 1 : 0.79 : 0.4 : 1.5 : 0.5 : 0.33$, где a, b – размеры прямоугольного плоского сечения двух прямых круговых цилиндров, образующих корпус робота; R, r – радиусы оснований цилиндров; l_1, l_2 – длины звеньев ног. Масса корпуса робота 25.42 кг.

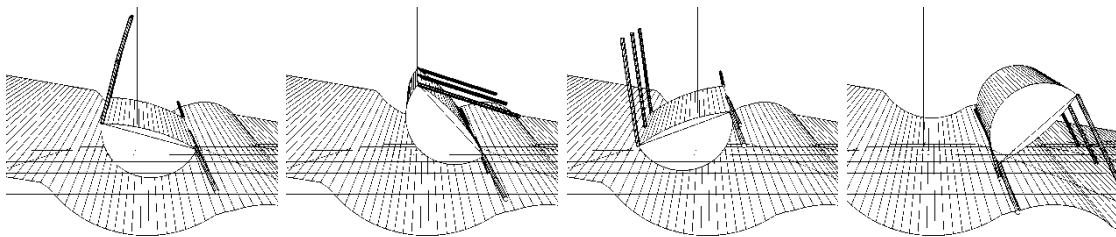


Рис. 2. Фрагменты движения: начальная позиция, типичный мах в сторону пассивных ног, обратный мах, позиция после завершения переворота.

Параметры ямки и бугорка на рис. 2: $\zeta_{0pit} = 0.45$ м (вертикальная координата центра ямки в связанной с ней системой координат, то есть, без учета поворота опоры), $R_{pit} = 0.7$ м (радиус основания цилиндра, образующего ямку); $\zeta_{0bump} = 0.45$ м, $R_{bump} = 0.55$ м, $\xi_{0bump} = 0.9$ м (горизонтальная координата центра бугорка в

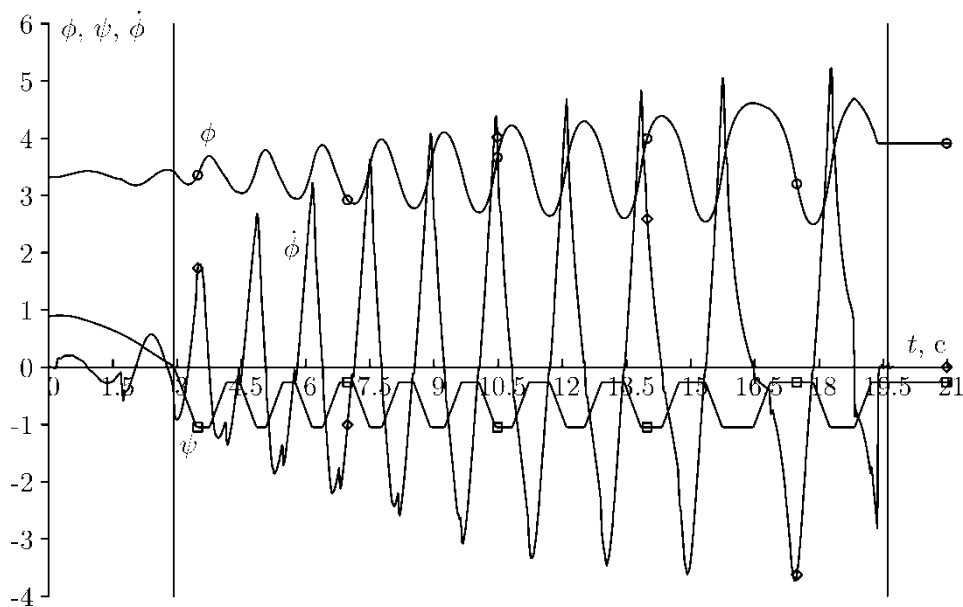


Рис. 3. Зависимость основных параметров движения от времени для варианта раскачивания.

упомянутой выше связанной с ямкой системе координат, то есть, без учета поворотов опоры); масса одной ноги $m_{leg} = 2.4$ кг (масса всех ног равна $6m_{leg}$). В этом варианте раскачивания m_{leg} может быть уменьшена до 1.6 кг. При этом структура движения сохраняется, но увеличивается количество необходимых махов ног, и общее время маневра. Для определенности приведены конкретные значения величин, но, вообще говоря, размеры могут быть заданы относительно размеров корпуса, масса ноги относительно его массы.

Раскачивание на рис. 2 соответствует наиболее глубокой ямке для выбранных параметров системы. Возможен также вариант пологой ямки, у которой вместе с радиусом основания цилиндра увеличена и вертикальная координата ее центра. В [14] показан вариант $\zeta_{0pit} = 0.8$ м, $R_{pit} = 0.9$ м, $\xi_{0bump} = 0.8$ м. В численных экспериментах в этом случае переворот робота продолжал срабатывать при уменьшении массы ноги до $m_{leg} = 1.32$ кг.

На рис. 3 представлены графики изменения по времени углов $\phi = \pi + \varphi$, ψ (рад) и угловой скорости $\dot{\phi}$ (рад/с) для варианта раскачивания, фрагменты которого приведены на рис. 2. Приведены данные, соответствующие перестроению позы перед раскачиванием, самому раскачиванию (его начало и конец отмечены вертикальными линиями), и первому этапу перестроения в рабочее положение, из которого робот может продолжить движение по поверхности. Перестроение после переворота происходит с помощью последовательного переноса троек ног, в каждой тройке переносится одна нога с одной стороны корпуса, и две с другой. После этого происходит выравнивание корпуса.

Заключение

Представлено решение задачи о спасении автономного шагающего робота, аварийно лежащего на наклонной опорной поверхности на спине в положении «вверх ногами». Наклон опоры небольшой (примерно 15°), в сторону переворота. Опора может быть последовательно повернута вокруг двух разных осей. В области контакта может быть ямка, рядом с ней может быть бугорок. Для спасения робота предложена специальная форма корпуса в виде сложенных по плоскому сечению двух усеченных прямых круговых цилиндров. Разработан и аналитически обоснован [10] метод амплитудного раскачивания системы в окрестности положения аварийного равновесия, позволяющий использовать кинематические и динамические возможности робота для самостоятельного спасения.

Для выбранных параметров робота установлены приблизительные границы размеров неровностей (бугорка и ямки) и наклона опоры, при которых метод раскачивания продолжает работать.

Предложенные алгоритмы формирования движения робота при спасении из аварийной ситуации были отработаны средствами компьютерного моделирования в программной среде, реализующей расчет трехмерной полной динамической модели механической системы – робота, взаимодействующего с опорой.

Литература

1. Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов // Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 212 с.
2. Как переворачивается жук (бронзовка) // URL: <https://www.youtube.com/watch?v=nbExQQ5uqqk>.
3. L. Frantsevich // Righting kinematics in beetles (Insecta: Coleoptera). *Arthropod Struct. Dev.*, 2004. Vol. 33, Issue 3, pp. 221–235.
4. G. Domokos., P.L. Várkonyi // Geometry and self-righting of turtles. *Proc. R. Soc. B*, 2008. Vol. 275, Issue 1630, pp. 11–17.
5. S. Peng, X. Ding, F. Yang, K. Xu // Motion planning and implementation for the self-recovery of an overturned multi-legged robot. *Robotica*, 2017. Vol. 35, Issue 5, pp. 1107–1120.
6. U. Saranlı, A. A. Rizzi, D. E. Koditschek // Model-based dynamic self-righting maneuvers for a hexapedal robot. *Int. J. Robot. Res.*, 2004. Vol. 23, Issue 9, pp. 903–918.
7. C. C. Kessens, D. C. Smith, P. R. Osteen // A Framework for Autonomous Self-Righting of a Generic Robot on Sloped Planar Surfaces. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2012)*, Saint Paul, MN (May 14-18, 2012), pp. 4724–4729.
8. Z. Guanghua., D. Zhicheng, W. Wei // Realization of a Modular Reconfigurable Robot for Rough Terrain. *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Luoyang, China, pp.289–294, June 2006.
9. Robot Kingdom // URL: https://www.youtube.com/watch?v=W9DOG47_xJk.
10. Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов, Е. В. Мелкумова // Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами». *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2019. № 6. С. 163–176.
11. Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов, Е. В. Мелкумова // Поведение шестиногого робота в аварийной ситуации. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2020. № 3. С. 1–10.
12. Ю. Ф. Голубев // Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд., переработанное и дополненное. М.: Издательство Московского университета, 2019. 728 с.
13. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем // URL: <http://www.umlab.ru> (дата обращения: 10.02.2020).
14. Yu. F. Golubev, V. V. Koryanov, E. V. Melkumova // Rescue of the Walking Robot from an Emergency Position on the Back in the Presence of Uneven Support, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, Vol. 23, pp. 481–485.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ СВЕРЛЕНИЯ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ЗАГОТОВКИ

Горбенко И.Д.¹, Шагниев О.Б.^{1,2}

1 - Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург

2 - Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург
gorbenko_id@spbstu.ru

Аннотация. Рассмотрена задача адаптации контура управления для контактных операций в механообработке к неопределенности свойств заготовки. Проведено математическое моделирование колебательных процессов при сверлении, получены характерные режимы потери устойчивости при изменении механических свойств заготовки. Проанализирована возможность и обоснована целесообразность использования искусственных нейронных сетей для определения оптимальных с точки зрения качества и производительности параметров резания, соответствующих заранее неопределённым свойствам заготовки. Разработан алгоритм коррекции параметров сверления для подавления нежелательных колебательных процессов. При помощи численного моделирования продемонстрирована работоспособность интеллектуальной системы управления процессом сверления на базе искусственной нейронной сети.

Введение

Развитие и внедрение автоматизированных производственных комплексов в настоящее время является одной из приоритетных задач реального сектора экономики. Последним трендом в индустрии являются роботизированные системы, практически исключают человека из производственного цикла, что позволяет значительно повысить такие социально-экономические показатели, как, например, производительность труда. Однако для надлежащей работы от таких комплексов требуется умение справляться с нестандартными ситуациями, так, например, в механообработке, в частности при сверлении, нередки случаи поломок инструмента или порчи заготовок из-за некорректно выбранных параметров резания. Одной из распространённых проблем при выборе параметров резания является неопределенность механических свойств заготовки [1], вызванная стремительно возрастающим многообразием новых материалов. Некорректный выбор параметров резания повышает вероятность возникновения нежелательных динамических эффектов вплоть до потери устойчивости системы. В докладе предлагается адаптивный алгоритм детектирования и подавления автоколебаний при изменении свойств обрабатываемого материала в процессе сверления на базе искусственных нейронных сетей (ИНС). Использование искусственных нейронных сетей обусловлено сложностью нелинейных законов взаимодействия в зоне контакта инструмента с обрабатываемой поверхностью при сверлении, затрудняющих применение стандартных методов диагностики [2, 3].

Основной текст

В качестве объекта исследования рассматривается система инструмент-носитель, упругие связи в которой обусловлены наличием силомоментного датчика между носителем и инструментом. Датчик моделируется тремя линейными пружинами и одной торсионной. Со стороны обрабатываемой поверхности на инструмент действуют силы резания, во многом определяющие нелинейность динамики системы, а управление движением осуществляется с помощью приводов носителя, формирующих необходимые управляющие воздействия.

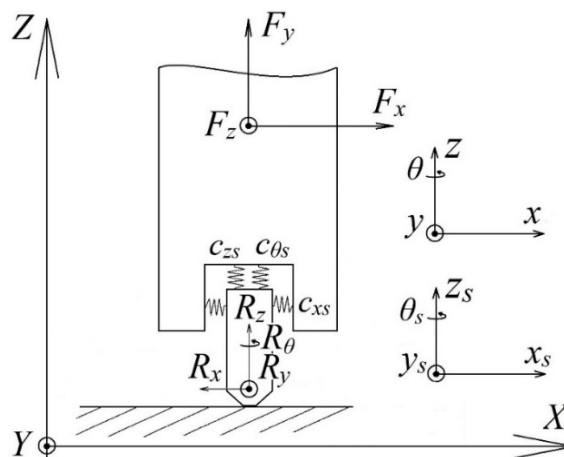


Рис. 1. Расчетная схема системы в режиме контакта.

В расчетной схеме, представленной на рис. 1, введены следующие обозначения: x_s, y_s, z_s, θ_s – координаты инструмента, x, y, z, θ – координаты носителя, где θ_s и θ – повороты вокруг осей z_s и z соответственно; F_x, F_y, F_z – усилия от привода; R_x, R_y, R_z, R_θ – силы реакции со стороны поверхности; $c_{x_s}, c_{y_s}, c_{z_s}, c_{\theta_s}$ – жесткость упругого соединения. Динамика такой системы описывается уравнениями (1), где $c_{x_s} = c_{y_s} = c_{z_s} = c$, и $\omega, \omega_s, \omega_\theta, \omega_{\theta_s}$ – соответствующие собственные частоты.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2(x - x_s) &= F_x, \\
 \ddot{x}_s + 2\xi\omega_s\dot{x}_s + \omega_s^2(x_s - x) &= \frac{\omega^2}{c}R_x, \\
 \ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2(y - y_s) &= F_y, \\
 \ddot{y}_s + 2\xi\omega_s\dot{y}_s + \omega_s^2(y_s - y) &= \frac{\omega^2}{c}R_y, \\
 \ddot{z} + 2\xi\omega\dot{z} + \omega^2(z - z_s) &= \frac{\omega^2}{c}F_z, \\
 \ddot{z}_s + 2\xi\omega_s\dot{z}_s + \omega_s^2(z_s - z) &= \frac{\omega^2}{c}R_z, \\
 \ddot{\theta} + 2\xi\omega_\theta\dot{\theta} + \omega_\theta^2(\theta - \theta_s) &= 0, \\
 \ddot{\theta}_s + 2\xi\omega_{\theta_s}\dot{\theta}_s + \omega_{\theta_s}^2(\theta_s - \theta) &= \frac{\omega_{\theta_s}^2}{c_\theta}R_\theta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

На основе представленной модели было проведено численное моделирование процессов сверления заготовок из материалов с различными механическими свойствами и продемонстрирована потеря устойчивости процесса сверления (рис. 2) при некорректном выборе параметров резания [4–6].

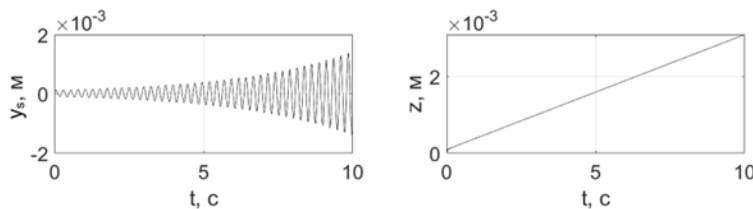


Рис. 2. Потеря устойчивости по координате y_s при сверлении (равномерное движение носителя по z).

Обучение нейронной сети проводилось в соответствии с выбранным критерием оптимальности параметров сверления для набора свойств материалов заготовки. В качестве критерия используется экспертная оценка (ЭО) качества процессов сверления. По результатам серии вычислительных экспериментов, в ходе которых варьировались скорости вращения шпинделя и изменялись свойства материалов заготовки, сформирован массив данных для обучения ИНС. Входом для обучения является вектор, включающий заданную скорость вращения шпинделя и набор параметров, характеризующих колебательные процессы в системе по собственным координатам инструмента и вычисляемых в реальном времени посредством статистической обработки [2, 7] сигналов датчика силы. В качестве характеризующих вибрационное состояние системы показателей были выбраны следующие величины: mean (математическое ожидание), var (дисперсия), rms (корень квадратный из среднеквадратичного значения), peak2rms (отношение максимального значения к rms) и peak2peak (отношение максимума к минимуму). Выходом искусственной нейронной сети является рекомендуемая для текущего вибрационного состояния системы скорость вращения шпинделя, корректность которой определяется бинарной экспертной оценкой, полученной по результатам срабатывания детектора нежелательных колебательных процессов в ходе набора данных для обучения. Данные для обучения нейронной сети по критерию качества процессов сверления могут быть схематично представлены в табл. 1.

Таблица 1. Данные обучения ИНС

Вход						Выход	
n , об/мин	mean	var	rms	peak2rms	peak2peak	n^* , об/мин	ЭО
...							

В работе продемонстрирована возможность вычисления оптимальной скорости вращения шпинделя, соответствующей текущей динамике инструмента, обусловленной заданной скоростью вращения шпинделя и неизвестными свойствами материала заготовки. Фактически при помощи ИНС осуществляется идентификация неизвестных свойств материала заготовки и подбор оптимальной скорости вращения шпинделя. На базе ИНС разработана интеллектуальная система детектирования и подавления нежелательных колебательных процессов при сверлении. Структурная схема интеллектуальной системы управления представлена на рис. 3.

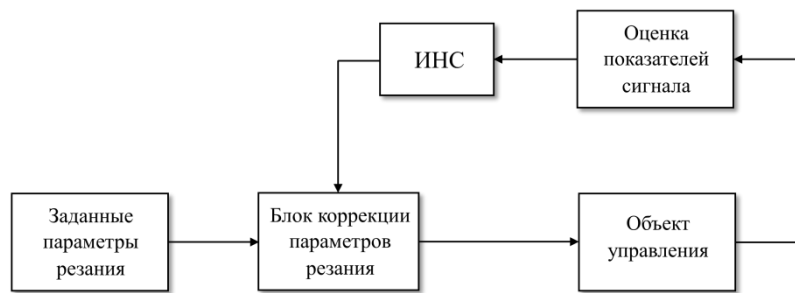


Рис. 3. Структурная схема интеллектуальной системы управления.

Работоспособность интеллектуальной системы управления на базе искусственной нейронной сети в условиях неопределенности подтверждена результатами многовариантного численного моделирования.

Заключение

Внедрение интеллектуальных систем управления в роботизированные комплексы механообработки позволяет не только повышать производительность труда, но также расширяет возможности предприятий по выбору конструкционных материалов, что становится всё более актуальным в том числе в связи с распространением композитных материалов и развитием аддитивных технологий.

Литература

1. Altintas Y., Eynian M., Onozuka H. Identification of dynamic cutting force coefficients and chatter stability with process damping // *Annals of the CIRP*. – 2008. – Vol. 57. – Iss. 1. – P. 371-374.
2. Lamraoui M., Barakat M., Thomas M., El Badaoui M. Chatter detection in milling machines by neural network classification and feature selection // *Journal of Vibration and Control*. 2015. Vol. 21(7). P. 1251–1266
3. Шагниев О.Б., Булов С.А. Алгоритм адаптации к износу инструмента при механообработке на базе искусственных нейронных сетей // *Экстремальная робототехника*. 2021. № 5. С. 251–257.
4. Шагниев О.Б., Шаньшин И.К., Бурдаков С.Ф. Управление регенеративными автоколебаниями в процессе фрезерования // *Мехатроника. Автоматизация. Управление*. 2019. № 5. С. 291-298.
5. Altintas Y. *Metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design*. 2nd-ed. – Cambridge University press, 2012. – 382 p.
6. Tobias S.A. *Machine tool vibration*. – New York: Wiley, 1961. – 352 p.
7. Shagniev, O.B., Tomchina, O.P., Fradkov, A.L. Learning Speed-Gradient Synchronization Control of the Two-Rotor Vibration Setup // *IFAC-PapersOnLine*, 2022, 55(12), pp. 144–148

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА БЕСПИЛОТНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С УЧЕТОМ ЭМОЦИЙ И ТЕМПЕРАМЕНТА ПАССАЖИРОВ

Городецкий А.Е., Тарасова И.Л., Кучмин А.Ю.

Институт проблем машиноведения РАН
radiotelescope@yandex.ru

Аннотация. Успехи в разработке интеллектуальных роботов (ИР) расширяют сферу их деятельности, связанную выполнением технологических операций в коллективе с человеком. Одной из проблем, с решением которой во многом связано развитие данного направления, являются проблемы психологического взаимодействия робота и человека. В докладе рассматривается моделирование влияния эмоций человека на принятие решения ИР при взаимодействии с человеком. При этом моделируется один из возможных подходов к учету эмоции «удовольствия» и «самосохранения» при принятии решения мобильным ИР о выборе оптимального маршрута движения с учетом эмоций пассажира.

Введение

Существует актуальность разработок новых методов формирования специфических свойств ИР, позволяющих учитывать психику человека, с которым робот взаимодействует, и адаптироваться к особенностям его поведения [1, 2]. При этом одним из важнейших является учет темперамента человека. Для этого необходимо, прежде всего провести анализ свойств темперамента человека и существующих методик его выявления.

Существует несколько типологий, по которым определяется тип темперамента: сангвиник, холерик, флегматик либо меланхолик. Проанализировав существующие типы классификаций темперамента человека можно рекомендовать к использованию в интеллектуальных роботах следующие три типа:

- конституционные, основанные на анализе изображений человека;
- диалоговые, основанные на анализе ответов человека на пункты опросников;
- поведенческие, основанные на анализе особенностей поведения человека в различных ситуациях.

Для адаптации поведения ИР, взаимодействующей с человеком с учетом текущей ситуации при принятии решения необходима оценка степеней принадлежности человека, с которым он взаимодействует, к тому или иному типу темперамента. При этом адаптация будет состоять в поэтапном повышении эмоциональной насыщенности поведения ИР, начиная с нулевой, анализа ответной реакции человека на действия робота и коррекции поведения. При этом целесообразно учесть рекомендации психологов по взаимодействию с человеком различного темперамента [3].

Наделение ИР способностью оценки темперамента человека, с которым он взаимодействует, и адаптации к нему при принятии решений возможно при формировании его центральной нервной системы [4]. Для этого необходимо в центральной нервной системе ИР блок фазификации, распознавания и принятия решения дополнить такими новыми элементами как экспертные системы, позволяющие путем диалога с человеком оценить степени принадлежности последнего к различным типам темперамента и корректоры поведения, в которых на основании логико-вероятностного и логико-лингвистического анализа условий принятия решений при коллективном взаимодействии проводить коррекцию алгоритмов принятия решений.

Задача выбора оптимального маршрута БТС с учетом эмоций и темперамента пассажиров

В качестве примера учета влияния темперамента рассматривается компьютерная модель проезд автомобиля по заданной трассе водителями различного темперамента с роботом ассистентом (штурманом) за минимальное время без аварии и не превышения максимально допустимой скорости движения. При этом трасса содержит несколько участков, каждый из которых содержит прямые участки и повороты. Причем каждый участок имел одинаковые коэффициенты сцепления с дорогой.

При моделировании учитывалось, что:

- автомобиль не может разогнаться до скорости больше допустимой по условиям дорожного движения;
- максимальное ускорение при разгоне определяется техническими параметрами автомобиля и вычислялась из условия времени разгона до заданной скорости;
- при учете темперамента оценка ускорения при разгоне изменялась с учетом времени реакции водителя холерика либо времени реакции водителя сангвиника, либо времени реакции водителя меланхолика, либо времени реакции водителя флегматика, а также времени выдачи команды роботом-штурманом для водителя холерика, сангвиника, меланхолика или флегматика;
- скорость при повороте для предотвращения аварии не может быть больше критической;
- максимальное ускорение при торможении определялась техническими параметрами автомобиля и дорожными условиями и вычислялась из условия времени торможения от начальной скорости до нуля при торможении и из тормозного пути, зависящего от дорожных условий;

– при учете темперамента оценка ускорения при торможении изменялась с учетом времени реакции водителя холерика, либо времени реакции водителя сангвиника, либо времени реакции водителя меланхолика, либо времени реакции водителя флегматика, а также времени выдачи команды роботом-штурманом для водителя холерика, сангвиника, меланхолика или флегматика.

Заключение

Результаты компьютерного моделирования, показали, что время прохождения трассы зависит от темперамента водителя, а не учет ИР штурманом темперамента водителя при выдаче рекомендаций по разгону и торможению автомобиля без учета темперамента приводит либо к более медленному прохождению трассы, либо, что намного хуже, к авариям на поворотах. Таким образом учет темперамента на принятие решения роботом при взаимодействии с человеком позволяет улучшать качество взаимодействия и избегать коллизий.

Литература

1. <https://euromednews.ru/2013/03/roboty-na-sluzhbe-u-bolnykh-i-pozhilykh-lyudej/>
2. Madrigal, Alexis C.. Meet the Cute, Wellies-Wearing, Wikipedia-Reading Robot That's Going to Hitchhike Across Canada (англ.), The Atlantic (12 June 2014).
3. В. Д. Менделевич // Клиническая и медицинская психология. Учебное пособие 6, «МЕДпресс-информ» 2008, 432 с.
4. Городецкий А.Е., Курбанов В.Г. Интеллектуальные электромеханические системы: центральная нервная система. [Smart Electromechanical Systems: The Central Nervous System.] Шпрингер Интернационал Пабблишинг АГ, 2017. — 266 с. (на английском языке)

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МЭМС-РЕЗОНАТОРА В КОНТУРАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ УСИЛЕНИЯ

Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
igumnovavs@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе проводится исследование двух реализаций систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), работающих совместно с системой автоматической регулировки усиления (АРУ) для управления первичными колебаниями высокочастотных микромеханических резонаторов на примере гироскопа RR-типа. Рассмотрена ось первичных колебаний в контурах управления, к математической модели которой применён метод осреднения для получения эволюции движения в медленных переменных. Представлены выходные характеристики систем управления, а также динамика чувствительного элемента по первичной оси. Проведено сравнение двух систем ФАПЧ по таким характеристикам как быстродействие и область затягивания в рабочий режим.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21-71-10009.

Введение

Принцип работы микромеханического вибрационного гироскопа состоит в передаче механической энергии между двумя формами колебаний чувствительного элемента (ЧЭ), вызванной действием сил инерции Кориолиса. В простейшем случае ЧЭ состоит из одной подвижной массы – твердого тела на упругих подвесах – с двумя ортогональными рабочими формами колебаний. В режиме измерения угловой скорости электростатическим двигателем возбуждаются гармонические колебания по первичной оси. В линейном приближении амплитуда вызванных силой Кориолиса вторичных колебаний пропорциональна величине компоненты угловой скорости подвижного объекта вдоль оси чувствительности датчика. Высокие требования к стабильности работы резонансных датчиков (в частности – чувствительных элементов микроэлектромеханических вибрационных гироскопов) приводят к необходимости применения систем управления с обратной связью, обеспечивающих постоянство амплитуды колебаний резонатора и его частотную настройку на резонанс. Первая из названных задач, как правило, решается с помощью системы автоматической регулировки усиления [1, 2]. Для решения второй задачи широкое распространение получили системы фазовой автоподстройки частоты [3, 4]. Качественное исследование динамики механически линейного резонатора при совместном действии систем АРУ и ФАПЧ выполнено в [5–7].

Постановка задачи и результаты

В наиболее простом случае микромеханический вибрационный гироскоп (ММВГ) содержит одну подвижную массу (ПМ), динамика которой позволяет определить действующую на систему силу инерции Кориолиса и, следовательно, компоненту угловой скорости подвижного объекта вдоль оси чувствительности. Схема микромеханического гироскопа (ММГ) и системы управления ФАПЧ и АРУ представлены на рис. 1.

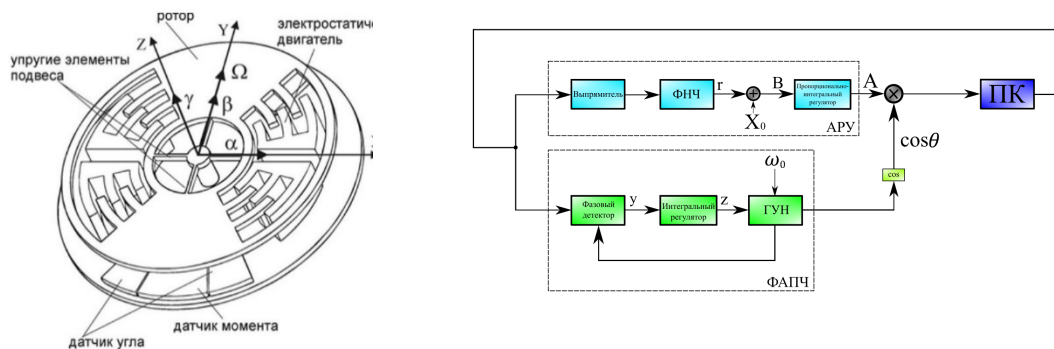


Рис. 1. Схема ММГ и систем ФАПЧ и АРУ.

Схема ФАПЧ содержит фазовый детектор, который внутри себя имеет фильтр нижних частот (ФНЧ), регулятор и опорный генератор, управляемый напряжением (ГУН). Схема представляет собой замкнутую систему управления, задача которой состоит в обеспечении требуемой разности фаз между выходным сигналом преобразователя емкость-напряжение датчика перемещений резонатора и опорным сигналом ГУН. Амплитудный канал, реализующий схему АРУ, состоит из амплитудного детектора, ФНЧ и ПИ-регулятора.

Параметры механической системы, полученные путем математического моделирования и натуральных испытаний для гироскопа разработки АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»», приведены в табл. 1 [8].

Таблица 1. Параметры механической системы.

Параметр	Величина	Единицы измерения
Момент инерции относительно оси OZ, J_γ	6,9573e-13	кг * м ²
Собственная частота вращения вокруг оси OZ, f_γ	8093,7772	Гц
Добротность вращения вокруг оси OZ, Q_γ	60000	б/р
Коэффициент демпфирования, b_γ	4,4226e-13	$\frac{\text{кг} * \text{м}^2}{\text{с}}$
Линейная компонента жёсткости, $k_{\gamma 1}$	0,0018	$\frac{\text{кг} * \text{м}^2}{\text{с}^2}$
Кубическая компонента жёсткости, $k_{\gamma 3}$	0,0044	$\frac{\text{кг} * \text{м}^2}{\text{с}^2}$

Рассмотрим ось первичных колебаний гироскопа с учётом т.н. геометрической нелинейности, вызванной конечностью поля деформаций элементов упругого подвеса при движении подвижной массы. Математическая модель оси ПК в системе ФАПЧ-АРУ для двух рассмотренных случаев описывается следующими системами уравнений:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\gamma} + c_d \dot{\gamma} + \omega_\gamma^2 \gamma + \beta \gamma^3 &= A \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= \omega_0 + K_{VCO} z \\
 \dot{z} &= K_I^{PLL} y \\
 \dot{y} &= \lambda^{PLL} (K_G \gamma \cos \theta - y) \\
 A &= K_p (X_0 - r) + B \\
 \dot{B} &= K_I^{AGC} (X_0 - r) \\
 \dot{r} &= \lambda^{AGC} \left(\frac{\pi}{2} |\gamma| - r \right)
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \ddot{\gamma} + c_d \dot{\gamma} + \omega_\gamma^2 \gamma + \beta \gamma^3 &= A \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= \omega_0 + K_{VCO} (z + K_p^{PLL} K_G (\gamma - r \sin \theta) \cos \theta) \\
 \dot{z} &= K_I^{PLL} K_G (\gamma - r \sin \theta) \cos \theta \\
 A &= K_p (X_0 - r) + B \\
 \dot{B} &= K_I^{AGC} (X_0 - r) \\
 \dot{r} &= \lambda^{AGC} \left(\frac{\pi}{2} |\gamma| - r \right),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Математическая модель с оригинальной ФАПЧ Математическая модель с модифицированной ФАПЧ

где γ – амплитуда первичных колебаний (ПК); J_γ – момент инерции вокруг оси Z; b_γ – коэффициенты демпфирования системы по оси ПК; $k_{\gamma 1}, k_{\gamma 3}$ – линейные и кубические компоненты жесткости упругого подвеса, $c_d = b_\gamma / J_\gamma$, $\omega_\gamma^2 = k_{\gamma 1} / J_\gamma$, $\beta = k_{\gamma 3} / k_{\gamma 1}$. Параметры механической системы, полученные путем математического моделирования и натурных испытаний для гироскопа разработки АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»: $Q = 60000$ – добротность вокруг оси Z; f_γ – собственная частота вращения вокруг оси Z. Параметры контуров ФАПЧ и АРУ: θ – фаза ГУН ($\omega = \dot{\theta}$ – мгновенная частота ГУН); z – сигнал управления ГУН; y – выходной сигнал фазового детектора; ω_0 – собственная (свободная) частота ГУН; K_{VCO} – пропорциональный коэффициент усиления ГУН; K_I^{PLL} – интегральный коэффициент усиления регулятора; K_G, λ^{PLL} – коэффициент передачи и частота полюса ФНЧ ФАПЧ; A – выходной сигнал схемы АРУ; B – сигнал управления АРУ; r – оценка текущей амплитуды колебаний, K_p, K_I^{AGC} – пропорциональный и интегральный коэффициенты регулятора схемы АРУ; λ^{AGC} – частота полюса ФНЧ АРУ; X_0 – требуемая (заданная) амплитуда стационарных колебаний.

Результаты моделирования системы при выбранных параметрах системы, которые указаны на графиках, представлены на рис. 2.

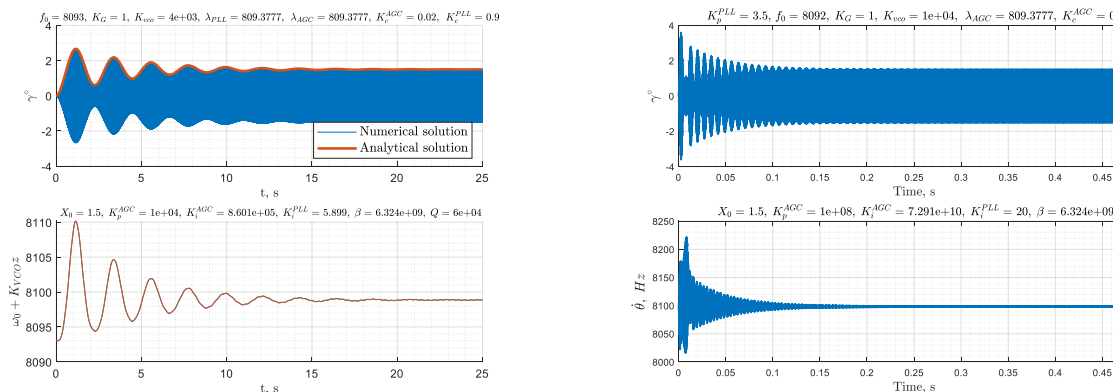


Рис. 2. Амплитуда первичных колебаний и частоты ГУН для: а) оригинальной; б) модифицированной ФАПЧ

Из рис. 2 видно, что обе системы выходят на заданную частоту ГУН и амплитуду колебаний, для оригинальной системы время выхода в рабочий режим составляет 25с, а область затягивания имеет диапазон [-7 Hz; +5 Hz], в то время как для модифицированной схемы ФАПЧ время выхода составляет 0.5с и диапазон затягивания [-2 Hz; +35 Hz].

В табл. 2 приведены рекомендации по выбору параметров контуров управления для обеих постановок, а также наблюдения за эволюцией динамики основных выходных характеристик системы.

Таблица 2. Параметры контуров управления

Оригинальная система ФАПЧ:	Модифицированная система ФАПЧ:
$Q_z = 60000$	$Q_z = 60000$
$K_C^{PLL} = 0,2 \div 0,9$	$K_i^{PLL} = 5 \div 20$ $K_p^{PLL} = 2 \div 10$
$K_G = 1 \div 1e6$	$K_G = 1 \div 1e2$
$K_{vco} = 4e3 \div 1e4$	$K_{vco} = 4e3 \div 1e4$
$\lambda_{PLL} = f_y/10, \lambda_{AGC} = \lambda_{PLL}$	$\lambda_{AGC} = f_y/10$
$K_C^{AGC} = 0,02$	$K_C^{AGC} = 0.9$
$K_p = 1e6$	$K_p^{AGC} = 1e8$
Область затягивания для линейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке [-17 Гц; +13 Гц].	Область затягивания для линейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке [-4 Гц; +8 Гц].
Область затягивания для нелинейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8093$ Гц находится в промежутке [-7 Гц; +5 Гц].	Область затягивания для нелинейной модели от отсчётного значения $f_0 = 8092$ Гц находится в промежутке [-2 Гц; +35 Гц].
Выход на рабочий режим 25с	Выход на рабочий режим 0,5с

В табл. 2 приведены диапазоны изменения параметров систем управления, а также из таблицы можно сделать несколько выводов: контур управления АРУ-оригинальная ФАПЧ имеет практически симметричную зону затягивания, существенное время выхода в рабочий режим (25с), в то время как контур управления АРУ-модифицированная ФАПЧ имеет несимметричную зону затягивания, малое время выхода в рабочий режим (0.5с).

Заключение

В работе рассмотрены различные реализации систем фазовой автоподстройки частоты, работающих совместно с системой автоматической регулировки усиления для управления первичными колебаниями высокочастотного гироскопа RR-типа. Представлены выходные характеристики систем управления, а также динамика чувствительного элемента по первичной оси движения. Проведено сравнение двух систем ФАПЧ по таким характеристикам как: быстродействие и область затягивания в рабочий режим. Установлено, что контур управления АРУ-оригинальная ФАПЧ имеет практически симметричную зону затягивания и существенное время выхода в рабочий режим (25с), в то время как контур управления АРУ-модифицированная ФАПЧ имеет несимметричную зону затягивания и малое время выхода в рабочий режим (0.5с).

Литература

- Zhu H. et al. Drive mode control for MEMS gyroscopes with electrostatically tunable structure //2013 International Conference on Manipulation, Manufacturing and Measurement on the Nanoscale. – IEEE, 2013. – С. 273-276.
- Nesterenko T. G. et al. Amplitude control system of drive-mode oscillations of MEMS gyroscopes //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2019. – Т. 516. – №. 1. – С. 012009.
- Wu H. et al. Stability analysis of MEMS gyroscope drive loop based on CPPLL //2011 Asia Pacific Conference on Postgraduate Research in Microelectronics & Electronics. – IEEE, 2011. – С. 45-48.
- Demir A., Hanay M. S. Phase-locked loop based resonant sensors: A rigorous theory and general analysis framework for deciphering fundamental sensitivity limitations due to noise //arXiv preprint arXiv:1903.06497. – 2019.
- Park S. et al. Oscillation control algorithms for resonant sensors with applications to vibratory gyroscopes //Sensors. – 2009. – Т. 9. – №. 8. – С. 5952-5967.
- Indeitsev D. A. et al. Nonlinear dynamics of MEMS resonator in PLL-AGC self-oscillation loop //Nonlinear Dynamics. – 2021. – Т. 104. – С. 3187-3204.
- Indeitsev D. A. et al. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope //Nonlinear Dynamics. – 2021. – Т. 105. – С. 1273-1296.
- Indeitsev D. A. et al. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope //Nonlinear Dynamics. – 2021. – Т. 105. – С. 1273-1296.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СГОРАНИЯ ТОПЛИВА В ЖИДКОСТНОМ РАКЕТНОМ ДВИГАТЕЛЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Ким А.В.

Институт математики и механики им Н.Н. Красовского УрО РАН
avkim@imm.uran.ru

Аннотация. В докладе на основе методологии аналитического конструирования регуляторов разработаны алгоритмы стабилизации математической модели с запаздыванием, описывающей процесс сгорания топлива в Жидкостном Ракетном Двигателе. Аналогично конечномерному (ОДУ) случаю, для систем с последствием методология АКОР основывается на нахождении решений специальной системы Обобщённых Уравнений Риккати.

Разработанный автором метод явных решений Обобщённых Уравнений Риккати, позволяет строить различные варианты синтеза управления для систем с запаздыванием. В докладе, на основе разработанной теории, строятся различные варианты синтеза управления для рассматриваемой модели процесса сгорания топлива в ЖРД и исследуются их стабилизирующие свойства.

Введение

Для решения задачи стабилизации технических систем А.М. Лётовым [1, 2] разработана методология Аналитического Конструирования Регуляторов, позволяющая эффективно строить синтез управления в линейных конечномерных системах управления. При этом параметры стабилизирующего линейного управления находятся на основе решения (стандартными процедурами и программами) классического Алгебраического Уравнения Риккати.

Построенная в [3] математическая модель процесса сгорания топлива в ЖРД представлена в форме системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и, вообще говоря, не может быть исследована методами конечномерной теории ОДУ. Методология АКОР в приложении к системам с последствием разработана Н.Н. Красовским [4, 5], и было установлено, что параметры соответствующего линейного управления удовлетворяют специальной системе дифференциальных уравнений. В работе [6] эта система уравнений была представлена в удобной форме Обобщённых Уравнений Риккати. Отсутствие методов решения ОУР несколько десятилетий не позволяло применять методологию АКОР для систем с запаздыванием. Метод нахождения явных решений ОУР был разработан в [6–9]. В рамках этого подхода возможно получение нескольких вариантов явных решений ОУР и в данной работе представлены результаты исследования стабилизирующих свойств управлений, соответствующих некоторым вариантам [7] явных решений ОУР.

Модель

Линеаризованный вариант модели системы питания и уравнений модели камеры сгорания имеет вид [1] (рассматривается нестационарный поток)

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= (\gamma - 1)\phi(t) - \gamma\phi(t - \delta) + \mu(t - \delta) \\ \dot{\mu}(t) &= \frac{1}{\xi J} \left[-\psi(t) + \frac{p_0 - p_1}{2\Delta p} \right] \\ \dot{\mu}(t) &= \frac{1}{(1-\xi)J} [-\mu(t) + \psi(t) - P\phi(t)] \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{1}{E} [\mu_1(t) - \mu(t)].\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь:

- $\phi(t)$ – частичное изменение давления в камере сгорания;
- t – единица времени, нормализованная временем пребывания газа θ_g , при стационарной работе;
- $\tilde{\tau}$ – значение запаздывания по времени при стационарной работе;
- \tilde{p} – давление в камере сгорания при стационарной работе;
- $\tau p^\gamma = const$ для некоторого числа γ ;
- $\delta = \frac{\tilde{\tau}}{\theta_g}$;
- $\mu(t)$ – частичное изменение впрыскивания и скорости горения;
- $\psi(t)$ – относительное изменение τ ;
- p_1 – мгновенное давление в том месте питающей линии, где сосредоточена электрическая ёмкость, представляющая эластичность;
- ξ – частичная длина при постоянном источнике энергии;
- J – внутренний параметр линии;
- P – параметр перепада давления;

- $\mu_1(t)$ – частичное изменение потока массы направленной от емкости;
- Δp – перепад давления инжектора при стационарной работе;
- p_0 – регулируемое давление газа при постоянном источнике энергии;
- E – параметр эластичности линии.

В качестве управления берется $u = \frac{p_0 - p_1}{2\Delta p}$.

Следуя [1], берём следующие параметры процесса: $\gamma = 0,8$, $\xi = 0,5$, $\delta = 1$, $j = 2$, $p = 1$, $E = 1$.
Вводя вектор $x(t) = (\phi(t), \mu_1(t), \mu(t), \psi(t))'$ система (1) может быть записана в матричной форме

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

Система (2) без управления неустойчива, так как имеет два корня с положительными действительными частями: $\lambda_{1,2} = 0,11255 \pm 1,52015i$.

Методология синтеза управления на основе теории АКОР

Для линейных конечномерных управляемых систем метод Аналитического Конструирования Регуляторов [2-3] является наиболее эффективным и популярным при анализе и синтезе управлений.

Для систем с последствием Теория АКОР была разработана Н.Н. Красовским [4] и, как было установлено [5], параметры соответствующего линейного управления с обратной связью удовлетворяют системе Обобщенных Уравнений Риккати, состоящей из:

- матричного алгебраического уравнения;
- матричного ОДУ;
- матричного уравнения с частными производными.

С тех пор проблема решения системы ОУР стала основным препятствием в применении теории АКОР к синтезу управлений для систем с последствием.

Метод нахождения явных решений ОУР был разработан в [4]. Метод основан на том, что в соответствии с классическим подходом задача АКОР для систем с последствием включает минимизацию специального квадратичного функционала, и на основе подходящего выбора параметров этого функционала качества удастся упростить ОУР и находить явные решения.

Методология нахождения явных решений ОУР, основана на том, что при подходящем выборе структуры решений ОУР система ОУР упрощается и позволяет строить явные решения по схеме:

Этап 1. Находится решение некоторого Алгебраического матричного уравнения,

Этап 2. Решение Матричного ОДУ находится в явном виде,

Этап 3. Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными имеет априори определяемую структуру.

На этапах 2 и 3 точные решения соответствующих дифференциальных уравнений, строятся как функции от решения Матричного уравнения, найденного на первом этапе.

В рамках такого подхода получено несколько вариантов явных решений ОУР [5] и в работе на основе данного подхода исследуется стабилизация процесса горения топлива в ЖРД.

Литература

1. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. N 4. С. 436 - 441.
2. Летов А.М. Динамика полета и управления. М.: Наука. 1969. 360 с.
3. Crocco L. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors, PartI: Fundamentals – Low frequency instability with monopropellants// J.Amer.Rocket Soc. 1951. Vol.21,но. 6, pp. 163 178.
4. Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. Матем. Механ. 1962. Т. 26. N 1. с.~39-51.
5. Красовский Н.Н. оптимальные процессы в системах с запаздыванием// Труды II Международного конгресса ИФАК. Оптимальные системы, статистические методы. М. 1965
6. Ross D.W., Flugge-Lotz I. An Optimal Control Problem for Systems with Differential-difference Equation Dynamics. SIAM J. Control. 1969. Vol.~7. N 4. P.~609-623.
7. Kim A.V., Han S.H., Kwon W.H., Pimenov V. G. Explicit numerical Methods and LQR control algorithms for time-delay systems // Proceedings of the International Conference on Electrical Engineering. Kyungju,Korea. July21-25,1998.
8. Kim A.V., Kwon W.H., Pimenov V.G., Han S. H., LozhnikovA.B., Onegova O.V. Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). 1999. Seoul National University.
9. А. В. Ким, А.Б. Ложников. Линейно-квадратичная задача для систем с запаздыванием по состоянию. Точные решения Обобщенных Уравнений Риккати.// Автоматика и телемеханика. 2000.№ 7. С. 15-31.
10. Kim A.V., Ivanov A.V. Systems with delays. Analysis, control and computations. Wiley, 2015

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ОДИНАКОВЫХ ТЕЛ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ

Князьков Д.Ю., Фигурин Т.Ю.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
t_figurina@mail.ru

Аннотация. Исследуется движение системы одинаковых тел вдоль прямой в среде с квадратичным трением. Соседние тела взаимодействуют друг с другом, ограничений на величину сил взаимодействия не накладывается. Решена задача о перемещении системы на заданное расстояние при условии ее покоя в начале и в конце движения. Построенное движение системы состоит из этапов разгона системы, постоянства скорости центра масс, торможения системы. На этапе постоянства скорости центра масс скорость каждого из тел кусочно-постоянна. Показано, что время, требуемое для перемещения системы, может быть сколь угодно мало.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 21-51-12004 и государственной программы 123021700055-6.

Введение

Движение системы одинаковых тел вдоль прямой в сопротивляющихся средах рассматривалось в работах [1, 2]. Движение осуществлялось за счет сил взаимодействия тел, ограничений на которые не налагалось. В работе [2] была решена задача оптимального управления такой системой в случае сухого трения. В работе [1] было построено движение системы при периодическом изменении конфигурации в случаях кусочно-линейного и квадратичного трения, при условии, что в начальный момент времени импульс системы не равен нулю.

В настоящей работе строится движение системы взаимодействующих тел в среде с квадратичным трением, при котором система перемещается на заданное расстояние и покоится в начальный и в конечный момент времени. Силы взаимодействия между телами мгновенно изменяют скорости тел в некоторые моменты времени и, в отличие от работы [1], кусочно-постоянны и не равны нулю в остальные моменты времени. Движение системы состоит из этапов разгона системы, постоянства скорости центра масс, торможения системы. На этапе постоянства скорости центра масс скорости всех тел кусочно-постоянны.

Основные результаты

Рассматривается прямолинейное движение системы N идентичных взаимодействующих тел A_i , $i = 1, \dots, N$ в среде с квадратичным трением. Масса каждого из тел равна m . Силы взаимодействия между телами приводят к изменению скоростей тел, при этом изменяются действующие на эти тела силы сопротивления среды, являющиеся внешними по отношению к системе. Таким образом, управляя внутренними по отношению к системе силами взаимодействия тел, можно управлять движением системы как целого. Обозначим через x_i координаты тел A_i на прямой их движения, а через v_i скорости этих тел. Уравнения движения системы тел вдоль прямой имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i, & i &= 1, \dots, N, \\ m\dot{v}_1 &= F_1 + R(v_1), \\ m\dot{v}_i &= F_i - F_{i-1} + R(v_i), & i &= 2, \dots, N-1, \\ m\dot{v}_N &= -F_{N-1} + R(v_N), \end{aligned} \quad (1)$$

где F_i – сила, действующая со стороны тела A_{i+1} на тело A_i , а R – сила сопротивления среды, определяемая соотношением

$$R(v_i) = -cv_i|v_i|. \quad (2)$$

Будем считать, что в начальный момент времени выполнены равенства

$$x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Построим движения, при которых система перемещается на заданное расстояние L и приходит в состояние покоя в конце движения:

$$x_i(T) = L, \quad v_i(T) = v_i(0), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Предполагается, что силы взаимодействия неограниченны, что позволяет мгновенно изменять скорости тел системы любым таким образом, что скорость центра масс системы v , $v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$, остается неизменной.

Первый этап движения. В начальный момент времени мгновенно перераспределим импульс системы, так что

$$v_1(0) = -(N-1)p, \quad v_i(0) = p, \quad i = 2, \dots, N.$$

Далее на отрезке $[0, t_0]$, где $t_0 = \frac{m}{cp\sqrt{N-1}}$, все тела движутся свободно, силы взаимодействия равны нулю, при этом все тела кроме первого движутся одинаково. В момент времени t_0 имеем

$$v_1(t_0) = a_1 = -\sqrt{N-1}a, \quad v_i(t_0) = a_i = a, \quad i = 2, \dots, N,$$

где $a = p\sqrt{N-1}/(\sqrt{N-1} + 1)$. Смещения тел на первом этапе определяются формулами

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= -\frac{m}{c} \ln(\sqrt{N-1} + 1), \\ x(t_0) &= x_i(t_0) = \frac{m}{c} \ln(1/\sqrt{N-1} + 1), \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Заметим, что смещения тел не зависят от параметра p , и что положения всех тел, кроме первого, совпадают. Время движения на первом этапе t_0 может быть сколь угодно малым при неограниченном росте параметра p .

Второй этап движения. Построим на интервале $[t_0, t_N]$ такое движение системы, что скорость центра масс системы постоянна, а скорость каждого из тел кусочно-постоянна. На интервале (t_0, t_1) положим

$$v_1(t) \equiv a_1, \quad v_i(t) \equiv a, \quad i = 2, \dots, N, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (5)$$

Такое движение возможно, поскольку при этом выполнено $\sum_{i=1}^N a_i |a_i| = 0$, откуда сумма сил сопротивления среды, действующих на тела, равна нулю. Это движение с постоянными скоростями реализуется при следующем выборе сил взаимодействия: $F_i = \sum_{j=1}^i c a_j |a_j|$, $i = 1, \dots, N-1$.

Определим движение системы на интервале (t_0, t_N) следующим образом. Пусть скорости всех тел постоянны на каждом из интервалов времени (t_i, t_{i+1}) , $i = 1, \dots, N-1$, на интервале (t_0, t_1) заданы формулой (5) и изменяются циклически, то есть скорость тела A_i на каждом последующем интервале времени равна скорости тела A_{i+1} на предыдущем интервале, скорость тела A_N на каждом последующем интервале времени равна скорости тела A_1 на предыдущем интервале. При этом в моменты времени t_i скорости тел системы мгновенно изменяются, а скорость центра масс постоянна на всем интервале движения. Положим $\tau_1 = t_1 - t_0$ и будем считать, что длительности всех остальных временных интервалов одинаковы, то есть $\tau = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, \dots, N-1$. Смещения l_i тел A_i на интервале $[t_0, t_N]$ вычисляются как

$$\begin{aligned} l_1 &= a_1 \tau_1 + a \tau (N-1), \\ l &= l_i = a_1 \tau + a(\tau_1 + \tau(N-2)), \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Скорость центра масс на втором этапе выражается в виде

$$v = p \frac{N}{N-1} \frac{\sqrt{N-1} - 1}{\sqrt{N-1} + 1}.$$

Эта скорость может быть сколько угодно велика при увеличении параметра p .

Таким образом, на втором этапе построено движение с постоянной скоростью центра масс, кусочно-постоянными скоростями тел и такое, что все тела кроме первого смещаются на одинаковое расстояние, причем скорость каждого тела в начале и в конце этапа одинакова.

Третий этап движения. В начале третьего этапа, в момент времени $t = t_N$, мгновенно перераспределим импульс системы так, что

$$\begin{aligned} v_1(t_N) &= (N-1)a, \\ v_i(t_N) &= -a/\sqrt{N-1}, \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Затем на интервале $[t_N, T]$ все тела движутся свободно, при этом все тела кроме первого движутся одинаково. Момент времени T определяется из соотношения

$$\left| \frac{v_1(T)}{v_2(T)} \right| = N-1.$$

В этот момент времени импульс системы равен нулю, поэтому мгновенно перераспределив импульс, остановим каждое из тел системы, то есть получим, что $v_i(T) = 0$, $i = 1, \dots, N$. Заметим, что, как и на первом этапе движения, длительность третьего этапа движения может быть сколь угодно малой при увеличении параметра p .

Для решения исходной задачи (1)–(4) укажем, как выбрать длины временных интервалов τ_1 и τ на втором этапе движения такие, чтобы к моменту времени T все тела сместились на расстояние L относительно их начального положения. Обозначим Δx_1 и Δx — смещение первого и каждого из остальных тел на интервале времени $[t_N, T]$. Величины τ_1 и τ выберем такими, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned}x_1(t_0) + l_1 + \Delta x_1 &= L, \\x(t_0) + l + \Delta x &= L.\end{aligned}$$

Можно показать, что для достаточно больших L такие положительные τ_1 и τ существуют, то есть что существует такое L^* , что при всех $L \geq L^*$ существуют $\tau_1, \tau > 0$, удовлетворяющие указанным соотношениям.

Таким образом, показано, что при $L \geq L^*$ движение, состоящее из этапов 1–3 решает исходную задачу. В случае, если $L < L^*$, нужно переместить систему на расстояние $2L^*$, используя описанный выше алгоритм, а затем переместить систему в противоположном направлении на расстояние $2L^* - L > L^*$.

Время перемещения системы на расстояние L может быть сколь угодно мало за счет выбора величины параметра p .

Заключение

В работе решена задача о перемещении системы одинаковых взаимодействующих тел вдоль прямой в среде с квадратичным сопротивлением. Предполагалось, что система покоится в начале и в конце движения, силы взаимодействия тел неограниченны. Показано, что время перемещения системы может быть сколь угодно малым.

Литература

1. Черноусько Ф.Л. // Прикладная математика и механика, 81:4 2017. 380–388
2. Фигурин Т.Ю. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления, 5 2015. 3–9

ПОСТРОЕНИЕ НАИХУДШЕГО ПОСТОЯННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Корнеев В.А., Болотник Н.Н.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

korneev@ipmnet.ru

Аннотация. Рассматривается осциллятор с квадратичным демпфированием, подверженный воздействию внешней возмущающей силы. Внешняя сила (возмущение) имеет конечную продолжительность, не меняет направления своего действия и интеграл от ее величины по времени задан. Максимизируемым критерием качества служит наибольшее смещение тела осциллятора от положения равновесия. В классе постоянных возмущений ограниченной длительности для различных значений параметров осциллятора построено наихудшее возмущение, отвечающее наибольшему значению критерию качества.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690138-6.

Введение

Интерес к данной задаче инициирован работами [1, 2], посвященными оптимальной гарантированной защите размещенных на подвижном основании объектов от ударов, которым может подвергаться основание. Простейшими и широко распространенными пассивными противоударными изоляторами являются изоляторы с линейной пружиной и демпфером с линейной или квадратичной характеристикой, описываемые уравнением

$$m\ddot{x} + k |\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x} + cx = v(t), \quad v = -mw(t), \quad n = 1, 2. \quad (1)$$

где x – координата, определяющая положение объекта относительно основания, m – масса объекта, k и c – положительные коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, $w(t)$ – ускорение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, приобретаемое в результате удара. Функция $v(t)$ в описанной модели играет роль внешнего возмущения. Величина $u(x, \dot{x}, t) = -k |\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x} - cx$ рассматривается как управляющая сила, действующая со стороны изолятора на объект. Уравнение (1) можно трактовать как уравнение колебаний демпфированного осциллятора под действием внешней силы $v(t)$. В качестве класса возмущений $v(t)$ будем рассматривать класс знакопостоянных функций, имеющих ограниченный интеграл по времени:

$$V = \{v(t) : v(t) \geq 0, \int_0^{\infty} v(\tau) d\tau \leq v_0\}, \quad (2)$$

где v_0 – заданная положительная величина. В [1] для системы (1), (2) рассмотрена следующая задача.

Задача 1. Пусть $v(t) \in V$ и пусть в начальный момент времени $t = 0$ осциллятор покоится в положении равновесия ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$). Требуется определить параметры k и c так, чтобы гарантированно минимизировать максимум модуля отклонения тела осциллятора от положения равновесия при условии, что сила $u(x, \dot{x}, t)$, действующая на это тело со стороны пружины и демпфера, не превышает по абсолютной величине заданного значения A . В математической формулировке задача записывается так:

$$\begin{aligned} \max_{v \in V} J_1(v) \rightarrow \min_{k \geq 0, c \geq 0}, \quad J_1(v) &= \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t; m, k, c)|, \\ \max_{v \in V} J_2(v) \leq A, \quad J_2(v) &= \max_{t \in [0, \infty)} |k |\dot{x}_v(t; m, k, c)|^n \operatorname{sign} \dot{x}_v(t; m, k, c) + cx_v(t; m, k, c)|. \end{aligned}$$

Здесь $x_v(t; m, k, c)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Решение задачи 1 требует решения задач о наихудшем возмущении по отношению к величинам $J_1(v)$, $J_2(v)$, характеризующим качество функционирования противоударного изолятора. Под наихудшим возмущением понимается функция $v(t) \in V$, доставляющая максимум соответствующему функционалу, $J_1(v)$ или $J_2(v)$.

Известно [1, 2], что для линейного осциллятора ($n = 1$) наихудшее возмущение из класса (2) по отношению к обоим функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$ есть мгновенный удар, в результате которого тело осциллятора (защищаемый объект) в начальный момент времени приобретает импульс, равный v_0 . Мгновенный удар моделируется дельта-функцией Дирака, умноженной на приобретенный в результате удара импульс: $v(t) = v_0 \delta(t)$.

В теории оптимальной противоударной изоляции изолятор с квадратичным демпфированием играет особую роль. Он реализует предельные возможности защиты объекта от мгновенного удара [1, 2]. Если внешнее возмущения задано выражением $v(t) = v_0 \delta(t)$, а коэффициенты k и c определены равенствами

$k = m^2 A / v_0^2$, $c = 2mA^2 / v_0^2$, то изолятор с квадратичным демпфированием обеспечивает абсолютный минимум максимального модуля относительного смещения изолируемого объекта $J_1(v)$ при ограничении $J_2(v) \leq A$, наложенном на абсолютную величину силы, приложенной изолятором к объекту. Значения функционалов $J_1(v)$ и $J_2(v)$ при этом суть $J_1 = v_0^2 / 2mA$, $J_2 = A$.

Возникает вопрос: является ли мгновенный удар максимально допустимого импульса наихудшим возмущением для осциллятора с нелинейными характеристиками и применимы ли полученные результаты в этом случае? Отмеченное обстоятельство обуславливает актуальность решения задач о наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием по отношению к функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$. Эти задачи интересны и с математической точки зрения, так как являются задачами оптимального управления нелинейной системой с неаддитивным функционалом.

Задачи о наихудшем возмущении по отношению к функционалам $J_1(v)$, $J_2(v)$ для осциллятора с квадратичным демпфированием значительно труднее аналогичных задач для линейного осциллятора и до сих пор не решены. В данной работе для осциллятора с квадратичным демпфированием исследуется задача о наихудшем возмущении по отношению к максимальному модулю отклонения осциллятора от положения равновесия в классе постоянных возмущений ограниченной длительности.

Показывается, что, в отличие от линейного осциллятора, мгновенный удар, сообщаемый осциллятору импульс v_0 , не является наихудшим возмущением в рассматриваемом классе функций, а следовательно, и в более широком классе функций.

Постановка задачи и ее решение

Задача 2. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k |\dot{x}| \dot{x} + cx = v(t), \quad m > 0, \quad k > 0, \quad c > 0 \quad (3)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (4)$$

найти функцию $v(t) = v_b(t)$, которая принадлежит однопараметрическому классу V_b возмущений «прямоугольного» профиля следующего вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t \in [0, v_0/b], \\ 0, & t > v_0/b, \end{cases} \quad b > 0 \quad (5)$$

и максимизирует функционал

$$J_1(v) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)|. \quad (6)$$

Здесь b – параметр, подлежащий выбору из условия максимизации функционала J_1 , x – координата, описывающая отклонение тела осциллятора от положения равновесия, m – масса тела осциллятора, k и c – коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, v – внешняя сила, приложенная к осциллятору и рассматриваемая как возмущение, v_0 – заданный импульс внешнего воздействия, $x_v(t)$ – решение уравнения (3) при начальных условиях (4) и заданном возмущении $v = v_b(t)$.

Для уменьшения числа определяющих параметров введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$x' = \frac{\sqrt{mc}}{v_0} x, \quad t' = \sqrt{\frac{c}{m}} t, \quad v'(t') = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m}{c}} v \left(\sqrt{\frac{m}{c}} t' \right), \quad k' = \frac{v_0}{m\sqrt{mc}} k, \quad b' = b \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (7)$$

Замена переменных (7) в соотношениях (3) – (6) после опускания штрихов приводит к соотношениям того же вида, в которых следует положить $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$. В дальнейшем используются только безразмерные переменные.

Утверждение. Для возмущений класса V_b и возмущения в виде дельта-функции $v(t) = \delta(t)$, максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \quad \dot{x}_v(t_*) = 0, \quad \dot{x}_v(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, t_*).$$

Из утверждения вытекает, что для решения поставленной задачи о наихудшем возмущении достаточно ограничиться решением уравнения (3) с начальными условиями (4) при $v(t)$, заданном или выражением (5) или равенством $v(t) = \delta(t)$, на интервале времени $[0, t_*]$, где $t_* > 0$ – момент первого после начала движения обращения в нуль скорости осциллятора. На этом интервале скорость \dot{x} неотрицательна, и уравнение (3) упрощается, принимая в безразмерных переменных вид

$$\ddot{x} + k \dot{x}^2 + x = v(t).$$

Для случая возмущения $v(t) = \delta(t)$ квадрат скорости $w = \dot{x}^2$ обращается в 0 при значении $x = x_\delta(k)$, вычисляемым по формуле

$$x_\delta(k) = \frac{1 + \text{LambertW} \left((2k^2 - 1)e^{-1} \right)}{2k}. \quad (8)$$

Здесь $\text{LambertW}(z)$ функция Ламберта, [3]. При этом мы ограничиваемся вещественными $z, z \geq -1/e$ и условием $\text{LambertW}(z) \geq -1$, тогда $\text{LambertW}(z)$ будет однозначной функцией (верхняя ветвь функции Ламберта). Функция $x_\delta(k)$ монотонно убывает. При этом $x_\delta(0) = 1, \lim_{k \rightarrow +\infty} x_\delta(k) = 0$.

Для значения $J_1(v)$ из (6) введем обозначение $J(k, b) = J_1(v)$, указывающее на зависимость этой величины от параметров k, b . На языке Matlab была создана программа расчета наибольшего отклонения (смещения) $J(k, b)$ для заданных величин b, k , затем проведена максимизация смещения по величине b при заданном k и получена зависимость $b(k)$, которая позволила вычислить соответствующие значения наибольшего отклонения $x(k)$ и времени его достижения $t(k)$. Тем самым были численно получены зависимости $x(k), b(k)$ и $t(k)$, характеризующие поведение изучаемого осциллятора при наихудшем возмущении. На рис. 1 приведены два графика. Нижний график x_δ описывает смещение при дельта-возмущении, даваемое формулой (8). Верхний график x_{opt} описывает смещение $x(k)$, полученное для наихудшего возмущения $v_b(t)$ из (5) при $b = b(k)$.

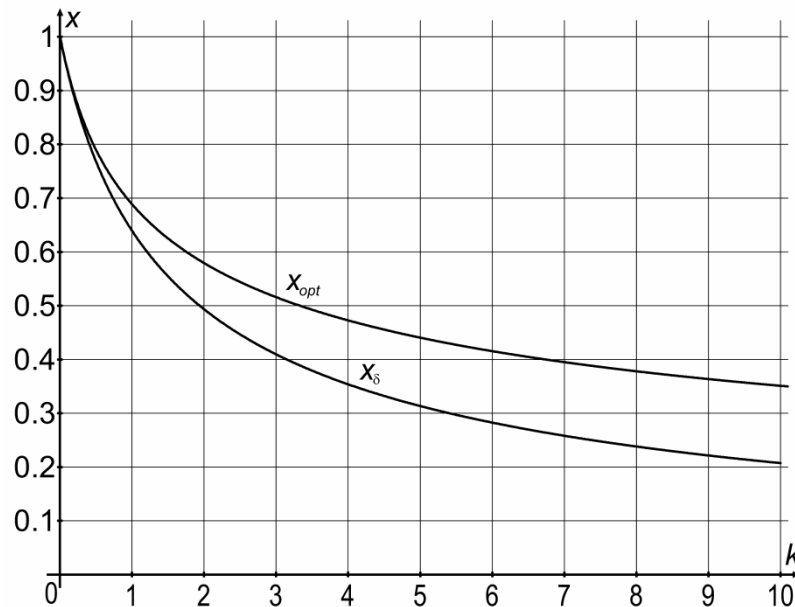


Рис. 1. Зависимость наибольшего смещения X_{opt} и смещения X_δ при дельта-возмущении от параметра k .

Заключение

Для осциллятора с квадратичным демпфированием поставлена задача о выборе параметра постоянной внешней силы ограниченной длительности, обеспечивающего наибольшее смещение осциллятора от положения равновесия. Установлено, что первый локальный максимум смещения является искомым максимальным смещением. Численно построена зависимость параметра внешней силы, обеспечивающего наибольшее смещение, от параметров осциллятора. Получены величины наибольшего смещения и времени его достижения в зависимости от параметров осциллятора.

Литература

1. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. – М.: Наука, 1983, 256 с.
2. Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. – Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001, 440 p.
3. Mezo I. The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2022, 252 p.

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ АКТЮАТОРАМИ

Костин Г.В., Гавриков А.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
kostin@ipmnet.ru

Аннотация. Рассмотрены продольные колебания однородного упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими актюаторами. Актюаторы создают продольную силу, распределенную кусочно-постоянно вдоль оси стержня. Управляющие элементы одинаковы по размеру и расположены без промежутков. Задача управления заключается в том, что за фиксированное время минимизируется взвешенная сумма терминальной энергии стержня и квадрата нормы управления. Определены неуправляемые моды колебаний и дана оценка времени гашения управляемых мод. Разработан алгоритм точного решения задачи управления. Проанализирована зависимость энергии остаточных колебаний и нормы управления от времени и весового коэффициента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-12004).

Введение

Изучение управляемости динамических систем с распределенными параметрами остается одним из важных направлений в теории управления. Определение области достижимости, в которой систему можно привести с помощью заданного класса управляющих воздействий, дает представление о предельных возможностях управления и подсказывает эффективные методы оптимизации движения. Для однородного упругого стержня, управляемого с помощью нагрузки с одного конца, наименьшее время гарантированного приведения в предписанное состояние равно удвоенному времени прохождения продольной волны вдоль стержня [1]. В [2] показано, что это время можно сократить в N раз, если добавить к краевой силе N одинаковых (пьезоэлектрических) актюаторов, расположенных последовательно без промежутков вдоль оси стержня и создающих кусочно-постоянную нормальную силу в поперечном сечении. В [3] доказано, что без граничной силы нельзя изменить амплитуды определенной группы мод колебаний стержня и достижимыми оказываются лишь периодические терминальные состояния с длиной волны обратно пропорциональной числу актюаторов. В этой работе, в отличие от [3], задача оптимального управления не содержит терминальных ограничений. На основе обобщенной формулировки начально-краевой задачи предлагается алгоритм оптимального гашения колебаний со взвешенным подавлением интегральной нормы вектора управления.

Постановка задачи оптимального управления

Рассматриваются продольные движения тонкого однородного упругого стержня длины $2L$ на отрезке времени $t \in \mathcal{T} = (0, T)$. Вдоль всего стержня на интервале $x \in \mathcal{X} = (-L, L)$ без промежутков расположены N пьезоэлектрических актюаторов (ПА) каждый длины $\lambda = 2L/N$ (см. схему на рис. 1 для $N = 6$). ПА с номером $k \in \mathcal{K} = \{1 - N, 3 - N, \dots, N + 1\}$ создает в поперечном сечении стержня равномерно распределенную на отрезке $x \in \mathcal{X}_k = (x_{k-1}, x_{k+1})$ нормальную управляющую силу $f(t, x) = \dot{u}_k(t)$. Концы отрезков \mathcal{X}_k задаются как $x_n = n\lambda/2$, где $n \in \mathcal{N} = \{-N, 2 - N, \dots, N\}$. В пространственно-временной области $(t, x) \in \mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ состояние стержня выражается через две функции: перемещение его точек $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ и динамический потенциал $r: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Первая производная по времени r_t определяет полную нормальную силу в поперечном сечении, пространственная производная r_x задает линейную плотность импульса. Сформулируем обобщенную начально-краевую задачу о движении свободного стержня [2]:

Даны начальные распределения $v_0, r_0 \in H^1(\mathcal{X})$ и сила $f \in L^2(\mathcal{D})$. Требуется найти кинематическую и динамическую переменные $v^*(t, x)$ и $r^*(t, x)$, которые минимизируют функционал состояния

$$\Phi[v^*, r^*] = \min_{v, r \in H^1(\mathcal{D})} \Phi[v, r] = 0, \quad \Phi = \int_{\mathcal{D}} \varphi d\mathcal{D} \geq 0, \quad d\mathcal{D} = dt dx,$$

$$\varphi = \frac{1}{4}(g^2 + h^2), \quad g = \sqrt{\rho}v_t - \frac{r_x}{\sqrt{\rho}}, \quad h = \sqrt{\kappa}v_x - \frac{r_t - f}{\sqrt{\kappa}},$$

$$x \in \mathcal{X}: v(0, x) = v^0(x), \quad r(0, x) = r^0(x); \quad t \in \mathcal{T}: r(t, \pm L) = r^0(\pm L).$$

Пьезоэлектрическая сила $f(t, x)$ полностью определяется через производную от вектор-функции управления $\mathbf{u}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\mathbf{u} = (u_k)_{k \in \mathcal{K}}$. Ставится следующая задача оптимального управления.

Пусть с учетом начальных и краевых условий функции $v, r \in H^1(\mathcal{D})$ минимизируют функционал Φ для произвольного управления $\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^N)$. Требуется найти такую допустимую вектор-функцию $\mathbf{u}^*(t)$, которая при фиксированном времени T минимизирует целевой функционал

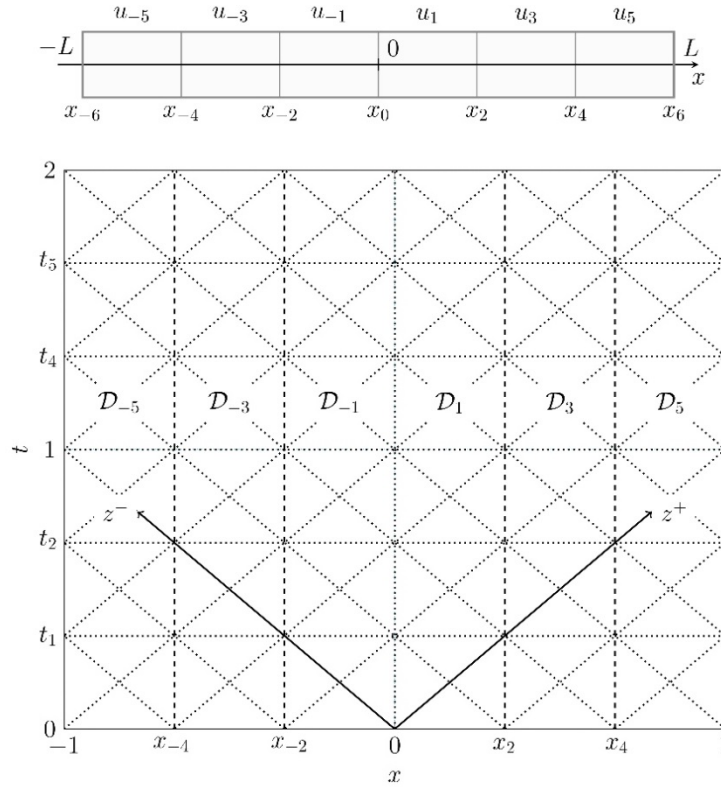


Рис. 1. Расположение ПА на стержне (вверху) и сетка в \mathcal{D} (внизу)
для $M = N = 6$.

$$\Theta[\mathbf{u}^*] = \min_{\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^N)} \Theta[\mathbf{u}], \quad \Theta = \Upsilon + 10^\gamma \Psi, \quad \Upsilon = \frac{\lambda}{2\kappa T} \int_{\mathcal{T}} \dot{\mathbf{u}}^2 dt, \quad \Psi = \int_{\mathcal{X}} \psi(T, x) dx, \quad \psi = \frac{\kappa v_x^2}{2} + \frac{r_x^2}{2\rho}, \quad \mathbf{u}(0) = 0.$$

Здесь Υ — средняя потенциальная энергия, порождаемая силой $f(t, x)$, Ψ — механическая энергия стержня в конце процесса, γ — безразмерный весовой коэффициент. В функцию линейной плотности энергии ψ входят обе переменные v и r . При этом первое слагаемое определяет потенциальную энергию упругих деформаций стержня в перемещениях, второе — кинетическую энергию, выраженную через динамический потенциал.

Алгоритм решения и пример расчета оптимальных движений

В безразмерных переменных рассмотрим случай $L = \rho = \kappa = 1$, $T = M\lambda$, $M \in \mathbb{N}$. Для произвольного времени T оптимальное решение также находится аналитически, но требует более подробного объяснения. На каждой области $\mathcal{D}_k = \mathcal{T} \times \mathcal{X}_k \in \mathcal{D}$, $k \in \mathcal{K}$, неизвестные v и r выражаются через функции бегущих волн w_k^\pm как $(t, x) \in \mathcal{D}_k$: $v(t, x) = w_k^+(z^+) + w_k^-(z^-)$, $r(t, x) = w_k^+(z^+) - w_k^-(z^-) + u_k(t)$, $k \in \mathcal{K}$, $z^\pm = t \pm x$.

Разобьем области \mathcal{D}_k на треугольные элементы с помощью характеристик $z^\pm = (2j - N)\lambda/2$ и горизонтальных сегментов $t = t_m$, где $j = 1, \dots, N + M - 1$, $m \in \mathcal{M} = \{0, \dots, M\}$. Пример получающейся сетки изображен на рис. 1(снизу) пунктирными линиями для $M = N = 6$. Вводя для каждого элемента уникальный набор из трех функций

$$w_{k,m}^\pm: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}: w_{k,m}^\pm(z) = w_k^\pm(z + z_{k,m}^\pm), \quad k \in \mathcal{K}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad z_{k,m}^\pm = z_k^\pm + m\lambda, \quad z_j^\pm = (\pm k \mp 1)\lambda/2;$$

$$u_{k,m}: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}: u_{k,m}(z) = u_k(z + t_m), \quad k \in \mathcal{K}, \quad m \in \mathcal{M} \setminus \{M\}, \quad \mathcal{Z} = (0, \lambda).$$

можно свести начальные, граничные и межэлементные условия непрерывности неизвестных v и r к системе линейных алгебраических уравнений относительно функций $w_{k,m}^\pm$. Показано, что полученную систему всегда можно разрешить. Неразрешенные переменные $u_{n,m}$ определяются из условия минимальности целевого функционала Θ . Из свойства непрерывности функции управления $u(t)$ и начальных ограничений вытекают условия на краевые значения этих переменных: $u_{k,0}(0) = 0$ и $u_{k,m}(\lambda) = u_{k,m+1}(0)$, где $k \in \mathcal{K}$ и $m \in \mathcal{M} \setminus \{M\}$. После подстановки функций $u_{n,m}$, выполняющих все краевые условия, в функционал Θ исходная задача оптимального управления сводится к одномерной вариационной задаче относительно набора этих функций. Необходимые условия стационарности вариационной задачи — это система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также существенных краевых условий и соответствующих условий трансверсальности. Более того, решение системы находится в квадратурах.

В качестве примера возьмем начальные распределения $v^0(x) = -r^0(x) = \cos 4x$. На рис. 2 (слева) для $T = 2$, $\gamma = 1$ и $N = 6$ приведено поле перемещений $v(t, x)$ при оптимальном управлении $u(t)$, компоненты которого $u_k(t)$, $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5$, показаны на рис. 2 (справа). На рис. 3 изображена зависимость функционалов Y (квадрат управления, усредненный по времени) и Ψ (терминальная энергия) от параметров M и γ при тех же начальных условиях и для $N = 6$ слева и справа, соответственно.

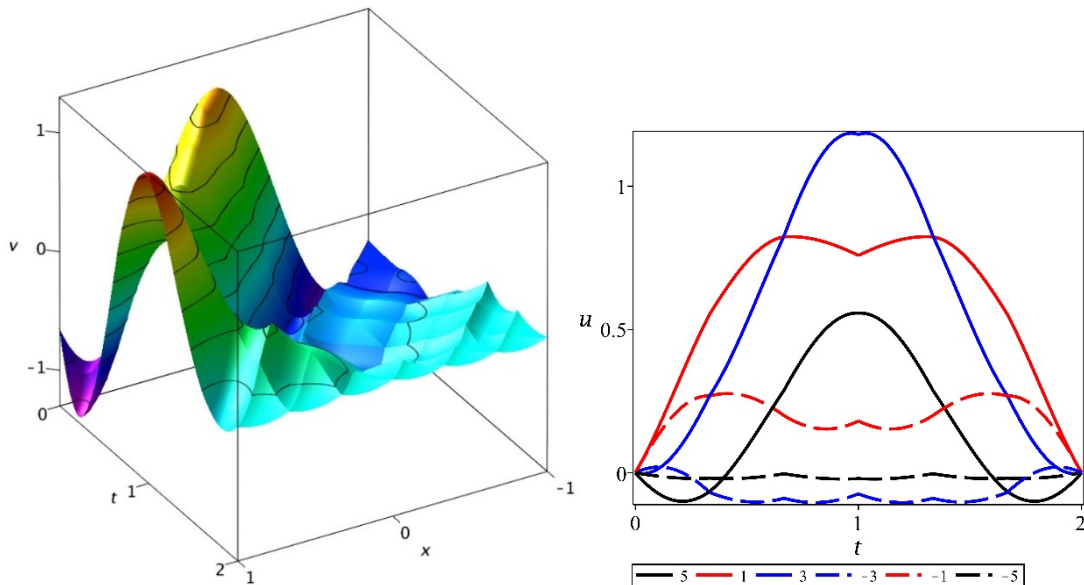


Рис. 2. Оптимальные перемещения v (слева) и управления u_k (справа) для $M = N = 6$.

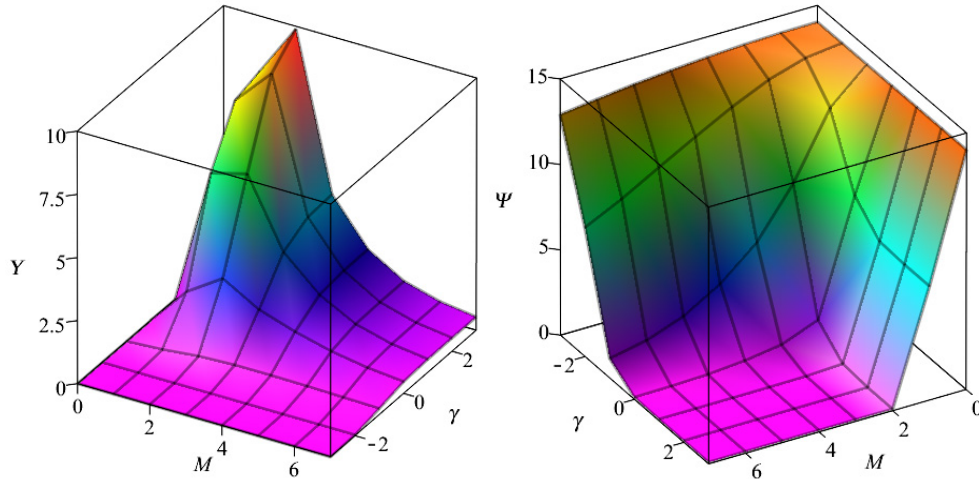


Рис. 3. Зависимость значений функционалов Y (слева) и Ψ (справа) от M и γ .

Литература

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965.
2. Kostin G., Gavrikov A. Optimal motion of an elastic rod controlled by piezoelectric actuators and boundary forces // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – 2022, IEEE Xplore Digital Library. – doi: 10.1109/STAB54858.2022.9807484.
3. Kostin G., Gavrikov A. Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, No. 16. – P. 350–355. – doi: 10.1016/j.ifacol.2022.09.049.

РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-ЛАБОРАТОРНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА

Лобачев А.М., Шагниев О.Б., Гаврилов О.О., Исаев К.О.

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
gavrilov.oo@edu.spbstu.ru

Аннотация. В работе описывается процесс разработки учебно-лабораторного комплекса для исследования колебаний и устойчивости управляемого обратного маятника. Система управления реализована в программном комплексе Matlab Simulink, обратные связи реализованы с использованием модуля ЦАП / АЦП Lcard E-154. Показан характер взаимодействия электронно-вычислительной и конструкционной части, в том числе конструкция стенда, приводы, датчики, а также структура замкнутой системы. Показано, как полученные результаты можно использовать для интеграции лабораторных работ с применением реальных объектов управления в учебный процесс.

Введение

Обратный маятник (далее – ОМ, рис. 1) представляет собой маятник, центр масс груза которого располагается выше точки опоры [1]. Груз закреплен на конце жесткого стержня. ОМ является классической задачей динамики и теории управления, в связи с чем широко применяется для тестирования алгоритмов управления [2] (ПИД-регуляторов, нейронных сетей, нечеткого управления и т. д.). Решение данной задачи может быть использовано, например, для вывода на орбиту Земли космических аппаратов, так как из-за взаимодействия движущей и аэродинамической сил возникает дестабилизирующий момент, что и обуславливает неустойчивость данной системы. Эта же проблема решена, например, в моноколесе, самобалансирующемся транспортном устройстве.

В данной работе рассматривается такое устройство колебательной системы, при котором точка опоры расположена на ориентированной в вертикальной плоскости каретке, приводимой в движение вдоль горизонтальной оси шаговым двигателем для поддержания равновесия системы (рис. 2, 3). Управление системой реализовано с помощью среды моделирования Matlab Simulink, в то время как большинство подобных лабораторных установок используют в своей основе пакет LabView. Применение Matlab Simulink обеспечивает лёгкое освоение лабораторной установки студентами, проходящими курсы управления механическими системами и знакомыми с данным программным обеспечением. Использование данного учебного комплекса при выполнении лабораторных работ позволит студентам использовать теоретические знания в сфере управления на практике.

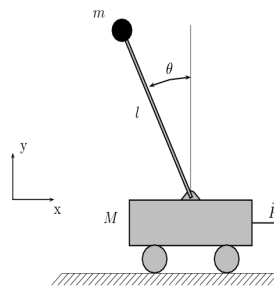


Рис. 1. Расчетная схема обратного маятника.

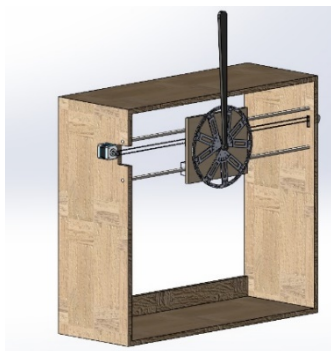


Рис. 2. Внешний вид учебно-лабораторного комплекса.



Рис. 3. Фотография стенда.

Основная часть

Установка состоит из внешнего корпуса, предназначенного для обеспечения жесткости конструкции, и каретки, прикрепленной к корпусу на двух направляющих, приводимой в движение шаговым двигателем с помощью ременной передачи. На каретку устанавливается маятник с возможностью замены грузов различной массы и формы. Отслеживание перемещения маятника происходит за счёт прикреплённого к нему щелевого диска, работающего в паре с оптическим датчиком, отправляющим цифровой сигнал в модуль ЦАП / АЦП для дальнейшей генерации управляющего воздействия с обратной связью на шаговый двигатель с ременной передачей с помощью компьютера, подключенного к установке [4].

Щелевой диск был разработан с учётом характеристик оптического датчика LM393, главной из которых является период задержки в 300 наносекунд. Такое малое время задержки позволило спроектировать диск с

максимальным числом отверстий минимального размера, доступного при изготовлении методом 3D-печати ABS-пластиком. Полученные 396 отверстий позволяют достичь максимальной отзывчивости системы. Далее система по полученному цифровому сигналу с датчика сопоставляет полученную угловую скорость вращения диска с необходимым управляющим воздействием, формируемым персональным компьютером в программном пакете.

Изначально данный продукт приспособлен скорее для создания математических моделей в собственной среде разработки, чем для управления реальными объектами. После проведенного исследования были выявлены дополнительные программные средства, необходимые к установке для реализации задачи. Для связи Matlab Simulink и датчиков посредством модуля ЦАП / АЦП Lcard E-154 необходимо использовать блок S-функции, написанной на языке C++ и в дальнейшем загруженной в Matlab как мех-файл, позволяющий идентифицировать данный модуль для дальнейшей работы. Иными словами, данный блок позволяет программе определить выход для управляющего воздействия. Таким образом, задача управления лабораторным комплексом сводится к адаптации существующей разработанной математической модели управления обратным маятником (рис. 4) к управлению физическим объектом в реальном времени с учётом особенностей конструкции установки.

Описываемый стенд в дальнейшем послужит объектом управления лабораторной работы для студентов. Им необходимо самостоятельно разработать систему управления в среде Matlab Simulink и подобрать параметры регулятора в зависимости от вида установленного на лабораторный стенд маятника [3]. В качестве обратной связи для системы управления используются сигналы датчиков скорости каретки и угла поворота маятника [5]. При разной массе грузов или отличиях в их форме (речь идёт о возможности установки физического, а не только математического маятника) значения требуемых параметров будут отличаться, что позволит повысить разнообразие предлагаемых вариантов задания.

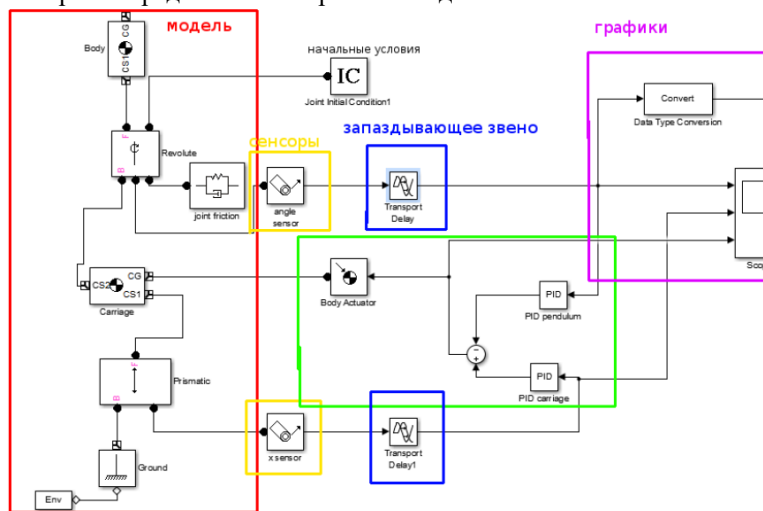


Рис. 4. Управление математической моделью обратного маятника в Matlab Simulink [6]

Заключение

Подводя итоги данного исследования, можно заключить, что проведенная работа позволит в будущем получить опыт разработки и постройки лабораторно-учебных и экспериментальных установок, предназначенных для использования в образовательной и научной деятельности в области прикладной механики и теории автоматического управления. Разработанная установка поспособствует созданию новых учебно-методических материалов для формирования у студентов навыков управления реальными механическими устройствами.

Литература

1. Ю.И. Неймарк, Н.Я. Коган, В.П. Савельев. Динамические модели теории управления, 1985. 400 с.
2. В.В. Денисенко. ПИД-регуляторы: вопросы реализации. Часть 1. СТА, №4, 2007, С.86-97
3. В.В. Денисенко. ПИД-регуляторы: вопросы реализации. Часть 2. СТА, №1, 2008, С.86-99
4. О.Н. Кузяков, М.А. Андреева. Опто-механическая система стабилизации положения обратного маятника. Фундаментальные исследования. 2016. № 5-3. С. 480-485
5. С.В. Арановский, А. Э. Бирюк, Е. В. Никульчев, И. В. Рядчиков, Д. В. Соколов. Синтез наблюдателя в задаче стабилизации обратного маятника с учетом ошибки в датчиках положения. Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. с. 145–153
6. О.С. Лобода, А. Опочанский, П.Поцелуев. Обратный маятник. URL:http://tm.spbstu.ru/Обратный_маятник. (Дата обращения: 14.10.2023).

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИКВАТЕРНИОНОВ КЛИФФОРДА, КОНЦЕПЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Панкратов И.А.^{1,2}, Челноков Ю.Н.²

1 - Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов

*2 - Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
pankratovia.mechanic@gmail.com*

Аннотация. Рассмотрена задача оптимального по быстродействию управления пространственным движением твердого тела (например, космического аппарата) с использованием кватернионов Гамильтона, бикватернионов Клиффорда, концепции решения обратных задач динамики и принципа максимума. Управлениями являются ограниченные по модулю векторы углового и линейного ускорений тела. Оригинальный численный алгоритм решения сформулированной краевой задачи – комбинация методов Рунге-Кутты, Ньютона, градиентного спуска. Приведены примеры численного решения задачи. Установлены особенности и закономерности процесса оптимального пространственного движения твердого тела.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00218.

Построение управления движением твердого тела (в частности, космического аппарата) в традиционной постановке включает задачу построения программного движения, программного управления, а также задачу построения управления, стабилизирующего программное движение в малом. Задача управления угловым движением твердого тела в настоящее время, как правило, решается с использованием кватернионов поворота Гамильтона, являющихся наиболее удобным средством описания углового (вращательного) движения твердого тела, и с использованием кватернионных кинематических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Эйлера (Родрига-Гамильтона), имеющих известные качественные преимущества перед уравнениями в угловых переменных (в углах Эйлера-Крылова).

Задача построения программного углового движения и программного управления с использованием кватернионов во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления (наиболее часто с использованием принципа максимума Понтрягина) [1–7].

Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольно заданных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела не найдено. Поэтому в общем случае приходится рассчитывать лишь на приближенное аналитическое или численное решение задачи. Построение стабилизирующего управления осуществляется на основе линеаризованных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела и также встречает серьезные трудности в случаях, когда эти уравнения нестационарны.

Рассмотрим свободное твердое тело (в частности, космический аппарат), способное совершать относительно основной (инерциальной) системы координат произвольное пространственное движение, эквивалентное пространственному винтовому движению, а также эквивалентное композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной точкой тела и вращения тела вокруг этой точки. Тело находится под действием произвольного главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Пространственное движение твердого тела описывается системой динамических и кинематических векторно-матричных и кватернионных обыкновенных дифференциальных уравнений четырнадцатого порядка [8–12] относительно радиус-вектора центра масс тела, вектора его линейной скорости, вектора угловой скорости вращения тела вокруг центра масс и компонент кватерниона ориентации тела относительно инерциальной системы координат. Эти уравнения эквивалентны двум бикватернионным уравнениям относительно отображения кинематического винта тела на связанный с ним базис бикватерниона конечного перемещения тела в инерциальном пространстве, главная часть которого характеризует ориентацию тела в инерциальной системе координат, а моментная – местоположение тела в этой системе координат. Дуальное управление – бикватернион, являющийся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения и требуемой составляющей абсолютного линейного ускорения тела. Заметим, что законы формирования управляющей силы и управляющего момента получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики.

Задача построения управляющей силы и управляющего момента в рассматриваемой постановке сведена к построению требуемой составляющей абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения. Задача построения этих управлений носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как исходные уравнения справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы и управляющего момента на основе конечных соотношений.

В правые части этих соотношений включены главный вектор других внешних сил, действующих на твердое тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой) и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени и фазовых переменных.

Требуется определить дуальное управление (его главная и моментная части ограничены по модулю), переводящее твердое тело из заданного начального положения в конечное, принадлежащее некоторому многообразию за минимальное время. При этом краевые условия по угловому и линейному положениям тела в инерциальном пространстве, а также по его абсолютным угловой и линейной скоростям являются произвольными.

Конечное значение момента времени не фиксируется и подлежит определению в результате решения задачи. Поэтому рассматриваемая задача – задача с подвижным правым концом.

Поставленная задача решена с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Получены закон оптимального управления и условия трансверсальности. Задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений двадцать восьмого порядка и двадцатью шестью краевыми условиями, которые дополняются двумя условиями трансверсальности и равенством гамильтониана нулю, имеющим место для оптимального управления и оптимальной траектории.

Для численного решения краевой задачи оптимального управления пространственным движением твердого тела уравнения задачи были записаны в безразмерных переменных. При переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появляются характерные безразмерные параметры, зависящие от масштаба длины, моментов инерции твердого тела; максимальных значений линейного и углового ускорений тела, управляющего момента и управляющей силы.

Разработанный алгоритм численного решения задачи оптимального управления основан на методе Левенберга-Марквардта, он реализует комбинацию метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска [13].

Приведены примеры численного решения задачи быстрогодействия для случаев, когда распределение масс твердого тела соответствует сферически-симметричному телу, МКС как произвольному твердому телу и космическому аппарату «Спейс Шаттл» (динамические характеристики космического аппарата «Спейс Шаттл» такие же, как у почти осесимметричного твердого тела) [14, 15]. При этом отличие между начальной и конечной ориентациями твердого тела составляет единицы (или десятки) градусов в угловой мере, а по перемещению – десятки километров (задача маневрирования). Граничные условия и параметры твердого тела соответствуют работам [14, 16, 17]. Построены графики изменения компонент бикватерниона, характеризующего пространственное положение и угловую ориентацию твердого тела; угловой и линейной скоростей тела, его углового и линейного ускорений, управляющей силы и управляющего момента. Приведен анализ полученных решений. Установлены особенности и закономерности оптимальных пространственных движений тела.

Отметим выявленную неединственность численного решения краевой задачи оптимального по быстроддействию управления пространственным движением твердого тела, связанную с нелинейностью дифференциальных уравнений задачи. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления получены различные решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них было выбрано то, при котором время окончания движения меньше.

Литература

1. G. J. Lastman // A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems, Intern. J. Control, 27:4, 1978. 513-524.
2. В. Н. Бранец, М. Б. Черток, Ю. В. Казначеев // Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии, Космические исследования, 22:3, 1984. 352-360.
3. F. Li, P. M. Bainum // Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers, J. Guidance, Control, and Dynamics, 13:1, 1990. 38-45.
4. S. L. Scrivener, R. C. Thompson // Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers, J. Guidance, Control, and Dynamics, 17:2, 1994. 225-233.
5. М. В. Левский // Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата, Изв. РАН. Теория и системы управления, 6, 2008. 144-157.
6. А. В. Молоденков, Я. Г. Сапунков // Аналитическое решение задачи оптимального по быстроддействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений, Известия РАН. Теория и системы управления, 2, 2014. 13-25.
7. А. В. Молоденков, Я. Г. Сапунков // Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях, Известия РАН. Теория и системы управления, 3, 2015. 131-141.
8. Ю. Н. Челноков // Управление пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов, XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 20–24 августа 2019 г.): Сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. 288-290. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v1
9. Ю. Н. Челноков // Синтез управления пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов, Прикладная математика и механика, 83:5-6, 2019. 704-733. DOI: 10.1134/S0032823519050035

10. Yu. N. Chelnokov // Synthesis of Control of Spatial Motion of a Rigid Body Using Dual Quaternions, *Mechanics of Solids*, 55:7, 2020. 59–80. DOI: 10.3103/S0025654420070080
11. Ю. Н. Челноков // Управление пространственным движением твердого тела с использованием бикватернионов и дуальных матриц, *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 1, 2021. 17-43.
12. Yu. N. Chelnokov // Controlling the Spatial Motion of a Rigid Body Using Biquaternions and Dual Matrices, *Mechanics of Solids*, 1, 2021. 13-33.
13. Н. Н. Моисеев // Численные методы в теории оптимальных систем. 1971. 424 с.
14. А. В. Молоденков, Я. Г. Сапунков // Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 4, 2021. 142-156.
15. Ю. Р. Банит, М. Ю. Беляев, Т. А. Добринская, Н. И. Ефимов, В. В. Сазонов, В. М. Стажков // Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт № 57. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2002. 19 с.
16. Т. В. Бордовицына // Современные численные методы в задачах небесной механики. 1984. 136 с.
17. И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков // Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, *Изв. Саратовского университета. Нов. Сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 20:1, 2020. 93-104.

ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Пацко В.С.¹, Трубников Г.И.², Федотов А.А.¹

1 - Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского, Екатеринбург, Россия

2 - Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

patsko@imm.uran.ru

Аннотация. Исследуется трёхмерное множество достижимости для нелинейного управляемого объекта «машина Дубинса». Управлением является угловая скорость поворота вектора линейной скорости. Управляющее воздействие стеснено интегральным квадратичным ограничением. На основе принципа максимума Понтрягина дано описание движений, порождающих границу множества достижимости. Движения, ведущие на границу, представляют собой глобально оптимальные эластики Эйлера. Приводятся результаты моделирования.

Введение

Под математической «машиной Дубинса» понимаем объект, передвигающийся на плоскости с постоянной величиной линейной скорости. Фазовое состояние включает в себя две координаты геометрического положения и угол направления вектора скорости. Скалярное управление u имеет смысл мгновенной угловой скорости поворота. Управление стеснено на промежутке $[0, t_f]$ интегральным квадратичным ограничением

$$\int_0^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu \quad (1)$$

с заданным значением $\mu > 0$. В работе приводятся результаты численного построения множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f . Опираемся на опыт [1, 2] аналитического описания и численного построения множества достижимости для случая геометрических ограничений $|u(t)| \leq \mu$.

Движения, ведущие на границу множества достижимости при заданном интегральном ограничении (так же, как и в случае геометрических ограничений) удовлетворяют [3] принципу максимума Понтрягина. Такие управления (за исключением тождественно равного нулю управления) доставляют равное μ минимальное значение интегральному функционалу

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} u^2(t) dt. \quad (2)$$

Соответствующие этому функционалу экстремальные движения были классифицированы Л. Эйлером [4] и называются эластичными Эйлера.

Сопряжённая система дифференциальных уравнений в принципе максимума Понтрягина одна и та же для интегральных и геометрических ограничений. Поэтому можем использовать разработанный ранее метод построения множества достижимости при геометрических ограничениях также и для интегральных ограничений. Принципиальное отличие состоит в том, что в случае геометрических ограничений многие вычисления можно производить в явном виде при помощи элементарных функций, а в случае интегральных ограничений аналитические вычисления крайне затруднены в силу необходимости использования специальных эллиптических функций. Тем не менее, численные построения множества достижимости $G(t_f)$ возможны. В этом состоит цель работы. Полученные при построении границы множества $G(t_f)$ результаты дополняют исследования М.И.Зеликина [5], Ю.Л. Сачкова и А.А. Ардентова [6], связанные с эластичными Эйлера.

Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (3)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения, φ — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси x . Величина скорости равна единице. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, \infty)$. Начальный момент времени t_0 полагаем равным нулю.

Начальные значения $x(t_0)$, $y(t_0)$, $\varphi(t_0)$ также считаем нулевыми. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ являются измеримые интегрируемые функции времени, удовлетворяющие интегральному ограничению (1).

Множество достижимости $G(t_f)$ в момент времени $t_f > t_0$ есть совокупность всех точек $(x, y, \varphi)^T$ трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (3) в момент t_f при помощи некоторого допустимого управления. Обозначим через $G_\varphi(t_f)$ двумерное сечение множества $G(t_f)$, отвечающее значению φ угловой координаты. Если некоторая точка $(x, y)^T$ принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$, то точка $(x, y, \varphi)^T$ принадлежит $\partial G(t_f)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Символ ∂ означает границу множества.

Требуется построить множество достижимости $G(t_f)$.

Принцип максимума Понтрягина

Из общих результатов математической теории управления следует, что множество достижимости $G(t_f)$ замкнуто и ограничено. Очевидно, что управление $u(t) \equiv 0$ ведёт на границу множества достижимости. В работе [3] показано, что для любой точки на границе множества достижимости, в которую ведёт управление не равное тождественно нулю, выполнен принцип максимума Понтрягина, записанный для задачи оптимизации на движениях системы (3) с фиксированными краевыми условиями в моменты t_0 , t_f и функционалом (2). При этом рассматриваемое движение доставляет равный μ минимум функционалу.

Запишем соотношения принципа максимума для задачи минимизации функционала $J(u(\cdot))$ при оговоренных краевых условиях в системе (3) (см., например, [3], [5]). Пусть $u^*(\cdot)$ — не равное тождественно нулю допустимое управление, $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$ — соответствующее движение системы (3) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t). \quad (4)$$

Принцип максимума означает, что если $u^*(\cdot)$ — минимизирующее управление, то существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ системы (4), для которого почти всюду на промежутке $[t_0, t_f]$ выполнено равенство $u^*(t) = \psi_3^*(t)/2$.

Отметим, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^* . Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ на промежутке $[t_0, t_f]$. Следовательно, в этом случае $u^*(t)$ есть постоянное управление, и оно задаётся формулой $u^*(t) = \sqrt{\mu/t_f}$. Такое управление определяет одноточечное сечение $G_\varphi(t_f)$ для максимально возможного значения $\varphi = \varphi_{\max} = \sqrt{\mu t_f}$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^* , ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (3) и (4), можно записать выражение $\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C$. Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \quad (5)$$

Прямая переключения (5) не является универсальной: при смене движения, удовлетворяющего принципу максимума, изменяется, вообще говоря, и прямая переключения.

Движения, ведущие на границу множества достижимости

Подчеркнём, что сопряжённая система в принципе максимума имеет тот же вид, что и в задаче построения множества достижимости при геометрических ограничениях на мгновенные значения управления [1, 2]. При этом тем же самым остаётся и уравнение для прямой переключения. Используя подход, изложенный в [1, 2], можно выделить типы управлений (удовлетворяющих принципу максимума) с не более, чем двумя сменами знака управляющего воздействия, которыми можно ограничиться при построении границы множества достижимости $G(t_f)$.

Учитывая симметрию задачи, рассматриваем сечения $G_\varphi(t_f)$ лишь для значений $\varphi \in [0, \varphi_{\max}]$. При построении таких сечений главным образом опираемся (так же, как и в случае геометрических ограничений) на следующие типы управлений: U1 — управления, в силу которых движения не пересекают прямую переключения; U2, U3 — управления, в силу которых движения пересекают прямую переключения один раз (управления изменяют знак с «-» на «+» и с «+» на «-» соответственно); U6 — управления, в силу которых движения пересекают прямую переключения два раза (соответствующее управление дважды изменяет знак).

Для любого сечения $G_\varphi(t_f)$ при $\varphi \geq 0$ каждому типу управления соответствует однопараметрическая кривая, состоящая из кончиков движений системы (3), удовлетворяющих принципу максимума. Получаемые

кривые обозначим A_1, A_2, A_3 и A_6 . Доказывается, что граница сечения $G_\varphi(t_f)$ формируется из кусков этих кривых. При $\varphi = 0$ кривая A_1 отсутствует.

Результаты моделирования

На рис.1 для $\mu = 100$ и двух значений $t_f = 0,5, t_f = 0,95$ показаны сечения $G_\varphi(t_f)$ множества достижимости при $\varphi = 0$. Множество $G_\varphi(t_f)$ симметрично относительно оси x . Кривые A_2, A_3, A_6 выделены цветом. Для левого рисунка граница сечения состоит из объединения указанных кривых. Для правого рисунка граница сечения не полностью включает в себя кривые A_2 и A_3 . Получаемое здесь сечение не является односвязным. Его внешняя граница образуется частями кривых A_2 и A_3 , выходящими из одной и той же точки на оси x (такая точка соответствует управлению $u \equiv 0$) до точки их первого пересечения. Внутренняя граница сечения состоит из кривой A_6 и кусков кривых A_2 и A_3 после второй точки пересечения. Неодносвязность сечения $G_\varphi(t_f)$ приводит к неодносвязности трёхмерного множества $G(t_f)$ в целом. При фиксированном μ неодносвязность сохраняется на очень малом промежутке времени. Аналогичные факты имели место и в случае геометрического ограничения на управление.

На рис.1 пунктиром показаны траектории, которые ведут в точки $e_1 - e_5$, отмеченные на границе сечений $G_\varphi(t_f)$. Все траектории выходят из нулевой начальной точки с направлением касательной вдоль оси x и приходят в конечные точки с такой же касательной. Траектории представляют собой глобально оптимальные по функционалу (2) эластики Эйлера.

В докладе будут показаны дополнительные сечения $G_\varphi(t_f)$ для различных значений $\varphi \geq 0$.

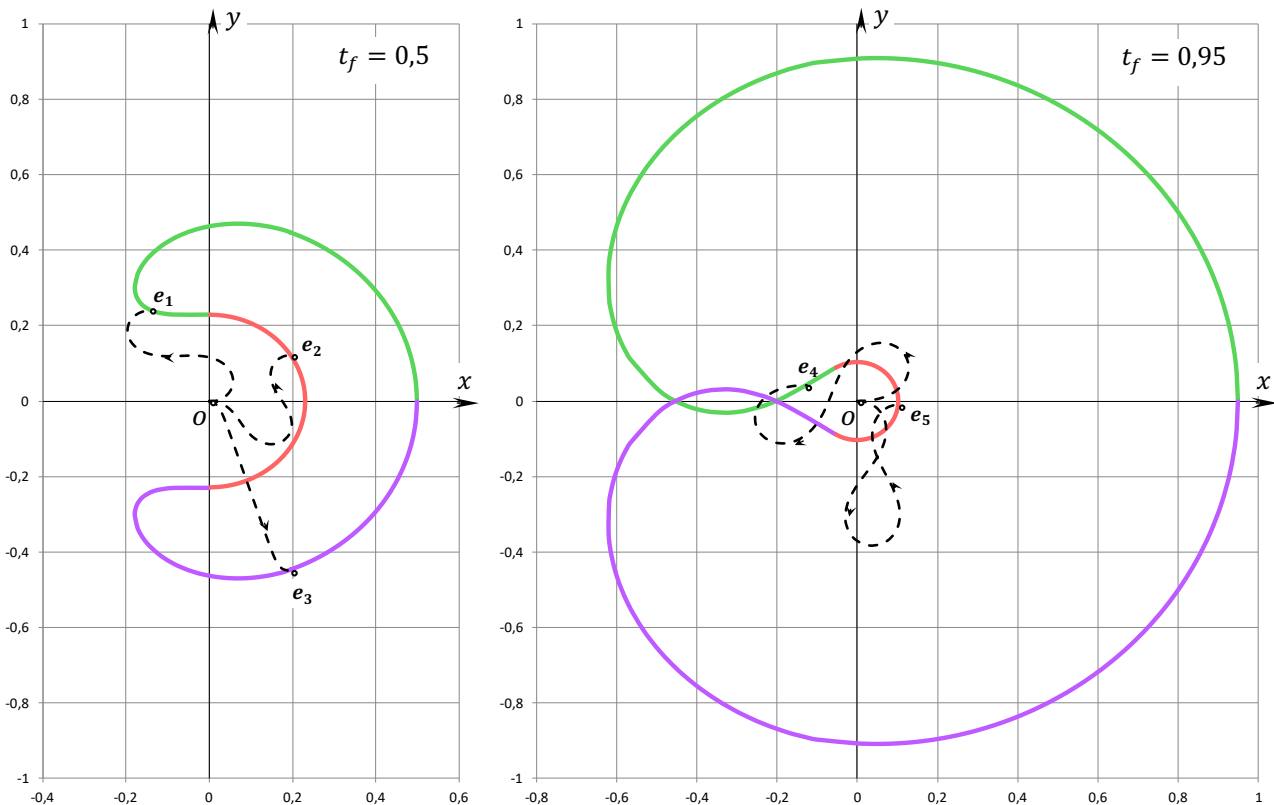


Рис. 1. Формирование границы сечений множества достижимости по угловой координате: два примера для $\varphi = 0$.

Заключение

Структура трёхмерного множества достижимости при интегральных ограничениях имеет много общего со структурой множества достижимости при геометрических ограничениях, хотя и является более сложной. Движения, ведущие из начальной фазовой точки на границу множества достижимости представляют собой эластики Эйлера. Каждая из них доставляет глобальный минимум интегральному квадратичному функционалу (2). Для всех граничных точек множества достижимости, за исключением точки, соответствующей прямолинейному движению при $u \equiv 0$, значение минимума квадратичного функционала (2) равно μ .

Литература

1. В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. 8–16.
2. V.S. Patsko, A.A. Fedotov. Three-dimensional Reachable Set for the Dubins Car: Foundation of Analytical Description // Commun. Optim. Theory. 2022. V. 2022. Article ID 23. 1–42.
3. М.И. Гусев, И.В. Зыков. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-га математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. 103–115.
4. Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
5. М. И. Зеликин. Теория и приложения задачи об эйлеровых эластичках // УМН, 2012, Т. 67, вып. 2, 93–108.
6. А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков. Решение задачи Эйлера об эластичках // АиТ, 2009, вып. 4, 78–88.

КОНФЛИКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Петров Н.Н., Можегова Е.С.

Удмуртский университет, Ижевск, Россия
kma3@list.ru

Аннотация. В конечномерном евклидовом пространстве в заданной временной шкале рассматривается задача конфликтного взаимодействия группы преследователей с одним или несколькими убегающими. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Введение

При исследовании конфликтно управляемых процессов можно выделить методы, направленные на построение оптимальных стратегий [1], с одной стороны, и на гарантированный результат [2] - с другой. К последним относятся, например, метод Л.С. Понтрягина и метод разрешающих функций. Одним из направлений исследований является поиск новых классов задач для анализа которых применимы ранее разработанные методы, в частности, метод разрешающих функций.

В ряде работ было отмечено, что некоторые результаты, полученные отдельно для теорий дифференциальных и разностных уравнений можно рассматривать с единых позиций, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замкнутых подмножествах R^1 , называемых временными шкалами. В работе получены достаточные условия разрешимости задачи преследования для новых классов дифференциальных игр, описываемых уравнениями в заданной временной шкале.

Линейная задача преследования в заданной временной шкале

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество T такое, что $\sup\{t \mid t \in T\} = +\infty$ называется временной шкалой.

Пусть задана временная шкала T .

Определение 2. Функция $f : T \rightarrow R^1$ называется дифференцируемой в точке $t \in T$, если существует число $\gamma \in R^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что $|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon |\sigma(t) - s|$ для всех $s \in T \cap W$, где $\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\}$. Число γ в этом случае называется Δ производной функции f в точке t и обозначается $f^\Delta(t)$.

В пространстве $R^k, k \geq 2$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m , описываемая системой вида

$$z_{ij}^\Delta = a_{ij} z_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad u_i, v_j \in V,$$

где $z_{ij}, u_i, v_j, z_{ij}^0 \in R^k, a_{ij} \in R^1, I = \{1, \dots, n\}, J = \{1, \dots, m\}, V$ - выпуклый компакт R^k .

Определение 3. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего, если существует момент T_0 , квазистратегии $U_i, i \in I$ преследователей $P_i, i \in I$, такие, что для любых Δ - измеримых функций $v_j(\cdot), v_j(t) \in V, j \in J$ найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0] \cap T$, номера $l \in I, s \in J$, для которых $z_{ls}(\tau) \in M_{ls}$, где M_{ls} - заданные выпуклые компакты.

Введем следующие обозначения. $\xi_0(z) = z, \xi_h(z) = \ln(1 + zh)/h$, если $h \neq 0, \mu(t) = \sigma(t) - t$,

$$e_a(t, s) = \exp\left\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(a) \Delta \tau\right\}, \quad \alpha(z_{ij}^0, v_j) = \max\{\alpha \geq 0 : -\alpha(z_{ij}^0 - M_{ij}) \cap (V - v_j) \neq \emptyset\},$$

$$T_j(z^0) = \min\{t \in T : t > t_0, \inf_{v_j(\cdot)} \max_{i \in I} \int_{t_0}^t e_{a_{ij}}^{-1}(\sigma(\tau), t_0) \alpha(z_{ij}^0, v_j(\tau)) \Delta \tau \geq 1\}.$$

Теорема 1. Пусть существует $j \in J$ такой, что $T_j(z^0) < +\infty$, где $z^0 = \{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\}$. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Обозначим через $IntA, coA$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A .

Следствие 1 [3]. Пусть $a_{ij} = 0, M_{ij} = \{0\}$ для всех $i \in I, j \in J$, существует $p \in J$ для которого $0 \in Intco\{z_{ip}^0, i \in I\}$, V – строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Следствие 2 [4]. Пусть $a_{ij}^0 \leq 0, M_{ij} = \{0\}$ для всех $i \in I, j \in J, T = R^1$, существует $p \in J$ для которого $0 \in Intco\{z_{ip}^0, i \in I\}$, V – строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Пример. Пусть шкала имеет вид $T = \{k\tau : k = 0, 1, \dots\}$, где $\tau > 0$. Считаем, что $M_{ij} = \{0\}, a_{ij} = a$ для всех $i \in I, j \in J$.

Утверждение. Пусть $a\tau \in (-1; 0]$ и существует $l \in J$ для которого $0 \in Intco\{z_{il}^0, i \in I\}$. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Преследование жестко скоординированных убегающих

В данном разделе будем предполагать, что все убегающие используют одно и то же управление.

В пространстве $R^k, k \geq 2$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m , с законами движения

$$x_i^\Delta = u_i, x_i(t_0) = x_i^0, y_j^\Delta = v, y_j(t_0) = y_j^0, u_i, v \in V = \{v : \|v\| \leq 1\}.$$

Определение 4. Векторы a_1, \dots, a_q образуют положительный базис R^k , если для любого вектора $x \in R^k$ существуют неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, такие, что $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_q a_q$.

Теорема 2. Пусть $n \geq k$, в наборе векторов $\{x_i^0 - y_j^0, i \in I, j \in J\}$ существует $k + 1$ вектор, образующий положительный базис R^k . Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Определение 5. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка, если существуют момент $T_0 \in T$, квазистратегии U_1, \dots, U_n преследователей P_1, \dots, P_n такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V, t \in [t_0, T_0] \cap T$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) найдутся номера $p, q \in I, l \in J$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$ для которых $x_p(\tau_1) = y_l(\tau_1), x_q(\tau_2) = y_l(\tau_2)$;
- б) найдутся номера $p, q \in I, l, r \in J$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$ для которых $x_p(\tau_1) = y_l(\tau_1), x_q(\tau_2) = y_r(\tau_2)$.

Теорема 3. Пусть существуют множество $I_0 \subset I, |I_0| = n - 2$, номера $l, r \in J$, такие, что для любого $p \in I_0$

$$Intco\{x_i^0, i \in I_0, i \neq p\} \cap co\{y_l^0, y_r^0\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка.

Поимка заданного числа убегающих

В данном разделе предполагается, что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Цель группы преследователей – поймать заданное число убегающих, причем поимку каждого убегающего должны осуществить не менее, чем заданное число

преследователей.

В пространстве $R^k, k \geq 2$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m , с законами движения

$$x_i^\Delta = u_i, x_i(t_0) = x_i^0, y_j^\Delta = v_j, y_j(t_0) = y_j^0, u_i, v_j \in V.$$

Определение 6. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка (при $r = 1$ поимка) не менее q убегающих, если существует момент $T_0 > t_0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t), t \in [t_0, +\infty), j \in J$ убегающих найдутся допустимые управления преследователей $u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [t_0, +\infty) \cap T, j \in J)$, обладающие следующим свойством: существуют множества $M \subset J, |M| = q, \{N_\alpha, \alpha \in M\}, N_\alpha \subset I, |N_\alpha| = r$ для всех $\alpha \in M, N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$ для всех $\alpha \neq \beta$ такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T_0 осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β , причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными. Условие поимки преследователем убегающего является равенство при некотором. Условием поимки убегающего E_β преследователем P_α является равенство $x_\alpha(\tau) = y_\beta(\tau)$ при некотором $\tau > 0$.

Пусть K – конечное подмножество множества натуральных чисел. Обозначим

$$\Omega_K(s) = \{(i_1, \dots, i_s) : i_1, \dots, i_s \in K \text{ и попарно различны}\},$$

$$z_{\alpha\beta}^0 = x_\alpha^0 - y_\beta^0, \lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geq 0 : -\lambda z \in V - v\}.$$

Теорема 4. Пусть для каждого $l \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I, |N| = n - rl$, найдется множество $M \subset J, |M| = q - l$, что

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha\beta}^0, v) > 0 \text{ для всех } \beta \in M.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 5. Пусть V – строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $l \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I, |N| = n - rl$, найдется множество $M \subset J, |M| = q - l$, что для всех $\beta \in M$ справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \text{Intco}\{z_{\alpha\beta}^0, \alpha \in \Lambda\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Заключение

Представлены новые результаты о разрешимости задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в предположении, что движения участников описываются уравнениями в заданной временной шкале.

Литература

1. Н. Н. Красовский, А.И. Субботин // Позиционные дифференциальные игры. 1974. 456 с.
2. А. А. Чикрий // Конфликтно управляемые процессы. 1992. 384 с.
3. Н. Н. Петров Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах//Вестник Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки, 30:2 2020. 249-258
4. Б. Н. Пшеничный, И. С. Раппопорт Об одной задаче группового преследования//Кибернетика, 6 1979. 145-146

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОСРЕДСТВОМ ОТНОСИТЕЛЬНОГО КРУГОВОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ВНУТРЕННИХ МАСС

Рачков А.А.

Московский авиационный институт, Москва, Россия

rachkova@mai.ru

Аннотация. Рассматривается движение капсульного робота, моделируемого системой из твёрдого тела (корпуса) и двух внутренних подвижных масс. Между опорной плоскостью и корпусом действует сила сухого трения. Подвижные массы совершают в вертикальной плоскости относительное круговое движение по окружностям с общим центром, совпадающим с центром масс корпуса. В работе исследованы периодические режимы движения такой системы. Дано их качественное описание и в пространстве параметров построены области их существования.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта РФФИ № 19-11-00116.

Введение

Исследование динамики механических систем с внутренними подвижными элементами представляет большой интерес для разработки принципов движения и проектирования мобильных капсульных роботов. Динамике мобильных систем с внутренними подвижными элементами посвящено много работ. Подробную библиографию по данному вопросу см. в [1]. Строгое теоретическое исследование задач динамики и оптимального управления движением механических систем, состоящих из корпуса (несущего тела) и внутренних подвижных масс, было начато в работах [2, 3]. В [4] построены траектории относительного движения внутренней массы, обеспечивающие оптимальное управление корпусом. Построению оптимального управления движением корпуса при прямолинейном относительном движении внутренней массы посвящены работы [5, 6].

В работах [7–10] рассматривалось движение системы, состоящее из корпуса и одной внутренней подвижной массы. Предполагалось, что подвижная масса совершает в вертикальной плоскости относительное круговое движение по окружности, центр которой совпадает с центром масс корпуса. В частности, были найдены все возможные режимы движения такой системы без отрыва от опорной плоскости и определены условия их существования.

В данной работе методика, по которой проводились исследования в [7–10], была расширена и адаптирована для исследования движения системы, состоящей из корпуса и двух подвижных масс, перемещающихся в вертикальной плоскости по окружностям с общим центром, совпадающим с центром масс корпуса (рис. 1).

Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела (корпуса), расположенного на горизонтальной шероховатой плоскости, и двух внутренних масс, совершающих внутри тела относительное движение в вертикальной плоскости по окружностям, центры которых находятся в центре масс тела. Предполагается, что между горизонтальной шероховатой поверхностью и плоской гранью корпуса действует сила сухого кулоновского трения, а движение корпуса происходит без отрыва от опорной плоскости. Данную систему можно рассматривать в качестве простейшего прототипа капсульного робота, движущегося посредством перемещения внутренних элементов.

Можно показать, что если отношение угловых скоростей кругового движения подвижных масс является рациональным числом, то исследование исходной системы возможно свести к исследованию эквивалентной системы, состоящей из корпуса и одной подвижной массы. Перемещение подвижной массы в эквивалентной системе происходит по некруговой замкнутой траектории, обладающей осью симметрии. Конкретный вид этой траектории зависит от двух параметров: Z – отношения модулей сил инерции, возникающих при перемещении подвижных масс исходной системы, Q – отношения угловых скоростей кругового движения масс. Положение оси симметрии этой траектории определяется значением угла γ , который определяет наклон прямой, соединяющей положения подвижных масс исходной системы в моменты времени, когда она проходит через центр масс корпуса (см. рис. 1). Пример траекторий движения подвижной массы эквивалентной системы при различных значениях параметров Q и Z приведён на рис. 2.

В данной работе исследовано движение системы в одном из наиболее простых случаев – подвижные массы движутся в противоположных направлениях с одинаковыми по модулю угловыми скоростями кругового движения (параметр Q равен -1).

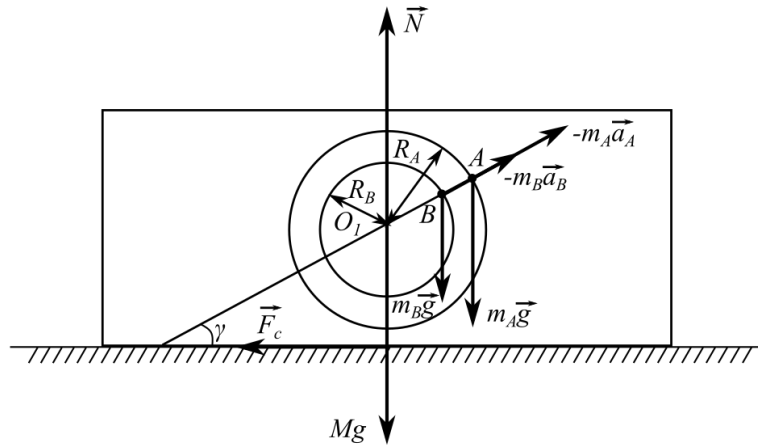


Рис. 1. Схема рассматриваемой механической системы.

Периодические режимы движения корпуса

Исследование проведено для различных значений параметра Z , включая характерные, соответствующие качественно различным траекториям и направлениям движения подвижной массы эквивалентной системы: $Z=1$ – движение по прямой; $0 < Z < 1$ – движение по эллипсу по часовой стрелке, $1 < Z < \infty$ – движение по эллипсу против часовой стрелки.

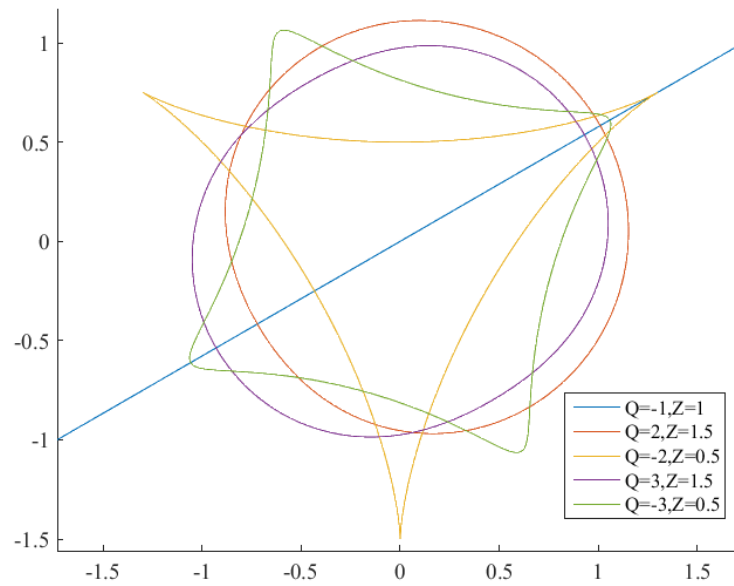


Рис. 2. Примеры траекторий движения подвижной массы эквивалентной системы.

Для всех рассмотренных значений параметра Z было показано существование следующих периодических режимов движения:

- Корпус перемещается в положительном направлении, совершая только одну остановку за период, после которой следует интервал покоя.
- Корпус перемещается в отрицательном направлении, совершая только одну остановку за период, после которой следует интервал покоя.

- Корпус перемещается сначала в положительном направлении, совершает остановку и сразу начинает двигаться в отрицательном направлении. Затем корпус совершает остановку, после которой следует интервал покоя.
- Корпус перемещается сначала в отрицательном направлении, совершает остановку и сразу начинает двигаться в положительном направлении. Затем корпус совершает остановку, после которой следует интервал покоя.
- Корпус перемещается сначала в положительном направлении, совершает остановку, после которой следует интервал покоя. Затем корпус перемещается в отрицательном направлении совершает остановку, после которой следует интервал покоя.
- Корпус перемещается сначала в положительном направлении, совершает остановку и сразу начинает двигаться в отрицательном направлении. Затем корпус совершает остановку, и движение повторяется снова.

Для всех указанных режимов найдены условия их существования. Сделан вывод о том, что не существует других режимов движения корпуса без отрыва от поверхности.

Отметим, что наличие в системе двух подвижных масс приводит к появлению новых режимов движения, при которых корпус перемещается только в одном направлении. При наличии в системе одной подвижной массы, движущейся по круговой траектории, такие режимы в случае изотропного сухого трения между корпусом и плоскостью не возможны.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Б.С. Бардину за полезные обсуждения результатов работы.

Выводы

Для всех возможных значений параметров задачи проведено исследование периодических режимов движения корпуса. Установлено, что при фиксированных значениях параметров всегда существует единственный периодический режим. Дано полное качественное описание всех типов периодических режимов и в пространстве параметров построены области их существования.

Литература

1. Ф. Л. Черноусько, Н.Н. Болотник // Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2022. 464 с.
2. Ф. Л. Черноусько // О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу, Докл. РАН, 405:1 2005. 56–60
3. Ф. Л. Черноусько // Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы, Прикл. мат. мех., 70:6 2006. 915–941
4. Ф. Л. Черноусько // Оптимальное управление движением двухмассовой системы Докл. РАН, 480:5 2018. 528–532
5. Н. Н. Болотник, Т. Ю. Фигурин, Ф. Л. Черноусько // Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы, Прикл. мат. мех., 71:1 2012. 3–22
6. Н. Н. Болотник, Ф. Л. Черноусько // Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел, Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН, 16:5 2010. 213–222
7. Б.С. Бардин, А.С. Панёв // О поступательном прямолинейном движении твердого тела, несущего подвижную внутреннюю массу, Современная математика. Фундаментальные направления, 65:4 2019. 557–592
8. Bardin B.S., Panev A.S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018, Vol. 14, no. 4, pp. 519–542.
9. Bardin B.S., Panev A.S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // Vibroengineering PROCEDIA, 2016, Vol. 8. pp 135–141.
10. Boris S Bardin and Alexey A Rachkov 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 1959 012005.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С ВОЗДУШНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ НА УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТАХ ПЛАНЕТ С УЧЕТОМ ВЕТРА

Сагалаков А.Э.^{1,2}, Филатьев А.С.^{1,3}

- 1 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
2 - Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского
3 - Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия
sag-al@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача оптимизации управления космическим аппаратом с воздушным электрореактивным двигателем с учетом ветра для минимизации энергетических затрат на поддержание круговых солнечно-синхронных орбит (ССО), при условии непрерывной компенсации сопротивления атмосферы. Задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Нахождение оптимального управления сводится к решению нелинейного уравнения, не содержащего сопряженных переменных. Проведено моделирование полета КА на круговых ССО для Земли и Марса. Показано, что оптимальный учет атмосферных течений позволяет уменьшить энергопотребление до 10% для Земли и до 20% для Марса.

Введение

Космические аппараты (КА) на ультранизких орбитах (УНО) планет имеют существенные преимущества для решения традиционных задач наблюдения за поверхностью планеты и связи. Длительное поддержание спутников на таких орбитах возможно с помощью воздушных электрореактивных двигателей (ВЭРД), которые используют заборные газы разреженной атмосферы в качестве рабочего тела для создания тяги. Одним из факторов, действующих при полете КА на УНО, является ветер, который оказывает влияние не только на аэродинамическое сопротивление КА D , но и на тягу ВЭРД T . Скорость ветра может достигать несколько сотен метров в секунду. Ветер w создает угол α между вектором скорости КА относительно набегающего потока V_∞ и продольной осью КА (рис. 1). Появления данного угла атаки приводит к увеличению аэродинамического сопротивления и уменьшению тяги ВЭРД, из-за сокращения притока рабочего тела в двигатель и снижению степени его компрессии за воздухозаборником (ВЗ). Учет влияния ветра на характеристики КА с ВЭРД и определяет постановку рассматриваемой задачи.

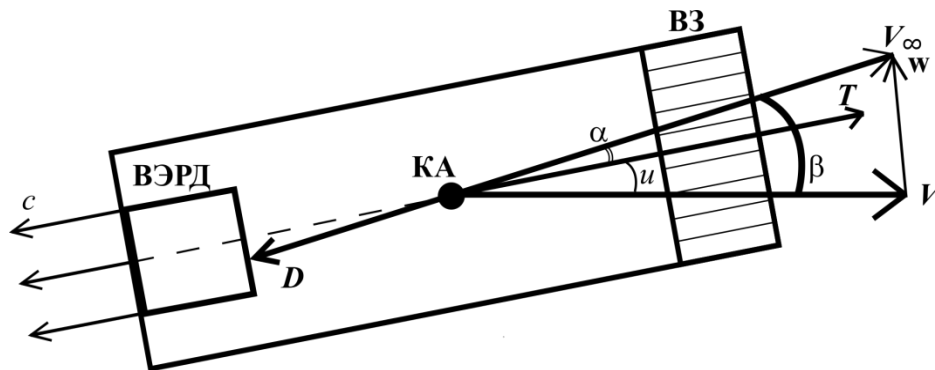


Рис. 1. Схема влияния ветра на КА.

Постановка задачи

Рассмотрим полет КА с ВЭРД по круговой орбите как движение материальной точки над сферической планетой в условиях ветра. Движение описывается в геоцентрической системе координат с началом координат в гравитационном центре. Задача состоит в определении оптимального управления вектором тяги ВЭРД для поддержания солнечно-синхронной круговой орбиты (ССО) с минимальным расходом энергии с учетом зависимости тяги ВЭРД и аэродинамического сопротивления КА от угла атаки. Уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= V / R, \\ \dot{E} &= W_{SA} - W_{ABEP},\end{aligned}\tag{1}$$

где θ – истинная аномалия; V – орбитальная скорость полета; R – расстояние от центра планеты до

КА; E – энергия; W_{SA} – мощность, получаемая от солнечных панелей; $W_{ABEP} = \frac{T \cdot c}{2\eta_T}$ – потребляемая мощность

ВЭРД. Для поддержания круговой орбиты выполняется условие компенсации аэродинамического сопротивления тягой ВЭРД:

$$T \cos u = D \cos \beta, \quad (2)$$

где η_T – общий тяговый к.п.д.; $T = c\eta_C\rho V_\infty A_{in} k_p$ – тяга ВЭРД; η_C – эффективность забора газа; $k_p(\alpha)$ – коэффициент эффективности ВЗ, зависящий от угла атаки α ; A_{in} – площадь входного сечения ВЗ; c – средняя скорость истечения плазменной струи из ВЭРД; V_∞ – скорость набегающего потока; ρ – плотность воздуха; $D = A_{SC} C_D \rho V_\infty^2 / 2$ – аэродинамическое сопротивление КА; u – угол между вектором тяги T и плоскостью орбиты; β – угол между вектором орбитальной скорости и вектором скорости набегающего потока, A_{SC} – площадь поперечного сечения КА; $C_D(\alpha)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления КА.

Управлением в (1) и (2) являются u и c .

Зададим граничные условия. В начальный момент $t_i = 0$:

$$\theta(0) = 0, \quad E(0) = 0. \quad (3)$$

В конечный момент t_f :

$$\theta(t_f) = 2\pi. \quad (4)$$

Функционалом является энергия:

$$E(t_f) \Rightarrow \max. \quad (5)$$

Мощность, получаемую от солнечных батарей (СБ), запишем следующим образом: $W_{SA} = \varepsilon W_{SA}^0 \cos u$,

где $W_{SA}^0 = \frac{c_0^2 \eta_C A_{in} \rho V k_p}{2\eta_T} \Big|_{\alpha=0}$ – мощность от СБ, нормальных солнечному потоку, равная мощности

потребляемой ВЭРД для поддержания круговой орбиты без ветра; $c_0 = \frac{C_D|_{\alpha=0} V A_{SC}}{2\eta_C A_{in}}$ – скорость истечения для поддержания круговой орбиты без ветра; ε – коэффициент нормировки получаемой от СБ мощности. Так, при $\varepsilon = 0$ считаем, что энергия не поступает от солнечных панелей (используются внутренние источники энергии).

При $\varepsilon = 1$ мощность от СБ равна W_{SA}^0 .

Модели зависимости аэродинамического сопротивления КА и тяги ВЭРД от угла атаки в свободномолекулярном потоке взяты из [1].

Для Земли используется модель атмосферы ISO/FDIS 14222 [2], а для Марса - Mars Climate Database (MCD) [3]. Для Земли используется математическая модель ветра [4]. Для Марса модель ветра берется из MCD. Данные модели описывают зависимость меридиональной и зональной компонент скорости горизонтального ветра от следующих параметров: геодезические координаты, высота над уровнем моря, день года, время суток, солнечная активность и др.

Оптимальное управление из условий принципа максимума Понтрягина

Задача (1)-(5) решается с помощью принципа максимума Понтрягина, согласно которому оптимальное управление находится из условия максимума гамильтониана, наряду с фазовыми, содержащий сопряженные переменные. Однако удается из этих условий исключить сопряженные переменные, так что оптимальное управление находится из решения системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c = \frac{C_D V_\infty A_{SC} \cos \beta}{2\eta_C A_{in} k_p \cos u}, \\ \frac{\rho V_\infty^3 A_{SC}^2}{8\eta_C \eta_T A_{in}} \left(\frac{C_D^2 \cos^2 \beta}{k_p^2 \cos^2 u} \left(\frac{\partial k_p}{\partial u} - 2k_p \operatorname{tg} u - 2 \frac{k_p}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial u} \right) \right) - \varepsilon W_{SA}^0 \sin u = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Так как $\alpha + u = \beta$ и скорость ветра много меньше орбитальной скорости, то можно принять, что $V_\infty = V / \cos \beta$, поэтому из (6) получим:

$$\begin{cases} c_{\text{opt}} = \frac{C_D(u_{\text{opt}})VA_{\text{SC}}}{2\eta_C A_{\text{in}} k_p(u_{\text{opt}}) \cos u_{\text{opt}}}, \\ \left(\frac{C_D^2(u)}{k_p^2(u) \cos^2 u} \left(2 \frac{k_p(u)}{C_D(u)} \frac{\partial C_D(u)}{\partial \alpha} - \frac{\partial k_p(u)}{\partial \alpha} - 2k_p(u) \operatorname{tg} u \right) - \varepsilon C_D^2 \Big|_{\alpha=0} k_p \Big|_{\alpha=0} \cos \beta \sin u \right) \Big|_{u_{\text{opt}}} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При заданных зависимостях коэффициента лобового сопротивления и тяги ВЭРД от угла атаки оптимальный угол u_{opt} определяется только углом β , который для ССО орбит на Земле может достигать $\sim 5^\circ$, а на Марсе $\sim 10^\circ$.

Из (7) видно, что оптимальная скорость истечения c_{opt} определяется явным образом через u_{opt} . Угол u_{opt} находится из решения второго нелинейного уравнения в (7) методом непрерывного продолжения решения

по параметру β . При этом, начальным приближением при $\beta^0 = 0$, согласно (7) и с учетом $\frac{\partial k_p}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$ и

$$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0, \text{ является } u_{\text{opt}}^0 = 0.$$

Анализ влияния ветра на оптимальное управление

На рис. 2 показана зависимость u_{opt} и c_{opt}/c_0 от угла β при различных значениях коэффициента ε . Видно, что u_{opt} практически совпадает с углом β для широкого диапазона значения ε . Оптимальная скорость истечения c_{opt} слабо отличается (в пределах 0.5% для Земли и 2% для Марса) от скорости истечения c_0 , необходимой для поддержания круговой орбиты при отсутствии ветра.

Проведено моделирование полета КА с ВЭРД на ССО в условиях ветра. Получено, что оптимизация управления с учетом ветра позволяет увеличить функционал до 10% для Земли и до 20% для Марса. Сравнение проводилось с полетом КА в условиях ветра, но при $u \equiv 0$.

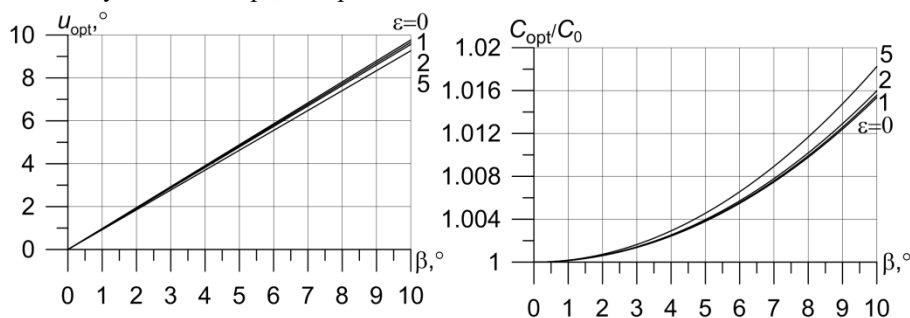


Рис. 2. Зависимость оптимального управления от угла между вектором орбитальной скорости и вектором скорости набегающего потока β .

Заключение

Рассмотрена задача оптимизации управления КА с ВЭРД с учетом ветра для минимизации энергетических затрат на поддержание круговых орбит при условии непрерывной компенсации сопротивления атмосферы. Показано, что ветер оказывает влияние не только на аэродинамическое сопротивление КА, но и характеристики тяги ВЭРД. С помощью принципа максимума Понтрягина получены условия для нахождения оптимального управления вектором тяги, не содержащие сопряженные переменные. Численное моделирование показало, что оптимальный учет влияния ветра позволяет уменьшить энергопотребления до 10% для Земли и до 20% для Марса.

Литература

1. Filatyev A.S., Yanova O.V. The control optimization of low-orbit spacecraft with electric ramjet, Acta Astronautica, V 158, May 2019, pp. 23-31.
2. ISO 14222 (2013). ISO 14222 space environment (natural and artificial). Earth upper atmosphere. Technical Report ISO 14222:2013, ISO.
3. Forget F., et al. A Climate Database for Mars. J. Geophys. Res, V 104, No E10. 1999.
4. Drob D. P., et al. An update to the Horizontal Wind Model (HWM): The quiet time thermosphere. Earth and Space Science, 2, 2015.

ПРОВЕРКА НЕОБХОДИМОГО УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕЖИМА ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ СОЛНЕЧНЫМ САМОЛЕТОМ

Серохвостов С.В.¹, Чуркина Т.Е.²

1 - Московский физико-технический институт, Москва, Россия

2 - Московский авиационный институт, Москва, Россия

serokhvastov@mail.ru

Аннотация. Для задачи оптимального управления траекторией солнечного самолета с целью максимизации бортовой энергии в конце полета на основе ранее полученных результатов исследованы необходимые условия оптимальности типа Кэлли в случае реализации особого управления сразу по двум управляющим переменным. Показано, что ранее найденные решения данной задачи удовлетворяют необходимым условиям оптимальности.

Исследуется задача оптимального управления солнечным самолетом с целью максимизации бортового запаса энергии в конце полета.

Ранее [1, 2] были получены варианты частей оптимальной траектории полета, среди которых основным, наиболее продолжительным режимом было особое управление сразу по двум управляющим переменным. Данное управление требуется проверить на удовлетворение необходимому условию оптимальности.

Для дальнейшего анализа приведем кратко необходимые для дальнейшего исследования основные соотношения и полученные результаты.

Рассматривалась система уравнений движения

$$\begin{cases} \frac{m}{2} \dot{Z} = W\eta - \left(C_{D0} + A \left(\frac{2mg}{\rho Z} \right)^2 \right) \rho \frac{Z^{3/2}}{2} S - mgV_Y \\ \dot{h} = V_Y \\ \dot{E} = W - I(h, t) \\ C_L \rho \frac{Z}{2} S = mg, \end{cases} \quad (1)$$

где m – масса аппарата; Z – квадрат скорости полета; W – мощность силовой установки; η – КПД силовой установки (считается константой); C_{D0} – коэффициент сопротивления при нулевой подъемной силе; A – коэффициент отвала полярны; ρ – плотность воздуха; S – площадь крыла; h – высота полета; V_Y – вертикальная компонента скорости самолета; E – энергия, потребленная от аккумулятора за время T полета; I – принимаемая мощность солнечного излучения; t – время; C_L – коэффициент подъемной силы; g – ускорение свободного падения.

Оптимизируемый функционал есть E :

$$E = \int_0^T (W - I(h, t)) dt.$$

Требуется найти минимум E .

Задача решалась с помощью принципа минимума Понтрягина, гамильтониан \mathbf{H} для управляющих переменных W и V_Y имел вид

$$\mathbf{H} = \frac{2P_Z}{m} \left(W\eta - \left(C_{D0} + A \left(\frac{2mg}{\rho Z S} \right)^2 \right) \rho \frac{Z^{3/2}}{2} S - mgV_Y \right) + P_H V_Y + (W - I(h, t)),$$

где P_Z, P_H – сопряженные переменные для Z, h , соответственно.

Условия на сопряженные переменные выглядят как

$$\dot{P}_Z = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} = - \left(- \frac{2P_Z}{m} \left(\frac{3}{2} C_{D0} \rho \frac{Z^{1/2}}{2} S - \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{3/2} \rho S} \right) \right) \quad (2)$$

$$\dot{P}_H = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial h} = - \left(- \frac{2P_Z}{m} \left(C_{D0} \frac{Z^{3/2}}{2} S \frac{\partial \rho}{\partial h} - \frac{A(2mg)^2}{2Z^{1/2} \rho^2 S} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) + \left(- \frac{\partial I}{\partial h} \right) \right) \quad (3)$$

Функция \mathbf{H} линейна по W и V_Y , поэтому возможны особые управления по W и V_Y :

– по W (s – функция переключения):

$$s = \frac{2\eta P_Z}{m} + 1 = 0, \quad \dot{s} = \frac{2\eta \dot{P}_Z}{m} = 0 \quad (4)$$

– по V_Y (p – функция переключения):

$$p = -2P_Z g + P_H = 0, \quad \dot{p} = -2\dot{P}_Z g + \dot{P}_H \quad (5)$$

Исследовался случай особого управления сразу по двум управляющим переменным. Принимая во внимание (2), получаем

$$\dot{s} = \frac{4\eta P_Z}{m^2} \left(\frac{3}{2} C_{D0} \rho \frac{Z^{1/2}}{2} S - \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{3/2} \rho S} \right) = 0.$$

Из (4) $P_Z \neq 0$, поэтому

$$\frac{3}{2} C_{D0} \rho \frac{Z^{1/2}}{2} S - \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{3/2} \rho S} = 0. \quad (6)$$

Условие особого управления по V_Y (5) при условии особого управления по W (4) совместно с (3), даёт

$$\dot{P}_H = \frac{-1}{\eta} \left(C_{D0} \frac{Z^{3/2}}{2} S \frac{\partial \rho}{\partial h} - \frac{A(2mg)^2}{2Z^{1/2} \rho^2 S} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) + \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right) = 0 \quad (7)$$

Условия (6), (7) приводят к уравнениям

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{A}}, \quad V = -\sqrt{\frac{3}{AC_{D0}}} \frac{\eta \rho}{2mg} \frac{\partial I}{\partial h}, \quad C_{D0} V^3 S \frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{\partial I}{\partial h} \eta.$$

Целью настоящего исследования является проверка полученного решения на необходимое условие экстремальности типа Келли [3] для минимума гамильтониана:

$$Q = \sum_{m,s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_s} \right) \right) \eta_m \eta_s \leq 0$$

где Q – квадратичная форма для переменных η_m, η_s .

Найдем выражения для соответствующих производных $\frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_s} \right) \right)$, где в качестве переменных управления u_i в рассматриваемой задаче выступают W и V_Y . Для упрощения записей введем обозначения

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_s} \right) \right) = f_{u_m, u_s}$$

Итак,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} \right) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\eta \dot{P}_Z}{m} \right) = \frac{4\dot{P}_Z \eta}{m^2} \left(\frac{3}{2} C_{D0} \rho \frac{Z^{1/2}}{2} S - \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{3/2} \rho S} \right) + \frac{4P_Z \eta}{m^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} C_{D0} \rho \frac{Z^{1/2}}{2} S - \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{3/2} \rho S} \right)$$

Так как для условия особого управления (4) $\dot{P}_Z = 0$, то

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} \right) = \frac{4P_Z \eta}{m^2} \left(\frac{3}{2} C_{D0} \rho \frac{\dot{Z}}{4Z^{1/2}} + \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2 \dot{Z}}{2Z^{5/2} \rho S} + \frac{3}{2} C_{D0} \frac{\partial \rho}{\partial h} \frac{Z^{1/2}}{2} S \dot{h} + \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{3/2} \rho^2 S} \frac{\partial \rho}{\partial h} \dot{h} \right).$$

Принимая во внимание (1), (4) с учетом

$$\dot{h} = V_Y, \\ \dot{Z} = \frac{2\eta}{m} W - 2gV_Y + \dots,$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от управляющих переменных, можно получить

$$f_{W,W} = \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} \right) \right) = -\left(\frac{2}{m} \right)^2 \eta \left(\frac{3}{2} C_{D0} \rho S \frac{1}{4Z^{1/2}} + \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{A(2mg)^2}{2Z^{5/2} \rho S} \right) = -\frac{6\eta}{m^2} \frac{C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \quad (8)$$

и

$$f_{V_Y, W} = \frac{\partial}{\partial V_Y} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} \right) \right) = -\frac{2}{m} \left(-3gC_{D0} \rho S \frac{1}{Z^{1/2}} + \frac{3}{2} C_{D0} \rho S Z^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right).$$

Далее, с учетом (4),

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial V_Y} \right) = \frac{d}{dt} (-2\dot{P}_Z g + \dot{P}_H) = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{3}{2} \frac{C_{D0} Z^{1/2} S}{2} \frac{\partial \rho}{\partial h} \dot{Z} - \frac{C_{D0} Z^{3/2} S}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial h^2} \dot{h} + 3 \frac{C_{D0} Z^{3/2} S}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)^2 \dot{h} \right) + \\ + \frac{\partial^2 I}{\partial h^2} \dot{h} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right) + \frac{2g}{\eta} \left(\frac{C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \dot{Z} + \frac{3}{2} \frac{C_{D0} \rho Z^{1/2} S}{2} \frac{\partial \rho}{\partial h} \dot{h} \right)$$

Отсюда,

$$f_{W,V_y} = \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} \right) \right) = \frac{2}{m} \left(-\frac{3}{2} C_{D0} \rho Z^{1/2} S \frac{\partial \rho}{\partial h} + 3g \frac{C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \right) = -\frac{6C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \left(\frac{1}{2\rho m} Z \frac{\partial \rho}{\partial h} - \frac{g}{m} \right) = f_{V_y, W}. \quad (9)$$

$$f_{V_y, V_y} = \frac{\partial}{\partial V_y} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial W} \right) \right) = \frac{C_{D0} S}{\eta} \left(6Z^{1/2} g \frac{\partial \rho}{\partial h} - \frac{6\rho g^2}{Z^{1/2}} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial h^2} Z^{3/2} - 3 \frac{Z^{3/2}}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 I}{\partial h^2} \quad (10)$$

Исследуем квадратичную форму Q с учетом (8) – (10), обозначая $\eta_1=x$, $\eta_2=y$:

$$Q = f_{W, W} \cdot x^2 + 2f_{W, V_y} \cdot xy + f_{V_y, V_y} \cdot y^2 = \\ = \frac{6C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \left(-\frac{x^2}{m^2} + 2 \left(\frac{1}{2\rho m} Z \frac{\partial \rho}{\partial h} - \frac{g}{m} \right) xy + \left(\frac{Zg}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial h} - g^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \rho}{\partial h^2} \frac{Z^2}{\rho^2} - \frac{1}{2} \frac{Z^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)^2 \right) y^2 \right) + \frac{\partial^2 I}{\partial h^2} y^2.$$

Выделим внутри Q полный квадрат

$$Q = -\frac{6C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \left(\frac{x}{m} + \left(g - \frac{Z}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) y \right)^2 + \frac{6C_{D0} \rho S}{Z^{1/2}} \left(\left(\frac{1}{6} \frac{\partial^2 \rho}{\partial h^2} \frac{Z^2}{\rho} - \frac{1}{4} \frac{Z^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)^2 \right) y^2 \right) + \frac{\partial^2 I}{\partial h^2} y^2. \quad (11)$$

Очевидно, что первое слагаемое всегда отрицательно. Знак второго и третьего слагаемых может быть определен только с учетом зависимостей плотности и излучения от высоты.

Для изотермической атмосферы (11–20 км над Землёй), зависимость плотности атмосферы ρ от высоты имеет вид

$$\rho = \rho_0 \exp(-h/h_0),$$

где ρ_0 , h_0 – параметры атмосферы [2]. Из этого,

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{\rho}{h_0}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial h^2} = \frac{\rho}{h_0^2}.$$

В этом случае второе слагаемое отрицательно.

Для атмосферы с линейно убывающей по высоте температурой (0-10 км)

$$\rho = \rho_1 \left(1 - \frac{\alpha h}{T_0} \right)^{4.38},$$

где ρ , α , T_0 – параметры атмосферы [2]. В этом случае также второе слагаемое также отрицательно. Считаем, что поглощение атмосферой солнечного излучения описывается законом Бугера

$$\frac{\partial I}{\partial h} = B\rho I,$$

где I – интенсивность излучения, B – коэффициент поглощения [2] атмосферы. В этом случае знак второй производной определяется константами атмосферы. Для атмосферы Земли

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial h^2} \right) < 0,$$

что подтверждается экспериментальными данными [4].

В случае положительности второй производной от излучения по высоте следовало бы более тщательно проанализировать величины второго и третьего слагаемых в формуле (11).

Итак, в рассматриваемом случае для атмосферы Земли квадратичная форма Q отрицательна при любых x и y . Следовательно, необходимое условие оптимальности полученного варианта траектории доказано.

Литература

1. С.В.Серохвостов, Т.Е.Чуркина // Исследование законов оптимального управления самолетом на солнечной энергии в многодневном полете, Сборник трудов XII всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Том 1. 2019, стр 264-265
2. S. V. Serokhvostov, T. E. Churkina // Optimal trajectory dependence on the atmosphere model for the sun-powered airplane, Proc. ICAS 2021, 6-10 Sept.2021, Shanghai, China
3. Р. Габасов, Ф.Кириллова // Особые оптимальные управления. 2013. 258 с.
4. G. Romeo, G. Frula, L. Fattore // HELIPLAT. A Solar-Powered HALE-UAV for Telecommunication Applications. Design and Parametric Results. Analysis, Manufacturing and Testing of Advanced Composite Structures. Proc. International Technical Conference on "UNINHABITED AERIAL VEHICLES UAV 2000", 2000.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ТЯГИ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Смирнова Н.В., Малых Е.В., Черкасов О.Ю.

МГУ имени М.В.Ломоносова
oyuche@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального программирования тяги для «промежуточной» модели летательного аппарата. Предполагается, что движение происходит в вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести, силы сопротивления среды и силы тяги. В качестве управления принят угол наклона траектории и сила тяги. Построена область в пространстве исходных переменных, для которой решена задача оптимального синтеза. Установлено, что в этой области тяга может быть максимальной, нулевой или особой. Определено количество и порядок следования участков траектории с соответствующей тягой.

Введение

Одной из первых задач оптимизации является задача о брахистохроне. Эта задача служит простейшим примером выбора оптимальной формы траектории движения точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Обобщения задачи о брахистохроне для случая вязкого трения и разгоняющей силы изучены, например, в работах [1, 2]. При этом масса точки предполагалась постоянной. В работах [3] задача о брахистохроне рассматривалась для случая, когда масса частицы меняется по известному закону. В работе [4] изучена задача оптимизации формы траектории движения центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости в случае переменной массы, меняющейся в зависимости от заданного закона тяги двигателя. Модель летательного аппарата, в которой в качестве управления принят угол наклона траектории, в дальнейшем, следуя работе [4], будем называть промежуточной. В рамках этой модели предполагается, что подъемная сила, необходимая для изменения формы траектории, не влияет на силу сопротивления. Данное допущение справедливо при достаточно малых углах атаки. В такой постановке подъемная сила в задаче оптимизации формы траектории точечной модели летательного аппарата играет роль реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне для точечной массы. Обсуждение границ применимости такой модели приводится, например, в работах [5].

Задача программирования тяги летательного аппарата вдоль траектории, в частности, максимизации высоты полета с заданным количеством топлива, была сформулирована Робертом Годдардом в 1919 году [6]. Эта задача исследовалась методами вариационного исчисления и стала одной из первых, решаемых методами теории оптимального управления. Было установлено, что оптимальная программа изменения тяги состоит, как правило, из дуги максимальной тяги, затем промежуточной тяги и заканчивается нулевой тягой [6]. Такая структура имеет место в случае достаточно большого верхнего предела тяги, когда промежуточная тяга удовлетворяет ограничениям на протяжении всего процесса и остается допустимой. В работе [5] была рассмотрена двумерная задача Годдарда, в которой искался оптимальный закон изменения тяги при условии, что закон изменения угла наклона траектории задан. Задача одновременного управления углом наклона траектории и расходом массы была рассмотрена в работе [7] для простейшего случая линейного вязкого трения.

В данной работе исследуется задача максимизации дальности полета с учетом влияния количества топлива на динамику точечной массы. В настоящей работе результаты, полученные в [7], обобщаются на случай нелинейного закона сопротивления среды. В частности, для определенной области исходных переменных аналитически строится оптимальный синтез управления тягой.

Исследование задачи

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести под действием сил тяги и сопротивления среды. Задача состоит в определении формы траектории, обеспечивающей максимизацию горизонтальной координаты точки при движении её из заданного начального состояния за фиксированный промежуток времени при заданном количестве топлива.

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \dot{y} = v \sin \theta, \dot{v} = (-Q(v) + u) / m - \sin \theta, \dot{m} = -u. \quad (1)$$

Здесь x, y – соответственно горизонтальная и вертикальная координаты точки; v – модуль скорости, m – масса точки; $Q(v)$ – сила сопротивления; θ – угол наклона траектории к горизонту; u – скорость расхода массы. θ и u рассматриваются в качестве управлений, кусочно-непрерывных функций времени, $u \in [0; \bar{u}]$, где $\bar{u} > 0$ – заданная константа.

Начальные и конечные условия для системы (1.1) имеют вид

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, m(0) = m_0, m(T) = m_T > 0. \quad (2)$$

$x(T), y(T), v(T)$ – свободны, x_0, y_0, v_0 – заданные параметры, T – заданный момент окончания процесса. Целью управления является минимизация функционала

$$J = -x(T).$$

Для исследования поставленной задачи применяется принцип максимума Понтрягина. В результате исходная задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы исходных уравнений и уравнения

$$\dot{\theta} = (1 + (Q'_v + Q - u) \sin \theta / m) \cos \theta / v$$

с заданными исходными краевыми условиями и дополнительным условием $\theta(T) = 0$.

Максимизация функции H по управлению u приводит к следующему выбору экстремальной тяги:

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & H_1 > 0, \\ u_s, & H_1 \equiv 0, \\ 0, & H_1 < 0. \end{cases}$$

Особое управление находится, как функции скорости и угла наклона траектории:

$$u_s(v, \theta) = Q - tg^2 \theta (v + Q''_{vv} + Q'_v(v - \sin^2 \theta) - Q) / (1 - (1/v) \sin^2 \theta + (Q''_{vv} + Q'_v) / (Q'_v + Q)).$$

Уравнение особой поверхности имеет вид:

$$m = -v(Q'_v + Q) \sin \theta / \cos^2 \theta.$$

Из уравнения особой поверхности видно, что особый участок может иметь место только на нисходящей ветви траектории, и он не может примыкать к концу оптимальной.

Предположим, что при нулевой тяге движение происходит в области, где скорость убывает, угол наклона траектории возрастает, а функция $Q(v)$ выпукла вниз. Тогда справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Если начальная точка в пространстве лежит выше особой поверхности, то оптимальная тяга имеет структуру $u = \bar{u} \rightarrow u = u_s \rightarrow u = 0$.

Утверждение 2. Если начальная точка в пространстве лежит ниже особой поверхности, то оптимальная тяга имеет структуру $u = 0 \rightarrow u = u_s \rightarrow u = 0$.

Заключение

В результате исследования установлено, что в определенной области исходных параметров оптимальная тяга в двумерной задаче Годдарда имеет такую же структуру, что и в одномерной задаче. Вопрос о структуре тяги для всех допустимых значений переменных требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Ю.Ф.Голубев // Брахистохрона с трением, Изв. РАН. Теория и системы управления, 5 2010. 41-52
2. B. Vratanaar and M. Saje // On the Analytical Solution of the Brachistochrone Problem in a Non-conservative Field, Int. J. Non-Linear Mechanics, 33:3 1998. 489-505
3. O. Jeremić, S. Šalinić, A. Obradović, Z. Mitrović // On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields, Mathematical and Computer Modelling, 54 2011. 2900-2912
4. P.K.A. Menon, H.J. Kelley, and E.M. Cliff // Optimal Symmetric Flight with an Intermediate Vehicle Model, J. Guidance, 8:3 1984, 312-319
5. Nahshon Indig, Joseph Z. Ben-Asher, and Erez Sigal // Singular Control for Two-Dimensional Goddard Problems Under Various Trajectory Bending Laws, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 42:3 2018, 1-15
6. А.Брайсон, Хо Ю Ши // Прикладная теория оптимального управления. 1972. 544с.
7. Cherkasov, O.Y., Malykh, E.V. & Smirnova, // Brachistochrone problem and two-dimensional Goddard problem, Nonlinear Dyn, 111 2023. 243–254

ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Смирнова Н.В., Черкасов О.Ю.

МГУ имени М.В.Ломоносова
nina.smirnova247@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в поле силы тяжести. Движение происходит в первом случае без трения, а во втором случае под действием вязкого трения, пропорционального скорости во второй степени. Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол наклона траектории. В качестве управления рассматривается скорость изменения угла наклона траектории. Задача состоит в максимизации горизонтальной дальности за заданное время или в минимизации времени перехода на заданное расстояние по горизонтальной координате (задача о брахистохроне).

Введение

В научной литературе известны постановки задачи о брахистохроне без трения при наличии фазовых ограничений. В работе [1] рассматривались ограничения на угол наклона траектории, в [2, 3] – ограничения типа неравенств на координаты. При этом учет фазовых ограничений производился при помощи численных процедур. В данной работе строится синтез оптимального управления с фазовыми ограничениями на угол наклона траектории, аналитически устанавливается количество дуг движения по ограничению. Представленный метод решения может применяться и к другим задачам с системами, допускающими редукцию. Более широкие результаты с учетом управления тягой были представлены в работе [4].

Исследование задачи

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид [5]:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \dot{y} = v \sin \theta, \dot{v} = -v^2 - \sin \theta, \dot{\theta} = u.$$

Здесь x и y – горизонтальная и вертикальная координаты точки соответственно, дальность, v – скорость, θ – угол наклона траектории, на который наложено фазовое ограничение вида $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, u – управление, кусочно-непрерывная функция.

Для системы заданы следующие начальные условия:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0,$$

значения $\theta(0), y(T), v(T)$ свободны. Цель управления – минимизация функционала:

$$J = -x(T) \rightarrow \min_u, T \text{ - заданное время окончания процесса.}$$

Переходя к редуцированной системе с управлением θ , получаем регулярную оптимальную задачу с ограничениями на управление. С помощью принципа максимума задача оптимального управления сводится к краевой, для которой строится логика управления углом наклона траектории, а также аналитически устанавливается, что при отсутствии сопротивления оптимальная траектория содержит не более одной дуги с движением по каждому из ограничений (рис. 1), а в случае квадратичного сопротивления – не более одной дуги движения по нижнему ограничению и не более двух дуг движения по верхнему ограничению (рис. 2). Устанавливается характер движения в плоскости (x, y) , а также проводится численное решение задачи.

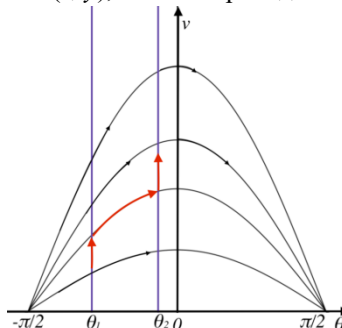


Рис. 1. Максимальное число переключений угла в случае отсутствия сопротивления.

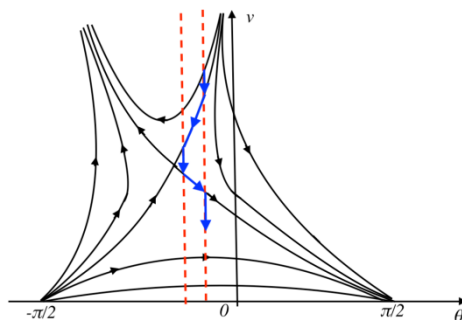


Рис. 2. Максимальное число переключений угла в случае квадратичного сопротивления.

Литература

1. Cheng, D. Conrad // Optimum translation and the brachistochrone, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Aerospace Sciences Meeting, 1:12, 1964. doi:10.2514/6.1964-49.
2. Stuart Dreyfus // The Numerical Solution of Variational Problems, Journal of mathematical analysis and applications, 5:1 1962. 30-45.
3. Brian C. Fabien // Numerical Solution of Constrained Optimal Control Problems with Parameters, Applied mathematics and computation, 80:1 1996. 43-62.
4. O.Yu. Cherkasov, N.V. Smirnova // On the Brachistochrone problem with state constraints on the slope angle, International Journal of Non-Linear Mechanics, 139:3 2022. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103871
5. Зароднюк А.В., Бугров Д.И., Черкасов О.Ю // О свойствах реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде, Фундаментальная и прикладная математика, 22:2 2018. 147-158.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АВТОРЕЗОНАНС В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ МНОГОМЕРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Смирнов А.С.^{1,2}, Смольников Б.А.^{1,2}

1 - Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
2 - Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
smirnov.alexey.1994@gmail.com

Аннотация. В работе обсуждаются основные особенности режима нелинейного авторезонанса в системах с несколькими степенями свободы и излагаются принципы формирования управляющих воздействий, приводящих к возникновению такого режима. С этой целью предлагается использовать коллинеарное управление, учитывающее динамические свойства системы. В качестве примера рассматривается разгон двойного маятника коллинеарным управлением с переменным усилением вплоть до достаточно больших амплитуд. Приведенные графики изменения всех основных величин во времени наглядно демонстрируют постепенный дрейф частоты и формы колебаний с сохранением одночастотного характера движения, присущего нелинейному авторезонансному режиму.

Введение

Управление колебаниями конструкций, обладающих несколькими степенями свободы, является одним из основных направлений современной теории управления и представляет особый интерес. Это связано с тем, что в данном случае для достижения тех или иных целей необходимо уделять более пристальное внимание к формированию управляющих воздействий, чем при исследовании систем с одной степенью свободы. Ясно, что одной из важнейших задач при этом является указание принципов формирования достаточно простого закона управления, который позволил бы подобным механическим системам раскачиваться по каждой из ее форм колебаний в отдельности с постепенным переходом из линейной области в нелинейную. Именно такой путь следует признать рациональным, поскольку при его реализации вся подводимая в систему энергия будет направляться на развитие только одной формы колебаний без возбуждения других форм. В этом случае важно также обеспечить постепенный переход системы к желаемому режиму ее функционирования, который обычно соответствует некоторому заданному уровню энергии и представляет собой регулярное периодическое движение с достаточно большой амплитудой. Такие движения являются наиболее ценными из всех возможных режимов движения нелинейных систем, поскольку именно они обычно и рекомендуются для практического использования, например, в работе манипуляторов и разнообразных робототехнических устройств. В этой связи основной целью настоящей работы является исследование закона управления, обладающего указанными свойствами, а также изучение основных особенностей возникающих при этом резонансных колебаний системы.

Основная часть

Как известно, частоты колебаний нелинейных систем начинают дрейфовать при увеличении амплитуд колебаний, при этом также постепенно начинают изменяться и формы колебаний. Поэтому традиционные методы раскачивания системы, связанные с гармоническим возбуждением в виде конкретной программы во времени с заданной частотой и широко используемые в линейных системах, оказываются здесь непригодными, поскольку при этом будет нарушено главное условие возникновения резонансного процесса – действие внешней силы в «такт» с собственными колебаниями системы. Это означает, что для организации истинно резонансных эффектов в нелинейных системах необходимо создавать управляющие воздействия в соответствии с состоянием системы, когда частота возбуждения не предписывается извне, а подается на привод возбуждения в виде сигнала контура обратной связи [1]. Такой управляемый резонансный режим хорошо известен для систем с одной степенью свободы, и его исследования начинаются с фундаментального труда [2], где для него было предложено наименование «авторезонанс», который определяется как «резонанс под действием силы, порождаемой движением самой системы». Данный управляемый режим обеспечивает то обстоятельство, что частота и фаза сигнала обратной связи будут точно соответствовать текущей частоте и фазе колебаний системы, ввиду чего ей будет передаваться вся поступающая в систему энергия. Однако термин «авторезонанс» долгие годы оставался практически незамеченным, и интерес к этому понятию начал постепенно возрастать лишь в последние несколько десятилетий [3, 4]. Например, работы [5, 6] посвящены резонансу с обратной связью. Заметим, что главной трудностью при практической реализации авторезонанса является необходимость использовать контур обратной связи для того, чтобы формировать требуемый закон управления приводом.

Для систем с одной степенью свободы формирование авторезонансного закона управления можно осуществить множеством способов, в каждом из которых будет происходить монотонное нарастание полной энергии системы [7]. Что касается многомерных нелинейных систем, то в этом случае организация такого разгонного режима оказывается намного более сложной. Резонанс с обратной связью в указанных системах изучается, например, в [8]. В данной ситуации возникают серьезные трудности, т. к. подобные механические системы имеют несколько колебательных степеней свободы, т. е. несколько собственных частот и форм. Как

было сказано ранее, для разгона системы в таком случае следует не просто наращивать энергию системы, но и иметь возможность осуществлять разгон системы по каждой из форм ее свободных колебаний в отдельности. В противном случае подводимая в систему энергия пойдет на возбуждение сразу всех форм, что приведет к резкому снижению резонансных свойств управления и качества процессов разгона. Это означает, что требуемое управление не должно нарушать формы малых колебаний системы и допускать постепенный переход каждой из форм колебаний в соответствующую нелинейную форму, раскачивая при этом систему с малых амплитуд до достаточно больших. Под нелинейной формой колебаний подразумевается одночастотное движение системы по всем степеням свободы в нелинейной системе, и она является естественным развитием понятия линейной формы колебаний. Отметим, что сохранение топологической структуры формы нелинейных колебаний имеет чрезвычайно важное значение для беговых форм движения живых организмов при амплитудах раскачивания конечностей, доходящих вплоть до весьма больших значений. Поэтому требуемое управление будет играть важную роль в задачах биомеханики и робототехники, где переход от шаговых к беговым амплитудам возможен только в режиме авторезонанса, причем и при ходьбе, и при беге движение остается одночастотным, хотя его частота постепенно изменяется, а вместе с ней происходит и плавное изменение формы колебаний [9]. Следовательно, построенные указанным образом управляющие воздействия будут иметь большое практическое значение и смогут найти применение при беге антроидов, где создание нелинейного резонансного режима играет первостепенную роль, так что их формирование представляется весьма актуальной задачей.

Для формирования управления, обладающего требуемыми резонансными свойствами, следует обратиться к физическим соображениям. Они подсказывают, что целесообразно прикладывать управляющие воздействия в «унисон» с силами инерции, возникающими при разгоне системы, не изменяя их общего характера. Такой управляемый режим движения носит название коллинеарного управления [10]. В многомерной механической системе условие коллинеарности означает пропорциональность столбца управляющих воздействий столбцу обобщенных импульсов системы, причем коэффициент усиления можно полагать постоянным либо же задавать как функцию времени или переменных состояния. Такое управление является кинетическим, т. е. учитывает динамические свойства самой системы. Известно, что коллинеарное управление в рамках линейной модели при постоянном коэффициенте усиления не нарушает форм колебаний исходной консервативной системы, а лишь усиливает их амплитуды. Поэтому при его помощи можно по отдельности раскачивать систему по любой форме колебаний, задавая соответствующие начальные условия. Ясно, что при увеличении отклонений постепенно будет сказываться наличие нелинейных факторов, при этом будет происходить плавный переход из линейной области в нелинейную по выбранной форме колебаний. Этот процесс уже целиком зависит от особенностей системы и характера ее нелинейности.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу управления колебаниями простейшей нелинейной двухстепенной маятниковой системы – плоским двойным математическим маятником, полагая для простоты длины его звеньев равными l , а массы его концевых грузов равными m . В работе авторов [11] приведена математическая модель управляемого движения этой системы под действием коллинеарного управления, где коэффициент усиления пропорционален разности желаемого и текущего значений полной механической энергии, т. е. он постепенно понижается до нуля при приближении энергии к желаемому значению, на который и требуется вывести систему. Важно подчеркнуть, что, хотя коэффициент усиления и не является величиной постоянной, а зависит от переменных состояния, он изменяется достаточно медленно, поэтому можно полагать, что это изменение практически не сказывается на главном свойстве коллинеарного управления – сохранении форм колебаний исходной консервативной модели. Именно это обстоятельство является решающим, поскольку основной задачей управляющих воздействий является развитие той или иной формы колебаний системы.

Ограничимся далее рассмотрением разгона двойного маятника по первой форме колебаний, имеющей основное практическое значение. На рис. 1, а приведены графики зависимости абсолютных углов отклонения звеньев маятника от вертикали φ_1 и φ_2 , а также угла поворота в подвижном шарнире $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ (межзвенного угла), от безразмерного времени $\tau = kt$, где $k = \sqrt{g/l}$ (при этом угол поворота в неподвижном шарнире $\theta_1 = \varphi_1$). Кроме того, для полноты картины на рис. 1, б построены графики зависимости соответствующих угловых скоростей, отнесенных к первой частоте колебаний системы в рамках линейной модели k_{10} , т. е. величин $\dot{\varphi}_1/k_{10}$, $\dot{\varphi}_2/k_{10}$ и $\dot{\theta}_2/k_{10}$, от того же безразмерного времени τ . Анализируя их, можно наблюдать ярко выраженный дрейф формы колебаний по мере постепенного перехода из линейной зоны в нелинейную с выходом на установившееся движение для всех указанных величин, которое имеет одночастотный характер. В конечном счете можно наблюдать движение системы по нелинейной форме колебаний с желаемым уровнем энергии, которое характеризуется периодичностью и уже сильно отличается от соответствующей линейной формы колебаний, имеющей чисто синусоидальный характер. Видно, что величины θ_2 , $\dot{\varphi}_1/k_{10}$ и $\dot{\theta}_2/k_{10}$ при этом весьма сложным образом зависят от безразмерного времени τ , имея на одном периоде колебаний шесть экстремумов. Отметим также, что в силу переменности коэффициента усиления процесс выхода системы на конечный режим движения имеет плавный характер, что позволяет получить наиболее «чистые» нелинейные формы колебаний без каких-либо заметных искажений при столь высоком уровне достигнутой энергии и при столь сложной геометрии нелинейной формы колебаний [11].

Таким образом, определение авторезонанса для нелинейных систем со многими степенями свободы

необходимо дать следующим образом: авторезонанс – это такой режим вынужденного движения динамической системы, когда движения по всем ее степеням свободы происходят с одной частотой и по заданной форме колебаний, которые могут дрейфовать при изменении амплитуд; при этом вынуждающие силы, действующие благодаря контуру обратной связи, постепенно увеличивают уровень полной механической энергии системы.

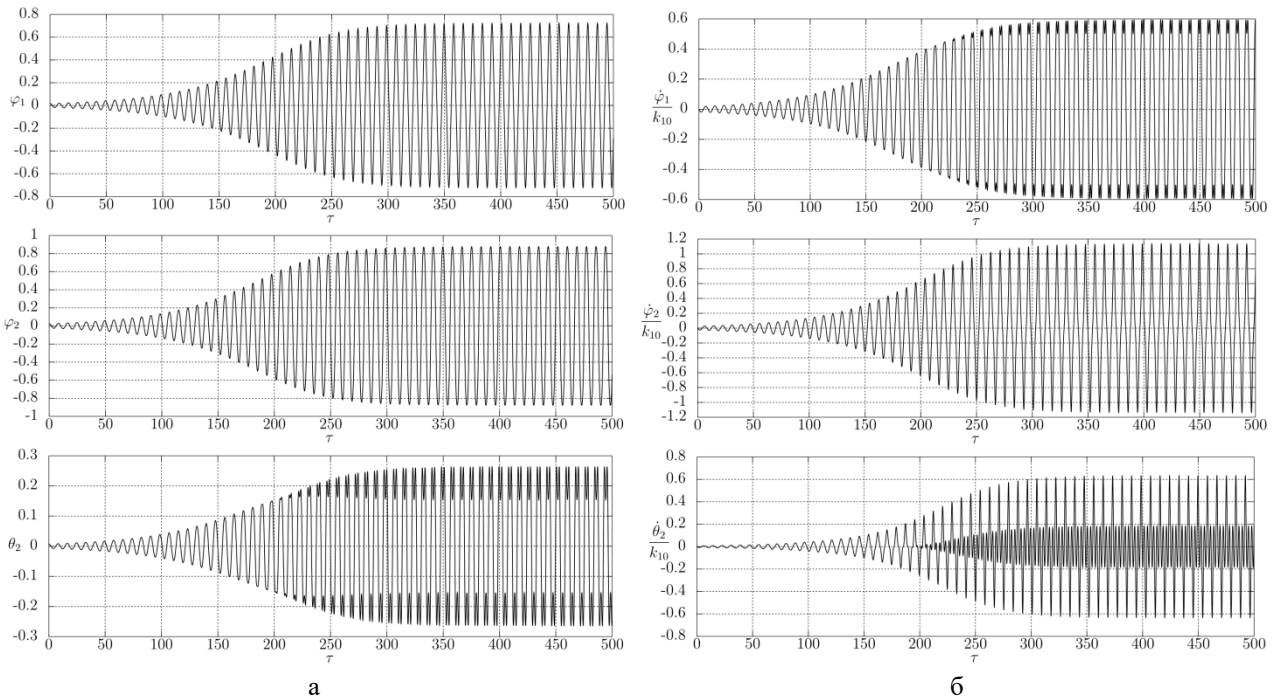


Рис. 1. Разгон двойного математического маятника коллинеарным управлением с переменным коэффициентом усиления: (а) – графики зависимостей φ_1 , φ_2 и θ_2 от τ , (б) – графики зависимостей $\dot{\varphi}_1 / k_{10}$, $\dot{\varphi}_2 / k_{10}$ и $\dot{\theta}_2 / k_{10}$ от τ

Заключение

В настоящей работе было продемонстрировано, что с помощью коллинеарного управления можно осуществлять разгон механической системы по каждой из форм ее свободных колебаний в отдельности вплоть до достаточно больших амплитуд, причем при использовании переменного коэффициента усиления такое управление позволяет реализовать плавный выход системы на режим периодических колебаний с желаемым уровнем энергии. Эта замечательная особенность такого управления означает существование режима авторезонансных колебаний, когда вся подводимая в систему энергия полностью идет на ее разгон по одной форме колебаний, обеспечивая одночастотное нарастание этих колебаний. При этом форма колебаний постепенно дрейфует вместе с частотой при переходе из линейной зоны в нелинейную, однако при усложнении своего качественного характера она сохраняет свою регулярную структуру и характеризуется периодичностью. Это заключение в особенности касается систем из области современной робототехники и биодинамики, поскольку описанные управляемые режимы широко распространены в животном мире, где фактически все бегающие, плавающие и летающие животные совершают свои локомоции в резонансном движении по одной из форм колебаний. Это и подчеркивает важность использования данных принципов для управления движением современных андроидов и многих других устройств, встречающихся в различных прикладных задачах.

Литература

1. А.С. Смирнов, Б.А. Смольников. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. № 1(82). С. 269-292.
2. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.
3. В.К. Асташев. О новых направлениях использования явления резонанса в машинах // Вестник научно-технического развития. 2011. № 8(48). С. 10–15.
4. Динамика машин и управление машинами / под ред. Крейнрина Г. В. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
5. A.L. Fradkov. Exploring nonlinearity by feedback // Physica D. 1999. 128(2–4). Pp. 159–168.
6. A.L. Fradkov. Investigation of physical systems by feedback // Automation and Remote Control. 1999. 60(3). Pp. 471–483.
7. А.Л. Фрадков. Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
8. D. Efimov, A. Fradkov, T. Iwasaki. Exciting multi-DOF systems by feedback resonance // Automatica. 2013. 49(6). Pp. 1782–1789.
9. А.С. Смирнов, Б.А. Смольников. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование, 2017. № 4(53). С. 11–19.
10. Б.А. Смольников. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
11. A.S. Smirnov, B.A. Smolnikov. Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain // Cybernetics and Physics. 2021. Vol. 10. № 2. Pp. 90-96.

МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ЭТАЛОННОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ

Соболев В.А.^{1,2}

1 - ФИЦ "Информатика и управление" РАН РФ, Москва

2 - Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.

Королева, Самара

v.sobolev@ssau.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального слежения с быстрыми и медленными переменными и заданной эталонной траекторией в достаточно общей постановке с использованием пропорционально-интегрально-дифференциальных законов управления. Развивается подход, основанный на сочетании геометрических и асимптотических методов теории сингулярных возмущений, который применяется для понижения размерности изучаемых моделей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-11-00202.

Введение

Работа посвящена анализу линейно-квадратичной задачи оптимального слежения с сингулярными возмущениями при возможности использования пропорционально-интегрально-дифференциальных законов управления. Сингулярно возмущенные задачи оптимального управления рассматривались многими авторами, при этом в большинстве работ применялся метод пограничных функций (см. работы [1–4]). Обзор других методов можно найти, например, в книге [5].

В данной работе для анализа задачи оптимального слежения с сингулярными возмущениями применяется метод расщепления [6], основанный на применении аппарата интегральных многообразий быстрых и медленных движений [6–9]. Техника интегральных многообразий медленных движений применялась для анализа задач управления вообще и задач управления манипуляционными роботами, в частности, в работах [4, 10], а в работе [11] метод расщепления [6] был эффективно применен для анализа специальной нелинейной задачи оптимального слежения.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается известная задача оптимального слежения с n -мерным вектором обобщенных координат и m -мерным вектором управляющих сил

$$\varepsilon \ddot{x} + A_1 \dot{x} + A_2 x = Bu.$$

Здесь точка над переменной означает дифференцирование по времени t . Рассматривается случай, когда допускается применение ПИД-управления

$$u = -K_1 x - K_2 \dot{x} - K_3 \int_0^{t_f} x(s) ds.$$

Пусть задана эталонная траектория $x = \xi(t)$. Вводятся обозначения

$$x_1(t) = \int_0^{t_f} x(s) ds, \quad \xi_1(t) = \int_0^{t_f} \xi(s) ds, \quad e_1(t) = x_1(t) - \xi_1(t), \quad e_2(t) = x(t) - \xi(t), \quad e_3(t) = \dot{x}(t) - \dot{\xi}(t),$$

с учетом которых функционал качества может быть записан в следующем виде

$$J = \int_0^{t_f} [e_1^T(s) Q_1(s) e_1(s) + e_2^T(s) Q_2(s) e_2(s) + e_3^T(s) Q_3(s) e_3(s) + u^T(s) R(s) u(s)] ds.$$

При известных естественных предположениях оптимальное управление задается формулой [12]

$$u_{opt} = -R^{-1} \tilde{B}^T (PX + \chi),$$

где матричная функция P и векторная функция χ являются решениями задач Коши для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + PA + A^T P - P \tilde{S} P + Q = 0, \quad P(t_f) = 0;$$

и сингулярно возмущенного линейного векторного уравнения

$$\dot{\chi} = -(A - \tilde{S} P)^T \chi + Q \Xi = 0, \quad \chi(t_f) = 0.$$

Здесь

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -\varepsilon^{-1} A_2 & -\varepsilon^{-1} A_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon^{-1} B \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-2} S \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \varepsilon \chi_3 \end{pmatrix}, \quad S = BR^{-1}B^T, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \varepsilon P_4 \\ P_2^T & P_3 & \varepsilon P_5 \\ \varepsilon P_4^T & \varepsilon P_5^T & \varepsilon P_6 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}$$

Метод расщепления

Суть предлагаемого подхода состоит в следующем. При обычных предположениях о гладкости и нормальной гиперболичности быстрой подсистемы [6] сингулярно возмущенная система

$$\dot{X} = F(X, Y, t, \varepsilon), \varepsilon \dot{Y} = G(X, Y, t, \varepsilon)$$

преобразованием

$$Y = Z + L(X, t, \varepsilon), X = V + \varepsilon \Pi(V, Z, t, \varepsilon) \quad (\Pi(V, 0, t, \varepsilon) = 0)$$

приводится к виду

$$\dot{V} = F(V, L(V, t, \varepsilon)), \quad \varepsilon \dot{Z} = W(V, Z, t, \varepsilon) \quad (W(V, 0, t, \varepsilon) = 0),$$

в котором первое уравнение не зависит от быстрой переменной, а решениями второго уравнения являются так называемые правые пограничные функции [1], для которых справедливы оценки типа

$$\|Z(t, \varepsilon)\| \leq C \exp(c(t - t_f)/\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_f$$

при не зависящих от малого параметра числах c и C ($0 < c, 1 \leq C$). При этом L соответствует медленному интегральному многообразию исходной системы, а Π – быстрому многообразию некоторой вспомогательной системы, переменная V соответствует регулярной составляющей решения исходной системы, а переменная Z – погранслойной составляющей. Важно отметить, что если $Z=O(\varepsilon)$ при $t = t_f$, то и функция Z содержит в качестве множителя малый параметр. Функции L и Π удовлетворяют так называемым *уравнениям инвариантности*, из которых могут быть найдены в виде разложений по степеням малого параметра. Для линейных систем применение соответствующего преобразования приводит к двум независимым подсистемам для медленной и быстрой переменных.

Следует отметить, что применение в реальных системах управления управляющих воздействий с использованием пограничных функций далеко не всегда целесообразно, так как предполагает резкое изменение напряжения в цепях управления на очень коротком промежутке времени. С другой стороны, отказ от использования таких функций может незначительно сказываться на погрешности функционала качества. Показано, что в ряде случаев субоптимальное управление, не содержащее правых пограничных функций, приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества, что вполне приемлемо с прикладной точки зрения. Хотя в первых работах автора и его коллег применительно к данному методу использовался термин декомпозиция, надо признать, что методом декомпозиции, в результате применения которого исходная задача управления разбивается на несколько независимых задач управления для подсистем, как это делается, например, в [13], он не является. Применение метода расщепления позволяет осуществить декомпозицию систем дифференциальных уравнений, а не задач управления.

Редукция системы матричных дифференциальных уравнений Риккати

Задача для матрицы P может быть переписана в виде системы матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_4 S P_4^T - Q_1, \\ \dot{P}_2 &= -P_1 + P_4 A_2 + P_4 S P_5^T, \\ \dot{P}_3 &= -P_2 - P_2^T + P_5 A_2 + A_2^T P_5 + P_5 S P_5^T - Q_2, \\ \varepsilon \dot{P}_4 &= -P_2 + P_4 A_1 + P_4 S P_6^T, \\ \varepsilon \dot{P}_5 &= -P_3 + P_5 A_1 - \varepsilon P_4 + A_2^T P_6 + P_5 S P_6^T, \\ \varepsilon \dot{P}_6 &= P_6 A_1 + A_1^T P_6 - \varepsilon(P_5 + P_5^T) + P_6 S P_6^T - Q_3 \end{aligned}$$

с дополнительными условиями

$$P_i(t_f) = 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Построены асимптотические разложения функций, описывающих интегральные многообразия медленных и быстрых движений, и на их основе получены асимптотические формулы для расщепляющего преобразования. В результате применения этого преобразования получается независимая медленная система уравнений для блоков матричного коэффициента усиления P , соответствующая медленным компонентам матриц P_1, P_2, P_3 быстрая подсистема, соответствующая погранслойным компонентам матриц P_4, P_5, P_6 .

Редукция линейной дифференциальной системы

Задача для вектора χ представима в виде системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= -P_4 S \chi_3 + Q_1 \xi_1, \\ \dot{\chi}_2 &= -\chi_1 + (A_2^T - P_5 S) \chi_3 + Q_2 \xi, \\ \varepsilon \dot{\chi}_3 &= -\chi_2 + (A_1^T - P_6 S) \chi_3 + Q_3 \xi \end{aligned}$$

с дополнительными условиями

$$\chi_i(t_f) = 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Применение линейного расщепляющего преобразования приводит к независимой линейной неоднородной системе, соответствующей регулярным компонентам векторов χ_1, χ_2 и к линейной однородной подсистеме для погранслойных компонентов вектора χ_3 .

Получены оценки погрешностей значений функционала качества, возникающие при использовании субоптимальных законов управления. Особое внимание уделено анализу случаев, когда при построении субоптимальных управляющих воздействий можно ограничиваться использованием только регулярных компонентов матрицы P и вектора χ , что соответствует использованию решений дифференциальных подсистем, описывающих поведение решений дифференциальных систем на интегральных многообразиях медленных движений.

Возможные обобщения и приложения

Изложенный выше подход применим к системам управления с неполной информацией о векторе состояния и с внешними возмущениями. Если возмущения принадлежат классу дифференцируемых векторных функций, то никаких принципиальных изменений в изложенную схему понижения размерности вносить не требуется. Для негладких и, в частности, случайных возмущений, процедуру расщепления линейной подсистемы приходится модифицировать.

В качестве иллюстрации эффективности предлагаемого подхода рассматривается известная задача управления плоским движением двухзвенного манипулятора [14, 15] с легкими звеньями. Система уравнений Риккати для этой задачи имеет медленную подсистему десятого порядка и быструю подсистему одиннадцатого порядка. Соответствующая линейная задача имеет четыре медленных и две быстрых переменных. В результате применения расщепляющего преобразования получается независимая медленная система уравнений десятого порядка для блоков матричного коэффициента усиления и линейная система четвертого порядка.

Заключение

Рассмотрена линейно-квадратичная задача слежения с заданной эталонной траекторией для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с применением пропорционально-интегрально-дифференциального управления. Показано, что применение аппарата асимптотического расщепления, основанного на теории быстрых и медленных интегральных многообразий, позволяет понизить размерность изучаемых задач. Особое внимание уделено анализу ситуаций, когда формулы для управляющих воздействий не содержат функций типа пограничного слоя.

Литература

1. А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев // Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. Итоги науки и техники. Сер. "Мат. анализ". М.: ВИНТИ, 20 1982. 3–78.
2. М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Сингулярные возмущения в задачах управления. Автоматика и телемеханика, 1 2006, 3–51.
3. D. S. Naidu // Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview. Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms. 9 2002. 233–278.
4. P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly // Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design. N-Y: Academic Press, 1986. 371 p.
5. Л. Д. Акулenco // Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987, 368 с.
6. V. A. Sobolev // Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system. Syst. Control Lett. 5 1984. 169–179.
7. Н. В. Воропаева, В. А. Соболев // Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009. 256 с.
8. M. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, V. Sobolev // Singular Perturbations and Hysteresis. SIAM, Philadelphia, 2005. 344 p.
9. E. Shchepakina, V. Sobolev, M. Mortell // Singular Perturbations. Introduction to System order Reduction Methods with Applications. Springer Lecture Notes in Mathematics, 2114, 2014. 212 p.
10. F. Ghorbel, M. W. Spong // Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems, Int. J. of Non-Linear Mechanics, 35 2000, 133-155.
11. A. Prasov, H. K. Khalil // Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise. Int. J. Adapt. Control Signal Proc., 30: (8–10) 2016. 1228–1243.
12. E. Sontag // Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. 2nd Ed. N-Y: SpringerVerlag, 1998. 544 p.
13. Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин // Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
14. M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar // Robot Modeling and Control. N-Y: Wiley, 2006. 419 p.
15. Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий // Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.

О РЕКОНСТРУКЦИИ СКОЛЬЗЯЩИХ УПРАВЛЕНИЙ

Субботина Н.Н.^{1,2}, Крупенников Е.А.^{1,2}

1 - ИММ УрО РАН, Россия

2 - УрФУ, Россия

krupennikov@imm.uran.ru

Аннотация. В докладе рассматривается задача динамической реконструкции для аффинно-управляемых систем. Задача состоит в восстановлении реализованной траектории системы и управления, породившего её, по неточным дискретным наблюдениям (замерам) этой траектории. Авторами доклада ранее был разработан алгоритм решения таких задач для случая выпуклых геометрических ограничений на управления. В докладе рассматривается случай невыпуклых ограничений, когда могут возникать скользящие управления. Для такого случая поставлена корректная задача динамической реконструкции и разработан алгоритм, позволяющий строить аппроксимации её решения в классе кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих заданным невыпуклым ограничениям.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

Введение

Рассматривается класс детерминированных управляемых систем, аффинных по управлениям. Задача динамической реконструкции состоит в восстановлении реализованной траектории системы, называемой базовой траекторией, и управления, породившего эту траекторию, по известным неточным дискретным замерам базовой траектории.

Рассматривается случай, когда размерность вектора управлений больше либо равна размерности вектора фазовых переменных. Это ограничение связано с упрощением конструкций по сравнению с общим случаем. В качестве допустимых управлений понимаются измеримые функции со значениями из заданного компакта. Задача реконструкции управления является некорректной в том смысле, что одна и та же базовая траектория может порождаться не единственным управлением. Для регуляризации задачи вводится понятие нормального управления – измеримого управления, порождающего базовую траекторию, и имеющего минимальную норму в пространстве L^2 . Показано [1], что для любой базовой траектории нормальное управление существует и единственно. Под задачей динамической реконструкции понимается задача реконструкции базовой траектории и единственного нормального управления. При этом реконструкция должна осуществляться в реальном времени по мере поступления новых точек замеров базовой траектории.

Задачи динамической реконструкции уже рассматривались ранее авторами доклада [1–3]. При этом ранее рассматривался случай выпуклых геометрических ограничений на управления. Для этого случая был предложен и обоснован подход к решению задачи динамической реконструкции, базирующийся на использовании конструкций из вспомогательных задач вариационного исчисления. Особенностью подхода является то, что во вспомогательных задачах используются регуляризованные [6] функционалы, интегранты которых являются д.с.-функциями [7]. Аппроксимации нормального управления, полученные с помощью этого подхода, имеют вид кусочно-непрерывных функций, осциллирующих с высокой частотой. Недостатком алгоритма, предложенного в работах [1, 2], является то, что получаемые аппроксимации не обязательно удовлетворяют заданным выпуклым геометрическим ограничениям. В работе [3] предложено развитие этого подхода. А именно, обоснован алгоритм, позволяющий получить кусочно-постоянные аппроксимации управлений, удовлетворяющие заданным выпуклым геометрическим ограничениям.

В данном докладе рассматривается случай, когда заданные ограничения на управления невыпуклые. Этот случай характеризуется возникновением скользящих режимов в управлениях [4]. Для такого случая предлагается корректная постановка задачи динамической реконструкции и определение аппроксимаций решения в смысле слабой со звездой сходимости. Предлагается новая конструкция аппроксимаций искомого управления в форме кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих заданным невыпуклым геометрическим ограничениям.

Входные данные

Рассматриваются динамические детерминированные управляемые системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \\ t \in [0, T], \quad x(\cdot): [0, T] &\rightarrow R^n, \quad u(\cdot): [0, T] \rightarrow R^m, \quad m \geq n, \\ G(\cdot): [0, T] \times R^n &\rightarrow R^{n \times m}, \quad f(\cdot): [0, T] \times R^n \rightarrow R^n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(\cdot)$ – вектор управляющих параметров (вход), а $x(\cdot)$ – вектор фазовых переменных (выход). Допустимые управления – измеримые функции, удовлетворяющие геометрическим ограничениям

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $U \in R^m$ – заданное компактное множество.

Предполагается, что в реальном времени наблюдается реализация некоторой базовой траектории $x^*(t)$. А именно – дискретно, с шагом h , поступают неточные замеры $\{y_k^\delta, k = 0, \dots, N, N = \lceil T/h \rceil\}$ этой траектории, имеющие абсолютную погрешность δ . Предполагается, что

$$h \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Вводятся следующие предположения о свойствах входных данных:

Предположение 1. Существуют параметры $d_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$ и компакт $\Psi \subset R^n$ такие, что для любых $\delta \in (0, \delta_0]$, $h \in (0, h_0]$

$$\bigcup_{i=0, \dots, N} B_{d_0}[y_i^\delta] \subset \Psi,$$

где $B_r[x]$ – шар радиуса r с центром в x .

Предположение 2. В динамике (1) элементы матрицы $G(\cdot)$ и вектора $f(\cdot)$ липшицевы по совокупности переменных при $(t, x) \in D_0 = [0, T] \times \Psi$.

Предположение 3. Ранг матрицы $G(t, x)$ равен $\min\{m, n\}$ при $(t, x) \in D_0$.

Постановка задачи

Для того, чтобы описать воздействие на систему (1) скользящих управлений, вводятся обобщенные управления – измеримые функции со значениями на множестве регулярных вероятностных борелевских мер, сосредоточенных на U . Теория таких обобщенных управлений развита в [5].

Очевидно, что каждому обобщенному управлению $\mu(t|du): [0, T] \rightarrow rpm(U)$ отвечает единственное усредненное управление

$$\tilde{u}(t) = \int_U u \mu(t|du).$$

Усредненные управления являются [5] измеримыми функциями со значениями из выпуклой оболочки, натянутой на множество U . При этом, обобщенное управление и отвечающее ему усредненное управление эквивалентны [4] в том смысле, что порождают одну и ту же траекторию. Для регуляризации задачи предлагается отождествлять класс эквивалентных обобщенных управлений с эквивалентным им усредненным управлением.

Отметим, что в силу того, что значения усредненных управлений лежат уже в выпуклой оболочке, натянутой на U , такой подход является овыпуклением исходной задачи, где при той же динамике (1) роль допустимых управлений играют измеримые функции, но с выпуклыми ограничениями (выпуклая оболочка компакта U)

$$\tilde{u}(t) \in Conv(U), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Нетрудно показать (см. [3]), что для входных данных, удовлетворяющих предположениям 1-3, существует единственное нормальное усредненное управление $\tilde{u}^*(\cdot): [0, T] \rightarrow R^m$, которое определяется как усредненное управление, порождающее траекторию $x^*(\cdot)$ и имеющее минимальную норму в пространстве L^2 . Нашей целью будет реконструкция нормального усредненного управления $\tilde{u}^*(\cdot)$.

Задача динамической реконструкции состоит в построении для заданного набора замеров с погрешностью $\delta \leq \delta_0$ при шаге $h \leq h_0$ такой кусочно-постоянной функции $u^\delta(\cdot): [0, T] \rightarrow R^m$, что выполняются условия:

A1. $u^\delta(\cdot)$ удовлетворяет невыпуклым ограничениям (2);

A2.

$$\|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_{C[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} \|x^\delta(t) - x^*(t)\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

где $x^\delta(\cdot): [0, T] \rightarrow R^n$ – траектория, порождаемая управлением $u^\delta(\cdot)$;

A3. Управление $u^\delta(\cdot)$ сходится к нормальному слабо со звездой в пространстве, сопряженном $C([0, T], R^m)$:

$$\int_0^T \langle \varphi(t), u^\delta(t) - \tilde{u}^*(t) \rangle dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \forall \varphi(\cdot) \in C([0, T], R^n). \quad (4)$$

Алгоритм решения задачи

Для решения задачи **A1-A3** предлагается пошаговый алгоритм. На каждом i -ом шаге алгоритма ($i = 1, \dots, N$) решение строится на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i] = [(i-1)h, ih]$ на основании двух точек замеров $y_{i-1}^\delta, y_i^\delta$.

1) Первый этап каждого шага алгоритма состоит в построении кусочно-постоянных аппроксимаций нормального управления

$$\hat{u}^\delta(t) = \hat{u}_i^\delta, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, N.$$

Алгоритм нахождения значений \hat{u}_i^δ подробно описан и обоснован в работах [1,2,3]. Аппроксимации $\hat{u}^\delta(\cdot)$ удовлетворяют условиям **A2** и **A3** и выпуклым ограничениям (3), но не являются допустимыми управлениями в смысле заданных невыпуклых ограничений (2).

2) На втором этапе кусочно-постоянные аппроксимации $\hat{u}^\delta(\cdot)$ преобразуются также в кусочно-постоянные, но уже удовлетворяющие ограничениям (2).

Суть алгоритма в следующем: так как все значения \hat{u}_i^δ , получаемые на первом этапе каждого шага алгоритма, находятся в $Conv(\mathbf{U})$, то по теореме Каратеодори о выпуклой оболочке любое значение $\hat{u}_i^\delta \in Conv(\mathbf{U})$ можно выразить через выпуклую комбинацию элементов из множества \mathbf{U} :

$$\hat{u}_i^\delta = \sum_{j=1, \dots, m+1} \lambda_j v_j, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{m+1} = 1, \quad v_j \in \mathbf{U}.$$

При этом кусочно-постоянную функцию $\hat{u}^\delta(t)$, равную \hat{u}_i^δ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, предлагается заменить на каждом таком отрезке на кусочно-постоянную функцию

$$u^\delta(t) = \begin{cases} v_1, & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ v_2, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \dots, & \\ v_{m+1}, & t \in [\tau_m, \tau_{m+1}] \end{cases}, \quad \tau_0 = t_{i-1}, \tau_{m+1} = t_i, \quad \tau_j - \tau_{j-1} = \lambda_j h, \quad j = 1, \dots, m+1, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Суть такого построения заключается в сохранении соотношения

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \hat{u}_i^\delta(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} u^\delta(t) dt.$$

Для примера разберем случай, когда множество \mathbf{U} из (2) представляет собой вершины m -мерного прямоугольника. Иначе говоря, когда каждая координата вектора управлений может принимать лишь два значения:

$$\mathbf{U} = \{\underline{u}_1; \bar{u}_1\} \times \{\underline{u}_2; \bar{u}_2\} \times \dots \times \{\underline{u}_m; \bar{u}_m\}, \quad \underline{u}_j < \bar{u}_j, \quad |\underline{u}_j|, |\bar{u}_j| \leq U > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Аппроксимация $u^\delta(\cdot): [t_{i-1}, t_i] \rightarrow R^m$ по координатам строится как кусочно-заданная функция

$$u_j^\delta(t) = \begin{cases} \underline{u}_j, & t \in [t_{i-1}, \tau_i], \\ \bar{u}_j, & t \in [\tau_i, t_i] \end{cases}, \quad \tau_i = t_{i-1} + \frac{h(\bar{u}_j - \hat{u}_{i,j}^\delta)}{\bar{u}_j - \underline{u}_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Доказано, что построенные таким образом функции $u^\delta(\cdot)$ удовлетворяют условиям **A1-A3**.

Выводы

Предложен алгоритм решения задачи динамической реконструкции траектории и управлений по неточным замерам траектории для динамических аффинно-управляемых детерминированных систем. Алгоритм базируется на ранее разработанном и обоснованном подходе. Новизна алгоритма заключается в том, что рассматриваются невыпуклые геометрические ограничения на управления, что позволяет аппроксимировать скользящие управления.

Литература

1. Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников // Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 27:2 2021. 208-220.
2. Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников // Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции, Тр. Математического Института Им. В.А. Стеклова, 315 2021. 233-246.
3. N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov // Variational approach to construction of piecewise-constant control approximations in the problem of dynamic reconstruction, Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2023 (в печати).
4. В. И. Уткин // Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. 1981. 367 с.
5. Р. В. Гамкрелидзе // Основы оптимального управления. 1977. 230 с.
6. А. Н. Тихонов // Об устойчивости обратных задач, Докл. АН СССР, 39:5. 1943. 195-198.
7. А. С. Стрекаловский // Элементы невыпуклой оптимизации. 2003. 356 с.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ

Сутыркина Е.А.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
kea-ul@yandex.ru

Аннотация. В работе в нелинейной динамической постановке исследуется задача об управлении движением мобильного робота с четырьмя омни-колесами, центр масс которого не совпадает с его геометрическим центром. Обоснована структура управления, обеспечивающего полуглобальную и глобальную стабилизацию заданного программного движения робота без измерения скоростей при учете проскальзывания колес и запаздывания в структуре обратной связи.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-71-00062.

Введение

Решение задачи управления движением колесных мобильных роботов можно разделить на два направления. Первое направление [1–5] связано с решением задачи управления только на кинематическом уровне. В этом случае скорости мобильного робота рассматриваются как регуляторы. Второе направление [6, 7] включает в себя построение управления в рамках динамической модели мобильного робота, т.е. с учетом масс-инерционных характеристик системы и действующих сил.

К настоящему времени имеется большое количество теоретических, прикладных и экспериментальных результатов по управлению всенаправленными колесными мобильными роботами. Это связано с их большой маневренностью на узких участках передвижения. Отметим следующие работы, близкие по тематике к излагаемым результатам. Задача управления кинематическими моделями роботов рассматривалась, в частности, в [8, 9]. Динамические модели многоколесных мобильных роботов выведены в работах [10–14].

Применение нелинейных типов ПИД- и ПИ-регуляторов в задаче стабилизации положения и стационарного движения колесных мобильных роботов с тремя омни-колесами представлено в [15, 16]. В [17] дано решение задачи управления траекторией омни-мобильного робота без измерения линейной и угловой скорости. Структура управления обоснована построением функции Ляпунова и применением принципа квазиинвариантности для неавтономных систем дифференциальных уравнений. Доказано свойство глобальной равномерной асимптотической устойчивости множества всех точек равновесия замкнутой системы.

В [18] дано решение задачи отслеживания траектории движения мобильного робота с тремя омни-колесами на основе обратной связи с задержкой выходного сигнала. Исследуется динамическая модель робота, в котором центр масс платформы смещен от геометрического центра. На основе соответствующей теоремы метода функционалов Ляпунова построен нелинейный ограниченный закон управления без измерения скоростей, решающий глобальную задачу отслеживания траектории движения робота с задержкой в измерении отклонений от траектории.

Задача отслеживания траектории движения четырехколесного мобильного робота решалась в работах [19–21]. В [22, 23] построена нелинейная модель четырехколесного мобильного робота с учетом действия сил сухого и вязкого трения и предложен закон управления для такой модели. Динамическая модель омни-мобильного робота, учитывающая проскальзывание колес, получена в [24]. В [25] дано решение задачи управления слежением за траекторией колесного мобильного робота с четырьмя омни-колесами с учетом проскальзывания колес.

В данной работе решается нелинейная динамическая об обосновании структуры управления, обеспечивающая полуглобальную и глобальную стабилизацию программного движения робота с четырьмя омни-колесами и смещенным центром масс. Стабилизируемость движения достигается при учете проскальзывания колес и запаздывания в структуре обратной связи в управлении при обязательном измерении скоростей.

Основной текст

Рассматривается четырехколесный всенаправленный мобильный робот. Предполагается, что робот движется по горизонтальной поверхности и каждое колесо приводится в движение независимым двигателем постоянного тока.

Пусть $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ – вектор положения и угла ориентации робота в неподвижной системе координат, $\dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T$ – соответствующий вектор скорости, $\bar{v} = (v_{x1}, v_{y1}, \omega)^T$ – вектор скорости робота в системе координат, неизменно связанной с платформой.

Введены следующие массоинерционные параметры робота: m_p – масса платформы робота; m_w – масса колеса; ρ_p – радиус инерции платформы мобильного робота относительно вертикальной оси, проходящей через центр C ; ρ_w представляет собой радиус инерции колеса относительно вертикальной оси, проходящей

через его центр масс; R – радиус колеса; r_w – радиус инерции колеса относительно оси его вращения; $J = m_w r_w^2$ – момент инерции колеса относительно оси его вращения;

$$m = m_p + 4m_w + \frac{2m_w r_w^2}{R^2}, \quad J_s = m_p(d^2 + \rho_p^2) + 4m_w \left[\rho_w^2 + L^2 \left(1 + \frac{2r_w^2}{R^2} \right) \right].$$

Расстояние от центра C платформы до центра масс C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) каждого колеса равно L . Центр масс робота C_0 смещен от центра платформы на расстояние d с углом смещения, равным α .

Векторы \dot{q} и \bar{v} связаны между собой следующим соотношением [19]

$$\bar{v} = E\dot{q}, \quad (1)$$

где $E \in R^{3 \times 3}$ – матрица вращения, определяемая следующим образом

$$E = \begin{pmatrix} \cos q_3 & \sin q_3 & 0 \\ -\sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если колеса мобильного робота катятся без проскальзывания, то вектор угловых скоростей колес $\dot{\psi} = (\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3, \dot{\psi}_4)^T$ можно определить равенством

$$\dot{\psi} = B\bar{v},$$

где матрица $B \in R^{4 \times 3}$ определяется формулой

$$B = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & L \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & L \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & L \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & L \end{pmatrix}$$

Если i -е колесо катится с проскальзыванием, то переменная проскальзывания, определяемая формулой [24]

$$s_i = (R\dot{\psi}_i - v_{ci}) / \max\{R\dot{\psi}_i, v_{ci}\}, \quad (2)$$

не равна нулю и может изменяться во времени от -1 до 1 . Здесь v_{ci} – скорость центра i -го колеса C_i в подвижной системе координат.

Рассмотрим случай, когда проскальзывание колеса существует при торможении, при этом $v_{ci} > R\omega_i$. Тогда равенства (2) можно преобразовать к векторному виду

$$\dot{\psi} = (I + S(t))B\bar{v}, \quad (3)$$

где $I = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$ является единичной матрицей, $S(t) = \text{diag}\{s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)\}$ – зависящая от времени матрица переменных скольжения.

Уравнения динамики робота относительно неподвижной системе координат будут

$$A(q_3)\ddot{q} + C(q_3)\dot{q}\dot{q}_3 = D(q_3)R\bar{F}_t, \quad J\ddot{\psi} = \tau - R\bar{F}_t, \quad (4)$$

где

$$A(q_3) = \begin{pmatrix} m & 0 & -s_d(q_3) \\ 0 & m & c_d(q_3) \\ -s_d(q_3) & c_d(q_3) & J_s \end{pmatrix}, \quad C(q_3) = \begin{pmatrix} 0 & m & -c_d(q_3) \\ -m & 0 & -s_d(q_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(q_3) = E^T(q_3)B^T,$$

где $s_d(q_3) = m_p d \sin(\alpha + q_3)$, $c_d(q_3) = m_p d \cos(\alpha + q_3)$.

Здесь $\bar{F}_t = (f_{t1}, f_{t2}, f_{t3}, f_{t4})^T$, f_{ti} – сила тяги в точке контакта i -го колеса с поверхностью, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)^T$, τ_i – i -й крутящий момент электродвигателя.

Согласно равенствам (1)–(3) система уравнений (4) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} A(q_3) + JD(q_3)(I + S(t))D^T(q_3) \\ \tilde{C}(q_3)\dot{q}\dot{q}_3 + JD(q_3)(I + S(t))BF_1(q_3)\dot{q}\dot{q}_3 + JD(q_3)\dot{S}(t)D^T(q_3) \end{pmatrix} \ddot{q} = D(q_3)\tau, \quad (5)$$

где

$$E_1(q_3) = \begin{pmatrix} -\sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ -\cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что управление роботом создается крутящими моментами, развиваемыми двигателями постоянного тока, приложенными к колесам, при этом имеются также моменты противо-эдс, равные $(-k_j\dot{\psi}_j)$, так что

$$\tau = U - K(t)\dot{\psi}, \quad (6)$$

где $K(t) = \text{diag}(k_1(t), k_2(t), k_3(t), k_4(t))$, $0 < k_0 \leq k_j(t) \leq k_{00}$, k_0, k_{00} – положительные постоянные.

Подставляя выражения (6) в уравнения (5), имеем уравнения управляемого движения

$$\left(A(q_3) + JD(q_3)(I + S(t))D^T(q_3) \right) \ddot{q}_3 + C(q_3)\dot{q}_3 + JD(q_3)(I + S(t))BE_1(q_3)\dot{q}_3 + D(q_3) \left(J\dot{S}(t) + K(t)(I + S(t))D^T(q_3) \right) \dot{q}_3 = D(q_3)U. \quad (7)$$

Пусть $q = q^{(0)}(t)$ — программное движение,

$$p = q - q^{(0)}(t), \quad q^{(0)}(t) = (q_1^{(0)}(t), q_2^{(0)}(t), q_3^{(0)}(t))^T$$

соответствующие отклонения.

Рассматривается задача о стабилизации программного движения управлением

$$U = U(t, p(t, v(t))) = U^{(0)}(t, p_3(t - v(t))) + U^{(1)}(t, p(t - v(t))), \quad (8)$$

где зависимости $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} U^{(0)}(t, p_3) &= BNE(q_3^{(0)}(t) + p_3)G^{(0)}(t, p_3), \quad N = \frac{R^2}{4L^2}(2L^2, 2L^2, 1), \\ G_0(t, p_3) &= \left(A(q_3^{(0)}(t) + p_3) + D(q_3^{(0)}(t) + p_3)J(I + S(t))D^T(q_3^{(0)}(t) + p_3) \right) \ddot{q}_3^{(0)}(t) \\ &\quad + C(q_3^{(0)}(t) + p_3)\dot{q}_3^{(0)}(t) + JD(q_3^{(0)}(t) + p_3)(I + S(t))BE_1(q_3^{(0)}(t) + p_3)\dot{q}_3^{(0)}(t) \\ &\quad + D(q_3^{(0)}(t) + p_3) \left(J\dot{S}(t) + K(t)(I + S(t))D(q_3^{(0)}(t) + p_3) \right) \dot{q}_3^{(0)}(t), \\ U^{(1)}(t, p_3) &= -BNE(q_3^{(0)}(t) + p_3)G^{(1)}(p), \\ G^{(1)}(p) &= \left(g_1^{(1)}(p_1), g_2^{(1)}(p_2), g_3^{(1)}(p_3) \right)^T, \\ g_j(p_j)p_j &\geq 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow p_j = 0) \quad (j = 1, 2), \\ g_3(2\pi j) &= 0, \quad g_3(p_3 + 4\pi j) = g_3(p_3) \quad (j \in Z), \\ g_3(p_3)p_3 &> 0 \quad \forall p_3: 0 < |p_3| < 2\pi. \end{aligned}$$

Задача решается на основе теоремы об асимптотической устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения с построением соответствующего функционала Ляпунова с знакопостоянной производной.

Заключение

В работе обосновано управление мобильным четырехколесным роботом, обеспечивающее при учете запаздывания в структуре его обратной связи полуглобальную и глобальную стабилизацию заданного класса программных движений при достаточно широких условиях относительно массоинерционных параметров в зависимости от изменения зависимости величин проскальзывания колес во времени.

Литература

1. Y. Hu, S.S. Ge, C.Y. Su // Stabilization of Uncertain Nonholonomic Systems via Time-Varying Sliding Mode Control, IEEE Transactions on Automatic Control, 49 2004. 757–763
2. N. Marchand, M. Alamir // Discontinuous exponential stabilization of chained form systems, Automatica, 39 2003. 343–348
3. Z.P. Jiang, H. Nijmeijer // Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping, Automatica, 33 1997. 1393–1399
4. Z.P. Jiang // Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties, Automatica, 36 2000. 189–209
5. H.G. Tanner, K.J. Kyriakopoulos // Backstepping for nonsmooth systems, Automatica, 39 2003. 1259–1265
6. C.Y. Su, Y. Stepanenko // Robust Motion/Force Control of Mechanical Systems with Classical Nonholonomic Constraints, IEEE Transactions on Automatic Control, 39 1994. 609–614
7. M. Oya, C.Y. Su, R. Katoh // Robust Adaptive Motion/Force Tracking Control of Uncertain Nonholonomic Mechanical Systems, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 19 2003. 175–181
8. Ju. L. Karavaev, S. A. Trefilov // Deviation based discrete control algorithm for omni-wheeled mobile robot, Nelinejnaja Dinamika, 9 2013. 91–100
9. A. A. Kilin, Ju. L. Karavaev, A. V. Klekovkin // Kinematic control of a high manoeuvrable mobile spherical robot with internal omni-wheeled platform, Nelinejnaja Dinamika, 10 2014. 113–126
10. Yu.G. Martynenko, A.M. Formalskii // On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels, Journal of Computer and Systems Sciences International, 46 2007. 976–983
11. Ju.G. Martynenko // Stability of steady motions of mobile robot with omnivheels and displacement of the center of mass, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 74 2010. 436–442
12. A.A. Zobova, Ja.V. Tatarinov // The dynamics of an omni-mobile vehicle, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 73 2009. 8–15

13. A.A. Zobova, K.V. Gerasimov // The movement of a symmetric carriage on omni-wheels with massive rollers, *Applied Mathematics and Mechanics*, 82 2018. 427–440
14. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev // Dynamics and control of an omniwheel vehicle, *Regular and Chaotic Dynamics*, 20 2015. 153–172
15. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova // The motion control of a wheeled mobile robot, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 79 2015. 316–324
16. A. S. Andreev, O. A. Peregudova // Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots, *IFAC Papers-OnLine*, 51 2018. 7–12
17. Aleksandr S. Andreev, Olga A. Peregudova // On Output Feedback Trajectory Tracking Control of an Omni-Mobile Robot, *IFAC-PapersOnLine*. 52:8 2019. 37–42.
18. Aleksandr S. Andreev, Olga A. Peregudova // On Time-Delayed Feedback Trajectory Tracking Control of a Mobile Robot with Omni-Wheels, *Proceedings of the 12th International Workshop on Robot Motion and Control*, Poznan University of Technology, Poznan, Poland, July 8-10, 2019.
19. Y. Liu, J. J. Zhu, R.L. Williams II, J. Wu // Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization, *Robotics and Autonomous Systems*, 56 2008. 461–479
20. B.I. Adamov // A study of the controlled motion of a four-wheeled mecanum platform, *Nelin. Dinam.*, 14 2018. 265–290
21. M. Velasco-Villa, A. Alvarez-Aguirre, G. Rivera-Zago // Discrete-Time Control of an Omnidirectional Mobile Robot Subject to Transport Delay, *American Control Conference*, 2007. ACC '07. DOI: 10.1109/ACC.2007.4282968
22. S.J.C. Lins Barreto, A.G. Scolari Conceicao, C.E.T. Dorea, L. Martinez, E.R. De Pieri // Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot, *IEEE-ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*, February 2014. 467–476
23. Y. Huang, Q. Cao, C. Leng // The Path-Tracking Controller Based on Dynamic Model with Slip for One Four-Wheeled OMR, *Industrial Robot: An International Journal*, 37 2010. 193–201
24. D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi, N.-S. Kuppuswamy, J.-H. Kim // Nonlinear Slip Dynamics for a Omniwheel Mobile Robot Platform, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, April 10-14 2007. 2367–2372.
25. A. Andreev, O. Peregudova // On the Trajectory Tracking Control of a Wheeled Mobile Robot Based on a Dynamic Model with Slip, 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), Moscow, Russia, 2020. 1–4, doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140714.
26. A. Andreev, O. Peregudova // On Global Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators in Cylindrical Phase Space, *International Journal of Control*, 2019.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ СПУТНИКА С КРУПНОГАБАРИТНЫМИ НЕЖЕСТКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Ткачев С.С., Шестопёров А.И.

Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН
stevens_1@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача отслеживания сложных программных движений спутником с крупногабаритными нежесткими элементами. Движение разделяется на две составляющие: отслеживание заданной траектории на поверхности Земли и переориентация между областями интереса. За счёт построения специальных угловых траекторий обеспечивается невозбуждение колебаний в нежестких элементах конструкции. Это позволяет существенно сократить время переходных процессов и увеличить время, доступное для решения целевой задачи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10009, <https://rscf.ru/project/22-71-10009/>

Введение

В настоящее время решение научных и прикладных задач часто требует включение в конструкцию космических аппаратов крупногабаритных нежестких элементов (КНЭ). Они, обладая большой протяженностью и сравнительно малой массой, не могут рассматриваться как твёрдое тело, что оказывает значительное влияние на динамику системы спутник-нежесткий элемент. При этом из-за, как правило, малых собственных частот и малых декрементов затухания не приходится рассчитывать на естественное демпфирование колебаний КНЭ. По этой причине при построении алгоритмов управления необходимо это учитывать и даже с учетом активного демпфирования при ограниченном управлении успокоение колебаний может занимать значительное время.

При реализации тривиальных режимов ориентации, когда аппарат находится в режиме инерциальной или орбитальной ориентации может допускаться длительное протекание переходных процессов, так как оно будет всё же значительно меньшим, чем время функционирования в этом режиме. Этого нельзя сказать, когда аппарат должен часто переориентироваться из одного углового положения в другое, например, в случае, когда необходимо ориентировать оптическую ось камеры с одной точки на поверхности Земли на другую. В этом случае время переходных процессов играет ключевую роль, так как определяет в конечном итоге число точек интереса, которые можно снять за один пролёт.

Таким образом, при частой переориентации необходимо исключить возбуждение колебаний в КНЭ при переходе от одной точки к другой или при переходе из одного режима ориентации в другой. Это можно обеспечить путём склейки нужной степени гладкости угловой траектории в местах смены режимов движения.

В работе траектория состоит из трех частей. Две из них соответствуют режиму съемки двух разных областей интереса, а третья обеспечивает переход между ними. Переходная траектория строится в виде функции кватерниона от времени с заданными значениями производных на концах, которые определяются условиями сглаживания по угловой скорости, ускорению и рывка.

Постановка задачи и уравнения движения

Рассматривается космический аппарат (КА), состоящий из центральной части, к которой жестко крепятся три КНЭ (две солнечные панели и антенна). Решается задача построения траектории, которая обеспечивает пространственный разворот между двумя точками интереса без возбуждения колебаний в КНЭ. Полагается, что управление осуществляется с помощью маховиков, которые установлены на центральной части. При расчёте управления известной полагается информация только об ориентации и угловой скорости центрально части КА.

Уравнения движения системы получаются объединением уравнений углового движения для центральной части и КНЭ с учетом идеальности связей в точках крепления. Первые имеют вид

$$\mathbf{S}_s \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_s \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \end{pmatrix} = \mathbf{N}_s,$$

где

$$\mathbf{S}_s = \begin{pmatrix} m_s \mathbf{E}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{M}_s - \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix},$$

а вторые

$$\mathbf{S}_k \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_k \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \\ \ddot{\mathbf{q}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{N}_k,$$

где

$$\mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} m_k \mathbf{E}_{3 \times 3} & -[m_k \mathbf{A}_k \mathbf{q}_k]_{\times} & m_k \mathbf{A}_k \\ [m_k \mathbf{A}_k \mathbf{q}_k]_{\times} & \tilde{\mathbf{J}}_k & \sum_{i \in FE_k} [m_{k,i} (\mathbf{r}_{k,i} + \boldsymbol{\rho}_{k,i})]_{\times} \mathbf{A}_{k,i} \\ m_k \mathbf{A}_k^T & -\sum_{i \in FE_k} \mathbf{A}_{ki}^T [m_{ki} (\mathbf{r}_{ki} + \boldsymbol{\rho}_{ki})]_{\times} & \mathbf{E}_{n_k \times n_k} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_k - m_k \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_k \mathbf{q}_k - 2m_k \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_k \dot{\mathbf{q}}_k \\ \sum_{i \in FE_k} (\mathbf{r}_{k,i} + \boldsymbol{\rho}_{k,i}) \times \mathbf{F}_{k,i} - \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_k \boldsymbol{\omega} - 2 \sum_{i \in FE_k} m_{k,i} (\mathbf{r}_{k,i} + \boldsymbol{\rho}_{k,i}) \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_{k,i} \\ -\boldsymbol{\Omega}_{n_k \times n_k} \mathbf{q}_k + \sum_{i \in FE_k} m_{k,i} \mathbf{A}_{k,i}^T \mathbf{F}_{k,i} - \sum_{i \in FE_k} m_{k,i} \mathbf{A}_{k,i}^T \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{k,i} + \boldsymbol{\rho}_{k,i}) - 2 \sum_{i \in FE_k} m_{k,i} \mathbf{A}_{k,i}^T \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_{k,i} \end{pmatrix}.$$

Здесь из всех обозначений необходимо выделить тензор инерции \mathbf{J}_s центральной части и её угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_s$. \mathbf{q}_k – вектор модальных переменных k -го элемента, который отвечает за степень возбуждения колебаний этого элемента, $\mathbf{A}_{k,i}$ – матрица форм колебаний i -го узла конечно-элементной модели k -го $m_k \mathbf{A}_k = \sum m_{k,i} \mathbf{A}_{k,i}$. Подробный вывод модели и её описание можно найти в [1], [2].

Построение программного движения

Программное движение состоит из трёх частей. Первая и третья отвечают требованиям целевой аппаратуры (наведение оптической оси камеры на точки интереса на поверхности Земли), а вторая строится с использованием кватернионной интерполяции. Общий вид переходного кватерниона следующий [3]:

$$\mathbf{Q}(t) = \boldsymbol{\mu}_0 \circ \Pi_{\mathbf{Q}}(\tau),$$

Здесь

$$\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau) = \prod_{i=0}^n (\boldsymbol{\mu}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{i+1})^{\beta_{i+1}(\tau)} = (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{i+1})^{\beta_{i+1}(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)},$$

где параметр $\tau = (t - t_1) / (t_2 - t_1)$ принимает значения в интервале $[0, 1]$. Функции $\beta_i(\tau)$ – полиномы, степень которых определяется числом краевых условий ($\beta_i(0) = 0$, $\beta_i(1) = 1$). В случае третьей степени сглаживания на обоих концах число условий равно восьми, поэтому используются полиномы седьмой степени. Значения производных этих многочленов на концах позволяют удовлетворить значениям производных кватерниона, а так же ограничениям на управление. $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\mu}_{n+1}$ – кватернионы ориентации, задающие начальное и конечное положения, соответственно, $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n$ – вспомогательные кватернионы, их число соответствует числу условий на производные функции $\mathbf{Q}(t)$ на концах. Они определяются из значений угловой скорости, ускорения и рывка. В частности для левой границы вспомогательные кватернионы представимы в виде [3]

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_0 \circ \exp \left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{\dot{\beta}_1(0)} \right),$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_1 \circ \exp \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\dot{\beta}_2(0)} \right),$$

$$\boldsymbol{\mu}_3 = \boldsymbol{\mu}_2 \circ \exp \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_1) - 2\boldsymbol{\omega}(t_1) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\ddot{\beta}_3(0)} \right).$$

В работе используются две взаимообратные операции [4]

$$\boldsymbol{\mu} = \exp(|\bar{\boldsymbol{\Phi}}|) = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{|\bar{\boldsymbol{\Phi}}|}{2}\right) \frac{\bar{\boldsymbol{\Phi}}^T}{|\bar{\boldsymbol{\Phi}}|} \sin\left(\frac{|\bar{\boldsymbol{\Phi}}|}{2}\right) \right)^T, & |\bar{\boldsymbol{\Phi}}| \neq 0, \\ (1 \quad \mathbf{0}^T)^T, & |\bar{\boldsymbol{\Phi}}| = 0, \end{cases}$$
$$\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \ln(\boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} 2 \arccos(\mu_0) \frac{(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3)^T}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}, & \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} \neq 0, \\ \mathbf{0}, & \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} = 0. \end{cases}$$

Соответственно, возведение кватерниона в степень означает операцию [5]

$$\boldsymbol{\mu}^\beta = \exp(\beta \ln(\boldsymbol{\mu})).$$

Указанный формализм позволяет построить кривую с заданными на концах значениями угловых скоростей, ускорений и рывков и обеспечить таким образом условия «склейки», при этом учесть, что управление реализуется с помощью маховиков, а значит имеется два типа ограничений: на максимальные управляющий и кинетический моменты. Они приводят в конечном итоге к ограничению максимальной угловой скорости и максимальному угловому ускорению КА при переориентации.

Заключение

В работе предложена схема построения угловой траектории КА с КНЭ при отслеживании сложных программных движений и при переориентации между областями интереса. Построенная траектория обеспечивает невозбуждение колебаний в КНЭ и позволяет учитывать ограничения на управление. Рассмотрен численный пример для КА с тремя КНЭ.

Литература

1. Ovchinnikov M.Y. et al. Angular motion equations for a satellite with hinged flexible solar panel // Acta Astronaut. 2016. Vol. 128. P. 534–539.
2. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.. Математическая модель спутника с произвольным числом нежестких элементов // Математическое моделирование. 2020. Vol. 32, № 12. С. 14–28.
3. Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Построение опорной траектории третьего порядка гладкости углового движения космического аппарата // Математическое моделирование. 2021. Vol. 33, № 10. С. 3–18.
4. Boyarko G.A., Romano M., Yakimenko O.A. Time-Optimal Reorientation of a Spacecraft Using an Inverse Dynamics Optimization Method // J. Guid. Control. Dyn. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. Vol. 34, № 4. P. 1197–1208.
5. Dam E.B., Koch M., Lillholm M. Quaternions, interpolation and animation. 1998. 98 p.

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ АКТИВНОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Федотов А.В., Беляев А.К., Полянский В.А.

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
alvafed@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена численному сравнению эффективности различных методов управления в задаче активного гашения колебаний упругих систем. Задача синтезируемых систем управления состоит в том, чтобы погасить вынужденные резонансные колебания тонкой металлической балки, вызванные вибрацией опоры, в диапазоне частот, включающем несколько низших собственных частот изгибных колебаний. Для управления используются по два пьезоэлектрических сенсора и актуатора, приклеенных к балке. Рассматриваемые подходы включают метод контроля формы, локальный метод, а также модальный метод в двух вариантах: с использованием модальных фильтров и наблюдателей – показано, что именно последний метод наиболее эффективен.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573).

Введение

Проблема гашения механических колебаний распределенных упругих систем широко распространена в машиностроении, робототехнике, аэрокосмической отрасли и других областях техники. Нежелательные колебания могут вызвать ухудшение эксплуатационных свойств и повреждение конструкции, при этом особенно опасными являются резонансные колебания ввиду своей большой амплитуды. В настоящее время существует большое количество подходов к решению данной проблемы, предполагающих использование как пассивных систем (таких как демпферы и динамические гасители колебаний), так и активных, включающих в себя датчики и приводы, способные прикладывать к объекту управляющее силовое воздействие. Широкие возможности для создания активных систем управления упругими объектами дают пьезоэлектрические материалы, поскольку они сочетают в себе электрические и механические свойства и позволяют связать механический объект с электронной системой управления. Пьезоэлектрическим сенсорам и актуаторам легко придать нужную форму, они просты в использовании и способны работать в широком диапазоне частот.

Можно выделить несколько наиболее известных подходов к созданию систем активного гашения колебаний распределенных упругих объектов. Самым простым по своему принципу является локальный, или децентрализованный, подход [1]: актуаторы и сенсоры расположены парами, и каждый актуатор соединен только с одним соответствующим ему сенсором, то есть все пары работают локально. Недостатком данного метода является то, что различные контуры управления все равно влияют друг на друга через упругий объект, поэтому их совместная настройка может представлять сложную задачу. Второй метод – модальный [2]: он предполагает, что каждый контур управления соответствует определенной форме колебаний (моды) упругого объекта, при этом каждый контур может использовать в своей работе все имеющиеся сенсоры и актуаторы. Вопрос состоит в том, как именно выделять из сигналов сенсоров информацию об активизации различных мод. Наиболее простой способ – использование модальных фильтров, осуществляющих в случае дискретного набора сенсоров и актуаторов линейные преобразования измеренных и управляющих сигналов [3, 4]; более сложный способ заключается в использовании в системе управления наблюдателей [5], оценивающих активизацию мод объекта с учетом не только сигналов сенсоров, но и известной модели упругого объекта.

Еще один из рассматриваемых в работе методов – управление формой (оригинальное название – *shape control*) [6, 7]. Данный метод применим только в том случае, если постоянно и известно распределение внешнего возмущающего воздействия на объект. Он предполагает использование только одного контура управления, при этом пропорции прикладываемых к актуатором управляющих воздействий задаются таким образом, чтобы наиболее эффективно компенсировать заданную форму внешнего воздействия.

Цель данной работы – численно исследовать эффективность упомянутых подходов к управлению на примере задачи гашения вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки, упруго заземленной в промежуточном сечении, с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. При этом условия численного исследования максимально приближены к условиям эксперимента, проведенного автором ранее [4].

Экспериментальная установка

Изначально для тестирования различных подходов к управлению была собрана экспериментальная установка, схема которой показана на рис. 1. Алюминиевая балка 1 длиной 70 см с сечением 3×35 мм расположена вертикально и закреплена в одной точке. В конструкцию закрепления входит пьезоэлектрический стержень-толкатель 2, продольные вибрации которого вызывают изгибные колебания балки. Другой конец стержня-толкателя жестко прикреплен к массивному основанию 3. Для гашения колебаний балки используются по два сенсора 4 и актуатора 5 (тонкие прямоугольные пьезоэлектрические пластинки с электродами), расположенные парами таким образом, чтобы наиболее эффективно воздействовать на первую и вторую формы

изгибных колебаний балки (данные формы также показаны на рисунке). Таким образом, установка позволяет реализовать как локальный, так и модальный подход к управлению с двумя контурами. Задача системы управления – погасить вынужденные колебания балки вблизи первой и второй резонансных частот изгибных колебаний, соответствующих изображенным на рисунке формам.

Сенсоры и актуаторы связаны через дискретный контроллер 6, генерирующий управляющие воздействия в зависимости от измеренных сигналов. Кроме этого, в цепь управления входили также дополнительные элементы: усилители, поднимающие амплитуду управляющего сигнала перед подачей на актуаторы, и фильтры нижних частот (ФНЧ), сглаживающие высокочастотные составляющие сигнала. Для отслеживания эффективности управления измерялась амплитуда колебаний точки на верхнем конце балки.

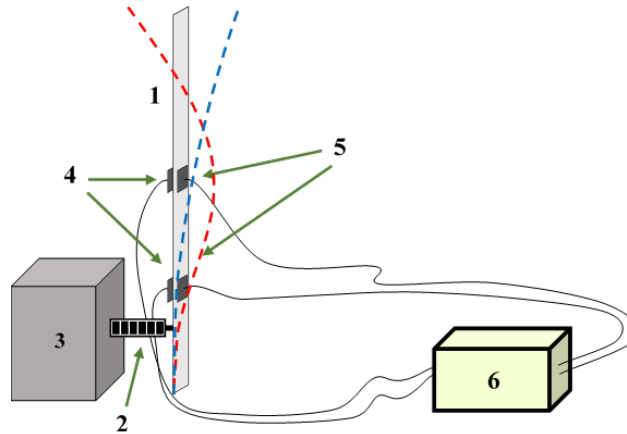


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – алюминиевая балка; 2 – пьезоэлектрический стержень-толкатель; 3 – неподвижное основание; 4 – сенсоры; 5 – актуаторы; 6 – дискретный контроллер.

Численное исследование

В рамках экспериментального исследования сравнивались локальный и модальный подходы, результаты приведены в [4]. В дальнейшем, уже в рамках численного исследования, предложенные системы управления были существенно оптимизированы [7]. Методика численного эксперимента предполагала моделирование объекта управления в конечно-элементном пакете ANSYS и дальнейшее вычисление частотных характеристик замкнутой системы в пакете Matlab [8]. Важно, что в численной модели учитывались особенности экспериментальной установки: к АЧХ и ФЧХ балки, полученным в ANSYS, добавлялись характеристики усилителей и ФНЧ, таким образом, модель учитывала сдвиг фазы на высоких частотах; также моделировался эффект перетекания заряда с электродов сенсоров на низких частотах, тоже приводящий к изменению фазы и снижению амплитуды сигнала. В численном исследовании параметры передаточных функций в контурах управления подбирались с помощью специально созданного алгоритма оптимизации [8].

Синтезированные в результате данного исследования системы управления, работающие по модальному, локальному принципу или по принципу управления формой, описаны в [7]. Последней созданной системой была модальная система с наблюдателями. Для нее использовалась то же расположение сенсоров и актуаторов, что и в эксперименте, но было реализовано управление по трем нижшим формам колебаний объекта вместо двух. Наблюдение и управление описывается следующими формулами:

$$\dot{q} = \bar{A}q + Bu + L(y - \hat{y}), \quad u = -Rq, \quad \hat{y} = Cq$$

где q – вектор оценок обобщенных координат и скоростей, u – вектор управляющих воздействий, y и \hat{y} – векторы измеренных сигналов и их оценок, \bar{A} , B и C – матрицы модели объекта, используемой в наблюдателе, L и R – матрицы наблюдения и управления. Они были заданы следующим образом:

$$L = \begin{bmatrix} K^L \\ K^{Ld} \end{bmatrix} T, \quad R = F \begin{bmatrix} K^R & K^{Rd} \end{bmatrix}, \quad C(1:2,1:3)T = I_{2 \times 2}, \quad FB(4:6,1:2) = I_{2 \times 2}$$

где K^L, K^{Ld}, K^R, K^{Rd} – диагональные матрицы размером 3×3 , заданные с помощью программы оптимизации.

На рис. 2 сравнивается эффективность работы всех синтезированных систем управления: анализируется АЧХ колебаний точки на верхнем конце балки в зависимости от частоты внешнего воздействия.

В табл. 1 приведены данные об изменении амплитуды колебаний на пяти нижних резонансах изгибных колебаний балки в результате включения системы управления для всех созданных систем. Видно, что модальная система с использованием наблюдателей наиболее эффективно работает не только на первом и на втором резонансе, но и на последующих резонансных частотах (с третьей по пятую).

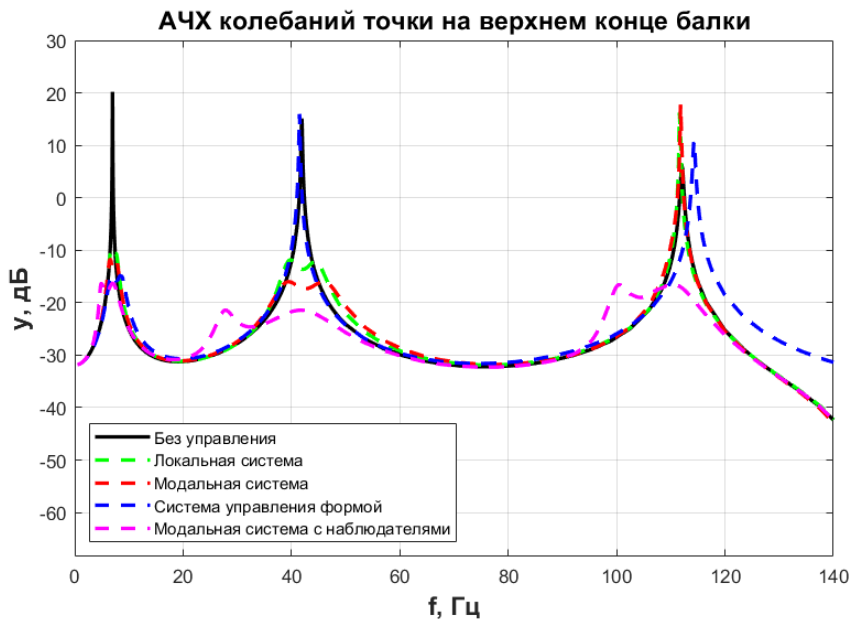


Рис. 2. АЧХ балки для различных систем управления.

Таблица 1. Эффективность различных систем управления на пяти низших резонансах.

Система управления	Δy_1	Δy_2	Δy_3	Δy_4	Δy_5
Локальная	-30,78 дБ	-26,93 дБ	+9,91 дБ	-1,38 дБ	-5,03 дБ
Модальная	-31,96 дБ	-31,06 дБ	+11,42 дБ	-8,73 дБ	-14,72 дБ
Управление формой	-35 дБ	+0,86 дБ	+4,33 дБ	+0,33 дБ	+14,27 дБ
Модальная с наблюдателями	-36,5 дБ	-36,52 дБ	-22,85 дБ	-15,94 дБ	-24,51 дБ

Выводы

В работе было проведено численное сравнение нескольких методов активного управления колебаниями на примере задачи гашения вынужденных резонансных колебаний тонкой металлической балки. Были рассмотрены локальный метод, метод управления формой, модальный метод с использованием как модальных фильтров, так и наблюдателей. Показано, что наиболее эффективным является модальный метод с наблюдателями: он позволил достичь наибольшего снижения резонансных амплитуд не только на первых двух резонансах, что являлось основной задачей синтезированных систем управления, но и на последующих резонансах (с третьего по пятый). Такой результат объясняется тем, что наблюдатели позволяют значительно точнее, нежели модальные фильтры, извлекать информацию об активизации отдельных мод объекта. Кроме того, данный подход, в отличие от других методов, не предполагает оптимизацию передаточных функций в контурах управления, а лишь подбор элементов диагональных матриц, что делает его более простым в применении. В дальнейшем планируется реализация данного подхода на новой экспериментальной установке.

Литература

1. S.-M. Kim, S. J. Elliott, M. J. Brennan // Decentralized control for multichannel active vibration isolation, IEEE Trans. Cont. Syst. Technol., 9:1 2001. 93–100
2. L. A. Gould, M. A. Murray-Lasso // On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback, IEEE Trans. Autom. Control, 11:4 1966. 729–737
3. L. Meirovitch, H. Baruh // The implementation of modal filters for control of structures, J. Guid. Cont., 8:6 1985. 707–716
4. A. K. Belyaev, A. V. Fedotov, H. Irschik, M. Nader, V. A. Polyanskiy, N. A. Smirnova // Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, Struct. Cont. Health Monit., 2018. 25:e2105
5. А. А. Воронов // Теория автоматического управления. Часть 2. 1986. 504 с.
6. M. Nader // Compensation of vibrations in smart structures: shape control, experimental realization and feedback control. 2008. 182 p.
7. A. V. Fedotov, A. K. Belyaev, V. A. Polyanskiy, N. A. Smirnova // Local, modal and shape control strategies for active vibration suppression of elastic systems: experiment and numerical simulation. In: V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (eds) Mech. Cont. Solids Struct. Adv. Struct. Mater., 164 2022. 151–169, Springer, Cham
8. A. V. Fedotov // Active vibration suppression of Bernoulli-Euler beam: experiment and numerical simulation, Cybern. Phys., 8:4 2019. 228–234

РАСКАЧИВАНИЕ КАЧЕЛЕЙ СТОЯЩИМ НА НИХ ЧЕЛОВЕКОМ

Формальский А.М., Климина Л.А.

НИИ механики МГУ
formal@imec.msu.ru

Аннотация. Модель качелей выбрана в виде однозвенного маятника, который может колебаться в вертикальной плоскости относительно точки подвеса или вращаться вокруг нее. Стоящий на качелях человек моделируется материальной точкой, расположенной в его центре масс. Центр масс находится на минимально возможном расстоянии от точки подвеса, когда человек стоит на качелях, и на максимально возможном, когда он приседает. Расстояние между точкой подвеса качелей и центром масс человека играет роль ограниченного управляющего воздействия. В виде обратной связи построено оптимальное управление, при котором по окончании каждого полуколебания угол отклонения качелей от вертикали достигает экстремума.

Введение

Раскачиваясь *стоя*, человек в какие-то моменты времени приседает на качелях, опуская свой центр масс, а в другие моменты встает, поднимая центр масс. Поэтому в качестве модели человека, раскачивающегося на качелях *стоя*, часто рассматривается маятник переменной длины. При этом управление раскачиванием нередко строится в виде периодической функции времени, и задача организации колебаний качелей сводится к задаче *параметрического возбуждения* колебаний. В настоящей работе управление строится в виде обратной связи. Подход к синтезу оптимального управления качелями, развитый в настоящем докладе, представляется адекватным и естественным.

Поведению человека, качающегося на качелях, посвящено довольно много исследований. Здесь, в списке литературы приведено лишь несколько из них. В [1, 2] рассматривается задача о раскачивании качелей человеком, стоящем на них, в [3] управление качелями построено в виде обратной связи, в [4] изучается общая проблема оптимального управления колебаниями.

Механическая и математическая модели качелей

На рис. 1 показана схема качелей, представляющих собой маятник OB , в котором O – неподвижная точка подвеса, а B – свободный конец. Через φ обозначен угол отклонения качелей от вертикали, C – центр масс маятника, M – материальная точка, которая используется в качестве модели человека, при этом считается, что она расположена в центре масс человека и ее масса M равна его массе, $\rho = OM$ – расстояние от точки подвеса O до точки M .

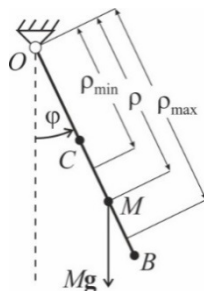


Рис. 1. Модель качелей со стоящим на них человеком.

Постоянные $\rho_{\min} > 0$ и $\rho_{\max} > 0$ обозначают соответственно минимально и максимально возможные расстояния точки M от точки подвеса, т.е.:

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (1)$$

Качели – система с одной степенью свободы, угол φ – ее обобщенная координата. Расстояние $\rho = OM$ считаем *управляющим* параметром. Кусочно-непрерывную функцию $\rho(\varphi, \dot{\varphi})$, удовлетворяющую неравенствам (1), будем называть допустимым управлением, множество таких функций обозначим через Ω .

Уравнение движения качелей запишем в виде:

$$\frac{d}{dt} \left[(I + M\rho^2) \dot{\varphi} \right] = -(M\rho + mb) g \sin \varphi - \chi \dot{\varphi}. \quad (2)$$

Это уравнение описывает изменение момента количества движения системы относительно точки подвеса O под влиянием моментов сил тяжести и трения. В квадратных скобках уравнения (2) выписано выражение для

кинетического момента K маятника с человеком:

$$K = (I + M\rho^2)\dot{\varphi}. \quad (3)$$

В соотношениях (2) и (3) I – момент инерции маятника относительно точки O , $b = OC$, m – масса маятника, g – ускорение свободного падения, $\chi > 0$ – коэффициент вязкого трения в точке подвеса. Уравнения (2), (3) можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{I + M\rho^2}, \quad \dot{K} = -(M\rho + mb)g\sin\varphi - \frac{\chi K}{I + M\rho^2}. \quad (4)$$

При условии $K \neq 0$, наряду с системой (4), будем рассматривать также одно уравнение первого порядка – на плоскости фазовых переменных φ и K или на фазовом цилиндре:

$$\frac{dK}{d\varphi} = -\frac{(M\rho + mb)(I + M\rho^2)g\sin\varphi}{K} - \chi. \quad (5)$$

Оптимальное управление раскачиванием качелей

Целью управления качелями является их раскачивание (или торможение). Это означает, что требуется построить допустимое управление, при котором амплитуда колебаний качелей возрастает (или убывает). Будем строить в некотором смысле *оптимальное* управление – в виде обратной связи: $\rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi})$.

Процесс раскачивания качелей можно представить в виде последовательности полу-колебаний. Полу-колебанием качелей назовем движение, в начале и в конце которого их угловая скорость $\dot{\varphi}$ обращается (на мгновение) в ноль. Между этими мгновениями угловая скорость $\dot{\varphi}$ сохраняет знак, т.е. качели вращаются в одну сторону. После обращения угловой скорости $\dot{\varphi}$ в ноль она меняет знак и начинается следующее полу-колебание, во время которого качели вращаются в противоположную, по сравнению с предыдущим полу-колебанием, сторону.

Поставим задачу синтеза *оптимального* управления $\rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Omega$ раскачиванием качелей следующим образом. Пусть задан начальный момент времени, например $t = 0$, и $\varphi(0) \neq 0$, а $\dot{\varphi}(0) = 0$. Требуется найти управление $\rho(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Omega$, при котором достигается *максимум* абсолютной величины $|\varphi(t)|$ в конце следующего полуколебания, т.е. в некоторый момент времени $t = \theta > 0$, когда угловая скорость $\dot{\varphi}(\theta)$ обращается в ноль. При этом на интервале $0 < t < \theta$ угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ знака не меняет. Сформулированную задачу запишем символически следующим образом:

$$\text{Найти: } \arg \max_{\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}} [\varphi(\theta) \setminus \dot{\varphi}(\theta) = 0, \theta > 0]. \quad (6)$$

Иначе говоря, задача (6) состоит в отыскании *оптимального* управления, при котором по окончании *каждого* полуколебания свободный конец B качелей поднимается на *максимально* возможную высоту.

Рассматривая уравнение (5), нетрудно убедиться в том, что управление $\rho(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Omega$, решающее задачу (6), должно максимизировать производную $dK/d\varphi$ при каждом текущем значении угла φ . Пользуясь формулой (5) для производной $dK/d\varphi$, находим оптимальное управление:

$$\begin{aligned} \rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi}) &= \arg \max_{\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}} \frac{dK}{d\varphi} = \arg \max_{\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}} \left[-\frac{(M\rho + mb)(I + M\rho^2)g\sin\varphi}{K} - \chi \right] = \\ &= \begin{cases} \rho_{\max} & \text{при } \sin\varphi/K < 0 \\ \rho_{\min} & \text{при } \sin\varphi/K \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \rho_{\max} & \text{при } \dot{\varphi}\sin\varphi < 0 \\ \rho_{\min} & \text{при } \dot{\varphi}\sin\varphi \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Картина синтеза оптимального управления (7) показана на рис. 2. Из рассмотрения выражения (7) и рис. 2 следует, что при условии $\dot{\varphi}\sin\varphi < 0$ имеет место равенство $\rho = \rho_{\max}$, т.е. центр масс человека M должен находиться на максимально возможном расстоянии ρ_{\max} от точки подвеса O , для чего человек должен присесть на качелях. В этом случае момент силы тяжести, приложенный к качелям со стороны человека, достигает максимального по модулю значения. При пересечении качелями вертикального положения, в момент, когда угол φ обращается в ноль, человек должен мгновенно встать. При этом его момент инерции относительно точки подвеса O мгновенно уменьшится, а значение угловой скорости $\dot{\varphi}$ мгновенно увеличится (по модулю). После обращения угла φ в ноль, «через мгновение» выполнится условие $\dot{\varphi}\sin\varphi > 0$, и расстояние ρ должно оставаться равным ρ_{\min} до мгновения, когда угловая скорость $\dot{\varphi}$ обратится в ноль. После этого человек должен

опять мгновенно присесть на качелях и момент его силы тяжести относительно точки подвеса мгновенно увеличится по модулю. Указанная последовательность изменения расстояния ρ при оптимальном управлении будет повторяться.

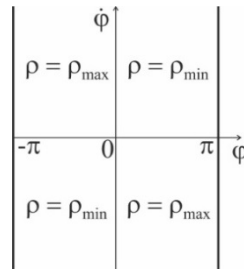


Рис. 2. Картина синтеза оптимального управления на развёртке фазового цилиндра.

Поменяв в формулах (7) и на рис. 2 местами условия для определения величин ρ_{min} и ρ_{max} , получим выражения для оптимального управление *торможением* качелей.

Численные исследования

На рис. 3 и 4 приведены результаты численных исследований, проведенных при некоторых значениях параметров системы.

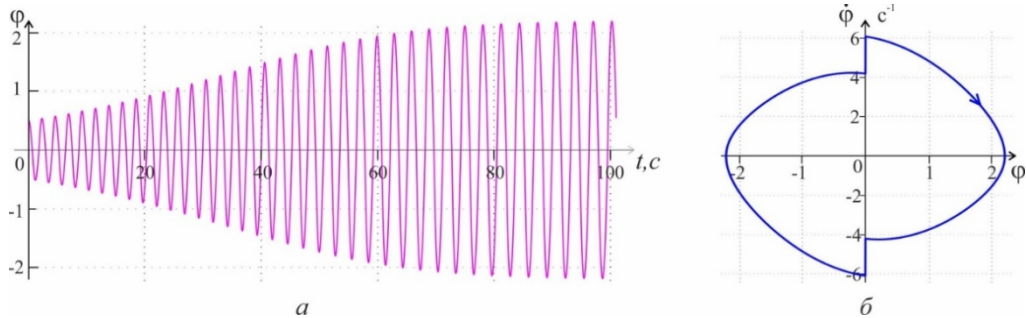


Рис. 3. Переходный процесс и установившиеся колебания при коэффициенте вязкого трения $\chi = 30 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

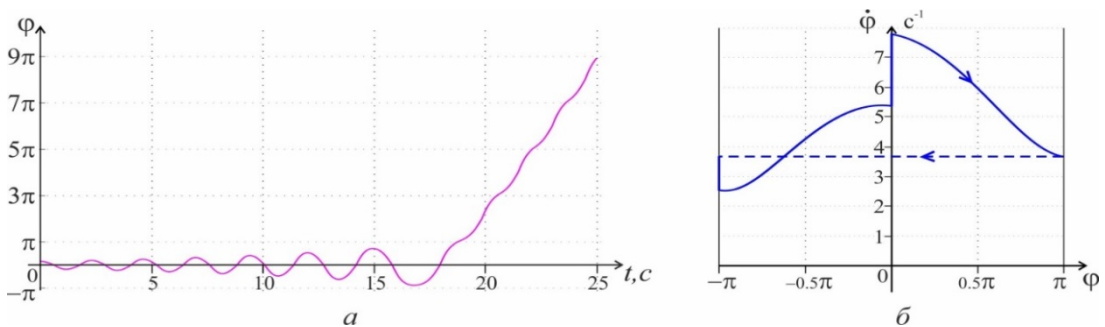


Рис. 4. Переходный процесс и установившиеся вращения при коэффициенте вязкого трения $\chi = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Заключение

Аналитически, в виде обратной связи построено оптимальное управление раскачиванием качелей, при котором в конце каждого полупериода они поднимаются на максимально возможную высоту.

При относительно большом трении в точке подвеса качели с построенным оптимальным управлением выходят на установившийся режим колебаний с максимально возможной амплитудой, а при относительно небольшом трении – на режим вращения с постоянным периодом.

Литература

1. Магнус К. Колебания. М.: Мир. 1982. 304 с.
2. Case W.B. The Pumping of a Swing from the Standing Position // American J. Physics. 1996. V. 64 (3). P. 215–220.
3. Wirkus S., Rand R., Ruina A. How to Pump a Swing // The College Mathematics J. 1998. V. 29 (4) P. 266–275.
4. Черноушко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. Наука, 1980. 384 с.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАНЕВРОВ РАСХОЖДЕНИЯ СУДОВ В ОТКРЫТОМ МОРЕ

Цаплин В.А., Пашковский Д.М., Груздев И.Е., Кондратенко Ф.И., Кузькин В.А.

*Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург,
Россия*
mr.vivivilka@icloud.com

Аннотация: В работе предложен алгоритм построения маневров расхождения в открытом море с учетом международных правил предупреждения столкновений судов в море 1972 года (МППС-72). В начале алгоритм анализирует навигационную обстановку в радиусе 12 миль от судна, т.е. определяет и ранжирует суда-цели по степени опасности, а затем на основе критериев выбирает соответствующий сценарий расхождения. На основе выбранного сценария строится траектория маневра расхождения с учетом МППС-72. В результате работы алгоритма строится безопасная и оптимальная траектория маневра с возвратом на исходный маршрут. Алгоритм расхождения прошел тестирование в симуляторах и на реальных судах.

Работа выполнена как часть проекта 0784-2020-0021 при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Введение

Создание систем для автоматического управления судами является актуальным для многих компаний, занимающихся морскими грузоперевозками [1–3]. Суда с функционирующими на борту интеллектуальными системами позволят судоходным компаниям снизить эксплуатационные расходы и сделать грузоперевозки более безопасными. За счет внедрения таких систем возможно сокращение экономических затрат на эксплуатацию судов и грузоперевозки.

В настоящей работе предлагается алгоритм построения маневров расхождения судов в открытом море с учетом навигационных опасностей [4]. На вход алгоритму подаются позиции, скорости и размеры судов, находящихся в радиусе 12 миль, статические ограничения, минимальная дистанция расхождения и другие. На основе входных данных алгоритм перебирает возможные траектории расхождения и проверяет их на безопасность. При переборе алгоритм варьирует курс и скорость судна. В результате выбирается траектория, удовлетворяющая следующим критериям: безопасность, минимальное количество сегментов, соответствие МППС-72 [5, 6]. Разработанный алгоритм тестировался на симуляторах и реальных судах [7]. По итогам тестирования алгоритм построил безопасную и оптимальную траекторию расхождения в более чем 90% опасных ситуаций.

Для демонстрации работы алгоритма расхождения была создана Web – платформа, позволяющая рассчитывать и визуализировать построенные маневры, а также создавать и редактировать сценарии расхождения. Данная платформа может использоваться, в частности, для образовательных целей в морских университетах, а также для разработки и тестирования новых алгоритмов расхождения.

Основная часть

Алгоритм расхождения принимает на вход информацию о навигационной обстановке в радиусе 12 миль от судна, которая включает в себя:

- позиции, скорости, размеры и тип судов-целей в радиусе 12 миль от текущего положения нашего судна;
- координаты контуров статических ограничений (острова, буйки, системы разделения движения и другое);
- время упреждения и дистанцию расхождения;
- допустимые дистанция кратчайшего сближения (СПА) и время кратчайшего сближения (ТСРА);
- дальность видимости и иные.

Следующим шагом на основе параметров входного файла анализируется навигационная обстановка:

1. Каждому судну-цели присваивается одна из трех меток: опасное судно, потенциально опасное судно или неопасное судно.
2. В каждой из трех подгрупп суда-цели ранжируются по степени опасности на основе СПА и ТСРА.
3. На основе ранжированного списка определяется самое опасное судно, с которым и будет происходить расхождение.

Для самой опасной цели выбирается сценарий расхождения на основе формализованных критериев с учетом МППС-72. В зависимости от выбранной ситуации расхождения при построении траектории маневра осуществляется соответствующий данному сценарию перебор курсов и скоростей нашего судна. После каждого нового сегмента маневра построенная траектория проверяется на безопасность, а затем повторно оценивается навигационная обстановка. Если статус опасности судов изменился или добавились новые цели, то алгоритм строит траекторию расхождения с новой самой опасной целью с текущей позиции нашего судна. В конце если

удалось разойтись со всеми опасными целями, то стоит маневр возвращения на исходный маршрут нашего судна. Для того чтобы сократить количество сегментов в траектории маневра расхождения, алгоритм отправляет безопасный маневр в оптимизатор, который сокращает количество сегментов траектории. После оптимизации траектория маневра остается безопасной и не нарушает МППСС-72.

На рис.1 приведен пример построенного маневра расхождения с пятью опасно сближающимися судами и статическим ограничением.

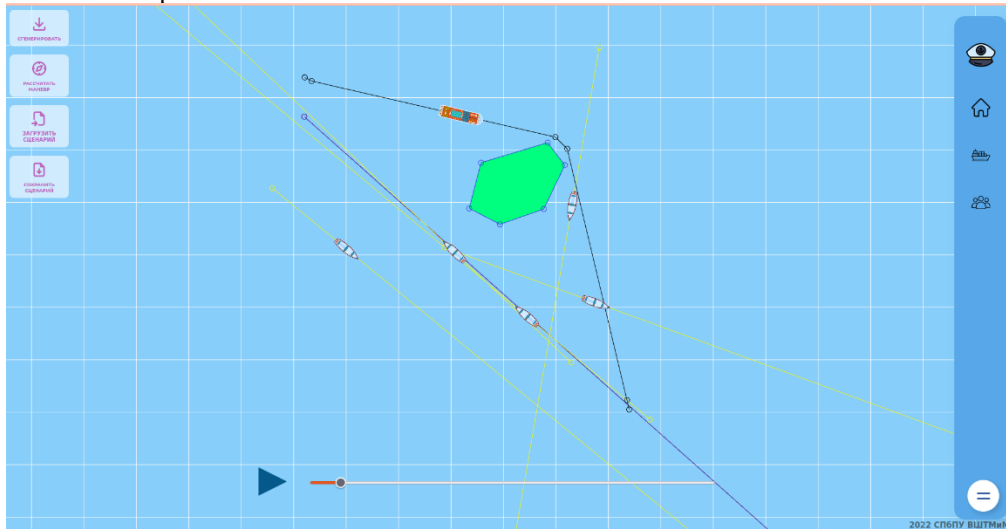


Рис. 1. Пример маневра расхождения (черная линия).

На рис. 1 изначальный маршрут судна показан синей линией, а траектории судов целей – желтыми. В результате были определены опасные цели, построен безопасный маневр расхождения (черная линия).

Заключение

В работе предложен алгоритм расхождения, который оценивает навигационную обстановку в радиусе 12 миль от судна, и в случае наличия опасности строит безопасную траекторию маневра расхождения с учетом МППСС-72. Также для визуализации и тестирования работы алгоритма расхождения был создан Web-сервис в виде клиент-серверного приложения. Сервис позволяет сгенерировать опасную ситуацию расхождения, рассчитать маневр расхождения, симулировать движения судов по траекториям маневрирования, редактировать параметры сценария. Данная платформа может использоваться для образовательных целей в морских университетах, а также для разработки и тестирования новых алгоритмов расхождения.

Список литературы

1. Дубовицкий В. А., Огороков Н. С. Концепция интеллектуальной навигационной сети для применения в системах автономного судовождения // Актуальные исследования. 2022. №21 (100). С. 10–20. URL: <https://apni.ru/article/4178-kontseptsiya-intellektualnoj-navigatsionnoj>
2. Астреин В. В. Анализ аварийности флота и развития СУБ // Материалы четвертой регион. науч.-техн. конф., 19–21 сентября 2005 г. – Новороссийск: МГА им. адмирала Ф. Ф. Ушакова, 2005. – С. 16–19.
3. Астреин В. В. Анализ нарушений МППСС-72: сб. науч. тр. ФГОУ ВПО «МГА им. Адмирала Ф. Ф. Ушакова. – Новороссийск: МГА им. адмирала Ф. Ф. Ушакова, 2006. – Вып. II. – С. 23–25.
4. Программа для расчета и визуализации маневров расхождения судов коммерческого флота в открытом море с учетом навигационных опасностей // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022666767, 2022.
5. Международные правила предупреждения столкновений судов в море 1972 (МППСС-72). – М.: РКонсульт, 2004. – 80 с.
6. Яскевич А. П. Комментарии к МППСС-72. – М.: Транспорт, 1990. – 479 с.
7. SeaNews: Росморпорт начал испытания безэкипажного судовождения [Электронный ресурс] //URL:<https://seanews.ru/2020/11/16/ru-rosmorport-nachal-ispytanija-bezjkipazhnogo-sudovozhdenija>

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Чекина Е.А., Чекин А.М.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия
chekina_ev@mail.ru

Аннотация. Исследуются предельные режимы движения твердого тела по шероховатой горизонтальной плоскости посредством двух масс, перемещающихся внутри тела по гармоническому закону. В пространстве параметров задачи построены области существования различных предельных режимов. Показана единственность данных режимов. Исследован вопрос о нахождении значений параметров задачи, соответствующих максимальной средней скорости тела за период.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта РФФИ № 19-11-00116.

Введение

Задача о движении твердого тела по горизонтальной поверхности посредством перемещения с внутренних элементов рассматривалась во многих работах в различных постановках [1–3]. Исследование динамики таких механических систем представляет интерес для проектирования и создания так называемых капсульных роботов, не требующих внешних движителей и благодаря этому устойчивых к внешней среде. В [2] дано полное качественное исследование динамики системы, состоящей из твердого тела и частицы, движущейся по окружности внутри тела. В [3] была рассмотрена более общая механическая система, включающая две подвижные точечные массы, перемещающиеся внутри тела по взаимно перпендикулярным направлениям. Были найдены периодические режимы движения и дано их качественное описание.

Данная работа является логическим продолжением работы [3]. Здесь, в частности, исследованы новые периодические режимы движения, а также исследовано движение, асимптотически приближающееся к периодическому режиму.

Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело (корпус), несущее две внутренние подвижные массы (рис.1). Тело движется по горизонтальной шероховатой поверхности, а внутренние массы перемещаются в вертикальной плоскости по взаимно перпендикулярным направляющим. Между телом и поверхностью действуют силы сухого кулоновского трения. Далее рассматриваются только такие параметры задачи, при которых тело не отрывается от поверхности.

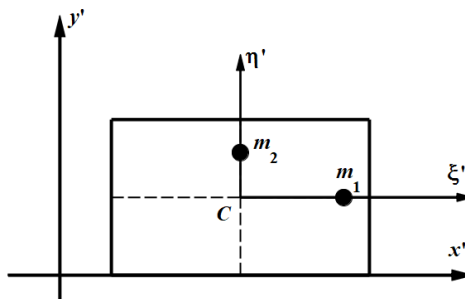


Рис. 1. Тело, движущееся посредством двух внутренних масс.

Пусть $x'y'$ – координаты центра масс корпуса в абсолютной связанной с опорной поверхностью системе координат, ось абсцисс которой направлена вдоль движения корпуса. Введем также жестко связанную с корпусом систему координат $\xi'\eta'$, оси которой расположены по направляющим внутренних масс. Будем предполагать, что внутренние массы перемещаются по гармоническому закону:

$$\begin{cases} \xi' = a \cos(\omega t' + \phi_0) \\ \eta' = b \sin \omega t' \end{cases} \quad (1)$$

Тогда движение корпуса без отрыва от горизонтальной поверхности описывается уравнением [5]

$$\ddot{x} + \ddot{\xi} = \Phi_c. \quad (2)$$

где

$$\Phi_c = \begin{cases} -k(\mu - \sin t)\text{sign}\dot{x}, & \dot{x} \neq 0 \\ -\cos(t + \phi_0), & \dot{x} = 0 \text{ and } |\cos(t + \phi_0)| \leq k(\mu - \sin t), \\ -k(\mu - \sin t)\text{sign}(\sin(t + \phi_0)), & \dot{x} = 0 \text{ and } |\cos(t + \phi_0)| > k(\mu - \sin t) \end{cases} \quad (3)$$

Безразмерная переменная x и безразмерное время t введены по формулам

$$x' = \frac{am_1}{m} x, \quad t' = \frac{t}{\omega}. \quad (4)$$

где $m = m_0 + m_1 + m_2$, m_0 – масса тела, m_1 и m_2 – массы частиц, движущихся вдоль горизонтальной и вертикальной направляющих соответственно. Исследуемая задача содержит три параметра ϕ_0 , k и μ , где

$$k = f \frac{m_2 b}{m_1 a}, \quad \mu = \frac{mg}{bm_2 \omega^2}, \quad (5)$$

f – коэффициент трения между корпусом и поверхностью.

Условие движения без отрыва от поверхности имеет вид $\mu \geq 1$.

В работе [5] было показано, что пространство параметров ϕ_0 , k и μ задачи может быть разделено на три области с различным характером движения корпуса.

1. Область, в которой ускорение всегда противоположно скорости. В этом случае тело, обладая не нулевой начальной скоростью за конечное время останавливается. Данная область определяется неравенством

$$\mu > \frac{\sqrt{1 + 2|\sin \phi_0| k + k^2}}{k}. \quad (6)$$

2. Область, в которой на периоде времени 2π существует как интервал разгона, где направления ускорения и скорости тела совпадают, так и интервал замедления, где скорость и ускорение противоположны по направлению. В этой области существует следующий режим движения с периодически меняющейся скоростью. Тело начинает движение в зоне разгона, затем останавливается в зоне замедления и находится в покое до следующего интервала разгона [5]. Данная область определяется неравенствами

$$\frac{\sqrt{1 - 2|\sin \phi_0| k + k^2}}{k} < \mu < \frac{\sqrt{1 + 2|\cos \phi_0| k + k^2}}{k} \quad (7)$$

3. Область, в которой за период времени 2π присутствуют две интервала разгона и два интервала замедления.

$$\mu < \frac{\sqrt{1 - 2|\sin \phi_0| k + k^2}}{k}. \quad (8)$$

Целью данной работы является полное исследование режимов движения в третьей области и построение подобластей параметров, в которых возможны соответствующие режимы. Исследуемая область представлена на рис. 2а, она ограничена верхней поверхностью и плоскостями $\mu = 1$, $k = 0$.

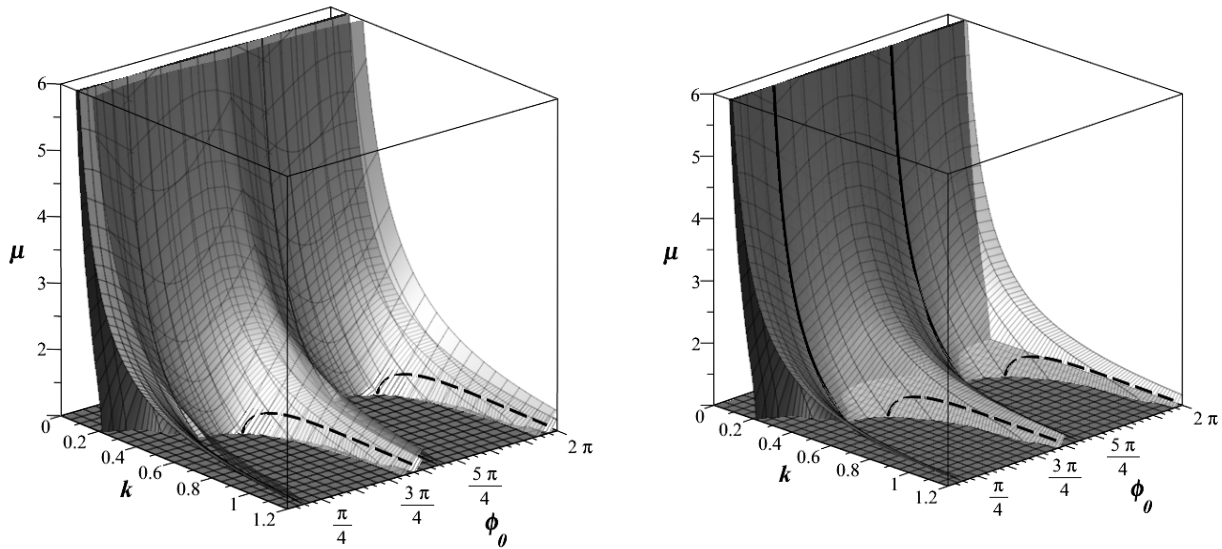
Режимы движения в области с двумя зонами разгона и замедления

Исследование показало, что в области 3 возможны 6 предельных режимов движения. На рис. 2б в пространстве параметров задачи представлены соответствующие им подобласти.

Верхняя граница отделяет подобласть параметров первого режима, для которых движение корпуса, независимо от начальной скорости, за конечное число периодов выходит на режим с периодически меняющейся скоростью с двумя остановками (залипаниями) в зонах замедления. Исключения составляют небольшие подобласти, отделенные штрихованными кривыми, вдоль которых происходит касание данной границы с границей всей третьей области. Эти участки поверхности отделяют подобласть параметров второго (ближняя) и третьего (дальняя) режима, для которых движение происходит с одной остановкой за период. Данная остановка происходит с залипанием в верхней зоне замедления для второго режима и нижней для третьего. Опять же, тело выходит на описанный режим с периодически меняющейся скоростью за конечное число периодов, независимо от своей начальной скорости.

Точки, лежащие между верхней и нижней границей, соответствуют параметрам для которых движение происходит с одной остановкой без залипания в зоне разгона и одной остановкой с залипанием в зоне замедления за период. Таким образом, корпус будет двигаться с периодически меняющейся скоростью с откатом. Две кривые, показанные на рис. 2б сплошным черным цветом, являются местом касания верхней и нижней границ. Для точек, лежащих между ними залипание происходит в верхней зоне замедления (соответствует четвертому режиму), для остальных – в нижней (соответствует пятому режиму).

Нижняя граница и плоскости $k = 0, \mu = 1$ отсекают подобласть параметров шестого режима, для которых движение происходит с остановками вне зон замедлений. Показано, что такой режим движения не является периодическим, но асимптотически к нему приближается.



а) Включая границу области

б) Без границы области

Рис. 2. Области параметров для режимов с двумя зонами разгона

Для наглядности представлены два сечения для $\phi_0 = 0$ (рис. 3), и $\phi_0 = 47\pi/128$ (рис. 4). На данных сечениях арабской цифрой 1 отмечена подобласть режимов движения с двумя залипаниями (первый режим), цифрой 2 – режимов движения с одним залипанием (второй и третий режимы), цифрой 3 – режимов движения без залипаний (шестой режим).

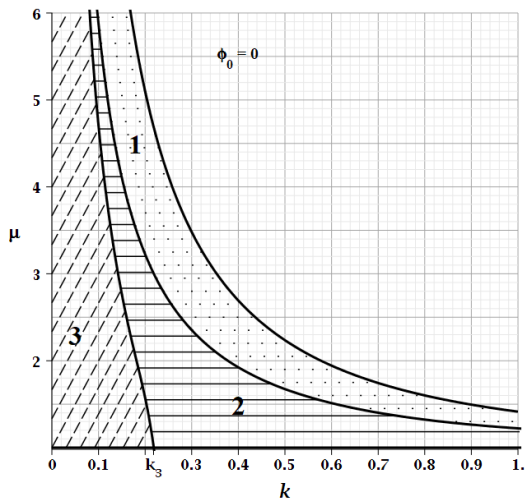


Рис. 3.

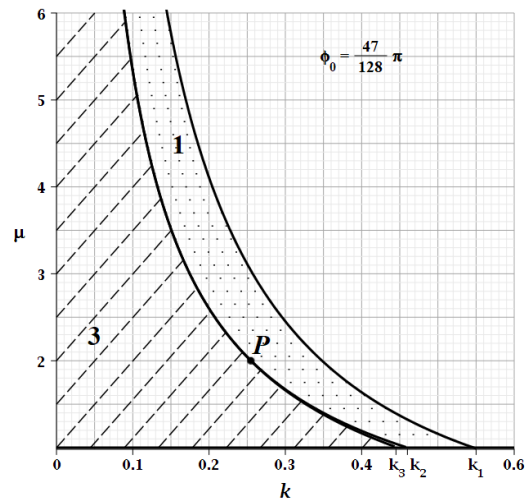


Рис. 4.

Заключение

В работе были исследованы предельные режимы движения твердого тела по шероховатой горизонтальной плоскости посредством двух масс. В пространстве параметров задачи ϕ_0, k и μ построены области существования различных предельных режимов. Показана единственность данных режимов. Исследован вопрос о нахождении значений параметров задачи, соответствующих максимальной средней скорости тела за период.

Литература

1. Черноушко Ф. Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН, 2005. 405, № 1. — С. 56–60.
2. Bardin B.S., Panev A.S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018, Vol. 14, no. 4, pp. 519-542.
3. Evgeniya A. Chekina, Periodic body motions along a horizontal rough surface by moving two internal masses // J. Phys.: Conf. Ser., 2021, 1959 012014

ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ПОДВИЖНЫХ ВНУТРЕННИХ МАСС

Черноусько Ф.Л.

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
chern@ipmnet.ru

Аннотация. Рассматриваются способы переориентации твердого тела при помощи нескольких вспомогательных внутренних масс, совершающих определенные движения относительно тела. Предложено несколько вариантов алгоритмов, позволяющих осуществить заданную переориентацию посредством трех или одного плоского поворота.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 21-51-12004.

Введение

Изменение пространственной ориентации твердого тела может быть реализовано при помощи вспомогательных внутренних масс, снабженных актюаторами и совершающих определенные движения относительно несущего тела. В случае одной подвижной точечной массы, рассмотренном в работах [1, 2], оказывается, что ее движение должно проходить в области вблизи центра масс тела, что нежелательно с точки зрения конструктивных соображений. При наличии нескольких (четырех и более) подвижных масс их можно разместить достаточно произвольным образом относительно тела, а также существенно ограничить области их движений. Рассмотрено несколько способов управления движением внутренних масс, позволяющих осуществить заданную переориентацию тела посредством трех плоских поворотов [3–6] или одного плоского (Эйлера) поворота [7].

Основной текст

Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела P массы M и n материальных точек Q_i с массами m_i , $i = 1, \dots, n$. Точки Q_i снабжены актюаторами и могут перемещаться относительно тела P . Они взаимодействуют с телом P , но не взаимодействуют с внешней средой и друг с другом. Предполагается, что внешние силы, действующие на систему, пренебрежимо малы. Это допущение справедливо для космических аппаратов, а также для других подвижных объектов и мобильных роботов в случае их быстрого поворота относительно центра масс.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ система покоится. Обозначим через C центр масс твердого тела P и введем декартову систему координат $Cx_1x_2x_3$, связанную с телом P . Пусть $\mathbf{r}_i = CQ_i$ – радиус-вектор точки Q_i и $\dot{\mathbf{r}}_i$ – ее скорость относительно системы $Cx_1x_2x_3$. Используя законы сохранения импульса и кинетического момента, получим уравнение движения системы в виде

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - (M + m)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) \times \left[\sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) \right] + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{J} – тензор инерции твердого тела P относительно его центра масс C , $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела P , m – суммарная масса всех подвижных точек Q_i .

Задача переориентации состоит в переводе тела P из начального состояния покоя при его исходной ориентации в конечное состояние покоя при заданной конечной ориентации при помощи управляемых движений подвижных масс Q_i , $i = 1, \dots, n$.

Положим

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i^0 + \boldsymbol{\rho}_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где \mathbf{r}_i^0 – постоянные векторы, на которые наложим условие

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^0 = 0, \quad (3)$$

а $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ – переменные векторы, подлежащие определению.

Введем в рассмотрение виртуальное твердое тело Q^0 массы m из (1), состоящее из масс Q_i , фиксированных в точках \mathbf{r}_i^0 из (2), $i = 1, \dots, n$. В силу условия (3), центр масс тела Q^0 совпадает с центром масс C тела P . Обозначим через Cx_j , $j = 1, 2, 3$, – главные центральные оси инерции твердого тела, состоящего из тел P и Q^0 .

Рассматриваются три варианта управления подвижными массами Q_i :

$$\begin{aligned} \text{A: } & \rho_i(t) = \rho(t), \quad i = 1, \dots, n; \\ \text{B: } & \rho_k(t) \neq 0, \quad \rho_i(t) = 0, \quad i \neq k, \quad i = 1, \dots, n; \\ \text{C: } & \mathbf{r}_{i+3}(t) = -\mathbf{r}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad n = 6. \end{aligned} \quad (4)$$

В алгоритмах А и В требуемая переориентация тела P достигается путем трех последовательных плоских поворотов тела вокруг осей Cx_j , $j = 1, 2, 3$.

Как выяснилось при построении оптимальных движений одной подвижной массы в случае плоского поворота [1, 2], оптимальные траектории этой массы представляют собой окружности. Поэтому именно круговые траектории используются и в случае нескольких подвижных масс.

Для каждого плоского поворота, например, вокруг оси Cx_j , в варианте А все массы Q_i вращаются синхронно по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси Cx_j . В варианте В только одна масса Q_k вращается по окружности в плоскости, перпендикулярной оси Cx_j , а остальные массы покоятся. Радиусы a_i этих окружностей могут быть сделаны достаточно малыми за счет увеличения числа оборотов N по окружностям. Справедлива следующая оценка $a_i \sim 1/\sqrt{N}$.

Число n масс Q_i в вариантах А и В целесообразно взять равным 4, а векторы \mathbf{r}_i^0 выбрать так, чтобы центр масс C тела P находился внутри тетраэдра с вершинами в точках \mathbf{r}_i^0 , $i = 1, 2, 3, 4$.

Вариант С предполагает наличие трех пар подвижных точек ($n=6$) с одинаковыми массами, причем обе точки каждой пары зеркально симметричны друг другу относительно центра масс C (4). Этот вариант позволяет осуществить любую заданную переориентацию тела P посредством одного плоского (Эйлера) поворота вокруг некоторой оси. Для этого три пары подвижных точек должны двигаться по некоторым окружностям в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. Получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, решение которой описывает требуемое движение подвижных масс Q_i , $i = 1, \dots, 6$, обеспечивающее заданную переориентацию посредством одного плоского поворота.

Полученная система дифференциальных уравнений может быть использована для осуществления любого заданного пространственного движения твердого тела, то есть заданной зависимости $\omega(t)$, при помощи движения внутренних масс.

Приведены результаты численного моделирования предложенных алгоритмов и визуализация полученных движений.

Заключение

Излагаются алгоритмы переориентации твердого тела при помощи нескольких подвижных внутренних масс, обсуждаются свойства и особенности алгоритмов. Предложенные алгоритмы могут представлять интерес для управления ориентацией космических аппаратов и других подвижных объектов.

Литература

1. Ф.Л. Черноусько // Изменение ориентации твердого тела при помощи вспомогательной массы. Доклады РАН. Физика, технические науки, 490:1 2020. 79–81.
2. F.L. Chernousko // Two- and three-dimensional motions of a body controlled by an internal movable mass. Nonlinear Dynamics, 99:1 2020. 793–802.
3. Ф.Л. Черноусько // Управление ориентацией тела при помощи нескольких подвижных масс. Доклады РАН. Физика, технические науки, 493:1 2020. 70–74.
4. F.L. Chernousko // Reorientation of a rigid body by means of internal masses. Nonlinear Dynamics. 102 2020. 1209-1214.
5. Ф.Л. Черноусько // Об использовании нескольких подвижных масс для переориентации тела. Доклады РАН. Физика, технические науки, 503:1 2022. 52–56.
6. Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник // Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. 2022. 464 с.
7. Ф.Л. Черноусько // Изменение ориентации тела при помощи трех пар подвижных масс. Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки, 506:2 2022. 60–65.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Шагалова Л.Г.

Институт математики и механики им.Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
shag@imm.uran.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби эволюционного типа. Размерность фазового пространства равна единице. Область, в которой рассматривается уравнение, разбивается на три подобласти, в каждой из которых гамильтониан непрерывен, а на их границах терпит разрыв по фазовой переменной. Гамильтониан вогнут по импульсной переменной, при этом зависимость от этой переменной экспоненциальна. На основе минимаксного/вязкостного подхода вводится определение непрерывного обобщенного решения рассматриваемой задачи с разрывным гамильтонианом. Доказывается существование и единственность такого решения.

Введение

Уравнения с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона – Якоби. При этом такие уравнения возникают в практических задачах и в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной биологии [1]. Известные теоремы существования обобщенных (минимаксных [2] и вязкостных [3]) решений неприменимы к этим уравнениям, поэтому приходится вводить новые определения решений, исследовать вопросы существования и единственности, разрабатывать методы построения обобщенных решений.

Ранее в ограниченной по фазовой переменной области изучалось [4] уравнение с гамильтонианом вида

$$H(x, p) = 1 - 0,5(1+x)e^{-2p} - 0,5(1-x)e^{2p}$$

В данной работе продолжено исследование задачи с разрывным трехкомпонентным гамильтонианом, начатое в [5], где рассматривался случай выпуклого по импульсной переменной гамильтониана. Результаты [5] нельзя формально перенести на рассматриваемый здесь случай вогнутого по импульсной переменной гамильтониана, поскольку в этом случае характеристики, выпускаемые с начального многообразия, могут быть непродолжимыми, а импульсные переменные при этом стремятся к бесконечным значениям.

В работе дано определение непрерывного обобщенного решения, доказана теорема существования и единственности такого решения. При этом доказательство существования имеет конструктивный характер. Вначале строятся вязкостные решения в двух крайних областях. Эти решения задают значения на границах средней области, и таким образом, задача непрерывного продолжения обобщенного решения на среднюю область сводится к построению непрерывного решения задачи Дирихле в этой области.

Постановка задачи

Рассматривается следующая задача Коши

$$\partial u / \partial t + H(x, \partial u / \partial x) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in R, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Здесь T – заданный момент времени, $u_0(\cdot)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция,

удовлетворяющая условию Липшица

$$|u_0(x_1) - u_0(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|, \quad x_1 \in R, \quad x_2 \in R \quad (3)$$

Предполагается, что заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot) : R \rightarrow R$, а также $f(\cdot) : R \rightarrow R$ и $g(\cdot) : R \rightarrow R$ такие, что $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей, а функция $g(\cdot)$ – монотонно убывающая. При этом существуют точки x_* и x^* такие, что, $f(x_*) = 0$, $g(x^*) = 0$, и справедливо неравенство $x_* < x^*$.

Задача (1), (2) рассматривается в предположении, что гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = \begin{cases} -g(x_*)e^{-p}, & x \leq x_*, \quad p \in R \\ h(x) - f(x)e^p - g(x)e^{-p}, & x_* < x < x^* \\ -f(x^*)e^p, & x \geq x^*, \quad p \in R. \end{cases} \quad (4)$$

Определим области $G_- = \{(t, x) | 0 < t < T, x < x_*\}$, $G_0 = \{(t, x) | 0 < t < T, x_* < x < x^*\}$, $G^+ = \{(t, x) | 0 < t < T, x > x^*\}$. Справедливо равенство

$$[0, T] \times R = clG_- \cup clG_0 \cup clG_+,$$

где clG обозначает замыкание множества G .

Таким образом, область $[0, T] \times R$, в которой рассматривается задача (1)–(4), разбивается на три подобласти, в каждой из которых гамильтониан определяется соответствующей непрерывной функцией, и если $h(x_*) \neq 0$, $h(x^*) \neq 0$, на границах этих областей гамильтониан разрывен.

Для задачи (1)–(4) с разрывным гамильтонианом требуется определить непрерывное обобщенное решение и исследовать вопросы существования и единственности такого решения.

Вязкостные решения

Пусть $R \supset I$ – открытый интервал, $W = (0, T) \times I$, $\bar{W} = (0, T) \times clI$. Символом $C(W)$ обозначим класс функций, непрерывных на W , символами $D^-u(t, x)$ и $D^+u(t, x)$ – соответственно суб- и супердифференциал функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) .

Функция $u \in C(W)$ называется вязкостным решением [3] уравнения (1) на множестве W , если выполнены следующие неравенства

$$a + H(x, s) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in W, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad (5)$$

$$a + H(x, s) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in W, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x). \quad (6)$$

Функция $u \in C(\bar{W})$ – вязкостное решение уравнения (1) на множестве \bar{W} , если $\forall (t, x) \in \bar{W}$ выполнено неравенство (6), и $\forall (t, x) \in W$ выполнено неравенство (5).

Основные результаты

Определение 1. Обобщенным решением задачи Коши (1)–(4) назовем непрерывную функцию $u(\cdot) : [0, T] \times R \rightarrow R$, удовлетворяющую начальному условию (2) и такую, что её сужения $u|_{G_0}(\cdot)$, $u|_{clG_-}(\cdot)$, $u|_{clG_+}(\cdot)$ на область G_0 и на замыкания областей G_- и G_+ являются на этих множествах вязкостными решениями уравнения (1) с гамильтонианами, определяемыми формулой (4).

Теорема 1. Обобщенное решение задачи (1)–(4) существует и единственно.

Доказательство теоремы конструктивно. Из (4) следует, что в замкнутых областях clG_- и clG_+ гамильтониан зависит только от импульсной переменной p и является выпуклым. Поэтому, опираясь на известную формулу Хопфа [6], применяя метод обобщенных характеристик [7], можно построить вязкостные решения $u^-(\cdot)$ и $u^+(\cdot)$ уравнения (1), удовлетворяющие начальному условию (2), определенные соответственно в этих замкнутых областях, и доказать их единственность. Эти решения определяют функции $\varphi(t) = u(t, x^*)$ и $\psi(t) = u(t, x_*)$, $t \in [0, T]$, задающие решение на линиях $x = x^*$ и $x = x_*$. Таким образом, для завершения построения обобщенного решения задачи (1)–(4) нужно решить задачу Дирихле в области clG_0 . Решение этой задачи единственно и осуществляется с помощью метода обобщенных характеристик.

Литература

1. D. B. Saakian, O. Rozanova, A. Akmetzhanov // Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution, Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 78:4 2008. 041908
2. А. И. Субботин // Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
3. M. G. Crandall, P.L. Lions // Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc., 277:1 1983. 1–42
4. Н.Н. Субботина, Л.Г. Шагалова // О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей, Тр. ИММ УрО РАН, 21:2 2015. 220–235
5. Л. Г. Шагалова // Непрерывное обобщенное решение уравнения Гамильтона – Якоби с трехкомпонентным гамильтонианом, Тр. ИММ УрО РАН, 28:1 2022. 257–268

6. M. Bardi, L. C. Evans // On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 8:11 1984. 1373–1381
7. N. N. Subbotina // The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization, *Modern Mathematics and its Applications*. 20 2004. 2955–3091

ДИНАМИКА ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ

Шамин А.Ю.^{1,2}

1 - Московский физико-технический институт, Долгопрудный

2 - Московский Авиационный Институт, Москва

shamin_ay@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о движении вибрационного капсульного робота, взаимодействие которого с внешней средой моделируется силами сухого анизотропного трения. Капсульный робот моделируется механической системой, состоящей из твердого тела, опирающегося одной из своих плоских граней на плоскую шероховатую поверхность, и маятника, вращающегося внутри тела в вертикальной плоскости. Взаимодействие тела с плоскостью моделируется законом сухого трения Кулона–Амонтона, причем трение предполагается анизотропным. В работе проведено полное качественное исследование уравнений движения рассматриваемой системы. Определены все возможные периодические режимы движения, а также исследована их устойчивость. Построен полный атлас фазовых портретов системы и описано поведение системы при ее выходе на предельный периодический режим движения.

Введение

Работа направлена на исследование динамики механических систем, движущихся посредством перемещения внутренних элементов. Такие системы являются хорошей математической моделью для перспективных робототехнических устройств, называемых вибрационными роботами. Отличительной особенностью таких роботов является способ их перемещения, который основан на перераспределении внутренних масс, что вызывает силу реакции среды, приложенную к корпусу, в результате чего аппарат осуществляет движение относительно среды. Такие устройства в силу компактности и изолированности внутренних частей, могут иметь ряд преимуществ перед роботами иных типов и могут использоваться в совершенно разных сферах человеческой деятельности. В частности, одно из преимуществ – простота конструкции: такие технические системы могут иметь вид запаянных капсул, и взаимодействовать с окружающей средой только посредством внешней оболочки, без использования внешних движителей, в связи с чем имеется возможность их выполнения в миниатюрных размерах, что позволяет их использовать в достаточно «деликатных» внешних средах, а также в средах, достаточно агрессивных.

Движение вибрационного робота по плоскости с вращающимся ротором исследовалось в работах [1–9], причем движение робота в вязкой среде рассмотрено в работах [5–8]. В исследованиях [10, 11] рассматриваются вибрационные роботы, перемещающиеся по горизонтальной поверхности с сухим и вязким трением, с одной внутренней массой – несбалансированным ротором (маятником). В работах [12–15] рассмотрены вопросы управления такими роботами.

Постановка задачи

Рассматривается механическая система (рис. 1), состоящая из твёрдого тела массой M и движущейся внутри него материальной точки массой m . Тело находится на горизонтальной плоскости, на которую оно опирается своей плоской гранью. Движение точки внутри тела происходит в вертикальной плоскости по круговой траектории радиуса R , центр которой совпадает с центром масс тела. При контакте тела с плоскостью возникают силы сухого анизотропного трения, коэффициент трения которого зависит от направления движения, при этом, при движении назад коэффициент больше: $\mu_a > \mu_b$, а угловая скорость ω внутренней массы постоянна.

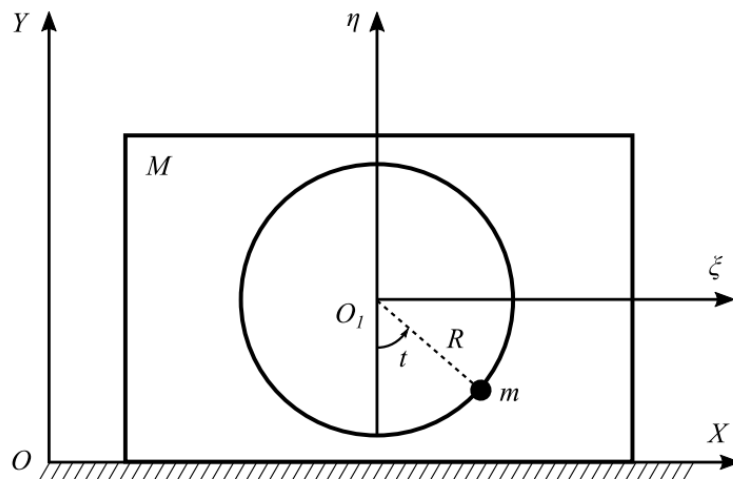


Рис. 1. Механическая система.

Заключение

В работе с использованием теории и методов, разработанных А.Ф. Филиповым, обосновано существование и исследованы общие свойства решений системы уравнений движения. Проведено качественное и количественное исследование динамики системы при различных значениях параметров, в частности, описаны все возможные периодические режимы движения и описаны условия их существования. Показано, что пространство параметров разбивается на области, соответствующие этим режимам в зависимости от начальной скорости тела. Построен атлас фазовых портретов системы в зависимости от ее параметров.

Литература

1. Иванов А. П., Сахаров А. В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 763–772.
2. Лупехина И.В., Безмен П.А., Яцун С.Ф. Плоскопараллельное движение вибрационного робота по горизонтальной шероховатой поверхности // *Естественные и технические науки*. Москва, 2012, №4(60).-С.41-44.
3. Соболев Н. А., Сорокин К. С. Экспериментальное исследование модели виброробота с вращающимися массами // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2007. № 5 С. 161–170.
4. Zhan X., Xu, J. Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration-controlled internal masses. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 7 No. 3 (2015), doi: 10.1177/1687814015573766 .
5. Яцун С. Ф., Волкова Л. Ю. Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением // *Спецтехника и связь*. — 2012. — № 3. — С. 25–29.
6. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 845–857.
7. Рамоданов С. М., Тенев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 635–647.
8. Ветчанин Е. В., Мамаев И. С., Тенев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 815–836.
9. Сахаров А. В. Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // *ПММ*. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 196–209.
10. Bardin V. S., Panev A. S., “On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane”, *Nelin. Dynam.*, 14:4 (2018), 519–542
11. Б. С. Бардин, А. С. Панёв, “О поступательном прямолинейном движении твёрдого тела, несущего подвижную внутреннюю массу”, *Труды Математического института им. С.М. Никольского РУДН, СМФН*, 65, № 4, Российский университет дружбы народов, М., 2019, 557–592
12. Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2006. № 5. С. 157–167.
13. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // *Тр. ИММ УрО РАН*. — 2010. — Т. 16, № 5. С. 213–222.
14. Голицына М.В. Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению // *Прикладная математика и механика*, 2018, №1, с. 627-636.
15. Голицына М.В. Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2018, Т. 19, №1, с. 31-39.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРБИТОЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ВОЗДУШНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Янова О.В.¹, Филатъев А.С.^{1,2}

1 - Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

2 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

yanova2007@yandex.ru

Аннотация. Решена задача наискорейшего изменения апогея орбиты космического аппарата (КА) за счет тяги воздушного электрореактивного двигателя (ВЭРД), использующего в качестве рабочего тела (РТ) газы окружающей атмосферы. Учтены зависимости тяги и аэродинамического сопротивления от угла атаки и ограничение на допустимый уровень концентрации РТ в ВЭРД. Решение основано на использовании принципа максимума Понтрягина для динамической модели оскулирующих орбитальных элементов. Получены оптимальное управление и области значений параметров орбиты, КА и источника энергии, при которых возможно длительное пребывание КА с ВЭРД на ультрамалых высотах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, Проект № 20-69-46034.

Введение

Эффективность выполнения задач дистанционного зондирования Земли и связи может быть значительно увеличена при размещении космических аппаратов (КА) на ультранизких (120–250 км) орбитах [1, 2]. Препятствием для длительного существования КА на таких высотах является экспоненциальный рост тяги и массы запасаемого на Земле рабочего тела (РТ) существующих типов двигателей для компенсации аэродинамического сопротивления. Одно из решений проблемы – применение воздушных электрореактивных двигателей (ВЭРД), использующих в качестве РТ газы окружающей атмосферы.

Эффективность тяги ВЭРД существенно снижается при увеличении угла атаки вследствие уменьшения эффективной площади входа в воздухозаборник (ВЗ) и относительного числа молекул, влетающих в ВЭРД без столкновения со стенками ВЗ [6]. Данная работа посвящена определению оптимального управления вектором тяги ВЭРД для наискорейшего изменения апогея орбит с ультранизким перигеем с учетом зависимости тяги и аэродинамического сопротивления КА от угла атаки и ограничения на минимально допустимый уровень концентрации РТ в ионизационной камере (ИК). Для решения задачи применяется подход, предложенный в [3–5] на основе принципа максимума Понтрягина (ПМП) [7] для динамической модели оскулирующих орбитальных элементов [8].

Получены оптимальные программы управления углом атаки и тягой в зависимости от высот перигея и апогея, удельного импульса двигателя, минимальной допустимой концентрации газа в ИК, уровня солнечной активности. Определены области возможного длительного квазистационарного существования КА с ВЭРД на ультрамалых высотах в пространстве параметров КА, орбиты и источника энергии.

1. Постановка задачи

Рассмотрено движение КА с ВЭРД в плоскости эллиптической орбиты с радиусами апогея r_α и перигея r_π при следующих допущениях:

1. Средняя скорость истечения плазменной струи из ВЭРД постоянна: $c = \text{const}$.
2. Вектор тяги ВЭРД направлен вдоль продольной оси КА.

Дифференциальные уравнения для оскулирующих переменных r_α и r_π записаны в безразмерном виде с истиной аномалией ϑ в качестве аргумента. Зависимость тяги ВЭРД от угла атаки $P(\alpha)$ определяется изменением эффективной площади входа в ВЗ $A_m \cos \alpha$ и относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками $k_m(\alpha)$ [6]:

$$P(\alpha) = P|_{\alpha=0} \cdot k_m(\alpha) \cos \alpha. \quad (1)$$

Для создания тяги необходимо, чтобы концентрация газа в ИК n была не меньше минимально допустимой n_{min} , при которой возможна его ионизация: $n \geq n_{\text{min}}$.

Использована модель [2] зависимости аэродинамического сопротивления КА от угла атаки при свободномолекулярном обтекании КА с ВЭРД:

$$c_x(\alpha) = c_{x0} \cos \alpha + \left(k_{\text{pn}} \sqrt{1 + (\sin \alpha / c_{\text{xp}})^2} + k_{\text{pp}} \right) c_{\text{xp}}, \quad (2)$$

где k_{ort} и k_{par} – отношения площадей проекций сечений КА перпендикулярных и параллельных плоскости орбиты к площади поперечного сечения КА A_{SC} , $c_{\text{xp}} = 1/\sqrt{\pi} S_\infty$ – коэффициент сопротивления пластины под

нулевым углом атаки, S_∞ – скоростное соотношение в набегающем потоке. Показано хорошее совпадение (2) с результатами расчетов [9] в условиях полностью диффузного отражения при свободномолекулярном обтекании («diffuse reflection with incomplete accommodation», DR1A), характерных для рассматриваемого диапазона высот.

В качестве управления приняты угол атаки α : $|\alpha| \leq \alpha_{\max}$, и функция включения двигателя ζ , которая принимает одно из двух возможных значений: 0 (ВЭРД выключен) или 1 (ВЭРД включен).

Задача состоит в определении управления $(\alpha, \zeta)_{\text{opt}}$, максимизирующего изменение (увеличение /уменьшение) за один виток орбиты радиуса апогея r_α при фиксированном радиусе перигея r_π .

2. Метод решения

В соответствии с условием оптимальности ПМП:

$$(\alpha, \zeta)_{\text{opt}} = \arg \max_{(\alpha, \zeta)} H, \quad (4)$$

где H – гамильтониан системы уравнений движения.

При неактивных ограничениях на угол атаки и уровень концентрации α_{opt} определяется из решения нелинейного уравнения $\partial H / \partial \alpha = 0$ с использованием рекуррентной процедуры с начальным приближением α_{opt}^0 , определяемым из квадратичного приближения для $H(\alpha)$ при малых углах атаки. При активном ограничении на уровень концентрации оптимальный угол атаки α_{opt} определялся из решения нелинейного уравнения $n_{\text{IC}}(\alpha) = n_{\text{min}}$ методом хорд. Для решения двухточечной краевой задачи использован модифицированный метод Ньютона. При проведении параметрических исследований применялся метод гомотопии, в котором начальным приближением служило решение для предыдущего значения параметра.

3. Результаты исследований

С использованием разработанных методики и программного обеспечения проведены численные исследования оптимальных траекторий КА с ВЭРД в зависимости от параметров компоновки КА, ВЭРД, орбит и солнечной активности. Получено максимально возможное увеличение высоты апогея Δh_{af} за один виток орбиты для следующего диапазона значений параметров задачи: удлинение КА $\lambda_{\text{sc}} \in [2, 8]$, средняя скорость истечения $c \in [80, 140]$ км/с, начальные высоты перигея $h_{\pi i} \in [140, 180]$ км и апогея $h_{\alpha i} \in [140, 1000]$ км. Показано, что влияние λ_{sc} и c снижается при увеличении начального эксцентриситета орбиты. Зависимости оптимальных угла атаки КА α_{opt} и тяги ВЭРД P_{opt} от истинной аномалии ϑ при изменении $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км с $h_{\pi i} = 160$ км приведены на рис. 1, 2. Оптимальное изменение высоты апогея Δh_{af} и потребляемая ВЭРД энергия за виток E_f для таких орбит показаны на рис. 3. Максимум приращения за виток высоты апогея при прочих равных условиях достигается на круговой орбите, при этом затраты энергии на создание тяги также максимальны.

Области возможного длительного существования КА с ВЭРД построены в пространстве параметров: высота перигея, высота апогея, усредненная за виток требуемая мощность энергоисточника КА для создания тяги W (рис. 4). Показано, что при повышении уровня солнечной активности граница области возможного длительного существования КА с ВЭРД смещается в сторону больших высот апогея (при тех же значениях $h_{\pi i}$ и W). Соответственно увеличивается и максимально возможное изменение за виток высоты апогея.

Заключение

На основе ПМП решена задача оптимизации управления вектором тяги ВЭРД для наискорейшего изменения высоты апогея орбиты КА с учетом зависимости тяги от угла атаки и ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК. Получены оценки эффективности разработанных оптимальных программ управления углом атаки и тягой ВЭРД в зависимости от параметров орбит, скорости истечения, компоновки КА. Показано, что использование эллиптических орбит в условиях ограниченной энергетики позволяет значительно расширить область возможного длительного существования КА с ВЭРД на орбитах с ультранизким перигеем за счет энергии, накопленной на пассивных участках полета КА.

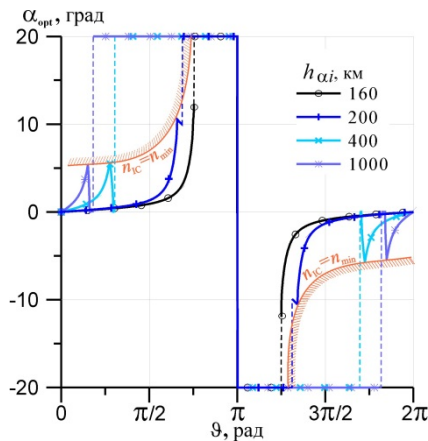


Рис. 1. Оптимальное изменение угла атаки в зависимости от истинной аномалии.

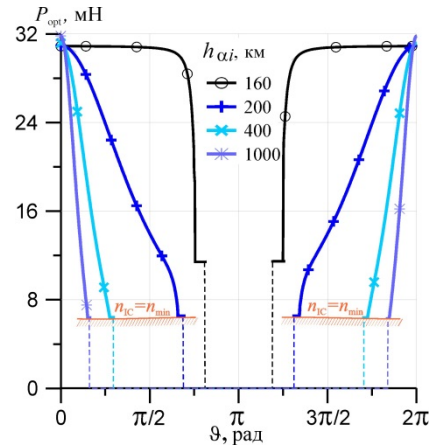


Рис. 2. Оптимальное изменение тяги ВЭРД в зависимости от истинной аномалии.

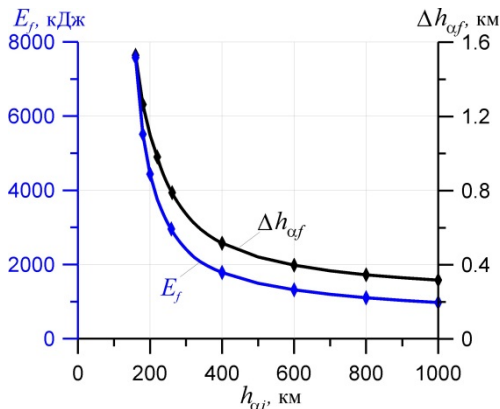


Рис. 3. Максимально возможное увеличение высоты апогея и потребляемая ВЭРД энергия за виток орбиты.

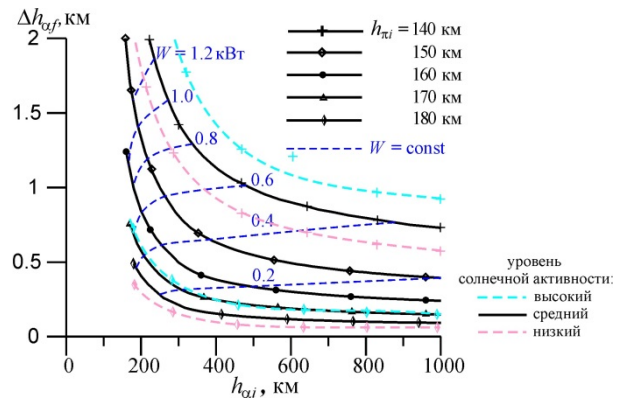


Рис. 4. Области возможного длительного существования КА с ПВЭРД на ультранизкой орбите в пространстве параметров: высоты перигея и апогея и мощность энергоисточника.

Литература

- 1 Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P., Golikov A.A., Yanova O.V. Comparative evaluation of the applicability of electrical ramjets // The 58th Israel Annual Conference on Aerospace Science, WeLIT4.3, Tel-Aviv & Haifa, Israel, 14-15 March 2018, P. 503–519.
- 2 Филатьев А.С., Голиков А.А. Необходимые условия существования космических аппаратов на замкнутых ультранизких орбитах // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2023. Т. 158. № 1. С. 69–75.
- 3 Loktionov E.Yu., Filatyev A.S., Golikov A.A., Yanova O.V. The Thrust Vector Control Optimization of the Air-Breathing Electric Propulsion to Maintain Spacecraft in Ultra-Low Orbits // 73rd International Astronautical Congress (IAC), Paris, France, 18-22 September 2022, IAC-22-C1,IP,x70176.
- 4 Filatyev A.S., Golikov A.A., Erofeev A.I., Khartov S.A., Lovtsov A.S., Padalitsa D.I., Skvortsov V.V., Yanova O.V. Research and development of aerospace vehicles with air breathing electric propulsion: Yesterday, today, and tomorrow // Progress in Aerospace Sciences. 2023. Т. 136. 100877.
- 5 Филатьев А.С., Янова О.В. Оптимальное управление вектором тяги воздушного электрореактивного двигателя для наискорейшего изменения высоты апогея орбиты с ультранизким перигеем // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 2. С. 1–13.
- 6 Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Экспериментальные исследования воздухозаборника в свободномолекулярном потоке газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII. № 3. С. 56–69.
- 7 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
- 8 Мирер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение: учебное пособие. М.: Резолит, 2007.
- 9 Mehta P.M., Walker A., McLaughlin m C.A., Koller J. Comparing Physical Drag Coefficients Computed Using Different Gas-Surface Interaction Models // Journal of Spacecraft and Rockets. Vol. 51. No. 3. May–June 2014. P. 873–883.

СЕКЦИЯ I

Подсекция I-3

Колебания механических систем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЕЁ ЗАДАННОГО СПЕКТРА

Абрамян А.К., Вакуленко С.А.

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия
andabr55@gmail.com

Аннотация. Предложен метод получения параметров продольно сжатой консольной балки на упругом основании, обеспечивающих существование низкочастотной части заданного спектра, и такое её динамическое поведение на больших временах, при котором отсутствуют резонансы при внешнем воздействии силы, моделирующей воздействие потока жидкости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 23-29-00459.

Введение

При расчете динамики инженерных конструкций бывает полезным создание структур с заданным (хотя бы частично) спектром собственных частот. Примером может служить задача о необходимости исключения возникновения нежелательных резонансов. Решение этой задачи можно получить путем определения массовых и жесткостных параметров структуры еще на стадии проектирования [1]. Другим примером является задача об определении таких параметров массы и жесткости механической системы в её численной модели, чтобы хотя бы низкочастотная часть спектра совпадала с экспериментальными данными для этих частот [2]. Похожие задачи возникают также при идентификации повреждений конструкции по имеющимся данным об их частотах [3, 4]. Все эти задачи являются обратными задачами в теории вибрации и в настоящем докладе мы рассматриваем одну из них применительно к балке на упругом основании. Задача об управлении первыми N собственными частотами стержней и балок для специального вида их поперечного сечения была рассмотрена в [5]. В ней с использованием преобразования Дарбу показано как получить стержень с частично заданными N собственными частотами для некоторых граничных условий. Для балки, имеющей постоянное произведение изгибной жесткости на её плотность, в работе [5] предложен аналитический метод, позволяющий обеспечить существование у неё заданного спектра для случая шарнирного опирания концов. Нашей целью является нахождение параметров балки, обеспечивающих существование низкочастотной части заданного спектра, и такое её динамическое поведение на больших временах, при котором отсутствуют резонансы при внешнем воздействии силы, моделирующей воздействие потока жидкости.

Постановка задачи

Уравнение, описывающее динамику консольной продольно сжатой балки на упругом основании, имеет вид:

$$m_0 u_{tt} + (D(x)u_{xx})_{xx} + T_0 u_{xx} + Ku = \epsilon f(u_t), \\ x \in [0, L]$$

$$f(u_t) = a_1 u_t + a_2 u_t^3 + a_3 u_t^5,$$

где m_0 – масса на единицу длины, u – поперечное перемещение балки, $D(x)$ – изгибная жесткость балки, x – продольная координата, T_0 – продольная сила, K – коэффициент упругого Винклеровского основания, ϵ – малый параметр, t – время, $f(u_t)$ – сила со стороны потока жидкости, a_i – коэффициенты, связанные с аэродинамическими коэффициентами, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$.

Приняты следующие граничные и начальные условия:

$$u(x, t) = u_x(x, t) = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad u(x, t)_{xx} = (D(x)u_{xx}(x, t))_x + T_0 u(x, t)_x, \quad x = L, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x, 0)$$

При условии $a_3 < 0$ стандартная априорная оценка показывает, что линейная энергия балки, которая является квадратичным положительно определенным функционалом от перемещения $u(x, t)$ и его производных, может только линейно возрастать со временем. Это показывает, что задача корректно поставлена, решение существует и единственно. Более того, мы имеем априорную оценку некоторых интегральных норм u_i (в L_2 и L_4 нормах). Далее, асимптотический подход вместе с этими оценками позволяет показать, что высокочастотные моды, соответствующие свободным колебаниям линейной балки, вносят малый (по норме) вклад в решение (несмотря на возможные резонансы). Следовательно, мы должны контролировать часть спектра, содержащую только ограниченное число мод невысокой частоты (порог для частоты можно оценить). Кроме того, хотелось бы избежать резонансов между этими модами. Возникает такая задача.

Задача управления спектром

Пусть $\lambda_i \in (0, a^2)$ заданные разные числа для $i = 1, \dots, N$ и $\Delta \gg a^2$.

Найти параметры T_0 , $D(x)$, K и длину балки L такими, что спектр $\text{Spec}(L)$ оператора, отвечающего уравнению балки L , включает все λ_i при $i = 1 \dots N$, а оставшийся спектр лежит в области

$$D_N = \lambda \in \mathbb{R}: \lambda > \Delta, \quad \Delta > 0.$$

Мы решаем эту задачу следующим образом. Можно считать, что λ_i малы и Δ порядка 1. Мы выбираем $D(x) > 0$ в виде кусочно-постоянной функции, которая ограничена на N малых интервалах, разделенных не малыми расстояниями. На интервале номер i мы имеем $D(x) = d_i \ll D_1$, где D_1 значение жесткости вне малых интервалов. Сначала мы решаем задачу для больших L , и $N=1$ и одного малого интервала. Эта задача играет роль эталонной задачи, если использовать термин, введенный в теории дифракции М.В. Бабичем и С.В. Булдыревым. Используя вариационный принцип, явные формулы и идеи Эйлера о критической сжимающей силе, при $K=0$ мы можем построить четную собственную функцию оператора L , которая будет экспоненциально затухать и иметь малое отрицательное собственное значение. Весь остальной спектр будет отделен конечным расстоянием от этого значения. Добавляя $K > 0$, мы сдвигаемся в нужную малую положительную точку спектра.

В общем случае $N > 1$ мы разбиваем балку на N секций, каждая из которых описывается эталонной задачей. Благодаря экспоненциальному затуханию, полученные функции удовлетворяют уравнению и граничным условиям с экспоненциально высокой точностью $O(\exp(-\text{const}LD_1^{0.25}))$.

Между построенными модами нет резонансов, поскольку эффект перекрытия мод экспоненциально мал. Тем самым мы можем построить упругий объект с заданным спектром колебаний и при учете демпфирования, и без резонанса.

Для нескольких типов спектров приведены примеры определения параметров балки, необходимых для их создания, и подробно изложен необходимый алгоритм действий.

Заключение

Предложен метод получения параметров продольно сжатой консольной балки на упругом основании, обеспечивающих существование низкочастотной части заданного спектра, и такое её динамическое поведение на больших временах, при котором отсутствуют резонансы при внешнем воздействии силы, моделирующей воздействие потока жидкости.

Литература

1. J.E.Mottershead, Y.M.Ram // Inverse eigenvalue problems in vibration absorption: passive modification and active control, Mech.systems and signal processing 20,2006.5–44
2. M.I.Friswell,J.E.Mottershead//Finite element model updating in Structural dynamics.1995
3. M.Dilena.D.O.,Fedele,J. Fernandez-Sez, A.,Morassi,,A., Zaera//, Hearing distributed mass in nanobeam resonators, International Journal of Solids and Structures,193-194, 2020.568–592
4. А.В. Ахтямов // Идентификация продольного разреза балки о её собственным частотам, Вестник Башкир.ун-та. Сер..Математика, 2012.840-842
5. A. Morassi //Exact construction of beams with a finite number of given natural frequencies, Journal of Vibration and Control, 21:3, 2015. 591–600

СКРЫТЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ГРАНИЦЫ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ АНДРОНОВА-ВЫШНЕГРАДСКОГО О ЦЕНТРОБЕЖНОМ РЕГУЛЯТОРЕ

Акимова Е.Д.¹, Андриевский Б.Р.^{1,2}, Кузнецов Н.В.^{1,2,3}

1 - Санкт-Петербургский Государственный Университет

2 - Институт проблем машиноведения РАН

3 - Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
nkuznetsov239@gmail.com

Аннотация. Одной из центральных задач анализа предельной динамики систем управления является задача определения необходимых и достаточных условий глобальной устойчивости. В общем случае трудности решения таких задач связаны с возможностью наличия в фазовом пространстве скрытых колебаний, а в пространстве параметров – скрытых участков границы глобальной устойчивости. Развитие теории скрытых колебаний, теории глобальной устойчивости и теории дифференциальных включений, а также специальных аналитико-численных методов позволяет пересмотреть подходы к решению классических задач теории автоматического регулирования с разрывными моделями и предложить эффективные методы оценки границ глобальной устойчивости. В рамках настоящего доклада мы рассматриваем один из таких подходов на примере модели регулятора Уатта.

Работа выполнена при поддержке гранта Ведущей Научной Школы РФ (НШ-4196.2022.1.1).

Введение

Одной из центральных задач анализа предельной динамики систем управления является задача определения необходимых и достаточных условий глобальной устойчивости. В общем случае трудности решения таких задач связаны с возможностью наличия в фазовом пространстве скрытых колебаний [1], а в пространстве параметров – скрытых участков границы глобальной устойчивости. При этом для систем с разрывными правыми частями дополнительную трудность может представлять наличие собственной динамики на многообразии разрыва, которая не всегда учитывается в общих методах анализа колебаний. Развитие теории скрытых колебаний, теории глобальной устойчивости и теории дифференциальных включений, а также специальных аналитико-численных методов позволяет пересмотреть подходы к решению классических задач теории автоматического регулирования с разрывными моделями и предложить эффективные методы оценки границ глобальной устойчивости.

Задача Андронова-Вышнеградского о центробежном регуляторе

Одной из первых задач, ставшей катализатором развития математической теории управления, является задача анализа устойчивости и возникновения колебаний в центробежном регуляторе. Первые работы середины XIX века были связаны с выводом соответствующих математических нелинейных моделей замкнутой динамики, учитывающих разрывную характеристику трения, и проведения для них приближенного анализа без учета разрывной нелинейности. В дальнейшем, в рамках развития теории управления были поставлены задачи глобального анализа таких систем, решение которых привело к получению ряда важных результатов. Так А.А. Андроновым был предложен метод, позволяющий провести строгий анализ фазового пространства в системах с разрывными правыми частями, однако во многих случаях его использование приводит к довольно трудным и длинным рассуждениям, в частности для систем высоких порядков. Мы покажем, как современный этап развития теории глобальной устойчивости и теории дифференциальных включений позволяет упростить получение этих результатов и продвинуться в решении задачи оценки границ глобальной устойчивости.

Рассмотрим модель регулятора Уатта (см. рис. 1, 2). Применяя законы Ньютона для вращательного движения и, следуя Вышнеградскому (см. [2, 3]), предполагая, что перемещения муфты малы, а также учитывая саморегулирование объекта [4], получим уравнения, описывающие динамику регулятора с учётом сухого трения:

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = y - \frac{1}{2} \text{sign}(\dot{x}), \quad \dot{y} + Cy = -z, \quad \delta\dot{z} + z = x, \quad (1)$$

где $A > 0$, $B > 0$, $C \geq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ – параметры. Решения системы будем понимать в смысле Айзермана-Пятницкого [5].

При $C = 0, \delta = 0$ система (1) совпадает с моделью классического регулятора Уатта, предложенной Вышнеградским, для которой А.А. Андроновым и А.Г. Майером был проведен строгий анализ всего пространства параметров и найдена точная граница глобальной устойчивости¹, а при $C > 0, \delta = 0$ – с системой, рассмотренной А.А. Талем [4], для которой им для некоторого набора параметров также были получены точные границы глобальной устойчивости. В обоих случаях границы глобальной устойчивости тривиальны.

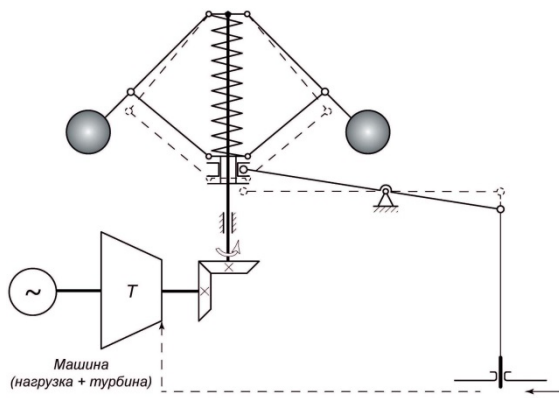


Рис. 1. Регулятор Уатта.

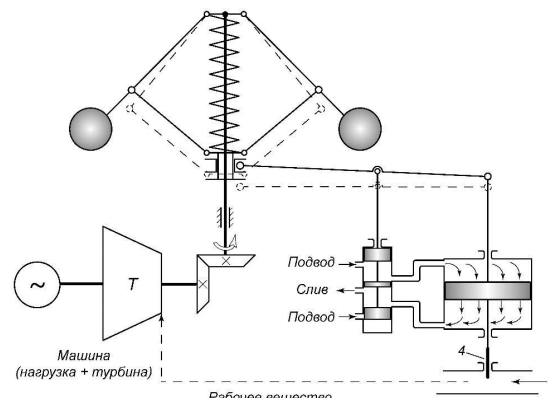


Рис. 2. Регулятор Фарко.

Для системы (1) при $C = 0, \delta \neq 0$ развитие методов теории глобальной устойчивости и теории дифференциальных включений позволяет существенно продвинуться в получении внутренних оценок границы глобальной устойчивости [9], а развитие идей Крылова и Боголюбова [10], Цыпкина [11] и Бойко [12] позволяет продвинуться в получении внешних оценок границы. Трудности анализа этой системы связаны со знаменитыми гипотезами Айзермана и Калмана и контрпримерами к ним [13], построив которые мы показываем наличие скрытых участков границы глобальной устойчивости.

Заключение (или Выводы)

В данном докладе на примере задачи Андропова-Вышнеградского о центробежном регуляторе продемонстрирован эффективный подход к выявлению скрытых колебаний и оценке границ глобальной устойчивости.

Литература

1. Н. В. Кузнецов // Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления. Известия РАН. Теория и системы управления, 2020, № 5, С. 5-27.
2. И. А. Вышнеградский // О регуляторах непрямого действия, Изв. Санкт-Петербургского технологического института 1878, С. 1–48.
3. И. А. Вышнеградский // О регуляторах прямого действия, Изв. Санкт-Петербургского технологического института 1877, С. 21–62.
4. А. А. Таль // Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования (с учетом саморегулирования объекта и воздействия по производной регулируемого параметра). Автоматика и телемеханика, 14, 1953.
5. М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий. Основы теории разрывных систем. Автоматика и телемеханика, 1974, № 4, С. 33-37.
6. А. А. Андронов, И. Н. Вознесенский // О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин / Теория автоматического регулирования (Линеаризованные задачи). Изд-во АН СССР, Москва, 1949.
7. А. А. Андронов, А. Г. Майер // Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. II. Теория регулятора прямого действия при наличии кулоновского и вязкого трения (продолжение), Автомат. и телемех., 1953, Т. 14, № 5, С. 505–530.
8. Академики, избранные Общим собранием АН СССР 30 ноября 1946 года. Вестн. АН СССР, 1947, Т. 1, С. 83.
9. А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов, В. А. Якубович // Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, Наука, 1978.
10. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов // Введение в нелинейную механику. К.: Изд-во АН УССР, 1937.
11. Я. З. Цыпкин // Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, Москва, 1955.
12. I. M. Voiko // Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design. Springer London, Limited, 2008.
13. N. V. Kuznetsov, E. D. Akimova, E. V. Kudryashova, O. A. Kuznetsova, M. Y. Lobachev, R. N. Mokaev, T. N. Mokaev // Global stability boundaries and hidden oscillations in dynamical models with dry friction. In Mechanics and control of solids and structures. Springer International Publishing, 2022, pp. 387-411.

¹ Анализ модели центробежного регулятора Уатта, выполненный Андроновым и Майером с помощью теории точечных преобразований занял более сорока страниц [6, 7]. Значимость этих результатов была отмечена при избрании А.А. Андропова в 1946 году действительным членом Академии наук СССР по Отделению технических наук, где он стал первым академиком по теории управления [8].

ЭФФЕКТ «ЗАСТРЕВАНИЯ» МАЯТНИКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВАЛУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Артюнин А.И., Суменков О.Ю.

Иркутский государственный университет путей сообщения
artyunin_ai@irgups.ru

Аннотация. Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы. Это явление заключается в том, что для маятника, установленного с возможностью свободного вращения на валу двигателя механической системы, при определенном соотношении между массой маятника и моментом трения в его опоре и соответствующем демпфировании системы может быть такой режим движения, когда вал вращается с заданной угловой скоростью, а частота вращения маятника равна одной из собственных частот колебаний механической системы.

Эффект «застревания» маятника на вращающемся валу был открыт профессором А.И. Артюниным в 1992 году при экспериментальном исследовании возможности автоматической балансировки жесткого ротора на упругих опорах с помощью маятников, установленных на валу ротора с возможностью свободного вращения [1], [2]. Другой эксперимент, подтверждающий наличие эффекта «застревания» маятника проводился на установке, изображенной на рис. 1.

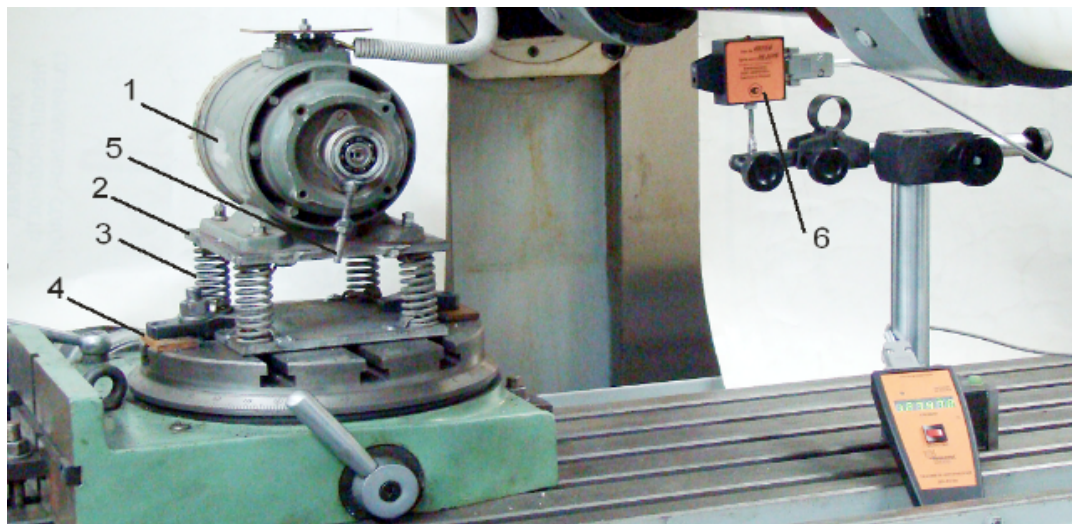


Рис. 1. Экспериментальная установка для исследования движения маятника на вращающемся валу двигателя:
1 – электродвигатель; 2 – металлическая пластина; 3 – пружины; 4 – неподвижное основание; 5 – маятник;
6 – оптический тахометр.

Эта механическая система в плоскости, перпендикулярной валу электродвигателя, имела три собственные частоты колебаний, найденные экспериментально: $k_1 = 44,0$ рад/с.; $k_2 = 96,1$ рад/с.; $k_3 = 113,0$ рад/с. Частота вращения вала электродвигателя составляла $\omega = 157$ рад/с. (1500 об/мин). Суть эксперимента заключалась в измерении угловой скорости маятника на вращающемся валу двигателя при увеличении массы маятника. В результате эксперимента при постоянном моменте трения в опоре маятника было установлено следующее. В начале маятник вращался вместе с валом электродвигателя, и его угловая скорость равнялась $\omega = 157$ рад/с. (рис. 2а). Далее увеличили массу маятника и его угловая скорость вращения маятника составила $\omega = 106,2$ рад/с., которая с точностью эксперимента равна третьей собственной частоте колебаний механической системы $k_3 = 113,0$ рад/с. (рис. 2б). При дальнейшем увеличении массы маятника его угловая скорость составила вначале $\omega = 93,2$ рад/с. (рис. 2в), а затем $\omega = 40,0$ рад/с. (рис. 2г). Эти значения угловой скорости совпали соответственно со второй и третьей собственными частотами колебаний механической системы $k_2 = 96,1$ рад/с. и $k_1 = 44,0$ рад/с..

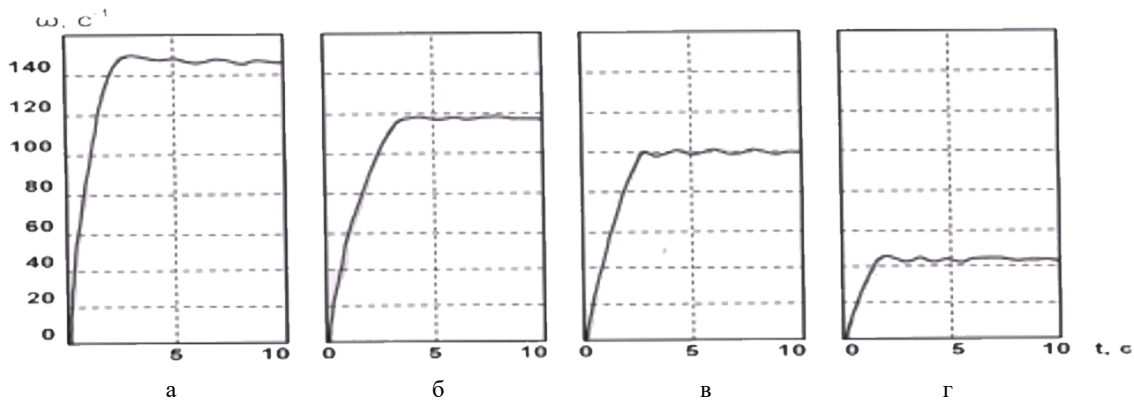


Рис. 2. Результаты измерений оптическим тахометром угловой скорости маятника на валу двигателя при изменении массы маятника.

Маятник в этом эксперименте представлял собой подшипник качения с внешним кольцом и приваренной к нему шпилькой с резьбой для навешивания грузов.

Таким образом, при постоянном моменте трения в опоре маятника и при изменении его массы, имеет место такой режим движения, при котором вал двигателя вращается с рабочей угловой скоростью, а частота вращения маятника близка или совпадает с одной из собственных частот колебаний механической системы.

Теоретически свойства этого явления изучались на механической модели, приведенной на рис. 3, а на рис. 4 показаны результаты моделирования движения маятника на вращающемся валу механической системы.

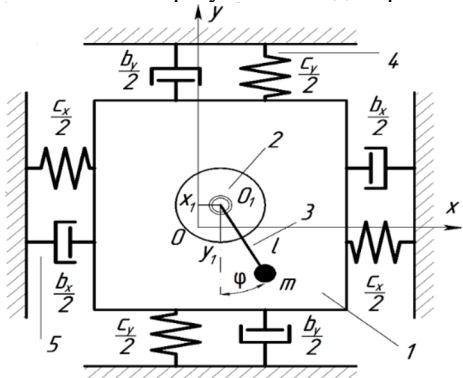


Рис. 3. Модель механической системы с маятником на вращающемся валу: 1 – корпус; 2 – ротор; 3 – маятник; 4 – невесомые упругие опоры; 5 – демпферы корпуса.

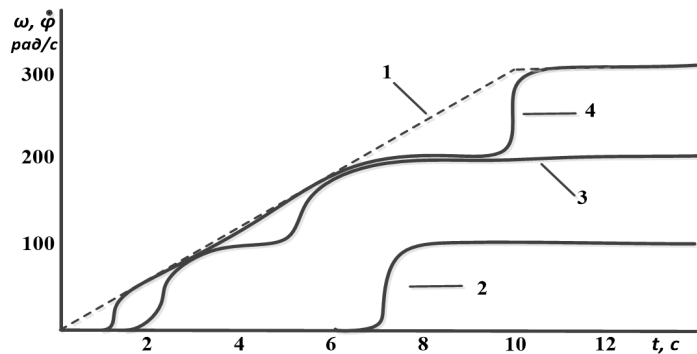


Рис. 4. Изменение угловой скорости ω ротора и маятника $\dot{\varphi}$ при различных массах маятника: 2 – при $0,0614 \geq m \geq 0,0204$ (кг); 3 – при $0,0204 > m \geq 0,0053$ (кг); 4 – при $m < 0,0053$ (кг).

После процедуры составления дифференциальных уравнений движения модели (рис. 3), используя уравнения Лагранжа 2-го рода и простые преобразования, получим систему трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение выбранной механической модели:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2n_x \dot{x}_1 + k_1^2 x_1 = h(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi), \\ \ddot{y}_1 + 2n_y \dot{y}_1 + k_2^2 y_1 = -h(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi), \\ ml^2 \ddot{\varphi} + \mu(\dot{\varphi} - \omega) = -ml(\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{y}_1 \sin \varphi + g \cos \varphi). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь приняты обозначения $h = ml / M^*$; $2n_x = b_x / M^*$; $2n_y = b_y / M^*$; $k_1^2 = c_x / M^*$; $k_2^2 = c_y / M^*$; где: $M^* = M + m$; M – масса корпуса; m, l – масса и длина маятника; c_x, c_y – жесткость опор в горизонтальном и в вертикальном направлениях; b_x, b_y – коэффициенты вязкого трения в горизонтальном и в вертикальном направлениях; x_1, y_1 – обобщенные координаты корпуса; φ – угол поворота маятника; ω – угловая скорость ротора; μ – коэффициент сопротивления относительно движению маятника на вращающемся валу.

Дальнейшие исследования представляли собой вычислительный эксперимент, заключающийся в исследовании закона разгона маятника при различной его массе и постоянном коэффициенте сопротивления в опоре маятника путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (1). Численное интегрирование дифференциальных уравнений (1) осуществлялось в среде MATLAB с помощью функции ode15i при следующих исходных данных: $M_K = 8$ кг.; $M_p = 2$ кг.; $m = 0,02$ кг.; $b_x = b_y = 25$ Нс/м; $c_x = 1 \cdot 10^5$ Н/м; $c_y = 4 \cdot 10^5$ Н/м; $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$ Нм/рад., $l = 0,05$ м. При приведенных выше исходных данных механическая система имеет две собственные частоты колебаний: $k_1 = \sqrt{c_x / M} = 100$ рад/с.; $k_2 = \sqrt{c_y / M} = 200$ рад/с. Принято, что при

$0 \leq t \leq 10$ с. ротор разгоняется по закону $\omega = 30 \cdot t$, а при $t > 10$ с. угловая скорость ротора $\omega = 300$ рад/с.

Результаты вычислительного эксперимента по исследованию законов разгона маятника при различной его массе и при неизменных других исходных данных приведены на рис. 4. Здесь наглядно показано, как проявляется эффект «застревания» при изменении массы маятника.

Однако в одном из вычислительных экспериментов при разгоне ротора до $\omega = 150$ рад/с. и при собственных частотах модели $k_1 = 50$ рад/с. и $k_2 = 100$ рад/с. «застревание» маятника на частоте k_1 не наблюдалось, как бы не меняли коэффициент трения в опоре маятника и массу маятника. Следовательно, на условия существования эффекта влияют и какие-то другие параметры механической системы. Для выяснения этого обстоятельства найдем упрощенный вариант дифференциального уравнения движения маятника, используя следующие допущения. Во-первых, принимая, что $\ddot{\varphi} \ll \dot{\varphi}^2$, получим порождающую систему уравнений для корпуса модели:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2n_x \dot{x}_1 + k_1^2 x_1 = h\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y}_1 + 2n_y \dot{y}_1 + k_2^2 y_1 = -h\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \end{cases}$$

частное решение которой будем искать в виде:

$$x = a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi; \quad y = a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi.$$

Во-вторых, определив коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 подставим выражения для частного решения в 3-е уравнение системы (1) и усредним правую часть этого уравнения. В результате получим следующее уравнение для описания движения маятника на вращающемся валу:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + \mu(\dot{\varphi} - \omega) = -\frac{mlhn_x \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2} - \frac{mlhn_y \dot{\varphi}^5}{(k_2^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (2)$$

Из этого уравнения видно, что угловая скорость маятника помимо массы и длины маятника, трения в его опоре зависит от собственных частот колебаний и демпфирования механической системы. Хотя это уравнение описывает в первом приближении нестационарный режим движения маятника с учетом угловой скорости ротора ω , рассмотрим случай, когда $\omega = const$, а угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$ будем придавать постоянные значения от 0 до 200 рад/с, при этом считая $\ddot{\varphi} = 0$. Тогда из уравнения (2) получим:

$$\mu(\dot{\varphi} - \omega) + \frac{mlhn_x \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2} + \frac{mlhn_y \dot{\varphi}^5}{(k_2^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2} = 0. \quad (3)$$

Решим это уравнение графически, как это сделано в работах [3], [4].

Введем обозначения: $L(\dot{\varphi}) = \mu(\dot{\varphi} - \omega)$ как движущий момент, а $V(\dot{\varphi}) = \frac{mlhn_x \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2} + \frac{mlhn_y \dot{\varphi}^5}{(k_2^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2}$

как вибрационный момент.

Графическое решение проводилось при следующих исходных данных: $M_K = 8$ кг.; $m = 0,02$ кг.; $l = 0,05$ м.; $b_x = 25$ Н с/м.; $b_y = 50$ Н с/м.; $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$ Н м/рад.; $c_x = 2 \cdot 10^4$ Н/м.; $c_y = 8 \cdot 10^4$ Н/м.

Закон разгона ротора зададим в виде: $\omega = 30t$ при $0 \leq t \leq 10$ с. и $\omega = 157$ рад/с. при $t > 10$ с. При этих данных модель имеет две собственные частоты колебаний: $k_1 = 50$ рад/с., $k_2 = 100$ рад/с. Результаты графического решения приведены на рис. 5.

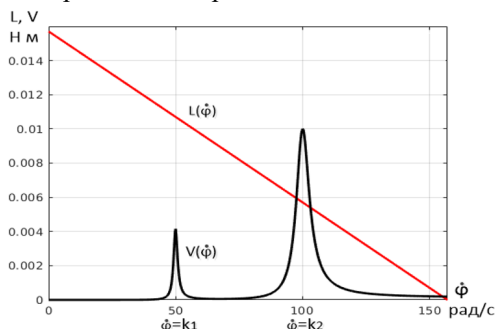


Рис. 5. Графики $L(\dot{\varphi})$ и $V(\dot{\varphi})$ при $b_x = 15$ Н с/м.; $b_y = 50$ Н с/м.

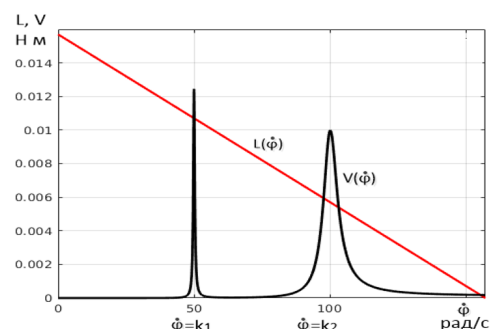


Рис. 6. Графики $L(\dot{\varphi})$ и $V(\dot{\varphi})$ при $b_x = 5$ Н с/м.; $b_y = 50$ Н с/м.

Из рис. 5 видно, что при $\dot{\varphi} = 50$ рад/с пересечение $L(\dot{\varphi})$ и $V(\dot{\varphi})$ отсутствует и эффекта «застревания» маятника нет. Так как первая собственная частота определяется колебаниями в горизонтальном направлении, уменьшим коэффициент вязкого трения в этом направлении. Примем $b_x = 5$ Н с/м. Результаты решения в данном случае представлены на рис. 6. Здесь маятник «застревает» при $\dot{\varphi} = 50$ рад/с. и при $\dot{\varphi} = 100$ рад/с., то есть при угловых скоростях маятника равных собственным частотам колебаний механической системы k_1 и k_2 .

Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что появление эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы зависит от соотношения между массой маятника и моментом трения в его опоре, а также прямо зависит от демпфирования механической системы. К аналогам эффекта «застревания» маятника можно отнести явления, возникающие в колебательных системах с ограниченным возбуждением [3], в том числе эффект Зоммерфельда [4], и «несинхронное» движение шариков в автобалансирующей [5].

Литература

1. В.П. Жаров, А.И. Артюнин. Новый эффект в нелинейной механике// Межвузовский сборник научных трудов. Механика деформированного твердого тела. Ростов-на-Дону.- 1992.-с.3-11
2. Артюнин А.И. Исследование движения ротора с автобалансирующей // Изв. Вузов. Машиностроение.- 1993.- №1.- с.15-19.
3. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением // М.: Наука.- 1964. – 256 с.
4. Блехман И. И. Вибрационная механика//.- М.:Физматлит.- 1994.- 400с.
5. Ryzhik B. Non-synchronous Motions Near Critical Speeds in a Single-plane Autobalancing Device / B. Ryzhik, H. Duckstein, L. Sperling // Technische Mechanik. -2004.- Vol.24.- p.25-36

**ПАМЯТИ Д.Т.Н., ПРОФЕССОРА, ЗАСЛУЖЕННОГО ДЕЯТЕЛЯ НАУКИ РФ
ЕЛИСЕЕВА С.В.**

Большаков Р.С., Елисеев А.В.

ФГБОУ ВО "ИрГУПС"
bolshakov_rs@mail.ru

Аннотация. В докладе представлена информация об основателе научной школы, докторе технических наук, профессоре, заслуженном деятеле науки, неоднократно участнику Всероссийского съезда по механике Елисееве Сергее Викторовиче, ушедшего из жизни в 2021 г. Научные исследования, проводившие С.В. Елисеевым, а также под его руководством, нашли отражение в большом количестве научных статей, монографий, докладов на конференциях различного уровня, патентах на изобретения и полезные модели, но самым главным достижением известного ученого были его ученики, получавшие от него навыки профессионального отношения к научной деятельности, переданные ему когда-то А.И. Лурье и М.З. Коловским.

Введение

Елисеев Сергей Викторович – доктор технических наук, профессор, известный ученый в вопросах создания и развития методов теоретической и прикладной механики, теории механизмов и машин, теории колебаний, динамики управляемых систем, мехатроники, робототехники и автоматизации технологических процессов [1–23].

Основной текст

130 патентов и авторских свидетельств на изобретения и полезные модели удостоился за годы своей деятельности на поприще науки профессор ИрГУПС, заслуженный деятель науки РФ Сергей Елисеев.

В России его имя хорошо известно. Знают и за рубежом. Свидетельство тому – недавно напечатанная в известном международном издательстве Springer, специализирующемся на выпуске научных, технических, медицинских книг и журналов, его монография на английском языке «Теория колебаний». Она посвящена малоизученным проблемам в области динамики механических колебательных систем. Среди коллег Елисеев (рис. 1) известен тем, что является автором и соавтором 850 научных работ, имеет более 100 изобретений и более 20 научных монографий, вышедших в центральных издательствах. По количеству публикаций по машиностроению и механике он входит в первую десятку авторов, пишущих на эти темы в России.



Рис. 1. С.В. Елисеев.

Одно из важнейших направлений его деятельности – поиск способов и средств защиты технологических и транспортных машин от действий вибрационных возмущений. Сергей Викторович внёс большой вклад в разработку методологической основы, позволяющей решать задачи оценки и формирования динамического состояния технических объектов, которые представляют собой механические колебательные системы, он разработал методологию решения широкого класса задач динамики технологических и транспортных объектов. В частности, под руководством Елисеева в начале 80-х для решения задач виброзащиты был создан один из первых в стране пакет прикладных программ по автоматизированному исследованию и расчёту виброзащитных систем. Значительная часть его исследовательского багажа посвящена изучению особенностей проявления вибрационных состояний объектов железнодорожного транспорта.

То был 1967 год. С того времени Елисеев и стал заниматься проблемой вибрации в технологических и транспортных машинах. Областью его научных интересов стала динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры. Практическое применение его разработкам по этой теме нашлось на ряде предприятий страны. В частности, использованы они в Северомуйском тоннеле, на Казанском оптико-механическом заводе. Елисеев

внёс свой интеллектуальный взнос в развитие целого ряда других научных направлений. Одним из них является промышленная робототехника. В этой сфере он стал пионером внедрения интеллектуальных систем в регионе. Работая в Иркутском научном центре СО АН СССР, Сергей Викторович основал в нём со своими учениками отдел робототехники и искусственного интеллекта, который затем превратился в автономный отдел робототехники, автоматизации и технической физики при президиуме ИНЦ. Значительная часть его исследований выполнена в период работы в системе РАН с академиком Владимиром Матросовым, создателем Иркутского вычислительного центра СО РАН. Теперь это институт динамики систем и теории управления имени Матросова. Для применения в области робототехники и автоматизации производства учёным разработан метод исследования сложных манипуляционных систем средствами пакета прикладных программ ПАМИР, который принят в Государственном фонде алгоритмов (рис. 2).



Рис. 2. С.В. Елисеев рассказывает о разработках отдела робототехники, автоматизации и технической физики при Президиуме ИНЦ СО АН СССР.

Первая монография по промышленному внедрению роботов была написана им ещё в 1982-м. Она была написана на основе конкретных разработок, которые внедрялись на Иркутском авиазаводе. Годом ранее это предприятие заняло первое место по Министерству авиационной промышленности по внедрению промышленных роботов.

В академии наук Елисеев работал до 1990 года в должности заместителя председателя президиума Иркутского научного центра. Последующие пять лет трудился заместителем генерального директора Сибэкспоцентра в Иркутске по научной работе. Следующую пятилетку он посвятил работе помощником депутата Государственной думы РФ Юрия Тена с совмещением работы в Восточно-Сибирском институте экономики и права. Непосредственно с железной дорогой Елисеев сотрудничает с 2000 года. В ИрГУПСе он трудился проректором по общественным и международным связям. Занимался и подготовкой молодых кадров. Как научный руководитель участвовал в защите не менее 75 кандидатских и докторских работ (рис. 3).



Рис. 3. Сергей Викторович в начале своей научной карьеры в должности заведующего кафедрой теоретической механики Иркутского политехнического института.

Задатки рационализатора и изобретателя проявились в нём ещё в юные годы. Когда обучался в Иркутском авиационном техникуме, прославился с группой своих друзей на весь СССР. Известность

обеспечили изготовленные ими по собственным чертежам аэросани и трёхколёсный велосипед. О чём поведал популярный журнал «Техника молодёжи». Качества настоящего инженера проявились в годы обучения на машиностроительном факультете Иркутского горно-металлургического института (ныне ИрННТУ). Оканчивая его и готовясь к защите дипломной работы, он разработал проект вертикально-фрезерного станка с числовым программным управлением, который предназначался для внедрения на Иркутском заводе тяжёлого машиностроения.

Он принимал участие в программных научных стажировках в ведущих университетах США – Иллинойском и Массачусетском, высшей технической школе Франции в Париже, образовательных центрах Индии, Германии, Англии и Китая. А несколько его воспитанников трудятся и сейчас в различных странах. Четыре года назад его научная деятельность отмечена Благодарностью президента России Владимира Путина. Удостоен он также звания «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». Являлся действительным членом международной и российской инженерных академий, Российской академии инженерных наук, Российской академии авиации и космонавтики имени Циолковского и других.

О широком научном кругозоре Сергея Викторовича говорит и то, что он выполнил немало ценнейших разработок в отраслях, далёких от теоретической механики. Профессор выполнял анализ геополитических и социально-экономических проблем транспортной политики России в Сибири и на Дальнем Востоке, является активным участником международных форумов и конференций.

Заключение

Научную школу Елисеева прошли немало талантливых исследователей. Под его руководством защитили диссертации пять докторов наук, 70 кандидатов наук. Одновременно Сергей Викторович выполнял обязанности заместителя председателя технико-экономического совета при обкоме КПСС, занимался разработкой комплексной программы развития Иркутской области, возглавлял Иркутский областной совет научно-технического общества, избирался депутатом Иркутского областного совета народных депутатов, членом Облисполкома Иркутской области, членом советов по проблемам машиностроения и автоматизации научных исследований при Президиуме АН СССР.

Он всегда продолжал активно заниматься научной, издательской и изобретательской деятельностью, расширял систему контактов в профессиональной среде. Его всегда можно было увидеть на рабочем месте, рядом со своими учениками.

Литература

1. Елисеев, С. В. Структурная теория виброзащитных систем / С. В. Елисеев. – Новосибирск : Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр РАН "Издательство "Наука", 1978. – 212 с.
2. Елисеев, С. В. Импедансные методы в исследовании механических систем (основы теории) / С. В. Елисеев. – Иркутск : Иркутский политехнический институт, 1979. – 87 с.
3. Елисеев, С. В. Промышленные роботы: некоторые проблемы внедрения / С. В. Елисеев, Г. И. Хвощевский, В. Р. Ченских. – Иркутск : Иркутский государственный университет, 1982. – 361 с.
4. Елисеев, С. В. Динамические гасители колебаний / С. В. Елисеев, Г. П. Нерубенко. – Новосибирск : Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр Российской академии наук "Издательство "Наука", 1982. – 144 с.
5. Елисеев, С. В. Что могут роботы : опыт внедрения и эксплуатации робототехнологических комплексов на предприятиях г. Иркутска / С. В. Елисеев, В. Р. Ченских, Г. И. Хвощевский. – Иркутск : Восточно-Сибирское книжное издательство, 1984. – 112 с.
6. Елисеев, С. В. Динамика механических колебательных систем с дополнительными связями / С. В. Елисеев, Л. Н. Волков, В. П. Кухаренко. – Новосибирск : Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр Российской академии наук "Издательство "Наука", 1988. – 206 с.
7. Елисеев, С. В. Упругие колебания роботов / С. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. В. Лукьянов. – Новосибирск : Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр Российской академии наук "Издательство "Наука", 1990. – 231 с.
8. Шулешко, А. Н. Трендовое прогнозирование и контроль систем качества / А. Н. Шулешко, С. В. Елисеев, В. С. Колодин. – Иркутск : Иркутский государственный университет путей сообщения, 2007. – 180 с. – ISBN 978-5-8038-0517-5.
9. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко, А. А. Засядко. – Иркутск : Иркутский государственный университет, 2008. – 523 с.
10. Елисеев, С. В. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Федеральное государственное унитарное предприятие "Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр "Наука", 2011. – 384 с.
11. Елисеев, С. В. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев ; С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко ; отв. ред. П. А. Лончих, А. В. Лукьянов ; М-во трансп. Российской Федерации, Иркутский гос. ун-т путей сообщ., М-во науки и образования, Забайкальский гос. ун-т. – Новосибирск : Наука, 2011. – ISBN 978-5-02-018976-8.
12. Елисеев, С. В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко. – Иркутск : Иркутский государственный университет путей сообщения, 2012. – 156 с.
13. Хоменко, А. П. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных колебательных систем / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко. – Иркутск : Иркутский государственный университет путей сообщения,

2012. – 288 с.
14. Белокобыльский, С. В. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, И. С. Ситов. – Санкт-Петербург : Издательство "Политехника", 2013. – 319 с. – ISBN 978-5-7325-1035-5.
 15. Белокобыльский, С. В. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, В. Б. Кашуба. – Санкт-Петербург : Издательство "Политехника", 2013. – 363 с. – ISBN 978-5-7325-1025-6.
 16. Лонщик, П. А. Динамическое качество машин и оборудования как инструмент обеспечения надежности производства и конкурентоспособности процессов / П. А. Лонщик, С. В. Елисеев. – Иркутск : Иркутский государственный технический университет, 2014. – 322 с. – ISBN 978-5-8038-1008-7.
 17. Елисеев, С. В. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования / С. В. Елисеев, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Новосибирское отделение издательства "Наука", 2014. – 357 с. – ISBN 978-5-02-019190-7.
 18. Елисеев, А. В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неударяющих связей / А. В. Елисеев, В. В. Сельвинский, С. В. Елисеев. – Новосибирск : Федеральное государственное унитарное предприятие "Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр "Наука", 2015. – 332 с. – ISBN 978-5-02-019214-0.
 19. Кашуба, В. Б. Динамические реакции в соединениях элементов механических колебательных систем / В. Б. Кашуба, С. В. Елисеев, Р. С. Большаков. – Новосибирск : Федеральное государственное унитарное предприятие "Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр "Наука", 2016. – 331 с. – ISBN 978-5-02-038718-8.
 20. Елисеев, С. В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С. В. Елисеев, А. И. Артюнин. – Новосибирск : Новосибирское отделение издательства "Наука", 2016. – 459 с. – ISBN 978-5-02-019232-4.
 21. Елисеев, С. В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (Динамика транспортных технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи) / С. В. Елисеев. – Иркутск : Иркутский государственный университет путей сообщения, 2018. – 692 с. – ISBN 978-5-98710-356-2.
 22. Eliseev, S. V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects / S. V. Eliseev, A. V. Eliseev. – Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019. – 521 p. – ISBN 978-3-030-31294-7.
 23. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин / С. В. Елисеев, А. В. Елисеев, Р. С. Большаков, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Федеральное государственное унитарное предприятие "Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр "Наука", 2021. – 679 с. – ISBN 978-5-02-041463-1.

ОБ РАСШИРЕНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ИНЕРЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

Брысин А.Н.^{1,2}, Соловьев В.С.¹

1 - Институт машиноведения РАН им А.А. Благонравова, Москва, Россия

2 - Российский технологический университет РТУ МИРЭА, Москва, Россия

brysin@rambler.ru

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы повышения эффективности работы систем виброзащиты, исследованы передаточные функции математических моделей перспективных систем виброзащиты содержащих активные элементы. Рассмотрен вопрос повышения точности определения инерционного эффекта вносимого гидравлическим преобразователем движения.

Работа выполняется в рамках проекта НИР № 2237-р (Министерство науки и высшего образования Российской Федерации) Вибрационные процессы, виброзащита в машиноведении [1].

Введение

Влияние вибрационного воздействия на человека не всегда отрицательно однозначно. Известно что вибрационное воздействие может приводить к изменению болевой чувствительности [2, 3], более выраженный обезболивающий эффект наблюдается при более высокой частоте вибраций. Увеличение потока импульсов приводит к развитию охранительного торможения в корковых клетках и подавлению болевой доминанты в центральной нервной системе.

Однако суммарное отрицательное воздействия на человека- оператора и механизмы управления значительно превышает положительные моменты вызванные мобилизацией скрытых возможностей организма. Вибрационные воздействия существенно ограничивают возможности человека оператора комплексно воздействуя на как на ткани и параметры крови так и психофизическое состояние. Основными отрицательными моментами являются периферические сосудистые и неврологические нарушения вегетативно-сенсорная полиневропатия верхних конечностей, периферический ангиодистонический синдром, ангиоспазмы пальцев рук пояснично-крестцовая радикулопатия [4, 5].

Состояние вопроса

В лаборатории вибромеханики института машиноведения РАН уже более 50 лет ведется поиск способов и методик снижения вибрационного воздействия как на человека оператора так и на системы контроля и управления. Решение задачи виброзащиты тесно переплетается с решениями задач высокоточного позиционирования и сейсмозащиты. Для решения комплексной задачи высокоточного позиционирования со снижением динамических воздействий представляет интерес применение активных и регулируемых систем виброзащиты и требует снижения времени отклика на команды управления. Решение задачи сейсмозащиты требует от систем виброзащиты стабилизацию больших статических нагрузок в вертикальном направлении, большие смещения по горизонтальной плоскости и возможности поглощения ударных нагрузок.

Решение этих проблем упруго-диссипативными виброзащитными системами имеет существенные ограничения. В настоящее время, в большей степени вышеперечисленным требованиям удовлетворяют системы оснащаемыми дополнительными инерционными элементами которые могут быть установлены как в не регулируемые так и активные системы виброзащиты.

В системах виброзащиты внедрение активных систем обусловлено возрастающим требованиям к точности позиционирования. Существенным недостатком активных систем виброзащиты является наличие самих активных элементов. В зависимости от конструкции этими элементами могут быть компрессоры, гидромоторы, асинхронные либо шаговые двигатели. Без них невозможно создание противодействия силе, вызывающей вибрационное воздействие. При необходимости больших перемещений избыточная энергия этих устройств позволяет значительно сократить время переходных процессов. Однако при выходе на режим микроперемещений собственный шум и вибрация от работы этих устройств не позволяет объекту обеспечить минимальный уровень виброактивности.

Одним из способов устранения этой проблемы является учет этих собственных шумов и реализация алгоритмов нечувствительности к ним измерительного оборудования. Другим решением является снижения этих шумов за счет использования энерго-аккумулирующих устройств и снижения мощности нагнетательных магистралей. Как полагалось ранее, идеальным было бы полное отключение активной части системы виброзащиты на период незначительных вибрационных воздействий и включение ее только после превышения определенного уровня колебаний. Однако выход из режима покоя сопровождается переходными процессами, что приводит к увеличению вибрационного воздействия, а также повышенной инерционностью силовых агрегатов. Реализация такого активного управления возможно за счет использования шагового двигателя, работающего в режиме малых перемещений как управляемый демпфирующий элемент, а в режиме больших перемещений как активный силовой элемент.

Исследовательская часть

Анализ передаточной функции с учетом физических и технологических особенностей создания узлов и агрегатов позволяет утверждать, что введение дополнительной инерционной массы позволяет создать условия для создания дополнительной области с повышенными виброзащитными свойствами. Способы создания этого эффекта рассмотрены в ряде работ и представлены в отчетах по тематике НИР № 2237-р и практически подтверждены экспериментальными исследованиями.

Из ранее опубликованных работ [1, 6, 7] была рассмотрена система виброзащиты на упругих элементах с инерционным преобразователем движения, которая может быть описана передаточной функцией (1)

$$T(s) = \frac{m_{it}s^2 + b \cdot s + c}{(m + m_{it})s^2 + b \cdot s + c} \quad (1)$$

Ограничения по внедрению подобных систем кроме высокой стоимости обусловлены сложностью оценки инерционности по относительному движению. Инерционность системы с гидравлическим преобразователем движения зависит от геометрии движущейся жидкости. Движение жидкости в инерционном канале гидравлического преобразователя создает инерционное воздействие m_{it} . Его можно рассматривать как частный случай задачи Громеки. Решение этой задачи при сдвинутых по фазе встречно направленных переменных давлений p_1 p_2 может быть представлена в виде

$$p_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) - p_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + 180) = 0 \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + v_z \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Если задавать функцию скорости движения $v(r, \phi, t)$, то решения аналитического не возможно. В этом случае потребуется численное интегрирование решение которого представлено на рис. 1.

На рис. 1–3 представлены варианты взаимодействия потоков, создающих инерционность, при изменении направления движения. Поскольку предсказать процесс завихрения потока (рис. 1).

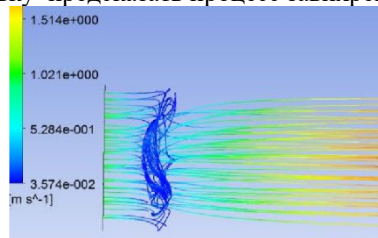


Рис. 1. Завихрение потока при изменении направления движения.

Для решения задачи аналитически воспользуемся «склейкой».

Сконструируем аналитическое решение задачи в эллипсе, как «склейку» решений в круге.

Здесь и дальше $\phi = C_0 \cdot n \cdot st$.

$$dsolve(de_1, f(r)).$$

Графическое представление этого упрощения представлено на рис. 2а и б. На них представлено движение потока жидкости с изменением направления движения в эллиптической трубе. На рис. 2а показана форма движения в первоначальный момент времени до момента начала колебательного движения изменением направления. Профиль полученный в свое время Громека (уточненный Слезкиным и Лойцанским) близок к поведению жидкости при начале изменения направления движения потока (рис. 2б).

Скорость движения которую мы используем для определения объема прокачанной жидкости и дальнейшего определения эквивалентной инерционной массы в гидравлическом преобразователе для эллиптической трубы описывается выражением (3)

$$v := (r, t) \rightarrow \frac{\cos(2\phi)(a^2 - b^2)}{\cos(2\phi)(a^2 - b^2) - a^2 - b^2} \times (-F \cos(\omega t) KelvinBel - F \sin(\omega t) KelvinBeR + L \cos(\omega t) KelvinBeR - L \sin(\omega t) KelvinBel) + \frac{Av \sin(\omega t)}{\omega} \quad (3)$$

Подобные системы не смотря на более высокую стоимость и сложность настройки и регулирования зарекомендовали себя как эффективные при ударных воздействиях. В рамках развития и расширения

возможностей систем виброзащиты в данной работе так же рассмотрена система виброзащиты описываемая более сложной передаточной функцией (4)

$$T(s) = \frac{A_2 \cdot s^4 + A_1 \cdot s^3 + m_{it} \cdot s^2 + b \cdot s + C}{(m + m_{it}) \cdot s^2 + b \cdot s + C} \quad (4)$$

где $A_2 s^4$ активный блок, реализующий «рывковую» функцию в виброзащитной системе.
 $A_1 s^3$ -блок, описывающий демпфирование

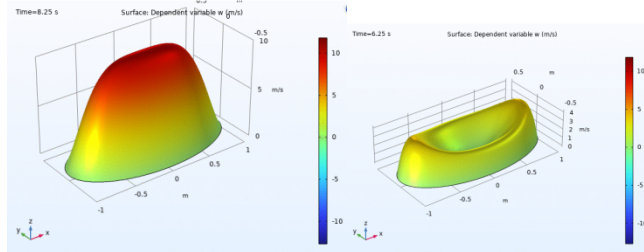


Рис. 2. а) Первоначальный импульс движения жидкости;
б) воронка, образуемая при изменении направления движения.

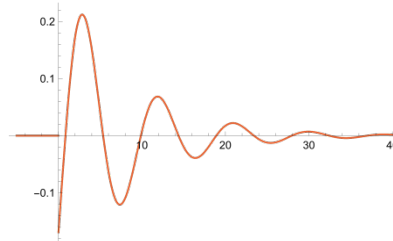


Рис. 3. Переходный процесс при ударном воздействии системы виброзащиты, содержащей упруго инерционный преобразователь движения.

В ходе исследования различных вариантов передаточных функций следует признать, что существенного прогресса при гашении вибраций и поглощения ударных воздействий усложнение моделей не дает. Повышение эффективности на 2–5 % нивелируется увеличением сложности конструкций. Эффективная диссипация обоих рассматриваемых вариантов при ударном воздействии (рис. 3) многократно выше любого упруго –диссипативного варианта с той же статической жесткостью.

Литература

1. Соловьёв В.О., Алифов А.А., Орлов Ю.Н., Лавров В.В., Панкова Н.В., Шведов И.М., Кельнер М.С., Макаров С.Б., Овчинников Н.М., Елисеев А.А., Седнев А.В., Пановко Г.Я., Банах Л.Я., Гуськов А.М., Волоховская О.А., Соловьёв В.С., Брысин А.Н., Никифоров А.Н., Побегайло П.А., Шохин А.Е. и др. Отчет о НИР № 2237-р от 03.12.2012 (Министерство науки и высшего образования Российской Федерации) Вибрационные процессы, виброзащита в машиноведении
2. Андреева-Галанина Е.Ц.З.М. Бутковская Гигиеническая характеристика легких многоударных клепальных молотков. Интернет ресурс <https://cyberleninka.ru/>
3. А. Я. Креймер Вибрационный массаж при заболеваниях нервной системы /; Том. гос. мед. ин-т, Том. НИИ курортологии и физиотерапии. - Томск : Издательство Томского университета, 1988. - 316
4. Кривцова И.П. Распространенность и клиничко-нейрофизиологическая характеристика болевого синдрома верхних конечностей у горнорабочих виброопасных профессий и больных вибрационной болезнью при воздействии локальной вибрации в сочетании с физическими перегрузками и охлаждающим микроклиматом. //Диссертация на соискание ученой степени кандидата медицинских наук, Екатеринбург – 2016 -192 с
5. Лагутина Г.Н., Рудакова И.Е., Матюхин В.В., Шардакова Э.Ф. Профессиональная нейроортопедическая патология при воздействии вибрации и физических нагрузок// Бюллетень ВСНЦ СО РАМН, 2006, № 4, с. 12-15.
6. Брысин А.Н. Повышение эффективности виброзащитных устройств за счет введения инерционно преобразовательных блоков //Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук. Москва, 2008
7. Брысин А.Н. Виброзащита силовой установки с помощью управляемых подкосов с гидроупругими элементами Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 3. С. 9-14.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Буданов В.М.

НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова
vlbudanov@gmail.com

Аннотация. В работе представлен алгоритм построения аналитических приближений для неустойчивых предельных циклов системы Лоренца. В явном виде выписаны три приближения в виде рядов по степеням амплитуды первой гармоники по первой координате с коэффициентами в виде усеченных рядов Фурье. Проведено сравнение с результатами численного интегрирования, которое показывает улучшение точности в следующих приближениях в широком диапазоне изменения амплитуды вплоть до окрестности значения, при котором предельный цикл превращается в гомоклиническую траекторию.

Введение

Система Лоренца (1963 год) является первым примером, возникшим из физической задачи, в котором проявились свойства динамического хаоса. Система состоит из трех уравнений с тремя неизвестными и тремя параметрами. При изменении параметров происходят качественные изменения структуры фазового потока от единственного стока до странного аттрактора. В данной работе рассматривается промежуточная ситуация, когда вблизи двух устойчивых особых точек существуют периодические решения. Эти периодические решения имеют седловой тип, поэтому даже численное их нахождение представляет определенные проблемы [1]. Здесь мы строим для них последовательные приближения аналитически, используя подходы, изложенные в [2].

В данной работе, также как в большинстве работ по этой системе, два параметра фиксируются и анализируется динамика процесса при изменении третьего, только значения параметров выбраны так, что для критических особых точек получаются целочисленные значения, что позволяет построить точные аналитические приближения. Приближения строятся по степеням амплитуды основной гармоники по одной из трех переменных, при этом соответствующие значение третьего параметра и частоты периодического решения также находятся в виде рядов по степеням указанной амплитуды.

Рассматривается система трех уравнений относительно трех неизвестных x, y, z с тремя положительными параметрами σ, ρ, β

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \quad (1)$$

Зафиксируем значения двух параметров $\sigma = 8, \beta = 3$. При таком выборе для третьего параметра существует целочисленное критическое значение $\rho_c = 28$, при котором три особые точки становятся неустойчивыми, а также целочисленными являются координаты нетривиальных особых точек $x_c = y_c = \pm 9, z_c = 27$. Частота малых периодических решений при этом равна $\omega_c = 6\sqrt{3}$. При значениях $\rho < \rho_c$ координаты «правой» особой точки равны $z_0 = \rho - 1, x_0 = y_0 = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$. Сделаем замену переменных $x = x_0 + x_c \xi, y = x_0 + x_c \eta, z = z_0 + z_c \zeta$, а также введем вместо параметра ρ параметр r , равный нулю в критической точке $\rho = (\rho_c - 1)(1 - r)^2 + 1$ и новую независимую переменную $\psi = \omega_c(1 - \gamma)t$. Тогда исходная система (1) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \xi' + \frac{4\sqrt{3}}{9}(\xi - \eta) &= \gamma \xi' \equiv u \\ \eta' + \frac{\sqrt{3}}{18}(-\xi + \eta) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta &= \gamma \eta' + \frac{3\sqrt{3}}{2}(r - \xi)\zeta \equiv v \\ \zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-\xi - \eta + \zeta) &= \gamma \zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-r\xi - r\eta + \xi\eta) \equiv w \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим следующие особенности полученной системы. Во-первых, в критической точке $r = \gamma = 0$ и можно предположить, что они аналитически зависят от амплитуды, таким образом выполняются условия нижеприведенной теоремы 1. Во-вторых, все ее решения должны иметь период 2π и единичную частоту.

Математическое обоснование метода

Для построения периодических решений используется модификация метода Ляпунова, но применяется к системе, которая не является системой Ляпунова по причине неконсервативности. Обоснование этого подхода дает следующая теорема, которую здесь формулируем без доказательства.

Теорема 1. Пусть имеется нелинейная система

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \mathbf{x} \in R^n, \quad (3)$$

удовлетворяющая следующим условиям: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – вектор-функция, компоненты которой – полиномы степени не ниже первой; в диапазоне $\mu \in [0, \bar{\mu}]$ система имеет периодическое решение и период, представимые в виде сходящихся рядов по степеням μ

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \sum_{l=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{kl} \cos l\omega t + \mathbf{b}_{kl} \sin l\omega t), \quad \omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \omega_k. \quad (4)$$

Тогда частичные ряды \mathbf{x}_n, ω_n , получаемые из (4) отбрасыванием слагаемых степени выше n , удовлетворяют уравнению (2) с точностью $O(\mu^{n+1})$.

Следствие. Если решение представляется в виде сходящегося ряда по степеням параметра в некотором диапазоне, то оно может быть найдено методом последовательных приближений. При этом найденные коэффициенты не меняются в последующих приближениях.

Аналитические приближения

В качестве первого приближения берем решение линейной части (2), которое получаем следующим образом. Полагаем в (2) все u, v, w , а также γ, r равными нулю. Очевидно, что при этом (2) становится однородным, и ему удовлетворяют решения вида $a \cos \psi + b \sin \psi$ с любыми значениями a, b . Поскольку система автономна, то соответствующим выбором начала отсчета времени можно получить $a = A, b = 0$, поэтому берем первое приближение $\xi = A \cos \psi, \psi = \omega t$ и, подставляя его в (2), получаем выражения для остальных переменных. В результате получаем следующее решение первого приближения

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A \cos \psi \\ \eta_1 &= A \cos \psi - \frac{3\sqrt{3}}{4} A \sin \psi \\ \zeta_1 &= \frac{1}{2} A \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} A \sin \psi \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, в первом приближении получили семейство периодических решений, параметризуемое амплитудой по первой переменной. В дальнейших приближениях будем считать, что это полная амплитуда основной гармоники по первой переменной, которая не должна изменяться в последующих приближениях. В связи со структурой уравнений (2) можно выразить η, ζ через ξ из двух первых уравнений

$$\begin{aligned} \eta &= \xi + \frac{3\sqrt{3}}{4} (\xi' - u) \\ \zeta &= \frac{1}{2} (-\xi'' + u') - \frac{\sqrt{3}}{4} \xi' + \frac{\sqrt{3}}{36} u + \frac{2\sqrt{3}}{9} v \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка этих выражений в третье уравнение (2) позволяет получить уравнение относительно одной переменной ξ

$$\xi''' + \frac{2\sqrt{3}}{3} \xi'' + \xi' + \frac{2\sqrt{3}}{3} \xi = u'' + \frac{2\sqrt{3}}{9} u' + \frac{7}{9} u + \frac{4\sqrt{3}}{9} v' + \frac{2}{9} v - 2w \equiv q \quad (7)$$

В правой части этого уравнения, как видно из обозначений в (2), содержатся нелинейные члены второго порядка и произведения с множителями γ, r , которые по нашему предположению зависят от A .

Второе приближение. Подставляем первое приближение в правую часть (2, 7). Опуская множитель A^2 , получим

$$q = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \cos 2\psi + \frac{5}{4} \sin 2\psi$$

Находим решение уравнения (7) с этой правой частью относительно ξ , а затем находим η, ζ из (6). В результате можем выписать второе приближение

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + A^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{24} \sin 2\psi \right) \\ \eta_2 &= \eta_1 + A^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{16} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\psi \right) \\ \zeta_2 &= \zeta_1 + A^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin 2\psi \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Третье приближение. После подстановки второго приближения (8) в правую часть системы (2) получим следующие выражения, имеющие множителем A^3

$$q = \frac{37\sqrt{3}}{96} \cos \psi - \frac{11}{16} \sin \psi - \frac{65\sqrt{3}}{96} \cos 3\psi + \sin 3\psi$$

Видим, что возникли слагаемые на основной частоте, которые могут быть скомпенсированы добавками второго порядка по γ, r

$$\gamma = \gamma_2 A^2, r = r_2 A^2$$

Они в произведениях с элементами первого приближения дадут дополнительные члены третьего порядка. В результате условия отсутствия в правой части (8) первых гармоник приводят к двум уравнениям, которые запишем в общем виде

$$\begin{aligned} -\gamma_n + r_n + \frac{\sqrt{3}}{4} q_{cn} &= 0 \\ 4\gamma_n - 3r_n + 2q_{sn} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь q_{cn}, q_{sn} – коэффициенты при синусе и косинусе первой гармоники в правой части (7) при подстановке предыдущего приближения. Решая (9) с $q_{c2} = \frac{37\sqrt{3}}{96}, q_{s2} = -\frac{11}{16}$, и добавляя решение для третьей гармоники стандартным образом, получаем третье приближение

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \xi_2 + A^3 \left(\frac{209}{3968} \cos 3\psi + \frac{131\sqrt{3}}{7936} \sin 3\psi \right) \\ \eta_3 &= \eta_2 + A^3 \left(\frac{195\sqrt{3}}{512} \sin \psi + \frac{5209}{31744} \cos 3\psi - \frac{1619\sqrt{3}}{15872} \sin 3\psi \right) \\ \zeta_3 &= \zeta_2 + A^3 \left(-\frac{17}{128} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{1536} \sin \psi + \frac{1881}{31744} \cos 3\psi + \frac{725\sqrt{3}}{23808} \sin 3\psi \right) \\ \psi &= 6\sqrt{3} \left(1 - \frac{65}{128} A^2 \right) t, \quad r = \frac{7}{32} A^2 \end{aligned}$$

Отметим, что зависимость между параметром и амплитудой появилась лишь в третьем приближении. Далее итерационный процесс может быть продолжен с использованием пакетов символьных вычислений. При этом сходимость наблюдается вплоть до значений амплитуды, близких к предельному, когда два неустойчивых предельных цикла образуют гомоклиническую бабочку.

На Рис. 1 представлена проекция предельного цикла (синий цвет) в полученном третьем приближении на плоскость ξ, η при значении амплитуды $A = 0.63$, близком к предельному, и результат интегрирования исходной системы (1) с соответствующим масштабированием (красный цвет). Начальные условия для интегрирования взяты из аналитического решения в нулевой момент времени.

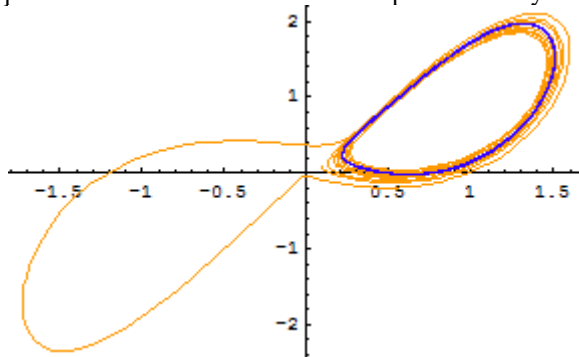


Рис. 1. Предельный цикл и численное решение.

Заключение

В работе представлен алгоритм построения аналитических приближений для неустойчивых предельных циклов системы Лоренца. В явном виде выписаны три приближения в виде рядов по степеням амплитуды первой гармоники по первой координате с коэффициентами в виде усеченных рядов Фурье. Проведено сравнение с результатами численного интегрирования, которое показывает улучшение точности в следующих приближениях в широком диапазоне изменения амплитуды вплоть до окрестности значения, при котором предельный цикл превращается в гомоклиническую траекторию.

Литература

1. Гукенхеймер Д., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
2. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Едит. УРСС, 2004. 248 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОТСТРОЙКИ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ВАЛОПРОВОДА ГАЗОПЕРЕКАЧИВАЮЩЕГО АГРЕГАТА

Булашов Д.А., Сидоров И.Н.

КНИТУ-КАИ им .А.Н. Туполева, Казань, Россия
dabulashov@kai.ru

Аннотация. В докладе представляется алгоритм решения трех вариантов задачи отстройки критических частот валопровода от рабочего диапазона. Решение осуществляется с помощью метода стохастической оптимизации в пространстве варьируемых параметров с построением функций отклика – многомерных поверхностей регрессии критических частот, максимальных амплитуд и максимальных амплитуд виброперемещений в районе опор с применением нейросетевых технологий.

Введение

Решение задачи отстройки критических частот от рабочего диапазона быстроходных роторных машин остается актуальной, несмотря на длительную историю использования валопроводов. Одним из классов таких машин, требующих повышения уровня вибронадежности, являются газоперекачивающие агрегаты (ГПА), включающие в себя двух- трехступенчатые центробежные компрессоры, трансмиссии с муфтами и использующие в качестве приводов конвертированные авиационные двигатели.

Решения задачи отстройки

Для снижения вибронгруженности газоперекачивающих агрегатов предлагаются три варианта для отстройки критических частот вращения валопровода:

1. Минимизация амплитуд виброперемещений в пределах рабочего диапазона.
2. Минимизация амплитуд виброперемещений слева от рабочего диапазона.
3. Минимальное конструктивное вмешательство.

В качестве конструктивных решений предлагается комплексное варьирование:

1. Параметров муфт трансмиссии за счет изменения количества пластин и их характеристик [1].
2. Динамических характеристик опорных сегментных подшипников скольжения компрессора путем изменения их конструктивных параметров в заданных пределах [2, 3] и параметров подачи масла.
3. Небольшое увеличение/уменьшение массы колес компрессора путем замены материала.

Отстройка критических частот предполагает что:

- 1) критические частоты должны быть меньше левой границы рабочего диапазона на 20%;
- 2) критические частоты должны быть больше правой границы рабочего диапазона на 20%;
- 3) при реализации п.п.1,2 выбирается вариант, при котором амплитуды виброперемещений опор меньше задаваемых значений.

Такой вариант решения называется "нормальным". В случае невозможности отстройки производится минимизация амплитуд виброперемещений внутри рабочего диапазона и такое решение называется "компромиссным".

Решение задачи сводится к задаче оптимизации в пространстве варьируемых параметров. В качестве целевой функции с ограничениями для рассмотренных вариантов принимались:

Целевая функция – амплитуда виброперемещений упругой линии валопровода.

Ограничения для:

- а) нормального решения;
- б) компромиссного решения.

Дополнительные ограничения накладываются на амплитуды виброперемещений в районе каждой опоры в пределах рабочего диапазона частот вращения валопровода:

Среди компонентов вектора варьируемых параметров есть коэффициенты:

1. определяющие вариацию жесткости и демпфирования опор [2];
2. определяющие вариацию радиальных и угловых коэффициентов жесткости пластинчатых соединений муфт [1];
3. определяющие вариацию массы дисков компрессора.

Для определения оптимальных значений целевой функции использовался метод стохастической оптимизации [4, 5]. Необходимо построить многомерные поверхности регрессии критических частот, максимальных амплитуд и амплитуд виброперемещений опор. Для этих функций отклика строятся аппроксимационные поверхности на множестве значений вектора амплитуд виброперемещений с использованием свободного фреймворка scikit-learn.

С помощью поверхностей регрессии критических частот определяются подобласти пространства векторов, для которых выполняется ограничения на интервал рабочего диапазона с учетом запаса. Далее находится вектор, удовлетворяющий одному из критериев выбранного варианта оптимизации 1)-3).

Верификация алгоритма

Для проверки принципиальной возможности предложенного подхода была решена задача отстройки критических частот для ГПА-16 «Волга». Исходный вариант расчета (ИВР) проводится для системы из двух связанных упругими муфтами и трансмиссией роторов. Интервал рабочих скоростей роторной системы с учетом 20%-го запаса: $2968,0 \div 6678,0$ об/мин ($310,81 \div 699,32$ с⁻¹). Количество переменных оптимизации 7.

Для изотропных опор свободной турбины двигателя были приняты коэффициенты жесткости $1,5 \cdot 10^9$ Н/м с нулевыми коэффициентами демпфирования. Коэффициенты жесткости и демпфирования ортотропных опор компрессора рассчитывались с помощью программы "Bearings" [2]. Были определены пересекающиеся области изменения параметров подшипников с самоустанавливающимися подушками с индивидуальным подводом смазки, и с самоустанавливающимися подушками типа ТРИЗ. Границы этих областей аппроксимировались линейными функциями.

Разработанная на языке Python программа осуществляет многократный запуск комплекса "Валопровод" для решения задач вынужденных колебаний. Эта программа может использовать в качестве решателя метод интегрирующих матриц [6, 8] или ANSYS Mechanical APDL. При этом компоненты векторов варьируемых параметров формируются генератором случайных чисел в рамках равномерного распределения на отрезке [0, 1]. Количество векторов 260. Результаты решения – величины критических частот, максимальные амплитуды виброперемещений и максимальные виброперемещения в районе опор используются для построения регрессий. Для определения количественных оценок качества полученных регрессий весь набор данных делился на тренировочную и тестовую части. Первая часть данных использовалась в качестве обучающей в рамках подхода GroupKFold [7], когда для оценки наилучших параметров регрессии используются непересекающиеся области. Вторая часть – тестовая для оценки качества получаемых поверхностей регрессии. Наилучшее качество показал многослойный перцептрон с двумя скрытыми слоями.

Дисбалансы величиной 1 кг·мм задавались на диске свободной турбины, первом, втором и третьем дисках компрессора в соответствии с правилами API 617 [9].

Результат решения ИВР с вектором, соответствующим эксплуатационным параметрам ГПА-16 «Волга», представлен на рис. 1.

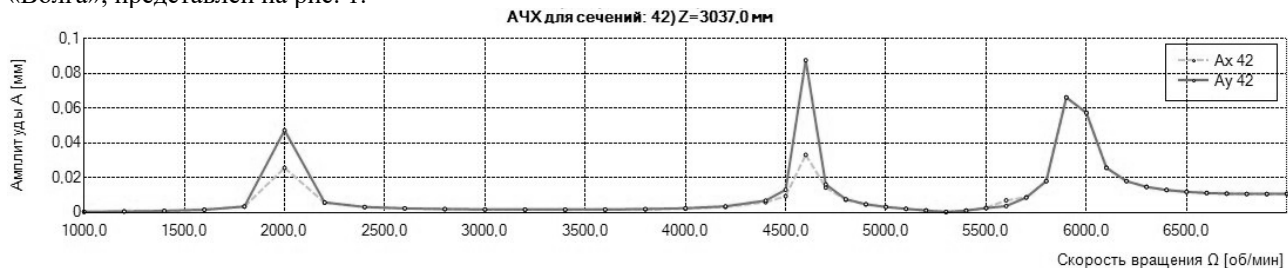


Рис. 1. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики для сечения 3037,0 мм; параметры валопровода соответствуют эксплуатационным ГПА-16.

Решение задачи отстройки для ГПА-16 "Волга" в рамках варианта № 1 (минимизация амплитуд внутри диапазона) приведено на рис. 2. Результаты расчетов показывают, что критические частоты вращения отстраиваются от рабочего диапазона ($2968,0 \div 6678,0$ об/мин) с требуемым запасом при удовлетворении требования по виброперемещениям в районе опор.

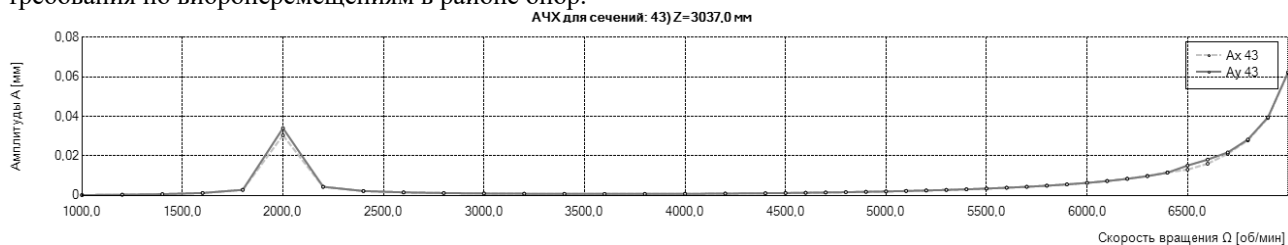


Рис. 2. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики для сечения 3037,0 мм; вариант 1.

Решение задачи отстройки в рамках варианта № 2 (минимальные амплитуды справа от рабочего диапазона) приведено на рис. 3. Так же найдено нормальное решение.

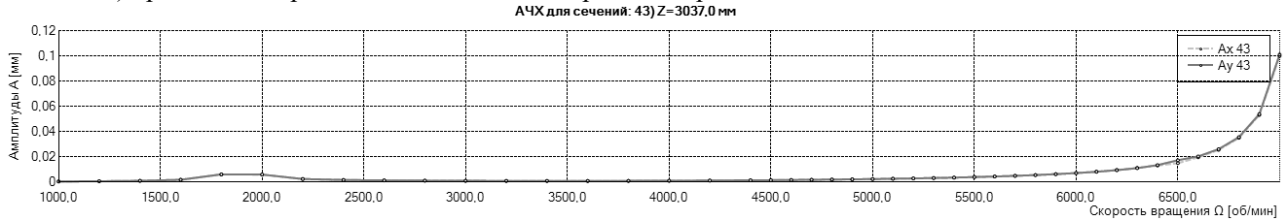


Рис. 3. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики для сечения 3037,0 мм; вариант 2.

Работа алгоритма поиска для варианта 3 (минимальное конструктивное вмешательство) также приводит к нахождению нормального решения при удовлетворении всех ограничений (рис. 4).

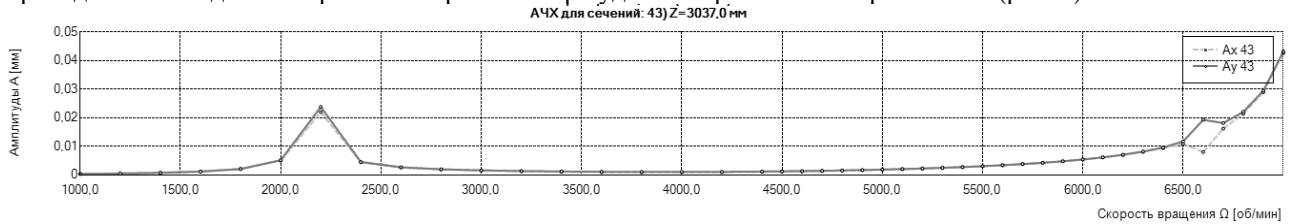


Рис. 4. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики для сечения 3037,0 мм; вариант 3.

После получения вектора решения определяются реальные значения конструктивных параметров варьирования элементов валопровода:

1. Параметры и тип подшипников скольжения с помощью программы "Bearings".
2. Число и толщина пластин муфт трансмиссии.
3. Добавочные массы дисков компрессора.

Последний этап проверочный, используем программу "Валопровод" для решения задачи вынужденных колебаний роторной системы с реальными параметрами.

Заключение

Данный подход демонстрирует большой потенциал методов стохастической оптимизации к отстройке критических частот валопроводов. Опыт использования методов анализа данных (data mining) и нейросетевых технологий говорит о том, что их потенциал пока еще не раскрыт в полной мере при решении практических задач машиностроения.

Литература

1. И.Н. Сидоров, А.В. Горелов, Д.А. Булашов // Вычисление и сравнительный анализ коэффициентов жесткости мембранных и пластинчатых соединений муфт газоперекачивающих агрегатов. Научно-технический вестник Поволжья. 2017 №2, с.28-35.
2. И.Н. Сидоров, Д.А. Булашов, В.В. Туктарова // Алгоритм и программные средства для расчета динамических характеристик опорных сегментных подшипников скольжения с индивидуальным подводом смазки. Вестник технологического университета: Т.20. №23. 2017. с.74-78.
3. В. С. Марцинковский, В. И. Юрко // Расчётная оценка влияния маслосъёмных скребков на характеристики опорных подшипников с самоустанавливающимися колодками. Проектирование и исследование компрессорных машин. Сб. научных трудов. Выпуск 6., Казань, 2009г., с 278-287.
4. K.V. Price, R.M. Storn, J.A. Lampinen // Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. -537 pages.
5. В.В. Курейчик, В.М. Курейчик, С.И. Родзин // Теория эволюционных вычислений. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2012. – 260с.
6. В.И. Савинов, Д.А. Булашов // Свидетельство о государственной регистрации № 2016610276 программы для ЭВМ Валопровод.
7. С. Рашка // Python и машинное обучение. Пер. с англ. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 418с.
8. С.С. Евгеньев, В.И. Савинов, И.Н. Сидоров, В.В. Семенова // Математические модели, методы и программные средства для анализа поперечных колебаний роторных систем. Энергетик, № 11, 2010. с.36-39.
9. Axial and Centrifugal Compressors and Expander-compressors. API STANDARD 617. 8 Ed. – API Publishing Services. American Petroleum Institute. –SEPTEMBER 2014.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ "ТРУБОПРОВОД - ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ"

Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия
velmisov@ulstu.ru

Аннотация. Рассматриваются математические модели механических систем «трубопровод – датчик давления», предназначенных для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. В такой системе для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик соединен с двигателем с помощью трубопровода и располагается на некотором расстоянии от него. Получены уравнения, позволяющие по величине деформации чувствительного элемента датчика, определять давление рабочей среды в камере сгорания в каждый момент времени. Предложены аналитические и численные методы решения соответствующих начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-21-00517.

Первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды является датчик [1, 2]. Для ослабления воздействий виброускорений и высоких температур датчик соединяется с рабочей камерой сгорания двигателя с помощью трубопровода. В связи с этим, при проектировании систем измерения давления возникает проблема исследования динамики и устойчивости совместных колебаний деформируемого элемента датчика и рабочей среды в трубопроводе. Подобный анализ особенно необходим для изучения поведения системы при нестационарном режиме работы двигателя (например, при взлете или посадке самолета, при возникновении пульсирующего режима работы двигателя и т.д.). В частности, задача состоит в получении и исследовании уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации чувствительного элемента рассчитать давление в двигателе.

Принципиальная схема системы «трубопровод – датчик давления», в которой на одном конце трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) $x = 0$ задан закон изменения давления рабочей среды, а на другом ($x = l$) расположен датчик, предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составной части чувствительный упругий элемент в виде пластины, представлена на рис. 1.

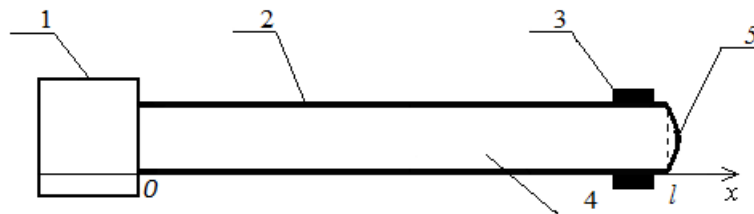


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»:
1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда, 5 – упругий элемент датчика.

В качестве примера приведем математическую постановку задачи, соответствующей модели системы «трубопровод – датчик давления» для трубопровода с сечением S прямоугольной формы

$$\varphi_{tt} = a_0^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, 0, z, t) = \varphi_y(x, a, z, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z \in (0, b), \quad (2)$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = \varphi_z(x, y, b, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad (3)$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (5)$$

$$L(w(y, z, t)) \equiv mw_{tt} + D\Delta^2 w + N\Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (6)$$

где $\Delta w = w_{yy} + w_{zz}$, $\Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}$.

В (1)-(6) $\varphi(x, y, z, t)$ - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(y, z, t)$ - деформация упругого элемента (прямоугольной пластины), расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(y, z, t)$ - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания) $x = 0$; ρ_0 , P_0 , a_0 - плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* - внешнее воздействие на упругий элемент; m и D - погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента; N - сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β - коэффициент внутреннего демпфирования; $f(w, w_t)$ - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации w и скорости деформации w_t , характеризующая упругие и демпфирующие свойства внешней связи (например, постели); индексы x , y , z , t снизу обозначают частные производные по координатам x , y , z и времени t .

Уравнение (1) описывает движение рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе с сечением прямоугольной формы; (2)-(4) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (6) описывает динамику упругого элемента, при этом оператор $L(w)$ может быть дополнен, в зависимости от выбранной модели деформирования, линейными или нелинейными интегральными членами (например, при учете вязкоупругих свойств материала пластины, или при учете нелинейности растягивающих усилий, возникающих в процессе деформирования). Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, y, z, t)$, $w(y, z, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для $w(y, z, t)$.

Разработаны способы решения указанной начально-краевой задачи.

Один из способов решения задачи (1)-(6) основан на введении усредненных характеристик основных величин динамической системы

$$\Phi(x, t) = \iint_C \varphi(x, y, z, t) dS, \quad \xi(t) = \iint_C w(y, z, t) dS, \quad G(t) = \iint_C P(y, z, t) dS, \quad Q(t) = \iint_C L(w(y, z, t)) dS, \quad (7)$$

где область интегрирования $C = \{(y, z) : 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq b\}$, $dS = dydz$. Интегрируя (1)-(6) по области C , используя при этом граничные условия (2)-(3), получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (8)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (9)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (10)$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(t), \quad (11)$$

где $S = ab$ - площадь сечения C , точка сверху обозначает производную по времени.

Например, для линейной модели $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D\Delta^2 w + N\Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$, где α, γ - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи, система уравнений (8)-(11) принимает вид

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (12)$$

$$\Phi_x(l, t) = w_0 \dot{\theta}(t), \quad (13)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (14)$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t). \quad (15)$$

В (13) – (15) введены обозначения $m_0 = m \iint_C g(y, z) dS$, $\alpha_0 = \alpha \iint_C g(y, z) dS + \beta \iint_C \Delta^2 g(y, z) dS$,

$\gamma_0 = D \iint_C \Delta^2 g(y, z) dS + N \iint_C \Delta g(y, z) dS + \gamma \iint_C g(y, z) dS$, $w_0 = \iint_C g(y, z) dS$, при этом $w(y, z, t) = \theta(t)g(y, z)$, где

функция $g(y, z)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Таким образом, решение задачи сведено к исследованию одномерной системы дифференциальных уравнений для $\Phi(x, t)$ и $\theta(t)$.

Предложены и реализованы несколько способов исследования системы (12)-(15).

1. Аналитическое решение задачи приводит к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом. В этом случае общее решение уравнения (12) записывается в виде:

$$\Phi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right), \quad (16)$$

где A , B – произвольные функции своих аргументов. Подставляя (16) в (13)-(15) и проводя ряд несложных математических действий, получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $\theta(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $G(t)$ рабочей среды в двигателе

$$\begin{aligned} m_0 \left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \\ - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2[G(t) + (P_0 - P_*)S] \end{aligned} \quad (17)$$

Если $\frac{l}{a_0} = \varepsilon$ – малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/сек, а длина l не превышает нескольких метров), то, проводя в (17) разложение по степеням ε и отставляя старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $\theta(t)$ и $G(t)$

$$(m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(m_0 + \frac{1}{3} \rho_0 w_0 l \right) \theta^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \ddot{\theta}(t) \right] + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*)S. \quad (18)$$

Решения линейного дифференциального уравнения (18) с постоянными коэффициентами строятся как численно, так и аналитически, в частности было проведено исследование резонансных явлений в случае пульсирующего давления в камере сгорания.

2. Численно-аналитическое исследование проводилось с помощью метода Галеркина. В этом случае потенциал скорости $\Phi(x, t)$ представляется в виде отрезков рядов по полным на интервале $(0, l)$ системам функций $\{z_m(x)\}$, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим условиям (13), (14) или (14), (15). В результате исследование сведено к решению задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которой проведен численный эксперимент.

3. Численное исследование проводилось также на основе конечно – разностного метода. При этом использовалась явная схема, на основе которой проведен численный эксперимент.

Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [3]. Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции отклонения подвижного элемента датчика при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе.

Аналогичным образом с помощью введения усредненных характеристик к решению одномерной задачи сводятся следующие начально-краевые задачи: задачи, соответствующие двумерным плоской и осесимметричной моделям механической системы «трубопровод-датчик давления»; задача, соответствующая трехмерной модели в цилиндрических координатах для трубопровода с поперечным сечением в виде сектора [4–9].

Литература

1. Ж. Аш и соавторы // Датчики измерительных систем: В 2-х книгах, Мир, М., 1992.
2. Л. Г. Эткин // Виброчастотные датчики. Теория и практика, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2004. 408 с.
3. Ю. А. Тамарова, П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов // Комплекс программ для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления», Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022615319, 30.03.2022, заявка №2022615014 от 28.03.2022.
4. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. В. Покладова // Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления», Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
5. П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем, Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
6. P. A. Velmiso, Y. A. Tamarova, Y. V. Pokladova // Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media, AIP Conference Proceedings, 2021, 2333. 120004.
7. P. A. Velmiso, Y. A. Tamarova, Y. V. Pokladova // Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems, Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021, 255(5). 587-594.
8. П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова // Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах, Журнал СВМО, Саранск, 22:3 2020. 352-367.
9. Ю. А. Тамарова, П. А. Вельмисов, Н. Д. Алексанин, Н. И. Нуруллин // Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред, Журнал СВМО, Саранск, 23:4 2021. 461-471.

УСТАЛОСТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ, КАК НЕОТЪЕМЛЕМАЯ ЧАСТЬ РЕИНЖИНИРИНГА ЛОПАТОК ОСЕВЫХ ТУРБОМАШИН

Гаврилов С.Н., Исаков Н.Ю., Сандовский А.В.

Открытое акционерное общество «Научно-производственное объединение по исследованию и проектированию энергетического оборудования им. И.И. Ползунова», Санкт-Петербург
sandovskiiav@ckti.ru

Аннотация. В настоящее время особую актуальность приобрели задачи реинжиниринга рабочих лопаток осевых турбомашин иностранного производства. Единственным достоверным способом определения качества проведенного реинжиниринга является метод проведения усталостных испытаний с целью экспериментального определения предела конструктивной выносливости как интегральной характеристики лопатки, позволяющей оценить качество производства, влияние замены материала, влияние неизбежного отклонения геометрических размеров реинжиниринговых лопаток от исходных. Для определения предела конструктивной выносливости лопаток (усталостной прочности) в процессе усталостных испытаний в ОАО «НПО ЦКТИ» используется специализированный электромагнитный вибрационный стенд. Возбуждение колебаний лопаток осуществляется путем воздействия электромагнитного поля переменной частоты на периферийную часть лопатки. Предел конструктивной выносливости лопаток определяется на основе экспериментально замеренных механических напряжений в зоне наклейки тензодатчика, регистрирующего максимальные механические напряжения.

Введение

Одним из главных компонентов современных газотурбинных установок (ГТУ) является рабочий лопаточный аппарат. Он должен выдерживать значительные нагрузки как от статических нагрузок — центробежной силы, так и от знакопеременных нагрузок в процессе эксплуатации. Надежность работы лопаточного аппарата определяет и надежность работы самого турбоагрегата.

Таким образом, при реинжиниринге современных паровых и газотурбинных установок необходимо особое внимание уделять лопаточному аппарату, грамотно оценивать запас его прочности.

Для оценки надежности необходимо знать соотношение между реальными механическими напряжениями, возникающими в процессе работы турбоагрегата и максимальными механическими напряжениями, которые длительное время выдерживают лопатки — пределу усталостной прочности.

Реальные механические напряжения определяются путем тензометрии вращающегося оборудования головного образца. Это сложный, дорогой и трудоемкий процесс. Необходимо оснастить лопатки тензодатчиками, осуществить трассировку тензокоммуникаций, установить предварительные усилители в проточку ротора и токосъемное устройство, выполнить цикл испытаний головного образца, снять Кэмпбелл - диаграмму.

Предел конструктивной выносливости определяется путем проведения усталостных испытаний на стенде. Оптимально проводить сравнительные испытания лопаточного аппарата исходной турбомашин и лопаток, полученных в результате реинжиниринга.

Описание стенда усталостных испытаний

Для проведения усталостных испытаний лопаток используется специализированный электромагнитный вибрационный стенд ОАО «НПО ЦКТИ» (рис. 1), включающий в себя:

- две вибрационные тумбы, предназначенные для закрепления испытуемых лопаток, расположенные в стендовом зале;
- вибрационную тумбу для закрепления испытуемых лопаток, расположенную в специальном звукоизолированном боксе;
- трансляционные усилители (выходная мощность 600 Вт, 5000 Вт, 7500 Вт, 10000 Вт);
- системы подмагничивания;
- генераторы переменного тока;
- катушки возбуждения;
- оптические системы контроля перемещения лопаток;
- кабельную сеть;
- тензометрические станции.

Кабельная сеть каждой вибрационной тумбы стенда состоит из двух подсистем (рис. 2). Первая служит для питания катушек возбуждения, расположенных у вибрационных тумб, сигналами от трансляционного усилителя. Вторая — для подачи тока подмагничивания на катушки возбуждения.

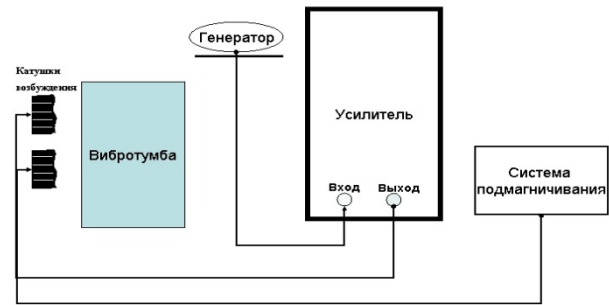


Рис. 1. Общий вид электромагнитного вибростенда. Рис. 2. Принципиальная схема соединения аппаратуры электромагнитного вибростенда.

Возбуждения лопаток осуществляются путем воздействия электромагнитного поля переменной частоты на периферийную часть лопатки.

Тарировка лопатки, т.е. определение зависимости максимальных механических напряжений в пере лопатки от размаха колебаний ее периферийного сечения, проводится с учетом расчетных данных. Расчетные данные уточняются путем проведения тензометрических измерений в точках, находящихся в районе расчетного максимума механических напряжений.

При выборе областей на пере лопатки для размещения тензодатчиков используется расчётное распределение относительных динамических напряжений, полученное в пакете конечно-элементных программ ANSYS с применением твердотельных конечных элементов высшего порядка.

При построении тарировочных кривых, определяющих зависимость механических напряжений в лопатке (МПа) от размаха колебаний пера лопатки (мм), применяется метод непосредственного определения механических напряжений через величину “GaugeFactor” тензометрического датчика с помощью встроенного в тензостанцию “National Instruments 9237” расчетно-аппаратного блока и программное обеспечение собственной разработки.

Все программное обеспечение для регистрации входных данных, отображения и записи в базу данных результатов тензометрирования разработано в ОАО “НПО ЦКТИ” (рис. 3).

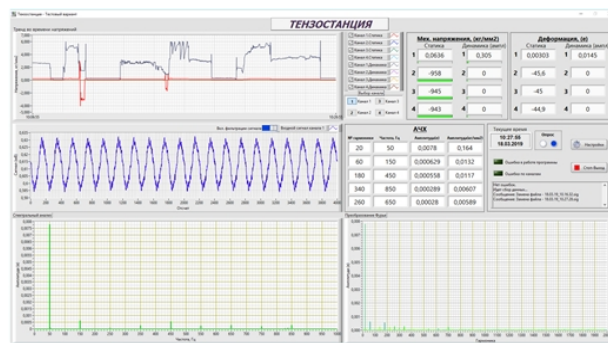


Рис. 3. Графический интерфейс тензостанции.

Предел конструктивной выносливости лопаток определяется на основе экспериментально замеренных механических напряжений в зоне наклейки тензодатчика, регистрирующего максимальные механические напряжения.

Усталостные испытания проводятся по СТО ОАО “НПО ЦКТИ” [1] на комплекте из 16 лопаток и с подтверждением полученного предела усталостной прочности не менее, чем на 6 лопатках (ОСТ 1 00870-77, п. 2.2.6) [2].

Общий вид лопатки, установленной на вибростенде, представлен на рис. 4.

Идентичность испытываемых лопаток подтверждается результатами контроля их первой собственной частоты. Испытания проводятся на собственной форме (первая форма) колебаний лопатки и с постоянной нагрузкой (амплитудой колебаний) до достижения требуемой базы циклов нагружения $2 \cdot 10^7$ циклов) или до снижения резонансной частоты колебаний лопатки примерно на 1 % (возникновение усталостной трещины в лопатке).

Величина нагрузки при испытаниях первой лопатки из комплекта выбирается заведомо значительной, что гарантирует возникновение усталостной трещины в зоне максимальных расчетных напряжений. Далее при испытаниях второй лопатки из комплекта нагрузка уменьшается на 15–20 %. В случае, если снова возникает

усталостная трещина, нагрузка для третьей лопатки снижается еще на 15–20 % и т.д., пока очередная испытываемая лопатка не выдержит полный цикл испытаний.



Рис. 4. Рабочая лопатка, установленная на стенде, для проведения усталостных испытаний.

После этого используется алгоритм половинного деления, т.е. очередная лопатка нагружается на 7–10 % большей нагрузкой и испытания повторяются. По их результатам происходит очередная коррекция нагрузки для уточнения полученного предела усталостной прочности или подтверждение этого значения еще на пяти лопатках.

Контроль и измерение размаха колебаний периферийного сечения лопатки осуществляется оптическим прибором МБС-1, точность 0,1 мм. Подсчет количества циклов определяется по времени проведения испытаний, запускаемым при выводе лопатки на контролируемый размах колебаний. Частота колебаний лопатки задается звуковым генератором ГЗ-34 и замеряется электронно-счетным частотомером ЧЗ-63 и тензометрической станцией “National Instruments 9237”.

В случае испытания лопаток, изготовленных из немагнитного материала, лопатки оснащаются специальной наделкой с целью снижения собственных частот лопаток в процессе испытаний. Для определения предела выносливости σ_{-1} испытания проводятся стандартным методом на базе $2 \cdot 10^7$ циклов колебаний. Усталостные испытания останавливаются при снижении резонансной частоты на 1 % от начального значения частоты колебаний по первой изгибной форме. Трещины в лопатках выявляются с помощью метода цветной дефектоскопии. Количество лопаток в каждом испытываемом комплекте составляет не менее 16 штук [1].

Заключение

Используемый метод определения предела конструктивной выносливости лопаточного аппарата осевых турбомашин позволяет оценить качество локализованного производства, влияние замены материала, влияние неизбежного отклонения геометрических размеров реинжиниринговых лопаток от исходной конструкции и оценить надежность работы новой конструкции.

Литература

1. СТО ЦКТИ 068-2022 . Методика определения предела конструктивной выносливости рабочих лопаток осевых турбомашин. — Санкт-Петербург, 2022.
2. ОСТ 1 00870-77 Лопатки газотурбинных двигателей. Методы испытаний на усталость. — М. : Стандартинформ, 1977.

ТАНГЕНЦИАЛЬНАЯ РЕАКЦИЯ ГИБКОЙ СКОльзяЩЕЙ ОПОРЫ ПРИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Досаев М.З.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
dosayev@imec.msu.ru

Аннотация. Рассмотрено плоское тело на шарнирных опорах. Один из опорных стержней соединен с телом посредством скользящей заделки, оснащенной упругой пружиной. Для моделирования его гибкости этот стержень разбивается на две части дополнительным шарниром со спиральной пружиной достаточно большой жесткости, препятствующей относительно повороту частей. Положение равновесия ищется в виде ряда по величине обратной коэффициенту жесткости спиральной пружины. В положении вертикального равновесия системы тангенциальная реакция в опорном шарнире равна нулю. Показано, что в случае возникновения даже относительно малых колебаний тангенциальная реакция в опорном шарнире может намного превышать вес тела.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00303.

Введение

В строительных конструкциях иногда, например для защиты здания от сейсмических разрушений, применяются скользящие сочленения. Исследованию таких скользящих заделок посвящен ряд работ в строительной научной литературе.

Плоские скользящие сочленения, используемые в сборных сегментных колоннах мостов для смягчения пагубных последствий землетрясений рассмотрены в [1]. Экспериментальные и аналитические исследования проведены в [2] для выбора предпочтительных параметров применения скользящего соединения в зданиях из каменной кладки. На основе известных данных в [3] дана оценка специальному антисейсмическому подходу – разделению каменной кладки на несколько подпанелей, относительно скользящих по определенным швам. В [4] проведено динамическое моделирование колонн с регулируемыми скользящими соединениями. Показано, что такие колонны являются эффективным инструментом для реализации общей сейсмической изоляции между настилом и трясущимся грунтом.

В [5] рассмотрена задача о равновесии тела, опирающегося жесткими опорами со скользящей заделкой на неподвижные шарниры. Показано, что добавление такого скользящего вертикального сочленения не добавляет подвижности конструкции. При этом величина реакций опор может оказаться критически большой.

В реальной практике эти опорные элементы не являются абсолютно жесткими и допускают некоторый изгиб. В данной работе дана оценка влияния гибкости скользящего упругого сочленения на величины усилий в элементах конструкции и тангенциальной реакции в опоре.

Основной текст

Рассматривается плоская механическая система (рис. 1), опирающаяся на два цилиндрических шарнира A_1 и B_1 , расположенных на одной высоте. Система состоит из тяжелого прямоугольного тела $ABCD$ ($AB = 2a$, $AD = 2b$) массой m , жестко связанных с ним невесомых элемента: стержня AA_1 длиной l и направляющей, параллельной AA_1 , по которой может скользить без трения тяжелый телескопический стержень B_3B_2 массой m_1 с центром масс G_1 и длиной l_2 . Стержень B_3B_2 соединен с концом направляющей пружиной жесткости k . В точке B_3 этот стержень посредством цилиндрического шарнира соединен с невесомым стержнем B_1B_3 длиной l_1 , который, в свою очередь, опирается на цилиндрический шарнир B_1 . Шарнир B_3 оснащен спиральной пружиной жесткостью c , препятствующей повороту вокруг этого шарнира. Пружина находится в равновесии, когда стержни B_1B_3 и B_3B_2 сонаправлены. Центр масс прямоугольника G смещен от его геометрического центра вдоль стороны AB на расстояние d .

Опишем внешние силы, действующие на систему. Кроме силы тяжести $mg = P$, на систему действуют реакции в шарнирах, которые мы разложим на нормальные N_1 , N_2 и тангенциальные F_1 , F_2 реакции. Отметим, что между стержнем B_3B_2 и направляющей, по которой он скользит без трения, действуют внутренние силы F_B , F'_B , перпендикулярные этому стержню. Отметим также внутреннюю силу F_{el} от линейной пружины и момент T от спиральной пружины.

Положение системы зададим углом φ между стержнем AA_1 и вертикалью. Для удобства введем дополнительную переменную: угол ψ между вертикалью и прямой B_1B_3 .

Величина момента T определяется следующим образом: $T = c(\psi - \varphi)$.

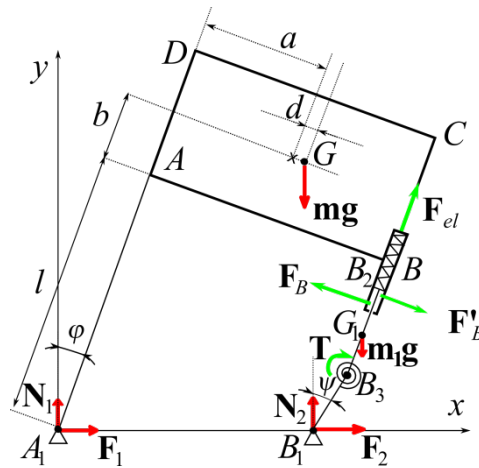


Рис. 1. Плоская конструкция со скользящей упругой гибкой опорой.

Вначале рассмотрим довольно произвольный выбор линейной пружины в направляющей. Например, для определенности выберем, что пружина находится в равновесии при выполнении следующего условия: $|B_3B| = l - l_1$. Найдем положение равновесия близкое к вертикальному положению тела, то есть для малых значений угла φ .

Уравнение для определения положения равновесия системы достаточно громоздко. Отметим, что для разности углов φ и ψ выполнено следующее соотношение $\psi - \varphi = a\varphi^2 / l_1 + o(\varphi^4)$, поэтому потенциальная энергия спиральной пружины зависит от угла φ в четвертой степени, и процедура линеаризации уравнения равновесия здесь бесполезна. Разложим это уравнение в ряд Тейлора по углу φ и отбросим в нем члены выше третьего порядка малости. Считая параметр c достаточно большой величиной, будем искать решение этого упрощенного уравнения в следующем виде: $\varphi = a_1 / (c^{1/3}) + a_2 / (c^{2/3}) + a_3 / c$. Отбросив члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$, определим неизвестные коэффициенты разложения a_1, a_2, a_3 . Наконец, подставим полученное решение в разложение величины момента T в ряд Тейлора.

$$a_2 = \left[gl_1 m_1 + ((b+l)m - l_2 m_1 / 2)g - 8ka^2 \right] l_1^2 / \left[6a^2 a_1 \right]$$

$$a_3 = \left[\left[(m_1 a_2 l_1 - ((m - 6m_1)a + md)a_1^2 / 2 - a_2 (l_2 m_1 / 2 - (l+b)m))g - 8ka^2 a_2 \right] l_1^2 / (6a^2) - a_1 a_2^2 \right] / a_1^2$$

Получим следующее соотношение:

$$T = ca\varphi^2 / l_1 + o(\varphi^4) = (2l_1)^{1/3} a^{-1/3} (mg(a+d))^{2/3} c^{1/3} / 2 - (8ka^2 - g(l_1 m_1 + (l+b)m - l_2 m_1 / 2)) / (3al_1) + o(c^{-1/3}).$$

Очевидно, что, несмотря на малость угла φ , при устремлении c к бесконечности величина момента T также стремится к бесконечности. Таким образом, с ростом жесткости скользящего стержня нагрузка на его изгиб также растет. На практике это означает, что достаточно жесткая скользящая опора может просто переломиться при установке!

Пусть теперь положению равновесия системы соответствует вертикальное положение опорных стержней. Отметим, что в положении вертикального равновесия тангенциальная реакция F_2 равна нулю. Оценим величину тангенциальной силы в случае возникновения малых колебаний около положения равновесия.

Вначале мысленно освободимся от связи: заменим правый опорный шарнир соответствующими силами реакции N_2 и F_2 и предоставим возможность точке B_1 скользить по опорной поверхности. Система в общем случае обладает двумя степенями свободы. В качестве обобщенных координат возьмем угол φ между стержнем AA_1 и вертикалью и угол ψ между вертикалью и прямой B_1B_3 . Кроме потенциальных сил необходимо в качестве активной силы учитывать тангенциальную реакцию F_2 . Вычислим элементарную работу этой реакции и получим два уравнения движения системы с помощью Лагранжева формализма. Вспомним теперь, что точка B_1 неподвижна по условию задачи. Продифференцировав и дважды продифференцировав связь между углами φ и ψ , получим следующие зависимости: $\dot{\psi} = f_1(\dot{\varphi}, \varphi)$ и $\ddot{\psi} = f_1(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi)$. Подставив эти зависимости в уравнения движения, получим систему двух уравнений на две неизвестные: угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ и величину опорной реакции F_2 . Решив эту систему, получим одно дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение консервативной системы и зависимость реакции F_2 от фазовых переменных

$\varphi, \dot{\varphi}$ в процессе этого движения. Разложим реакцию F_2 по малым величинам $\varphi, \dot{\varphi}$:
 $F_2 = [((m + 2m_1)a + md)g] \varphi / (2a) - ca\dot{\varphi}^2 / l_1^2 + \dots$

Проанализировав эту формулу, можно сделать следующий вывод. Если амплитуда колебаний, например, достигнет величины $c^{-0,4}$, оставаясь при этом малой величиной, то порядок тангенциальной реакции будет $c^{0,2}$ (F_2 может стать критически большой в практическом смысле).

Заключение

Построена плоская модель конструкции, содержащей скользящую упругую заделку гибкого опорного стержня. Усилие в стержне в положении равновесия близком к вертикали растет с увеличением его жесткости. Если параметры конструкции подобраны так, что ее вертикальное положение является равновесным, то в этом положении тангенциальная опорная реакция упругой скользящей опоры равна нулю. Однако, эта тангенциальная опорная реакция быстро и критически растет с возникновением колебаний конструкции даже с относительно малыми амплитудами.

Таким образом, если конструкция с подвижным сочленением рассчитана способной выдержать нагрузки в обычных статических условиях, то возникновение колебаний (даже с малыми амплитудами) может привести к ее поломке!

Литература

1. Y.Q. Liu, F. Liang , T.K. Francis Au // Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints, *Construction and Building Materials*, 318 2022. 126192 <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.126192>
2. Yu.-F. Jiang, Z.-X. Guo, S.H. Basha, Z.-L. Chai // Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures, *Engineering Structures*, 244 2021. 112734. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112734>
3. F. Di Trapani, V. Bolis, F. Basone, L. Cavaleri, M. Preti // Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL, *Procedia Structural Integrity*, 26 2020. 383-392. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.06.049>
4. Y.Q. Liu, F. Liang , T.K. Francis Au // Precast segmental bridge columns with resettable sliding joints – An inspiration from ancient Chinese pagodas, *Structures*, 33 2021. 615-626. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.03.120>
5. М.З. Досаев, В.А. Самсонов // Особенности равновесия тела на шарнирных опорах и скользящей заделке, *Известия российской академии наук. Механика твердого тела*, 3 2023. 28–37

РАЗВИТИЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ОСНОВ СТРУКТУРНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ВИБРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Елисеев А.В.^{1,2}, Кузнецов Н.К.²

1 - Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

*2 - Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск,
Россия*

eavsh@ya.ru

Аннотация. Развиваются научно-методологические основы структурного математического моделирования в решении задач динамики технологических и транспортных машин, работающих в условиях интенсивного динамического нагружения. Для поиска подходов к решению задач, связанных с оценкой, контролем и формированием динамических состояний, используется методология структурного математического моделирования, в рамках которой механическим колебательным системам, рассматриваемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Разработан ряд новых подходов к оценке динамических состояний систем.

В настоящее время этапы разработки безопасных, надежных и эффективных технических систем представляют собой достаточно сложный комплекс мероприятий, включающий в свой состав развитие научно-методологического базиса, направленного на разработку математических моделей широкого класса технических объектов транспортного и технологического назначения, работающих в условиях вибрационного нагружения, расчетные схемы которых представляют собой механические колебательные системы [1, 2].

В качестве методологического базиса решения широкого круга задач динамики технических объектов в условиях вибрационного нагружения могут быть рассмотрены методы структурного математического моделирования, отличающиеся тем, что механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов ставятся в соответствие структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [3–5].

В рамках методологии структурного математического моделирования для оценки, контроля и формирования динамических состояний используются передаточные функции, в физическом смысле способные отображать широкие классы особенностей механических взаимодействий элементов колебательных систем, находящихся в условиях возмущений силовой или кинематической природы. На начальных этапах моделирования для широкого круга задач вполне оправданы предположения, что для расчетной схемы технического объекта справедливы свойства линейности, малости гармонических форм установившихся вынужденных и свободных движений, незначительность сил трения, если не оговорено противное [6].

В целях развития научно-методологического базиса, направленного на оценку, контроль и формирование динамических состояний механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами, поставлен ряд задач, учитывающих включения в систему структурных образований типа диады, воздействия связности внешних возмущений силовой или кинематической природы, наличие неустойчивых связей, возможности отображения динамических состояний в рамках упрощенных представлений о рычажных и упругих связях на основе использования энергетических частотных функции и соотношений, и задач, допускающих развитие представлений об обобщенных состояниях с помощью существенных динамических особенностей.

По результатам решения задач можно сделать ряд выводов. Разработан метод оценки специфических динамических режимов, включая динамическое гашение колебаний с учетом связности движений по координатам. В основу метода оценки динамических состояний и форм динамических взаимодействий положены представления об обобщенных динамических состояниях, характеризующихся количеством резонансов, режимов динамического гашения и количествами знакоопределенных форм динамических взаимодействий [7–9]. Для семейства механических колебательных систем с двумя степенями свободы в условиях связанных возмущений силовой природы построена полная совокупность динамических состояний объекта [10].

Разработан подход к отображению динамических особенностей взаимодействия фундаментального структурного образования в форме диады. В частности, показано, что диада, рассматриваемая как плоская механическая колебательная система, изолированная от опорной поверхности, обладает характерными динамическими свойствами, отражающими особенности свободных и вынужденных колебаний [11–13].

В рамках задачи оценки особенностей взаимодействия элементов колебательных систем при наличии неустойчивых связей разработан математический аппарат моделирования особенностей динамических взаимодействий, определения устойчивых динамических состояний и условий реализации движений материалов в вибрационных формах динамического взаимодействия, сопровождаемых фазами отрыва, соударений и других видов взаимодействий [14–16].

Разработан метод построения математических моделей для технических объектов, взаимодействие

элементов которых оценивается в рамках представлений о рычажных связях. Рассмотрены особенности формирования виртуального рычага (или рычажных связей) на примерах механических колебательных систем цепного типа; показаны возможности использования аналитического аппарата теории автоматического управления. Механическая колебательная система, рассматриваемая как виртуальный рычаг, позволяет оценить распределение особенностей динамических взаимодействий, возникающих между характерными точками виртуального рычажного механизма [17, 18].

Предложен метод оценки динамических свойств механических колебательных систем на основе введения понятия о частотной энергетической функции, позволяющей определять частоты собственных колебаний и их зависимости от коэффициента связанности амплитуд колебаний по координатам системы [19, 20].

Литература

1. Harris S. M. Shock and Vibration Handbook / Harris, C. E. Srede. - New York: McGraw — Hill Book So, 2009. - 1168 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006. 1064 p.
3. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами / М.З. Коловский. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография / С.В. Елисеев; отв. ред. А.И. Артюнин. – Иркутск : ИРГУПС, 2018. – 692 с.
5. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
6. Елисеев С.В. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев, Р.С. Большаков, А.П. Хоменко-Новосибирск, 2021. – 679 с.
7. Елисеев А.В. Системные подходы к оценке динамических состояний технических объектов при вибрационных нагружениях: частотные функции, динамические инварианты, методы регуляризации / А.В. Елисеев, И.С. Ситов, Н.К. Кузнецов // Системы. Методы. Технологии. 2022. № 4 (56). С. 7-15.
8. Елисеев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем / А.В. Елисеев, Н.К. Кузнецов, А.В. Николаев // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2022. № 15. С. 18-30.
9. Елисеев А.В. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты / Елисеев А.В., Кузнецов Н.К./ iPolytech Journal. 2022. Т. 26. № 3. С. 368-385.
10. Елисеев А.В. Системный подход к оценке полной совокупности динамических состояний технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений / А.В. Елисеев, И.С. Ситов, Н.К. Кузнецов // Системы Методы Технологии. 2023 № 1 (57) с. 7-20.
11. Елисеев А.В. Диады в механических системах: особенности динамических свойств. Часть I. / А.В. Елисеев // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21. № 7(126). С. 26–38. DOI: 10.21285/1814-3520-2017-7-26-38.
12. Елисеев А.В. Диады в механических системах: особенности динамических свойств (Часть II) [Text] / Елисеев А.В. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21 № 8. С. 22–37.
13. Елисеев А.В. Особенности динамических свойств диады в подходах с позиций мезомеханики / Елисеев А.В., Елисеев С.В. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2019. – Т. 62, № 2. – С. 23–33. – DOI: 10.26731/1813-9108.2019.2(62).23–33.
14. Елисеев, С.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неустойчивых связей [Текст] /Елисеев С.В., Елисеев А.В.// Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. ИРГУПС. Иркутск. №4(№40). 2013.С.51-60
15. Елисеев А.В. Технология оценки свойств динамического взаимодействия в контактах составных твердых тел [Текст] /, Елисеев А.В.// Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. - 2014, №1-2, С. 179-183.
16. Елисеев, А.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неустойчивых связей: монография /А.В. Елисеев, В.В. Сельвинский, С.В. Елисеев // Новосибирск: Наука, 2015. – 332 с.
17. Елисеев С.В. Особенности динамики вибрационных технологических машин: системный анализ, структурное моделирование, рычажные связи [Text] /Елисеев С.В., Каргапольцев С.К., Большаков Р.С., Елисеев А.В. // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 4 (48). С. 12-19.
18. Елисеев С.В. Рычажные связи: особенности структурных интерпретаций [Text] /С.В.Елисеев, С.К.Каргапольцев, А.В.Елисеев // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2021. № 1 (21). С. 5-16.
19. Елисеев А.В. Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией [Text] / Елисеев А.В. // Advanced Engineering Research. — 2020. — Т. 20, № 4. — С. 360–369. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-4-360-369>
20. Елисеев А.В. Частотная энергетическая функция в оценке динамических состояний технических объектов /Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. // Труды МАИ. 2021. № 118.

ТЯНУЩАЯ СИЛА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО ПОДВЕШЕННОЙ ПЛАСТИНКИ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Зотов А.Н.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, ФГБОУ ВО УГНТУ
anz21963@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена построению и исследованию математической модели колебаний пластинки в набегающем потоке среды. Исследовалась система с двумя степенями свободы. Численно получены режимы колебаний пластинки, при которых возникает тянущая сила, направленная против потока среды, предсказанная М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым в 40 годах прошлого века. В рамках предложенной математической модели получены устойчивые режимы колебаний пластинки, при которых проекция аэродинамических сил на горизонталь направлена против набегающего потока. Показано, что при достижении определенной скорости набегающего потока происходит срыв колебаний и тянущая сила пропадает.

Введение

В статье [1] показано, что для пластинки, движущейся с поступательной скоростью и совершающей колебания по некоторому периодическому закону, существуют режимы, при которых горизонтальная аэродинамическая сила, приложенная к пластинке, тянет ее вперед. В данном исследовании принят подход, используемый в работах [2–5]. Рассматриваемая система «пластинка-рамка» (рис. 1) имеет две степени свободы, она может вращаться вокруг центра масс, который перемещается по прямой. Восстанавливающая сила и восстанавливающий момент прямо пропорциональны соответствующим перемещениям. Аэродинамические силы, приложенные к пластинке приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины [2–5]. Предполагается, что центр давления пластинки, в котором приложены аэродинамические силы, является подвижным и находится в некоторой точке A , положение которой зависит от угла между скоростью точки A и самой пластинкой. Центры давлений определяются путем продувок прямоугольных пластинок в аэродинамической трубе [6]. Аэродинамические силы, действующие на пластинку, разложены на две составляющие: сила сопротивления \bar{S} , направленная против скорости точки A , и подъемная сила \bar{P} , направленная ей ортогонально.

Постановка задачи

На рис. 1 представлена пластинка 1 в потоке среды (воздуха) со скоростью V с центром масс в точке G . Она жестко соединена с рамкой 2 и ее плоскость совпадает с плоскостью рамки. Центр масс системы «пластинка-рамка» за счет противовеса 3 (точка B) находится в точке $C(0)$. Эта точка соединена с неподвижным основанием линейной пружиной 4. Кроме того, в этой точке пластинка соединена с пружиной кручения 5. Удлинение, отношение ширины пластинки к ее длине, принимается равным 8 [6]. Исследуются автоколебания системы «пластинка-рамка» с большими амплитудами, возникающие в стационарном потоке воздуха. Вводится неподвижная система координат xO_1y и подвижная система координат $\tau A\xi$, жестко связанная с пластинкой 1. В положении покоя пластинка ориентирована горизонтально к потоку. Силы тяжести направлены перпендикулярно рисунку. Восстанавливающие сила и момент пружин 4 и 5 прямо пропорциональны соответствующим отклонениям: $R = -c \cdot y$; $M = -k \cdot \varphi$. Массами пружин пренебрегаем. Величины аэродинамических сил $|\bar{S}|$ и $|\bar{P}|$, действующих в точке A равны

$$|\bar{S}| = 0.5 \cdot \rho \cdot \sigma \cdot c_x(\alpha) \cdot V_A^2; |\bar{P}| = 0.5 \cdot \rho \cdot \sigma \cdot c_y(\alpha) \cdot V_A^2 \quad (1)$$

где $\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха; σ – площадь пластинки; α – угол атаки между вектором \bar{V}_A и пластинкой; $V_A^2 = V_x^2 + V_y^2$, $V_x = V - \dot{\varphi} \cdot (\ell_1 + \varepsilon_0) \cdot \sin \varphi$, $V_y = \dot{y} - \dot{\varphi} \cdot (\ell_1 + \varepsilon_0) \cdot \cos \varphi$ (рис. 1); $\dot{\varphi}$ – угловая скорость пластинки; \dot{y} – скорость точки 0; $\ell_1 = G0$ – расстояние между центром масс системы «пластинка-рама» и центром масс пластинки; $\varepsilon_0 = GA = const$.

Зависимости $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$, приведенные в [6], аппроксимированы в первом приближении аналитическими функциями $c_x(\alpha) = 0,7(1 - \cos 2\alpha)$ и $c_y(\alpha) = 0,9 \sin 2\alpha$.

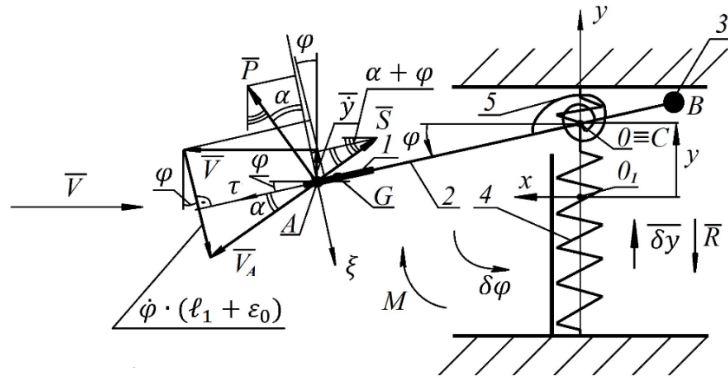


Рис. 1. Схема системы с двумя степенями свободы в потоке среды.

Угол α определяется соотношением (2).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_{\xi}}{V_{\tau}} = \frac{\dot{\varphi} \cdot (\ell_1 + \varepsilon_0) - \dot{y} \cdot \cos \varphi - V \cdot \sin \varphi}{V \cdot \cos \varphi - \dot{y} \cdot \sin \varphi} \quad (2)$$

Система на рис. 1 имеет две степени свободы. Колебания этой системы описываются двумя уравнениями Лагранжа II рода для координат y и φ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_{\delta y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\delta \varphi} \end{aligned} \quad (3)$$

где $T = \frac{m \cdot \dot{y}^2}{2} + \frac{I_C \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$ – кинетическая энергия системы; $Q_{\delta y} = P \cdot \cos(\alpha + \varphi) + S \cdot \sin(\alpha + \varphi) - c \cdot y$;

$Q_{\delta \varphi} = -P \cdot \cos \alpha \cdot A_0 - S \cdot \sin \alpha \cdot A_0 - k \cdot \varphi$ – обобщенные силы по соответствующим координатам;

m – масса колеблющейся системы; I_C – момент инерции системы относительно центра масс C .

Система дифференциальных уравнений (3) сводится к системе (4).

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{y} &= P \cdot \cos(\alpha + \varphi) + S \cdot \sin(\alpha + \varphi) - c \cdot y \\ I_C \cdot \ddot{\varphi} &= -P \cdot \cos \alpha \cdot (\ell_1 + \varepsilon_0) - S \cdot \sin \alpha \cdot (\ell_1 + \varepsilon_0) - k \cdot \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

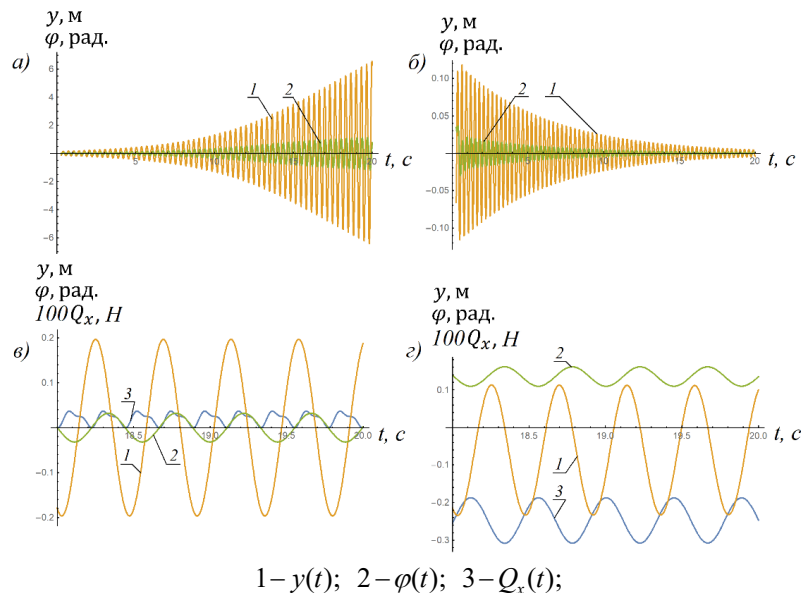
Начальные условия системы (4): при $t=0$: $y_0 = \varphi_0 = 0$; $\dot{y}_0 > 0$; $\dot{\varphi}_0 > 0$.

Проекция на ось x аэродинамических сил \bar{P} и \bar{S} , действующих на пластинку, определяется следующим выражением:

$$Q_x = P \cdot \sin(\alpha + \varphi) - S \cdot \cos(\alpha + \varphi). \quad (5)$$

Результаты

Анализ дифференциальных уравнений (3), которые решались численно, показал, что возможны колебания резонансного типа (рис. 2, а), затухающие колебания (рис. 2, б) и устойчивые колебания (рис. 2, в), при которых сумма аэродинамических сил на ось x (5) направлена против набегающего потока $Q_x > 0$. Величины Q_x оказались очень маленькими. В приведенном на рис. 2, в примере, максимальные значения Q_x составляют примерно 0,000037 Н. При увеличении скорости потока V величины максимальных значений силы Q_x уменьшаются. Амплитуда силы Q_x зависит от начальных скоростей \dot{y}_0 , $\dot{\varphi}_0$ (4). При достижении определенной скорости потока V происходит срыв колебаний (рис. 2, г). Как видно из рисунка, при скорости потока $V=89$ м/с колебания качественно меняют свой вид, и горизонтальная сила Q_x становится отрицательной и возрастает на несколько порядков по величине. Следует отметить, что угол α для варианта на рис. 2, в практически равен нулю (амплитуда колебаний угла α примерно 10^{-5} , на рисунке не показано). При срыве потока (рис. 2, г) угол α также практически постоянен и составляет примерно $-0,135$ рад.



1 – $y(t)$; 2 – $\varphi(t)$; 3 – $Q_x(t)$;

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & y_0 = \varphi_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \dot{\varphi}_0 = 2 \text{ с}^{-1}; \quad V = 80 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad c = 3870 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad k = 3990 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; \quad m = 11 \text{ кг}; \quad I_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\
 \text{б) } & y_0 = \varphi_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \dot{\varphi}_0 = 2 \text{ с}^{-1}; \quad V = 80 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad c = 3870 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad k = 3990 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; \quad m = 8 \text{ кг}; \quad I_0 = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\
 \text{в) } & y_0 = \varphi_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \dot{\varphi}_0 = 2 \text{ с}^{-1}; \quad V = 80 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad c = 3870 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad k = 3990 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; \quad m = 19,2 \text{ кг}; \quad I_0 = 19,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\
 \text{г) } & y_0 = \varphi_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \dot{\varphi}_0 = 2 \text{ с}^{-1}; \quad V = 89 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad c = 3870 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad k = 3990 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; \quad m = 19,2 \text{ кг}; \quad I_0 = 19,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Численные решения системы дифференциальных уравнений (3).

Колебания суммы проекций аэродинамических сил \bar{P} и \bar{S} , на ось y симметричны относительно нулевого положения ($y=0$) для случая тянущей силы Q_x на рис. 2,).

Выводы

1. В рамках предложенной математической модели получены устойчивые режимы колебаний рассматриваемой системы с двумя степенями свободы, при которых проекция аэродинамических сил на горизонталь направлена против набегающего потока.
2. Амплитуды полученных устойчивых колебаний, при которых существует тянущая сила, зависят от начальных скоростей пластинки.
3. Существует критическая скорость потока среды, при достижении которой происходит срыв режима колебаний с тянущей силой, и эта сила пропадает.

Литература

1. М. В. Келдыш // Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. 567 с.
2. Д. В. Беляков // Задача об автоколебаниях пластинки в потоке среды. Журнал Современные информационные технологии и ИТ образование. Том 2 (№ 11) 2015. Издательство Московского университета. 554 с.
3. В. А. Самсонов, Д. В. Беляков // Геометрический анализ при исследовании колебаний тела сложной конфигурации в потоке среды. Int. J. Open Inform. Technol. 2019. V. 7. № 9. 31–38.
4. Д. В. Беляков, В. А. Самсонов, В. В. Филиппов // Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде. Издательство «МЭИ», журнал «Вестник МЭИ», выпуск № 4 2006 г., 5-10.
5. Д. В. Беляков // Исследование малых колебаний тела сложной конфигурации в потоке среды. Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Том 13, №3, 116-121.
6. В. Г. Табатчиков // Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки. Труды ЦАГИ 1974 г. выпуск 1621, 79-93.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ СЛАБОВСЯЗАННЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РЕЗОНАНСНОГО МЭМС-АКСЕЛЕРОМЕТРА В РЕЖИМЕ ДВУХКОНТУРНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
igumnovavs@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе исследуются качественные особенности нелинейной динамики резонансного дифференциального МЭМС-акселерометра, состоящего из двух резонаторов и инерционной массы, которые связаны друг с другом посредством двух упругих элементов (пружин). При появлении в системе ускорения возникает продольная сила инерции в подвижных элементах, что приводит к увеличению собственной частоты одного резонатора и падению другой. Ускорение объекта измеряется по разности собственных частот резонаторов, которая определяется по отслеживанию огибающей режима биений в выходящем сигнале датчика. В работе получена эволюция амплитуды и разности фаз в медленных переменных от параметров начальной расстройки жесткости чувствительного элемента и величины осевой силы инерции. Показан переход от двухчастотного режима (режим биений) к одночастотному (режим синхронизации), с помощью аналитических методов нелинейной механики определены области в пространстве параметров, соответствующие режимам двухчастотных биений и фазовой синхронизации, что определяет диапазон чувствительности датчика к измеряемой компоненте вектора ускорения подвижного объекта.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-71-10009.

Введение

Всё большее распространение в современной индустрии нано- микроэлектромеханических систем (Н/МЭМС) находит использование существенно нелинейных характеристик проектируемых механических архитектур и принципов генерации колебаний, а также коллективных динамических свойств подвижных элементов устройств, что позволяет на порядок повысить точность и стабильность измерений для широкого класса датчиков физических величин [1]. Значительный научный и практический интерес представляет изучение явления синхронизации колебаний в микросистемах с автоколебательным принципом возбуждения и управления колебаниями. Так, в работе [2] исследована динамика пары связанных линейной пружиной микромеханических осцилляторов с термо-оптическим контуром обратной связи. Изучена бифуркационная структура системы и показано, что система характеризуется сосуществованием нескольких стационарных режимов движения, реализация которых определяется начальными условиями. В работе [3] изучены динамические характеристики микроэлектромеханической системы, состоящей из массива электромеханически связанных автоколебательных балочных резонаторов. Обнаружены и исследованы два возможных режима синхронизации в системе: режим самосинхронизации массива резонаторов на некоторой единой частоте колебаний и режим синхронизации всей системы на частоте воздействия внешнего вибрационного привода. Процесс нелинейного модального взаимодействия на внутреннем резонансе 1:3 в системе двух электростатически связанных микробалок рассмотрен в [4]. Авторами экспериментально наблюдалось и было аналитически исследовано явление частотной синхронизации в указанной системе. В [5] предложен новый алгоритм скользящего режима управления для обеспечения синхронизации между двумя МЭМС-резонаторами с нелинейной механической характеристикой при наличии в системе неопределённостей и внешних возмущений. Настоящее исследование посвящено изучению условий и сценариев синхронизации колебаний слабосвязанных микробалочных элементов дифференциального резонансного МЭМС-акселерометра, работающего в режиме двухконтурного автогенератора.

Постановка задачи и результаты

Предложена модель МЭМС-акселерометра, состоящего из двух микробалочных чувствительных элементов (ЧЭ) и инерционной массы, которые имеют механическую связь между друг другом, выполненную в виде упругих элементов.

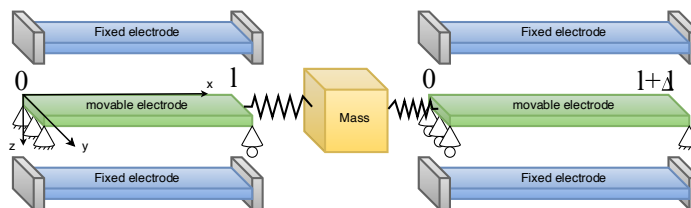


Рис. 1. Модель акселерометра.

При действии переносного ускорения подвижная масса отклоняется, и в системе появляется продольная

сжимающая сила для одного из резонаторов и растягивающая сила для второго резонатора, которые увеличивают различие между частотами. Сигналы с двух ёмкостных преобразователей с различными частотами суммируются и на выходе получается сигнал, имеющий вид биений. Ускорение объекта измеряется по огибающей режима биений в выходном сигнале датчика.

Уравнение движения инерционной массы (ИМ) имеет вид:

$$M\ddot{y} + c[y - u_1(l)] + c[y + u_2(0)] = MW, \quad 1)$$

где y – продольное перемещение ИМ, M – масса, c – жесткость подвеса, связывающего ИМ с чувствительным элементом, W – ускорение корпуса, $u_1(l)$, $u_2(0)$ – смещения концов двух микробалок. Отметим, что подвижные элементы имеют различные длины l и $l + \Delta l$.

Считается, что внешнее ускорение W имеет практически постоянное значение, т.е. ускорение, если и меняется, то квазистатически. Ускорение подвижной массы \ddot{y} имеет малое значение по сравнению с W , т.к. жесткость подвеса проектируется таким образом, что собственная частота (СЧ) колебаний подвижной массы на этой пружине гораздо ниже, чем рабочая СЧ балочного резонатора. Пренебрегая относительным ускорением инерционной массы, получим следующие выражения для квазистатического смещения ИМ:

$$y = \frac{1}{2c} (c[u_1(l) - u_2(0)] + MW). \quad 2)$$

Уравнения продольных колебаний представляют собой систему из двух уравнений для каждого подвижного элемента:

$$\begin{cases} -N'_1 + \rho S \ddot{u}_1 = 0 \\ u'_1 + \frac{1}{2}(w_1')^2 - \frac{N_1}{ES} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -N'_2 + \rho S \ddot{u}_2 = 0 \\ u'_2 + \frac{1}{2}(w_2')^2 - \frac{N_2}{ES} = 0, \end{cases} \quad 3)$$

где индексы 1 и 2 относятся к разным измерительным чувствительным элементам. $N_{1,2}$ – соответствующие продольные силы. Так как спектр СЧ продольных колебаний стержня располагается выше, чем спектр поперечных колебаний и автоколебательной схемой будем возбуждать именно низшую форму поперечных колебаний, то влиянием сил инерции в продольном направлении можно пренебречь, получаем, что $N'_1 = 0$ и $N'_2 = 0$, а значит продольные силы не зависят от координаты x . Тогда, интегрируя второе уравнение из (3) с учётом граничных условий, получим:

$$u_1(l) = \frac{N_1 l}{ES} - \frac{1}{2} \int_0^l w_1'^2 dx, \quad u_2(l) = \frac{N_2 l}{ES} - \frac{1}{2} \int_0^{l+\Delta l} w_2'^2 dx. \quad 4)$$

После некоторых математических преобразований, применения метода Галёркина и введения безразмерных коэффициентов, получим итоговые безразмерные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\mu(1 - b\xi^2)\dot{\xi} + (1 + p)\xi + \gamma\xi(\xi^2 + \zeta^2) &= 0, \\ \ddot{\zeta} + 2\mu(1 - b\zeta^2)\dot{\zeta} + (1 - p)(1 - a)\zeta + \gamma\zeta(\xi^2 + \zeta^2) &= 0. \end{aligned} \quad 5)$$

где ξ и ζ – модальные координаты балочных элементов, $\mu < 0$ – коэффициент диссипации; $b > 0$ – нелинейная диссипация, p – осевая сила, γ – коэффициент нелинейности.

Нахождение медленной эволюции нелинейных колебаний системы (14) методом многих масштабов с представлением решения в классических амплитудно-фазовых медленных переменных приводит к автономной динамической системе, для которой установившийся режим характеризуется постоянством амплитуд двух модальных координат и линейным возрастанием их фаз. Такой характер решения с позиций теории динамических систем не является положением равновесия или предельным циклом, что не позволяет применить численный аппарат теории продолжения решений нелинейных уравнений. Для преодоления этого затруднения был выполнен переход к новым переменным:

$$u = \xi + \zeta, \quad v = \xi - \zeta. \quad 6)$$

Система уравнений (5) решается методом многих масштабов. Выполним верификацию построенной модели в медленных переменных путем сопоставления полученного асимптотического решения уравнений с прямым численным интегрированием системы (5) для некоторых фиксированных значений параметров.

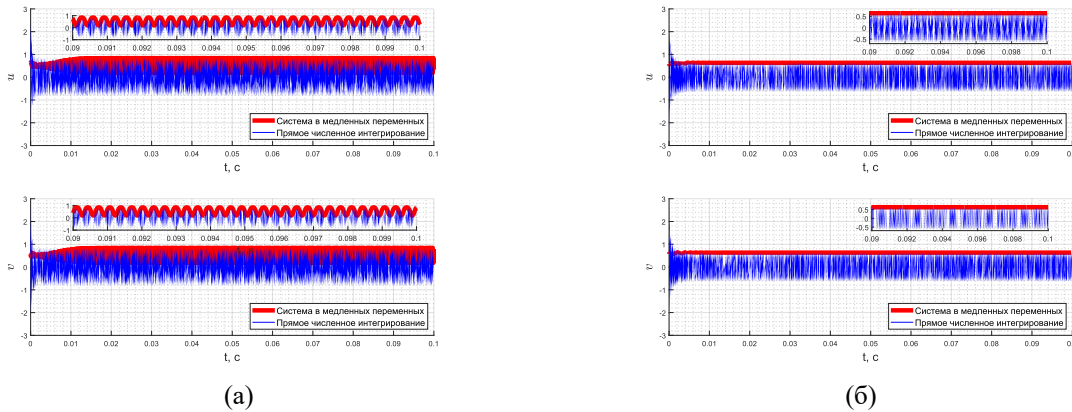


Рис. 2. Сравнение точного и асимптотического решений. При $p = 0,02$, $\gamma = 0,1$, $b = 20$.
(а) Режим биений при $a = -0,03$, (б) Режим синхронизации при $a = -0,04$.

При определённом выборе параметров в системе возможны два режима колебаний резонаторов: одночастотный режим или синхронизация колебаний (рис. 2б) и двухчастотный режим или режим биений (рис. 2а). Данные зависимости получены в медленных переменных.

На рис. 3а и 3б показано изменение медленно изменяющихся амплитуд первой балки и разности фаз от величины начальной расстройки жёсткости одного из резонаторов. Чёрная линия показывает возможные режимы синхронизации колебаний двух резонаторов, цветные кривые соответствуют предельным циклам. При параметрах $p = 0,02$, $\gamma = 0,1$.

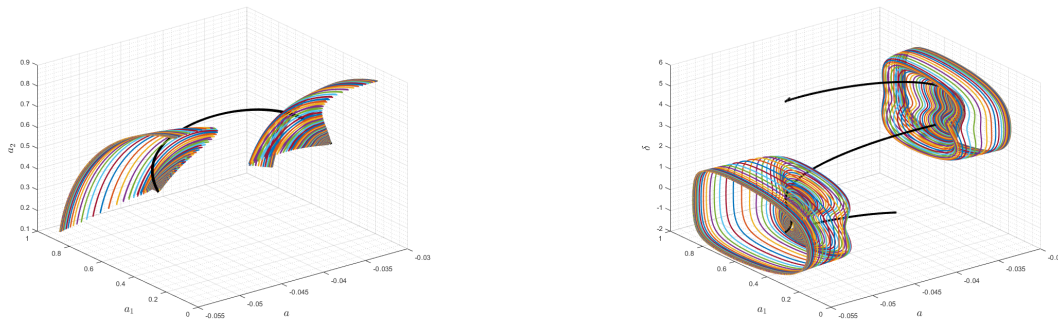


Рис. 3. Зависимость медленно изменяющейся (а) амплитуды a_1 , a_2 , (б) амплитуды a_1 и разности фаз резонаторов δ , от величины начальной расстройки жёсткости одного из резонаторов.

На рис. 3а и 3б показана эволюция медленных амплитуд a_1 , a_2 и разности фаз δ . Видно, что в системе с изначально заданными параметрами конструкции, существует два режима колебаний. Первый представляет собой движение резонаторов с частотами, которые немного отличаются друг от друга. Из-за этого возникает так называемый режим биений, который может быть хорошо виден, если сложить амплитуды колебаний двух резонаторов. На рисунке этому режиму соответствуют предельные циклы, которые постепенно схлопываются в точку, которая отделяет два режима колебаний резонаторов. Второй режим представляет собой движение двух резонаторов с одной и той же частотой. Такой режим называется синхронизацией колебаний. На рисунке этому режиму соответствуют чёрные кривые, которые характеризуют собой установившиеся колебательные движения.

Заключение

В представленной работе предложена модель резонансного дифференциального МЭМС-акселерометра, состоящего из двух резонаторов и инерционной массы, которые связаны друг с другом посредством двух упругих элементов (пружин). Возбуждение и поддержание колебаний резонаторов происходит с помощью автогенераторов. Получена эволюция амплитуды и разности фаз в медленных переменных от параметров начальной расстройки жесткости чувствительного элемента и величины осевой силы инерции. Показан переход от двухчастотного режима (режим биений) к одночастотному (режим синхронизации), с помощью аналитических методов нелинейной механики определены области в пространстве параметров, соответствующие режимам двухчастотных биений и фазовой синхронизации, что определяет диапазон чувствительности датчика к измеряемой компоненте вектора ускорения подвижного объекта.

Литература

1. Hajjaj A., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F., Younis M. Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 119, 2020: 103328.
2. Rand R., Zehnder A., Shayak B., Bhaskar A. Simplified model and analysis of a pair of coupled thermo-optical MEMS oscillators // *Nonlinear Dynamics*, Vol. 99, 2019: 73-83.
3. Bhaskar A., Shayak B., Rand R., Zehnder A. Synchronization characteristics of an array of coupled MEMS limit cycle oscillators // *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 128, 2021: 103634.
4. Wang X., Huan R., Zhu W., Shi Z., Wei X., Cai G. Amplitude region for triggering frequency locking in internal resonance response of two nonlinearly coupled micro-resonators // *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 130, 2021: 103673.
5. Chen H., Wang K., Shen H., Yang C. Synchronization of uncertain MEMS resonators via adaptive time-varying terminal sliding mode control // *Microsystem Technologies*, 2018: 1-7.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ФАКТИЧЕСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОПОР ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ ПО ИХ ДИНАМИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

Кожевников А.Н., Бурнышева Т.В.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

kozhevnikov.2010@corp.nstu.ru

Аннотация. В работе представлена двухэтапная методика оценки фактического технического состояния конструкции опор воздушных линий электропередачи. Особенность методики заключается в наличии расчетного и экспериментального этапов исследования. В рамках первого определяются значения частот собственных колебаний и происходит подбор экспериментального оборудования. Экспериментальный этап посвящен определению динамических параметров для каждой рассматриваемой конструкции и формированию выводов о ее техническом состоянии, а также о необходимости детального инструментального обследования. В статье дополнительно приведены пути развития предлагаемой методики.

Введение

Воздушные линии электропередачи (ВЛ) представляют собой сложные пространственные конструкции, состоящие из нескольких принципиальных структурных элементов: проводников электрического тока высокого напряжения, системы изолирующей подвески и опор ВЛ. Выход из строя именно опор линий электропередачи несет наибольший экономический ущерб, связанный с поиском разрушенной конструкции из многокилометровой линии, ее демонтажем и заменой на новую аналогичного вида. Аварийные ситуации, вызванные отказом проводов (обрывы или замыкания) или изолирующей подвески (разрушение или обрывы), могут быть устранены с существенно меньшими экономическими потерями, поэтому непосредственно опоры ВЛ являются тем элементом, функционирование которого имеет критическое значение для поддержания работоспособности всей системы линий электропередачи. В дальнейшей работе основное внимание уделено техническому состоянию опор воздушных линий электропередачи.

В настоящее время в электроэнергетической отрасли принято оценивать техническое состояние любых конструкций по большому количеству Индексов Технического Состояния (ИТС) [1]. Для оценки состояния опор ВЛ необходимо применять широкий выбор инструментальных средств измерения от ультразвуковых тестеров для поиска трещин в металле до микрометров для определения фактической толщины металла в зонах, пораженных коррозией [2]. В данной работе предлагается рассмотреть возможность идентификации фактического технического состояния конструкции по ее динамическим параметрам на основании принятых в строительной отрасли нормативов [3 – 4]. Данная тематика является актуальной и востребованной, поскольку позволит повысить эксплуатационную надежность всей воздушной линии электропередачи.

Описание методики оценки технического состояния опор ВЛ

В принятых для строительной отрасли государственных стандартах оценка технического состояния сооружений производится по значениям низших частот собственных колебаний в трех взаимно перпендикулярных направлениях, однако для опор воздушных линий электропередачи вне зависимости от материала расчетная частота продольных (вертикальных) колебаний имеет существенно более высокое значение, чем изгибные и крутильные колебания [5]. Поэтому подход, предлагаемый в нормативной документации, требует адаптации под рассматриваемый класс конструкций.

Для опор воздушных линий электропередачи в литературе не представлено широкого разнообразия подходов к построению их расчетных моделей, способов диагностики, оценки технического состояния и инструментальных методов диагностики [6].

Предлагаемая методика определения фактического технического состояния состоит из двух этапов: расчетного и экспериментального. Проведение расчетного исследования обусловлено необходимостью получения опорных значений динамических параметров, поскольку значения частот выступают в качестве верхней оценки и не могут быть превышены в эксперименте: идеальное жесткое закрепление в расчете приводит к более высоким собственным значениям, чем ослабленное закрепление в реальности. По результатам расчетного этапа исследования также появляется возможность выбора инструментального комплекса с соответствующим пределом измерения [7, 8].

В рамках экспериментального этапа исследования для каждой обследованной опоры воздушных линий электропередачи определяются низшие частоты собственных колебаний с соответствующими амплитудами или интенсивностями каждой формы [9]. Дополнительными данными становятся значения декрементов собственных колебаний, однако акцентировать свое внимание на них в дальнейшей работе не будем, поскольку значения декрементов могут выступать индикаторами более качественного (устойчивого) результата проведенного измерения.

Следующим этапом предлагаемой методики определения фактического технического состояния

выступает сопоставление опорных значений для каждого типа обследованных опор с аналогичными полученными экспериментальными результатами для каждой отдельной опоры. В качестве опорных значений могут выступать рассчитанные частоты собственных колебаний или же медианные значения достаточно больших выборок экспериментальных данных. Применение медианных значений позволяет соотнести каждую отдельную опору со «стандартной» опорой такого же типа в аналогичных условиях эксплуатации.

Например, для промежуточных решетчатых башенных опор типа П110-3 в результате расчета определены низшие изгибные формы колебаний с частотами 2,9504 и 2,9541 Гц в зависимости от плоскости деформирования. В экспериментальных данных из Томской области для опор этого типа получены диапазоны значений от 2,24 до 2,93 Гц. Медианное значение для этой выборки равняется 2,73 или 2,83 Гц в зависимости от плоскости колебаний. Приведенные данные подтверждают необходимость использования обработанных экспериментальных результатов вместо рассчитанных значений, т.к. эти значения отражают фактическое состояние конструкций.

Более того, опорное значение может «содержать» в себе информацию о типе грунтов в месте установки опор (более податливый грунт приведет к большему снижению частот собственных колебаний относительно расчетных значений), также как и данные об износе опор в условиях эксплуатации, характерных для данного участка местности [10].

По результатам сопоставления опорных значений с экспериментальными данными для отдельной опоры возможно сделать вывод о ее фактическом техническом состоянии. Например, одновременное снижение всех частот собственных колебаний на фиксированную величину свидетельствует об общем износе конструкции, и, при дальнейшем снижении динамических параметров возможно наступление аварийного состояния в конструкции вследствие её постепенного износа. Однако снижение какой-либо отдельной частоты собственных колебаний свидетельствует о дефекте, оказывающем влияние на колебания в соответствующей плоскости совершения колебаний. Дополнительным подтверждением наличия дефекта в какой-либо плоскости конструкции выступает аналогичное снижение и второй изгибной частоты собственных колебаний.

Назначение порогового значения для идентификации потенциального дефекта является отдельной самостоятельной задачей и должно быть установлено на основании обработки огромного массива экспериментальных данных или на основании экспертной оценки от профильных специалистов эксплуатирующей организации. Дополнительной сложностью выступает возможное понижение динамических характеристик конструкции от наличия различных дефектов в нескольких комбинациях. В связи с этим проведение обширного вычислительного эксперимента по учету всех возможных комбинаций дефектов в конструкции на каждом этапе жизни конструкции не представляется возможным.

Перспективы развития методики

По результатам текущего этапа создания методики сформированы следующие направления развития методики определения фактического технического состояния промежуточных опор воздушных линий электропередачи:

1. Анализ накопленных экспериментальных данных с целью выявления дополнительных закономерностей, характерных для опор отдельных типов или конструкций. Дополнительный интерес вызывает скорость изменения динамических характеристик в зависимости от накопленных в процессе эксплуатации повреждений.

2. Проведение обширного вычислительного эксперимента с целью определения динамических параметров опор ВЛ в аварийном состоянии – расчет критических значений частот собственных колебаний, при достижении которых невозможно продолжать их безопасную эксплуатацию.

3. Оценка потенциального остаточного ресурса промежуточной опоры воздушных линий электропередачи по выявленному фактическому техническому состоянию конструкции. Это направление развития методики требует обширного экспериментального обследования опор с разными сроками эксплуатации, установленными в схожих климатических зонах с одинаковыми параметрами грунта. Решение данной задачи расчетными методами не представляется возможным.

Заключение

Предложенный расчетно-экспериментальный подход к определению фактического технического состояния опор воздушных линий электропередачи обладает новизной для данной предметной области, а также позволяет упростить процесс первичной диагностики конструкций с целью определения необходимости проведения более детального инструментального обследования. Рассмотренные этапы описанной методики охватывают большое количество расчетных и экспериментальных исследований, что позволяет получать обширное представление о каждой из рассмотренных конструкций. Предложенная методика имеет потенциал для развития в силу особенностей ее формирования и некоторой многозначности от влияния эксплуатационных повреждений на динамические характеристики конструкции.

Литература

1. СТО 34.01-23.1-001-2017. Объем и нормы испытаний электрооборудования. Введен 29.05.2017. 262 с.
2. СТО 56947007-29.240.119-2012 Методика оценки технического состояния зданий и сооружений объектов ПАО «ФСК ЕЭС», введен Приказом ПАО «ФСК ЕЭС» от 11.04.2012 № 190. 79 с.
3. ГОСТ 34081–2017. Здания и сооружения. Определение параметров основного тона собственных колебаний. Москва, Изд-во стандартов, 2017, 26 с.
4. ГОСТ 31937–2011. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. Москва, Изд-во стандартов, 2011, 95 с.
5. А. Н. Кожевников, Д. А. Красноручский // Определение частот малых колебаний опоры линии электропередачи в среде ANSYS, Наука. Промышленность. Оборона: тр. 15 Всерос. науч.-техн. конф., Новосибирск, 23–25 апр. 2014 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – С. 308–311.
6. В. Е. Левин, А. Н. Кожевников, О. Н. Сафонов // К вопросу о расчете опор и участков воздушных линий электропередачи, Электроэнергия. Передача и распределение, 2017, № 6 (45), с. 68–72.
7. А. Н. Кожевников, Т. В. Бурнышева // Применение методов моделирования в расчетах на прочность опор воздушных линий электропередачи при динамическом деформировании, Научно-технический вестник Поволжья, 2020, № 10, с. 66–68.
8. А. Н. Кожевников, Т. В. Бурнышева // Особенности моделирования упругого бетонного основания металлических опор контактной сети, Научно-технический вестник Поволжья. - 2021. - № 12. - С. 195-197. - Работа выполнена: в рамках гранта, по итогам конкурса мэрии города Новосибирска на предоставление грантов в форме субсидий в сфере научной и инновационной деятельности.
9. А. Я. Кравченко, С. В. Роденко, О. Н. Сафонов, И. И. Снежков, И. В. Чаплин // Экспериментальные исследования динамической работы опор линий электропередачи при разработке измерительного комплекса «ЛЭПтон» для оценки их технического состояния, Электроэнергия. Передача и распределение, 2018, № 6 (51), с. 126–131.
10. Т. В. Бурнышева, А. Н. Кожевников // Методика оценки технического состояния опор воздушных линий электропередачи с учетом типовых эксплуатационных дефектов, Инженерный журнал: наука и инновации: электрон. журн. - 2021. – № 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2053.

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК В АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕСОВ

Козик А.Е.^{1,2}, Анохина Е.Н.¹, Горбушин А.Р.^{1,2}

1 - Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского

2 - Московский физико-технический институт

kozik.ae@phystech.edu

Аннотация. Разработан метод для решения важной задачи механики, возникающей при испытаниях моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах – измерение вектора нестационарной силы и вектора нестационарного момента с помощью шестикомпонентных тензометрических весов. Использована физическая модель, в которой чувствительные элементы каждого компонента весов заменяются пружинами с демпфированием. Задача решена для общего случая, когда система координат весов является неинерциальной. Метод позволяет определять произвольные нестационарные нагрузки во всем диапазоне частот весов, включая собственную. Разработанный метод верифицирован приложением ступенчатой силы к продольной компоненте весов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00041.

Введение

Одним из способов определения аэродинамических характеристик проектируемого летательного аппарата является испытание его модели в аэродинамической трубе. При этом возникает важная и сложная задача – как измерить векторы силы и момента, действующие на модель летательного аппарата в аэродинамической трубе. Эта задача решена в настоящее время достаточно успешно для измерения квазистационарных нагрузок с помощью тензометрических весов. Более сложной является проблема измерения нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на модели летательных аппаратов и их элементы в аэродинамических трубах. Она охватывает многочисленные задачи аэродинамики, динамики полета и прочности. Из-за упругости чувствительных элементов весы сами по себе являются динамической системой. Этим обусловлена сложность решаемой проблемы: измерение динамических нагрузок осуществляется динамической системой.

Математическая модель тензометрических весов

Воспользуемся физической моделью тензометрических весов (рис. 1а) в виде пружины с демпфированием. Схема нормальной компоненты тензометрических весов изображена на рис. 1б. Измерительная система координат весов OXYZ расположена по отношению к нормальной под углами тангажа θ и крена γ . Массы элемента крепления модели компонент весов различаются. Они зависят от места наклейки тензорезисторов соответствующих компонент. Элемент крепления модели (метрическая часть весов) 2 массой M_{NF} соединяется с элементом крепления весов 3 с помощью пружины с коэффициентами жесткости и демпфирования k_{NF} , β_{NF} соответственно. Искомая нестационарная аэродинамическая сила NF^A приложена к модели 1 (рис. 1б) массой M . На нормальную компоненту весов действуют составляющие от веса модели и элемента крепления модели. Связь между нормальной силой, измеряемой весами, и удлинением чувствительного элемента весов (пружины) можно представить в следующем виде: $NF = k_{NF}(y_2 - y_1)$, где y_1 и y_2 – перемещения элементов крепления весов и модели по отношению к первоначальному состоянию.

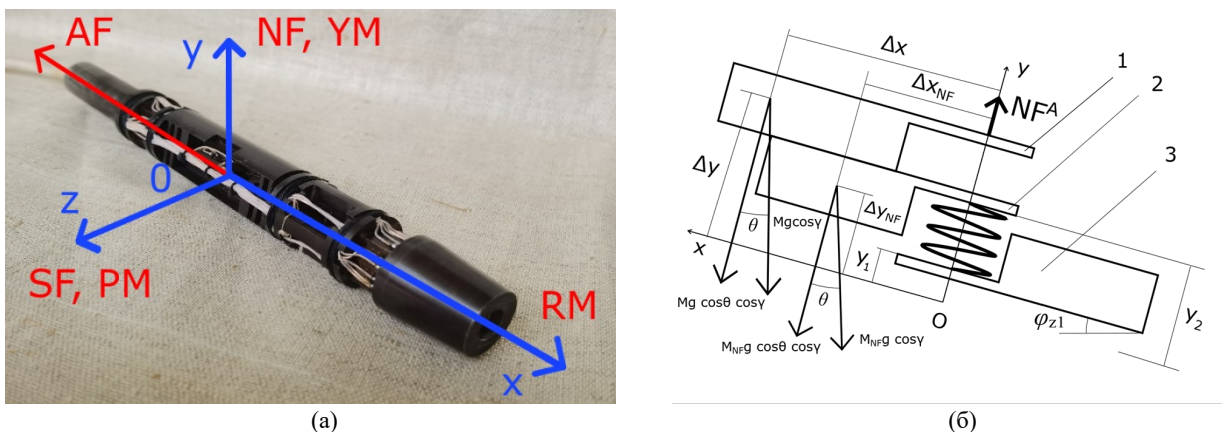


Рис. 1. Шестикомпонентные тензометрические весы. (а) Фотография и система координат; (б) математическая модель нормальной компоненты. 1 – модель; 2 – элемент крепления модели; 3 – элемент крепления весов. Δx , Δy , Δz – координаты центра масс модели относительно начала координат весов; Δx_{NF} , Δy_{NF} , Δz_{NF} – координаты центра масс метрической части компоненты нормальной силы относительно начала координат весов.

Выражение для нормальной компоненты вектора искомой нестационарной силы получим на основании второго закона Ньютона в виде неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$NF^A = (M + M_{NF})\ddot{NF}/k_{NF} + \beta_{NF}\dot{NF}/k_{NF} + NF + (M + M_{NF})\ddot{y}_1 - NF^S, \quad (1)$$

$$NF^S = -\ddot{\varphi}_{x2}(M\Delta z + M_{NF}\Delta z_{NF}) - (\dot{\varphi}_{x2}^2 + \dot{\varphi}_{z2}^2)(M\Delta y + M_{NF}\Delta y_{NF}) + \ddot{\varphi}_{z2}(M\Delta x + M_{NF}\Delta x_{NF}) - M_{NF}g + (M + M_{NF})g \cos \theta \cos \gamma, \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения; φ_{x2} , φ_{z2} – углы вращения элемента крепления модели вдоль осей Ox и Oz соответственно.

Первый и третий члены в выражении (2) представляют собой тангенциальную силу при вращении весов относительно осей Ox и Oz , а второй член – центробежную. Для математической модели компоненты вектора нестационарного момента применена хорошо известная из теоретической механики аналогия (см., например, [1]) между поступательным и вращательным движениями твердого тела. Выражения для компонент нестационарной силы и нестационарного момента являются однотипными и описываются уравнением:

$$L_i^A = L_i + a_i\dot{L}_i + b_i\ddot{L}_i + c_i - L_i^S \quad (3)$$

Коэффициенты уравнения (3) для всех компонент силы и момента приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты в выражениях для компонент нестационарных силы и момента.

i	L_i	a_i	b_i	c_i	L_i^S
1	Продольная сила (AF)	β_{AF}/k_{AF}	$(M+M_{AF})/k_{AF}$	$(M + M_{AF})\ddot{x}^1$	AF^S
2	Нормальная сила (NF)	β_{NF}/k_{NF}	$(M+M_{NF})/k_{NF}$	$(M + M_{NF})\ddot{y}^1$	$NF^S(2)$
3	Поперечная сила (SF)	β_{SF}/k_{SF}	$(M+M_{SF})/k_{SF}$	$(M + M_{SF})\ddot{z}^1$	SF^S
4	Момент крена (RM)	β_{RM}/k_{RM}	$(J_x^m + J_x^{RM})/k_{RM}$	$(J_x^m + J_x^{RM})\ddot{\varphi}_x^1$	RM^S
5	Момент рыскания (YM)	β_{YM}/k_{YM}	$(J_y^m + J_y^{YM})/k_{YM}$	$(J_y^m + J_y^{YM})\ddot{\varphi}_y^1$	YM^S
6	Момент тангажа (PM)	β_{PM}/k_{PM}	$(J_z^m + J_z^{PM})/k_{PM}$	$(J_z^m + J_z^{PM})\ddot{\varphi}_z^1$	PM^S

Верификация метода

Верификация разработанного метода проводилась опытом с приложением ступенчатой силы к продольной компоненте тензометрических весов (рис. 2). Тензометрические весы 1 закреплены вертикально элементом их крепления 2 к жесткому основанию установки 3. Продольная ось весов направлена вверх. К элементу крепления модели 4 прикреплен кронштейн 5. К кронштейну с помощью рыболовной лески 6 привязана платформа 7 с грузом, вес которого составил 49 Н. Диапазон продольной компоненты силы весов составил ± 100 Н, а полученное при калибровке стандартное отклонение – 0,32 Н. Для создания силы, близкой к ступенчатой, леска пережигалась. Вес метрической части продольной компоненты весов M_{AF} совместно с кронштейном 5 определялся в статических условиях методом линейной регрессии из выражения $AF = M_{AF} g \sin \theta$. Использовались показания весов при трех углах тангажа $\theta=0; \pm 90^\circ$. Масса метрической части продольной компоненты весов совместно с кронштейном получилась $M_{AF} = 0,133 \pm 0,033$ кг.

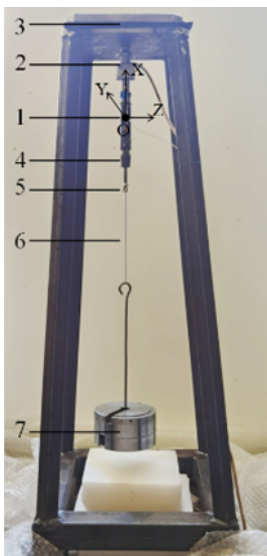


Рис. 2. Фотография установки для приложения ступенчатой силы к продольной компоненте весов.

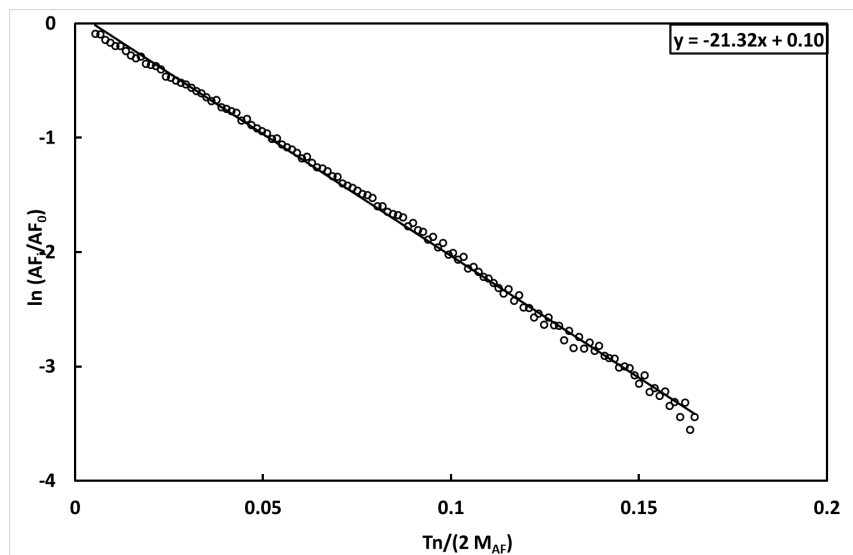


Рис. 3. Относительная амплитуда продольной силы от времени при свободных затухающих колебаниях.

Измерение сигналов тензометрических весов осуществлялось измерительной системой Siemens SCL2E20 LMS SCADAS Lab с использованием модулей SCL-VB8-II с 24-х разрядными АЦП и полосой пропускания 92 кГц. Погрешность измерительных модулей не превышала $\pm 0,2\%$ при частоте 1 кГц, а сдвиг фаз между каналами – не более $0,2^\circ$ при частоте 10 кГц. Частота дискретизации составляла 204,8 кГц/канал.

Уравнение (3) для продольной компоненты ($i=1$) применительно к проведенному опыту преобразуется к следующему виду:

$$AF^A = M_{AF} \ddot{AF} / k_{AF} + \beta_{AF} \dot{AF} / k_{AF} + AF. \quad (4)$$

Коэффициент демпфирования определялся методом линейной регрессии по известной зависимости (см., например, [1]) относительной амплитуды свободных колебания продольной компоненты весов от времени (Рис. 3): $\ln AF_i / AF_0 = f(Tn / 2M_{AF})$, где T – период колебаний; $n = 0, 1, 2, \dots$. Производная этой функции есть коэффициент демпфирования, взятый с обратным знаком: $\beta_{AF} = 21.32 \pm 0.08$ кг/с. Коэффициент жесткости продольной компонента весов определялся с помощью хорошо известного выражения (см., например, [1]): $k_{AF} = 4\pi^2 f^2 M_{AF} + \beta_{AF}^2 / 4 M_{AF}$. Значение коэффициента жесткости для продольной компоненты получилось $k_{AF} = 10.34 \cdot 10^6 \pm 0.15 \cdot 10^6$ Н/м.

Результаты опыта с приложением ступенчатой силы к продольной компоненте тензометрических весов приведены на Рис. 4а в виде зависимости продольной силы, измеренной весами, от времени. Продольная сила рассчитывалась с помощью матрицы весов по показаниям всех шести компонент. После пережигания лески возникали свободные затухающие колебания элемента крепления модели относительно элемента крепления весов с частотой $f=1402 \pm 1$ Гц. Максимальная амплитуда колебаний составила 64% от приложенной силы или 31% от диапазона компоненты.

Результаты обработки по формуле (4) приведены на Рис. 4б. Исходные данные (Рис. 4а) на начальном участке и участке разрыва лески ($t < 0.013$ с) аппроксимировались тремя параблами. Участок свободных колебаний ($t \geq 0.013$ с) аппроксимировался двумя затухающими синусоидами. Разность аппроксимирующих функций и экспериментальных данных не превышала погрешности весов. Производные вычислялись аналитически. В результате получилась функция, близкая по форме к ступеньке. В переходной области имеются небольшие остаточные колебания, связанные с погрешностью определения производных от показаний весов при резком изменении приложенной силы. На участке свободных колебаний стандартное отклонение составляет 0.24 Н, что меньше стандартного отклонения продольной компоненты, полученного при калибровке весов.

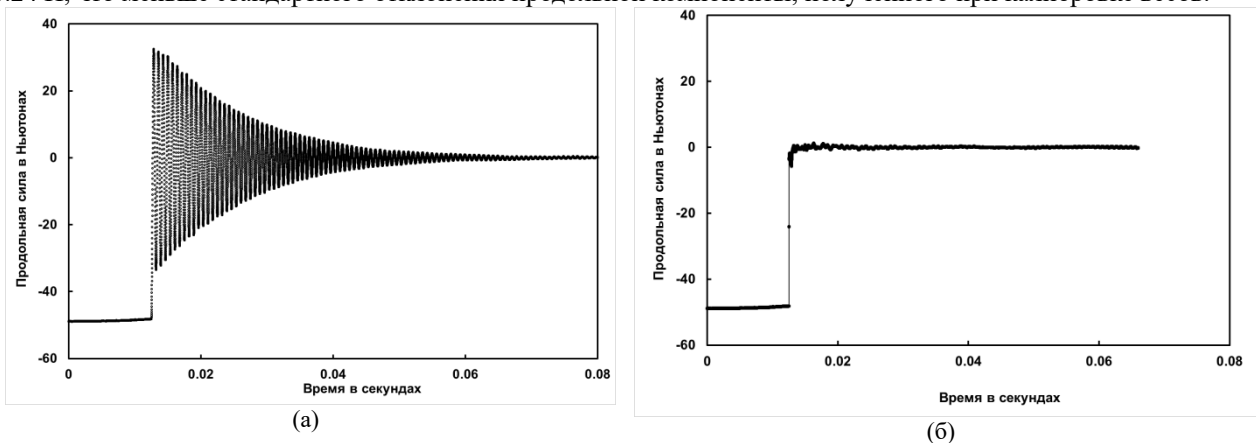


Рис. 4. Зависимость продольной компоненты силы от времени при приложении ступенчатой силы. (а) Показания продольной компоненты тензометрических весов; (б) результат обработки показаний продольной компоненты тензометрических весов по выражению (4).

Заключение

Разработан метод, который позволяет измерять три компоненты нестационарной силы и три компоненты нестационарного момента с помощью шестикомпонентных тензометрических весов во всем их рабочем диапазоне частот, включая собственную. В разработанном методе используется хорошо известная физическая модель в виде пружины с демпфированием для каждой компоненты весов. Рассмотрен общий случай, когда система координат весов является неинерциальной – она перемещается с ускорениями по всем шести координатам – трем линейным и трем угловым. В разработанном методе учитываются массы метрической части компонент силы и момента весов, координаты их центра масс и их моменты инерции. Искомая нагрузка определяется в любой произвольный момент времени; требуются лишь результаты измерений в окрестности заданного момента времени для вычисления первой и второй производных по времени от нагрузки, измеренной тензометрическими весами. Разработанный метод решает с помощью тензометрических весов еще одну важную задачу механики – измерение массы тела, положения его центра масс и моментов инерции тела относительно трех взаимно-перпендикулярных осей.

На способ определения нестационарной силы и устройство для его реализации получен патент [2].

Литература

1. Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье // Курс теоретической механики, Наука, Москва, 1983. 640 с.
2. А. Р. Горбушин // Способ определения нестационарной силы и устройство для его реализации, патент на изобретение 2743778 С1, 25.02.2021.

ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВИБРОМАШИН С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Крестниковский К.В., Пановко Г.Я., Шохин А.Е.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
shohinsn@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена синхронизация инерционных вибровозбудителей вибромашин при введении в их линейно-упругую подвеску дополнительного упругого ограничителя колебаний. Показано, что введение ограничителя колебаний приводит к расширению области частот устойчивого синхронного вращения вибровозбудителей с требуемой разностью фаз вблизи резонансных частот системы, а также уменьшению чувствительности амплитуд колебаний рабочего органа к изменениям массы обрабатываемого материала.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского Научного Фонда, проект No. 21-19-00183, <https://rscf.ru/project/21-19-00183>.

Введение

Одной из проблем применения вибрационных машин с самосинхронизирующимися инерционными вибровозбудителями в резонансных режимах является высокая чувствительность взаимной фазы их вращения и колебаний рабочего органа к изменениям характеристик обрабатываемого материала, что приводит к крайне нежелательным срывам колебаний в зарезонансную область частот [1–4]. Для решения этих проблем в ряде случаев используют различные системы управления с обратными связями, которые корректируют частоту питания и автоматически поддерживают настройку колебательной системы вибромашин на околорезонансную частоту при возможных изменениях физико-механических характеристик обрабатываемого материала [5]. В настоящей работе рассматривается возможность использования дополнительных нелинейных связей, с помощью которых могут быть обеспечены самосинхронизация инерционных вибровозбудителей и устойчивость колебаний вибромашин в резонансной области частот возбуждения без использования систем управления. Отметим, что вопросы самосинхронизации вибровозбудителей в системах с нелинейными упругими связями рассматривались, например, в работах [6, 7]. Однако, в подавляющем большинстве работ эти вопросы рассматриваются при возбуждении колебаний вдали от резонансных режимов.

Расчетные схемы и математические модели

Рассмотрим околорезонансные колебания вибрационных машин с самосинхронизирующимися инерционными вибровозбудителями при медленном изменении массы обрабатываемого материала. Предполагается, что требуемые показатели технологического процесса могут быть достигнуты при плоскопараллельных колебаниях рабочего органа, которые реализуются в случае возбуждения однонаправленной силой при синхронно-противофазном вращении вибровозбудителей. Такого типа колебания рабочего органа обычно реализуют для перемещения твердых, жидких и многофазных сред (вибротранспортеры), для разделения, классификации, сепарации (например, виброгрохоты) и т.п. Изменение массы материала, которое может возникать из-за неравномерности (или различия) скоростей загрузки и выгрузки материала с рабочего органа, приводит к изменению динамических свойств системы, формы колебаний (в том числе – возникновению нежелательных угловых колебаний рабочего органа), взаимной фазы вращения вибровозбудителей и возможному срыву в зарезонансный режим. Рассматриваются две наиболее распространенные схемы вибромашин с дебалансными вибровозбудителями.

Модель одномассовой вибромашин (рис. 1.) состоит из рабочего органа – платформы, моделируемой твердым телом массой m_{pl} и моментом инерции J_{pl} относительно своего центра масс в точке O . Платформа закреплена на неподвижном основании с помощью линейно упругих элементов с коэффициентами жесткости c_x , $c_y/2$ и демпфирования b_x , $b_y/2$. Платформа может совершать колебания в плоскости Oxy , описываемые перемещениями $x(t)$ и $y(t)$ ее центра масс вдоль соответствующих осей координат и углом поворота $\varphi(t)$ относительно ее положения при недеформированных упругих элементах. Под платформой на расстоянии Δ установлен линейно-упругий ограничитель с коэффициентом жесткости c_1 . Модель двухмассовой вибромашин (рис. 2) состоит из рабочего органа массой m_2 , и промежуточной платформы массой m_1 , которые между собой связаны двумя одинаковыми пружинами с линейными характеристиками жесткости $c_2/2$ и вязкого трения $b_2/2$. Платформа соединена с неподвижным основанием пружинами с линейными характеристиками жесткости $c_1/2$ и вязкого трения $b_1/2$. На рабочем органе со стороны платформы установлен линейно упругий ограничитель колебаний с коэффициентом жесткости c_1 , который «включается» в действие, когда перемещение рабочего органа относительно платформы превышает зазор Δ . Движение колебательной системы описывается вертикальными перемещениями центров масс платформы $y_1(t)$ и рабочего органа $y_2(t)$ относительно их недеформированного положения.

На рабочем органе каждой из машин находится обрабатываемый материал массой m_w .

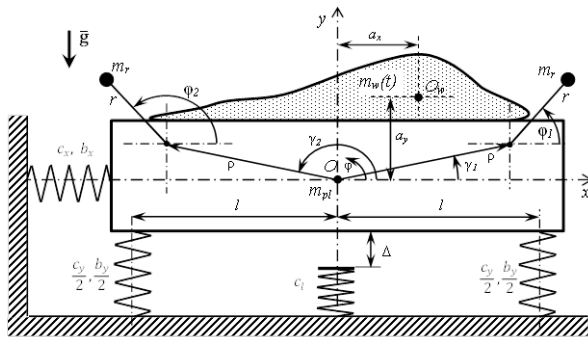


Рис. 1. Расчетная схема одномассовой вибромашины.

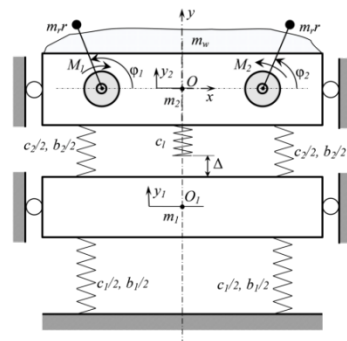


Рис. 2. Расчетная схема двухмассовой вибромашины.

Возбуждение колебаний каждой из машин осуществляется двумя инерционными вибровозбудителями с электродвигателями асинхронного типа, вращающимися во встречных направлениях. Их вращение описывается углами поворота их дебалансов $\varphi_j(t)$ (j – номер вибровозбудителя), отсчитываемыми в направлении против хода часовой стрелки от положительного направления оси Ox . Вибровозбудители обладают одинаковыми статическими моментами массы $m_r r$ и практически одинаковыми моментными характеристиками $M_j(s)$, зависящими от скольжения $s(\dot{\varphi}_j)$ асинхронного двигателя ($\dot{\varphi}_j$ – скорость вращения j -го вибровозбудителя), которые описываются формулой Клосса [5]. Таким образом, при синхронном противофазном вращении вибровозбудителей возникает однонаправленная возмущающая сила, возбуждающая плоскопараллельные (в одномассовой схеме) или однонаправленные (в двухмассовой схеме) колебания.

Взаимодействие рабочего органа одномассовой машины с находящимся на нем обрабатываемым материалом учитывается нормальными и тангенциальными силами $F_x(n)$, $F_y(n)$ и моментом $M(n)$ силы эквивалентного вязкого трения, отражающих диссипацию энергии в объеме обрабатываемого материала, пропорциональных массе материала $m_w(t)$ и моменту его инерции $J_w(t)$ относительно собственного центра масс, а так же скоростям перемещения платформы $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}$, где $n = (k_T m_w) / \gamma_M$ – нормированный коэффициент диссипации, k_T – удельный (на единицу объема) коэффициент вязкого трения, γ_M – насыпная плотность материала [4]. В двухмассовой схеме взаимодействие с материалом учитывается только силой трения $F_y(n)$.

Движение каждой из моделей машин описывается системами нелинейных дифференциальных уравнений [8, 9], каждая из которых включает уравнения, описывающих колебания подвижных тел машины и уравнения, описывающих вращение вибровозбудителей.

Результаты моделирования

На рис. 3 и 4 представлены результаты анализа динамики одномассовой вибромашины в виде экстремумов вертикальных колебаний платформы $\{\tilde{y}_{max}, \tilde{y}_{min}\}$ (здесь и далее знаком « \sim » обозначены безразмерные величины) и сдвига фаз вращения вибровозбудителей $\Delta\varphi$ в зависимости от синхронной частоты вращения вибровозбудителей $\tilde{\omega} = \omega T_*$ (T_* – выбранный масштаб времени) для различных значений отношения массы материала к массе рабочего органа μ_w в случае колебаний без контакта с ограничителем (рис. 3а и 4а) и при контакте с ограничителем, установленным с исходным зазором $\tilde{\Delta} = 7,25$ (рис. 3б и 4б). При отсутствии ограничителя интенсивные вертикальные колебания системы возбуждаются вблизи второй резонансной частоты. При этом в случае отсутствия материала на платформе в области частот между первым и вторым резонансом реализуется устойчивое синхронно-противофазное вращение вибровозбудителей с взаимной фазой $\Delta\varphi = 180^\circ$, при котором возбуждаются только требуемые вертикальные колебания платформы. Увеличение массы материала приводит вблизи второго резонанса к отклонению взаимной фазы вращения вибровозбудителей от 180° , что вызывает возбуждение нежелательных горизонтальных и угловых колебаний платформы. Причем, по мере приближения к резонансной частоте это отклонение увеличивается, что обусловлено увеличением сил сопротивления из-за роста амплитуд колебаний. Таким образом, динамические характеристики системы вблизи второй резонансной частоты обладают высокой чувствительностью к изменению массы материала, что затрудняет использование резонансных режимов в качестве рабочих. Из рис. 3б и 4б видно, что введение упругого ограничителя приводит к существенному снижению чувствительности размахов вертикальных колебаний к изменениям массы материала в резонансной области частот (рис. 3б). При этом область частот возможных режимов возбуждения вертикальных колебаний существенно расширяется за счет стабилизации фазы вращения вибровозбудителей вблизи $\Delta\varphi = 180^\circ$ (рис. 4б). Отметим также, что при неизменной массе материала увеличение исходного зазора $\tilde{\Delta}$ приводит к увеличению размахов колебаний и некоторому увеличению отклонения взаимной фазы вращения вибровозбудителей от требуемого значения $\Delta\varphi = 180^\circ$.

Введение упругого ограничителя в двухмассовой системе кроме существенного снижения чувствительности размахов вертикальных колебаний к изменениям массы материала в области частот вблизи второго резонанса (рис. 5) приводит также к значительному расширению области частот возможных режимов возбуждения вертикальных колебаний за счет стабилизации фазы вращения вибровозбудителей вблизи $\Delta\varphi = 180^\circ$ (рис. 6).

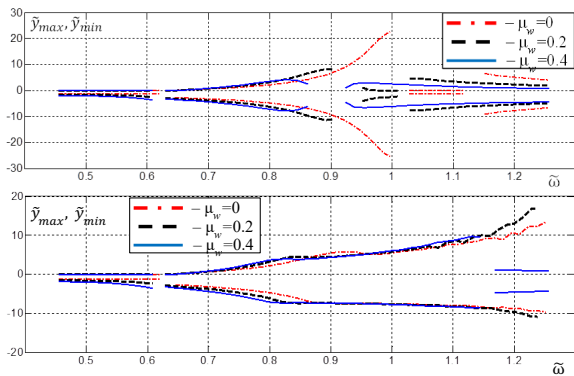


Рис. 3. Экстремумы вертикальных колебаний $\{\tilde{y}_{max}, \tilde{y}_{min}\}$ в зависимости от частоты возбуждения $\tilde{\omega}$: а – в случае без ограничителя, б – в случае с ограничителем при $\tilde{\Delta}=7,25$.

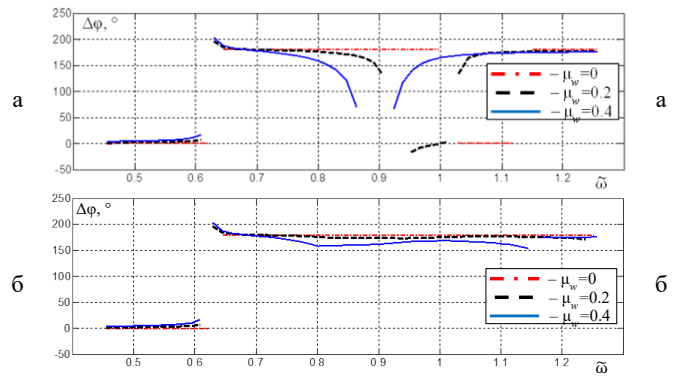


Рис. 4. Взаимная фаза вращения вибровозбудителей $\Delta\varphi$ в зависимости от частоты возбуждения $\tilde{\omega}$: а – в случае без ограничителя, б – в случае с ограничителем при $\tilde{\Delta}=7,25$.

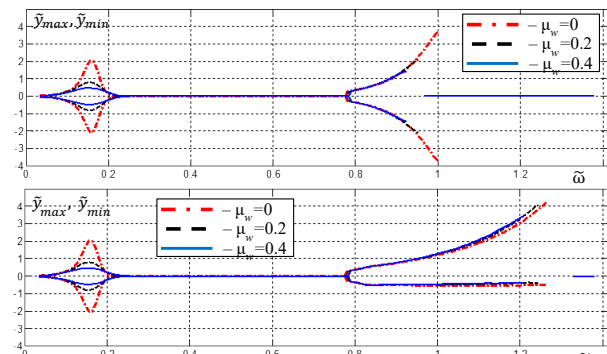


Рис. 5. Экстремумы вертикальных колебаний $\{\tilde{y}_{max}, \tilde{y}_{min}\}$ в зависимости от частоты возбуждения $\tilde{\omega}$: а – в случае без ограничителя, б – в случае с ограничителем при $\tilde{\Delta}=0,5$.

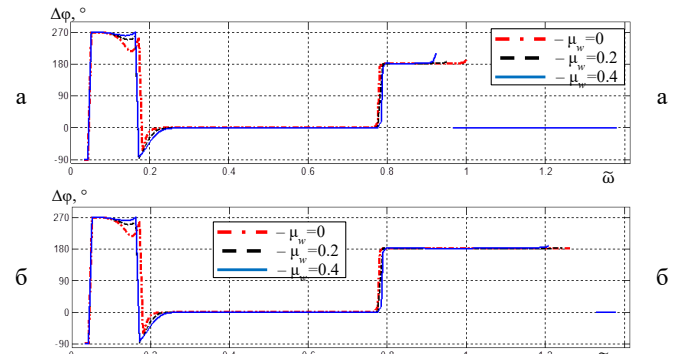


Рис. 6. Взаимная фаза вращения вибровозбудителей $\Delta\varphi$ в зависимости от частоты возбуждения $\tilde{\omega}$: а – в случае без ограничителя, б – в случае с ограничителем при $\tilde{\Delta}=0,5$.

Заключение

Выполненный анализ динамики моделей вибромашин показал, что введение упругого ограничителя, способствует стабилизации синхронно-противофазного режима вращения вибровозбудителей в области частот вблизи второго резонанса, а также приводит к значительному снижению чувствительности амплитуд колебаний к изменениям массы обрабатываемого материала. Таким образом, настройка на резонансный режим может осуществляться без использования систем управления частотой возбуждения только за счет рационального выбора параметров упругого ограничителя. Величина зазора между ограничителем и платформой оказывает значительное влияние как на амплитуду возбуждаемых колебаний, так и на границы области частот колебательных режимов требуемой формы, и может использоваться в качестве одного из регулируемых параметров при разработке управляемых вибромашин резонансного типа.

Литература

1. Вибрации в технике: справочник. Т. 4: Вибрационные процессы и машины. М.: Машиностроение. - 1989. - 509 с.
2. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. СПб.: Издательский дом «Руда и металлы», 2013. – 640 с.
3. Yong-Zheng, J., Kuan-Fang, H., Yong-Le, D., Da-Lian, Y., Wei, S.: Influence of load weight on dynamic response of vibrating screen. Shock and Vibration 2019, Art. ID 4232730 (2019).
4. Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. - М.: Недра, 1986. - 144 с.
5. Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Динамика резонансных вибромашин с самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями. М. –Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2020. — 168 с.
6. Zhang X.L., Kong X.X., Wen B.C., Zhao C.Y. Numerical and experimental study on synchronization of two exciters in a nonlinear vibrating system with multiple resonant types // Nonlinear Dynamics. 2015. 82. pp. 987–999.
7. Zhang N. Self-synchronization characteristics of a class of nonlinear vibration system with asymmetrical hysteresis // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. 39(1). pp. 114-128.
8. Panovko G., Shokhin A. Dynamics features of a resonant vibromachine with self-synchronizing inertial vibroexciters in the presence of vibration limiter. Journal of Vibroengineering, Vol. 23, Issue 8, 2021, pp. 1727-1736.
9. Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Самосинхронизация инерционных вибровозбудителей в двухмассовых вибромашинах с дополнительным упругим элементом, установленным с зазором. Проблемы машиностроения и автоматизации. 2022, №4. С. 16-21

РЕЗОНАТОР НА ОСНОВЕ НАНО ПЛАСТИНЫ СЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ

Крылова Е.Ю., Синичкина А.О.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
kat.krylova@bk.ru

Аннотация. В работе рассматривается нанорезонатор в виде гибкой пластины сетчатой структуры с электрическим приводом. Уравнения движения элемента изотропной, однородной пластины, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона на основании гипотез Кирхгофа. Масштабные эффекты учтены посредством микрополярной теории со стесненным вращением частиц. Регулярная система ребер заменяется сплошным слоем на основании континуальной теории Г.И. Пшеничного. Для анализа частот собственных колебаний в рассмотрение водится функция усилий. Задача решается методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях. Проведено исследование влияния граничных условий, геометрии сетки, линейных размеров пластины, значения постоянного напряжения на частоты ее собственных колебаний.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00331.

Введение

Большой интерес со стороны как российских, так и зарубежных исследователей к наноэлектромеханическим (НЭМС) системам обусловлен необходимостью проектирования приборов, позволяющих анализировать информацию на субатомном уровне. Развитие сенсорных технологий, биомедицинских, технологий мониторинга окружающей среды, требует глубокого исследования НЭМС, так как они из-за своих нано размеров обладают гораздо большей чувствительностью по сравнению с микроэлектромеханическими системами. НЭМС работают вплоть до террагерцевого диапазона. Такую сверхвысокую частоту было сложно достичь в устройствах микронного размера. Выдающиеся тепловые, электрические и механические свойства графена [1] делают его превосходным материалом для НЭМС.

Постановка задачи

В работе рассматривается резонатор на основе графеновой пластины (рис. 1). Материал пластины изотропный, однородный, подчиняющийся закону Гука. Геометрическая нелинейность принята по теории Теодора Фон Кармана. В случае анализа наноразмерных объектов необходимо учитывать эффекты масштаба [2]. Масштабные эффекты учитываются посредством микрополярной теории со стесненным вращением частиц, в предположении, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [3]. Сетчатая структура пластины учтена по модели Пшеничного Г.И. [4]. В основу математической модели положены

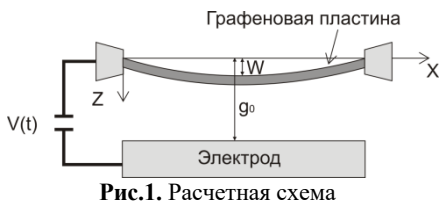


Рис.1. Расчетная схема

кинематические гипотезы Кирхгофа. Определяющие соотношения материала пластины: $\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}]$,

$$x \text{ и } y, \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} e_{xy}, \quad (m_{xx}, m_{yy}, m_{xz}) = \frac{El^2}{1+\nu} (\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xz}), \quad \text{где } \chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$\chi_{xz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad \chi_{yz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \text{компоненты симметричного тензора градиента кривизны в}$$

предположении, что углы поворота зависят от перемещений, $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$,

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \text{компоненты симметричного тензора полных деформаций с учетом теории}$$

Кармана, w – прогиб, u , v – осевые смещения срединной поверхности пластины в направлениях x , y соответственно, σ_{ij} – компоненты тензора Коши, m_{ij} – компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала пластины, l – дополнительный независимый материальный параметр длины.

Предположим, что пластина состоит из нескольких семейств густо расположенных ребер. Согласно континуальной теории Г.И. Пшеничного можно заменить регулярную систему ребер сплошным слоем, вследствие чего напряжения, моменты и моменты высших порядков в сетчатой пластине выражаются через напряжения, моменты в эквивалентной ей сплошной пластине следующим образом [5]:

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^s &= A_{40}N_{xx} + A_{22}N_{yy} + A_{31}T; \quad N_{yy}^s = A_{22}N_{xx} + A_{04}N_{yy} + A_{13}T; \quad M_{xx}^s = A_{40}M_{xx} + A_{22}M_{yy} + A_{31}H; \quad M_{yy}^s = A_{22}M_{xx} + A_{04}M_{yy} + A_{13}H; \\
 T^s &= A_{31}N_{xx} + A_{13}N_{yy} + A_{22}T; \quad H^s = A_{31}M_{xx} + A_{13}M_{yy} + A_{22}H; \\
 Y_{xx}^s &= A_{40}Y_{xx} + A_{22}Y_{yy} + A_{31}Y_{xy}; \quad Y_{yy}^s = A_{22}Y_{xx} + A_{04}Y_{yy} + A_{13}Y_{xy}; \quad Y_{xy}^s = A_{31}Y_{xx} + A_{13}Y_{yy} + A_{22}Y_{xy}; \quad Y_{xz}^s = A_{11}Y_{xz} + A_{02}Y_{yz}; \\
 Y_{yz}^s &= A_{20}Y_{xz} + A_{11}Y_{yz},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_{sk} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j}$; $s, k = \overline{0, 4}$, n - количество семейств ребер в рассматриваемой сетчатой пластине, a_j ,

δ_j , φ_j - расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью OX и осью ребра j -ого семейства

соответственно $\{N_{xx}, M_{xx}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z^{(0,1)} dz$; $\{T, H\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z^{(0,1)} dz$; $Y_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xx} dz$; $Y_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz$; $Y_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xz} dz$; $x \text{ и } y$.

Уравнения движения сплошной микрополярной пластины в условиях электростатических воздействий, граничные и начальные условия получим из энергетического принципа Остроградского–Гамильтона. С учетом выражений (1) данные уравнения описывают движение элемента сетчатой пластины.

Далее будем рассматривать динамический процесс без учета распространения упругих волн. Введем функцию напряжений в срединной плоскости по формулам [6]: $N_{xx} = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $N_{yy} = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $T = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, в таком случае с учетом сетчатой структуры определяющая система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{Eh^2(A_{04} + A_{22}\nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{A_{22}El^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{Eh^2(A_{13}(\nu-3) - 2A_{31}\nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{3(A_{13} - A_{31})El^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - \\
 - \left(\frac{Eh^2(2A_{22}(2-\nu) + (A_{04} + A_{40})\nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{(A_{04} - 3A_{22} + A_{40})El^2}{1+\nu} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{Eh^2(A_{31}(\nu-3) - 2A_{13}\nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{3(A_{31} - A_{13})El^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - \\
 - \left(\frac{Eh^2(A_{40} + A_{22}\nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{EA_{22}l^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \frac{\partial w}{\partial y} + 2A_{31} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \frac{\partial w}{\partial x} - A_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4A_{31} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
 - 4A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - (A_{13} - 2A_{31}) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} - (2A_{22} - A_{40}) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{04} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4A_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A_{40} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
 - A_{31} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A_{04} - 2A_{22}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + (2A_{13} - A_{31}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + 2A_{13} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial y} + A_{22} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{F_{Coul}}{h} = 0; \\
 \frac{A_{40} - A_{22}\nu}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{A_{13}\nu - A_{31}(3+2\nu)}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \frac{2A_{22}(2+\nu) - (A_{04} + A_{40})}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{A_{31}\nu - A_{13}(3+2\nu)}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + \frac{A_{04} - A_{22}\nu}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \\
 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $F_{Coul} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{2(g_0 - w)^2} = \sum_{i=0}^n k_i w^i$ - сила Кулона, ϵ_r - диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 - электрическая постоянная, V - разность потенциалов между пластиной и электродом, g_0 - расстояние между пластиной и электродом, k_i - коэффициенты разложения силы Кулона в ряд Маклорена. Будем рассматривать нулевые начальные условия: $w = 0$; $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ при $t = 0$.

Граничные условия:

Жесткая заделка

$$\begin{aligned}
 w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; c; \\
 w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; b
 \end{aligned}$$

Шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые (несжимаемые) ребра

$$\begin{aligned}
 w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; c; \\
 w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; b
 \end{aligned}$$

Выберем представление для функции прогиба и усилий в следующем виде, что даст возможность анализировать не только основной тон собственных колебаний пластины:

$$\begin{aligned} & \text{Жесткая заделки} \\ w &= A_{nm}(t) \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{c}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right); \\ F &= B_{nm}(t) \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{c}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Шарнирное опирание} \\ w &= A_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right); \\ F &= B_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Применяя процедуру Бубнова-Галеркина, получим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно коэффициента в разложении функции прогиба вида:

$$\frac{d^2 A_{nm}(t)}{dt^2} - \sum_{i=3}^n \tilde{k}_i A_{nm}^i(t) + \psi_{nm} A_{nm}^3(t) + \omega_{nm0}^2 A_{nm}(t) = 0,$$

где ω_0^2 - квадрат частоты собственных линейных колебаний. Выберем коэффициенты $A_{nm}(t)$ в виде: $A_{nm}(t) = H \cos(\omega t)$, здесь H - амплитуда, ω - частота колебаний. Применим процедуру Бубнова-Галеркина еще раз получим зависимость, которая позволит увидеть влияние нелинейности на собственную частоту в зависимости от амплитуды колебаний пластины и тона колебаний: $\mu_{nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2}{\omega_{nm0}^2} = \frac{\omega_{nm0}^2 - F(H)}{\omega_{nm0}^2} = 1 - \frac{F(H)}{\omega_{nm0}^2}$,

$F(H)$ - функция зависящая от количества членов ряда в разложении силы Кулона.

Собственные частоты линейных колебаний для квадратной пластины размером 20 нм: $\delta = 0.154$ нм, $a = 0.123$ нм, $\nu = 0.024$, $E = 1$ ТПа, $\rho = 2267$ кг/м³, $l = h$, $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$ жесткая заделка - $\omega_{11} = 311$ ГГц, $\omega_{22} = 1243$ ГГц, шарнирное опирание $\omega_{11} = 98$ ГГц, $\omega_{22} = 369$ ГГц. На рисунке 2 приведены графики отношений мод частот собственных линейных колебаний пластины в зависимости от приложенного вольтажа, к той же моде частоты собственных линейных колебаний пластины при шарнирном опирании для различной геометрии сетки. Рассматривались сетки из двух и трех семейств ребер $g_0 = 2$ нм, $\delta = 0.154$ нм, $a = 0.123$ нм, $V \in [0, 1]$ В. 1 случай - $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, 2 случай - $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, 3 случай - $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 135^\circ$. Более высокая мода менее подвержена изменениям под действием постоянного напряжения. Частота пластины, в геометрии которой присутствуют ребра с углом наклона $\varphi = 90^\circ$ менее подвержена изменениям под действием постоянного напряжения. Графики $\mu(H)$ при разных геометриях сетки в условиях шарнирного закрепления без учета электрического поля приведены на рисунке 3. Видно, что происходит значительный рост собственной частоты при увеличении амплитуды колебаний. В условиях действия силы Кулона установлена сходимость результатов расчета при 7 членах ряда в разложении функции нагрузки в ряд. Посредством расчета нелинейной собственной частоты установлено, что для наноразмерных графеновых пластин эффект втягивания может наступать уже при достижении прогиба в 1/4 расстояния до электрода.

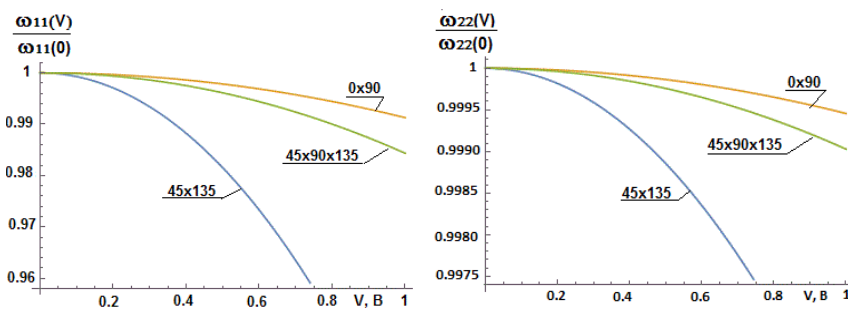


Рис. 2. Графики приведенных мод собственных линейных колебаний пластины в зависимости от вольтажа.

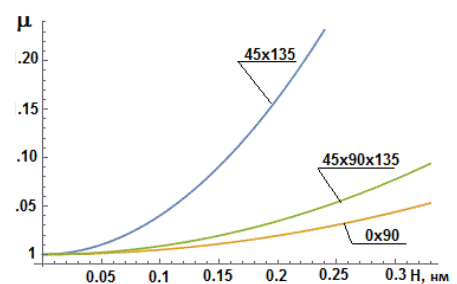


Рис. 3. $\mu(H)$ без учета силы Кулона.

Выводы

В работе проведен анализ влияния граничных условий, геометрии сетки, линейных размеров пластины, значения постоянного напряжения на частоты ее собственных колебаний. Показано, что при жесткой заделке частота колебаний значительно выше, чем при шарнирном опирании. Более высокий тон менее чувствителен к действию электростатической силы. Обоснована необходимость учета геометрической нелинейности при анализе частотных характеристик нанорезонаторов.

Литература

1. A.K. Geim, K.S. Novoselov The rise of graphen // Nature Materials, 6 2007. 183–191.
2. A.C.M Chong., F. Yang, D.C.C. Lam, P. Tong Torsion and bending of micron-scaled structures// J. Mater. Res, 16:3 2001. 1052–1058
3. F. Yang, A. C. M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // Int. J. Solids Struct. 39 2002. 2731-2743.
4. Г. И. Пшеничнов //Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. 1982. 352 с.
5. Е.Ю. Крылова, И.В. Папкина, О.А. Салтыкова, В.А. Крысько Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 21:1 2021. 48-59
6. А. С Вольмир // Нелинейная динамика пластинок и оболочек. 1972. 432 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГИБКОГО ВАЛА С ТВЕРДЫМ ДИСКОМ

Кубышкин Е.П.

Ярославский государственный университет им.П.Г.Демидова, Ярославль, Россия
kubysh.e@yandex.ru

Аннотация. Исследуются продольно-поперечные колебания вертикального гибкого вала с твердым диском, вращающихся с постоянной угловой скоростью. Вал и диск предполагаются однородными и идеально уравновешенными, оси вала и диска совпадают, материал вала предполагается наследственно вязкоупругим, концы вала опираются на подшипники. Получены уравнения продольных и поперечных смещений точек средней линии вала. Показано, что при определенных скоростях вращения в уравнениях могут возникать устойчивые периодические (прецессии) и двухчастотные решения (режимы биений). В последнем случае вал испытывает продольные (вертикальные) колебания, а опоры интенсивную ударную нагрузку.

Введение

Практическая значимость рассматриваемой задачи связана с проектированием и расчетом роторных систем. Если рабочие угловые скорости вращения вала (ротора) лежат выше некоторых критических значений, возникает вопрос устойчивости вращения, а также характера потери устойчивости. Потеря устойчивости может привести к возникновению как «мягкого» (чаще всего это асинхронная прецессии), так и «жесткого» режимов возникновения периодических колебаний, а также к возникновению режимов биений и хаотических колебаний. Последние три варианта являются наиболее опасными. Рассматриваемая задача также имеет важное теоретическое значение, так как моделирует динамическое поведение валов, являющихся важнейшими элементами многих машин. Важной составляющей в построении модели динамики распределенных валов является модель внутреннего трения материала, так как внутреннее трение является механизмом передачи энергии вращения поперечным и продольным колебаниям. В докладе материал вала рассматривается подчиненным нелинейной модели наследственно вязкоупругого тела. Это приводит к новому классу математических моделей распределенных роторных систем – нелинейных уравнений с частными производными и бесконечным запаздывания аргумента, которые ранее не изучались.

Построение уравнений движения. Основные результаты

Рассматриваемая механическая система состоит из вертикально расположенного однородного гибкого вала (ротора) длины l постоянного круглого сечения диаметра d , концы которого опираются на подшипники, нижний опорный. На вал на расстоянии l_1 от нижнего конца насажен идеально уравновешенный диск диаметра D и ширины h , рассматриваемый как твердое тело, ось которого совпадает с осью вала. Механическая система вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Материал вала предполагается наследственно вязкоупругим, подчиненным нелинейной реологической модели вязкоупругого тела [1]

$$\sigma(t) = E(1-\Gamma)f(\varepsilon(t)) = E \left(f(\varepsilon(t)) - \int_{-\infty}^0 R(\tau)f(\varepsilon(t+\tau)) d\tau \right), \quad (1)$$

в которой $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ соответственно напряжение и относительная деформация, E – модуль Юнга, $R(\tau) > 0$, $\int_{-\infty}^0 R(\tau) d\tau < 1$ – функция релаксации, $f(\varepsilon) = \varepsilon + f_3\varepsilon^3 + \dots$ – нелинейная функция деформации.

Введем две ортогональных системы координат $OXYZ$ и $OX\tilde{Y}\tilde{Z}$ расположив их начала координат в нижней точке опоры вала и направив ось OX вдоль средней оси недеформированного вала. Первая система координат связана с инерциальным пространством, а вторую жестко свяжем с вращающимся валом. Смещения точек средней оси гибкого вала с координатой x в момент времени t в системе координат $OXYZ$ в направлении осей OX, OY, OZ обозначим $u(x, t), y(x, t), z(x, t)$, а в системе координат $OX\tilde{Y}\tilde{Z}$ соответственно $u(x, t), \tilde{y}(x, t), \tilde{z}(x, t)$. Построим сначала уравнения движения точек оси вала во вращающейся системе координат $OX\tilde{Y}\tilde{Z}$. В предположении гипотезы плоских сечений, малости смещений и их первых производных по сравнению с единицей удлинение волокна вала на расстоянии y_1, z_1 от оси стержня будет иметь вид

$$\varepsilon = u_x + (\tilde{y}_x^2 + \tilde{z}_x^2)/2 - y_1\tilde{y}_{xx} - z_1\tilde{z}_{xx} = \varepsilon_0 - y_1\tilde{y}_{xx} - z_1\tilde{z}_{xx}, \quad (2)$$

где ε_0 удлинение оси стержня. Для компактности изложения введем комплекснозначные переменные $w(x, t) = \tilde{y}(x, t) + i\tilde{z}(x, t)$ и $\bar{w}(x, t) = \tilde{y}(x, t) - i\tilde{z}(x, t)$, $i = \sqrt{-1}$. Работа сил деформации в силу (1), (2) равна

$$A_i = \iiint \int \sigma d\varepsilon dx dy_1 dz_1 = E(1-\Gamma)\iiint (\varepsilon^2/2 + f_3 \varepsilon^4/4) dx dy_1 dz_1 = E(1-\Gamma)(S/2 \int_0^l (u_x + |w_x|^2/2)^2 dx +$$

$$+ S f_3/4 \int_0^l (u_x + |w_x|^2/2)^4 dx + I/2 \int_0^l |w_{xx}|^2 dx + 3I f_3/2 \int_0^l (u_x + |w_x|^2/2)^2 |w_{xx}|^2 dx + I_2 f_3/2 \int_0^l |w_{xx}|^4 dx,$$

где S – площадь поперечного сечения вала, $I = \iint y_1^2 dy_1 dz_1 = \pi d^4/64$ и $I_2 = \iint y_1^4 dy_1 dz_1 = \pi d^6/512$ моменты инерции сечения вала относительно произвольной оси сечения, проходящей через его центр. Потенциал силы веса диска равен

$$V = M g u(l_1, t),$$

где g – ускорение свободного падения, M – масса диска, а его кинетическая энергия и кинетическая энергия колеблющихся точек вала равны

$$T = \frac{1}{2} M (u_t^2 + |w_t|^2 + i\Omega(w\bar{w}_t - \bar{w}w_t) + \Omega^2 |w|^2)|_{x=l_1} + \frac{1}{2} J (|w_{xt}|^2 + i\Omega(w_x\bar{w}_{xt} - \bar{w}_x w_{xt}) + \Omega^2 |w_x|^2)|_{x=l_1} + \frac{\rho S}{2} \int_0^l (u_t^2 + |w_t|^2 + i\Omega(w\bar{w}_t - \bar{w}w_t) + \Omega^2 |w|^2) dx,$$

где J – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно боковой стороне, ρ – плотность материала вала.

Из принципа Гамильтона

$$\delta \int_0^{t_1} (A_i + V - T) dt = 0$$

в качестве уравнений Эйлера получаем систему из трех нелинейных уравнений в частных производных для определения $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\bar{w}(x, t)$ и краевые условия в точках $x = 0, x = l_1, x = l$. В полученных уравнениях и краевых условиях перейдем от переменных $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\bar{w}(x, t)$ к переменным $u(x, t)$, $v(x, t) = \exp(-i\Omega t) w(x, t)$, $\bar{v}(x, t) = \exp(i\Omega t) \bar{w}(x, t)$. В результате получим искомые уравнения перемещений точек средней линии вращающегося вала в системе координат $OXYZ$. Дополнительно введя силы внешнего трения элемента вала dx , следуя [2], в нелинейном виде

$$dP = (a_0 + a_1 |v|^2) v_t dx, \quad a_0, a_1 > 0,$$

приведем эти уравнения в безразмерных переменных и зависящих от безразмерных параметров, положив

$$x = lx', u = lu', v = lv', t = t_0 t', t_0 = (\rho S / EI)^{1/2} l^2, b_0 = Sl^2 / I = 16(l/d)^2, t_0 R(t_0 \tau') = R'(\tau'), l'_1 = l_1 / l, a_0 l^2 / (\rho S EI)^{1/2} = a'_0, a_1 l^4 / (\rho S EI)^{1/2} = a'_1, F' = M g l^2 / EI, M' = M / (\rho S l), J' = J / (\rho S l^3), \Omega' = \Omega t_0.$$

В результате, опустив в обозначениях переменных и параметров штрих, получим систему уравнений $u_{tt} - (I-\Gamma)(b_0(u_x + |v_x|^2/2))_x + b_0 f_3((u_x + |v_x|^2/2)^3)_x + 3f_3((u_x + |v_x|^2/2)|v_{xx}|^2)_x = 0,$ (3)

$$v_{tt} + (a_0 + a_1 |v|^2) v_t + (I-\Gamma(i\Omega))(v_{xxxx} - b_0((u_x + |v_x|^2/2)v_x)_x - b_0 f_3((u_x + |v_x|^2/2)^3 v_x)_x - 3f_3((u_x + |v_x|^2/2)|v_{xx}|^2 v_x)_x + 3f_3((u_x + |v_x|^2/2)^2 v_{xx})_{xx} + 2f_3/b_0(|v_{xx}|^2 v_{xx})_{xx}) = 0$$
 (4)

с краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, v(0, t) = v_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0, v(1, t) = v_x(1, t) = 0, u(l_1 - 0, t) = u(l_1 + 0, t),$$

$$v(l_1 - 0, t) = v(l_1 + 0, t), v_x(l_1 - 0, t) = v_x(l_1 + 0, t),$$

$$(I-\Gamma)(b_0(u_x + |v_x|^2/2) + b_0 f_3(u_x + |v_x|^2/2)^3 + 3f_3(u_x + |v_x|^2/2)|v_{xx}|^2)|_{l_1+0}^{l_1-0} + F + M u_{tt}(l_1, t) + S_0(a_0 + a_1 |u(l_1, t)|^2) u_t(l_1, t) = 0,$$
 (5)

$$(I-\Gamma(i\Omega))(v_{xx} + 3f_3(u_x + |v_x|^2/2)^2 v_{xx} + 2f_3/b_0 |v_{xx}|^2 v_{xx})|_{l_1+0}^{l_1-0} + J v_{xtt}(l_1, t) + S_1(a_0 + a_1 |v_x(l_1, t)|^2) v_{xt}(l_1, t) = 0,$$
 (6)

$$(I-\Gamma(i\Omega))(-v_{xxx} + b_0(u_x + |v_x|^2/2)v_x + b_0 f_3(u_x + |v_x|^2/2)^3 v_x + 3f_3(u_x + |v_x|^2/2)|v_{xx}|^2 v_x - 3f_3((u_x + |v_x|^2/2)^2 v_{xx})_x - 2f_3/b_0(|v_{xx}|^2 v_{xx})_x)|_{l_1+0}^{l_1-0} + M v_{tt}(l_1, t) + S_2(a_0 + a_1 |v(l_1, t)|^2) v_t(l_1, t) = 0,$$
 (7)

где использованы обозначения $(v)|_{l_1+0}^{l_1-0} = v(l_1 - 0, t) - v(l_1 + 0, t)$,

$$(I-\Gamma(i\Omega))\varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^0 R(\tau) e^{i\Omega\tau} \varepsilon(t + \tau) d\tau.$$
 (8)

В (5)–(7) S_0 , S_1 и S_2 – безразмерные коэффициенты, характеризующие геометрические свойства диска, уравнение для определения $\bar{v}(x, t)$ является комплексно сопряженным к уравнению (4).

Уравнения (3)–(4), согласно (8), являются уравнениями с бесконечным (интегральным) запаздыванием аргумента. Запаздывание также присутствует в краевых условиях (5)–(7). На функцию $R(\tau)$ наложены необходимые ограничения. Дополнив уравнения (3)–(4) начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau)|_{t=0} &= u_0(x, \tau) \in D_u(\bar{Q}_-), \quad u_t(0, x) = \dot{u}_0(x) \in H_u^2(0,1), \\ v(x, t + \tau)|_{t=0} &= v_0(x, \tau) \in D_v(\bar{Q}_-), \quad v_t(0, x) = \dot{v}_0(x) \in H_v^2(0,1), \end{aligned} \quad (10)$$

в области $\bar{Q}_- = \{ 0 \leq x \leq 1, -\infty < \tau \leq 0 \}$, где $D_u(\bar{Q}_-), H_u^2(0,1), D_v(\bar{Q}_-), H_v^2(0,1)$ функциональные пространства начальных условий, получим начально-краевую задачу, определяющую динамику рассматриваемой механической системы. Конкретный вид функциональных пространств, определение решения, теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи определены и сформулированы в докладе.

Начально-краевая задача (3)–(10) имеет стационарное решение (состояние равновесия)

$$u(x, t) = u_0(x), \quad v(x, t) = 0, \quad u_0(x) = \begin{cases} -c_* x, & 0 \leq x \leq l_1, \\ -c_* l_1, & l_1 < x \leq l \end{cases} \quad (11)$$

где c_* корень уравнения $b_0(1 + f_3 c^2)c = -F$. Исследуется устойчивость состояния равновесия (11). Для этого начально-краевая задача линеаризуется в окрестности состояния равновесия (11). Показано, что устойчивость решений полученной линейной начально-краевой задачи определяется расположением точек спектра характеристического пучка операторов, действующего в пространстве начальных условий. К характеристическому пучку операторов можно применить метод D -разбиений, позволяющий в плоскости параметров (a_0, Ω) (при фиксированных других параметрах) построить области устойчивости решений линейной начально-краевой задачи, изучить движение точек спектра характеристического пучка операторов при изменении параметров и механизмы потери устойчивости решений. На рис. 1 приведена типичная картина D -разбиения плоскости (a_0, Ω) , где через D_j – обозначена область, при значении параметров из которой характеристический пучок операторов имеет j точек спектра в правой комплексной полуплоскости. Как следует из рис. 1, потеря устойчивости решений линейной начально-краевой задачи при изменении параметров a_0 и Ω может быть обусловлена прохождением через мнимую ось комплексной плоскости как одной пары комплексно сопряженных точек спектра (граница областей D_0 и D_2), так и двух пар комплексно сопряженных точек спектра характеристического пучка операторов (точки границы областей D_0 и D_4 , отмечены звездочкой). В первом случае в окрестности состояния равновесия (11) происходит бифуркация рождения устойчивого периодического решения (бифуркация Андронова-Хопфа). Это решение является асинхронной прецессией, продольные колебания при этом отсутствуют. Во втором случае возможна бифуркация устойчивого инвариантного двумерного тора, обмоткой которого являются двухчастотные решения (режимы биений). При этом продольная составляющая является двухчастотным колебательным режимом. Для указанных режимов построены асимптотические формулы.

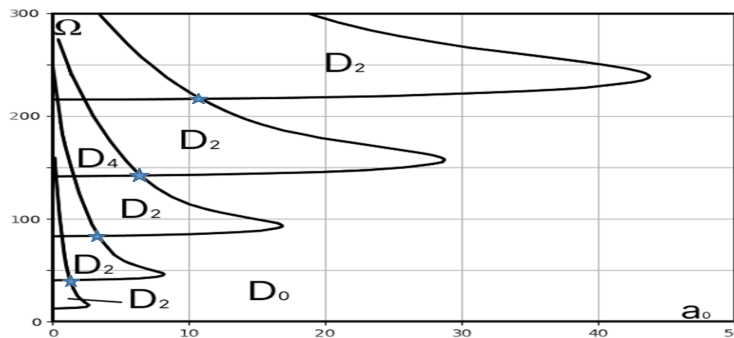


Рис. 1. Картина D -разбиения плоскости параметров (a_0, Ω) .

Заключение

Основным результатом исследования динамики рассматриваемой механической системы можно считать вывод о том, что в системе при определенных скоростях вращения и соотношениях параметров системы могут возникать устойчивые двухчастотные продольно–поперечные автоколебания (режимы биений), которые в случае массивного диска могут привести к интенсивной ударной нагрузке на опоры вала. Этот факт необходимо учитывать при проектировании роторных систем, он также позволяет по-новому посмотреть на некоторые известные техногенные катастрофы.

Литература

1. Ю.Н. Работнов // Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 384 с.
2. В. В. Болотин // Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1956. 600 с.

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СЦЕНАРИЯ ЛАНДАУ-ХОПФА ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ТРУБЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Куликов А.Н., Куликов Д.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
anat_kulikov@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена эволюционная краевая задача, описывающая колебания трубы под воздействием потока жидкости. Показано, что при соответствующем выборе управляющего параметра (либо коэффициента Кельвина-Фойгта, либо скорости потока) может реализоваться известный сценарий Ландау-Хопфа перехода к турбулентности.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).

Введение

В работах [1, 2] был предложен сценарий перехода к турбулентности. Он достаточно подробно изложен в монографии [3] (см. главу 3). Его суть состоит в том, что при увеличении (уменьшении) управляющего параметра рождаются торы возрастающей размерности. При этом притягивающим (устойчивым) является тор наибольшей размерности из существующих при данном выборе параметров. В ситуации общего положения все решения на нем будут почти периодическими функциями эволюционной переменной. В работе [2] был предложен пример нелинейной эволюционной краевой задачи, в которой такой сценарий удастся реализовать. В работах [4–6] были предложены краевые задачи, для которых реализован сценарий Ландау–Хопфа в соответствии с планом, предложенным в [7] как каскада бифуркаций Андронова–Хопфа. В работах [5, 6] были рассмотрены краевые задачи, возникающие в теории упругой устойчивости.

Основной текст

Рассматривается эволюционная краевая задача, которую можно рассматривать как математическую модель колебаний трубы под воздействием потока несжимаемой жидкости, если труба расположена вертикально, а течение жидкости направлено сверху вниз и нет предварительного сжатия или растяжения.

Нормированный вариант соответствующей краевой задачи (см., например, [6]) имеет следующий вид

$$w_{tt} + w_{xxxx} + \varepsilon(bw_t + dw_{xxxx}) + 2\varepsilon U_0(1 + cx)w_{xx} + \varepsilon^2 V_0(1 + cx)^2 w_{xx} = \varepsilon w_{xx} \left(\alpha \int_0^\pi w_x^2 dx + \beta \frac{d}{dt} \int_0^\pi w_x^2 dx \right), \quad (1)$$

$$w(t, 0) = w(t, \pi) = w_{xx}(t, 0) = w_{xx}(t, \pi) = 0, \quad (2)$$

где $b, c, d, U_0, V_0, \alpha, \beta$ – положительные постоянные, величина которых зависит от первоначальных параметров задачи: конструктивного трения, внутреннего трения, характеристик жидкости и материала стенок трубы (например, модуля упругости), длины трубы, площади ее сечения, толщины стенок, величины скорости потока на входе в трубу. Отметим, что при анализе задачи особо важную роль будут играть два параметра: $a = U_0 c$ – приведенная скорость потока и коэффициент d , пропорциональный коэффициенту Кельвина – Фойгта. Если положить $d = 0$, то это означает, что в модели (1) не учитывается или пренебрежимо мало вязкое трение. Края трубы считаем шарнирно опертыми.

Использование и развитие метода интегральных многообразий, нормальных форм, модифицированного алгоритма Крылова-Боголюбова позволило свести вопрос о колебаниях трубы (оси трубы, стенок) к анализу бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для последовательных комплекснозначных функций $z_k(t), k = 1, 2, \dots$

В нашем случае (см., например, [5, 6]) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_k' = \varepsilon(a_k z_k - \delta k^4 |z_k|^2 - i\gamma(2V(z, \bar{z}) + k^2 |z_k|^2)), \quad (3)$$

где $\delta = \frac{\pi\beta}{2}$, $\gamma = \frac{\pi\alpha}{4}$, $V(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^4 |z_m|^2$, $a_k = \frac{a - (b + dk^4)}{2}$.

Переход к тригонометрической форме представления комплекснозначных функций

$$z_k(t) = \rho_k(t) \exp(i\varphi_k(t)), \quad k = 1, 2, \dots$$

приводят систему дифференциальных уравнений (3) в комплексной форме записи к системе дифференциальных уравнений следующего вида для действительных функций

$$\rho_k' = \varepsilon \rho_k (a_k - \delta k^4 \rho_k^2), \quad (4)$$

$$\varphi_k' = \varepsilon \gamma (2V(\rho) + k^2 \rho_k^2), \quad (5)$$

где $k=1,2,\dots$, $V(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \rho_m^2$.

Можно заметить, что система дифференциальных уравнений (4) замкнута и зависит только от $\{\rho_k\}$, т.е. “нормированной” амплитуды колебаний моды с номером k . Поэтому ее допустимо исследовать отдельно от системы (5).

Пусть $a-b = \mu > 0$. Если

$$d \in \left[\frac{\mu}{(m+1)^4}, \frac{\mu}{m^4} \right) = I_m, \quad (6)$$

то при таком выборе d справедливы неравенства $a_k > 0$, если $k \leq m$ и $a_n \leq 0$, если $n \geq m+1$.

Пусть справедливо включение (6), тогда система дифференциальных уравнений (4) имеет $2^m - 1$ состояний равновесия, у которых, по крайней мере, одна из координат отлична от 0, но их число не превосходит m . Обозначим через $S(m)$ совокупность таких состояний равновесия, а через $S(m_j; j)$ подмножество $S(m)$, состоящее из тех состояний равновесия, у которых j координат отличны от 0. Подчеркнем, что если есть некоторое состояние равновесия $P \in S(m; j)$, то $P = (\eta_1, \dots, \eta_k, \dots, \eta_m; 0, 0, \dots)$ и $\eta_k = \sqrt{\frac{a_k}{\delta k^4}}$ или 0, но отлично от 0 ровно j координат.

Справедливо утверждение, что только одно из состояний равновесия $P_m \in S(m; m)$, т.е.

$P_m = (\eta_1, \dots, \eta_m; 0, \dots, 0, \dots)$, где $\eta_k^2 = \sqrt{\frac{a_k}{\delta k^4}}$, $k=1, \dots, m$ асимптотически устойчиво, а остальные состояния равновесия из множества $S(m)$ - неустойчивы.

Если параметр d “перешел” в полуинтервал I_{m+1} , то система дифференциальных уравнений имеет уже $2^{m+1} - 1$ ненулевых состояний равновесия и асимптотически устойчивым станет состояние равновесия $P_{m+1} = (\eta_1, \dots, \eta_{m+1}; 0, \dots)$, где $\eta_k = \sqrt{\frac{a_k}{\delta k^4}}$, а состояние равновесия P_m будет уже неустойчивым.

Основной результат состоит в том, что любому состоянию равновесия из $S(m)$, когда $d \in I_m$, соответствует инвариантный тор $T(j)$ размерность которого равна j , но притягивающим (устойчивым) будет лишь один - $T(m)$, размерность которого равна m .

Более того, если параметр d перешел в интервал I_{m+1} , то появляется (бифурцирует) тор $T(m+1)$, размерность которого равна $m+1$ и именно он становится притягивающим. Следовательно, реализуется каскад бифуркаций

$$\{0\} \rightarrow T(1) \rightarrow T(2) \rightarrow \dots \rightarrow T(m).$$

Здесь через $\{0\}$ обозначено нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво, если $d \in [0, \mu)$.

Выше в качестве бифуркационного параметра была выбрана величина d пропорциональная вязкому трению, т.е. d играет роль числа Рейнольдса в гидродинамике. В данной задаче в качестве основного параметра можно выбрать a . При увеличении a , если остальные параметры остаются фиксированными, можно также показать, что существует каскад бифуркаций инвариантных торов, у которых притягивающим будет тор наибольшей размерности из возможных.

Заключение

В докладе рассмотрена краевая задача, описывающая колебания трубы, но не жидкости, которая в ней протекает, т.е. рассмотрена задача из теории упругой устойчивости, в которой реализуется сценарий Ландау-Хопфа. Отметим также, что предполагается обсудить вопрос о колебаниях данной механической системы, если $d = 0$, т.е. при отсутствии учета вязкого трения.

Литература

1. Л. Д. Ландау // Доклады АН СССР, 44:8 1944. 339-342.
2. E. Hopf // Commun. Pure. Appl. Math., 1:4 1948. 303-322.
3. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Теоретическая физика, т. 6: Гидродинамика. 1988. 736 с.
4. А.Н. Куликов // Нелинейная динамика, 4:1 2008. 57-68.
5. А.Н. Куликов // Дифференц. уравн., 48:9 2012. 1278-1291.
6. А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // ТМФ, 203:1 2020. 78-90.
7. H.W. Broer, F. Dumortier, S.J. van Stern, F. Takens // Structures in Dynamics. 1991. 300 с.
8. J.M.T. Thompson // Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering. 1982. 226 с.
9. P.J. Holmes, J.E. Marsden // J. Sound Vibration, 53:4 1977. 471-503.
10. Segal // Ann. Math, 78:2 1983. 339-364.

О ДИНАМИКЕ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В СЛУЧАЯХ СЛАБОЙ ДИССИПАТИВНОЙ И СЛАБОЙ ИНЕРЦИОННОЙ СВЯЗЕЙ

Куликов Д.А.

Ярославский государственный университет им.П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
kulikov_d_a@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются два варианта систем, каждая из которых состоит из двух слабосвязанных полностью идентичных осцилляторов. В первом варианте эта связь диссипативного типа, а во втором – инерционного. Изучен вопрос о существовании и устойчивости периодических решений в каждой из двух таких автоколебательных систем. При этом выявлена возможность автоколебаний трех типов: полностью синхронных, противофазных и, наконец, асимметричных. Анализ задачи базируется на использовании методов интегральных многообразий и нормальных форм. Получены асимптотические формулы для всех трех типов автоколебательных режимов.

Введение

В докладе предполагается изложить результаты анализа двух задач такого раздела теории нелинейных колебаний, как теория синхронизации (см., например, [1–4]). При этом рассматриваются ряд вопросов, которые, в частности, изучались в работах [5–8]. Отметим, что задачи синхронизации начали изучаться достаточно давно (см., например, известную работу [9]). В ней было отмечено, что при определенных условиях в системе из двух идентичных и слабосвязанных осцилляторов могут устанавливаться противофазные колебания.

Основной текст

Рассматриваются два варианта постановки задачи о синхронизации колебаний двух идентичных нелинейных осцилляторов

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - 2\nu\epsilon\dot{x}_1 + x_1 &= f(x_1, \dot{x}_1) + \epsilon d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\nu\epsilon\dot{x}_2 + x_2 &= f(x_2, \dot{x}_2) + \epsilon d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\end{aligned}\quad (1)$$

и

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - 2\nu\epsilon\dot{x}_1 + x_1 &= f(x_1, \dot{x}_1) + \epsilon d(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\nu\epsilon\dot{x}_2 + x_2 &= f(x_2, \dot{x}_2) + \epsilon d(x_1 - x_2).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $\nu = \pm 1$, $d \in R$ ($d \neq 0$), а $f(x, y)$ достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. Наиболее известный вариант для выбора этой функции следующий: $f(x, y) = ax^2y + bx^3$, $a, b \in R$. В таком случае при $d = 0$ получаем два полностью идентичных осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга. Если $f(x, y) = ay^3 + bx^3$, то тогда речь идет о двух слабосвязанных осцилляторах Релея-Дуффинга.

Обе автоколебательные системы, т.е. системы дифференциальных уравнений (1) и (2), рассматриваются в предположении, что базисное уравнение

$$\ddot{x} - 2\epsilon\nu\dot{x} + x = f(x, \dot{x})\quad (3)$$

при $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ имеет устойчивый предельный цикл и анализ автоколебаний у системы дифференциальных уравнений (3) может быть сведен к анализу нормальной формы

$$z' = \nu z - (1 + ic)z|z|^2, \quad c \in R, \quad z = z(s), \quad s = \epsilon t, \quad \nu = \pm 1.$$

Такое предположение реализуется, если в качестве базисного уравнения выбран осциллятор Ван дер Поля или Релея.

В системе (1) связь между осцилляторами, формирующими эту систему, принято называть слабой диссипативной, если $d > 0$ и слабой активной, если $d < 0$ (см., например, [3, 4]). Наконец, в системе (2) связь между осцилляторами часто называют слабой, инерционной (см., например, [3, 4]).

Для обеих систем дифференциальных уравнений, т.е. систем (1) и (2), получены достаточные условия для существования периодических решений трех типов, а также изучен вопрос об их устойчивости.

К первому из них относятся такие автоколебания этих двух систем, для которых характерно выполнение равенства $x_1(t, \epsilon) = x_2(t, \epsilon)$ при всех $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Такие автоколебания принято классифицировать как синхронные (однородные), а соответствующий цикл, достаточно часто, называют циклом Андронова-Хопфа.

Ко второму типу относят автоколебания, для которых выполнено условие $x_2(t, \epsilon) = x_1(t + T_0(\epsilon), \epsilon)$, где $T_0(\epsilon)$ - величина полупериода периодического решения дифференциального уравнения (3).

Наконец, к периодическим решениям третьего типа относят те автоколебания систем (1) и (2), для которых характерно выполнение условия $|x_1(t, \epsilon)| \neq |x_2(t, \epsilon)|$. Такие циклы систем (1), (2) называют

асимметричными. Подчеркнем, что асимметричные циклы – это колебания систем (1) или (2), у которых их компоненты имеют разные амплитуды и разность фаз отлична от 0 и $T_0(\varepsilon)$.

Анализ обеих систем дифференциальных уравнений, т.е. (1) и (2), базировался на использовании и развитии таких методов теории нелинейных колебаний как методы интегральных многообразий и нормальных форм. Метод интегральных многообразий позволил свести вопрос о существовании и устойчивости периодических решений у систем (1), (2) к аналогичным вопросам для нормальных форм.

Для системы (1) получаем следующую нормальную форму

$$\begin{aligned} z_1' &= \nu z_1 - (1 + ic)z_1 |z_1|^2 + \frac{d}{2}(z_2 - z_1), \\ z_2' &= \nu z_2 - (1 + ic)z_2 |z_2|^2 + \frac{d}{2}(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (4)$$

а в случае системы (2) получаем

$$\begin{aligned} z_1' &= \nu z_1 - (1 + ic)z_1 |z_1|^2 - i\frac{d}{2}(z_2 - z_1), \\ z_2' &= \nu z_2 - (1 + ic)z_2 |z_2|^2 - i\frac{d}{2}(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где в обеих системах $z_1(s), z_2(s)$ - комплекснозначные функции, $s = \varepsilon t$ - “медленное” время, а $\nu = \pm 1$ и нужный вариант выбирается в процессе анализа систем (4), (5). Наконец, $c, d \in R$ ($d \neq 0$). Коэффициент c вычисляется в процессе реализации алгоритма сведения анализа систем (1), (2) к нормальным формам (4), (5).

Если положить в системах (4), (5)

$$z_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2), \quad \psi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \rho_1 = \rho_1(s), \quad \rho_2 = \rho_2(s), \quad \varphi_1 = \varphi_1(s), \quad \varphi_2 = \varphi_2(s), \quad \psi = \psi(s),$$

то задача о существовании и устойчивости периодических решений может быть сведена к анализу вопроса о существовании и устойчивости состояний равновесия соответственно у двух систем из трех действительных уравнений для “медленных” переменных ρ_1, ρ_2, ψ .

Итак, для анализа поставленных вопросов для систем (4) и (5) можно и целесообразно изучить вопрос о состояниях равновесия у систем

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \nu\rho_1 - \rho_1^3 + \frac{d}{2}(\rho_2 \cos\psi - \rho_1), \\ \rho_2' &= \nu\rho_2 - \rho_2^3 + \frac{d}{2}(\rho_1 \cos\psi - \rho_2), \\ \psi' &= c(\rho_1^2 - \rho_2^2) - \frac{d}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\sin\psi \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \nu\rho_1 - \rho_1^3 + \frac{d}{2}\rho_2 \sin\psi, \\ \rho_2' &= \nu\rho_2 - \rho_2^3 - \frac{d}{2}\rho_1 \sin\psi, \\ \psi' &= (\rho_1^2 - \rho_2^2)\left(c - \frac{\cos\psi}{\rho_1\rho_2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

соответственно.

У обеих систем при соответствующем выборе параметров могут существовать состояния равновесия трех типов:

1) S_0 : $\rho_1 = \rho_2 = 1, \psi = 0$, если $\nu = 1$, которым соответствуют периодические решения в обеих нормальных формах (4) и (5). В свою очередь, уже для систем (1) и (2) решению вида 1) соответствует цикл, для которого выполнены условия $x_1(t, \varepsilon) = x_2(t, \varepsilon)$. Такие циклы называют “синхронными”, “однородными”, циклами Андронова-Хопфа;

2) у обеих систем (6) и (7) существуют состояния равновесия вида S_n : $\rho_1 = \rho_2 = \rho, \psi = \pi$, где $\rho = \sqrt{\nu - d}$ при анализе системы (6) и $\rho = \nu$, если рассматривать систему (7). Отметим, что S_n существует у системы (6), если $\nu - d > 0$, а у системы (7) такое состояние равновесия существует, если $\nu = 1$. Таким состояниям равновесия соответствуют циклы у системы (1), (2), которые интерпретируют как противофазные;

3) наконец, у систем (6) и (7), в соответствующих диапазонах параметров, может существовать пара состояний равновесия вида: $S_a(1): (\eta_1, \eta_2, \psi)$ и $S_a(2): (\eta_2, \eta_1, -\psi)$, где $\psi \neq 0, \pi, \eta_1 \neq \eta_2$. Им соответствуют циклы $C_a(\varepsilon, 1)$ и $C_a(\varepsilon, 2)$ систем (6), (7), которые, естественно, называть асимметричными, так как первая и вторая компоненты каждой из систем (1) и (2) совершают колебания с разными амплитудами и разностью фаз отличными от 0 и величины полупериода.

Отметим, что координаты состояний равновесия $S_a(1), S_a(2)$ найдены аналитически. Для всех циклов систем дифференциальных уравнений (1), (2) получены асимптотические формулы в виде разложений по степеням $\varepsilon^{1/2}$, а также дан ответ об их устойчивости.

Заключение

Анализ динамики двух связанных осцилляторов был сведен к анализу вспомогательных систем дифференциальных уравнений, которые принято называть нормальными формами. Такой подход, основанный, в частности, на использовании алгоритма Крылова-Боголюбова позволяет отвечать на широкий спектр вопросов. При этом все результаты, относящиеся к вопросу существования колебаний, изучены аналитически без использования численного интегрирования. Исключение составил вопрос об устойчивости асимметричных циклов. Анализ условий их устойчивости использовал численные методы.

Литература

1. А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртц // Синхронизация. Фундаментальное явление. 2003. 496 с.
2. D.G. Aronson, Ermentrout G.B., N. Kopell // *Physica D*, 41:3 1990. 403-449.
3. А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов // *Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика*, 11:6 2003. 48-64.
4. А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов, Ю.П. Роман // *Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика*, 15:4 2007. 3-15.
5. Д.А. Куликов // *ПММ*, 74:4 2010. 543-559.
6. Д.А. Куликов // *Изв. Вузов. Прикл. нелинейная динамика*, 14: 5 2006 . 120-132.
7. D.A. Kulikov // *Journal of Mathematical Sciences*, 262:6 2022. 817-824.
8. Д.А. Куликов // *Дифф. уравн.*, 43:7 2007. 992-994.
9. C. Huygens // *Iowa State University*. 1986.

АВТОКОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА РЕЛЕЯ С КУБИЧЕСКОЙ ВОЗВРАЩАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Кумакшев С.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
kumak@ipmnet.ru

Аннотация. Исследована колебательная система с механизмом возбуждения как в осцилляторе Релея, но с нелинейной (кубической) возвращающей силой. С помощью метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру для широкого диапазона значений коэффициента обратной связи построены предельные циклы и вычислены амплитуды и периоды автоколебаний. Проведен анализ особенностей предельного цикла, вызванных увеличением коэффициента самовозбуждения. Полученные результаты сопоставлены с автоколебаниями классического осциллятора Релея с линейной возвращающей силой.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6) и поддержана грантом РФФИ № 21-51-12004.

Введение

Автоколебания возникают в различных физических системах и исследование автоколебательных процессов имеет большой научный и прикладной интерес для многих областей науки, например механики и радиофизики. Методам исследования и определения характеристик автоколебательных систем посвящена обширная литература [1-6]. Для динамических систем разработаны качественные и топологические методы, определяющие критерии существования предельных циклов и устойчивости автоколебаний [2-6]. Для квазилинейных колебательных систем с малыми значениями коэффициента самовозбуждения широко известны аналитические методы, дающие приближенное решение: методы малого параметра Ляпунова-Пуанкаре, метод усреднения Крылова-Боголюбова и др. [2, 4-9]. С другой стороны, если коэффициент обратной связи асимптотически велик, то такая сингулярно возмущенная автоколебательная система совершает релаксационные колебания [1]. В этом случае предельный автоколебательный цикл можно построить приближенно, используя метод «припасовывания» А.А. Дородницына [8] или методов релаксационных колебаний [6]. Однако для технических приложений представляют интерес автоколебания в промежуточной области коэффициентов обратной связи, где они не являются асимптотически большими или малыми. Построение характеристик автоколебательной системы в этой области предполагает численное решение с контролем точности, что в силу резких изменений параметров системы представляет собой большую вычислительную трудность. Существующие подходы немногочисленны, громоздки в использовании и не позволяют контролировать точность полученных решений. Предлагаемый подход основан на использовании численно-аналитического метода ускоренной сходимости для вычислений совместно с процедурой продолжения по параметру [10]. В частности, ранее, в рамках такого подхода, решены задачи об автоколебаниях классических осцилляторов Релея и Ван дер Поля [11].

Постановка задачи

Рассмотрим колебания системы, описываемой уравнением типа Льенара

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) &= 0 \\ g &= -k|x|^\beta |\dot{x}|^{\gamma-1} + l|x|^\delta |\dot{x}|^{\sigma-1}, \quad f = c|x|^{\alpha-1}x \\ m, c, k, l > 0; \quad \infty > \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \geq 0; \quad \delta + \sigma > \beta + \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

где m отвечает за инерцию в системе, а f играет роль возвращающей силы с коэффициентом упругости c . Это уравнение имеет периодическое решение с устойчивым предельным циклом. Отметим, что структура уравнения не меняется, если провести замену $x \rightarrow -x$ и $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$. Это свидетельствует о том, что предельный цикл будет центрально симметричен и достаточно определить половину периода.

Для приведения к безразмерному виду сделаем замену переменной x и аргумента t

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= d^{-1}x, \quad d = (k/l)^{(1-\kappa)/\xi} (c/m)^{-\eta/(\lambda\xi)} \\ \tilde{t} &= \nu t, \quad \nu = (k/l)^{(\alpha-1)/(\lambda\xi)} (c/m)^{1/\lambda} \\ \xi &= \delta + \sigma - \beta - \gamma > 0, \quad \eta = \sigma - \gamma, \quad \lambda = 2 + (\alpha - 1)\eta/\xi > 0 \\ \kappa &= (\alpha - 1)\eta/[2\xi + (\alpha - 1)\eta] \neq 1 \end{aligned}$$

тогда уравнение (1) перепишется в виде (знак \sim опускаем)

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + \varepsilon(-|\tilde{x}|^\beta |\dot{\tilde{x}}|^{\gamma-1} + |\tilde{x}|^\delta |\dot{\tilde{x}}|^{\sigma-1})\dot{\tilde{x}} + |\tilde{x}|^{\alpha-1}\tilde{x} &= 0 \\ \varepsilon &= (k/m)d^{\beta+\gamma-1}\nu^{\gamma-2} \end{aligned}$$

Как видно, здесь введен параметр самовозбуждения ε , который выражается через исходные параметры уравнения (1). Теперь можно получить представление для уравнения типа Релея с нелинейной возвращающей силой

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + |x|^{\alpha-1}x = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta = \delta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 3$$

Классическое уравнение Релея получится, если положить $\alpha = 1$. В данной работе будет исследован случай $\alpha = 3$, то есть когда возвращающая сила имеет кубический вид.

Численное решение

Надо найти периодическое решение y которого $x(0) = x(2T)$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}(2T)$, где T — полупериод автоколебаний. Он неизвестен, также как и значения координаты и скорости в нуле. На основе метода Ляпунова-Пуанкаре [9] проведем замену аргумента t на τ чтобы выделить явно зависимость от неизвестной T . Пользуясь центральной симметрией искомого решения, рассмотрим задачу на полупериоде $\Delta\tau = \Theta$, где Θ любое фиксированное число. Положим его равным единице. В результате имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \varepsilon T(1 - T^{-2}x^2)\dot{x} + T^2x^3 &= 0, \quad x = x(\tau, \varepsilon), \quad T = T(\varepsilon) \\ x(0) = A(\varepsilon), \quad x(1) = -A(\varepsilon), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где A — неизвестная амплитуда автоколебаний. Точками обозначены производные по новому аргументу τ . Задача содержит четыре неизвестных параметра — две постоянные интегрирования, амплитуда и полупериод автоколебаний. Их можно найти их четырех краевых условий. Таким образом будет найдена одна половина предельного цикла, вторая половина получится симметричным отображением.

Для решения такой задачи применим численно-аналитический метод ускоренной сходимости [10]. Сначала полагаем коэффициент самовозбуждения равным нулю и находим решение краевой задачи (2). Затем реализуем метод продолжения по параметру, задавая новое значение параметра ε . На этом этапе для нахождения неизвестных A и T начинаем использовать метод ускоренной сходимости. Метод является вариацией метода Ньютона и с помощью получаемых функций чувствительности позволяет уточнить решение краевой задачи с наперед заданной точностью. После уточнения решения делаем следующий шаг в итерационной процедуре: увеличиваем значение ε , а в качестве приближенного решения используем значения A и T с предыдущего шага. Метод ускоренной сходимости позволяет получить решение с заданной точностью, после чего итерационная процедура продолжается.

Полученные результаты

Приведем графики амплитуды и периода предельного цикла автоколебаний для уравнения Релея в классическом случае и с кубической возвращающей силой.

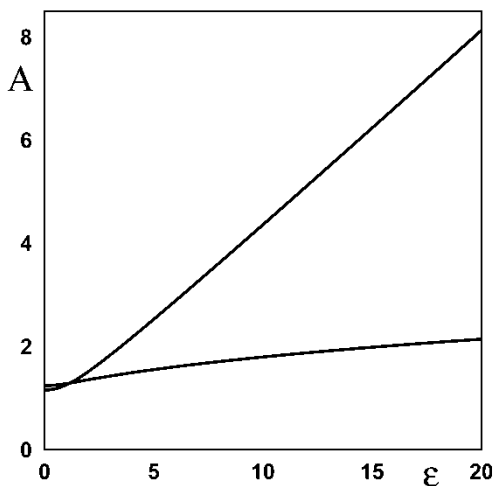


Рис. 1. Амплитуда автоколебаний в зависимости от коэффициента самовозбуждения.

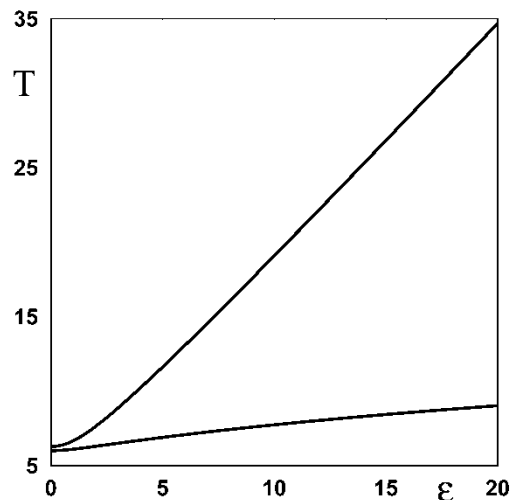


Рис. 2. Период автоколебаний в зависимости от коэффициента самовозбуждения.

Проведем сравнение полученных результатов с расчетами для классического осциллятора Релея, полученных ранее [11]. На рис. 1 и 2 представлены графики амплитуды A и периода T автоколебаний при увеличении ε . Верхняя линия на обоих графиках соответствует классическому случаю. Видно, что наличие кубической возвращающей силы резко уменьшает и период и амплитуду автоколебаний при увеличении

коэффициента обратной связи. В классическом случае эти параметры возрастают довольно быстро и при этом вид кривых имеет ярко выраженный линейный характер. При наличии кубической возвращающей силы значения A и T растут гораздо медленнее, вид кривых не имеет линейного характера и наличествует слабый выгиб кверху.

Приведем теперь предельные циклы автоколебаний для пяти значений параметра ε , а именно 0, 5, 10, 15 и 20.

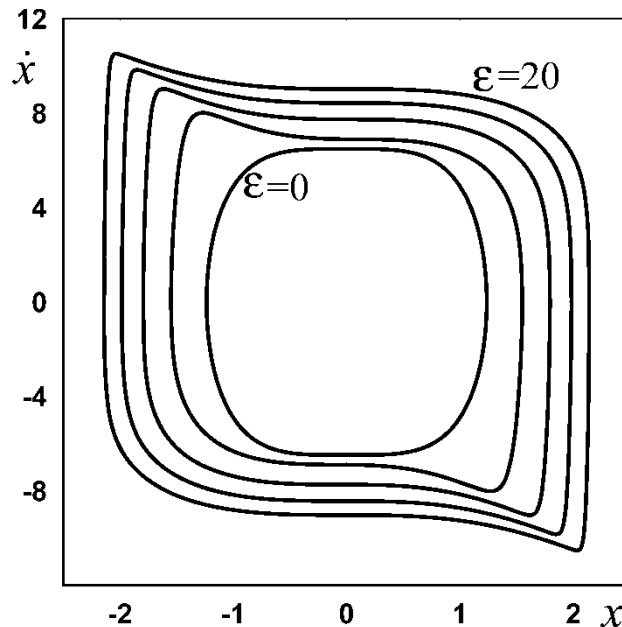


Рис. 3. Предельные циклы автоколебаний для диапазона значений коэффициента самовозбуждения от 0 до 20.

При $\varepsilon = 0$ предельный цикл представляет из себя эллипс. С увеличением ε во втором и четвертом квадрантах появляются выступы с большой локальной кривизной. В классическом случае предельные циклы имеют выпуклую форму, а здесь появляются участки с прогибом.

Заключение

Представленный подход значительно проще для численной реализации и позволяет осуществлять контроль точности. Он позволяет рассчитывать характеристики сразу для целого диапазона коэффициента обратной связи в области, где этот параметр не является асимптотически большим или малым. Метод позволяет проводить расчеты даже в случае существенно нелинейной возвращающей силы.

Литература

1. А. А. Харкевич // Автоколебания. 1953. 171 с.
2. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний. 1959. 915 с.
3. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 1974. 503 с.
4. О.Блакьер. Анализ нелинейных систем. 1969. 400 с.
5. В.Ф.Журавлев, Д.М.Климов. Прикладные методы в теории колебаний. 1988. 326 с.
6. Е.Ф.Мищенко, Н.Х.Розов. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. 1975. 247 с.
7. В.М.Волосов, Б.И.Моргунов. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. 1971. 507 с.
8. А.А.Дородницын. Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля// ПММ, 11:3 1947. 313-328.
9. И.Г. Малкин Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. 1956. 491 с.
10. Л.Д.Акуленко, С.А.Кумакшев, С.В.Нестеров. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости// ПММ, 66:5 2002. 723-741.
11. Л.Д.Акуленко, Л.И. Коровина, С.А.Кумакшев, С.В.Нестеров. Автоколебания осцилляторов Релея и Ван дер Поля при умеренно больших коэффициентах обратной связи// ПММ, 68:2 2004. 273-281.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КАНАТА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ С УЧЕТОМ ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ

Литвинов В.Л.^{1,2}, Литвинова К.В.^{1,2}

1 - Самарский государственный технический университет, Самара

2 - Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются стохастические продольные колебания вязкоупругого каната с движущимися границами с учетом влияния демпфирующих сил. Случай разностного ядра позволяет свести задачу анализа системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений к изучению системы стохастических дифференциальных уравнений. Для оценки коэффициентов разложения предлагается применять статистический численный метод Монте-Карло.

Введение

В настоящее время вопросы надежности при проектировании машин и механизмов требуют все более полного учета динамических явлений, происходящих в проектируемых объектах. Широкое использование в технике механических объектов с подвижными границами вызывает необходимость разработки методов их расчета. Задача о колебаниях систем с подвижными границами связана с получением решений интегро-дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных в переменных во времени областях [1–8]. Такие задачи в настоящее время недостаточно изучены. Их особенностью является сложность использования известных методов математической физики, пригодных для задач с фиксированными границами. Сложность получаемых решений объясняется тем, что до сих пор не существовало достаточно общего подхода к анализу особенностей динамики таких систем. В связи с опасностью резонанса большое значение здесь имеет изучение вынужденных колебаний. Попытки исследовать этот процесс предпринимались, но полученные результаты ограничиваются в основном качественным описанием динамических явлений [1–4]. Кроме того, признано, что детерминированное моделирование систем не может быть адекватным для некоторых типов задач, поэтому необходимо переходить к вероятностно-статистическому, где присутствуют случайные величины, стохастические колебания. При решении здесь используются в основном приближенные методы [5–8], так как получение точных решений возможно только в простейших случаях.

Если затухание поперечных колебаний происходит в основном за счет действия внешних демпфирующих сил, то в случае продольных колебаний на затухание в основном влияют упругие несовершенства материала колеблющегося объекта [5–8]. Изучение вязкоупругости включает анализ стохастической устойчивости стохастических вязкоупругих систем, их надежности [9].

Основной текст

Дифференциальное уравнение, описывающее продольные колебания каната (учет вязкоупругости на основе гипотезы Фойгта), имеет вид [7, 8]

$$U_{tt}(x, t) + 2\alpha U_t(x, t) - a^2 \left[U_{xx}(x, t) - \int_0^t K(t-\nu) U_{xx}(x, \nu) d\nu + \mu U_{xxt}(x, t) \right] = f(x, t). \quad (1)$$

Граничные условия

$$U(\nu_0 t, t) = 0; \quad U(\nu_0 t + l_0, t) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия

$$U(x, 0) = U_1(x); \quad U_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

В задаче (1)–(3) обозначено: $U(x, t)$ – продольное перемещение точки каната с координатой x в момент времени t ; $a^2 = E / \rho$ – скорость распространения волны в канате, E – модуль упругости материала каната, ρ – линейная плотность массы; α – сила сопротивления среды, действующая на единицу длины каната, пропорциональная скорости; μ – малый параметр, учитывающий вязкоупругость; $\nu_0 t + l_0$ – закон движения границы каната; $f(x, t)$ – функция, характеризующая внешнее возмущение; $K(z)$ – ядро релаксации.

Введем новые переменные, останавливающие границы:

$$\xi = (x - \nu_0 t) / l_0; \quad \tau = at / l_0; \quad U(x, t) = V(\xi, \tau).$$

После преобразований получим:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - 2vV_{\xi\tau}(\xi, \tau) - (1-v^2)V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - 2k_0V_{\xi}(\xi, \tau) + 2k_1V_{\tau}(\xi, \tau) - d \int_{\xi}^{\xi+v\tau} K(-d(\xi-\eta))V_{\xi\xi}(\eta, \frac{1}{v}(\xi-\eta)+\tau)d\eta + \lambda \left(V_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - \frac{1}{v}V_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) \right) = F(\xi, \tau); \quad (4)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(1, \tau) = 0; \quad (5)$$

$$V(\xi, 0) = V_1(\xi); \quad V_{\tau}(\xi, 0) = 0. \quad (6)$$

Здесь $v = \frac{v_0}{a}$; $d = \frac{l_0}{v_0}$; $k_0 = \alpha v l_0$; $k_1 = \alpha v d$; $\lambda = \frac{\mu}{d}$; $F(\xi, \tau) = v^2 d^2 f(x, t)$.

Функция $F(\xi, \tau)$ может быть представлена как

$$F(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau) \sin(\omega_n \xi), \quad \omega_n = \pi n. \quad (7)$$

Теорема 1. Решение задачи (4)–(6) можно представить в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\tau) \sin(\omega_n \xi). \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в (4), после преобразований получим систему уравнений

$$V_{n\tau\tau}(\tau) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{v} \omega_n^2 \right) V_{n\tau}(\tau) + \omega_n^2 (1-v^2) V_n(\tau) + \omega_n^2 d \int_{\xi}^{\xi+v\tau} K(-d(\xi-\eta)) V_n \left(\frac{1}{v}(\xi-\eta) + \tau \right) d\eta = F_n(\tau) \quad (9)$$

с начальными условиями

$$V_n(0) = 2 \int_0^1 V_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad V_{n\tau}(0) = 0. \quad (10)$$

Примем начальные условия и внешнюю нагрузку случайными, представив в виде суммы синусоид со случайными амплитудами, обозначив их $\tilde{V}(\xi)$ и $\tilde{F}(\xi, \tau)$ соответственно. В этом случае колебания будут случайными, а уравнения (9) образуют систему стохастических интегро-дифференциальных уравнений

$$\tilde{V}_{n\tau\tau}(\tau) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{v} \omega_n^2 \right) \tilde{V}_{n\tau}(\tau) + \omega_n^2 (1-v^2) \tilde{V}_n(\tau) + \omega_n^2 d \int_{\xi}^{\xi+v\tau} K(-d(\xi-\eta)) \tilde{V}_n \left(\frac{1}{v}(\xi-\eta) + \tau \right) d\eta = \tilde{F}_n(\tau); \quad (11)$$

$$\tilde{V}_n(0) = 2 \int_0^1 \tilde{V}_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad \tilde{V}_{n\tau}(0) = 0. \quad (12)$$

Характеристики случайных величин – математическое ожидание, дисперсия и ковариация, имеют следующий вид:

$$M(\tilde{V}(\xi, \tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\tilde{V}_n(\tau)) \sin(\omega_n \xi); \quad (13)$$

$$D(\tilde{V}(\xi, \tau)) = \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{n,k}(\tau) \sin(\omega_n \xi) \sin(\omega_k \xi); \quad (14)$$

$$C(\tilde{V}(\xi, \tau, \zeta, \nu)) = \sum_{n,k=1}^{\infty} C_{n,k}(\tau, \nu) \sin(\omega_n \xi) \sin(\omega_k \zeta). \quad (15)$$

Для нахождения характеристик (13)–(15) стохастических линейных продольных колебаний вязкоупругого каната необходимо получить статистические оценки решения системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений (11). Для этого ядро релаксации $K(z)$ можно взять в экспоненциальном виде со случайной составляющей:

$$K(z, \bar{\beta}) = K(z, \bar{b}) \Big|_{\bar{b}=\bar{\beta}} = \sum_{j=1}^N c_j e^{-\beta_j z}, \quad (16)$$

где $c_j \in R_+$, β_j – возможное значение положительной случайной величины b_j .

Обозначим зависимость $\tilde{V}(\xi, \tau)$ и $\tilde{V}_n(\tau)$ от случайного вектора \bar{b} , как $\tilde{V}(\xi, \tau, \bar{b})$ и $\tilde{V}_n(\tau, \bar{b})$ соответственно. С учетом замены переменной

$$u_{nj}(\tau, \bar{b}) = \int_{\xi}^1 e^{-\beta_j d \eta} \tilde{V}_n \left(\frac{1}{\nu} (\xi - \eta) + \tau \right), \bar{b} d\eta \quad (17)$$

система стохастических интегро-дифференциальных уравнений (11) преобразуется в систему стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\tilde{V}_{n_{rr}}(\tau, \bar{b}) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{\nu} \omega_n^2 \right) \tilde{V}_{n_r}(\tau, \bar{b}) + \omega_n^2 (1 - \nu^2) \tilde{V}_n(\tau, \bar{b}) + \omega_n^2 d \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j d \tau} u_{nj}(\tau, \bar{b}) = \tilde{F}_n(\tau). \quad (18)$$

Начальные условия будут иметь вид

$$\tilde{V}_n(0, \bar{b}) = 2 \int_0^1 \tilde{V}_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad \tilde{V}_{n_r}(0, \bar{b}) = 0; \quad u_{nj}(0, \bar{b}) = 0. \quad (19)$$

Исследование системы (18) - (19) возможно с помощью статистического численного метода Монте-Карло [9–11].

Выводы

Выполнена постановка задачи о стохастических продольных колебаниях вязкоупругого каната с движущимися границами с учетом влияния демпфирующих сил в виде системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений, которая сведена к изучению системы стохастических дифференциальных уравнений со случайными начальными условиями. Для оценки коэффициентов разложения предлагается применять статистический численный метод Монте-Карло

Литература

1. О.А. Горошко, Г.Н. Савин. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины – Киев: Изд-во АН УССР, 1971. – 290 с.
2. Ю.П. Самарин. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
3. А.И. Весницкий. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. А.А. Лежнева. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159–161.
5. В.Л. Литвинов. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 188-199.
6. В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография / В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 100 с.
7. В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.
8. В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70–77.
9. Б.С. Елепов, А.А. Кронберг, Г.А. Михайлов, К.К. Сабельфельд. Решение краевых задач методом Монте-Карло. — Новосибирск: Наука, 1980. — 174 с.
10. С.М. Ермаков. Метод Монте-Карло в вычислительной математике: Вводный курс. - Санкт-Петербург: Невский диалект; М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 192 с.
11. Г.С. Фишман. Монте-Карло. Концепции, алгоритмы и приложения. - SpringerVerlag, 1995 (Исправленное 3-е издание, 1999 г.). — 718 стр.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА – ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ НА ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦАХ

Литвинов В.Л.^{1,2}, Литвинова К.В.^{1,2}

1 - Самарский государственный технический университет, Самара

2 - Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. Приближенный метод Канторовича – Галеркина рассматривается применительно к решению задач, описывающих колебания вязкоупругих объектов с условиями на движущихся границах и анализу резонансных свойств данных объектов. Метод позволяет учесть действие на систему сил сопротивления среды, изгибную жесткость, а так же граничные условия со слабой нестационарностью. Используя метод Канторовича – Галеркина находится высокой точности приближенное решение задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого каната переменной длины, один конец которого наматывается на барабан, а второй жестко закреплен. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс.

Введение

Системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1–6], гибкие звенья передач [7] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [3]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [3, 6], а так же метод малого параметра [2]. Однако метод Канторовича – Галеркина может быть применён и в более сложных случаях. Этот метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления [4], изгибную жесткость [8], вязкоупругие свойства колеблющегося объекта [5], а также слабую нестационарность граничных условий [1].

Основной текст

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] + \varepsilon_0 L_1[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau) \quad (1)$$

при граничных условиях

$$Y_{ji}[U(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] + \varepsilon_{ji} Z_{ji}[U(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = F_{ji}(\tau); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где $U(\xi, \tau)$ — функция смещения, τ — безразмерное время ($\tau \geq 0$), ξ — безразмерная пространственная координата; L — линейный однородный дифференциальный оператор по переменной ξ порядка $2m$; L_1 — линейный дифференциальный оператор (его порядок по τ равен единице, по ξ не превышает $2m$); Y_{ji} — линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ; $l_j(\varepsilon\tau)$ — законы движения границ; $\varphi(\xi, \tau)$; $F_{ji}(\tau)$ — заданные функции класса C и C^2 соответственно; $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_{ji}$ — малые параметры; Z_{ji} — линейные операторы.

Операторы Z_{ji} — могут содержать члены следующего вида:

$$A(\varepsilon\tau) \frac{\partial^n U_\tau(\xi, \tau)}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi=l_j(\varepsilon\tau)}; \quad \int B(\varepsilon\zeta) \frac{\partial^k U(\xi, \zeta)}{\partial \zeta^k} \Big|_{\xi=l_j(\varepsilon\zeta)} d\zeta,$$

где $n < 2m, k \leq 2$ — целые положительные числа; $A(\varepsilon\tau), B(\varepsilon\zeta)$ — заданные функции. Члены данного вида могут иметь место, например, при учете вязкоупругих свойств материалов.

Заметим, что метод Канторовича – Галеркина позволяет учесть и начальные условия. Однако цель статьи – анализ резонансных свойств, а начальные условия не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому в задаче (1), (2) начальные условия опущены.

Непосредственно поставленную задачу методом Канторовича–Галеркина решать нельзя. Необходимо сначала преобразовать граничные условия так, чтобы они не содержали функций F_{ji} и операторов Z_{ji} . Для этого вводится новая функция:

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (3)$$

где функция $H(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$L[H(\xi, \tau)] = 0 \quad (4)$$

и условиям

$$Y_{ji}[H(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = -\varepsilon_{ji} Z_{ji}[H(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] - \varepsilon_{ji} Z_{ji}[V(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] + F_{ji}(\tau). \quad (5)$$

Так как оператор L является оператором по ξ порядка $2m$, общее решение уравнения (4) можно записать в виде

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{kr}(\tau) D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau), \quad (6)$$

где $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяет уравнению (4) и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(l_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = \begin{cases} 1, & j = k \wedge i = r, \\ 0, & j \neq k \vee i \neq r. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая (7), получим следующую систему уравнений относительно $C_{kr}(\tau)$:

$$C_{kr}(\tau) = -\varepsilon_{kr} Z_{kr} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^2 C_{ji}(\tau) D_{ji}(l_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) \right] - \varepsilon_{kr} Z_{kr} [V(l_k(\varepsilon\tau), \tau)] + F_{kr}(\tau). \quad (8)$$

Раскладывая решение системы (8) по степеням малого параметра, с точностью до величин порядка ε^2 получим

$$C_{kr}(\tau) \approx F_{kr}(\tau) - \varepsilon_{kr} Z_{kr} [V(l_k(\varepsilon\tau), \tau)]. \quad (9)$$

Здесь, как и в работах [3, 6], под точностью до величин порядка малости ε^2 понимается точность, имеющая место при пренебрежении членами, содержащими множители $\varepsilon_0\varepsilon$, $\varepsilon_0\varepsilon_{ji}$, $\varepsilon\varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{kr}\varepsilon_{ji}$, а также членами вида $\varepsilon \int B(\varepsilon\zeta) F_{ji}(\zeta) d\zeta$; $\varepsilon F'_{ji}(\varepsilon\tau)$, которые на резонансные свойства системы влияют как члены порядка ε^2 .

Как показано в [6], учет членов порядка малости ε^2 мало влияет на точность. Учет таких членов в рассматриваемой задаче значительно усложняет решение, поэтому везде в дальнейшем членами порядка малости ε^2 будем пренебрегать.

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] + \varepsilon_0 L_1[V(\xi, \tau)] + H_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) - \varepsilon_0 L_1 \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m F_{kr}(\tau) D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) \right]; \quad (10)$$

$$Y_{ji}[V(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (11)$$

Для решения задачи (10), (11) используем метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина. Решение задачи будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (12)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ – собственные функции следующей краевой задачи

$$L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)] = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau); \quad (13)$$

$$Y_{ji}[X_n(l_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = 0.$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи. Оператор L не содержит производной по τ , поэтому $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Такой выбор координатных функций X_n обуславливает тот факт, что решение (12) является точным в случае, если границы неподвижны. При увеличении скорости движения границ точность метода уменьшается.

Заметим, что функции $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (11) и играют в данном случае роль динамических мод.

Для решения задачи используем методику, описанную в [6].

В результате получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$\frac{1}{B^2} A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \exp\left(-\varepsilon_1 \frac{\pi^2 n^2 \tau}{1 + \varepsilon_0 \tau}\right); \Phi_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau) - W(\tau); F_n(\tau) = \frac{1}{1 + \varepsilon_0 \tau} \exp\left(\frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{\pi^2 n^2 \tau}{1 + \varepsilon_0 \tau}\right).$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается при

$$W(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau).$$

Если $W(\tau) = \tau$, то в области, содержащей точку $\tau_0 = (\pi n - 1) / \varepsilon_0$, наблюдается явление прохождения через резонанс. Выражение

$$\frac{1}{B^2} A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

определяющее амплитуду колебаний при прохождении через резонанс, численно было исследовано на максимум в зависимости от τ_1, τ_2 в окрестности точки τ_0 .

Выводы

Найдена зависимость максимальной амплитуды колебаний каната при прохождении через резонанс в зависимости от коэффициента, характеризующего вязкоупругость объекта на основе модели Фойгта:

- при уменьшении ε_0 и ε_1 амплитуда колебаний увеличивается;
- при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ амплитуда колебаний стремится к бесконечности;
- при $\varepsilon_1 \neq 0$ амплитуда ограничена даже при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

Произведена оценка точности метода Канторовича–Галеркина. Сравнение результатов показывает, что погрешность применения метода Канторовича–Галеркина при изучении явления прохождения через резонанс лежит в пределах 5% при $\varepsilon_0 < 0,37$.

Литература

1. А.И. Весницкий. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
2. О.А. Горошко, Г.Н. Савин. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины– Киев: Изд-во АН УССР, 1971. – 290 с.
3. В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография / В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 100 с.
4. В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.
5. В.Л. Литвинов. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 188–199.
6. В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70–77.
7. Ю.П. Самарин. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
8. А.А. Лежнева. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159–161.

ОПТИМИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОКОЛОГАБАРИТНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ МОСТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Локтев А.А.¹, Локтев Д.А.²

1 - Российский университет транспорта, Москва, Россия

2 - Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва,
Россия

aaloktev@yandex.ru

Развитие современных наземных транспортных систем во многом связано с развитием городских агломераций и транспортных магистралей между ними. При этом в самих агломерациях плотность дорог высока, а отношение площади в плане объектов транспортной инфраструктуры к общей площади населенного пункта может достигать 30%. В этих условиях одним из самых востребованных инженерных решений является создание транспортных развязок, расположенных в различных уровнях. При многоуровневой компоновке развязок между пересекающимися в плане транспортными магистралями важным является соблюдение автомобильного или железнодорожного габарита, как над мостовым переходом, так и под ним, поэтому реализация традиционных балочных, арочных, ферменных расчетных схем пролетного строения с ездой поверху или с ездой понизу трудно реализуема из-за дефицита пространства при вертикальной компоновке транспортных развязок [1].

В настоящем исследовании предпринимается попытка расчетно обосновать использование окологабаритного пространства для автомобильного или железнодорожного транспорта, с целью уменьшить геометрические вертикальные размеры поперечного сечения пролетного строения, и уменьшить удаленность крайних точек балочной схемы от контура кинематического габарита транспорта, используемого на рассматриваемой магистрали [2]. Основная нагрузка от подвижного состава передается сверху вниз и наибольшие величины, характеризующие передачу нагрузки от подвижного состава на элементы конструкции, в традиционных расчетных схемах мостовых переходов возникают в уровне верхнего строения, что связано в решении контактной задачи, позволяющей проследить передачу веса экипажа далее на несущие конструкции, вплоть до опор мостового перехода. Выбор типа габарита определяется действующими нормативами, но поскольку в настоящее время активно развивается концепция строительства высокоскоростных автомобильных и железнодорожных магистралей, то нормативно-техническая документация будет еще претерпевать изменения, и скорее всего в сторону увеличения геометрических размеров габаритного пространства [1, 3].

Рассматривается пролетное строение под один железнодорожный путь, поскольку большинство мостовых переходов на отечественных железных дорогах имеют именно такую поперечную расчетную схему. Это позволяет рассматривать балочное строение работающее в основном на изгиб, без кручения, поскольку соосность пролетного строения и рельсошпальной решетки строго регламентируется нормативными документами, а наличие эксцентриситета, приводящего к изменению напряженно-деформированного состояния, отслеживается при проведении мониторинга и может быть исправлено при выполнении ремонтных работ, если же устранить несоосность не представляется возможным, то требуется в расчетах учитывать кручение пролетного строения и проводить проверку его грузоподъемности и устойчивости боковому опрокидыванию.

Рассматриваемое поперечное сечение пролетного строения предлагается сегментировать на несколько частей: расположенную выше уровня езды подвижного состава, ниже уровня езды и средняя часть, к которой непосредственно прикладывается нагрузка от колесных пар. Предлагается оценить влияние геометрических и жесткостных характеристик каждой из трех частей поперечного сечения на наибольшие перемещения и напряжения, возникающие в различных точках пролетного строения [4].

Включение в работу пролетного строения элементов поперечного сечения, расположенных выше проезжей части рассматривались рядом отечественных и зарубежных исследователей, но чаще всего это были элементы конструкции, выполнявшие дополнительные функции: борта для удержания щебня в железобетонном корыте пролетного строения моста, ограничители, препятствующие сходу подвижного состава с мостового перехода и т.д.

Традиционные методики учета временной вертикальной нагрузки от транспортных средств определяют интенсивность такого рода воздействия с учетом: P – нагрузки на ось экипажа, $1+\mu$ – динамического коэффициента, n_k – коэффициента надежности по временной нагрузке, c_k – приведенной длина сегмента пролетного строения, на который передается нагрузка от одной колесной пары, l_s – длины подрельсового основания в направлении перпендикулярном оси мостового перехода. Если мостовой переход расположен в кривой то требуется учитывать горизонтальную компоненту нагрузки, передаваемой от подвижного состава верхнему строению железнодорожного пути и вычисляемой с учетом: R – радиуса кривой участка железнодорожного пути, k – вертикальной нагрузки от экипажа, приведенной к одному элементу подрельсового основания.

При определении напряжений в точке на внутренней поверхности борта используют положения теории

механики деформируемого твердого тела, основанные на перераспределении вертикальной нагрузки, действующей на верхнюю поверхность конструкции [1–4]. Для определения полного нормального напряжения, действующего в горизонтальном направлении и, фактически, определяющего значения распора или предварительного напряжения балластной призмы при ограничении ее горизонтальной деформации с помощью бортов пролетного строения, требуется также учитывать силы сцепления в балласте, давление балласта на борт от бесстыкового пути, вертикальную нагрузку от транспортных средств, горизонтальную составляющую центробежной нагрузки от подвижного состава [2, 3].

Для определения резонансных скоростей и антирезонансных режимов движения экипажей по балочному пролетному строению удобно использовать функции, определяющие частоту вынужденных колебаний от подвижной нагрузки ω_* и зависящие от следующих параметров движения, конструкции и модели: силы, передающейся пролетному строению от каждой колесной пары, дельты функции Дирака, ступенчатой функции Хевисайда, времени прихода j -ой колесной пары на балочный пролет, расстояния между колесными парами, количества колесных пар, проходящих через пролетное строение за рассматриваемый интервал времени, циклической частоты, учитывающей затухание колебательного процесса, коэффициента затухания для формы колебаний порядка n .

Вычислительная процедура, используемая для решения определяющих уравнений на ЭВМ, предполагает разделение характерного временного интервала (период собственных колебаний для стационарных процессов и время прихода упругой волны в заданную точку конструкции для нестационарных процессов) на k равных частей. Длительность одной такой части τ выбирается исходя из условия линейности основных искомых функций на каждом элементарном интервале.

Конструкция мостового перехода, достаточно подробная математическая модель, которой была рассмотрена в данной статье, может быть изготовлена на заводе, а затем доставлена и смонтирована в месте установки, что может существенно уменьшить конечную стоимость сооружения, и сделать его выгодным решением, например, для устройства железнодорожных переездов в различных уровнях, в населенных пунктах и на наиболее загруженных транспортных направлениях.

Литература

1. Локтев А.А., Сычёв В.П., Поддаева О.И., Потапов А.В., Талашкин Г.Н. Моделирование мостотоннеля для пропуска легкового транспорта через объекты инфраструктуры // Наука и техника транспорта. 2017. № 1. С. 73-78.
2. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений. Высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. – Москва, 2011. – 574 с. ISBN: 978 – 5 – 02 – 037488 –1.
3. Коган А. Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом – М. Транспорт. 1997. – 325 с.
4. Локтев А.А., Королев В.В., Локтев Д.А., Шукюров Д.Р., Гелюх П.А., Шишкина И.В. Перспективные конструкции мостовых переходов на транспортных магистралях // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2018. Т. 77. № 6. С. 331-336.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЕЁ ВРАЩЕНИИ ВОКРУГ ОСИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПЛОСКОСТИ ПЛАСТИНКИ

Лукин А.В., Попов И.А.

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург
lukin_av@spbstu.ru

Аннотация. В работе выполняется построение и исследование модели связанных плоско-поперечных колебаний круглой тонкой пластинки с концентричным отверстием при действии кориолисовых и центробежных сил инерции, вызванных вращением системы вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки. Уравнения колебаний в частных производных получены с применением вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. В предположении малости угловой скорости вращения по отношению к частоте рабочей кососимметричной изгибной формы колебаний пластинки найдено приближенное аналитическое решение как для радиальной и окружной, так и для поперечной компонент поля перемещений в режиме свободных колебаний. С помощью проекционного метода Галеркина задача была сведена к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка для модальных координат взаимно ортогональных базисных кососимметричных форм колебаний пластинки. Обнаружено, что режим начально возбужденных гармонических колебаний при наличии вращения преобразуется в режим амплитудно-модулированных биений. Найдены аналитические выражения как для частоты медленной огибающей биений, так и для относительной глубины их амплитудной модуляции. Показана принципиальная возможность определения модуля проекции вектора угловой скорости на плоскость пластинки по измеряемой величине частоты огибающей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФ № 21-71-10009.

Введение

Одной из важнейших задач измерительного приборостроения на современном этапе является создание малогабаритных инерциальных навигационных систем, обеспечивающих определение параметров ориентации и координат летательных, надводных и подводных аппаратов, наземных транспортных средств, роботов и др. Ключевым направлением разработок здесь является создание микроэлектромеханических датчиков инерциальной информации – акселерометров и гироскопов тактического и навигационного классов точности [1]. Наряду с высокими требованиями к точностным характеристикам датчиков, определяющее значение имеют параметры температурной стабильности и устойчивости систем к внешним воздействиям (вибрационным, ударным, акустическим) [2].

В последнее десятилетие в мировой индустрии микросистем интенсивное развитие получило направление разработки многоосевых датчиков – вибрационных микромеханических систем с архитектурой чувствительного элемента (ЧЭ), позволяющей одновременно определять более одной компоненты измеряемой характеристики движения (векторов переносного ускорения или угловой скорости). В отношении микромеханических гироскопов здесь следует указать работы передовых инженерных и исследовательских центров [3–8]. Одним из перспективных решений при разработке конструкции ЧЭ подобных сенсоров является использование особых свойств режимов упругих колебаний в телах с осевой симметрией – кольцах, пластинах, дисках [9].

Вопросам колебаний осесимметричных упругих тел (колец, пластинок, оболочек) в неинерциальных системах отсчета посвящено значительное число работ. Кроме уже упомянутых выше задач вибрационной гироскопии, подобные постановки широко известны в роторной динамике [10–14]. В подавляющем большинстве исследований этого класса рассматривается случай совпадения направления вектора угловой скорости с осью симметрии упругого тела (диска), что приводит к возникновению в нем предварительного напряженного состояния за счет действия центробежных сил инерции и изменению характеристик свободных и вынужденных изгибных колебаний.

Насколько известно авторам предлагаемой работы, в научной литературе ранее не исследовались задачи динамики круглых пластинок (в частности, их кососимметричных колебаний) при совместном действии гироскопических и центробежных сил инерции, вызванных вращением системы вокруг некоторой оси, не совпадающей с осью симметрии пластинки.

В настоящей работе исследуются особые свойства гироскопически связанных плоско-поперечных колебаний тонкой круглой пластинки и рассматривается возможность их использования для определения величины и направления проекции на плоскость пластинки вектора угловой скорости подвижного объекта, на котором установлен резонатор. Иными словами, изучаются перспективы применения чувствительного элемента указанной формы в новых архитектурах двухосевых микроэлектромеханических гироскопов.

Математическая модель

Рассматривается задача об эволюции кососимметричных изгибных колебаний круглой пластинки с концентричным отверстием, зашумленной по внутреннему краю и свободной по внешнему краю, в неинерциальной системе отсчета, движение которой представляет собой вращение вокруг некоторой оси, расположенной в плоскости пластинки. Графическая схема исследуемой задачи приведена на рис. 1.

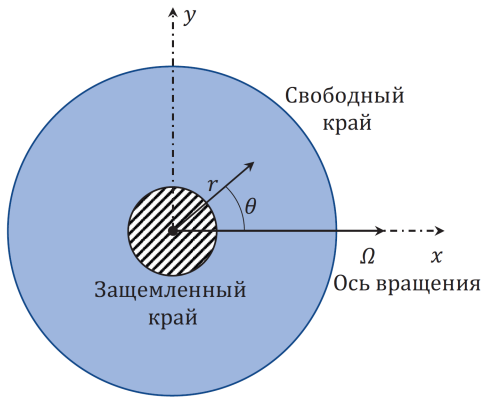


Рис. 1. Графическая схема рассматриваемой задачи.

Для вывода уравнений движения системы применим интегральный вариационный принцип Гамильтона-Остроградского:

$$(1) \quad 0 = \int_0^t (\delta T - \delta \Pi) dt, \quad (2)$$

где T и Π - кинетическая и потенциальная (упругая) энергии пластинки, d и δ - операторы дифференцирования и варьирования соответственно, t - время.

При определенных допущениях получим следующую систему свободных плоско-поперечных колебаний пластинки:

$$\begin{aligned} c^2 \left[u_{rr} - \frac{\nu}{r^2} (v_\theta + u) + \frac{\nu}{r} (v_{r\theta} + u_r) + \frac{1-\nu}{2r^2} (u_{\theta\theta} + rv_{r\theta} - 3v_\theta - 2u) + \frac{1-\nu}{r} u_r \right] &= \ddot{u} - 2\Omega \dot{w} \sin \theta, \\ c^2 \left[\frac{1-\nu}{2r^2} (u_\theta + rv_r - v) + \frac{1}{r} (u_{r\theta} + rv_{rr}) + \frac{\nu}{r} u_{r\theta} + \frac{1}{r^2} (v_{\theta\theta} + u_\theta) \right] &= \ddot{v} - 2\Omega \dot{w} \cos \theta, \\ D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} &= -2\rho h \Omega (\dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

где введены обозначения $c^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Предметом исследования является изучение качественных особенностей решений системы уравнений (2) для частного случая эволюции начально сообщенной пластинке некоторой кососимметричной формы изгибных колебаний при действии гироскопических сил (сил Кориолиса), вызванных малой по отношению к частоте возбужденных изгибных колебаний угловой скоростью вращения системы.

Анализ гироскопически связанных плоско-поперечных колебаний пластинки

Исследование эволюции некоторой начально возбужденной формы изгибных колебаний выполним с помощью приближенного (проеекционного) метода Бубнова-Галеркина. Будем искать решение для поперечной компоненты поля перемещений пластинки в виде

$$w(r, \theta, t) = R_{nk}(r) [\eta(t) \cos n\theta + \zeta(t) \sin n\theta], \quad (4)$$

где n, k - индексы осевой симметрии и радиальной изменяемости рассматриваемой формы колебаний; $\eta(t), \zeta(t)$ - подлежащие определению модальные координаты; $R_{nk}(r)$ - функция радиальной координаты, определяемая решением задачи на собственные значения для уравнения свободных изгибных колебаний пластинки на неподвижном основании.

Подстановка (3) в первые два уравнения системы (2), разрешение полученных краевых задач и последующее применение проекционной процедуры к третьему уравнению системы (2) позволяет установить, что распределение поля перемещений по пластинке в режиме свободных колебаний имеет вид

$$w(r, \theta, t) = R_{nk}(r) [\cos(\theta + \gamma) \cos \Delta_\omega t \cos \omega_m t + \cos(\theta - \gamma) \sin \Delta_\omega t \sin \omega_m t], \quad (5)$$

где угол γ определяет ориентацию возбужденной формы колебаний по отношению к направлению вектора угловой скорости Ω ; ω_m - среднее арифметическое частот двух гироскопически расщепленных осцилляторов для модальных координат η, ζ ; $2\Delta_\omega$ - величина частотного расщепления.

Имея ввиду разработку модели датчика угловой скорости, рассмотрим зависимость от времени движения точки на внешней (свободной) кромке пластинки в принимаемом известном направлении пучности начально возбужденной формы колебаний $\theta = -\gamma$:

$$W(t) \equiv w(1, -\gamma, t) = R_{11}(1) [\cos \Delta_\omega t \cos \omega_m t + \cos(2\gamma) \sin \Delta_\omega t \sin \omega_m t], \quad (6)$$

Как видно из полученного выражения, колебания в точке съема выходного сигнала представляют собой амплитудно-модулированные биения с частотой огибающей Δ_ω и относительной глубиной модуляции $1 -$

$|\cos 2\gamma|$. Характер этих колебаний показан на рис. 2

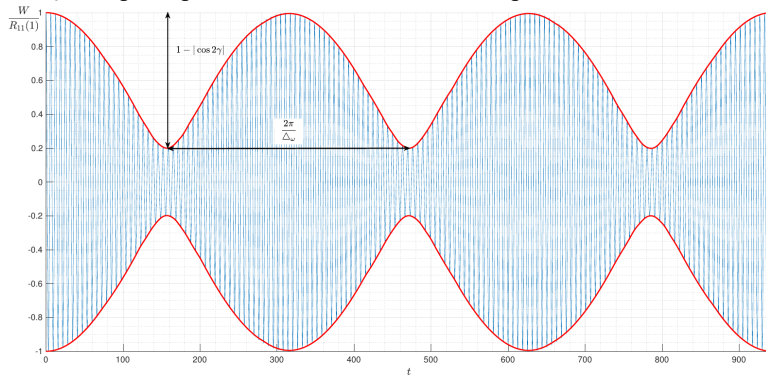


Рис. 2. Вид зависимости от времени колебаний в точке съема выходного сигнала.

Из сказанного следует, что возникает принципиальная возможность определения амплитуды и направления вектора угловой скорости Ω (или, как отмечено выше, в общем случае – его проекции на плоскость пластинки) по измеряемым характеристикам колебаний в некоторых точках пластинки: частота биений $\Delta\omega$ пропорциональна квадрату модуля вектора угловой скорости Ω^2 ; параметр глубины амплитудной модуляции $\cos 2\gamma$ связан с направлением этого вектора.

Заключение

В настоящей работе была впервые построена математическая модель связанных плоско-поперечных колебаний круглой тонкой пластинки с концентричным отверстием при действии кориолисовых и центробежных сил инерции, вызванных вращением системы вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки. Уравнения колебаний в частных производных получены с применением вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. В предположении малости угловой скорости вращения по отношению к частоте рабочей кососимметричной изгибной формы колебаний пластинки найдено приближенное аналитическое решение как для радиальной и окружной, так и для поперечной компонент поля перемещений в режиме свободных колебаний. С помощью проекционного метода Галеркина задача была сведена к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка для модальных координат взаимно ортогональных базисных кососимметричных форм колебаний пластинки. Обнаружено, что режим начально возбужденных гармонических колебаний при наличии вращения преобразуется в режим амплитудно-модулированных биений. Найдены аналитические выражения как для частоты медленной огибающей биений, так и для относительной глубины их амплитудной модуляции. Показана принципиальная возможность определения модуля проекции вектора угловой скорости на плоскость пластинки по измеряемой величине частоты огибающей.

Литература

1. Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Том 28. №2 (109). С. 3-10. DOI 10.17285/0869-7035.0028
2. Indeitsev, D. A., Belyaev, Y. V., Lukin, A. V., Popov, I. A., Igumnova, V. S., & Mozhgova, N. V. (2021). Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope. *Nonlinear Dynamics*, 105(2). <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06664-0>
3. Tsai, D. H., & Fang, W. (2006). Design and simulation of a dual-axis sensing decoupled vibratory wheel gyroscope. *Sensors and Actuators, A: Physical*, 126(1), 33–40. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2005.09.004>
4. Johari, H., Shah, J., & Ayazi, F. (2008). High frequency xyz-axis single-disk silicon gyroscope. *Proceedings of the IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, 856–859. <https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2008.4443791>
5. Vigna, B. (2011). Tri-axial MEMS gyroscopes and six degree-of-freedom motion sensors. *Technical Digest - International Electron Devices Meeting, IEDM*. <https://doi.org/10.1109/IEDM.2011.6131635>
6. Cao, H., Zhao, R., Cai, Q., Shi, Y., & Liu, L. (2020). Structural Design and Simulation Analysis of Silicon Micro Triaxial Wheel-ring Gyroscope. *International Conference on Sensing, Measurement and Data Analytics in the Era of Artificial Intelligence, ICSMD 2020 - Proceedings*, 130–132. <https://doi.org/10.1109/ICSMD50554.2020.9261699>
7. Takahashi, H., Abe, K., Takahata, T., & Shimoyama, I. (2020). MEMS triaxial gyroscope using surface and sidewall doping piezoresistors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 30(10). <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab9e4d>
8. Sedebo, G. T., Shatalov, M. Y., Joubert, S. v., & Shafi, A. A. (2022). The Dynamics of a Three-Dimensional Tuning Functionally Graded Plate Gyroscope. *Mechanics of Solids*, 57(6), 1577–1589. <https://doi.org/10.3103/S0025654422060267>
9. Smirnov, A. (June 1, 1989). "Free Vibrations of the Rotating Shells of Revolution." *ASME. J. Appl. Mech.* June 1989; 56(2): 423–429. <https://doi.org/10.1115/1.3176100>
10. Nayfeh, A. H., Jilani, A., & Manzione, P. (2001). Transverse Vibrations of a Centrally Clamped Rotating Circular Disk. In *Nonlinear Dynamics (Vol. 26)*.
11. Hamidzadeh, H. R. (2007). Non-linear free transverse vibration of thin rotating discs. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, 221(3), 467–473. <https://doi.org/10.1243/14644193JMBD46>
12. Angoshtari, A., & Jalali, M. A. (2007). On the existence of chaotic circumferential waves in spinning disks. *Chaos*, 17(2). <https://doi.org/10.1063/1.2735813>
13. Hu, Y., & Wang, T. (2015). Nonlinear resonance of the rotating circular plate under static loads in magnetic field. *Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition)*, 28(6), 1277–1284. <https://doi.org/10.3901/CJME.2015.0720.097>
14. Kang, J. H. (2017). Axisymmetric Vibration of Rotating Annular Plate with Variable Thickness Subjected to Tensile Centrifugal Body Force. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 17(9). <https://doi.org/10.1142/S0219455417501012>

ВЗАИМОВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НИТИ МАЯТНИКА

Малашин А.А.^{1,2}, Остромогильский А.Д.¹

1 - МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2 - МГТУ им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал

malashin_a@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о колебаниях маятника на гибкой, растяжимой нити. Уравнения движения нити представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Для решения предложен новый метод решения данной нелинейной задачи, позволяющий разделять низкочастотные и высокочастотные поперечные и продольные колебания, возникающие в нити. Исследовано взаимовлияние и выявлена передача энергии от колебаний груза к поперечным и продольным колебаниям нити. Также обнаружены явления резонанса между продольными и поперечными колебаниями нити маятника.

Работа выполнена при поддержке гранта РФ № 23-21-00230.

Введение

Интерес к подобной проблеме возник в связи с тем, что при колебаниях маятника на растягивающейся нити возникает нелинейный колебательный процесс с несколькими степенями свободы. В работах о колебаниях маятника с пружиной [1–3] были получены решения в нерезонансном случае и асимптотические решения в резонансе, которые показывают, что существует передача энергии между вертикальными и горизонтальными колебаниями. На резонансных частотах соотношение относительно горизонтального и вертикального направлений оказалось равным 1:2. В данной работе мы обсуждаем случай, когда в самой нити возникают продольные и поперечные колебания. Уравнения, описывающие движение маятника на гибкой эластичной нити, являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Практический интерес изучения данного вопроса заключается в том, что при наличии в системе внутреннего резонанса она становится чувствительна к внешним возмущениям, что может привести к нежелательной потере устойчивости или даже к хаотическому движению.

Постановка задачи

Уравнения движения этой системы

$$\begin{cases} \rho_0 F_0 x_{tt} = (T \cos \gamma)_s + \rho_0 F_0 g, \\ \rho_0 F_0 y_{tt} = (T \sin \gamma)_s, \end{cases}$$

$\gamma(s, t)$ — угол между ортом \mathbf{t} и вектором \mathbf{p} , касательным к нити, $F_0(s)$ и $\rho_0(s)$ — площадь поперечного сечения и плотность материала нити в начальный момент времени соответственно, T — модуль напряжения s – лагранжева координата

Деформация нити и углы наклона к первоначальному положению вдоль оси X определяются из следующих соотношений

$$\begin{cases} e(s, t) = \sqrt{(1 + x_s)^2 + y_s^2} - 1 \\ 1 + x_s = (e + 1) \cos \gamma, \\ 1 + y_s = (e + 1) \sin \gamma. \end{cases}$$

Рассматривается линейно-упругий материал: $T = EF_0 e$.

Граничные условия в общей постановке задачи о маятнике (верхний конец закреплён, на нижнем — динамическое граничное условие) имеют вид

$$\begin{cases} x|_{s=0} = 0, \\ y|_{s=0} = 0, \\ mx_{tt}|_{s=L} = -(T \cos \gamma)|_{s=L} + mg, \\ my_{tt}|_{s=L} = -(T \sin \gamma)|_{s=L}. \end{cases}$$

m — масса точечного груза, подвешенного на конце нити, L — длина нити в недеформированном состоянии.

Анализ безразмерных параметров задачи показывает, что в рассматриваемой системе существует несколько характерных времен — период колебания маятника, время распространения продольных волн вдоль нити, а также время распространения поперечных волн. Предложен новый асимптотический метод построения аналитического решения, учитывающего как быстрые высокочастотные, так и медленные низкочастотные перемещения, когда применение малого параметра приводит к изменению типа уравнения в частных производных. Получены решения системы уравнений. Исследовано влияние собственных колебаний маятника на продольные и поперечные колебания нити. Также получено численное решение этой нелинейной системы

уравнений и проведено сравнение с аналитическим решением. Показано, что маятниковая система на гибкой эластичной нити описывается движением, характерным для качающейся пружины, при выполнении следующих условий: малое отношение массы нити к массе груза, отсутствие падения натяжения до нуля и отсутствие начальных нелинейных возмущений. В первом приближении найдены частотные поправки к колебаниям качающейся пружины, которые возникают, если учитывать волновые процессы в нити. Получается, что чем меньше натяжение, тем больше амплитуда поперечных колебаний нити. В частности выявлено, что падение натяжения приводит к неустойчивости колебаний вдоль одной оси. Также выявлена передача энергии от продольных колебаний груза к поперечным колебаниям нити. В проведенных численных экспериментах удалось зафиксировать значительное увеличение амплитуды поперечных отклонений нити. Аналитически показано, что параметрический резонанс между собственными колебаниями маятника и продольно-поперечными колебаниями нити отличается от классического, поскольку частоты этих колебаний имеют разный порядок. Возникновение подобных резонансов возможно в протяженных системах, например, тросовых космических системах, развернутых на околоземных орбитах. Влияние собственных колебаний пружинного маятника на поперечные и продольные колебания нити в случае отсутствия резонанса и при резонансе между поперечными и продольными колебаниями нити показано на рис. 1, 2.

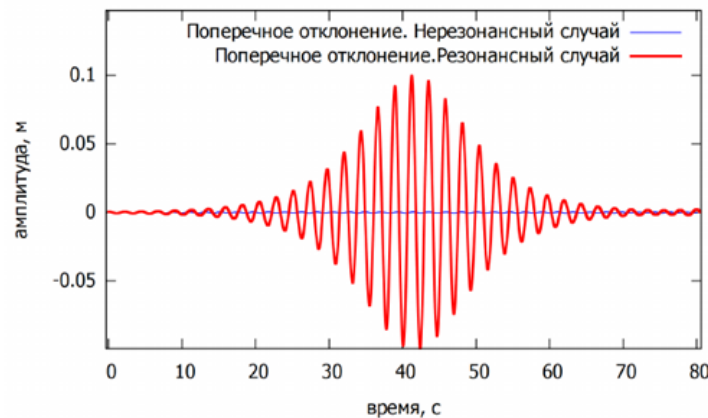


Рис. 1. Амплитуда поперечных колебаний средней точки нити маятника в случае отсутствия резонанса и при резонансе между поперечными и продольными колебаниями.

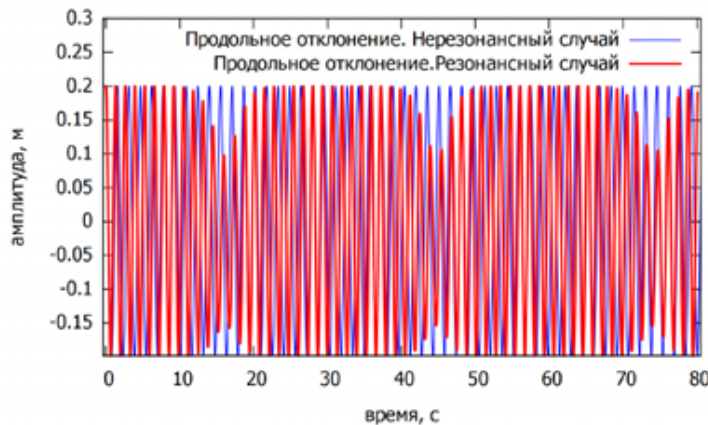


Рис. 2. Амплитуда продольных колебаний средней точки нити маятника. Резонанс в случае падения натяжения в нити.

Заключение

В работе предложен и численно подтвержден асимптотический метод для решения задач для волнового уравнения для низкочастотного и высокочастотного приближения. В первом приближении найдены частотные поправки к колебаниям качающейся пружины, которые возникают, если учесть волновые процессы в нити. В рассмотренной задаче возникают поперечные колебания нити, чем меньше натяжение в нити, тем больше амплитуда поперечных колебаний нити. Падение натяжения может приводить к неустойчивости колебаний. Выявлена перекачка энергии из продольных колебаний груза и нити в поперечные колебания нити. Численные расчеты показывают значительный рост амплитуды поперечных отклонений.

Литература

1. Nayfeh A.H. (1973) Perturbation Methods. N. Y.: Wiley.
2. Awrejcewicz J., Petrov A.G. (2008) Nonlinear oscillations of an elastic two-degrees-of freedom pendulum. Nonlinear Dynamics. V. 53. № 1-2.
3. Петров А.Г. “Нелинейные колебания качающейся пружины при резонансе”, изв. РАН, МТТ, 2006, №5, с. 18-28.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СЛАБОСВЯЗАННЫХ МИКРОБАЛОЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ЭЛЕКТРОТЕПЛОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Можгова Н.В., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург,
Россия

nmojgova@yandex.ru

Аннотация. В работе проведено исследование нелинейной динамики изгибных колебаний двух слабосвязанных балочных микрорезонаторов при электротеплом параметрическом возбуждении. Получено гармоническое установившееся распределение температуры в объеме резонатора в частотной области. Выведена система уравнений механически связанных балочных резонаторов с учетом осажденной частицы на один из них, а также неодинаковости массово-инерционных характеристик резонаторов. С помощью асимптотических методов нелинейной динамики получены уравнения в медленных переменных, которые были исследованы методами теории бифуркаций. Получены зоны возможной раскачки параметрических колебаний, а также амплитуды установившихся режимов для обоих резонаторов. Показано, что малое различие в массово-инерционных характеристиках резонаторов приводит к существенному изменению в амплитудах установившихся режимов для каждого резонатора, что может быть использовано с целью детектирования массы частицы, осажденной на один из чувствительных элементов.

Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4577.2022.1.1.

Введение

Сильная зависимость спектральных характеристик микро-/наноэлектромеханических систем (МЭМС/НЭМС) от физических и эксплуатационных параметров, а также от параметров среды широко используется в радиочастотных переключателях, фильтрах [1], резонансных акселерометрах [2] и гироскопах [3, 4], а также в биохимических датчиках газа и массы [5, 6], для которых была продемонстрирована чувствительность порядка зептограмм (10^{-21} г) [7]. В то время как первые резонансные МЭМС в основном работали в линейном режиме, в последние годы нелинейные резонаторы вызвали значительный интерес из-за их потенциала для улучшения характеристик [8–10]. В частности, было показано, что устройства с параметрическим возбуждением обладают многими полезными свойствами [11]. В наиболее изученных и широко используемых устройствах с электростатическим приводом параметрическое возбуждение колебаний достигается за счет модуляции эффективной электростатической жесткости, регулируемой напряжением [10]. Недостатком таких систем является необходимость расположения электрода в непосредственной близости к чувствительному элементу, что понижает надежность и повышает риск реализации неустойчивости по механизму схлопывания. В данной работе параметрическое возбуждение колебаний достигается за счет пропускания переменного (гармонического) электрического тока через балку [12], что приводит к джоулевому электротермическому нагреву балки и генерации зависящей от времени осевой силы, модулирующей эффективную жесткость балки. Также всё большее распространение в современной индустрии МЭМС находит использование коллективных динамических свойств чувствительных элементов, что позволяет улучшить выходные характеристики широкого класса датчиков физических величин [13]. Слабая механическая связь между резонаторами позволяет использовать явление модальной локализации колебаний двух резонаторов [14, 15].

Модель связанных микрорезонаторов

В работе рассматривается система из двух заделанных с двух сторон микробалочных резонаторов (рис. 1), связанных механически через тонкую упругую перемычку, изгибная жесткость которой много меньше изгибной жесткости резонаторов.

Геометрические параметры резонаторов подобраны таким образом, что длина L и ширина b резонаторов одинаковы, а для учета неодинаковости толщин введен параметр $n_{\%} = h_2/h_1 - 1$. Предполагается, что $h_{1,2} \ll L$ и что прогибы резонаторов в процессе колебаний много больше их толщин $h_{1,2}$, так что модель учитывает растяжение средней плоскости. Параметрические колебания возбуждаются путем неравномерного по длине и времени нагрева микробалочных элементов вследствие протекания электрического тока J гармонического вида (1):

$$(1) \quad J = \frac{V_{DC} + V_{AC} \cos \omega t}{\rho_e L}, \quad (2)$$

где V_{DC} – амплитуда постоянной компоненты напряжения, V_{AC} и ω – амплитуда и частота переменной компоненты напряжения, ρ_e – удельное сопротивление материала балки.

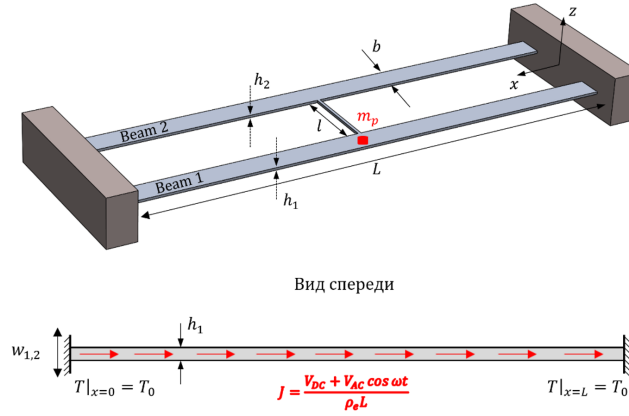


Рис. 1. Модель слабосвязанных микрорезонаторов с иллюстрацией механизма возбуждения.

Тепловая задача

Важным предварительным этапом для параметрического анализа нелинейной динамики рассматриваемой системы является нахождение распределения температуры в объеме резонаторов. Нестационарное одномерное уравнение теплопроводности по оси балки $x \in [0, L]$:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k} Q(x, t), \quad \text{ГУ: } T|_{x=0} = T_0, \quad T|_{x=L} = T_0, \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ – температуропроводность, k – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость материала, x – координата вдоль оси балки, $T(x)$ – температура в данной точке балки, T_0 – отсчетная температура, t – время, $Q(x, t) = J^2 \rho_e$ – объемное тепловыделение в балке вследствие протекания тока.

Статическая компонента установившегося распределения температуры в балке:

$$T_s(x) = -\frac{V_{DC}^2 + \frac{1}{2}V_{AC}^2}{2k\rho_e L^2}(x^2 - Lx) + T_0. \quad (4)$$

Установившееся гармоническое распределение температуры в балке может быть найдено в частотной области, для этого задача записывается в комплексной форме [16]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_d(x, \omega) &= \tilde{T}_{d1}(x, \omega) + \tilde{T}_{d2}(x, \omega) \\ \frac{\partial^2 \tilde{T}_{d1}}{\partial x^2} - \sigma^2 \tilde{T}_{d1} &= -\frac{1}{k} \tilde{Q}_{d1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{T}_{d2}}{\partial x^2} - \sigma^2 \tilde{T}_{d2} = -\frac{1}{k} \tilde{Q}_{d2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma^2 = \frac{i\omega}{\alpha}$ и $\tilde{Q}_{d1} = 2 \frac{2V_{DC}V_{AC}}{\rho_e L^2}$, $\tilde{Q}_{d2} = 2 \frac{\frac{1}{2}V_{AC}^2}{\rho_e L^2}$.

Физическое распределение температуры при этом:

$$T_d(x, t, \omega) = \text{Re}\{\tilde{T}_{d1}(x, \omega) \exp i\omega t\} + \text{Re}\{\tilde{T}_{d2}(x, \omega) \exp 2i\omega t\}. \quad (6)$$

Решение гармонической задачи может быть записано с помощью функции Грина:

$$\tilde{T}_{d1,2}(x, \omega) = \frac{\alpha}{k} \int_0^L G_{x11}(x|x'; \omega) \tilde{Q}_{d1,2}(x', \omega) dx', \quad (7)$$

где функция Грина $G_{x11}(x|x'; \omega)$ при данных граничных условиях [14]:

$$G_{x11}(x|x'; \omega) = \frac{e^{-\sigma(2L-|x-x'|)} - e^{-\sigma(2L-x-x')}}{2\alpha\sigma(1 - e^{-2\sigma L})} + \frac{e^{-\sigma(|x-x'|)} - e^{-\sigma(x+x')}}{2\alpha\sigma(1 - e^{-2\sigma L})}.$$

Полученное решение для распределения температуры в объеме резонаторов было верифицировано путем сравнения с численным решением задачи нестационарной теплопроводности в ПК COMSOL Multihsyics. На рис. 2 представлена зависимость вида распределения температуры по оси балки от частоты переменной компоненты напряжения.

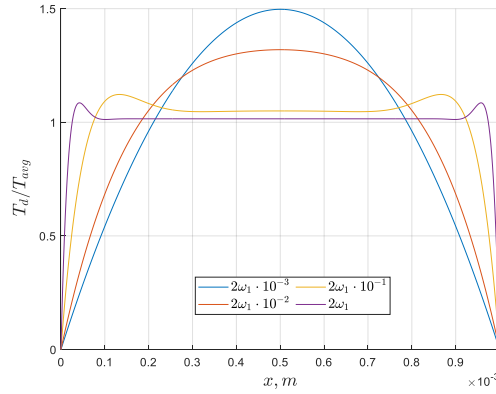


Рис. 2. Зависимость вида распределения температуры вдоль балки от частоты тока.

Уравнения механических колебаний

Для вывода уравнений колебаний используется принцип Гамильтона, после ввода безразмерных параметров $\hat{w}_{1,2} = w_{1,2}/h_1$ и $\hat{x} = x/L$, была получена система уравнений (7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 \hat{w}_1}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \hat{t}^2} + m_{non} \delta \left(\hat{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \hat{t}^2} + \mu_{non} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{t}} - \left(N_{non,th} + 6 \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \hat{x}^2} + \\ \quad \kappa_{non} (\hat{w}_1 - \hat{w}_2) \delta \left(\hat{x} - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ (1 + n_{\%})^3 \frac{\partial^4 \hat{w}_2}{\partial \hat{x}^4} + (1 + n_{\%}) \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \hat{t}^2} + \mu_{non} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{t}} - \left(N_{non,th} + 6(1 + n_{\%}) \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \hat{x}^2} + \\ \quad - \kappa_{non} (\hat{w}_1 - \hat{w}_2) \delta \left(\hat{x} - \frac{1}{2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

где параметры введены следующим образом:

$$\hat{t} = \frac{t}{t_{sc}}, \quad t_{sc} = \sqrt{\frac{\rho S_1 L^4}{EI_1}}, \quad N_{non,th} = \frac{N_{th}}{N_{sc}}, \quad N_{th} = -ES\alpha(T(x) - T_0), \quad N_{sc} = \frac{EI_1}{L^2}, \quad \kappa_{non} = \frac{\kappa}{\kappa_{sc}}, \\ \kappa_{sc} = \frac{EI_1}{L^3}, \quad \mu_{non} = \frac{\mu}{\mu_{sc}}, \quad \mu_{sc} = t_{sc} \cdot \frac{EI_1}{L^4}, \quad m_{non} = \frac{m_p}{m_{sc}}, \quad m_{sc} = \rho S_1 L.$$

Система (7) при помощи стандартной процедуры метода Галёркина [17] приводится к системе ОДУ второго порядка, к которой применяется метод многих масштабов для получения систем уравнений в медленных переменных [18]. Далее к полученным системам уравнений применяются методы теории бифуркаций [19] для продолжения установившихся режимов по параметрам амплитуд постоянной и переменной компонент напряжения, частоты возбуждения колебаний, параметра неодинаковости резонаторов, а также массе частицы m_p , осажденной на один из резонаторов.

Заключение

В результате изучения динамики параметрических изгибных колебаний в системе двух слабо связанных балочных резонаторов получена зона возможной раскачки параметрических колебаний, а также найдены амплитуды установившихся режимов для обоих резонаторов. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что рассматриваемая система может быть использована в качестве чувствительного элемента микромеханического детектора массы. Измерение массы частицы предлагается производить на основе изменения амплитудных соотношений колебаний двух резонаторов при наличии массово-инерционных различий, возникающих в результате осаждения частицы на один из элементов системы.

Литература

1. Rebeiz G.M. RF MEMS: theory, design, and technology. – John Wiley & Sons, 2004.
2. Liu H., Zhang Y., Wu J. Structural Design and Testing of a Micromechanical Resonant Accelerometer //Micromachines. – 2022. – Т. 13. – №. 8. – С. 1271.
3. Acar C., Shkel A. MEMS vibratory gyroscopes: structural approaches to improve robustness. – Springer Science & Business Media, 2008.
4. Indeitsev D. A. et al. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope //Nonlinear Dynamics. – 2021. – Т. 105. – С. 1273-1296.
5. Song J. et al. A Novel Mass Sensor Based on Parametrically Excited Mode-Localized Resonators //International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 2022. – Т. 86298. – С. V008T08A008.
6. Yaqoob U. et al. Highly selective multiple gases detection using a thermal-conductivity-based MEMS resonator and machine learning //IEEE Sensors Journal. – 2022. – Т. 22. – №. 20. – С. 19858-19866.
7. Yang Y. T. et al. Zeptogram-scale nanomechanical mass sensing //Nano letters. – 2006. – Т. 6. – №. 4. – С. 583-586.

8. Lifshitz R., Cross M. C. Nonlinear dynamics of nanomechanical and micromechanical resonators //Reviews of nonlinear dynamics and complexity. – 2008. – Т. 1. – №. 1.
9. Kacem N. et al. Nonlinear dynamics of nanomechanical beam resonators: improving the performance of NEMS-based sensors //Nanotechnology. – 2009. – Т. 20. – №. 27. – С. 275501.
10. Rhoads J. F., Shaw S. W., Turner K. L. Nonlinear dynamics and its applications in micro-and nanoresonators //Journal of dynamic systems, measurement, and control. – 2010. – Т. 132. – №. 3.
11. Rhoads J. F., Guo C., Fedder G. K. Parametrically Excited Micro-and Nanosystems //Resonant MEMS: fundamentals, implementation and application. – 2015. – С. 73-95.
12. Torteman B. et al. Micro-beam resonator parametrically excited by electro-thermal Joule's heating and its use as a flow sensor //Nonlinear Dynamics. – 2019. – Т. 98. – С. 3051-3065.
13. Hajjaj A. Z. et al. Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances //International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2020. – Т. 119. – С. 103328.
14. Dick N., Krylov S. Parametric resonance and pattern selection in an array of microcantilevers interacting through fringing electrostatic fields //Nonlinear Dynamics. – 2021. – С. 1-21.
15. Wallin C. B. et al. Nondegenerate parametric resonance in large ensembles of coupled micromechanical cantilevers with varying natural frequencies //Physical review letters. – 2018. – Т. 121. – №. 26. – С. 264301.
16. Beck J. V. et al. Heat conduction using Green's function. – Taylor & Francis, 1992.
17. Younis M. I. MEMS linear and nonlinear statics and dynamics. – Springer Science & Business Media, 2011. – Т. 20.
18. Nayfeh A. H., Mook D. T. Nonlinear oscillations. – John Wiley & Sons, 2008.
19. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A. MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs //ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2003. – Т. 29. – №. 2. – С. 141-164.

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОЛОННЫ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

Муницын А.И.

Национальный Исследовательский Университет "МЭИ"
munitsyn@rambler.ru

Аннотация. В работе приводится решение задачи о колебаниях цилиндрической колонны на жестком горизонтальном основании. Предполагается, что основание движется в горизонтальном направлении, проскальзывание между колонной и основанием отсутствует и высота колонны существенно больше диаметра основания. Для двух законов движения основания находятся режимы пространственных колебаний колонны, соответствующие основному резонансу. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных характеристик. Показано, что решения, соответствующие движению колонны в плоскости возбуждения колебаний, являются неустойчивыми.

Введение

Исследование движения твердого тела на горизонтальной опорной поверхности представляет большой интерес для приложений в технике. Задача о колебаниях твердого тела в форме параллелепипеда на вибрирующем основании впервые была рассмотрена в работе [1] применительно к задачам сейсмоустойчивости. Существуют и другие технические области применения данной задачи, например, задача о движении деталей на конвейере. В своей статье 1963 г. G. Housner, анализируя отчеты о ряде землетрясений, обратил внимание на тот факт, что сильно вытянутые в высоту сооружения благополучно выдерживают землетрясения, несмотря на неустойчивый внешний вид. Объяснение этого явления заключается в существовании устойчивых режимов колебаний, при котором тело последовательно опирается на ребра основания. В этой работе и большом числе последующих в качестве модели рассматривалось тело в форме параллелепипеда, хотя большинство рассмотренных сооружений (водонапорные баки, каменные колонны) имеют основание в виде круга.

Рассмотрим движение твердого тела в форме колонны круглого поперечного сечения на горизонтальной опорной поверхности, совершающей гармонические колебания в горизонтальном направлении. Твердое тело на опорной поверхности при отсутствии проскальзывания является системой с двумя степенями свободы. В положении равновесия центральная ось колонны совпадает с нормалью к опорной плоскости, а нижнее основание полностью опирается на плоскость. При движении ось колонны отклоняется от вертикали на некоторый угол α (рис. 1). Полагаем, что проскальзывание в точке контакта колонны с плоскостью отсутствует, и, кроме того, колонна не может вращаться относительно вертикальной оси. Такая постановка задачи соответствует случаю учета сил взаимодействия между основанием и колонной по модели сухого трения, при конечной площади пятна контакта и достаточно большом значении коэффициента трения.

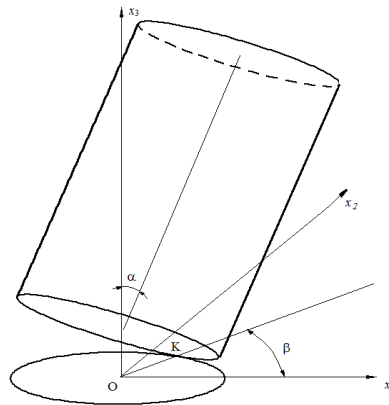


Рис. 1. Расчетная схема.

Введем еще одно предположение, считая колонну сильно вытянутой в вертикальном направлении, то есть, полагая отношение радиуса основания к половине высоты колонны малой величиной $c = r/h \ll 1$.

В качестве обобщенных координат принимаем α_1, α_2 – углы поворота оси колонны относительно осей Ox_1, Ox_2 связанных с подвижным основанием. В силу последнего предположения $\alpha_1, \alpha_2 \ll 1$ и можно полагать $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Кинетическая энергия системы $T = J(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2)/2$. Для вытянутой в высоту колонны полагаем $J_{x_1} = J_{x_2} = J$.

Потенциальная энергия системы $\Pi = mg\sqrt{h^2 + r^2} \cos(\gamma - \alpha)$, где m – масса, g – ускорение свободного падения, γ – угол между осью колонны и линией, соединяющей центр масс колонны C с точкой контакта.

Обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{01} m \sqrt{h^2 + r^2} \cos(\gamma - \alpha_1) \cos(\theta_0 t), \\ Q_2 &= Q_{02} m \sqrt{h^2 + r^2} \cos(\gamma - \alpha_2) \cos(\theta_0 t + \varphi_0), \end{aligned}$$

где θ_0 – частота колебаний основания, $Q_{01}, Q_{02}, \varphi_0$ – амплитуды и фаза движения основания в двух ортогональных направлениях.

Подставляя полученные значения в уравнения Лагранжа второго рода, получаем уравнения движения системы

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 - \alpha_1 + c\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-1/2} + \eta\dot{\alpha}_1 + a_1 \cos(\theta\tau) &= 0, \\ \ddot{\alpha}_2 - \alpha_2 + c\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-1/2} + \eta\dot{\alpha}_2 + a_2 \cos(\theta\tau + \varphi_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = t\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{mgh/J}$, безразмерные амплитуда и частота возбуждения колебаний $a_i = Q_{0i}/g$, $\theta = \theta_0/\omega_0$, $i = 1, 2$. Точкой обозначена производная по безразмерному времени. В уравнения движения введена диссипация по модели вязкого трения с безразмерным параметром трения η .

Система уравнений (1) описывает движение сильно нелинейной системы. При $a_1 = a_2 = 0$ и $\eta = 0$ получаем уравнение колебаний колонны на неподвижной плоскости, которое имеет два решения.

Первое решение, соответствует колебаниям колонны в плоскости расположенной под углом β к оси x_1 . Для одного периода колебаний это решение имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau) &= \cos \beta [c - (c - A)ch\tau], \quad \alpha_2(\tau) = \sin \beta [c - (c - A)ch\tau], \\ &\quad -\pi/2\omega \leq \tau \leq \pi/2\omega \\ \alpha_1(\tau) &= \cos \beta [c - (c - A)ch(\tau - \pi/\omega)], \quad \alpha_2(\tau) = \sin \beta [c - (c - A)ch(\tau - \pi/\omega)], \\ &\quad \pi/2\omega \leq \tau \leq 3\pi/2\omega \end{aligned} \quad (2)$$

где A, ω – амплитуда и частота свободных колебаний, связанные между собой зависимостью

$$A = c[1 - ch^{-1}(\pi/2\omega)] \quad (3)$$

При $\alpha_2 \equiv 0$ уравнения (1) совпадают с уравнением колебаний твердого тела в форме параллелепипеда на вибрирующем основании. Порождающее решение в этом случае совпадает с (2) при $\beta = 0$. В отличие от твердого тела в форме параллелепипеда цилиндрическая колонна может совершать свободные колебания в любой плоскости. Решение, полученное в [2] методом осреднения, описывает колебания цилиндрической колонны в плоскости возбуждения колебаний, однако требует дополнительного исследования устойчивости.

Второе решение описывает пространственные движения

$$\alpha_1(\tau) = A \cos \omega t, \quad \alpha_2(\tau) = A \sin \omega t. \quad (4)$$

В этом случае, основание колонны перекатывается по окружности с центром O на опорной плоскости (рис. 1). После подстановки (4) в (1) получаем зависимость амплитуды колебаний от частоты для этого решения

$$A = c/(1 + \omega^2) \quad (5)$$

Проведем в уравнениях (1) замену переменных

$$\alpha_1(\tau) = A \cos \beta, \quad \alpha_2(\tau) = A \sin \beta$$

Здесь $A > 0$ – угол отклонения оси колонны от вертикали, β – угол образованный радиус-вектором OK точки контакта с осью x_1 . Введем обозначения $\mu = \dot{A}$ – угловая скорость колонны относительно оси перпендикулярной OK и $\omega = \dot{\beta}$ – угловая скорость движения точки контакта по окружности с центром O на опорной плоскости.

Уравнения колебаний колонны в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= A(1 + \omega^2) - c - \eta\mu - a_1 \cos \beta \cos(\theta\tau) - a_2 \sin \beta \cos(\theta\tau + \varphi_0), \\ A\dot{\omega} &= -2\mu\omega - \eta\omega A + a_1 \sin \beta \cos(\theta\tau) - a_2 \cos \beta \cos(\theta\tau + \varphi_0), \\ \dot{A} &= \mu, \quad \dot{\beta} = \omega \end{aligned} \quad (6)$$

Далее рассматриваем задачу о вынужденных колебаниях колонны на подвижном основании в окрестности порождающего решения (4). В новых переменных это решение $\mu = 0, \beta = \omega\tau$, A и ω постоянные, связанные соотношением (5).

Рассмотрим частный случай $a_2 = 0$, при котором все точки опорной плоскости движутся вдоль прямой. Полагая $\beta = \theta\tau + \psi$ получаем систему уравнений, которая не содержит явно времени в правой части

$$\begin{aligned} 2\theta\dot{\mu} &= A(1 + \omega^2) - c - \eta\mu - \frac{1}{2}a_1 \cos \psi - \frac{1}{2}a_1 \cos(\chi + \psi) \\ 2\theta\dot{\omega} &= -\frac{2\mu\omega}{A} - \eta\omega + \frac{a_1}{2A} \sin \psi - \frac{a_1}{2A} \sin(\chi + \psi) \\ 2\theta\dot{A} &= \mu, \quad 2\theta\dot{\psi} = \omega - \theta \end{aligned} \quad (7)$$

Система дифференциальных уравнений (7) содержит в явном виде быструю переменную $\chi = 2\theta\tau$ в правой части. Воспользуемся методом осреднения, для чего полагаем малыми величину коэффициента вязкого трения $\eta/2\theta$, амплитуду возбуждения $a_1/4\theta$, угловую скорость $\mu/2\theta$ и частотную расстройку $(\omega - \theta)/2\theta$. В окрестности порождающего решения малым является слагаемое $A(1 + \omega^2) - c$ в первом уравнении. Функции A, μ, φ, ω являются медленными переменными безразмерного времени χ . Применяя процедуру осреднения и сохраняя за осредненными переменными прежние обозначения получаем

$$\begin{aligned} 2\theta\dot{\mu} &= A(1 + \omega^2) - c - \eta\mu - \frac{1}{2}a_1 \cos \psi \\ 2\theta\dot{\omega} &= -\frac{2\mu\omega}{A} - \eta\omega + \frac{a_1}{2A} \sin \psi \\ 2\theta\dot{A} &= \mu, \quad 2\theta\dot{\psi} = \omega - \theta \end{aligned} \quad (8)$$

Для установившихся колебаний полагаем левую часть уравнений (10) равной нулю. Зависимости $A(\theta)$ приведены на рис. 2 при отношении радиуса основания к половине высоты колонны $c = 0,1$, коэффициент трения $\eta = 0,1$. Кривым 2,3 соответствует амплитуда ускорения основания $a_1 = 0,04$, кривым 4,5 – $a_0 = 0,13$. Жирными линиями обозначены устойчивые решения. Зависимости $A(\theta)$ прилегают к кривой 1 – зависимости амплитуды от частоты свободных колебаний (5). Кривые 2 и 4 расположены ниже кривой 1 и соответствуют неустойчивым решениям с фазой $\psi \approx \pi$. Зависимости 3 и 5 имеют устойчивый и неустойчивый участок, граница между ними смещается вправо с увеличением амплитуды возбуждения.

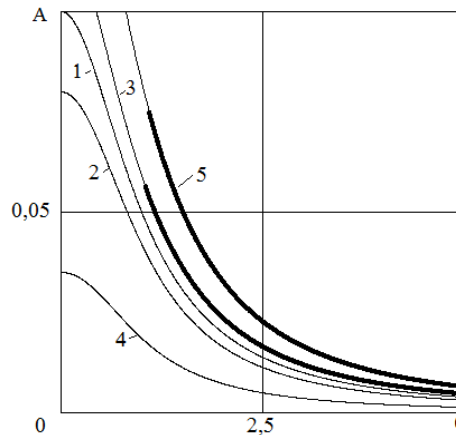


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика.

Заключение

При малых значениях амплитуды ускорения основания $a_1 < c$ и нулевых начальных условиях колонна остается в вертикальном положении, движение основания приводит только к перераспределению давления нижней грани колонны на опорную плоскость. При произвольных начальных условиях, либо больших амплитудах возбуждения, колонна может опрокинуться. Из анализа полученных результатов следует, что при малых частотах возбуждения колебаний существуют только эти два варианта движения системы.

При превышении частотой возбуждения некоторого критического значения, величина которого зависит от параметров задачи, для рассматриваемой системы существует устойчивое решение. При этом основание колонны перекачивается по окружности на опорной плоскости. Вид амплитудно-частотных зависимостей для колонны с круглым основанием и параллелепипеда [2] качественно совпадают, однако это совершенно разные кривые прилегающие к зависимостям (5) и (3) соответственно.

Литература

1. Housner G. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes // Bulletin of seismological society of America. 1963. Vol. 53. No. 2. P. 403–417.
2. Муницын А.И., Муницына М.А. Колебания твердого параллелепипеда на вибрирующем основании // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 1. С. 91–98.

МАЯТНИК КАПИЦЫ-УИТНИ

Полехин И.Ю.^{1,2,3,4}

1 - Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

2 - Московский физико-технический институт

3 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

4 - Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова

ivanpolekhin@mi-ras.ru

Аннотация. Рассматривается система, существенно обобщающая классическую систему «маятник Капицы» и представляющая собой плоский математический маятник на вибрирующем основании при наличии дополнительной горизонтальной периодической силы, период которой соизмерим с периодом вибрации, но ни величина, ни период которой не предполагаются малыми. Показывается, что для любой горизонтальной силы из рассматриваемого класса существуют периодические решения, вдоль которых маятник не падает (при условии, что вибрации точки подвеса имеют достаточно большую частоту). Исследуется устойчивость движений без падений.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-71-30012.

Введение

Задача о движении маятника с вибрирующей точкой подвеса – одна из наиболее изученных нелинейных динамических систем. Подобно другим классическим системам, например, уравнению Дуффинга или осцилятору Ван дер Поля, эта система, во-первых, достаточно проста, что позволяет проводить аналитическое исследование задачи, во-вторых, уже позволяет наблюдать нетривиальные динамические эффекты.

Аналогично системам Дуффинга и Ван дер Поля в исследовании маятника на вибрирующем основании исследования уходят далеко за границы первоначальных формулировок. Исторически задача о движении маятника на вибрирующем основании связана с именами Э. Стефенсона [1], Н.Н. Боголюбова [2] и П.Л. Капицы [3, 4]. Отметим и некоторые недавние работы, касающиеся этой актуальной темы [5–8]. Перечисление полной библиографии по задаче едва ли возможно, поэтому мы остановимся на упоминании работ [9, 10], в которых история вопроса изучается весьма подробно.

Для маятника на вибрирующем основании при наличии трения с помощью метода усреднения можно показать, что при определенных значениях параметров верхнее (обычно неустойчивое) положение равновесия становится устойчивым. Если в системе нет трения, то доказательство устойчивости использует КАМ-теорию [11]. Одним из возможных естественных обобщений этой системы является плоский математический маятник на вибрирующем основании в поле периодической по времени горизонтальной силы. Задачу о переворотном маятнике в поле горизонтальной силы, зависящей от времени, видимо, первым предложил Х. Уитни, поэтому такую систему можно называть «маятником Уитни».

Если горизонтальная сила является быстро осциллирующей, то ее влияние может быть эффективно изучено с помощью теории усреднения. Такая задача рассматривалась рядом авторов (см., например, [12]). Более общая постановка задачи не подразумевает, что горизонтальная сила имеет малый период. В [13] было показано, что для любой периодической силы, период которой соизмерим с периодом вертикальных вибраций, существует периодическое решение такое, что вдоль этого решения маятник не становится горизонтальным. В случае, когда горизонтальной силы нет, этим решением является верхнее положение равновесия. Это решение без падений может быть как устойчивым, так и неустойчивым (аналогично обычному маятнику Капицы).

Основные результаты

Основным объектом исследований является массивная точка, движущаяся по вертикальной окружности заданного радиуса в однородном поле силы тяжести при наличии в системе вязкого трения. Эту систему можно рассматривать в качестве модели математического маятника. Предполагается, что окружность совершает

вертикальные колебания по закону $h(t) = a \sin\left(\frac{t}{e}\right)$, где e - малый параметр, a - некоторый действительный

параметр. Для определенности будем считать, что $e = 1/N$, где N - натуральное число. Пусть также на систему действует горизонтальная 2π -периодическая сила $f(t)$.

Основным результатом является следующее утверждение: для любой силы $f(t)$ существует некоторое N_0 такое, что для всех $N > N_0$ существует 2π -периодическое решение, вдоль которого маятник никогда не становится горизонтальным и остается строго в верхней полуплоскости (не падает).

Доказательство следует из предложенного автором тополого-аналитического подхода к задачам усреднения, который является комбинацией топологического метода доказательства существования вынужденных колебаний с классическими аналитическими результатами Н.Н. Боголюбова об усреднении на конечном интервале времени.

Также будут представлены условия асимптотической устойчивости полученного решения без падений, обобщающие хорошо известное условие на параметр a , получающееся из теоремы Н.Н. Боголюбова об усреднении на бесконечном интервале времени. Часть результатов об устойчивости имеет аналитический характер, часть получена численно.

Заключение

В заключение отметим, что аналогичные результаты могут быть получены и для сферического маятника Капицы-Уитни [14]. В частности, остается верным утверждение о том, что у сферического маятника на вибрирующем основании есть решения без падений для любой горизонтальной периодической силы с соизмеримым периодом (при условии, что частота вибрации достаточно большая).

Литература

1. Stephenson A. On induced stability // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1908, vol. 15, no 86, pp. 233-236.
2. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР, 1950, вып. 14, с. 9-34.
3. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // *ЖЭТФ*, 1951, 21:5, с. 588-597.
4. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физических наук*, 1951, 44:5, с. 7-20.
5. Araujo G.C., Cabral H.E. Parametric Stability of a Charged Pendulum with an Oscillating Suspension Point // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2021, vol. 26, no 1, pp. 39-60.
6. Artstein Z. The pendulum under vibrations revisited // *Nonlinearity*, 2021, vol. 34, no 1, pp. 394-410.
7. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.M., Tovstik T.P. Classical Kapitza's problem of stability of an inverted pendulum and some generalizations // *Acta Mechanica*, 2021, pp. 1-17.
8. Cabral H.E., Carvalho A.C. Parametric stability of a charged pendulum with oscillating suspension point // *Journal of Differential Equations*, 2021, vol. 284, pp. 23-38.
9. Butikov E.I. On the dynamic stabilization of an inverted pendulum // *American Journal of Physics*, 2001, vol. 69, no 7, pp. 755-768.
10. Самойленко А.М. Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика // *УМН*, 1994, 49:5(299), с. 103-146.
11. Бардин, Б. С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // *Прикладная математика и механика*, 1995, 59:6, с. 922-929.
12. Burd V. *Method of averaging for differential equations on an infinite interval: theory and applications*. Chapman и Hall/CRC, 2007, 360 p.
13. Polekhin I.Y. The Method of Averaging for the Kapitza–Whitney Pendulum // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no 4, pp. 401-410.
14. Polekhin, I.Y. The Spherical Kapitza–Whitney Pendulum // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2022, 27:1, pp. 65-76.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Полищук А.Д.

ИжГТУ им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия
apolischuk@mail.ru

Аннотация. Устойчивость винтовых цилиндрических пружин исследуется динамическим методом на основе уравнений Кирхгофа-Клебша, модель Бернулли-Эйлера. Кроме классической эйлеровской потери устойчивости описываются и неклассические случаи потери устойчивости: местная, потеря устойчивости с восстановлением.

Для винтовых цилиндрических пружин и пружинных механизмов характерны и играют важную роль динамические явления: колебания, устойчивость и удар. Помимо классических видов потери устойчивости, для пружин и пружинных механизмов возможны явления, связанные с потерей устойчивости необычных типов. Устойчивость исследуется динамическим методом.

Взаимосвязанные пространственные колебания винтовых цилиндрических пружин анализируются на основе уравнений Кирхгофа-Клебша (модель Бернулли-Эйлера), в обозначениях П.Е. Товстика [1]. Рассматриваются малые колебания относительно больших предварительных деформаций, учитываются предварительное поджатие и закрутка пружины.

Система координат естественная, связана с винтовой линией пружины, рис. 1. Координаты: χ – нормаль, ξ – бинормаль, ρ – тангенциальная координата.

Основные параметры пружины, используемые в расчетах:

- i – число рабочих витков пружины;
- α – угол подъема винтовой линии пружины (α_0 – начальный, до поджатия, угол подъема винтовой линии пружины);
- m – относительное поджатие. $m = \frac{H-H_0}{H_0}$, где H_0 – начальная, до поджатия, высота пружины;
- m_2 – предварительная закрутка пружины, через учет внутренних силовых факторов.

После ряда упрощений и разделения переменных, получаем матричные уравнения, аналогично [2, 3]:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial s} + (A) \cdot Y_i = 0.$$
$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0.$$

Матрица A состоит из кривизн и кручений элемента тонкого бруса, жесткостей, инерционных членов и частот. Матрица несимметричная, что обусловлено несамосопряженностью задачи. Реализована два случая граничных условий: жесткая заделка и своеобразное шарнирное опирание:

$$M_\chi(0) = \gamma(0) = V(0) = M_\chi(s_0) = \gamma(s_0) = V(s_0),$$
$$Q_\chi(0) = \varphi(0) = W(0) = Q_\chi(s_0) = \varphi(s_0) = W(s_0).$$

Для данного шарнирного опирания получаем частотное уравнение, его мы называем «порождающим решением», одновременно являющееся дисперсионным соотношением, поскольку номер моды жестко связан с волновым числом. График порождающего решения представлен на рис 1. Спектр «порождающего решения» имеет сложный характер, поскольку задача несамосопряженная. Нижняя ветвь частотного уравнения соответствует пространственным поперечным колебаниям, первая частота ($n=1$) – основная частота пространственных продольных колебаний, далее вторая мода пространственных продольных колебаний. С ростом волнового числа пространственные продольные колебания переходят в пространственные поперечные колебания. Верхняя ветвь частотного уравнения соответствует пространственным крутильным колебаниям.

Для жесткой заделки частотный спектр рассчитывается отдельно для симметричных и антисимметричных колебаний. Искомая собственная частота обращает в верное тождество характеристическое и граничное уравнения. Соответственно, получаем набор частот. Для жесткой заделки построены формы колебаний. Формы колебаний имеют все 6 компонент каждая, поскольку колебания винтовых цилиндрических пружин являются пространственными и взаимосвязанными. Автор использует формы колебаний для анализа и классификации частотного спектра [4]. Частотный спектр при жесткой заделке возможно сопоставить с частотным спектром «порождающего» решения.

В частотном спектре жесткой заделки обнаружены «особые» частоты – парные частоты, соответствующие локальным экстремумам характеристического уравнения, в точках W11 и W21 в витке пружины укладывается полуволна, в точках W12 и W22 в витке пружины укладывается целая волна, на рис. 2 показаны места расположения «особых» частот [4].

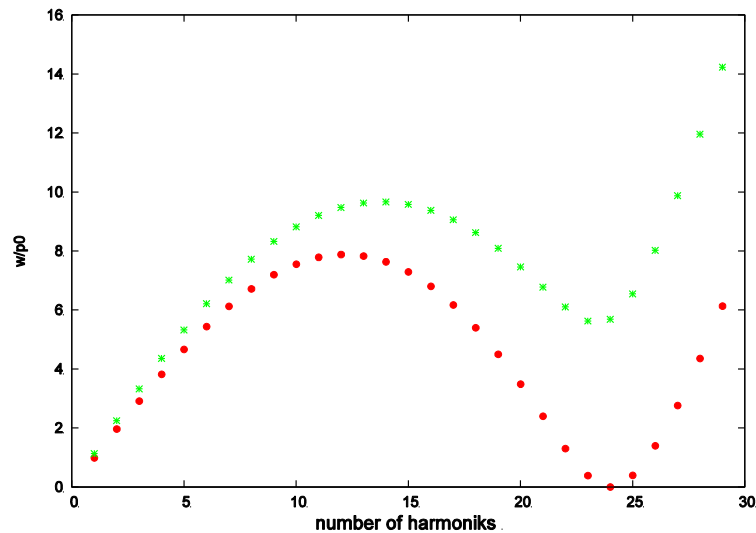


Рис. 1. Частотный спектр «порождающего» решения при $i = 12, \alpha = 6^0, m = 0, m_2 = 0$.

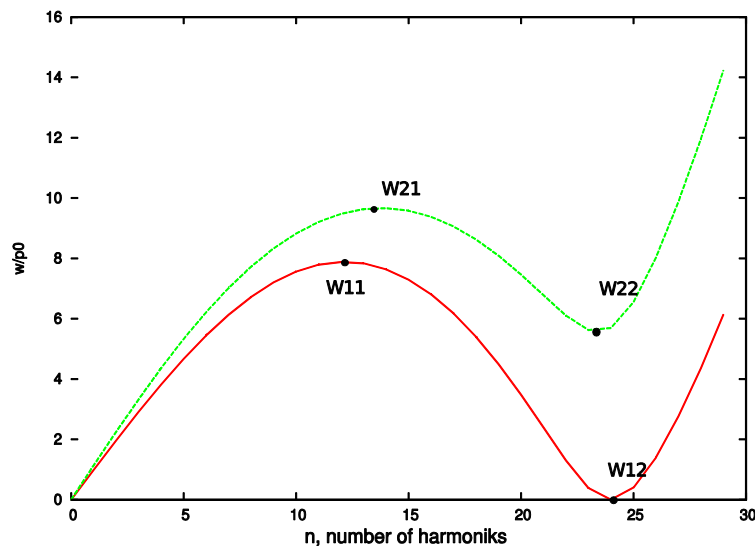


Рис. 2. Особые частоты и их место на дисперсионном уравнении.

Критерием потери устойчивости является обращение в ноль соответствующей частоты. Например, эйлеровской потере устойчивости соответствует обращение в ноль одной из 2 частот пространственных поперечных колебаний, окружающих нижнюю «особую» частоту W12.

Кроме классических видов потери устойчивости, в винтовых пружинах и пружинных механизмах возможны и другие явления, связанные с потерей устойчивости. Например, возможна потеря устойчивости с восстановлением [5], при определенных параметрах пружины с ростом поджатия частота сначала уменьшается, потом обращается в ноль, потом растет. При этом может произойти восстановление прямолинейной формы пружины. У автора имеется подобный экспериментальный результат, при этом первоначальное восстановление идет за счет усилий из-за контакта витков.

Известен случай неклассической продольной упругой потери устойчивости в пружинном механизме досылателя зенитного 57-мм автомата, входящего в комплекс С-60, при условии динамического нагружения с инерционным соударением витков. Мы связываем это явление с местной потерей устойчивости, происходящей при обращении в ноль «особой» частоты W22. При этом обращение в ноль соответствующей частоты происходит при поджатии выше, чем $m = -1$. На основе этой гипотезы выведена формула критической скорости при инерционном соударении витков [2].

Известно [6, 7], что при быстром нагружении может происходить потеря устойчивости не по основной моде, а сначала по более высоким модам ($n = 2,3$), за счет более высокой скорости развития процесса потери устойчивости для более высоких мод.

Соответственно, может быть интересно рассмотреть варианты обращения в ноль частот при значениях нагружений, выше критических. На рис. 3–5 представлены такие варианты для «порождающего» решения.

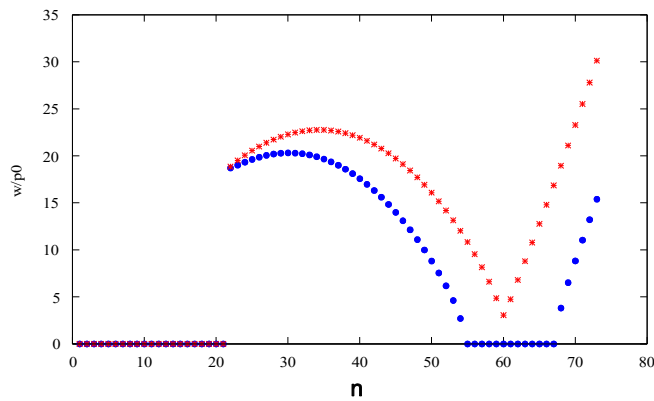


Рис. 3. Порождающее решение при $i = 30, \alpha = 3^0, m = -0,9, m_2 = 2,21$. Обращение в ноль на двух участках частотного спектра.

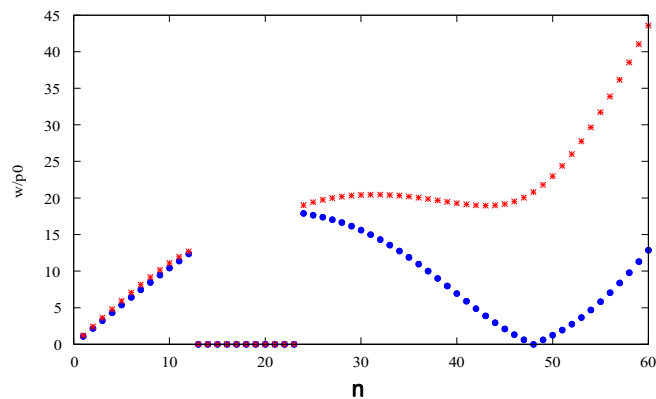


Рис. 4. Порождающее решение при $i = 24, \alpha = 6^0, m = +1,5, m_2 = 2,28$. Обращение в ноль верхней и нижней частей спектра при отсутствии потери устойчивости по основным частотам поперечных колебаний.

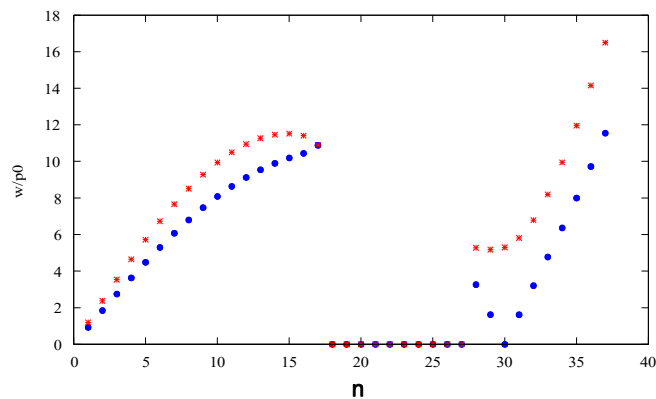


Рис. 5. Порождающее решение при $i = 15, \alpha = 10^0, m = -2, m_2 = 0$. Обращение в ноль верхней и нижней частей спектра при отсутствии потери устойчивости по основным частотам поперечных колебаний.

Литература

1. П. Е. Товстик Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ, Математика, механика, астрономия, 1962. - вып. № 7. С. 119-134.
2. Д. Ф. Полищук Обобщённая теория цилиндрических пружин. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1992. 216 с.
3. Д.Ф. Полищук, А. Д. Полищук. Интегральная механика. Физико-математический полигон для численных методов решения взаимосвязанных нелинейных задач. Москва-Ижевск.: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 86 с.
4. А. Д. Полищук . Использование форм колебаний при исследовании колебаний винтовых цилиндрических пружин // Вестник Башкирского университета. 2020. Т. 25. № 2. С. 239-243.
5. Е.Л. Курятникова Классификация видов потери устойчивости пространственных стержней // Моделирование технических систем. Об. изучи, тр. ИжГТУ. Ижевск, 1996. - С. 131-133.
6. А.С. Вольмир . Устойчивость деформируемых систем. – М.: ГИТТЛ, 1962..
7. А.К.Беляев, Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик. Задача Лаврентьева-Ишлинского. Развитие. Идеи. // Тр. Всерос. съезда по теор. и прикл. механике. Казань. 2015.

О КОЛЕБАНИЯХ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ЭФФЕКТ ГАЛОПИРОВАНИЯ

Селюцкий Ю.Д.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
seliutski@imec.msu.ru

Аннотация. Рассматривается ветроэнергетическая установка колебательного типа с двумя подвижными массами, использующая эффект галопирования. Электричество вырабатывается с помощью линейного генератора. Показано, что надлежащий выбор параметров позволяет значительно расширить диапазон скоростей ветра, при которых существуют периодические режимы, по сравнению с системой, содержащей одно движущееся тело. Получены аппроксимации для амплитуд и частот предельных циклов, возникающих в системе. Исследована эволюция этих циклов при изменении жесткости пружины между телами. Установлено, что при определенных значениях параметров возможно одновременное существование двух притягивающих периодических решений. Показано, что максимальная мощность, вырабатываемая такой системой, больше, чем мощность, вырабатываемая системой с одной подвижной массой.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-29-00472.

Введение

Галопирование, т.е. колебания плохообтекаемых тел в направлении поперек набегающего потока среды, активно изучается в течение длительного времени. С одной стороны, такие колебания могут приводить к износу и разрушению конструкций. В то же время, их можно использовать для отбора энергии потока и ее преобразования в полезные формы, и в последнее время появляется большое количество работ, направленных на разработку и изучение различных ветроэнергетических установок, использующих эффект галопирования. В частности, в работах [1–4] исследуются различные схемы ветроэнергетических установок, в которых рабочий элемент совершает галопирующие колебания. Рассматриваются разные преобразования энергии колебаний в электричество (линейный генератор на постоянном магните, пьезоэлементы). Изучается влияние параметров системы (в том числе, формы колеблющегося тела) на характеристики колебаний.

Известно, что дополнительное тело, упруго прикрепленное к плохообтекаемому телу, может играть роль динамического гасителя колебаний. Представляется интересным исследовать, может ли такое тело выполнять противоположную функцию, делая колебания более «интенсивными» и увеличивая вырабатываемую мощность.

Постановка задачи и результаты

Рассматривается система, состоящая из прямоугольной призмы M_2 квадратного сечения и материальной точки M_1 , которая соединена пружинами с призмой и с неподвижной точкой O . К призме жестко прикреплен магнит M_3 , расположенный внутри катушки индуктивности (рис. 1). Катушка индуктивности включена в электрическую цепь, содержащую также активное сопротивление R . Тела M_{1-3} могут перемещаться поступательно вдоль неподвижной горизонтальной оси OY . Система помещена в стационарный поток среды, скорость которого горизонтальна, перпендикулярна OY и равна V .

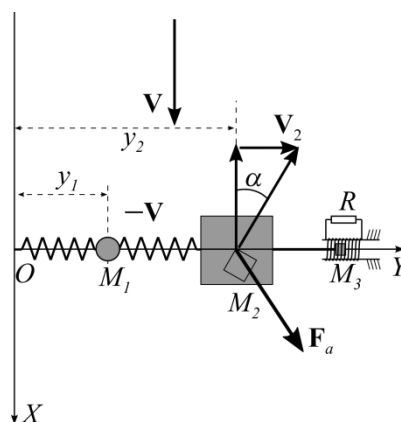


Рис. 1. Схема ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами (вид сверху).

При возникновении колебаний в системе магнит будет перемещаться внутри катушки индуктивности, и в цепи будет индуцирован электрический ток.

Будем считать, что поток действует только на призму, и воспользуемся для описания аэродинамической силы F_a квазистатическим подходом.

Для упрощения записи перейдем к таким единицам измерения, в которых масса M_1 равна 1, жесткость пружины между точками M_1 и O равна 1, и внутреннее сопротивление катушки также равно 1. Получим следующие уравнения, описывающие динамику системы:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + y_1 + k(y_1 - y_2) + h_1 \dot{y}_1 + h_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0, \\ m\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) + h_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= \mu(V^2 + \dot{y}_2^2)C_y(\alpha) - \chi I, \\ L\dot{I} &= -(R+1)I + \dot{y}_2. \end{aligned}$$

Здесь $y_{1,2}$ – координаты тел $M_{1,2}$, m – масса призмы, k – коэффициент жесткости пружины между телами, $h_{1,2}$ – коэффициенты демпфирования пружин, I – ток в цепи, L – индуктивность катушки, χ – коэффициент электромеханического взаимодействия, μ – некоторый коэффициент, зависящий от плотности среды и характерных размеров призмы, C_y – безразмерный коэффициент аэродинамической силы, $\alpha = \text{arctg}(\dot{y}_2/V)$ – угол атаки. Для зависимости $C_y(\alpha)$, опираясь на данные [5], примем следующую формулу:

$$C_y(\alpha) = C_{y1}\alpha + C_{y3}\alpha^3 + C_{y5}\alpha^5,$$

причем $C_{y5} < 0$, $C_{y3} > 0$ и $C_{y1} > 0$.

Нетрудно показать, что в системе имеется только тривиальное положение равновесия. При скоростях V , превышающих некоторое критическое значение (которое зависит от параметров системы), равновесие становится неустойчивым. Границы области устойчивости на плоскости (k, V) представлены на рис. 2 для разных значений массы призмы, внешнего сопротивления и коэффициента демпфирования второй пружины. Пунктиром показаны соответствующие границы для случая системы с одной подвижной массой, равной суммарной массе точки M_1 и призмы. Видно, что использование второго тела позволяет заметно расширить область неустойчивости. Отметим, что для выработки энергии желательно, чтобы неустойчивость развивалась при как можно меньших скоростях потока.

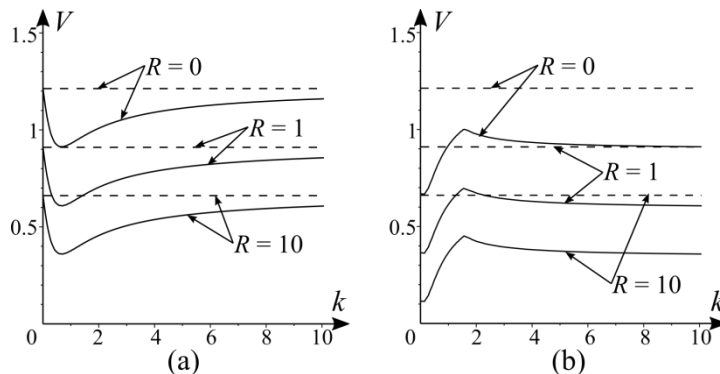


Рис. 2. Границы области устойчивости на плоскости параметров V и k :

а) $m=1$, $h_2 = 0.01$; б) $m=0.5$, $h_2 = 0.001$.

Интересно, что если демпфирование пружины между телами достаточно велико, то при некоторых значениях скорости ветра существует интервал положительных значений k , в котором равновесие асимптотически устойчиво. Вне этого интервала (т.е. и при малых, и при больших k) имеет место неустойчивость (такая ситуация проиллюстрирована на рис. 2б).

В предположении о малости коэффициентов демпфирования пружин, индуктивности катушки, параметров μ и χ , а также о том, что $C_{y3} \gg 1$, $C_{y5} \gg 1$, проведено исследование циклов, существующих в системе, и получены аппроксимационные формулы для соответствующих амплитуд и частот колебаний тел.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуды колебаний призмы и средней за период мощности P в зависимости от коэффициента жесткости пружины между телами (под мощностью здесь понимается мощность, выделяемая на сопротивлении R) при разных значениях массы призмы. Точками отмечены результаты численного интегрирования, линиями – результаты расчетов по аппроксимационным формулам. Следует отметить, что эти формулы достаточно хорошо описывают амплитуду, но дают несколько заниженное значение мощности по сравнению с численным моделированием.

Из рис. 3 видно, что при $m=1$ в системе наблюдается одно семейство притягивающих циклов, а $m=0,1$ – два семейства. Заметим, что уменьшение параметра m приводит к уменьшению амплитуды колебаний призмы. Однако максимальная выходная мощность при этом оказывается даже несколько больше, чем при $m=1$, и максимум P достигается при меньшем значении k .

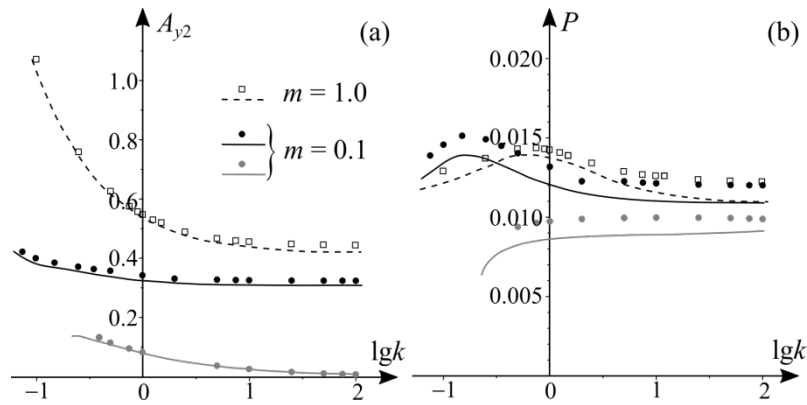


Рис. 3. Характеристики предельных циклов в зависимости от параметров k и m : а) амплитуда колебаний призмы; б) средняя мощность на периоде.

В обоих случаях максимум мощности достигается при значениях k , меньших единицы. Расчеты показывают, что этот максимум больше, чем в случае системы, содержащей одну подвижную массу (равную суммарной массе точки M_1 и призмы). В будущем представляется целесообразным провести более подробный анализ влияния отношения масс подвижных тел на производительность установки.

Заключение

Рассмотрена динамика галопирующей ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами. Исследована область устойчивости положения равновесия в зависимости от параметров. Установлено, что при определенных условиях система имеет два притягивающих предельных цикла. Прослежена эволюция этих циклов при изменении различных параметров.

Показано, что рассматриваемая система имеет заметные преимущества по сравнению с системой, содержащей только одну подвижную массу. В частности, при надлежащем выборе параметров она имеет значительно более широкий рабочий диапазон скоростей ветра. Кроме того, ее выходная мощность больше, чем в случае системы с одной подвижной массой.

Литература

1. A. Barrero-Gil, G. Alonso, A. Sanz-Andres // Energy Harvesting from Transverse Galloping, J. Sound & Vibr., 329 2010. 2873-2883
2. H.L. Dai, A. Abdelkefi, U. Javed, L. Wang // Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations, Smart Mater. & Struct., 24:4 2015. 045012
3. P. Hemon, X. Amandolese, T. Andrianne // Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment, J. Fluids and Struct., 70 2017. 390-402
4. K.F. Wang, B.L. Wang, Y. Gao, J.Y. Zhou // Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes, Arch. Appl. Mech., 90 2020. 721-736
5. M. Sarioglu., Y.E. Akansu, T. Yavuz // Flow Around a Rotatable Square Cylinder-Plate Body, AIAA Journal. 44:5 2006. 1065-1072

О СООТВЕТСТВИИ СЛАБО-НЕЛИНЕЙНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛЕЙ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Смольников Б.А.^{1,2}, Смирнов А.С.^{1,2}

1 - Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
2 - Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
smolnikovba@yandex.ru

Аннотация. В работе обсуждается взаимосвязь между формулами слабо-нелинейной и глобальной моделей сферического маятника. Показано, что точные выражения для частоты нутационных колебаний и приращения угла прецессии за один полупериод нутационных колебаний, записанные в рамках глобальной модели через полные эллиптические интегралы I и III рода, могут быть приведены к соотношениям из слабо-нелинейной модели путем надлежащих аппроксимаций и преобразований. Дается последовательное изложение действий упрощенного характера, в процессе которого выявляется ряд интересных особенностей. Приведенные рассуждения имеют фундаментальное значение для аналитической механики и ее приложений в области маятниковых систем.

Введение

Сферический маятник (далее – СМ, рис. 1а) является одним из наиболее популярных объектов исследования в аналитической механике на протяжении уже более трех столетий, и изучение его движений позволяет наглядно описать поведение многих более сложных конструкций. Эта система имеет как важное теоретическое значение, так и множество практических приложений в разнообразных технических устройствах (например, грузоподъемных устройствах типа мостовых и башенных кранов или спортивно-развлекательных комплексах). В последнее время вышла книга авторов [1], посвященная механике СМ, а также целый ряд публикаций [2–8], что лишний раз свидетельствует о сохранении внимания и интереса к этой системе.

При исследовании движений СМ основную роль играет изучение слабо-нелинейной модели (для малых колебаний с учетом кубической нелинейности) и глобальной модели (для произвольных отклонений). Эти модели имеют существенные различия между собой, что отчетливо прослеживается уже на этапе выбора обобщенных координат – в слабо-нелинейной модели в их качестве принимаются декартовы координаты x и y груза СМ [9], тогда как в глобальной модели используются сферические углы θ (угол нутации) и ψ (угол прецессии) [10]. Кроме того, различными оказываются и методы анализа, используемые при расчетах в каждой из указанных моделей, а также принципиально отлична и структура получаемых конечных результатов [1]. Так, в рамках слабо-нелинейной модели при помощи метода усреднения можно получить несложное приближенное аналитическое решение, определяющее траекторию груза СМ в проекции на плоскость xu в виде медленно прецессирующего эллипса (рис. 1, б). В то же время, для глобальной модели СМ точное решение может быть построено на базе интегралов энергии и момента с помощью эллиптических интегралов и функций, при этом траектория будет иметь уже иной вид, зависящий от параметров задачи (например, как на рис. 1, в).

Тем не менее, ясно, что результаты, полученные по глобальной модели и имеющие в силу сказанного сложную структуру, при малых отклонениях должны переходить в упрощенные выражения, вытекающие из решения для слабо-нелинейной модели. Однако демонстрация такого перехода из конечных соотношений посредством серии аппроксимаций и сопутствующих преобразований не дается в современных руководствах по механике СМ, хотя эти действия представляют важное значение. Именно этому вопросу и посвящена данная работа, в которой предлагается восполнить пробел и проследить тесную взаимосвязь между слабо-нелинейной и глобальной моделями СМ в их современном изложении, продолжая в этом отношении работы [11, 12].

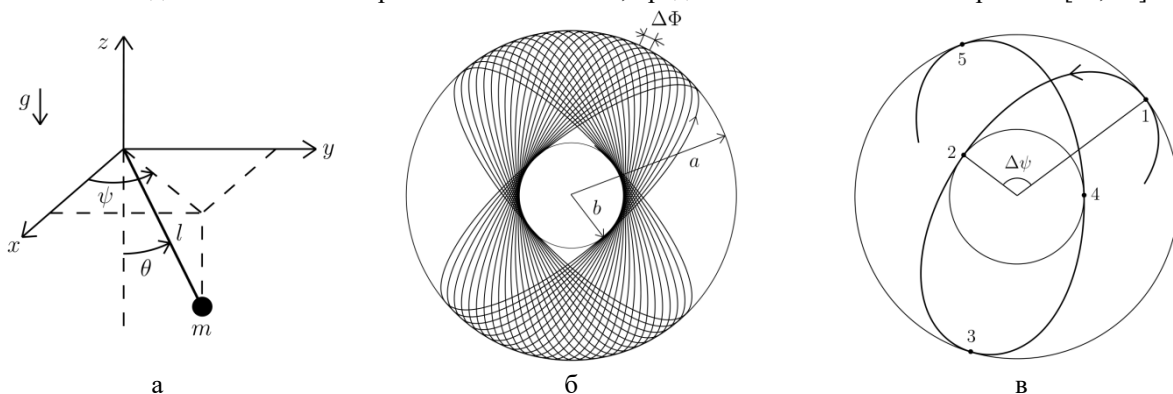


Рис. 1. Сферический маятник: (а) – расчетная схема, (б) – траектория в проекции на горизонтальную плоскость в рамках слабо-нелинейной модели, (в) – аналогичная проекция траектории в рамках глобальной модели.

Основная часть

В глобальной модели СМ используются безразмерные константы α и β , пропорциональные полной механической энергии E и моменту количества движения p относительно оси z соответственно, и в рамках этой модели известны формулы для частоты нутационных колебаний $k_{\text{нут.}}$ и приращения угла прецессии $\Delta\psi$ за один полупериод нутационных колебаний (рис. 1, в). Указанные соотношения имеют следующий вид [1]:

$$\alpha = \frac{E}{mgl}, \quad \beta = \frac{p}{ml\sqrt{2gl}}, \quad k_{\text{нут.}} = \frac{\pi\Omega\sqrt{u_1-u_3}}{2K(\kappa)}, \quad \Delta\psi = \frac{\beta}{\sqrt{u_1-u_3}} \left[\frac{\Pi(c_1, \kappa)}{1-u_1} + \frac{\Pi(c_2, \kappa)}{1+u_1} \right]. \quad (1)$$

Здесь и далее приняты обозначения: m – масса груза СМ; l – длина СМ; g – ускорение силы тяжести; u_1 , u_2 и u_3 – корни кубического полинома $Q(u) = -u^3 - \alpha u^2 + u + \alpha - \beta^2$, возникающего при анализе глобальной модели (причем $u_3 \leq -1 \leq u_2 \leq u_1 \leq 1$); $K(\kappa)$ – полный эллиптический интеграл I рода с модулем κ ; $\Pi(c_1, \kappa)$ и $\Pi(c_2, \kappa)$ – полные эллиптические интегралы III рода с тем же самым модулем κ и характеристиками c_1 и c_2 ; при этом формулы для безразмерных величин κ , c_1 и c_2 через упомянутые корни u_1 , u_2 и u_3 , а также выражение для величины Ω , имеющей размерность угловой скорости, можно записать в следующем виде [1]:

$$\kappa = \sqrt{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}}, \quad c_1 = \frac{u_1-u_2}{1-u_1}, \quad c_2 = \frac{u_2-u_1}{1+u_1}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad (2)$$

Для дальнейших преобразований необходимо иметь связь между безразмерными величинами α и β из глобальной модели СМ и двумя безразмерными параметрами из слабо-нелинейной модели СМ. В качестве этих параметров удобно принять $\delta = a/l$ и $\varepsilon = b/l$, где a и b – длины большей и меньшей полуосей траекторного эллипса соответственно (рис. 1, б), так что $a > b$. Поэтому оба параметра δ и ε являются малыми, причем $\delta > \varepsilon$. Для получения искомой связи между парами параметров α , β и δ , ε выпишем выражения для полной механической энергии СМ E и его момента количества движения p относительно оси z из линейной модели (полагая для краткости $k = \sqrt{g/l}$) и вычислим далее величины α и β по первым двум формулам (1):

$$E = -mgl + \frac{1}{2}mk^2(a^2 + b^2), \quad p = mkab, \quad \alpha = \frac{E}{mgl} = -1 + \frac{1}{2}(\delta^2 + \varepsilon^2), \quad \beta = \frac{p}{ml\sqrt{2gl}} = \frac{\delta\varepsilon}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Эти выражения дают аппроксимации для α и β с точностью до величин не выше второго порядка малости по величинам δ и ε , причем эта точность оказывается вполне достаточной для совершения всех необходимых действий, что и обуславливает использование здесь формул именно из линейной модели. Кроме того, следует учесть, что корни u_1 и u_2 полинома $Q(u)$ связаны с углами нутации θ_1 и θ_2 , которые отвечают двум крайним параллелям зоны движений СМ на поверхности сферы, формулами $u_1 = \cos\theta_1$ и $u_2 = \cos\theta_2$, причем при малых колебаниях эти углы, очевидно, являются малыми. Поэтому можно записать приближенные соотношения:

$$\sin\theta_1 = \frac{b}{l} = \varepsilon \approx \theta_1, \quad \sin\theta_2 = \frac{a}{l} = \delta \approx \theta_2, \quad u_1 = \cos\theta_1 \approx 1 - \frac{\theta_1^2}{2} \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad u_2 = \cos\theta_2 \approx 1 - \frac{\theta_2^2}{2} \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}. \quad (4)$$

Последние две формулы (4) дают квадратичные аппроксимации корней u_1 и u_2 по малым параметрам δ и ε . Для нахождения аналогичной аппроксимации для корня u_3 достаточно учесть, что в силу теоремы Виета для кубического полинома имеет место соотношение $u_1 + u_2 + u_3 = -\alpha$, из которого находим, что $u_3 = -\alpha - u_1 - u_2$. Подставляя сюда α согласно третьей формуле (3), а также u_1 и u_2 согласно последним двум формулам (4), получим, что с указанной точностью $u_3 \approx -1$. Принимая во внимание все полученные аппроксимации, получим для модуля эллиптических интегралов κ согласно первой формуле (2), а также сразу и для характеристик c_1 и c_2 по второй и третьей формулам (2) следующие приближенные выражения:

$$\kappa = \sqrt{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2}, \quad c_1 = \frac{u_1-u_2}{1-u_1} \approx \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - 1, \quad c_2 = \frac{u_2-u_1}{1+u_1} \approx \frac{1}{4}(\varepsilon^2 - \delta^2). \quad (5)$$

Для использования третьей формулы (1) для $k_{\text{нут.}}$ остается лишь получить упрощенные соотношения для входящих в ее структуру величин $K(\kappa)$ и $\sqrt{u_1-u_3}$, опираясь на ранее найденные выражения:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \xi}} \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4} \right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\delta^2 - \varepsilon^2}{16} \right), \quad \sqrt{u_1-u_3} \approx \sqrt{2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \right). \quad (6)$$

В результате получим для частоты нутационных колебаний СМ следующую упрощенную формулу:

$$k_{н\ddot{u}т.} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{16}\right) = 2k \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{16l^2}\right) = 2k_1, \quad k_1 = k \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{16l^2}\right), \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7)$$

Видно, что частота нутационных колебаний СМ $k_{н\ddot{u}т.}$ в данной аппроксимации оказывается вдвое больше, чем частота обращения по эллипсу k_1 из слабо-нелинейной модели [1]. Этого результата и следовало ожидать, т. к. период обращения по эллипсу (на рис. 1, в ему отвечает движение 1–2–3–4–5) и должен быть вдвое большим периода нутационных колебаний СМ (которому отвечает движение 1–2–3). Поэтому переход от глобальной модели к слабо-нелинейной в отношении частоты нутационных колебаний является полностью справедливым.

Перейдем к выражению для $\Delta\psi$ согласно последней формуле (1) и вычислим его аппроксимацию. Для этого обратимся к ранее полученным приближенным выражениям для характеристик c_1 и c_2 по последним двум формулам (5), из которых видно, что c_2 является малой величиной, тогда как величина c_1 не является малой. Поэтому далее получим упрощенное выражение для $\Pi(c, \kappa)$ в общем виде, где учитывается малость модуля κ , но характеристика c при этом не является обязательно малой. Нетрудно понять, что оно имеет вид:

$$\Pi(c, \kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{(1 + c \sin^2 \xi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \xi}} \approx \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (\kappa^2 / 2) \sin^2 \xi}{1 + c \sin^2 \xi} d\xi = \frac{\pi}{2c} \left(\frac{\kappa^2}{2} + \frac{c - \kappa^2 / 2}{\sqrt{1 + c}} \right). \quad (8)$$

Отсюда можно найти приближенные формулы для $\Pi(c_1, \kappa)$ и $\Pi(c_2, \kappa)$. Разделив их сразу на выражения $1 - u_1$ и $1 + u_1$ соответственно, аппроксимации которых даны ниже, будем иметь с необходимой точностью:

$$1 - u_1 \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + u_1 \approx 2 - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \frac{\Pi(c_1, \kappa)}{1 - u_1} = \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{8\delta} + \frac{1}{\delta\varepsilon} \right), \quad \frac{\Pi(c_2, \kappa)}{1 + u_1} \approx \frac{\pi}{4}. \quad (9)$$

Отметим, что в последних двух выражениях (9) удержаны лишь слагаемые, необходимые для получения требуемой аппроксимации для $\Delta\psi$. Остается лишь вспомнить, что для β мы имеем последнее выражение (3), а для $\sqrt{u_1 - u_3}$ – вторую формулу (6). Подставляя их в формулу (1) для $\Delta\psi$, получим окончательное выражение:

$$\Delta\psi \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{3}{8} \delta\varepsilon \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi ab}{16 l^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\Phi}{4}, \quad \Delta\Phi = \frac{3\pi ab}{4 l^2}, \quad (10)$$

где $\Delta\Phi$ – угол поворота большой оси эллипса за одно колебание (рис. 1, б) [1]. Соотношение (10) находится в полном согласии со слабо-нелинейной моделью, для которой, как нетрудно понять, именно угол $2\pi + \Delta\Phi$ и должен составлять $4\Delta\psi$, что равно приращению угла прецессии за два периода нутационных колебаний СМ.

Заключение

Подводя итоги проведенного исследования, можно заключить, что осуществленные математические построения позволили более детально выявить соответствие двух ключевых моделей СМ, имеющих важное теоретическое и практическое значение – глобальной и слабо-нелинейной. Эти действия формируют наиболее целостную картину динамического поведения СМ и отчетливо демонстрируют особенности его нутационного и прецессионного движений. В завершение остается отметить, что представленная методика может быть использована для установления аналогичных взаимосвязей между моделями и в других задачах о колебаниях маятниковых систем, для которых существует точное аналитическое решение в глобальной постановке.

Литература

1. А.С. Смирнов, Б.А. Смольников. Механика сферического маятника. СПб.: Политех-Пресс, 2019. 266 с.
2. П.О. Буланчук, А.Г. Петров. Об управлении движением сферического маятника с помощью вибрации точки подвеса // Доклады Академии наук. Механика. 2010. Т. 430. № 5. С. 627–630.
3. А.П. Маркеев. О невырожденности функции Гамильтона сферического маятника // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 2. С. 189–194.
4. В.Н. Неспирный, В.А. Королев. Стационарные режимы сферического маятника с подвижной точкой подвеса // Механика твердого тела. 2011. Вып. 41. С. 225–232.
5. А.Н. Стадник, А.В. Периг, А.И. Дериглазов. Применение относительных декартовых координат для сложного движения сферического маятника // Вестник Севастопольского национального технического университета. Механика, энергетика, экология. 2013. № 137. С. 24–31.
6. С.А. Довбыш. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость многомерных систем. Приложения к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19. Вып. 3. С. 23–90.
7. В.В. Заика, А.Л. Масленников. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат // Политехнический молодежный журнал. 2019. № 9 (38). С. 1-12.

8. А.В. Кочетков, П.В. Федотов. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику // Вестник Евразийской науки. 2019. Т. 11. № 2. С. 1-26.
9. А.Н. Крылов. Собрание трудов. В 12 т. Т. 5. М., Л.: изд-во АН СССР, 1937. 574 с.
10. Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков. Теоретическая механика. Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1985. 536 с.
11. H.A. Resal. Traité de mécanique générale: comprenant les leçons professées a l'École Polytechnique. V. 1. Cinématique. Théorèmes généraux de la Mécanique. De l'équilibre et du mouvement des corps solides. Paris: Gauthier-Villars, 1873. 449 p.
12. F.F. Tisserand. Sur le mouvement du pendule conique // Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques. 1881. S. 2. V. 5. No 1. P. 448-454.

ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А., Урбан А.М.

*Институт информационных технологий математики и механики Нижегородского
государственного университета им. Н.И. Лобачевского
sstrebuliaev@mail.ru*

Аннотация. Проводится компьютерное исследование устойчивости электромеханической системы электропривода и расчет робастной устойчивости колебаний переднего колеса трехколесного шасси самолета. На первом этапе рассматривается типовая структурная схема системы электропривода. Получена передаточная функция системы, характеристическое уравнение, построены границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров. При исследовании устойчивости явления шимми проведен анализ существующих теорий качений упругого пневматика. Приведенные в этих работах математические модели положены в основу разработанного программного обеспечения для расчета границ областей устойчивости и радиуса робастной устойчивости.

Введение

В настоящее время при исследовании, в том числе и устойчивости, конкретных динамических систем получило широкое распространение методология математического моделирования и вычислительного эксперимента [1]. Эта методология охватывает многие сферы, от разработки комплексов технических систем и управления ими до анализа сложных технических, экономических, биологических и ряда других систем и процессов. Математическое моделирование развивается в недрах фундаментальных наук: механике и физике, которых отличает наивысший уровень теоретических исследований. При исследовании ряда новых процессов и систем необходимо построение адекватных математических моделей и проведение расчетов на ЭВМ, то есть проведение поискового вычислительного эксперимента. Вопрос об адекватности математической модели является очень важным, требующем высокой квалификации исследователей. Анализ адекватности математической модели реальному изучаемому объекту или процессу должен включаться в алгоритм и разрабатываемое программное обеспечение. Динамика роста вычислительных возможностей современных компьютеров достаточно высока и позволяет надеяться на успешное решение все более сложных задач.

Основной текст

Из анализа структурных схем электроприводов была получена обобщенная схема исследуемой динамической системы. Ввиду сложности и громоздкости символьных преобразований, связанных с получением уравнений движения, характеристических уравнений и получением областей устойчивости было принято решение об использовании САВ Maple. Были получены аналитические выражения главной передаточной функции и характеристического уравнение вида:

$$Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p^1 + q_6 = 0 \quad (1)$$

где

$$q_0 = T_5 b_2 d_3 T_2 T_4;$$

$$q_1 = T_5 b_2 d_3 T_4 + T_5 b_1 d_3 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_2 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_3 T_2;$$

$$q_2 = C_e C_m T_3 b_2 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_2 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_1 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_3 + T_5 b_2 d_2 T_2 + T_5 b_1 d_3 T_4 + T_5 b_2 d_2 T_4;$$

$$q_3 = C_e C_m T_3 b_1 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_2 T_4 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 c_2 b_2 + T_5 b_2 d_1 T_4 + T_5 b_1 d_2 T_2 + T_5 b_2 d_1 T_2 + T_5 b_2 d_2 + T_5 b_1 d_3 + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_5 b_1 d_1 T_2 T_4;$$

$$q_4 = C_e C_m T_3 b_1 d_2 T_2 + C_e C_m T_3 b_1 d_3 + T_5 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 + K_2 C_m T_1 T_3 a_2 c_2 + T_5 b_1 d_1 T_4 + T_5 b_1 d_1 T_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_1 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 c_1 b_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 c_2 b_1 + T_5 b_2 d_1;$$

$$q_5 = C_e C_m T_3 b_2 d_1 + K_2 C_m T_1 T_3 a_1 c_2 + T_5 b_1 d_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 c_1 b_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + K_2 C_m T_1 T_3 a_2 c_1;$$

$$q_6 = C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1;$$

В дальнейшем, с помощью разработанного программного обеспечения, был проведен многофакторный вычислительный эксперимент по построению и анализу границ областей устойчивости (с использованием режима анимации) в плоскостях различных параметров рассматриваемой динамической системы (рис. 1).

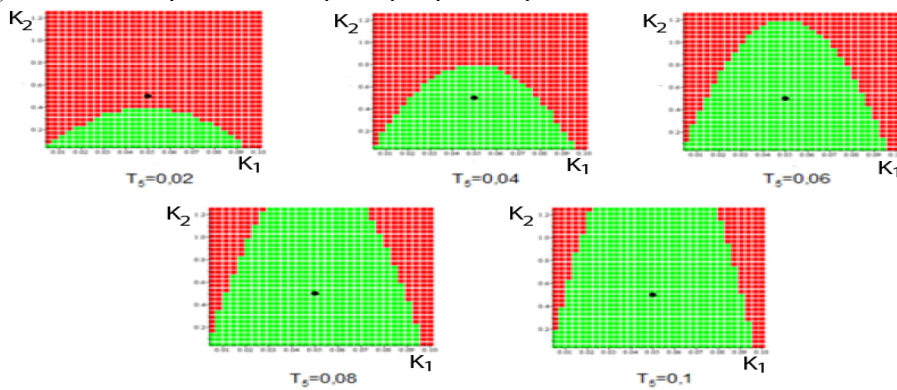


Рис. 1. Границы областей устойчивости в плоскости параметров (K_1, K_2) для разных значений T_5 .

Для расчета устойчивости переднего колеса трехколесного шасси самолета были рассмотрены результаты теоретических исследований ряда Российских ученых: М.В. Келдыша, В.С. Гоздека, Ю.И. Неймарка, Н.А. Фуфаева, В.Ф. Журавлева, Д.М. Климова и других. В настоящей работе используется математическая модель, приведенная в работе [2].

Подставляя выражения для потенциальной, кинетической энергий и функции рассеивания, согласно [2], в уравнение Лагранжа, получаем следующие уравнения движения (2), с учетом неголономных связей (3):

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + [k + \rho N + lN(\sigma - 1)]\psi + D\ddot{\theta} + C\omega\dot{\theta} - cN\theta - (la + \sigma N)\xi = 0 \\ D\ddot{\psi} - C\omega\dot{\psi} - cN(\sigma - 1)\psi + B\ddot{\theta} + h\dot{\theta} - ca\xi - \beta\varphi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} l\dot{\psi} + c\dot{\theta} + \dot{\xi} + V\theta + V\varphi = 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\xi + \beta V\varphi - \gamma V\psi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем в полученном характеристическом уравнении проводился переход от размерных параметров к безразмерным r_i и построение границ областей устойчивости в каждой паре плоскостей этих параметров. В каждой плоскости параметров определялся минимальный радиус окружности с центром в некотором номинальном значении параметров, таким образом, чтобы все точки внутри этой окружности лежали в области устойчивости. Наименьший из полученных радиусов и объявлялся радиусом робастной устойчивости (Рис.2)

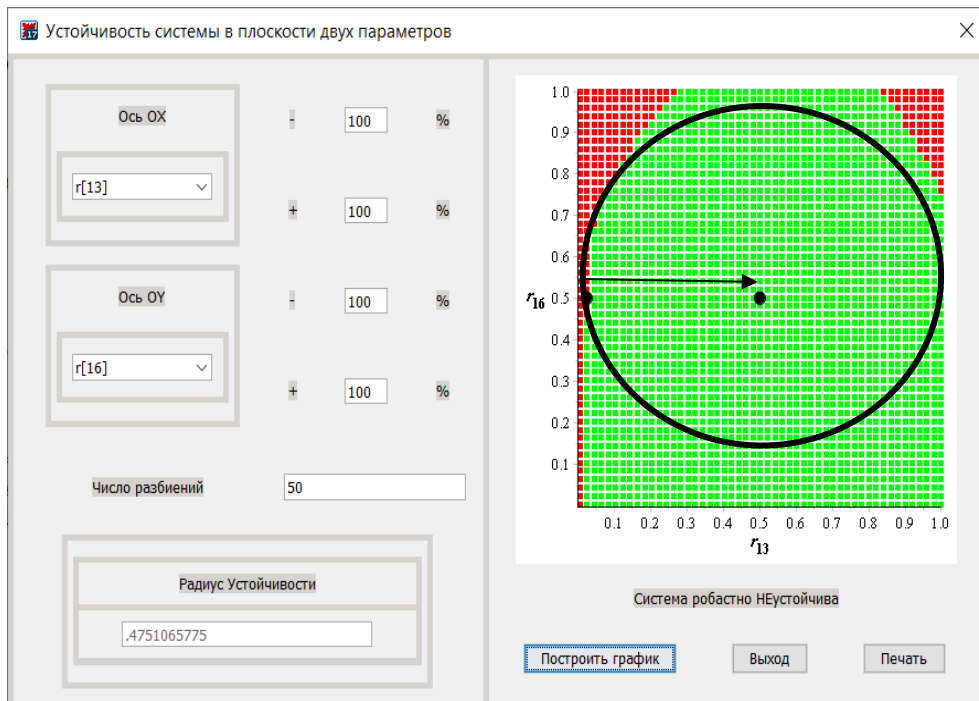


Рис. 2. Интерфейс разработанного программного обеспечения.

Заключение

В рассмотренной работе приведены результаты математического моделирования и расчета характеристик устойчивости колебаний в технических системах – системе электропривода и шимми переднего колеса трехколесного шасси самолета. Рассмотрение указанных систем проводилось в полной мере с учетом всех их характеристик без каких-либо упрощений. Использование САВ Maple для достижения результатов исследования показало эффективность этого программного обеспечения. С использованием теоретического материала и адекватных математических моделей, приведенных в работах известных Российских ученых, в сочетании с появившимися возможностями вычислительной техники и программного обеспечения удалось получить новые научные результаты.

Литература

1. С.Н. Стребуляев, Д.А. Сироткина//Учебно-исследовательские проекты по анализу динамического качества технических систем и процессов с использованием их математических моделей, Современные информационные технологии и ИТ-образование.2021. Т.17. №2. С.392-403
2. Ю.И. Неймарк// Динамика неавтономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. - Москва, Наука, 1967 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО НЕКОНТАКТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПОДВЕСА

Удалов П.П.¹, Лукин А.В.¹, Попов И.А.¹, Штукин Л.В.¹, Полеткин К.В.²

1 - Санкт-Петербургский политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

2 - Hefei University, Hefei, China
 pp_udalov@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена модель одномерных колебаний проводящего недеформируемого диска, являющимся чувствительным элементом индукционного электромагнитного подвеса. Аналитически найдены выражения для нетривиальных положений равновесия системы. С использованием бифуркационного анализа исследовано изменение устойчивости положения равновесия инерционной массы в зависимости от изменения параметров возбуждения системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-71-10009.

Введение

Электромагнитный подвес – прибор, работающий на принципе электромагнитной индукции [1]. При этом чувствительный элемент устройства не контактирует механически с остальной частью конструкции, что позволяет минимизировать влияние конструкции на статические и динамические характеристики и режимы чувствительного элемента. Работая в режиме акселерометра при правильном подборе электрических и электромагнитных параметров системы возможно добиться квазиулевого жесткости системы, что приводит к теоретически бесконечной чувствительности [2, 3]. Применяя этот подход к задачам гравиметрии [4–6], возможно конструировать высокоточные электромагнитные гравиметры. В данной же работе предлагается рассмотреть одномерную задачу о колебаниях чувствительного элемента, выполненного в форме проводящего диска, в индукционном подвесе [2, 7, 8], вблизи его положения равновесия и получить аналитические оценки для зон затягивания колебаний, что может быть полезным для определения рабочих величин параметров системы.

Одномерная модель колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса

Схематическое изображение электромагнитного подвеса с электродами $E_1 - E_4$ изображено на рис. 1.

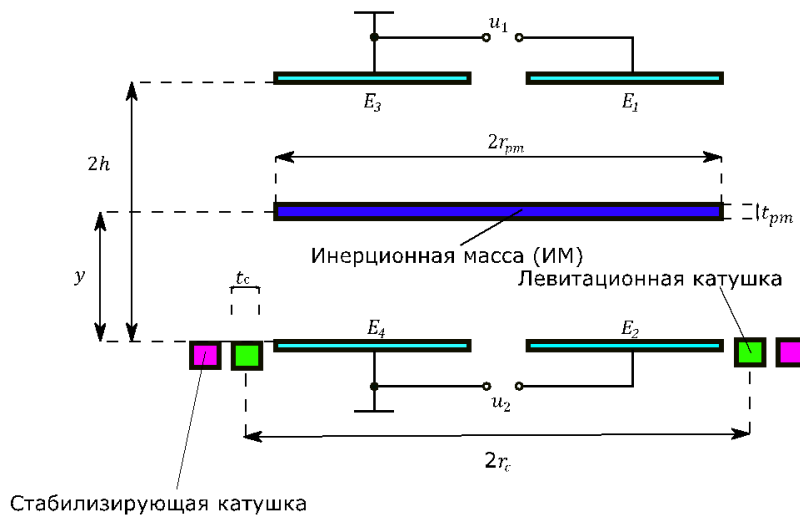


Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса.

Согласно формализму Лагранжа-Максвелла динамическая система в безразмерном виде [7, 8] примет вид:

$$\begin{aligned}
 l j_2' + r j_2 &= -\frac{d m_{12}}{d \xi} \xi' \sin \tau - m_{12} \cos \tau, \\
 \xi'' + \lambda \xi' &= \varepsilon \left(\alpha \frac{d m_{12}}{d \xi} j_2 \sin \tau - 1 + \zeta \hat{e}_1^2 - \zeta \hat{e}_2^2 + 2 \zeta \xi (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)^2 \right), \\
 (1 - \xi) \hat{e}_1 + \xi (1 - \xi) (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) &= u_{01}, \quad \xi \hat{e}_2 + \xi (1 - \xi) (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = u_{02},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{L_1 i_a^2}{2\tilde{m}gh}, \beta = \frac{\mu_0 r_c}{L_1}, \tau = \omega t, \varepsilon = \frac{g}{2\omega^2 h}, \lambda = \frac{\mu}{\tilde{m}\omega}, \xi = \frac{y}{2h}, a = \frac{r_{pm}}{r_c}, j_2 = \frac{i_2}{i_a}, \hat{e}_1 = \frac{e_1}{e_0}, \\ \hat{e}_2 &= \frac{e_2}{e_0}, W_0 = \frac{e_0^2}{2A}, l = \frac{L_2}{L_1}, r = \frac{R_2}{L_1 \omega}, u_c = \frac{2he_0}{A}, u_{01} = \frac{u_1}{u_c}, u_{02} = \frac{u_2}{u_c}, \zeta = \frac{W_0}{\tilde{m}g}, \\ m_{12} &= \frac{M_{12}}{L_1} = \beta \sqrt{a} \left[\left(\frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right], \quad \kappa^2(y) = \frac{\xi}{(1+a)^2 + 4\xi^2}, \\ \frac{dm_{12}}{d\xi} &= \frac{\partial m_{12}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} = -\frac{8\beta a}{\kappa^2} \left[\frac{(2-\kappa^2)E(\kappa)}{1-\kappa^2} - 2K(\kappa) \right] \frac{\xi}{((1+a)^2 + 4\xi^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2)$$

L_1, L_2 – собственные индуктивности катушки и диска соответственно, i_a, ω – амплитуда и частота тока катушки соответственно, \tilde{m} – масса диска, g – ускорение свободного падения, $2h$ – расстояние между катушкой и верхними электродами, μ_0 – магнитная постоянная, r_c, r_{pm} – срединный радиус катушки и ИМ соответственно, t_c, t_{pm} – толщины катушки и ИМ соответственно, t – время, μ – коэффициент трения, y – расстояние между катушкой и центром тяжести ИМ, i_2 – наведенный ток в ИМ, e_1 – электрический заряд на верхней паре электродов, e_2 – электрический заряд на нижней паре электродов, e_0 – номинальное значение заряда, $A = \varepsilon_e \varepsilon_0 A_e$, ε_0 – относительная диэлектрическая проницаемость, ε_e – диэлектрическая постоянная, A_e – площадь электродов, R_2 – электрическое сопротивление ИМ, u_1, u_2 – напряжения на верхней и нижней парах электродов соответственно, M_{12} – взаимная индуктивность между катушкой и ИМ.

Исследование положения равновесия ИМ

Далее решается задача о нахождении положения равновесия системы (1) для набора параметров $(j_2, \xi, \hat{e}_1, \hat{e}_2) = (j_{20}, \xi_0, \hat{e}_{10}, \hat{e}_{20})$, где $j_2 = j_{20}(\tau)$ – гармоническая функция наведенного тока, которая соответствует постоянным значениям $\xi_0, \hat{e}_{10}, \hat{e}_{20}, u_{01}, u_{02}$. Выражение для определения постоянного положения равновесия ξ_0 имеет следующий вид [7, 8]

$$f(\xi_0, u_1, u_2) = \frac{3u_1^2}{(1-\xi_0)^2} + \frac{2u_1 u_2}{\xi_0(1-\xi_0)} - \frac{u_2^2}{\xi_0^2} - \frac{2\alpha m_{12}(\xi_0) m'_{12}(\xi_0)}{\sqrt{l^2 + r^2}} - 4 = 0. \quad (3)$$

Далее на рис. 2–4 приведены графики зависимости среднего положения равновесия от параметров возбуждающих сил. На рис. 5–7 приведены области устойчивых и неустойчивых положений равновесий ИМ.

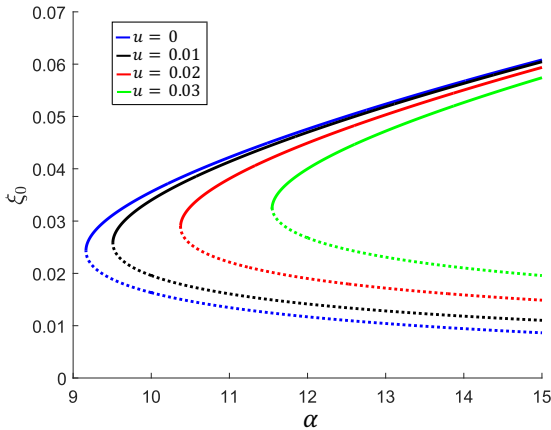


Рис. 2. Эволюция положения равновесия ξ_0 от параметра α при $l = 0.022, r = \frac{l}{50}; u = 0, 0.01, 0.02, 0.03$.

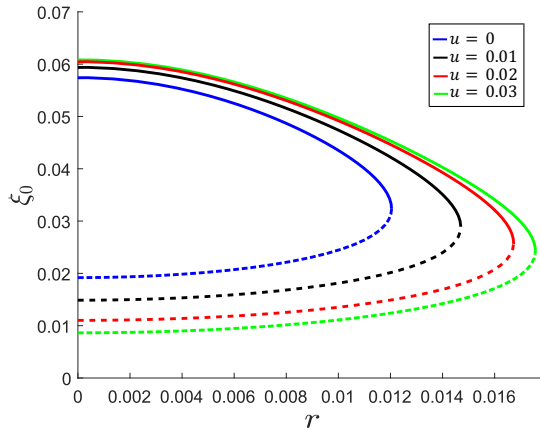


Рис. 3. Эволюция положения равновесия ξ_0 от параметра r при $l = 0.022, \alpha = 15; u = 0, 0.01, 0.02, 0.03$.

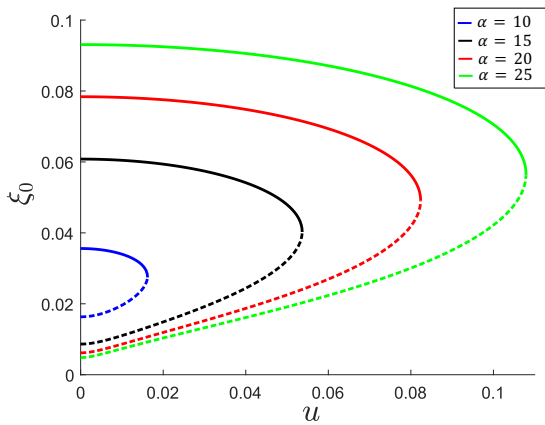


Рис. 4. Эволюция положения равновесия ξ_0 от параметра u при $l = 0.022$, $r = l/50$, $\alpha = 10, 15, 20, 25$.

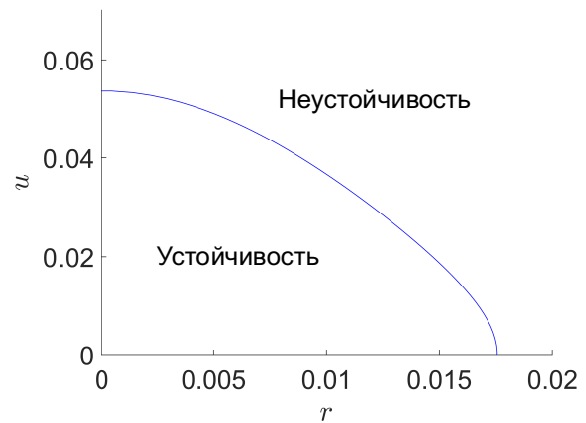


Рис. 5. Область устойчивости движений ИМ в координатах $u - r$.

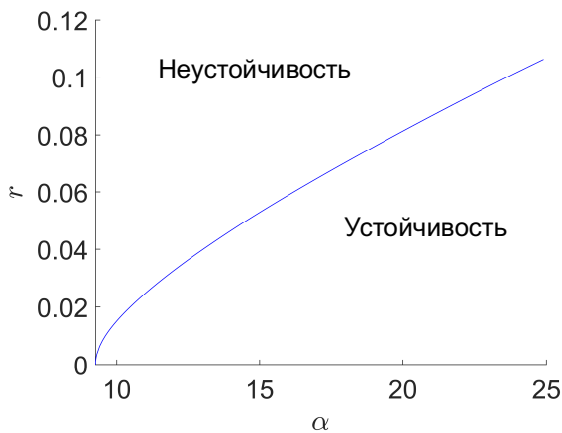


Рис. 6. Область устойчивости движений ИМ в координатах $r - \alpha$.

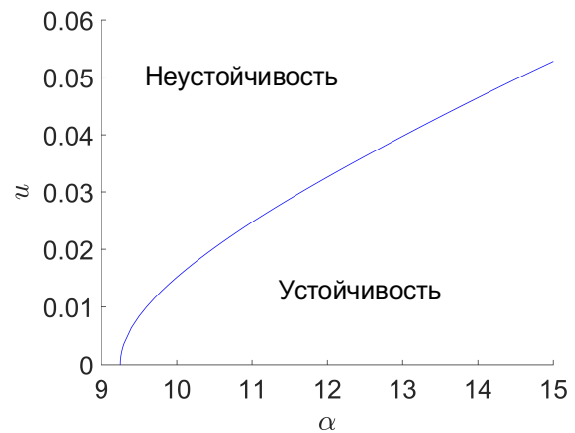


Рис. 7. Область устойчивости движений ИМ в координатах $u - \alpha$.

Заключение

В данной работе рассмотрена модель электромагнитного бесконтактного подвеса. Получены выражения для нахождения положения равновесия дископодобной ИМ. С использованием бифуркационного анализа получены области параметров системы, соответствующие устойчивым и неустойчивым положениям равновесия.

Литература

1. Han H.S, Kim D.S. Magnetic Levitation. – Heidelberg: Springer Netherlands. – 247 p.
2. Poletkin K., Chernomorsky A., Shearwood C. Proposal for micromachined accelerometer, based on contactless suspension with zero spring constant// IEEE Sensors Journal. – 2012. – V. 12, No. 7. – pp. 2407-2413. doi: 10.1109/JSEN.2012.2188831
3. Руднев И. А., Анищенко И. В. Физические принципы создания магнитолевитационных систем на основе высокотемпературных сверхпроводящих композитов второго поколения (Обзор) //Журнал технической физики. – 2021. – Т. 91. – №. 12. – С. 1813-1847.
4. Краснов А.А., Соколов А.В., Элинсон Л.С. Результаты эксплуатации гравиметров «Чекан-АМ» // Гироскопия и навигация. 2014. №1. С. 98-104.
5. Соколов А.В., Усов С.В., Элинсон Л.С. Опыт проведения гравиметрической съемки в условиях выполнения морских сейсмических работ // Гироскопия и навигация. 2000. № 1. С. 39-50.
6. Пешехонов В.Г., Соколов А.В., Железняк Л.К., Береза А.Д., Краснов А.А. Вклад навигационных технологий в создание мобильных гравиметров //Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. №. 4. С. 162.
7. Скубов Д.Ю., Индейцев Д.А., Удалов П.П., Попов И.А., Лукин А.В., Полеткин К.В. Нелинейная динамика микромеханического твердотельного неконтактного электромагнитного индукционного подвеса// Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций: программа и тезисы докладов. – Пермь, 2022. – С. 72.
8. Скубов Д.Ю., Индейцев Д.А., Удалов П.П., Попов И.А., Лукин А.В., Полеткин К.В. Исследование положения равновесия неконтактного электромагнитного подвеса //XXXIV Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2022). – 2022. – С. 338-343.

ВЛИЯНИЕ ДВОЙКОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ВАЛА НА ЕГО РАБОЧИЙ ПРОГИБ

Усманов А.Р., Модестов В.С.

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург,
Россия
ysman2d@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассмотрен эффект двойкой изгибной жесткости простого вала. Показано, что в случае простого вала основными факторами, вызывающими двойкую жесткость, являются разнотолщинность, биение наружной поверхности и посадочных поверхностей вала. Выведено выражение центробежной нагрузки, вызванной данными факторами, которое учитывает эффект двойкой жесткости. На тестовой задаче показано, что учет данного эффекта приводит к результатам, более близким к эксперименту.

Введение

При производстве деталей роторов всегда присутствуют различные неточности их изготовления. Выражение нагрузок от дисбаланса, действующего на вращающийся простой вал с производственными погрешностями, выведено в [1].

Цель настоящей работы – рассмотреть эффект двойкой изгибной жесткости простого вала, выполненного с производственными погрешностями, и оценить его влияние на рабочий прогиб.

Методы исследования

Как показано в [2], в случае присутствия двойкой жесткости уравнение движения вала может быть записано как:

$$-\frac{d^2 z}{ds^2} - \beta M + \Delta e^{2i\omega t} \bar{M} = 0 \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} z(s, t) &= w(s) e^{i\omega t}, w(s) = u(s) + iv(s); \\ M(s, t) &= M_w(s) e^{i\omega t}, M_w(s) = M_y(s) + iM_x(s); \\ \Delta &= \frac{\beta_x - \beta_y}{2}, \beta = \frac{\beta_x + \beta_y}{2}, \beta_x = \frac{1}{EJ_x}, \beta_y = \frac{1}{EJ_y}; \end{aligned}$$

u, v - прогиб вала в направлениях x, y соответственно;

$M_x(s), M_y(s)$ - изгибающие моменты относительно осей x, y , которые вызваны перемещениями v, u соответственно;

J_x, J_y - главные моменты инерции относительно осей, соответственно, x, y , E - Модуль Юнга;

s - некоторая фиксированная точка на валу, ω - угловая скорость вращения вала, t - время.

Если ввести предположение, что $J_x = J_y$, то действительная часть правой части уравнения (1) примет

вид:

$$\left(-\frac{d^2 u}{ds^2} - \beta M_y(s) \right) \cos \omega t + \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \beta M_x(s) \right) \sin \omega t \quad (2)$$

Классические уравнения изгиба Тимошенко имеют вид:

$$-\frac{d^2 u}{ds^2} = \beta_y M_y(s) \quad (3)$$

$$-\frac{d^2 v}{ds^2} = \beta_x M_x(s) \quad (4)$$

Таким образом, решение u, v уравнений (3),(4) является и решением уравнения (1).

В общем случае, когда J_x не обязательно равно J_y , действительная часть правой части уравнения (1)

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d^2 u}{ds^2} - \beta M_y(s) + \Delta (\cos 2\omega t) M_y(s) + \Delta (\sin 2\omega t) M_x(s) \right) \cos \omega t + \\ &+ \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \beta M_x(s) - \Delta (\cos 2\omega t) M_x(s) + \Delta (\sin 2\omega t) M_y(s) \right) \sin \omega t \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае решение u, v уравнений:

$$-\frac{d^2 u}{ds^2} - \beta M_y(s) \left(1 - \frac{\Delta \cos 2\omega t}{\beta} - \frac{\Delta M_x \sin 2\omega t}{\beta M_y} \right) = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{d^2 v}{ds^2} - \beta M_x(s) \left(1 - \frac{\Delta \cos 2\omega t}{\beta} + \frac{\Delta M_y \sin 2\omega t}{\beta M_x} \right) = 0 \quad (7)$$

будет также и решением уравнения (1).

Предположим, что эпюры $M_y(s)$ и $M_x(s)$ создаются, соответственно, усилиями $q_x(s) = q_x = const$ и $q_y(s) = q_y \equiv 0$.

Тогда уравнения (6), (7) примут вид:

$$-\frac{d^2 u}{ds^2} - \beta M_y(s) \left(1 - \frac{\Delta \cos 2\omega t}{\beta} \right) = 0 \quad (8)$$

$$-\frac{d^2 v}{ds^2} - \beta M_y(s) \left(\frac{\Delta \sin 2\omega t}{\beta} \right) = 0 \quad (9)$$

Имеем: $M_y(s) = q_x f(s), M_x(s) \equiv 0$.

Тогда решения u, v уравнений (3),(4), с эпюрами \tilde{M}_y, \tilde{M}_x , вызванными, соответственно, нагрузками:

$$\tilde{q}_x(t) = q_x \left(1 - \frac{\Delta \cos 2\omega t}{\beta} \right) \quad (10)$$

$$\tilde{q}_y(t) = q_x \left(\frac{\Delta \sin 2\omega t}{\beta} \right) \quad (11)$$

будут решениями уравнения (1).

Рассмотрим простой вал, который представляет собой цилиндр с цилиндрическим отверстием (оси цилиндров параллельны между собой, но в общем случае не параллельны оси вращения).

Рассмотрим сечение вала, перпендикулярное оси вращения (см. рис. 1).

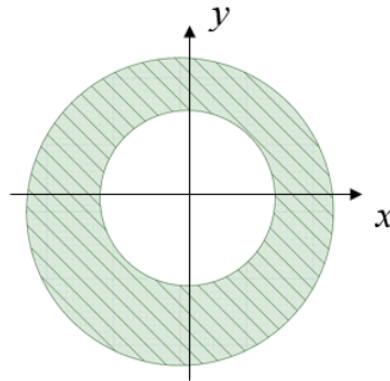


Рис. 1. Сечение простого вала.

Будем считать границы сечения вала окружностями (в предположении, что угол между осью вала и осью вращения мал).

Докажем следующее утверждение:

Если у вала отсутствует разнотолщинность, биение наружной и посадочных поверхностей, то все его сечения осесимметричны относительно оси вращения.

Доказательство

Проекция центра масс сечения вала на ось OY равна:

$$\begin{aligned} y_c^{S_1} &= \frac{1}{S_1} \int_{S_1} y dS = \frac{S}{S_1} \left(\frac{1}{S} \int_{S_1} y dS \right) = \frac{S}{S_1} \left[\frac{1}{S} \left(\int_S y dS - \int_{S_0} y dS \right) \right] = \\ &= \frac{S}{S_1} \left(\frac{1}{S} \int_S y dS - \frac{1}{S} \int_{S_0} y dS \right) = \frac{S}{S_1} \left(y_c^S - \frac{S_0}{S} \frac{1}{S_0} \int_{S_0} y dS \right) = \frac{S}{S_1} y_c^S - \frac{S_0}{S_1} y_c^{S_0} \end{aligned} \quad (12)$$

где S_1 - область сечения вала, S - область сечения вала с «залитым» отверстием, S_0 - область

«залитого» отверстия.

В [3] показано, что вал без разнотолщинности, биения наружной и посадочных поверхностей имеет нулевое значение проекций центра масс. Тогда $y_c^{S_1} = 0$. Поскольку разнотолщинности нет, то $y_c^S = y_c^{S_0}$. Таким образом, $\frac{S}{S_1} y_c^S - \frac{S_0}{S_1} y_c^{S_0} = \left(\frac{S}{S_1} - \frac{S_0}{S_1}\right) y_c^S = y_c^S - y_c^{S_0} = 0$, откуда следует, что $y_c^S = y_c^{S_0} = 0$.

Аналогично можно показать, что $x_c^S = x_c^{S_0} = 0$.

Поскольку из равенства нулю проекций центра масс кругов S_0 и S следует их осесимметричность, то и сечение вала будет также осесимметричным, что и требовалось доказать.

Таким образом, если $J_x \neq J_y$, то должен присутствовать хотя бы один из факторов: разнотолщинность, биение наружной поверхности или биение посадочных поверхностей.

Выражение $J_x^{S_1}$ имеет вид: $J_x^{S_1} = \int_{S_1} x^2 dS = \int_S x^2 dS - \int_{S_0} x^2 dS = J_x^S - J_x^{S_0}$.

Для вала, в котором отсутствуют вышеупомянутые факторы, формулы моментов инерции будут иметь вид:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} \quad (13)$$

где d - диаметр области S , d_0 - диаметр области S_0 , символ S_1 в J_x, J_y опущен.

Если вал имеет постоянное биение a наружной поверхности в направлении OX , что эквивалентно смещению области S_1 на значение a в этом направлении (см. [1]), тогда

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} + a^2 \left(\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 \right) = \\ &= \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} + \frac{\pi a^2 d^2}{4} - \frac{\pi a^2 d_0^2}{4} \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим конечно-элементную схему уравнений (3), (4) [1]:

$$\bar{M}\ddot{e} + \left[\bar{C}_g + \sum_{i=1}^{n_f} \bar{C}_d(i) \right] \dot{e} + \bar{K}e = \bar{Q}(t) \quad (15)$$

где в качестве нагрузки задается распределенная нагрузка от биения наружной поверхности $q_x = \frac{ma\omega^2}{l}$ [1].

Последовательно вычисляя $J_x, J_y, \Delta, \beta, \tilde{q}_x(t), \tilde{q}_y(t)$ и решая (15) с подстановкой $\tilde{q}_x(t), \tilde{q}_y(t)$ вместо q_x , мы получаем приближенное решение уравнения (1).

Постановка задачи

Рассмотрим вал, схема которого показана на рис. 2.

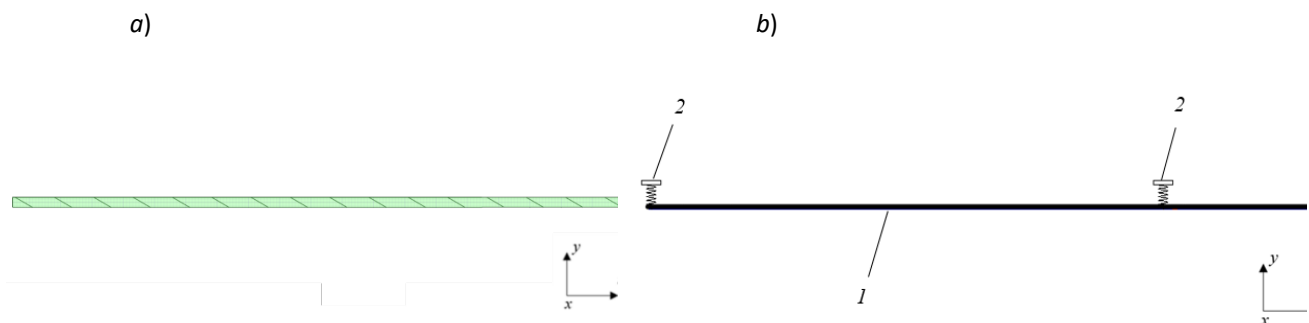


Рис. 2. Схематическое изображение вала:

a – поперечные сечения вала; b – область решения (15); l - область решения;
 $2 - F_i^{x,y} / U_i^{x,y} = K; F, U, K$ – узловые силы, узловые перемещения и коэффициент жесткости соответственно.

Расчет проводился для двух случаев:

Случай 1. В качестве нагрузки задавалась нагрузка q_x .

Случай 2. В качестве нагрузки задавалась нагрузка $\tilde{q}_x(t), \tilde{q}_y(t)$.

Расчет проводился с использованием авторской программы, написанной на языке Python и ПО Dynamics R4.

Настройка эксперимента

Описание эксперимента дано в [4].

Модель эксперимента показана на рис. 3.



Рис. 3. Модель эксперимента [4]

Результаты

Результаты показаны на рис. 4.

a)

b)

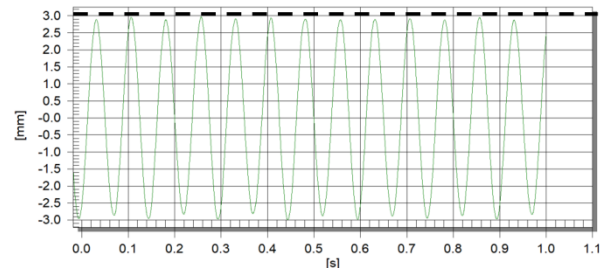
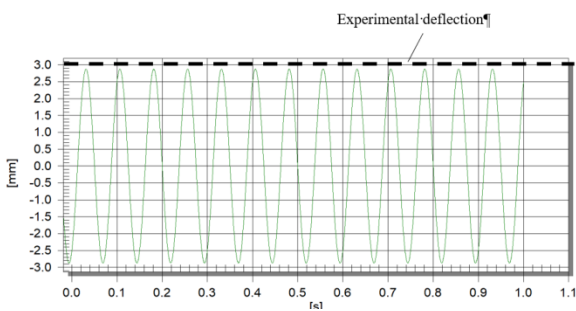


Рис. 4. Изменение во времени прогиба середины вала:

a) случай 1; b) случай 2;

Результаты показывают, что учет двоякой жесткости приводит к результатам, более близким к эксперименту (относительная погрешность составляет 4,2% для случая 1 и 1,2% для случая 2).

Выводы

Предложен метод задания центробежной нагрузки, действующей на вращающемся простом валу с двоякой изгибной жесткостью, вызванной неточностью его изготовления.

На тестовой задаче показано, что учет эффекта двоякой жесткости дает более близкие к эксперименту результаты.

Литература

1. А.Р. Усманов, В.С. Модестов, Метод задания центробежных нагрузок валов при расчете дисбалансного поведения роторов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки– 2023– 16 (1).
2. В.М. Фридман, Теория упругих колебаний, СПб: «Наука», 2014. – с. 253.
3. А. Р. Усманов, В.С. Модестов, Определение центробежных нагрузок, вызванных разнотолщинностью валов // Неделя науки ФизМех: сборник статей Всероссийской научной конференции. 4 – 9 апреля 2022., г. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. с. 248–250.
4. Md Saleem, Diwakar Garikapati, Munukurthi Rama Surya Satyanarayana, Detection of unbalance in rotating machines using shaft deflection measurement during its operation // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering – 2012 – 3 (3). – p. 8-20.

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПРОДОЛЬНОМ НАДРЕЗОМ

Утяшев И.М.¹, Фатхелисламов А.Ф.²

1 - Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

2 - Уфимский университет науки и технологий, Уфа
alfir93@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача об изгибных колебаниях прямоугольного стержня с продольным надрезом. Исследуются закономерности поведения собственных частот изгибных колебаний при изменении параметров продольного надреза. Предложен аналитический метод решения, позволяющий вычислить собственные частоты изгибных колебаний относительно взаимно перпендикулярных осей. В решении задачи стержень с продольным надрезом моделируется как два стержня, где первый не имеет надреза, а второй имеет. Для соединения используются условия сопряжения. Разработанный метод позволяет решить задачу идентификации геометрических параметров различных деталей и конструкций, моделируемых стержнями.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00420.

Введение

Изучение колебаний имеет важное практическое значение, так как позволяет избежать нежелательных последствий колебания путем ограничения их уровня или локализации. Лишь на базе глубокого изучения различных колебаний могут быть решены важные практические проблемы динамики сооружений [1]. Исследование колебаний является актуальным направлением и задачам идентификации трещин посвящено большое число работ [2–14]. Поперечные раскрытые трещины, начиная с работ [3–5], как правило, моделируют условиями сопряжения пружины. В современной литературе предлагаются и другие условия сопряжения для моделирования поперечных трещин [2, 6–7]. Однако, продольная трещина не может быть смоделирована условиями сопряжения. В работе [2] предложено решить задачу идентификации стержня, основываясь на изменении в месте надреза моментов инерции вокруг осей и площадей поперечного сечения.

Изгибные колебания

Рассматривается однородный изотропный прямоугольный стержень длиной $L=1$, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F (см. рис. 1.). Краевые условия: стержень заделан на левом конце и свободен на правом. Поперечное сечение стержня имеет высоту H и ширину B . От точки x_c до правого конца расположен прямоугольный надрез глубиной h и шириной b .

Требуется определить собственные частоты изгибных колебаний стержня относительно вертикальной оси y и горизонтальной оси z , установить зависимость размеров и места начала надреза на эти частоты.

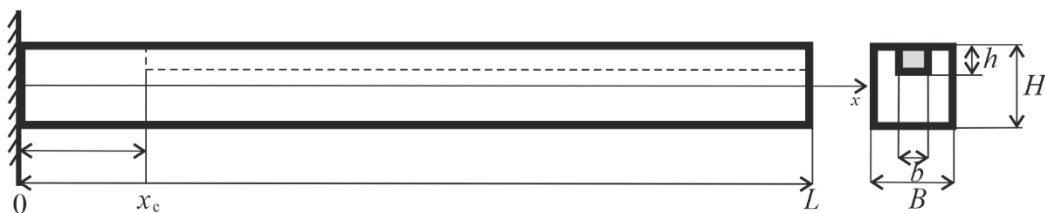


Рис. 1. Изображение стержня с надрезом.

Вначале рассмотрим колебания относительно вертикальной оси y . Уравнение изгибных колебаний описывается следующим уравнением [11, с. 189]:

$$EJ \frac{d^4 U(x,t)}{dx^4} + \rho F \frac{d^2 U(x,t)}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где $U(x,t)$ – поперечное смещение, E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения, ρ – плотность стержня, F – площадь поперечного сечения стержня.

Решение уравнения (1) ищем в виде $U(x,t) = y(x) \cos \omega t$, где ω – круговая частота. Тогда (1) сводится к следующему уравнению:

$$y^{(4)}(x) = \lambda^4 y(x), \quad (2)$$

где $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$. Поскольку стержень слева и справа от точки x_c имеет разную форму поперечного сечения, то уравнения изгибных колебаний слева и справа от точки x_c запишутся в следующей форме:

$$y_{-}^{(4)} = d_1 \lambda^4 y_{-}, \quad y_{+}^{(4)} = d_2 \lambda^4 y_{+}, \quad (3)$$

здесь $d_1 = \frac{F_{-}}{J_{y_{-}}}$, $d_2 = \frac{F_{+}}{J_{y_{+}}}$, y_{-} , y_{+} – поперечные смещения левее и правее точки x_c .

Условие сопряжения в точке x_c для участков стержня запишется так:

$$EJ_{y_{-}} \frac{dy_{-}}{dx} = EJ_{y_{+}} \frac{dy_{+}}{dx}.$$

Моменты инерции относительно оси y находим по формуле:

$$J_{y_{+}} = \frac{B^3 H}{12} - \frac{b^3 h}{12}, \quad J_{y_{-}} = \frac{B^3 H}{12}. \quad (4)$$

Условия сопряжения в точке x_c

$$\begin{aligned} y_{-}(x_c) &= y_{+}(x_c), \quad y'_{-}(x_c) = y'_{+}(x_c), \\ y''_{-}(x_c) &= \frac{J_{y_{+}}}{J_{y_{-}}} y''_{+}(x_c), \quad y'''_{-}(x_c) = \frac{J_{y_{+}}}{J_{y_{-}}} y'''_{+}(x_c). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как стержень заделан на левом конце и свободен на правом, то краевые условия запишутся в следующей форме:

$$y_{-}(0) = 0, \quad y'_{-}(0) = 0, \quad y''_{+}(1) = 0, \quad y'''_{+}(1) = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнений (3) есть:

$$y_{-} = C_{11}y_{1-} + C_{12}y_{2-} + C_{13}y_{3-} + C_{14}y_{4-}, \quad y_{+} = C_{21}y_{1+} + C_{22}y_{2+} + C_{23}y_{3+} + C_{24}y_{4+}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (5) – (6), получим характеристическое уравнение:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) & y_4(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) & y_4'(0) \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} y_{1-} - y_{1+} & y_{2-} - y_{2+} & y_{3-} - y_{3+} & y_{4-} - y_{4+} \\ y_{1-}' - y_{1+}' & y_{2-}' - y_{2+}' & y_{3-}' - y_{3+}' & y_{4-}' - y_{4+}' \\ y_{1-}'' - y_{1+}'' & y_{2-}'' - y_{2+}'' & y_{3-}'' - y_{3+}'' & y_{4-}'' - y_{4+}'' \\ y_{1-}''' - y_{1+}''' & y_{2-}''' - y_{2+}''' & y_{3-}''' - y_{3+}''' & y_{4-}''' - y_{4+}''' \end{vmatrix}, \\ A_3 &= \begin{vmatrix} y_1''(1) & y_2''(1) & y_3''(1) & y_4''(1) \\ y_1'''(1) & y_2'''(1) & y_3'''(1) & y_4'''(1) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю (8), получим частотное уравнение. В связи громоздким видом уравнения, оно здесь не приведено.

Частотное уравнение относительно горизонтальной оси z получается аналогично, разница заключается только моментах инерции

$$J_{z+} = \frac{B^2 H^4 - 4h(H^2 - 1.5Hh + h^2)HhB + b^2 h^4}{12(HB - hb)}, \quad J_{z-} = \frac{BH^3}{12}.$$

Рассмотрим зависимость первой собственной частоты изгибных колебаний относительно вертикальной и горизонтальной осей от положения начала надреза x_c . Примем следующие геометрические параметры: $L=1$, $H=B=0,1$; $h=b=0,01$. Из табл. 1 видно, что относительно вертикальной оси y с увеличением длины надреза первая собственная частота падает, но при длине надреза от 0,8 начинает расти. Для колебаний относительно горизонтальной оси z ситуация иная: с увеличением длины надреза растет и частота, но при достижении длины надреза 0,5, она начинает падать. На характер изменения частот колебаний влияет не только длина, но и положение надреза относительно которой совершаются колебания. Данный факт может найти применение для решения обратных задач, таких как поиск продольных трещин стержней по собственным частотам изгибных колебаний относительно разных осей.

Таблица 1. Значения первой собственных частоты изгибных колебаний при изменении длины надреза.

Положение начала надреза x_c	0.1	0.25	0.3	0.5	0.75	0.8	0.9
Первая частота относительно оси y	0.31752	0.31618	0.316199	0.31631	0.31691	0.31714	0.31774
Первая частота относительно оси z	0.31616	0.31893	0.319251	0.31990	0.31969	0.31954	0.31914

Заключение

Приведенный в работе метод позволяет аналитически определить спектр собственных частот стержня с продольным надрезом. Показано, что спектр изгибных колебаний зависит не только от длины надреза, но и от положения надреза относительно оси колебания. Предложенный метод может найти применение не только в анализе динамики стержней с продольным надрезом, но и в вибродиагностике, для решений обратных задач по поиску дефектов по частотам изгибных колебаний.

Литература

1. Шакирзянов Р.А. Шакирзянов Ф.Р. Динамика и устойчивость сооружений: учебное пособие. Москва: Ай Пи Ар Медиа. 2022. 119 с.
2. Ахтямов А. М., Ильгамов М. А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи. Прикладная механика и техническая физика. 2013; 54(1):152-162.
3. Rice J. R., Levy N., The part through surface crack in an elastic plate. J. Appl.Mech. 1972;39:185-194. <https://doi.org/10.1115/1.3422609>
4. Freund L. B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending. Journal of applied mechanics. 1976;76:112-116. <https://doi.org/10.1115/1.3423760>
5. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames. Journal of sound and vibrations. 1994;172:549-558. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195>
6. Ватульян А. О., Осипов А. В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями. Вестник Донского государственного технического университета. 2012;12(8):34-40.
7. Ильгамов М. А., А. Г. Хакимов Диагностика повреждений консольной балки с надрезом. Дефектоскопия. 2009;(6):83-89.
8. Ильгамов М. А. Продольные колебания стержня с зарождающимися поперечными трещинами. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017;(1):23-31.
9. Утяшев И. М. Продольные колебания стержня с переменным сечением. Многофазные системы. 2019;14(2):138-141. <https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.019>.
10. Акуленко Л. Д., Байдулов В. Г., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017;(6):136-144.
11. Болотин В. В. Вибрации в технике. Справочник. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.
12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames. Journal of sound and vibrations. 1994;(172):549-558.
13. Ахтямов А. М. Фатхелисламов А. Ф. Идентификация местоположения надреза стержня по собственной частоте. Доклады Башкирского университета. 2017;2(2):204-208.
14. Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Нестеров С. В. Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019;(6):98-107. <https://doi.org/10.1134/S0572329919060023>.
15. Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным. Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021;8(2):270-281. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.207>.

УЧЕТ УПРУГОСТИ ОПОР ПРИ РАСЧЕТАХ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Федотова И.А.¹, Федотов А.В.²

1 - Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

2 - Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
fedotovaia@hotmail.com

Аннотация. Приводятся примеры из инженерной практики, в которых имеется необходимость учета упругого закрепления опорных сечений элементов конструкций. Рассмотрен наиболее общий случай – стержень, упруго защемленный по концам на упругих опорах, и некоторые частные случаи. Получены выражения для фундаментальных функций, а также формы и частоты поперечных колебаний стержня при различных соотношениях параметров жесткости его опорных закреплений. При этом используется формулировка задачи с обезразмеренными параметрами и переменными.

Введение

При расчетах элементов различных инженерных конструкций и сооружений для получения наиболее достоверной картины их поведения под расчетной нагрузкой может возникнуть необходимость учета упругого характера их сочленений с другими конструктивными элементами. Например, данный подход может быть актуален для таких классов задач, как расчет вертикальных несущих конструкций зданий и сооружений на прочность и устойчивость или анализ вибраций стержневых элементов решетчатых мостовых ферм от прохода подвижного состава, включая режимы как обычного, так и параметрического резонанса.

При расчете железобетонных вертикальных несущих конструкций зданий и сооружений, работающих в условиях внецентренного сжатия, возникает вопрос о выборе расчетной длины таких элементов (колонн, простенков). Данная величина напрямую зависит от степени защемленности концевых сечений вертикальных элементов в узлах соединения с другими элементами каркаса и от податливости этих соединений при линейных смещениях. Ошибочное определение связанного с расчетной длиной предельного значения продольной силы, которую может воспринять элемент, приводит либо к отсутствию эксплуатационной надежности сооружения, либо к необоснованному перерасходу материалов.

Анализ собственных частот и форм колебаний стержня

Анализ работы стержневых элементов в составе всей конечно-элементной модели конструкции, полученной на основе какого-либо из существующих программных комплексов, не всегда позволяет рассмотреть специфические режимы колебаний стержней и оценить влияние на их динамическую реакцию ряда значимых факторов. Поэтому, в ряде случаев для исследования поведения стержневых элементов под динамической нагрузкой имеет смысл рассматривать их декомпозиционные модели [1], которые формируются с учетом условий закрепления концевых сечений стержня, приближенным к реальным.

Например, для элементов решетчатых ферм металлических мостов опорами стержня являются узлы фермы, которые допускают перемещения концов стержневого элемента как в продольном, так и в поперечном направлениях, а также повороты его концевых сечений. Поэтому такой тип закрепления может быть смоделирован тремя пружинами (Рис. 1), коэффициенты жесткости которых $C_1 \neq C_4$, $C_{1\varphi}$ и $C_{2\varphi}$ определяются статическими методами.

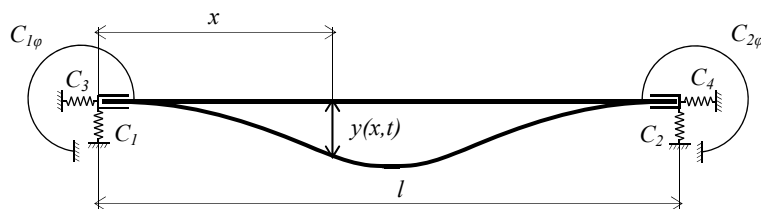


Рис. 1. Расчетная схема упруго опертого стержня с упругим защемлением.

Для стержней сквозной фермы пролетом 110 м в продольном и поперечном направлениях значения коэффициентов жесткости не превосходят $2,28 \cdot 10^5$ кН/м, а максимальная жесткость поворотных пружин составляет $4,78 \cdot 10^5$ кН·м/рад.

Если целью исследования являются только поперечные изгибные колебания стержневого элемента, то в декомпозиционной модели стержня коэффициенты продольной жесткости упругого подвеса C_3 и C_4 принимаются равными бесконечности.

Свободные изгибные колебания стержня описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

где $y(x,t)$ – динамическое перемещение сечения стержня с координатой x (Рис. 1), EI и m – изгибная жесткость и распределенная масса стержня соответственно.

Решение уравнения (1) принимается в виде суммы произведений функций координаты и времени:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t), \quad (2)$$

где $X_i(x)$ – фундаментальная функция, описывающая форму i -ого собственного колебания стержня, $q_i(t)$ – соответствующая этому колебанию функция времени.

В соответствии с принятой расчетной схемой стержневого элемента с упругим закреплением его концевых сечений получаем следующие ограничения для функции собственных форм его колебаний:

$$X''(0) = \frac{\alpha_1}{l} X'(0), \quad X''(l) = -\frac{\alpha_2}{l} X'(l), \quad X'''(0) = -\frac{\beta_1}{l^3} X(0), \quad X'''(l) = \frac{\beta_2}{l^3} X(l), \quad (3)$$

где $\alpha_j = \frac{C_{j\phi} l}{EI}$, $\beta_j = \frac{C_j l^3}{EI}$ ($j=1,2$) – относительные коэффициенты жесткости; l – длина стержневого элемента.

Принимая функцию $X_i(x)$ в стандартном виде, подставляя ее в граничные условия (3) и приравнявая нулю определитель, имеем следующее условие:

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\mathcal{G}_i} & 1 & \frac{\alpha_1}{\mathcal{G}_i} & -1 \\ \frac{\mathcal{G}_i^3}{\beta_1} & -1 & -\frac{\mathcal{G}_i^3}{\beta_1} & -1 \\ \frac{\alpha_2}{\mathcal{G}_i} \cos \mathcal{G}_i - \sin \mathcal{G}_i & -\frac{\alpha_2}{\mathcal{G}_i} \sin \mathcal{G}_i - \cos \mathcal{G}_i & \frac{\alpha_2}{\mathcal{G}_i} ch \mathcal{G}_i + sh \mathcal{G}_i & \frac{\alpha_2}{\mathcal{G}_i} sh \mathcal{G}_i + ch \mathcal{G}_i \\ \frac{\beta_2}{\mathcal{G}_i^3} \sin \mathcal{G}_i + \cos \mathcal{G}_i & \frac{\beta_2}{\mathcal{G}_i^3} \cos \mathcal{G}_i - \sin \mathcal{G}_i & \frac{\beta_2}{\mathcal{G}_i^3} sh \mathcal{G}_i - ch \mathcal{G}_i & \frac{\beta_2}{\mathcal{G}_i^3} ch \mathcal{G}_i - sh \mathcal{G}_i \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Раскрывая определитель матрицы, получаем частотное уравнение, численное решение которого дает спектр радианных частот \mathcal{G}_i , каждая из которых для не нагруженного продольной силой стержня связана с соответствующей циклической частотой k_i соотношением:

$$k_i = \frac{\mathcal{G}_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (5)$$

Для того, чтобы получить функцию $X_i(x)$, необходимо для выбранного значения \mathcal{G}_i найти собственный вектор матрицы из формулы (4), соответствующий нулевому собственному числу. Рассмотрим несколько частных случаев фундаментальной функции для разных вариантов закрепления концевых сечений стержня.

Для упруго защемленного стержня на абсолютно жестких опорах ($\beta_1 = \beta_2 = \infty$):

$$X_i(x) = \sin \mathcal{G}_i \frac{x}{l} + \frac{\alpha_1}{2\mathcal{G}_i} \frac{sh \mathcal{G}_i - \sin \mathcal{G}_i}{sh \mathcal{G}_i + \frac{\alpha_1}{2\mathcal{G}_i} (ch \mathcal{G}_i - \cos \mathcal{G}_i)} (ch \mathcal{G}_i \frac{x}{l} - \cos \mathcal{G}_i \frac{x}{l}) - \frac{\sin \mathcal{G}_i + \frac{\alpha_1}{2\mathcal{G}_i} (ch \mathcal{G}_i - \cos \mathcal{G}_i)}{sh \mathcal{G}_i + \frac{\alpha_1}{2\mathcal{G}_i} (ch \mathcal{G}_i - \cos \mathcal{G}_i)} sh \mathcal{G}_i \frac{x}{l}. \quad (6)$$

Для шарнирно-закрепленной балки на упругих опорах ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$):

$$X_i(x) = \sin \mathcal{G}_i \frac{x}{l} - \frac{sh \mathcal{G}_i - \sin \mathcal{G}_i}{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\mathcal{G}_i^3} sh \mathcal{G}_i + \cos \mathcal{G}_i - ch \mathcal{G}_i} (\cos \mathcal{G}_i \frac{x}{l} + ch \mathcal{G}_i \frac{x}{l}) + \frac{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\mathcal{G}_i^3} \sin \mathcal{G}_i + \cos \mathcal{G}_i - ch \mathcal{G}_i}{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\mathcal{G}_i^3} sh \mathcal{G}_i + \cos \mathcal{G}_i - ch \mathcal{G}_i} sh \mathcal{G}_i \frac{x}{l}. \quad (7)$$

В случае жестко заделанного по обоим концам элемента ($\alpha_1 = \alpha_2 = \infty, \beta_1 = \beta_2 = \infty$) имеем:

$$X_i(x) = \sin \mathcal{G}_i \frac{x}{l} + \frac{sh \mathcal{G}_i - \sin \mathcal{G}_i}{ch \mathcal{G}_i - \cos \mathcal{G}_i} (ch \mathcal{G}_i \frac{x}{l} - \cos \mathcal{G}_i \frac{x}{l}) - sh \mathcal{G}_i \frac{x}{l}. \quad (8)$$

При шарнирном закреплении концевых сечений стержня ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = \infty$):

$$X_i(x) = \sin \mathcal{G}_i \frac{x}{l}. \quad (9)$$

Для первой собственной формы колебаний стержней значения радианной частоты изменяются в пределах π при шарнирном способе опирания до $1,5\pi$ в случае жесткой заделки, т.е., данный параметр характеризует степени защемленности стержневого элемента в узлах конструкции. Так, для элементов поясов сквозной металлической фермы значения \mathcal{G}_1 составляют 4,038...4,069, для раскосов – 3,75...4,605, а для стоек и подвесок, жестко защемленных в узлах фермы, достигают максимального значения – 4,71.

На рисунке 2 представлены первые три формы колебаний стержня и соответствующие им радианные частоты при различных значениях относительных коэффициентов жесткости α и β (принимая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,

$\beta_1 = \beta_2 = \beta$). В первом столбце рассмотрен вариант низких жесткостей: $\alpha = 0, \beta = 10$. В этом случае колебания по двум нижшим формам происходят в основном за счет деформации поперечных пружин; при этом в первой форме присутствует незначительный изгиб самого стержня, а во второй форме стержень практически не деформируется, совершая угловые колебания вокруг центра тяжести при движении поперечных пружин в противофазе. Третья же форма близка к первой форме колебаний свободного стержня (в отсутствие пружин); а соответствующая ей радианная частота близка к радианной частоте первой собственной формы изгибных колебаний свободного стержня (4.91 и 4.73 соответственно) [2].

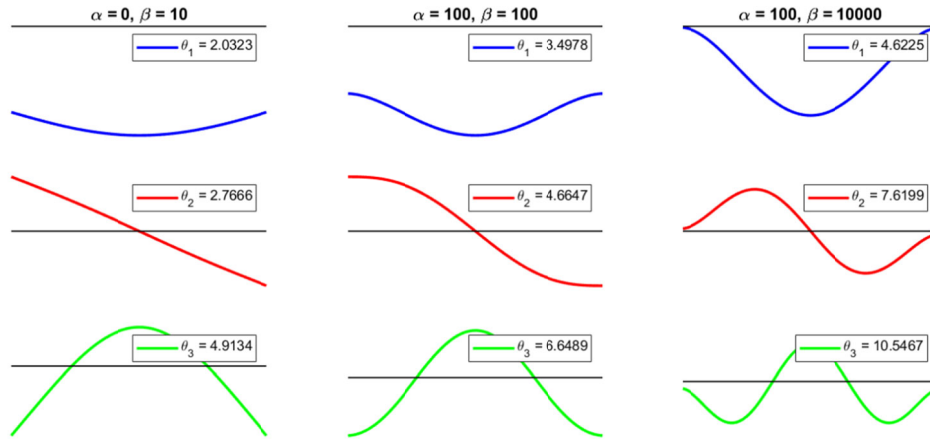


Рис. 2. Формы и частоты колебаний стержня при различных значениях жесткостей опор.

Во втором столбце рассмотрен вариант значений жесткостных параметров одного порядка: $\alpha = \beta = 100$, а в третьем – относительная жесткость поворотной пружины на два порядка превышает жесткость поперечной: $\alpha = 100, \beta = 10000$. С ростом жесткостей опорных закреплений радианые частоты также растут, а формы трансформируются, приближаясь к характерным для жестко заделанного по обоим концам стержня. Видно, что первая собственная частота 4.62 близка к первой частоте колебаний стержня с заделанными концами (4.73).

На рисунках 3(а) и 3(б) показаны графики зависимости первой радианной частоты ϑ_1 и относительного прогиба стержня по первой форме ν_1 от коэффициента α при различных значениях β . Параметр ν_1 определяется как отношение прогиба стержня в центральном сечении к поперечному смещению его концов. Из первого рисунка видно, что при $\beta > 1000$ и $\alpha > 25$ стержень фактически ведет себя как жестко заделанный по концам, и податливость пружин можно пренебречь. При $\beta < 50$ радианная частота слабо зависит от α . Из второго рисунка видно, что при $\alpha > 15$ можно пренебречь податливостью пружин на поворот, а для $\beta < 50$ параметр ν_1 также слабо зависит от α , и его можно считать постоянным уже при $\alpha > 5$.

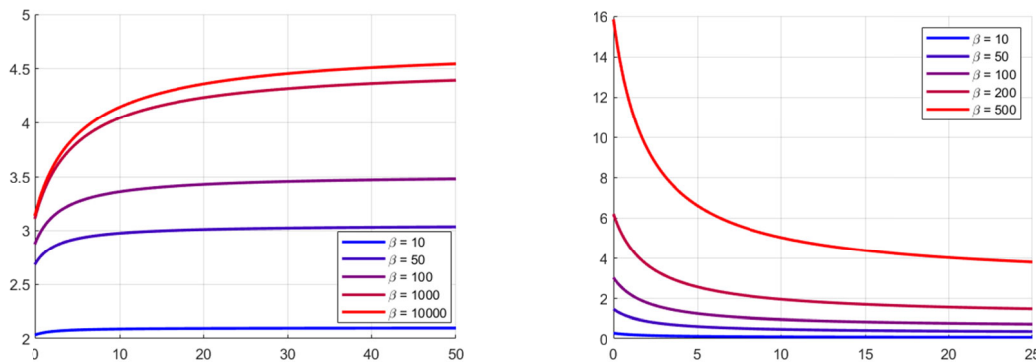


Рис. 3. Зависимость радианной частоты ϑ_1 (а) и параметра ν_1 (б) от жесткостных коэффициентов α и β .

Заключение

В работе рассматривается проблема собственных колебаний упруго защемленного стержня на упругих опорах при различных значениях жесткости пружин. Получены значения относительных жесткостных характеристик, позволяющие приближенно рассматривать вместо общего случая известные частные случаи закрепления стержня.

Литература

1. А. В. Индейкин, И. А. Федотова // Классические задачи динамики мостов в современном изложении. СПб: ПГУПС, 2003. 51 с.
2. С. П. Тимошенко // Колебания в инженерном деле. М.: КомКнига, 2007. 440 с

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

Филиппов С.Б., Нестерчук Г.А.

Санкт-Петербургский государственный университет
s_b_filipov@mail.ru

Аннотация. Предложен асимптотический метод для определения низших частот и форм колебаний составных тонкостенных конструкций, состоящих из пластин и оболочек. Представление решения уравнений колебаний оболочки в виде суммы безмоментного состояния и краевых эффектов позволяет в первом приближении свести решение исходной краевой задачи на собственные значения к нескольким более простым задачам. Приведены приближенные формулы для определения частот колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной, и цилиндрической оболочки, сопряженной с полой сферической оболочкой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

Введение

В современной технике широко используются составные тонкостенные конструкции, образованные сопряжением оболочек и пластин (корпуса самолетов, подводных лодок, ракет, трубопроводы, цистерны, котлы и т.д.). При воздействии на такие конструкции динамических нагрузок возникает необходимость в исследовании спектра частот их колебаний и особенно нижней его части.

Для решения краевых задач на собственные значения теории сопряженных оболочек и пластин применяются различные методы, в том числе численные и вариационные [1], [2]. В виду того, что уравнения теории тонких оболочек содержат малый параметр – безразмерную толщину оболочки, их приближенные решения можно искать в виде асимптотических рядов. Асимптотические методы, основанные на представлении решения в виде суммы основного состояния и краевого эффекта, оказываются особенно эффективным при анализе низкочастотных колебаний сопряженных оболочек. В ряде случаев краевая задача первого приближения для основного состояния распадается на несколько простых краевых задач, каждая из которых соответствует колебаниям одной из сопряженных оболочек [3].

Разработанные в [3] асимптотические методы не могут быть непосредственно использованы для тех задач, где наряду с оболочками элементами конструкции являются пластины. Это связано с тем, что формы низкочастотных колебаний оболочек и пластин качественно различаются. В данной работе продемонстрирован асимптотический подход, позволяющий свести приближенное определение некоторых частот колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с пластиной, к задаче об определении частот пластины. Аналогичный метод использован при решении задачи о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной с полой сферической оболочкой.

Колебания цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной

Рассмотрим колебания круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной шириной b (рис. 1). Такое подкрепление оболочки называется шпангоутом высотой b .

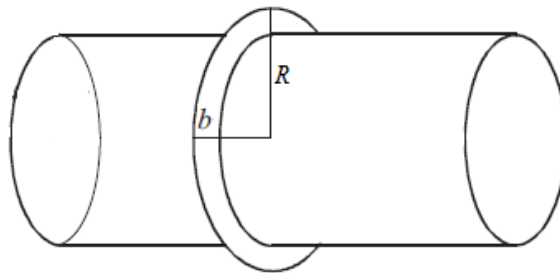


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка, сопряженная с кольцевой пластиной.

Численное решение данной задачи позволяет выделить три типа низкочастотных колебаний этой конструкции. Собственные частоты и формы колебаний первого типа близки к частотам и формам колебаний кольцевой пластины. Формы колебаний второго типа мало отличаются от форм колебаний неподкрепленной оболочки и имеют большое число волн по параллели. Для достаточно длинных оболочек в нижней части спектра могут появиться частоты и формы третьего типа близкие к частотам колебаний балки.

Если b мало по сравнению с радиусом оболочки R , то низшую часть спектра составляют частоты колебаний второго типа. При определении таких частот шпангоут может рассматриваться как круговой

стержень [4]. Исследованиям колебаний оболочек, подкреплённых стержнями, посвящена обширная литература [3].

С увеличением b в нижней части спектра появляются частоты колебаний первого типа. При достаточно большой величине b первой (нижней) частоте соответствует осесимметричная форма колебаний, а сама частота близка к частоте колебаний пластины. Использование асимптотических методов позволяет получить простые приближенные формулы для частот первого типа.

Для определения частот и форм колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной, необходимо найти нетривиальные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания оболочки и пластины, которые удовлетворяют граничным условиям на их краях и условиям непрерывности на параллели сопряжения. В первом приближении решения уравнений оболочки ищутся в виде суммы решений безмоментных уравнений и функций краевого эффекта. После подстановки приближенных решений в граничные условия и условия сопряжения исходная краевая задача распадается на пять независимых задач для определения решений уравнений поперечных и продольных колебаний пластин, безмоментных уравнений оболочки и постоянных входящих в функции краевого эффекта.

Эти задачи могут быть последовательно решены, начиная с краевой задачи, описывающей поперечные колебания пластины, которая является основной. Собственные значения и собственные функции этой краевой задачи дают первое приближение для частот и форм колебаний. Остальные 4 задачи служат для определения следующих приближений.

Простое приближенное решение основной краевой задачи можно найти в предположении, что ширина пластины b много меньше радиуса оболочки R . В этом случае метод возмущений позволяет получить явную формулу для безразмерного параметра частоты

$$\lambda = \frac{a^2 R^2 \gamma^4}{12b^4},$$

где a – толщина пластины, γ – положительный корень уравнения $\operatorname{ch} \gamma \cos \gamma = 1$,

$$\lambda = \frac{(1-\nu^2)\rho R^2}{E} \omega^2,$$

ν , ρ и E – коэффициент Пуассона, плотность и модуль Юнга материала пластины, ω – частота колебаний.

Частоты колебаний первого типа уменьшаются с увеличением ширины пластины. Отметим, что частоты колебаний второго типа с увеличением b возрастают [3, 4].

Колебания цилиндрической оболочки, сопряженной с полой сферической оболочкой

Найдем частоты и формы низкочастотных колебаний круговой цилиндрической оболочки радиусом R , сопряженной с полой сферической оболочкой радиусом R_p . На рис. 1 изображено сечение этой конструкции плоскостью, проходящей через ось ее симметрии. Предположим, что безразмерный радиус кривизны сферического сегмента $r_p = R_p/R$ имеет большую величину. При $1/r_p = 0$ сферическая оболочка превращается в круглую пластину.

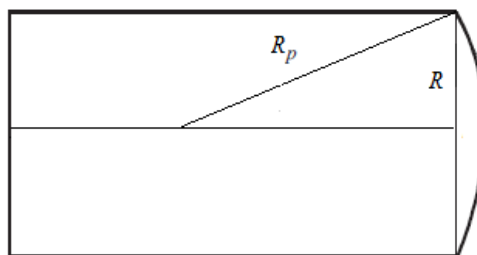


Рис. 2. Сечение цилиндрической оболочки, сопряженной с концевой крышкой в форме сферического сегмента.

Колебаниями первого типа назовем такие колебания, частоты которых близки к частотам колебаний сферической оболочки, а формы колебаний локализованы на ее поверхности. Колебания второго типа мало отличаются от колебаний цилиндрической оболочки с условиями шарнирного опирания на параллели сопряжения. Явные приближенные формулы для частот и форм колебаний цилиндрической оболочки при различных граничных условиях имеются в монографии [5]. Для достаточно длинных оболочек в нижнюю часть спектра могут попасть частоты колебаний третьего типа, которые можно приближенно найти, заменив оболочку балкой с кольцевым поперечным сечением.

Асимптотический метод определения частот и форм осесимметричных колебаний первого типа аналогичен методу, который использовался при решении задачи о колебаниях оболочки, сопряженной с пластиной. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания цилиндрической

и сферической оболочек имеют шестой порядок. На краю цилиндрической оболочки должны быть заданы три граничных условия, которые в первом приближении не влияют на частоты колебаний первого типа. На параллели сопряжения оболочек должны выполняться шесть условий непрерывности. Подстановка в эти условия приближенного решения уравнений колебаний цилиндрической оболочки в виде суммы решений безмоментных уравнений и функций краевого эффекта после отбрасывания в них малых слагаемых приводит к появлению четырех независимых задач для определения неизвестных функций и постоянных. Основной является задача о колебаниях пологой сферической оболочки с граничными условиями скользящей заделки.

После подстановки общего решения уравнений колебаний пологой сферической оболочки в граничные условия и приравнивая нулю определителя системы для трех произвольных постоянных получается следующее уравнение для определения α

$$(\alpha^4 + \beta^2)[J_0(\alpha)I_1(\alpha) + J_1(\alpha)I_0(\alpha)] - \frac{\beta^2}{\alpha} J(\alpha)I_1(\alpha) = 0, \quad \beta^2 = \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 r_p^2},$$

где J_m – функция Бесселя, I_m – модифицированная функция Бесселя. Параметр частоты выражается через положительный корень этого уравнения по формуле

$$\lambda = \frac{a^2 \alpha^4}{12} + \frac{1-\nu^2}{r_p^2}.$$

Полагая $1/r_p = 0$, мы получаем формулу для частот оболочки с крышкой в форме круглой пластины.

Значение первой частоты, полученной по приведенным асимптотическим формулам, на 2% отличается от результата ее расчета методом конечных элементов.

Заключение

На примере двух задач продемонстрирована эффективность асимптотического метода для определения частот и форм колебаний сопряженных пластин и оболочек. Полученные простые приближенные формулы позволяют сделать важные выводы об изменении характера колебаний при изменении параметров конструкции. Результаты асимптотического анализа могут быть использованы на этапе предварительного проектирования составных тонкостенных конструкций.

Литература

1. В.И. Мяченков, И.В. Григорьев // Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 216 с.
2. Kang, J.H. Vibrations of a cylindrical shell closed with a hemi-spheroidal dome from a three-dimensional analysis. *Acta Mech.* Vol. 228, 2, 2017. 531–545
3. С.Б. Филиппов // Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. 196 с.
4. Filippov, S.B. // Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. A State of the Art Report, Springer's Series Advanced Structured Materials*, Vol. 123, 2020. 123–140
5. А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик // Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.

ДИНАМИКА НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Храмов Д.А.¹, Звягин А.В.¹, Зубков А.Ф.²

1 - МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

2 - НИИ Механики МГУ, Москва, Россия

khramov.di@yandex.ru

Аннотация. В данной работе представлены результаты экспериментального исследования и математического моделирования процесса сматывания тяжёлой нити с грузом на свободном конце. В том случае, когда масса груза много больше массы нити, получено совпадение экспериментальных и математически смоделированных траекторий.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-21-00230.

Введение

С древних времён тросы, канаты, нити являются одним из основных конструктивных элементов многих механизмов. Математическое моделирование движения нити, как одномерного объекта в пространстве, нашло множество приложений к практическим задачам текстильной и военной промышленности, а в последнее время предпринимаются попытки использовать тросовые системы в космосе для спуска капсул с орбит или устранения космического мусора. Для исследования возможности реализации таких процессов с помощью тросовых систем, было проведено множество успешных экспериментов, например: TSS1 и TSS1-R, SEDS 1 и SEDS 2, YES и YES2 и др. Для реализации таких процессов были разработаны новые высокопрочные механизмы, подробно описанные, например, в [1, 2]. В ходе эксперимента YES2 космическим европейским агентством была предпринята успешная попытка размотка троса длиной 32 километра с целью демонстрации и получения верификационных данных процесса доставки груза с орбиты [3]. В результате верификации математической модели и анализа процесса размотки троса стало понятно, что такие процессы чувствительны к начальным параметрам запуска и ещё необходимо учитывать эффекты, связанные с распространением волн возмущения в нити и их отражением от границ [4–6]. В связи с чем остаётся актуальной потребность в моделировании движения нити в подобных процессах для последующего использования в космических миссиях.

Несмотря на то, что нить является одномерным объектом, моделирование её пространственного движения является сложной математической задачей, поскольку во многих приложениях длина нити, и характерное время достаточно велики, а уравнения, описывающие движение нити являются нелинейными [7–9]. Для широкого круга прикладных задач нить можно считать нерастяжимой. При этом моделирование её движения сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений, дополненной алгебраическим уравнением, с изменяющейся во времени областью решения. У этой задачи не только множество приложений к практике, но и сама по себе она является интересной с точки зрения математического моделирования.

Экспериментальное и математическое моделирование

Для проведения экспериментального исследования процесса сматывания тяжёлой нити была создана мобильная экспериментальная установка, в которой нить может сматываться через покоящийся или колеблющийся кольцо-приёмник. Экспериментальная установка состоит из: мотора редуктора, который приводит в возвратно-поступательное движение каретку, на которой располагается сматывающее устройство, состоящее из мотора редуктора и катушек различного диаметра на прикреплённом к нему валу; с катушек нить подаётся через кольцо приёмник в наблюдаемую часть; на свободном конце нити закреплён чёрный шарик. В качестве нити была выбрана монофильная нейлоновая леска диаметра равным 0,20 миллиметра и длиной 3,8 метра, а в качестве груза на свободном конце выбраны шарики массой 20 грамм и 0,19 грамма (в последнем случае масса груза сравнима с массой самой нити).

Процесс сматывания нити фиксируется на видеокамеру. Затем пакеты кадров проходят обработку: обрезание, преобразование в серое 8 бит и изменение яркости с контрастностью, чтобы в результате видеть движение чёрного круга на белом фоне. Для обработки таких кадров в среде разработки Labview написана программа, которая, представляя картинку в виде массива данных, присваивает белому пикселю значение 0 и чёрному значение 1, затем проводит суммирование по строкам и столбцам. В результате мы получаем максимальное отклонение суммы от нуля, соответствующее центру масс шарика. Обработывая пакет кадров, получаем координаты центра масс движущегося тела в процессе сматывания нити. А пересчитав на реальные координаты, получаем в точности траекторию движения, представленную на рис. 1.

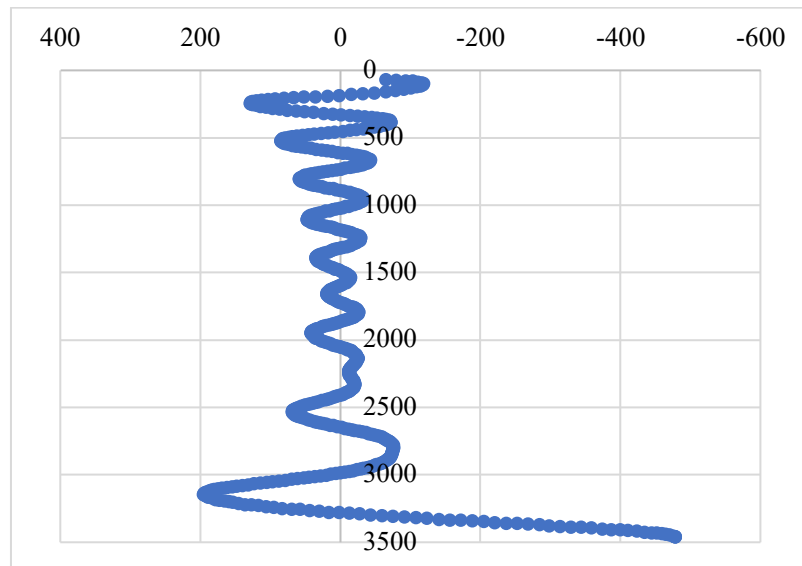


Рис. 1. Траектория движения шарика массой 0,19 г при сматывании со скоростью 0,164 м/с при колеблющемся кольце приёмнике.

В математической модели рассматривается движение идеальной нерастяжимой нити в поле тяжести без учёта сопротивления среды. Предполагается, что колебания нити происходят в одной плоскости. Для случая, когда масса груза много больше массы нити (в этом случае мы можем полагать, что нить в процессе движения будет прямолинейна), получено уравнение для определения угла отклонения нити от её положения равновесия:

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{1-\tilde{t}} \dot{\theta} - \frac{q}{1-\tilde{t}} \sin \theta,$$

$$\tilde{t} = \frac{t \cdot V_0}{L_0}, \quad q = \frac{gL_0}{V_0^2},$$

где \tilde{t} - безразмерное время, L_0 - начальная длина нити, V_0 - скорость смотки, g - ускорение свободного падения.

Численное решение полученного уравнения реализовано в пакете символьной математике Maple. Вычисленные значения угла отклонения позволяют определить натяжение в нити с помощью уравнения:

$$\frac{L_0}{mV_0^2} T(0, \tilde{t}) = (1-\tilde{t}) \left(\frac{d\theta}{d\tilde{t}} \right)^2 + q \cos \theta(\tilde{t})$$

где m - масса груза,

а траекторию движения груза по формулам:

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = 1 - (1-\tilde{t}) \cos \theta(\tilde{t}),$$

$$\tilde{y}(\tilde{t}) = -(1-\tilde{t}) \sin \theta(\tilde{t}).$$

На рис. 2 представлен пример траекторий движения свободного конца нити, полученных в результате численного и экспериментального моделирования (соответственно красная линия и синие квадраты) сматывания нити длины 3,8 метра с массой груза 20 грамм при скорости равной примерно 0,22 м/с.

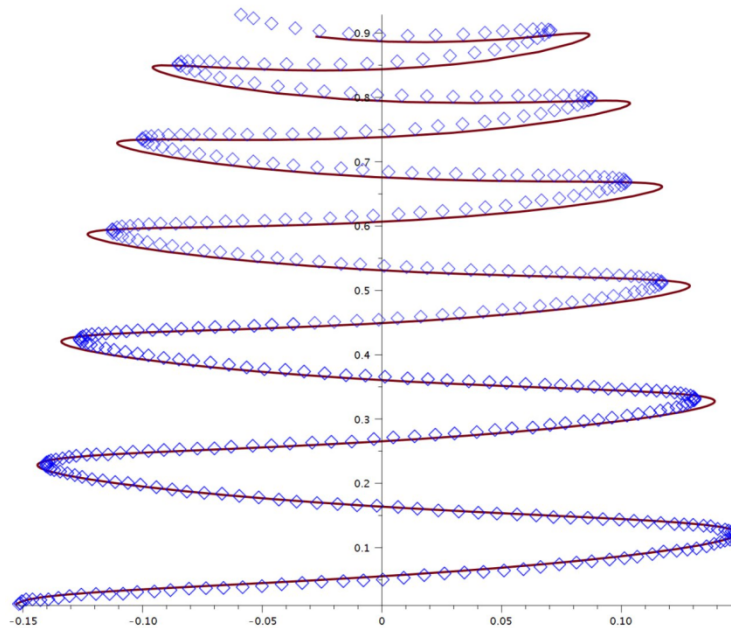


Рис. 2. Красная линия – траектория груза, полученная в результате численного решения; синие квадраты – траектория, полученная из эксперимента.

Заключение.

В результате проведения экспериментов на созданной мобильной экспериментальной установке для исследования движения нити с грузом на свободном конце в процессе смотки с покоящимся и колеблющимся кольцом-приёмником получены траектории движения свободного конца (груза различных масс) нити при различных малых скоростях смотки. С помощью полученных траекторий должна осуществляться валидация результатов численного решения задачи математического моделирования сматывания идеальной нерастяжимой однородной нити.

Представленная математическая модель, как мы видим, достаточно точно совпадает с экспериментальными данными. Значит, её можно использовать для математического моделирования аналогичных процессов.

Литература

1. B. Lansdorp, H.M.J.R. Soemers, E.J. van der Heide, M. Kruijff // Design of a high-tension elastically deforming space tether deployer, IAC-04-IAA-3.8.2, 2004.
2. A. S. Wijnans, B.T.C. Zandbergen, M. Kruijff, E.J. van der Heide // Bare Electrodynamic Tape Tether Experiment onboard the Delfi-1 University Satellite, 4th International Spacecraft Propulsion Conference (ESA SP-555), Chia Laguna, Sardinia, Italy, 2-9 June 2004
3. M. Kruijff, E.J. van der Heide // Qualification and in-flight demonstration of European tether deployment system on YES2, Acta Astronautica 64 (2009) 882–905.
4. Смирнов Н.Н., Звягин А.В., Малашин А.А. // Динамические процессы при разворачивании тросовой системы во время полета КА «Фотон М-3». Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, 20-21 января 2011 года. – М.: Издательство Московского университета. 2011. С.454-457.
5. A.V. Zvyaguin, Yu.A. Demyanov, B.V. Kuksenko, A.A. Malashin, A.A. Luzhin, N.N. Smirnov // Dynamics of tether systems deployment in low Earth orbits, in: in: Proceedings of the Scientific Conference “Lomonosovskie Chteniya” Mechanics, Moscow University Press, 2007, p. 68.
6. N.N. Smirnov, Yu.A. Demyanov, A.V. Zvyaguin, A.A. Malashin, A.A. Luzhin // Dynamical simulation of tether in orbit deployment, Acta Astronautica 67 (2010) 324–332.
7. Zvyaguin A.V., Panfilov D.I. // The motion of the thread with a variable length. Acta Astronautica 97 (2014) pp. 92–98.
8. Весницкий А.И. // Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0172-2.
9. Меркин Д.Р. // Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, главная редакция физикоматематической литературы, 1980. – 240 с.

СИНТЕЗ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УТОЧНЕННЫМ УЧЕТОМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОДСТРУКТУР

Цейтлин Б.В.

ВНИИ Гидротехники им. Б.Е. Веденеева, Санкт-Петербург, Россия
tseitlinbv@mail.ru

Аннотация. Перемещения подструктур разыскиваются в виде разложения по формам собственных колебаний со свободной границей. Для учета вклада высокочастотных форм колебаний используются зависящие от частоты остаточные члены. Условия совместности перемещений подструктур записываются в проекционной форме. Уравнения движения конструкции в целом формируются как в области частот, так и в области времени относительно неизвестных коэффициентов разложения. Сопоставлены результаты расчета гармонических и нестационарных колебаний систем с пропорциональным и с непропорциональным демпфированием, полученные с использованием различных методов учета остаточных членов и аппроксимации их зависимости от частоты.

Наиболее распространенным методом, используемым для расчета колебаний упругих тел, является метод конечных элементов. В то же время его непосредственное применение во многих случаях приводит к необходимости рассматривать системы с чрезвычайно большим числом (десятки и сотни тысяч) степеней свободы. Это предъявляет столь жесткие требования к объему оперативной и дисковой памяти и быстродействию ЭВМ, что во многих случаях делает решение задачи расчета колебаний невыполнимым. Возникает необходимость понизить размерность задачи, моделируя необходимое число низкочастотных форм колебаний конструкции. Невозможность решения задачи на собственные значения для сложной составной конструкции в целом и привела к появлению метода синтеза форм колебаний подструктур. Основная идея метода заключается в том, что конструкция расчленяется на подструктуры, для каждой из которых возможно построение системы функций, позволяющих удовлетворительно аппроксимировать перемещения в пределах подструктуры. Чаще всего в качестве подобных базисных функций используются формы колебаний подструктур при различных граничных условиях, но возможно использование и других наборов функций, например, функций Ланцоша. Перемещения в пределах каждой из подструктур разыскиваются в виде отрезков рядов по построенным базисным функциям. Учет условий совместности перемещений позволяет сформировать уравнения движения относительно неизвестных коэффициентов разложения, которые обычно называют модальными переменными. Различие методов определяется следующими факторами. Первый: какой набор базисных функций используется. Второй: учитывается ли влияние отброшенных членов рядов и каким образом. Третий: каким образом используются условия совместности перемещений, в конце которого при подготовке сборника будут проставлены номера первой и последней страниц тезисов.

При использовании методов синтеза форм колебаний подструктур со свободной границей перемещения в пределах каждой из подструктур разыскиваются в виде отрезков рядов по формам колебаний со свободной границей. Традиционная формулировка метода использует формы собственных колебаний без учета демпфирования и требует точного выполнения условий совместности перемещений. Применение указанного подхода наталкивается на ряд трудностей. Необходимость точного выполнения условий совместности перемещений приводит к неоправданно большому количеству учитываемых форм колебаний. В противном случае имеет место вырождение как матриц динамических податливостей подструктур, так и разрешающих уравнений. Метод медленно сходится и приводит к существенным погрешностям в определении внутренних усилий, в особенности в окрестности границы раздела подструктур и в зонах приложения интенсивных внешних нагрузок. В связи с этим были предложены модификации метода, учитывающие вклад отброшенных высокочастотных форм колебаний с использованием матриц остаточных податливостей [1–4]. Указанные матрицы определялись как разность точных статических матриц податливости и матриц, построенных с использованием низкочастотных форм собственных колебаний. Так, если M , K и B - матрицы масс, жесткости и демпфирования подструктуры, Φ_s , Ω_s определенные в результате решения частичной проблемы собственных значений $K\Phi_s = M\Phi_s\Omega_s$ низкочастотные блоки матриц собственных пар Φ и Ω , а Φ_d и Ω_d – остающиеся неизвестными высокочастотные блоки этих матриц, то перемещения подструктур записываются в форме:

$$u = \Phi_s p_s + \Phi_d p_d = \Phi_s p_s + G_0 F = \Phi_s p_s + G_0 (Q + R). \quad (1)$$

В (1) G_0 - статическая матрица остаточных податливостей, F - вектор приложенных к подструктуре сил, Q - внешние силы, R - силы, обусловленные взаимодействием с другими подструктурами. При этом:

$$G_0 = K^{-1} - \Phi_s \Omega^{-1} \Phi_s^T. \quad (2)$$

Учет матрицы остаточных податливостей позволил точно выполнить условия совместности перемещений, независимо от числа учитываемых форм колебаний. Наш опыт показывает, что удается достигнуть удовлетворительных результатов как при определении перемещений, так и при определении внутренних динамических усилий, если используется достаточное число форм колебаний. Для каждой из подструктур должны учитываться формы собственных колебаний, отвечающие которым частоты не превосходят $2f_{\max}$, где f_{\max} - верхняя граница существенной области спектра воздействия. При использовании статических матриц остаточных податливостей соотношения (1) точны при квазистатических воздействиях. При возрастании частоты колебаний возникает погрешность. В связи с этим при расчете вынужденных гармонических колебаний были использованы зависящие от частоты комплексные матрицы остаточных податливостей [5-9]:

$$G^*(\omega) = (K - \omega^2 M + i\omega B)^{-1} = \Phi_s (\Omega_s - \omega^2 I + i\omega b_s)^{-1} \Phi_s^T, \quad (3)$$

Векторы комплексных амплитуд перемещений подструктур u^* записываются в форме:

$$u^* = \Phi_s p_s^* + \Phi_d p_d^* = \Phi_s p_s^* + G^*(\omega) F^*. \quad (4)$$

В (3), (4) $b_s = \Phi_s^T B \Phi_s$, F^* - вектор комплексных амплитуд приложенных к подструктуре сил, а комплексная матрица остаточных податливостей $G^*(\omega)$ может быть представлена в форме:

$$G^*(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} (i\omega)^j G_j. \quad (5)$$

Матрица $G^*(\omega)$ - медленно изменяющаяся с частотой функция. Это позволяет для не превосходящих f_{\max} частот использовать разложение [8,9]:

$$G^*(\omega) = G_0 - \omega^2 G_2 + i\omega G_1. \quad (6)$$

При использовании указанного подхода возникают вычислительные трудности, связанными с необходимостью обращения матриц, порядок которых отвечает числу условий совместности перемещений, а также заполненностью матриц остаточных податливостей и погрешностями, возникающими при вычислении их элементов. В связи с этим были разработаны свободные от указанных недостатков методы [5-9].

Во-первых, были разработаны рекуррентные алгоритмы пошагового построения разрешающих уравнений [6]. Это позволило учесть разреженность структурных матриц системы, минимизировать число арифметических операций. Во-вторых, были разработаны методы, основанные на приближенном проекционном выполнении условий совместности перемещений. Использовались уравнения, полученные на основе метода неопределенных множителей Лагранжа и вариационных принципов для разрывных полей. При этом независимо аппроксимируются поля перемещений подструктур и силы взаимодействия между ними. Используются уравнения движения с неопределенными множителями Лагранжа λ_j . Векторы λ_j определяют силы взаимодействия между подструктурами k и l на множестве узлов контакта между ними v_j . В

соответствии с принятым при построении $\tilde{\Gamma}$ правилом знаков, на подструктуру k со стороны подструктуры l действуют силы λ_j , на подструктуру l со стороны подструктуры k действуют силы $-\lambda_j$ [8,9]. Вводятся

блочные векторы и матрицы \bar{U} , \bar{F} , \bar{Q} , \bar{R} , \bar{M} , \bar{K} , \bar{B} , Λ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}^T &= (u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T), & \bar{F}^T &= (F_1^T, F_2^T, \dots, F_N^T), & \bar{Q}^T &= (Q_1^T, Q_2^T, \dots, Q_N^T), \\ \bar{R}^T &= (R_1^T, R_2^T, \dots, R_N^T), & \bar{M} &= \text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_N\}, & \bar{B} &= \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}, \\ & & \bar{K} &= \text{diag}\{K_1, K_2, \dots, K_N\}, & \Lambda^T &= (\lambda_1^T, \lambda_2^T, \dots, \lambda_n^T). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Лагранжиан L , кинетическая энергия T , потенциальная энергия Π и диссипативная функция D определяются соотношениями:

$$L = T - \Pi + \bar{U}^T \tilde{\Gamma}^T \Lambda, \quad T = \frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{M} \bar{U}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{K} \bar{U} - \bar{U}^T \bar{Q}, \quad D = \frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{B} \bar{U}. \quad (8)$$

Использование (8) позволяет построить вариационные уравнения [8, 9]:

$$(\delta \bar{U})^T (\bar{M} \ddot{\bar{U}} + \bar{B} \dot{\bar{U}} + \bar{K} \bar{U} - \bar{Q} - \tilde{\Gamma}^T \Lambda) = 0, \quad (\delta \Lambda)^T \tilde{\Gamma} \bar{U} = 0. \quad (9)$$

Из (9) следуют уравнения движения и совместности перемещений:

$$\bar{M} \ddot{\bar{U}} + \bar{B} \dot{\bar{U}} + \bar{K} \bar{U} - \bar{Q} - \tilde{\Gamma}^T \Lambda = 0, \quad \tilde{\Gamma} \bar{U} = 0. \quad (10)$$

Неизвестными в уравнениях (6) являются перемещения узлов всех подструктур и множители Лагранжа.

Вектор сил взаимодействия подструктур \bar{R} определяется соотношением [8, 9]: $\tilde{\Gamma}^T \Lambda = \bar{R}$. При

использовании разработанного метода сохраняются такие достоинства, как учет остаточных членов; возможность рекуррентного построения разрешающих уравнений. В то же время резко снижается объем вычислений [8, 9].

Применение сформулированных выше методов возможно, если каждая из подструктур является системой с пропорциональным демпфированием. Чтобы сделать возможным расчет конструкций в общем случае были разработаны методы, основанные на разложении узловых перемещений и скоростей в ряды по комплексным формам собственных колебаний демпфированной системы. Учитываются моделирующие вклад отброшенных высокочастотных форм колебаний остаточные члены. Как и в случае использования форм колебаний без учета демпфирования, были разработаны рекуррентные алгоритмы пошагового построения разрешающих уравнений, а также методы, основанные на приближенном проекционном выполнении условий совместности перемещений.

Исследование динамического взаимодействия рамного фундамента с корпусами статорных элементов турбины выполнено для энергоблока мощностью 1000 МВт АЭС. Рассматривалась расчетная схема фундаментной рамы с опирающимися на нее четырьмя корпусами статора ЦНД. Разбиение системы на подструктуры показано на рис. 1.

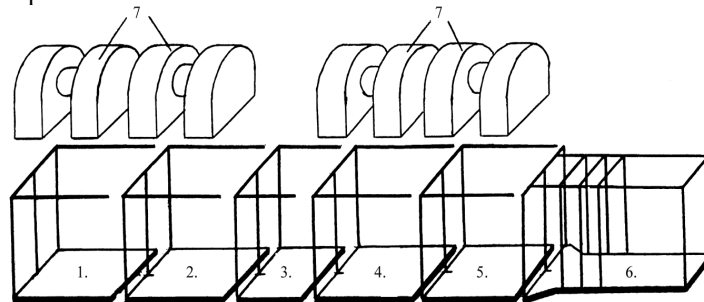


Рис. 1. Разбиение на подструктуры, использовавшееся при расчете колебаний в системе урбоагрегат-фундамент-основание энергоблока мощностью 1000 МВт.

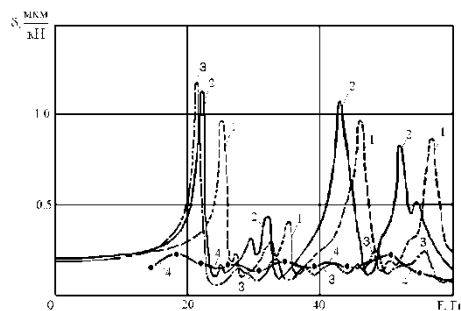


Рис. 2. Амплитудно-частотные зависимости вертикальной динамической податливости в зоне опирания второго подшипника: 1 – расчет рамного фундамента без турбоагрегата; 2 – расчет фундамента с учетом масс турбоагрегата; 3 – расчет совместных колебаний фундамента и турбоагрегата; 4 – экспериментальные данные.

Литература

1. Rubin S., Improved component - mode representation for structural dynamic analysis. // AIAA Journal. 1975, Vol. 13. No. 8. pp. 995-1006.
2. Craig R.R., Jr., Chang C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No. 11. pp. 1633-1635.
3. Wang Z.W., Petyt M. Forced response with increased accuracy using free component mode synthesis techniques. // Accuracy, Reliab. and Train FEM Technol. Proc. 4th World Congr., Interlaken, 17-21 Sept. 1984. Dorset, 1984. pp. 367-374.
4. Leger P., Wilson E.L. Modal summation methods for structural dynamic computations // Earthquake eng. and struct. dyn. 1988. Vol. 16. pp. 23-27.
5. Цейтлин Б.В. Построение матрицы остаточных податливостей и ее использование при решении задач динамики конструкций. // Научно – технические проблемы прогнозирования надёжности и долговечности конструкций и методы их решения. Труды 4-й Международной конференции. С.-Петербург: “Нестор”, 2001, с. 325 - 331.
6. Цейтлин Б.В. Метод синтеза форм колебаний подструктур. Вычислительные особенности, рекуррентные и гибридные алгоритмы // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2002. № 6. с. 21-25.
7. Цейтлин Б.В. Синтез форм колебаний подструктур со свободной границей. Численная реализация и использование для расчета колебаний конструкций. // Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2003, вып. 3, с. 231-240.
8. Цейтлин Б.В. Синтез форм колебаний с использованием уточненных представлений подструктур // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2005. Т. 244. с. 234-251.
9. Цейтлин Б.В. Синтез форм колебаний со свободной границей и уточненным представлением подструктур // Труды XXI Международной конференции “Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов”. Санкт-Петербург: ВВМ, 2006 г., с. 493-506.

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ РЕЗОНАТОРА ВТГ ОТ РАЗНОПЛОТНОСТИ

Шевченко С.А., Мельников Б.Е.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, ФизМех, ВШ МПУ
shevchenko.sergei.a@yandex.ru

Аннотация. В работе затрагиваются вопросы применения математического моделирования на этапе разработки приборов инерциальной навигации, ориентации и стабилизации. В частности, рассматривается модель резонатора волнового твердотельного гироскопа, представленного в виде полусферической тонкой растяжимой упругой оболочки. Основное внимание в работе уделено вопросу расчета расщепления собственной рабочей частоты, вызванной несовершенством плотности. Дана расчетная оценка разброса значений плотности для материала резонатора – кварцевого стекла.

Работа выполнена при поддержке гранта РФ (грант № 21-71-10009).

Введение

Одним из наиболее динамично развивающихся типов приборов, предназначенных для решения навигационной задачи, является волновой твердотельный гироскоп (ВТГ). Все большее количество работ посвящено исследованиям процессов, связанных с разработкой и изготовлением бесплатформенных инерциальных навигационных систем, построенных на базе ВТГ. Это, в свою очередь, позволило достичь высоких точностных параметров изделий, близких к изделиям, построенным на базе классических инерциальных приборов.

Одним из ключевых процессов при разработке ВТГ является построение математической модели изделия, позволяющей прогнозировать тактико-технические характеристики на начальном этапе разработки, работать над их улучшением на этапе производства, а также проводить исследования в случае нештатных ситуаций. В данной работе рассматривается прогнозирование одного из основных параметров ВТГ – расщепление рабочей собственной частоты, вызванное несовершенствами его чувствительного элемента (резонатора). Рассматривается вопрос влияния разноплотности на расщепление частоты.

Описание расчетной математической модели резонатора

Принцип работы ВТГ основан на эффекте Брайана [1, 2] – эффекте инертности упругих волн, возбуждаемых в твердом теле. Чувствительный элемент ВТГ (резонатор) представляет собой замкнутое осесимметричное тело, например, кольцо, в котором возбуждается стоячая волна на рабочей собственной частоте. Ввиду наличия осевой симметрии, а также неизбежного наличия упруго-массовой неоднородности реального резонатора, в системе присутствуют две близкие по значению собственные частоты, разница значений которых и является расщеплением рабочей собственной частоты. В настоящей работе рассматривается классический резонатор ВТГ, представляющий собой тонкую полусферическую оболочку диаметром 30 мм и толщиной 0,9 мм, изготавливаемую из кварцевого стекла. Рассматривается эллиптическая форма изгибных колебаний оболочки (рис. 1).

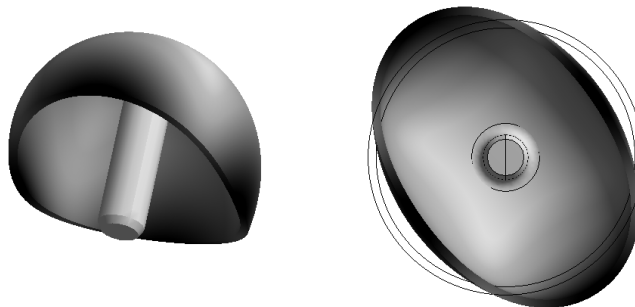


Рис. 1. Эллиптическая форма колебаний полусферического резонатора.

Для нахождения собственной частоты полусферической оболочки, а впоследствии и расщепления, используется математическая модель, построенная на базе уравнений теории тонких упругих оболочек в формулировке В.В. Новожилова [3]. Используются выражения для потенциальной энергии упругой деформации растяжимой оболочки, совместно с выражением для кинетической энергии элементарного объема [3, 4]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho h V^2 A_1 A_2 d\theta d\varphi,$$

$$W = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right) \right] A_1 A_2 d\theta d\varphi + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_1 \kappa_2 - (\tau)^2) \right] A_1 A_2 d\theta d\varphi,$$

где h , m , – толщина полусферической оболочки; A_1 , A_2 – параметры Ляме; ν – коэффициент Пуассона материала; E , МПа, – модуль упругости материала; ε_1 , ε_2 – параметры, характеризующие удлинение срединной поверхности; κ_1 , κ_2 – параметры, характеризующие изгибные деформации срединной поверхности; ω , τ – параметры, характеризующие деформации сдвига и кручения соответственно; θ , φ , град, – zenithный и азимутальный углы, соответственно.

Использование вариационного принципа Гамильтона [5], а также применение метода Ритца [6] сводит задачу по нахождению собственных частот к задаче на собственные значения:

$$(A - \lambda^2 B)C = 0,$$

где A , B – матрицы, связанные с кинетической и потенциальной энергиями, а также координатными функциями; C – вектор-столбец неизвестных коэффициентов; λ – вектор-столбец значений собственных частот.

Учет несовершенств (q) проводится путем внесения соответствующих гармоник в выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$q(\varphi) = q_0 + X \cdot \sin(m\varphi + \beta),$$

где q_0 – номинальное значение рассматриваемого параметра (в данной работе - разноплотности), X – амплитуда гармоники, φ , град, – угловая координата, соответствующая азимутальному углу.

Определение амплитуды разноплотности

Материал рассматриваемого резонатора – кварцевое стекло. Наиболее распространенной отечественной маркой кварцевого стекла, используемого для изготовления подобного типа изделий, является оптическое, высококачественное стекло КУ-1. Данной марке присуще низкое содержание примесей металлов (Al, Fe и др.) [2], однако, ввиду особенностей метода производства в стекле присутствует относительно высокое содержание (в сравнении с другими марками) гидроксильных групп (ОН). Согласно [7] плотность контрольного образца кварцевого стекла (любой марки) составляет $2,21 \cdot 10^3$ кг/м³ при температуре +20 °С, при этом допуск на указанное значение не приводится, что может косвенно свидетельствовать о слабом контроле значения плотности по результатам изготовления поставочных партий. Учитывая то, что кварцевое стекло, в первую очередь – оптический материал, указанное положение дел объяснимо. Поэтому представляет интерес оценить возможный разброс значения плотности, а также соответствующую величину расщепления частоты, вызванную разноплотностью.

Известно достаточное количество расчетных методов, позволяющих определить различные свойства стекол на основе их химического состава. Однако, в случае кварцевого стекла, его состав на 99,8% определяется оксидом кремния (SiO₂), поэтому оценку возможного разброса значения плотности предлагается проводить на основе геометрических параметров ближнего порядка строения стекла.

Структура как кристаллического, так и стеклообразного кремнезема состоит из правильных тетраэдров SiO₄, в вершинах которого располагаются атомы кислорода, в центре соединенные с атомом кварца (рис. 2).

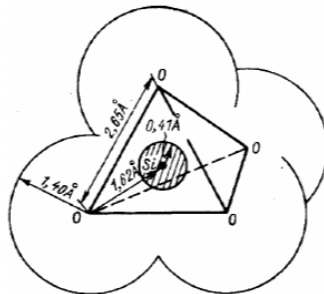


Рис. 2. Тетраэдр SiO₄ в структуре кварцевого стекла [8].

Ионные радиусы кислорода и кремния составляют 140 пм и 41 пм, соответственно. Экспериментально определенная длина связи Si – O составляет $d = 162$ пм [9, 10] и соответствует низкотемпературной модификации кремнезема. Зная угол связи O – Si – O, равный 109,18°, знаем и расстояние между атомами кислорода – 265 пм.

Воспользуемся выражением для расчета плотности элементарной ячейки кварца по [11]:

$$\rho = \frac{1,66 \cdot \gamma \cdot M}{n \cdot d^3}, \text{ [г/см}^3\text{]}$$

где $n = 9$ [ед.] – число атомов минерала в формуле элементарной ячейки (Si_3O_6); M , [а.е.м.] – молекулярная масса; γ , [ед.] – коэффициент относительной плотности упаковки; d , [Å] – длина связи; 1,66 – коэффициент перевода для получения значения плотности в $[\text{г}/\text{см}^3]$.

Подставляя значение $\gamma = 0,33$, соответствующее низкотемпературной (α) модификации кремнезема, а также значение длины связи $d = 1,62$, получим расчетное значение плотности $\rho = 2,6$ $[\text{г}/\text{см}^3]$. Как отмечено в [11] полученный результат хорошо сходится с экспериментальными данными для α -кварца. Однако данное значение выше плотности кварцевого стекла, что не удивительно, ввиду отсутствия у него кристаллической структуры. В отличие от кристаллических модификаций кремнезема, аморфная структура не содержит дальнего порядка (упорядоченности) и по сути состоит из тетраэдров SiO_4 , соединенных не по граням, а по вершинам тетраэдра (атомам кислорода), реализуя хаотическую структуру ввиду непостоянного угла связи $\text{Si} - \text{O} - \text{Si}$, что, в свою очередь, приводит к наличию пустот (полостей), снижающих плотность стекла.

Теперь вычислим плотность стекла, используя выражение для плотности кристалла, представленное в [12]:

$$\rho = \frac{m \cdot M \cdot 10^{-3}}{N_a \cdot V},$$

где m , [ед.] – число молекул в рассматриваемой элементарной ячейке; N_a , [1/моль] – число Авогадро; V , $[\text{м}^3]$ – объем элементарной ячейки.

Принимая для расчета за элементарную ячейку одну молекулу SiO_4 , учитывая тем самым максимально возможное плотное расположение атомов, (но, строго говоря, на практике не наблюдающееся), а также рассчитав объем фигуры, состоящей из пяти соприкасающихся сфер с радиусами, соответствующими ионным радиусам атомов ($V = 4,525 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$), получим максимальное значение плотности $\rho = 3,38$ $[\text{г}/\text{см}^3]$. Ожидаемо, что полученное значение сильно выше реального значения плотности для кварцевого стекла.

Анализируя представленные формулы для расчета плотности отметим их качественное сходство по структуре, при этом в формуле (по [11]) содержится коэффициент γ , который можно принять за уточняющий значение объема и учитывающий дефекты в реальной кристаллической структуре кварца. Принимая массу возможных включений гидроксильных групп, а также массу металлических включений, как незначительную (о малой концентрации говорилось ранее), следуя проведенной аналогии и введя корректирующий коэффициент в формулу (по [12]) $\delta = 0,65$ получим $\rho = 2,197$ $[\text{г}/\text{см}^3]$, что соответствует ожиданиям. Также можно отметить, что объем, занимаемый пустотами, исходя из корректирующего коэффициента составляет $V = 2,43 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$.

Ввиду малого изменения длины связей в SiO_4 [9, 10] в рамках одной модификации – порядка 1%, также можно оценить и разброс по плотности кварцевого стекла. Проведя оценку получим, что плотность может изменяться в диапазоне 2,133...2,263 $[\text{г}/\text{см}^3]$. Полученный разброс по плотности хорошо соотносится с данными, представленными в источниках, для различных марок высококачественного оптического стекла.

Используя полученный диапазон значения плотности, а также представленную выше математическую модель резонатора получим значение расщепления собственной частоты. При проведении расчета используем 4-ю гармонику ($m = 4$) несовершенства (по плотности) с амплитудой $X = 65 \text{ кг}/\text{м}^3$. В результате расщепление рабочей частоты резонатора составило 37,3 Гц при значении рабочей собственной частоты, равном 4809 Гц. Отметим, что полученное значение, вероятно, является предельным.

Заключение

Как результат проведенной работы, представлен способ определения предельного значения расщепления собственной частоты резонатора прибора типа ВТГ в зависимости от возможного дефекта в виде разноплотности по окружному углу. Полученные численные результаты могут свидетельствовать о необходимости дополнительного контроля качества изготовления заготовок из кварцевого стекла, поставляемых в обеспечение изготовления резонаторов для высокоточных измерительных приборов.

Литература

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. // Волновой твердотельный гироскоп. 1985. 125 с.
2. Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. // Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. 2014. 176 с.
3. Новожилов, В.В., Черных, К.Ф., Михайловский, Е.И. // Линейная теория тонких оболочек. 1991. 655 с.
4. Меркурьев, И.В., Подалков, В.В. // Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. 2009. 226 с.
5. Голдштейн Г. // Классическая механика. Пер. с англ. 1975. 413 с.
6. Михлин С.Г. // Вариационные методы в математической физике. 1970. 512 с.
7. ГОСТ 15130-86 // Стекло кварцевое оптическое. Общие технические условия. 1986. 31 с.
8. Таганцев Д.К. // Стеклообразные материалы. 2010. 204 с.
9. Helms R., Poindexter E. // The silicon-silicon-dioxide system: its microstructure and imperfection, Reports on progress in physics, 57:8, 1994. 791-852.
10. Шелби Дж. // Структура, свойства и технология стекла: Пер. с англ. Е.Ф. Медведева. 2006. 288 с.
11. Зуев В.В. // Основно-электронная кристаллохимия и свойства минералов. 2009. 269 с.
12. Шаскольская М.П. // Кристаллография. 1984. 376 с.

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ СИММЕТРИИ НА ДИНАМИКУ МИКРО- И НАНОРЕЗОНАТОРОВ

Штукин Л.В.^{1,2}, Лукин А.В.², Попов И.А.², Игумнова В.С.², Привалова О.В.²

1 - Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

2 - Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

lvtvsh4749@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены конструкции резонаторов, содержащих одинаковые упругие элементы. При малых отклонениях параметров отдельных элементов резонатора вследствие внешних воздействий (изменение массы элемента в детекторе массы, инерционная нагрузка в акселерометре) возможны соответствующие сильные отклонения в динамике резонатора. Это может проявляться в изменении собственных частот резонатора, изменении амплитудных соотношений в собственных формах, изменении периода огибающей в режимах в виде биений. В ряде случаев целесообразно внесение в конструкцию резонатора малой неодинаковости отдельных упругих элементов резонатора.

Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4577.2022.1.1.

Введение

В состав уже существующих и вновь разрабатываемых датчиков микро- и наноуровня, как правило, входят колебательные системы (резонаторы), динамическое поведение которых зависит от измеряемой величины [1]. Выходной величиной такого датчика может быть амплитуда колебаний какого-то элемента резонатора, частота его колебаний, либо другие величины. В целях повышения точности измерений в настоящее время применяют резонаторы с несколькими степенями свободы. Возбуждение колебаний может осуществляться за счет внешнего электрического поля, термоэлектрическим или термооптическим воздействием. Возможно использование автоколебательных режимов. В представленной работе рассмотрены резонаторы, имеющие в своей конструкции два и более одинаковых элемента.

1. Дифференциальный резонатор

Дифференциальный резонатор – детектор массы – состоит из двух параллельно расположенных одинаковых упругих элемента в виде балок и неподвижного электрода, в зазоре между которыми создается постоянное электрическое поле [2]. Колебания возбуждаются подачей короткого электрического импульса в зазор между неподвижным электродом и одним из упругих элементов. Возникают затухающие колебания в виде биений. Период огибающей зависит от величины электрического поля между упругими элементами. Осаждение частицы на один из упругих элементов приводит к значительному изменению периода огибающей при малой массе частицы по отношению к массе упругого элемента. Для получения однозначной зависимости (уменьшение периода огибающей) следует сделать массу упругий элемент, на который осаждается частица, заведомо больше, чем масса второго упругого элемента.

2. Микромеханические дифференциальные акселерометры

Схема дифференциального акселерометра с частотным выходом показана на рис. 1.

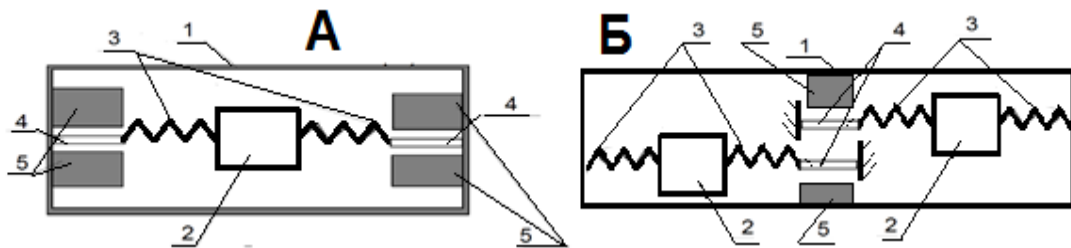


Рис. 1. Дифференциальный акселерометр:

А – с частотным выходом, Б – с модальной локализацией

1 – корпус, 2 - инерционная масса, 3 – упругий элемент, 4 – измерительная балка, 5 – неподвижный электрод.

При действии внешнего ускорения возникают усилия в упругих элементах и соединенных с ними последовательно измерительных балках. Эти продольные усилия изменяют собственные частоты изгибных колебаний измерительных балок. Отклонения собственных частот (расстройка) имеют разный знак. В схеме А (рис.1) для измерения текущего значения изгибных собственных частот измерительных балок создаются автоколебательные контура [3]. Эти автоколебательные контура оказываются слабо связанными между собой. Эта связь возникает вследствие взаимного влияния продольных и изгибных деформаций измерительных балок. В результате возможно существование либо режима синхронизации автогенераторов (при малой расстройке) и

либо режима биений. Период огибающей зависит от разности частот, то есть от уровня измеряемого ускорения, что позволяет использовать этот режим для измерения ускорения. В схеме Б (рис. 1) наличие продольных усилий существенно меняет отношение резонансных амплитуд возбуждаемых изгибных колебаний измерительных балок [4]. На рис. 2 показаны зависимости выходных сигналов датчиков от внешнего ускорения.

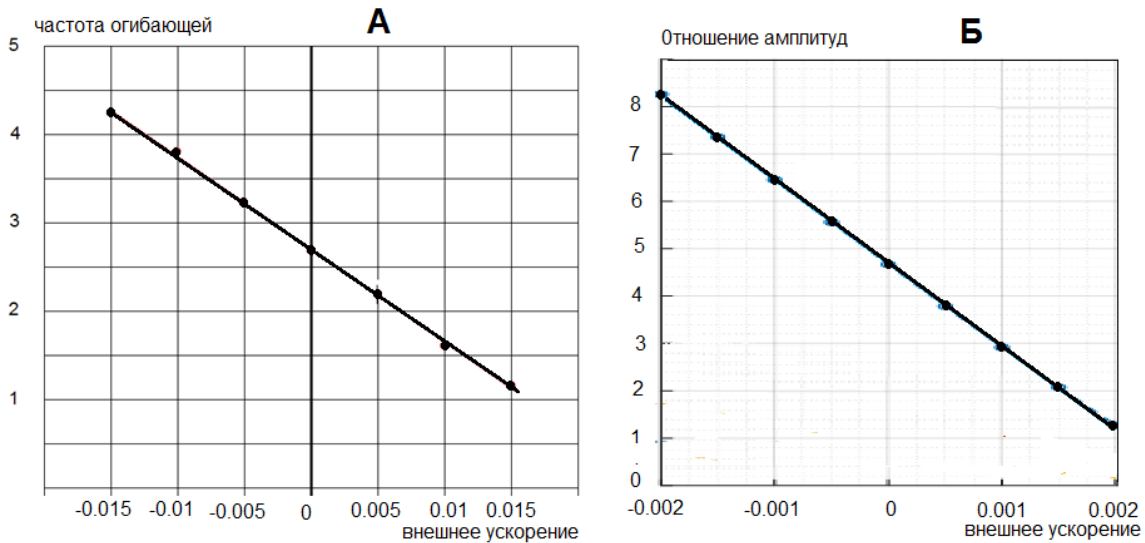


Рис. 2. Зависимости выходных сигналов датчиков от внешнего ускорения.

Однозначная зависимость в обоих случаях возможна при введении начальной расстройки – измерительные балки выполнены не полностью одинаковыми. Их длины и, соответственно, собственные частоты в ненагруженном состоянии сделаны заведомо различными.

3. Резонаторы с возбуждением параметрических колебаний

Схема резонаторов из двух упругих элементов, в которых возможно параметрическое возбуждение колебаний, показаны на рис. 3.

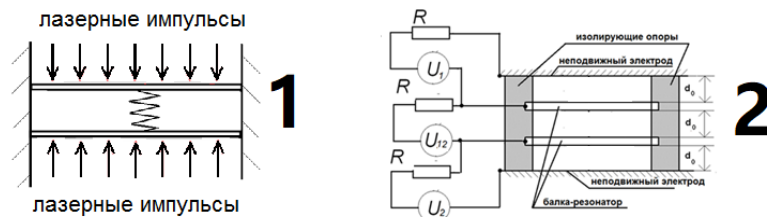


Рис. 3. Резонаторы с параметрическим возбуждением.

Нагрев периодически повторяющимися короткими лазерными импульсами с последующим охлаждением приводит к появлению периодически меняющейся продольной силы в каждом упругом элементе (схема 1). Эта сила позволяет получить параметрическое возбуждение изгибных колебаний. Создание только переменного электрического поля в зазорах (схема 2) также приводит к параметрическому возбуждению изгибных колебаний. Наличие нелинейной связи продольных и изгибных деформаций ограничивает амплитуду возбуждаемых колебаний. Малое отличие параметров упругих элементов (например, их масс) приводит к сильному отличию в амплитудах колебаний отдельных упругих элементов. На рис.4 показана зависимость отношения амплитуд колебаний от относительной разности их масс m для схемы 1 и схемы 2 (рис.3)

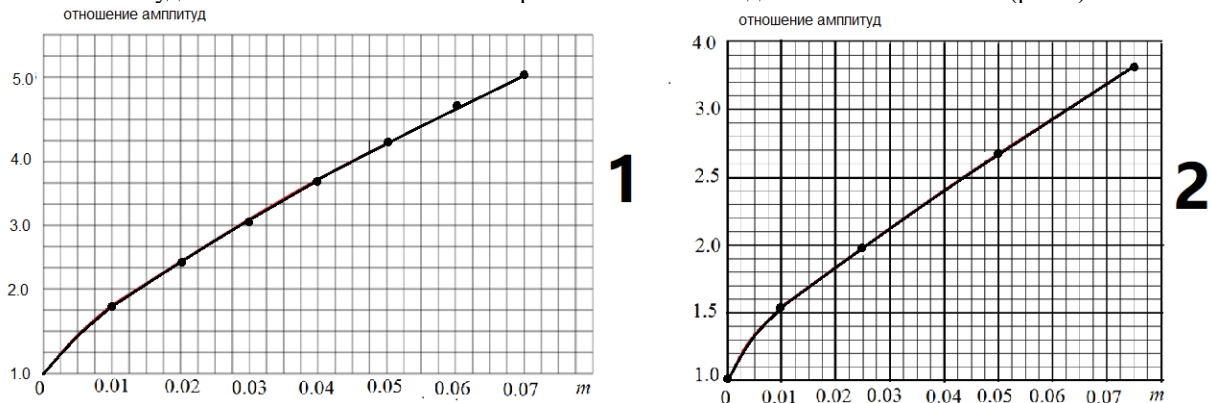


Рис. 4. Зависимость отношения амплитуд от относительной разности масс m .

В некотором диапазоне изменения относительной разности масс зависимость близка к линейной. При использовании таких резонаторов в качестве детектора массы следует ввести конструктивное отличие масс упругих элементов для использования линейной части указанной зависимости.

4. Перспективные конструкции многобалочных резонаторов

На рис. 5 показаны возможные конструкции многобалочных резонаторов.

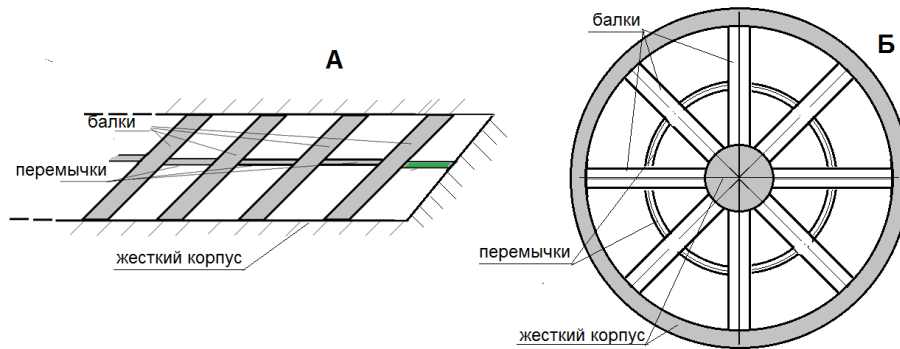


Рис. 5. Многобалочные резонаторы.

Отдельные упругие элементы (балки) могут располагаться параллельно друг другу (рис.5, А) либо по радиусам внутри жестких корпусов цилиндрической формы (рис.5, Б). Балки соединены между собой тонкими перемычками малой жесткости. Можно показать, что в такой колебательной системе собственные частоты локализованы в узком диапазоне от λ до $\lambda\sqrt{1 + c\pi^2}$ при любом числе балок, где λ – низшая изгибная собственная частота отдельной балки, c – относительная жесткость перемычки. Введение начальной неодинаковости отдельных балок (например, их различная длина) приводит к модальной локализации.

Заключение

При малых отклонениях параметров отдельных элементов резонатора вследствие внешних воздействий (изменение массы элемента в детекторе массы, инерционная нагрузка в акселерометре) возможны соответствующие сильные отклонения в динамике резонатора, в частности может сильно меняться период огибающей в режиме биений, может сильно меняться отношение резонансных амплитуд отдельных элементов в режиме вынужденных колебаний. Для получения однозначной зависимости выходного сигнала от внешнего воздействия следует предусмотреть малое конструктивное различие в параметрах упругих элементов.

Литература

1. Л.В.Штукин, И.Е.Беринский, Д.А.Индейцев, Н.Ф.Морозов, Д.Ю.Скубов. Электромеханические модели нанорезонаторов // Физическая мехомеханика // – 2016. – №19 (1). – С. 1–7.
2. Н.Ф.Морозов, И.Е. Беринский, Д.А.Индейцев, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин. Дифференциальный графеновый резонатор как детектор массы // МТТ. -2015 - №2 – с.20-28.
3. Н.Ф. Морозов, Д.А.Индейцев, В.С.Игумнова, А.В.Лукин, И.А.Попов, Л.В.Штукин. Синхронизация слабосвязанных упругих элементов дифференциального МЭМС-акселерометра в режиме двухконтурного автогенератора // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия (2023 г.).
4. Н.Ф. Морозов, Д.А.Индейцев, В.С.Игумнова, Я.В.Беляев, А.В.Лукин, И.А.Попов, Л.В.Штукин. Модель микромеханического акселерометра, основанного явлении на модальной локализации // Доклады Академии наук.Физика, технические науки, 2020, том 494, с.51-56.

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ НАНОПЛАСТИНКИ В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

Юлмухаметов А.А., Хакимов А.Г., Аитбаева А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия
artyr_yulmuhametov@mail.ru

Аннотация. Определяются частоты изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 22-21-00578, <https://rscf.ru/project/22-21-00578/>.

В последнее время динамическая теория пластин находит широкое применение в анализе поведения упругих элементов микро- и наноразмеров. Среди многочисленных видов применения микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотрубок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. [1–3]. Ввиду уникального применения изучению их эксплуатационных свойств уделяется в литературе большое внимание. Например, в [4, 5] дается обзор четырехсот статей, посвященных главным образом консольным резонаторам из нанопленок и нанопроволок. В работе [6] сообщалось о сверхчувствительных наномеханических резонаторах для структурных исследований ДНК-лигандных комплексов. Резонаторы с электростатическим приводом продемонстрировали большой потенциал в широком спектре применений, таких как датчики, устройства связи, логические элементы и квантовые измерения [7]. Для обнаружения и идентификации различных биочастиц и оценки их размеров в работе [8] применяется механический наносенсор. Решение нелинейного уравнения проводится с помощью метода Галеркина.

В [9] определяется низшая собственная частота изгибных колебаний пластинки с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действия присоединенной массы газовой среды с удаленными границами. Здесь, в отличие от [9], определяются собственные частоты нанопластинки.

Представляет интерес вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. Это проще выяснить в случае несжимаемой жидкости. Далее, с учетом полученного результата рассматривается случай сжимаемой жидкости в более простой постановке.

На нижнюю и верхнюю поверхность пластины действуют давления p_1 и p_2 жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Здесь p_1, p_2 – избыточные давления. При определении нагрузки q исходим из предположения, что ρ_1, ρ_2 и p_1, p_2 остаются постоянными при изгибе пластины.

Предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении оси x . Возникающие в результате движения пластины давления обозначим через \bar{p}_1 и \bar{p}_2 . Уравнения динамики несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ имеют вид [10–12]

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t}. \quad (1)$$

Условия на поверхностях

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \left(z = -\frac{h}{2} + w \right), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \left(z = \frac{h}{2} + w \right),$$

где h – толщина пластины, $w(x, t)$ – прогиб, x, t – координата.

На большом удалении от поверхности возмущения от пластины исчезают

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad (z = -\infty), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad (z = \infty).$$

Предполагаем, что пластина неограниченной длины по оси x опирается на опоры, расположенные на равных расстояниях L и допускающие свободный поворот. В частном случае $\rho_1 = \rho_2, p_1 = p_2$ и функции прогиба $w = W \sin \beta x \sin \omega t, \beta = \pi n / L, n = 1, 2, \dots$

что удовлетворяет условиям $w = 0, \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ при $|x| = 0, L, 2L, \dots$. Тогда получаем для собственной частоты ω выражение

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + \alpha}{1 + \mu}, \quad \omega_0^2 = \frac{D \beta^4}{\rho h}, \quad \alpha = \frac{p_1 h}{D \beta^2}, \quad \mu = \frac{2 \rho_1}{\rho h \beta}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2)$$

Здесь ω_0 – частота пластины, не контактирующей с жидкостью, E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала пластины.

По модели сжимаемой среды вместо уравнений (1) имеем [10-12]

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t}, c_{1,2}^2 = \kappa_{1,2} \frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}} \quad (3)$$

где $c_{1,2}$ – скорость звука, $\kappa_{1,2}$ – коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

Рассмотрим частный случай одинаковых сред при одинаковых давлениях ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$, $c_1 = c_2$). Решая уравнение (3) с вышеприведенными граничными условиями в случае сжимаемой жидкости получаем частотное уравнение:

$$1 - Z + \alpha - \frac{\mu Z}{\sqrt{1 - \eta Z}} = 0, \alpha = \frac{p_1 \beta^2}{\rho \omega_0^2}, \mu = \frac{2\rho_1}{\rho h \beta}, \eta = \frac{\omega_0^2}{c_1^2 \beta^2}, Z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (4)$$

Проведенные расчеты при $E = 76 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0.37$, $\rho = 10500$ кг/м³, $h = 20$ нм, $L = 2000$ нм, $\kappa_{1,2} = 1.4$, показывают, что внешнее давление и наличие газа оказывает существенное влияние на частоты колебаний пластины. На рис. 1 приводятся зависимости первой и второй частот изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 1 видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

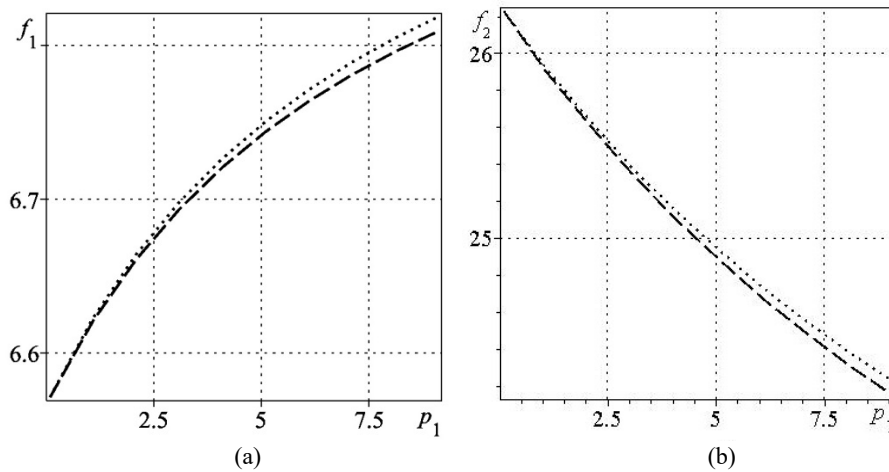


Рис. 1. Зависимость первой f_1 (a) и второй f_2 (MHz) (b) собственных частот изгибных колебаний пластинки от давления p_1 (МПа) по формулам для несжимаемой (2) и сжимаемой (4) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_1 = 1.9768$ кг/м³ (пунктирная, штриховая линии соответственно).

Установлено, что влияние контактирующей среды на собственные частоты колебаний является значительным для весьма тонких пластин и пленок с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае элементов микро- и наноразмерных толщин.

С ростом давления первая собственная частота колебаний возрастает, а вторая убывает. В случае легких газов (водород, гелий) влияние давления может превалировать над их плотностью. Эти результаты могут быть использованы при моделировании колебаний пластинок, контактирующих с жидкостью и газом, в том числе микро- и наноразмеров.

Литература

- O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R.C., Lenander M., Lucero E., Neeley M., Sank D., Wang H., Weides M., Wenner J., Martinis J.M., Cleland A.N. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. No. 464. P. 697-703. DOI: 10.1038/nature08967.
- Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S., Babcock K., Manalis S.R. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. No. 446. P. 1066-1069. DOI: 10.1038/nature05741.
- Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. No. 462. P. 1075–1078. DOI: 10.1038/nature08626.
- Raman A., Melcher J., Tung R. Cantilever dynamics in atomic force microscopy // Nano Today. 2008. Vol. 3. No. 1–2. P. 20-27. DOI: 10.1016/S1748-0132(08)70012-4.
- Eom K., Park H. S., Yoon D. S., Kwon T. Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // Physics Reports-Review Section of Physics Letters. 2011. Vol. 503. No. 4–5. P. 115-163. DOI: 10.1016/j.physrep.2011.03.002.
- Stassi S., Marini M., Allione M., Lopatin S., Marson D., Laurini E., Priol S., Pirri C. F., Ricciardi C., Fabrizio E. D. Nanomechanical DNA resonators for sensing and structural analysis of DNA-ligand complexes // Nature Communications. 2019. No. 10. P. 1-10. DOI: 10.1038/s41467-019-09612-0.

7. Jaber N., Hafiz M. A. A., Kazmi S. N. R., Hasan M. H., Alsaleem F., Ilyas S., Younis M. I. Efficient excitation of micro/nano resonators and their higher order modes // *Scientific Reports*. 2019. No. 9 (319). DOI:10.1038/s41598-018-36482-1.
8. SoltanRezaee M., Bodaghi M. Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel biosensor // *Scientific Reports*. 2020. No. 10 (3385). DOI: 10.1038/s41598-020-60296-9.
9. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2022. №3. С. 88-96. <https://doi.org/10.31857/S0572329922030084>
10. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.
11. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
12. Попов А. Л., Чернышев Г. Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит. 1994. 208 с.

СЕКЦИЯ I

Подсекция I-4

Механика систем твердых и деформируемых тел

СОВМЕСТНЫЙ РАСЧЁТ ФЛАТТЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ В СВЯЗКАХ FLOWVISION-ABAQUS И FLOWVISION-FIDESYS

Аксенов А.А.¹, Азаров А.А.^{1,2}, Вершинин А.В.^{1,3}, Левин В.А.³, Овсянникова Е.Е.^{1,2},
Улькин Д.А.³

1 - ООО ТЕСИС, Москва
2 - МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
3 - ООО «Фидесис», Москва
elena@flowvision.ru

Аннотация. В статье моделируется флаттер крыла модели AGARD 445.6 в дозвуковом воздушном потоке. Моделирование производится с использованием технологии FSI – двусторонней связи конечно-элементной модели крыла и набегающего потока воздуха. Используются расчётные связки CFD-кода FlowVision с КЭ-кодами Abaqus и Fidesys. Проводится сравнительный анализ результатов, показывающий хорошее совпадение, что валидирует совместный расчёт FlowVision и Fidesys.

Введение

Флаттер – это самовозбуждающиеся незатухающие упругие колебания, возникающие при определённой скорости обтекания потоком жидкости или газа [1]. Каждой из возможных форм флаттера соответствует своя критическая скорость, и все расчёты флаттера проводятся с целью удостовериться, что наименьшая из критических скоростей с достаточным запасом превышает максимально возможную скорость полета самолета. Совпадение частоты флаттера с собственной частотой конструкции приведёт к резонансу. Крыло проектируется таким образом, чтобы отстроить собственные частоты от ожидаемых частот флаттера.

Основной текст

Модель крыла

В качестве модели крыла выбрана модель AGARD 445.6 [2] со стандартными размерами, показанными на рис. 1. Размеры: $c_r = 0.558$ м, $c_t = 0.368$ м, длина половины пролёта составляет 0.762 м, соотношение сторон составляет 1.65, коэффициенты конусности 0.65. Крыло отведено под углом 45° .

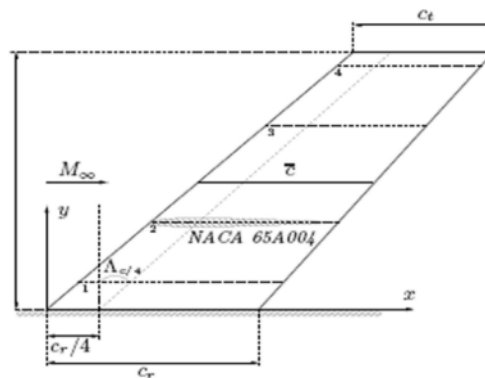


Рис. 1. Стандартизованная геометрия крыла.

Материал крыла – красное дерево, которое моделируется линейным изотропным материалом с плотностью $\rho = 413.055$ кг/м³, модулем Юнга $E = 3\ 245.5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.31$.

КЭ-модель

Для сравнения результатов в программных комплексах Abaqus и Fidesys были подготовлены два проекта. В Abaqus конечно-элементная сетка состоит из трехмерных сплошных элементов C3D20R с квадратичными функциями формы (рис. 2а – слева). Модель содержит 20 040 элементов и 96 207 узлов. В программном комплексе Fidesys сетка представляет из себя гексаэдры первого порядка (рис. 2б).

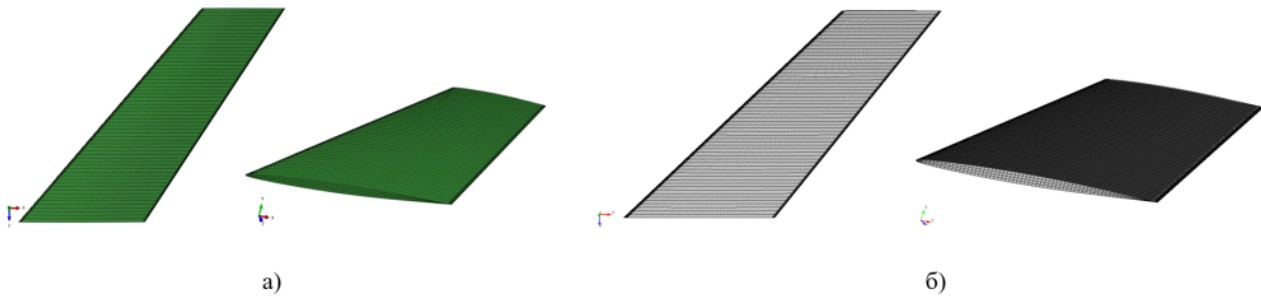


Рис. 2. Конечно-элементная модель Abaqus (а) и Fidesys (б).

Крыло закреплено по торцу с наибольшей хордой. Для того, чтобы смоделировать флаттер, крыло было отклонено от начального положения с помощью силы, приложенной к свободному торцу. Условия закрепления и силы показаны на примере проекта Abaqus (рис. 3а), аналогичным образом закрепления и нагрузка прикладываются в Fidesys. Закон приложения силы показан на рис.3б.

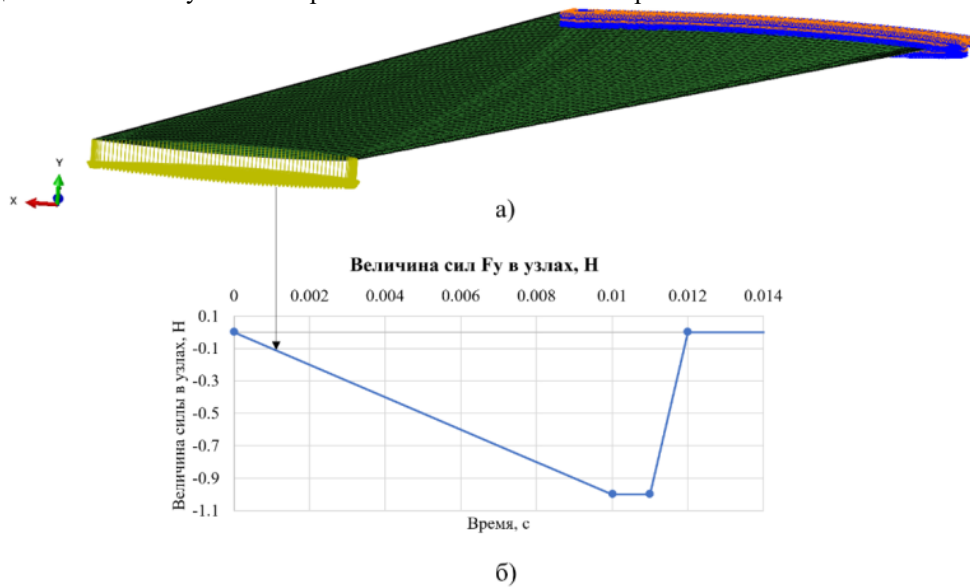


Рис. 3. Условия закрепления и приложенные нагрузки (а), закон распределения сил от времени (б).

Проект FlowVision

В программном комплексе FlowVision моделируется среда, обтекающая крыло. Процесс проходит при $T = 286.4$ К и $p = 35\,363.7$ кПа. Характеристики воздуха взяты из стандартной базы веществ FlowVision. Для описания движения используется уравнение Навье-Стокса. В качестве модели турбулентности выбрана стандартная k-ε модель.

Расчётная область представляет из себя параллелепипед размером 1.174 x 0.022 x 0.763 м, в котором расположено крыло. Такие размеры обусловлены необходимостью снизить влияние граничных условий на решение. В проекте ставится три граничных условия: стенка (крыло), симметрия, неотражающее (рис. 4). На граничном условии «неотражающее» задана скорость потока на бесконечности, равная 172.2 м/с.

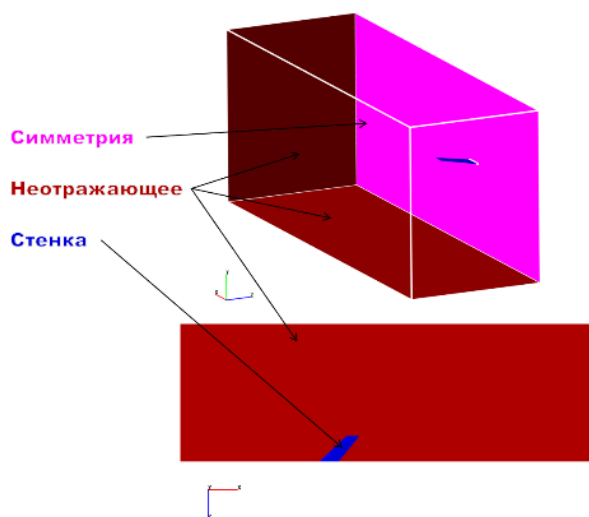


Рис. 4. Граничные условия в ПК FlowVision.

Начальная сетка показана на рис. 5. (минимальная ячейка $\sim 0.31 \times 0.28 \times 0.19$ м), также используется адаптация 3-его уровня по поверхности крыла и описывающего его конуса с первым уровнем адаптации.

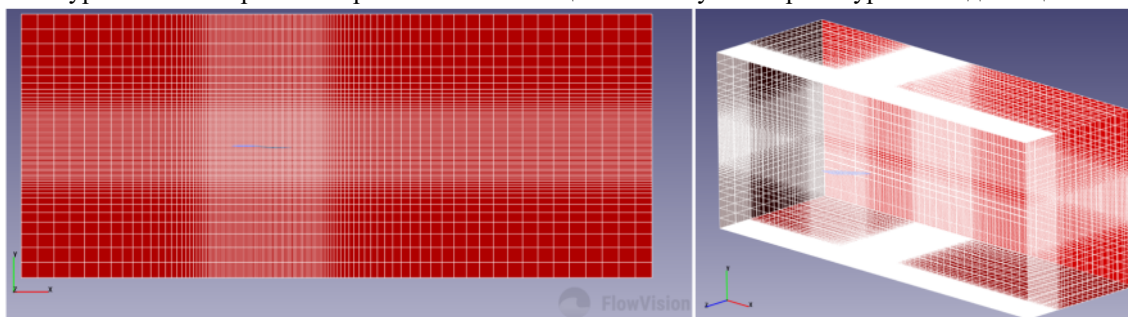


Рис. 5. Начальная сетка в проекте FlowVision.

Результаты моделирования

В ходе моделирования получены распределение давлений (рис. 6а) и скоростей (рис.6б).

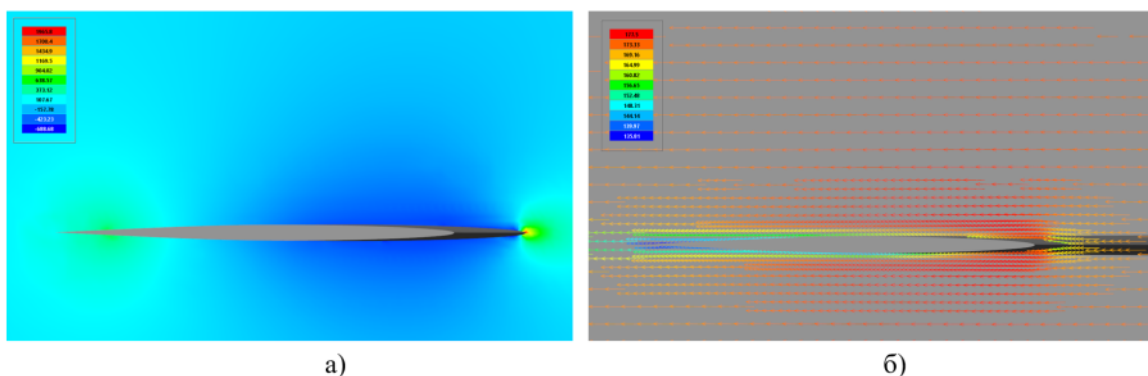


Рис. 6. Распределение давлений (а) и скоростей (б) на плоскости.

Заключение

В работе показано моделирование флаттера крыла AGARD 445.6 с использованием совместного расчёта CFD-кода FlowVision и КЭ-кодов Abaqus и Fidesys. Также проведен сравнительный анализ между FlowVision-Fidesys и Fidesys-Abaqus, схожесть результатов говорит о корректности работы связки FlowVision-Fidesys.

Литература

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - 1-е изд. - М.: Высшая школа, 1980, 408 с.
2. Yates E C 1988 AGARD standard aeroelastic configurations for dynamic response I wing 445.6. AGARD Report 765, North Atlantic Treaty Organization, Group for Aerospace Research and Development. Vol 10.

МНОГОСЛОЙНЫЕ УДАРОПОГЛОЩАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА НА ОСНОВЕ ТОРОИДАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Богданов В.В.^{1,2}, Орешин Я.А.¹, Чабунин И.С.¹

1 - Московское высшее общевойсковое командное училище, Москва, Россия

2 - Государственный Университет Управления, Москва, Россия

vvbogd@yandex.ru

Аннотация. Изложен подход к созданию многослойных ударопоглощающих устройств на основе тонкостенных оболочек тороидальных форм, близких к катеноиду. Затрагиваются вопросы алгоритмизации их прочностных и жёсткостных расчётов при создании прототипов конструкций, а также практическое применение разработанных моделей в пассивных демпфирующих системах автотранспортной техники и машиностроения. На основании проведённых авторами исследований, предложен и запатентован ряд полезных моделей на ударопоглощающие устройства (патенты РФ).

Введение

Рассматривая различные варианты тонкостенных оболочечных конструкций, которые во многих устройствах автотранспортной техники выполняют ударозащитные функции, можно сделать закономерный вывод, что наиболее оптимальными среди них по параметрам массы, эргономики и спектра упругопластических деформаций являются формы, близкие к катеноиду [1, 2].

Под катеноидом будем понимать поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая образована вращением цепной линии. Радиусы кривизны катеноида равны:

$$R_2 = -R_1 = \frac{r_0}{\sin^2 \theta}, \text{ где } r_0 - \text{ радиус наименьшего параллельного круга поверхности.}$$

Пассивная система гашения демпфирования ударной нагрузки достаточно давно применяется в автотранспортной технике. Такие устройства называются энергопоглощающие вставки или крашбоксы. Как правило, крашбокс – это отдельно взятая тонкостенная оболочка, монтируемая между лонжероном автомобиля и бамперным брусом. Однако в технике, в частности, в автомобилестроении, известны примеры использования составных конструкций на основе тонкостенных оболочек. В основном это энергопоглощающие барьеры, устанавливаемые на опасных крутых поворотах трасс или заградительные барьеры, монтируемые при ремонтных работах на скоростных трассах, когда нельзя полностью перекрыть движение.

В последнее время опыт использования деформируемых барьеров и крашбоксов успешно применяется в военной технике [3, 4]. За рубежом широкое распространение получили одноразовые грузовые парашютные системы, например, серий LCADS-LV (Low Cost Aerial Delivery System – Low Velocity) и LCADS-HV (Low Cost Aerial Delivery System – High Velocity). Обе одноразовые парашютные системы используют одноразовый грузовой контейнер типа LCC (Low Cost Container). Контейнер состоит из фанерной платформы, многослойных бумажных амортизаторов, изготавливаемых из легкого полипропилена ремней крепления и ряда других конструктивных элементов.

Следует отметить, что разработки в области десантирования грузов, как способа тылового обеспечения подчиненных подразделений и проведении гуманитарных операций, представляют собой актуальную задачу и уже активно используется потенциальным противником – командованием коалиционных сил Запада в Афганистане, Ираке и Сирии. В ходе подобных операций применяются вышеупомянутые грузовые контейнеры. Кроме того, военная тематика легко трансформируется в гражданскую, если иметь ввиду не потенциальный театр боевых действий, а гуманитарные операции или ликвидацию последствий при возникающих природных катаклизмах, когда необходимо без потерь перебрасывать тяжёлые грузы или технику на места, лишённые по тем или иным причинам аэродромов или складских площадок.

Алгоритмизация расчёта и принципы работы многослойных ударопоглощающих устройств

Большинство конструктивных решений (когда используются тонкостенные оболочки, преимущественно сотовых структур, как по отдельности, так и в виде так называемых сэндвич-панелей) не являются оптимальными с точки зрения либо недостаточно большой величины деформационного пути для гашения скорости в процессе столкновения транспортных средств, либо формы самого крашбокса. Так, например, на платформах, используемых для десантирования армейской бронетехники или энергопоглощающих барьерах, как правило, используется сотовая слоистая конструкция (последовательно установленные друг на друге и сопряжённые между собой крашбоксы), что также накладывает ограничения на габариты и количество слоёв. При таком расположении соединяемых крашбоксом деталей конструкций невозможно в полной мере реализовать максимально возможную длину для потенциальной деформации этого ударопоглощающего элемента, а также использовать заложенный при проектировании диапазон прочностных свойств соединения, и, следовательно, снижение энергетического уровня при восприятии ударной нагрузки ударопоглощающим устройством не достаточно эффективно. Одно из подтверждений вышесказанному

сравнительный расчёт методом конечных элементов традиционных форм тонкостенных оболочек и тороидальных форм, близких к катеноиду.

В связи с вышеизложенным, авторы поставили следующую задачу: разработать модели крашбкса и составных конструкций на его основе, в которых заложена реализация максимально возможного снижения энергетического уровня при соударении за счёт использования предельно возможной величины продольного деформирования крашбкса при сохранении его посадочных габаритов и особенностей формы, в частности, сочетание положительной и отрицательной Гауссовой кривизны срединной поверхности, что позволит наиболее эффективно минимизировать последствия удара.

Техническим результатом предложенных моделей является наиболее эффективное снижение энергии удара при потенциальном соударении за счёт применения составной оболочечной конструкции из чередующихся тонкостенных оболочек положительной и отрицательной Гауссовой кривизны срединной поверхности, близких к катеноиду, а также экономия материала по сравнению с существующими серийными ударопоглощающими вставками в виде полых тонкостенных цилиндров, параллелепипедов, шестивосьмигранников и т.п.

Техническим решением предложенной модели является применение составной тонкостенной оболочечной конструкции с чередованием двух или более оболочек, близких к катеноиду, сочетающих положительную и отрицательную Гауссову кривизну срединной поверхности, что позволяет эффективно и в наиболее полной мере использовать длину (высоту) данного составного энергопоглощающего элемента для деформации вследствие соударения (рис. 1), что было подтверждено проведенным расчётом методом конечных элементов в программном комплексе NASTRAN.

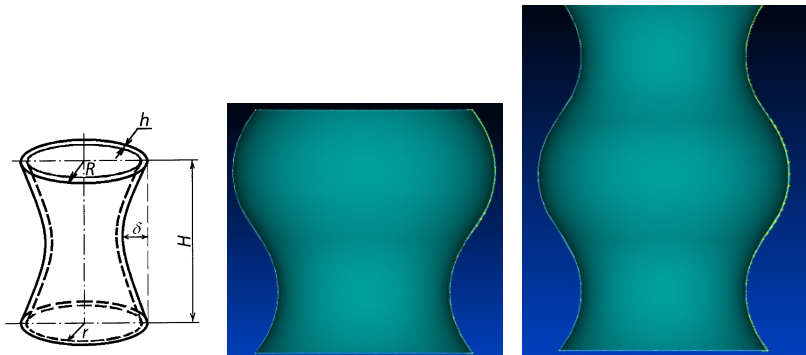


Рис. 1. Крашбкс в форме катеноида и варианты составных конструкций крашбоксов на его основе.

Следует отметить, что в предложенных вариантах составных конструкций крашбоксов помимо уменьшения массы обеспечивается возможность большего взаимного сближения концов (торцов) тонкостенной оболочечной конструкции при её деформации. Для вариантов составных ударозащитных конструкций (рис. 2), например, для платформы десантирования, если идёт речь о замене послойно установленных амортизаторов на блок составных крашбоксов также без значительной потери устойчивости сопряжённых между собой составных крашбоксов, достигается более значительное максимальное замедление по сравнению с существующими прямоугольными и восьмигранными формами сотовых слоистых амортизационных элементов и повышается энергоёмкость ударозащитной конструкции в целом. Данные утверждения авторов основаны также на расчётах, осуществлённых методом конечных элементов вышеупомянутого софт-пакета, в рамках данных тезисов не приводятся, содержатся в работах из списка литературы, например, [2, 5–7].

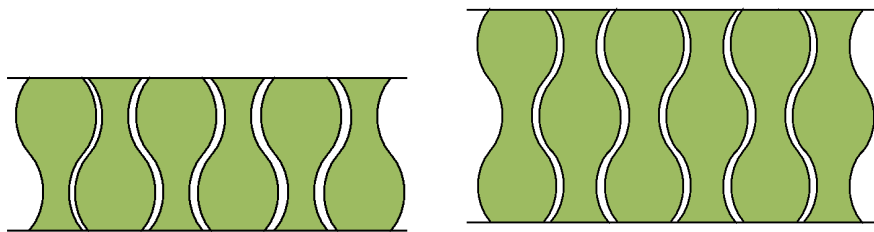


Рис. 2. Варианты сопряжения предлагаемых форм крашбоксов.

Предлагаемый авторами прототип одноразового пассивного устройства для снижения последствий ударной нагрузки работает следующим образом. При потенциальном соударении с неподвижным или движущимся препятствием, крашбкс или конструкция в виде энергопоглощающего барьера/ платформы для десантирования тяжёлой армейской бронетехники на основе сопряжённых крашбоксов начинает деформироваться в продольном направлении (направлении высоты крашбкса), реализуя при этом всю максимально возможную длину (высоту) данного составного энергопоглощающего элемента; при этом в

процесс снижения последствий соударения включается как увеличенная длина элемента благодаря составным частям, так и специфическая форма поперечного сечения, благодаря которой происходит увеличение энергии упругопластических деформаций и, как результат, снижение жёсткости всей конструкции ударопоглощающего устройства.

Заключение

В силу оптимального выбора формы, длины и вариантов сопряжений, предлагаемое пассивное ударозащитное устройство позволяет эффективно и в наиболее полной мере обеспечить гашение ударной нагрузки, повысить степень снижения энергетического уровня при соударении и, тем самым, либо минимизировать степень травмирования участников ДТП – водителя, пассажиров транспортных средств, пешеходов – в случае использования в виде крашбокса или энергопоглощающего барьера, либо сохранить функциональные свойства армейской бронетехники – в случае использования предлагаемой формы крашбокса в виде элементов платформ десантирования/ военных грузовых контейнеров. По результатам проведенного авторами исследования и численного моделирования процесса деформации получен патент РФ на полезную модель крашбокса [7], подана новая заявка на составную форму крашбокса, проходящая на момент подачи тезисов экспертизу в ФИПС.

Литература

1. В.В. Богданов, В.М. Богомольный, М.Ю. Репрев // Особенности расчёта прочностных и жёсткостных характеристик ударозащитного торообразного бампера транспортного средства. Сборник трудов XXVI Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов (МИКМУС-2014), Москва, 17-19 декабря 2014 г. ISBN 978-5-4253-0812-2. М: Изд-во ИМАШ РАН, 2015, с.86-89.
2. В.В.Богданов, В.М. Богомольный, М.Ю. Репрев // Двухкритериальная оптимизация демпфирующих свойств торообразной оболочки краш-бокса. Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015 г., ISBN 978-5-00019-492-8, Казань: Изд-во Каз. ГУ, 2015, с.487-489.
3. В.В.Богданов, Д.С. Богданов // Особенности расчёта прочностных и жёсткостных характеристик ударозащитного торообразного крашбокса транспортного средства. Сборник избранных трудов научно-технической конференции «Современные технологии при решении военно-прикладных задач». М: ВИ(О) ВУНЦ СВ «ОВА ВС РФ», 2017. с.14-19.
4. Десантирование грузов для коалиционных сил [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.afcent.af.mil.htm>.
5. В.В. Богданов, В.М. Богомольный. // Патент № 2555871 РФ на изобретение. Ударозащитное устройство с пассивной системой демпфирования. Заявка № 2014125882/11 от 26.06.2014; опубл. 10.07.2015 г. Бюл. № 19.
6. В.В.Богданов, И.С.Чабунин. // Описание полезной модели к патенту RU 175120 U1. Крашбокс транспортного средства с овальным основанием и в форме катеноида. Заявка № 2016146156 от 24.11.2016; опубл. 21.11.2017 г. Бюл. № 33.
7. В.В. Богданов, И.С. Чабунин, Г.А. Бондаренко // Описание полезной модели к патенту RU 209347 U1. Ударопоглощающее устройство автотранспортной техники с составными участками в форме катеноида. Заявка № 2021103385 от 11.02.2021; опубл. 15.03.2022 г. Бюл. № 8.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ТЕЛ

Горобцов А.С.^{1,2}, Карцов С.К.³

1 - Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

2 - Волгоградский государственный технический университет, Волгоград

3 - Московский автомобильно - дорожный государственный технический университет,
Москва

kartsov@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается численный метод оптимального управления на основе обобщенной задачи динамического уравнивания механических систем в смысле обеспечения заданных законов изменения реакций в выбранных кинематических связях за счет добавления функций управления в другие связи. Метод использует представление уравнений динамики систем в форме дифференциально-алгебраических уравнений. Показывается оптимальность функций управления для интегральных критериев, не содержащих в явном виде функции управления. Даны примеры рассматриваемого метода в задачах управления антропоморфными роботами и подвесками транспортных машин.

Введение

Управление движением механических систем произвольной структуры и большой размерности – актуальная задача в таких областях как робототехника, транспортные машины и др. Классические методы теории оптимального управления трудноприменимы для нелинейных систем произвольной размерности. Современные автоматизированные методы построения и решения математических моделей динамики механических систем, позволяют выполнять численные исследования прямой задачи управляемого движения для существенно нелинейных многомерных систем. Разработка методов синтеза управляемого движения для математических моделей указанного класса, существенно расширит круг решаемых задач, в том числе за счет включения в него новых областей – роботов со сложной локомоцией, группового движения роботов и т.д.

Теоретическое описание

Используется математическая модель динамики механической системы в форме [1]

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{cases}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} - вектор координат всей системы размерностью n , \mathbf{M} — матрица инерции, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ - вектор позиционных, диссипативных и внешних сил, \mathbf{D} — матрица коэффициентов уравнений связей размерностью $k \times n$ ($k \leq n$), \mathbf{p} - вектор множителей Лагранжа размерностью k , $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ - вектор правых частей второй производной уравнений связей. Система дифференциально – алгебраических уравнений (1) применяется в компьютерных системах моделирования динамики связанных систем тел. При численном решении (1) на каждом шаге интегрирования находятся ускорения и множители Лагранжа из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (2), сделав соответствующие обозначения, можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (3)$$

Обобщенная задача динамического уравнивания сводится к управлению реакциями некоторых выбранных связей, за счет изменения реакций в других связях. Пусть в векторе реакций связей \mathbf{p} имеется подмножество реакций \mathbf{p}_1 с номерами из множества K_1 , числом k_1 , значения которых должны принимать заданные величины, описываемые некоторыми функциями $\varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, k_1$. Предположим также, что в векторе реакций связей \mathbf{p} имеется подмножество реакций \mathbf{p}_2 с номерами из множества K_2 , числом k_2 , которые могут варьироваться за счет изменения значений функций управления $h_{2j}(t), j = 1, 2, \dots, k_2$. В [2] показывается, что при численном интегрировании (1) на каждом шаге интегрирования функции управления находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{h}_2(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10}, \quad (4)$$

где A_1^{-1} соответствующая множеству K_1 подматрица A^{-1} - состоит из строк A^{-1} , номера которых принадлежат K_1 , $p_{10} = A_1^{-1}b$.

Примеры задач

Представлена задача пространственного движения робота андроида [2, 3]. Выполнены расчеты для варианта 8 функций управления и ограничений на 6 реакций. Функции управления – моменты в приводах вращения относительно поперечной оси робота в шарнирах плеч, бедер, коленей и стоп – по два на каждый тип шарнира. Моделировалось смещение ц.м. робота назад на 2 см за 2 с. Вертикальные реакции и моменты реакций отн. поперечной оси робота считались неизменными, а горизонтальные реакции в стопах равнялись горизонтальной силе инерции ц.м. Поскольку момент реакции задавался неизменным, а статический момент этой реакции увеличивался из-за продольного смещения ц.м., то это изменение компенсировалось движением звеньев робота, в частности вращением рук – рис. 1. Такое движение соответствует естественной реакции человека при попытке сохранить равновесие в условиях отсутствия возможности переступания ног.

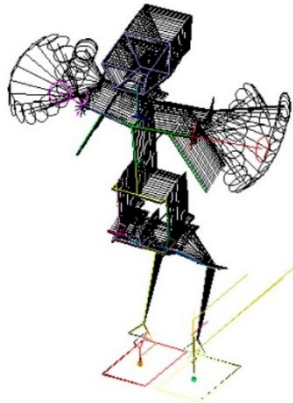


Рис. 1. Кинограмма движения робота андроида.

Сформулирована задача оптимального управления для минимизации критерия вида

$$J = \int_0^T F(p_1) dt. \quad (5)$$

В качестве подинтегрального выражения можно брать сумму выбранных реакций, которым назначены некоторые значения. Наиболее простой случай – все выбранные реакции равны нулю, что автоматически обеспечивает минимизацию (5). Такой подход может быть применим, например, для решения задач виброизоляции. При задании закона движения некоторых точек механической системы, подверженной действию возмущения, можно обеспечить выполнение этого закона с нулевыми реакциями за счет приводов в других звеньях. Рассмотрена задача управления подвеской двухосного автомобиля для снижения его колебаний от воздействия микропрофиля дороги. В качестве критериальной функции используются реакции в двух связях, которые определяют нулевые вертикальные перемещения в двух симметричных точках в передней части рамы. Управляющие функции – крутящие моменты в двух рычагах передней подвески. Расчеты показали, что управляющие функции, вычисленные по (4) снизили вертикальные ускорения при движении по неровностям дороги на несколько порядков [2].

Заключение

Рассмотренный метод может быть применим к широкому классу нелинейных систем, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями и позволяет получать численное решение задачи оптимального управления для критериев, заданных в форме уравнений связей. В работе рассмотрен только случай голономных связей, хотя метод может быть распространен и на связи другого типа.

Литература

1. А.С. Горобцов, С.К. Карцов, А.Е. Плетнев, Ю.А. Поляков // Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей: монография, М.: Машиностроение. 2011. 462 с.
2. А.С. Горобцов, О.А. Сычев, Ю.А. Орлова, Е.А. Смирнов, О.Е. Григорьева, А.М. Бочкин, М.И. Андреева // Optimal Greedy Control in Reinforcement Learning, Sensors, 2022, Vol. 22, issue 22 (November-2). - Article 8920. - 14 p. - DOI: <https://doi.org/10.3390/s22228920>
3. А.С. Горобцов, А.Е. Андреев, А.Е. Марков, Ан.В. Скориков, П.С. Тарасов // Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управления движением шагающих роботов, Труды СПИИРАН = SPIIRAS Proceedings. - 2019. - Т. 18, № 1. - 85-122.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ПУАНСО В ИСТОЛКОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Горр Г.В., Данилюк Д.А.

Институт прикладной математики и механики, Донецк
daniljuk@bk.ru

Аннотация. В докладе рассматривается применение модифицированного метода Пуансо [1] в истолковании движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Исследованы решения В.А. Стеклова, частные случаи решений С.В. Ковалевской и Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение твердого тела в поле силы тяжести

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести $\mathbf{P} = mgr_c \mathbf{v}$ ($mgr_c = s$); A – тензор инерции; точка над $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v} обозначает дифференцирование по времени t . Полагаем, что найдено решение уравнений (1)

$$\boldsymbol{\omega}_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ – единичные векторы подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ (O – неподвижная точка тела). Соотношение для $\boldsymbol{\omega}(t)$ из (2) задает подвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$. Для применения теоремы Пуансо о представлении движения тела методом качения без скольжения подвижного аксоида по неподвижному аксоиду необходимо рассмотреть неподвижный аксоид с направляющей линией

$$\boldsymbol{\omega}_H(t) = \omega_{\xi}(t) \mathbf{v}_1 + \omega_{\eta}(t) \mathbf{v}_2 + \omega_{\zeta}(t) \mathbf{v}_3, \quad (3)$$

где \mathbf{v}_i ($i = \overline{1,3}$) – единичные векторы неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}_H(t)$ из (3) определяются с помощью уравнений П.В. Харламова [2]

$$\begin{aligned} \omega_{\xi}(t) &= \omega_p(t) \cos \alpha(t), & \omega_p^2(t) &= \boldsymbol{\omega}^2(t) - \omega_{\zeta}^2(t), & \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\omega_p^2(t)} \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}_{\Pi}(t)}{dt} \cdot (\mathbf{v}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)) \right] \\ \omega_{\eta}(t) &= \omega_p(t) \sin \alpha(t), & \omega_{\zeta}(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{v}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

Модифицированный метод Пуансо [1] основан на рассмотрении вектора $\mathbf{b}(t) = B(t) \boldsymbol{\omega}(t)$. С помощью этого метода движение тела представляется качением без скольжения аксоида с направляющей линией $\mathbf{b}_{\Pi}(t) = B(t) \boldsymbol{\omega}_{\Pi}(t)$ по неподвижному аксоиду с направляющей $\mathbf{b}_H(t) = B(t) \boldsymbol{\omega}_H(t)$. При таком подходе в истолковании движения тела в силу (2), (3) имеем

$$\mathbf{b}_{\Pi}(t) = B(t) \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{b}_H(t) = B(t) (\omega_{\xi}(t) \mathbf{v}_1 + \omega_{\eta}(t) \mathbf{v}_2 + \omega_{\zeta}(t) \mathbf{v}_3) \quad (5)$$

Из (5) следует

$$b_{\Pi}^{(i)}(t) = B(t) \omega_i(t), \quad b_H^{(1)}(t) = B(t) \omega_{\xi}(t), \quad b_H^{(2)}(t) = B(t) \omega_{\eta}(t), \quad b_H^{(3)}(t) = B(t) \omega_{\zeta}(t) \quad (6)$$

Тогда $b_p^2(t) = \mathbf{b}^2(t) - b_{\zeta}^2(t)$ и

$$b_H^{(1)}(t) = b_p(t) \cos \alpha(t), \quad b_H^{(2)}(t) = b_p(t) \sin \alpha(t), \quad b_{\zeta}(t) = \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = B(t) \omega_{\zeta}(t), \quad (7)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{1}{b_p^2(t)} \left[\frac{d\mathbf{b}_{\Pi}(t)}{dt} \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{b}(t)) \right] \quad (8)$$

Целью доклада является изложение результатов по применению модифицированного метода в частных решениях уравнений (1).

Полученные результаты. В докладе рассмотрены решение В.А. Стеклова и частные случаи решений С.В. Ковалевской и Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина.

Решение В.А. Стеклова

Запишем уравнение В.А. Стеклова через эллиптические функции Якоби

$$\omega_1(t) = p_{10}(t) \operatorname{sn} \kappa_0 t, \quad \omega_2(t) = -p_{20}(t) \operatorname{sn} \kappa_0 t, \quad \omega_3(t) = p_{30}(t) \operatorname{dn} \kappa_0 t, \quad (9)$$

$$v_1(t) = c_1(c - \operatorname{sn}^2 \kappa_0 t), \quad v_2(t) = b_2 \operatorname{sn} \kappa_0 t \operatorname{cn} \kappa_0 t, \quad v_3(t) = b_3 \operatorname{cn} \kappa_0 t \operatorname{dn} \kappa_0 t, \quad (10)$$

где $\operatorname{sn} \kappa_0 t$, $\operatorname{cn} \kappa_0 t$, $\operatorname{dn} \kappa_0 t$ – эллиптические функции Якоби. Для применения модифицированного метода положим в (9), (10) $B(t) = 1/\operatorname{dn} \kappa_0 t$. Тогда из (9), (10) на основании (6)–(8) получим

$$\mathbf{b}_{\Pi}(t) = \frac{p_{10} \operatorname{cn} \kappa_0 t}{\operatorname{dn} \kappa_0 t} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \frac{p_{20} \operatorname{sn} \kappa_0 t}{\operatorname{dn} \kappa_0 t} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + p_{30} \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (11)$$

$$\mathbf{b}_{\text{H}}(t) = p_{30} \mathbf{v}_1 + \frac{p_{20} \operatorname{sn} \kappa_0 t}{\operatorname{dn} \kappa_0 t} \mathbf{v}_2 - \frac{p_{10} \operatorname{cn} \kappa_0 t}{\operatorname{dn} \kappa_0 t} \mathbf{v}_3 \quad (12)$$

Из (11), (12) следует, что уравнение движения гироскопа Стеклова можно представить качением без скольжения аксоида с направляющей линией (11) (эллипсом) по аксоиду с направляющей линией (12) (эллипсом). Данное свойство значительно упрощает восприятие картины движения гироскопа Стеклова.

Частный случай решения С.В. Ковалевской

Этот случай рассмотрен в статье [3]. Приведем только результат истолкования данного варианта. Обозначим через $p(\tau)$, $q(\tau)$, $r(\tau)$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ (τ – вспомогательная переменная). Введем вектор $\mathbf{b}(\tau) = B(\tau) \boldsymbol{\omega}(\tau)$

$$\mathbf{b}_{\Pi}(\tau) = \frac{1}{r(\tau)} \boldsymbol{\omega}_{\Pi}(\tau) = \left(\frac{p(\tau)}{q(\tau)}, \frac{q(\tau)}{r(\tau)}, 1 \right) = (b_1(\tau), b_2(\tau), b_3(\tau)) \quad (13)$$

Тогда $\mathbf{b}_{\text{H}}(\tau)$ примет вид: $\mathbf{b}_{\text{H}}(\tau) = b_{\xi}(\tau) \mathbf{v}_1 + b_{\eta}(\tau) \mathbf{v}_2 + b_{\zeta}(\tau) \mathbf{v}_3$, где

$$\begin{aligned} b_{\xi}(\tau) &= b_{\rho}(\tau) \cos \alpha(\tau), & b_{\zeta}(\tau) &= \frac{1}{4R} \sqrt{4R^2 - r^2(\tau)}, & b_{\rho}(\tau) &= \frac{1}{4R \sqrt{r(\tau)}} \sqrt{r^3(\tau) + 12R^2 r(\tau) + 8R} \\ b_{\eta}(\tau) &= b_{\rho}(\tau) \sin \alpha(\tau), \end{aligned} \quad (14)$$

Можно показать, что подвижным годографом вектора $\mathbf{b}(\tau)$ является кривая Персея

$$16R^4(b_1^2 + b_2^2)^2 - 4b_1^2 - 1 = 0 \quad (15)$$

Неподвижным годографом ($\mathbf{b}_{\text{H}}(\tau)$) служит пространственная кривая. Тем не менее применение модифицированного метода Пуансо дает возможность в силу (15) упростить истолкование гироскопа Ковалевской в случае [3].

Частный случай решения Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина

Рассмотрим вариант данного решения, указанный в [4]. Для него постоянная интеграла энергии равна $2E = 3c^2 - 2$, $2k = c^2$. Запишем изучаемое ранее (p , q , r) – компоненты $\boldsymbol{\omega}$.

$$p = -\frac{1}{4} \sqrt{c \mu_1(r) \mu_2(r)}, \quad q = \frac{1}{4} \sqrt{c[4\mu_3(r) - \mu_1(r) \mu_2^2(r)]}, \quad (16)$$

$$2(1 - v_1) = \mu_1(r) \mu_2(r), \quad v_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu_1(r)[4\mu_3(r) - \mu_1(r) \mu_2^2(r)]}, \quad v_3 = \sqrt{c \mu_1(r)},$$

где $\mu_1(r) = r - c$, $\mu_2(r) = 2c + r$, $\mu_3(r) = c + r$, $r(t)$ находятся путем обращения эллиптического интеграла. Выберем функцию $B(t)$: $B(t) = 1/r(t)$. Тогда вектор $\mathbf{b}_{\Pi}(r)$ таков:

$$\mathbf{b}_{\Pi}(r) = \frac{p(r)}{r} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{q(r)}{r} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (17)$$

В плоскости $b_3 = 1$ введем полярные координаты: $b_1 = \rho \cos \beta$, $b_2 = \rho \sin \beta$. Тогда подвижный годограф $\mathbf{b}_{\Pi}(r)$ может быть описан уравнением

$$\sin^2 \beta = \frac{c}{16r^2(\rho)} \left[r^3(\rho) + 3cr^2(\rho) + 4r(\rho) + 4c(1 - c^2) \right], \quad r(\rho) = \frac{c}{8\rho^2} (1 + \sqrt{1 + 4\rho^2}). \quad (18)$$

Кривую (18) можно построить с помощью графо-аналитического метода. Свойства неподвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ находятся с помощью уравнений (7), (8). Применение в данном случае модифицированного метода Пуансо дает дополнительную информацию об истолковании движения гироскопа Горячева–Чаплыгина [5].

Заключение

В докладе рассмотрено применение модифицированного метода Пуансо [1] в истолковании движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.

Литература

1. Г. В. Горр // Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой, *Механика твердого тела*, Вып. 42. 2012. 26–36
2. П. В. Харламов // Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку, *Прикл. математика и механика*, Т. 28, Вып. 3. 1964. 502–507
3. Г. В. Горр, Г. Д. Левицкая // Об одном периодическом движении гироскопа Горячева–Чаплыгина, *Механика твердого тела*, Вып. 3. 1971. 101–106
4. Г. В. Горр, А. Я. Савченко // Об одном периодическом движении в решении С. В. Ковалевской, *Механика твердого тела*, Вып. 3. 1971. 64–69
5. Г. В. Горр, Д. А. Данилюк, Д. Н. Ткаченко // Кинематическое истолкование движения тела в одном частном случае Д. Н. Горячева–С. А. Чаплыгина, *Журнал теоретической и прикладной механики*, ДонНУ, №3-4 (60-61). 2017. 19–32

РЕЗОНАНСНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА БАРНЕТТА-ЛОНДОНА

Горр Г.В.¹, Зыза А.В.², Платонова Е.С.²

1 - ГУ «Институт прикладной математики и механики», Донецк

2 - ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк

z9125494@mail.ru

Аннотация. В докладе рассмотрена задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Получены условия существования резонансных прецессионных движений динамически симметричного гиростата. Исследованы случаи распределения масс гиростата, относящиеся к обобщенным условиям Ковалевской и Горячева-Чаплыгина.

Введение

Обзор результатов, полученных в моделировании прецессионных движений систем твердых тел в динамике гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, и в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, подробно изложен в обзорной монографии Г.В. Горра, А.В. Мазнева, Е.К. Щетининой [1]. В ней отмечены результаты в классической задаче: Д. Гриоли, посвященные изучению регулярных прецессий тяжелого твердого тела относительно наклонной оси; А. Брессана по нахождению прецессий относительно горизонтальной оси; Г.В. Горра, который показал единственность прецессий общего вида в решении А.И. Докшевина.

Прецессионно-изоконические движения относятся к простейшему классу резонансных прецессий, так как они определяются равенством $\dot{\psi} = \dot{\phi}$, ($\dot{\psi}$ – скорость прецессии гиростата, $\dot{\phi}$ – скорость его собственного вращения). Данные движения объединены свойством прецессионности (постоянен угол между двумя осями ℓ_1, ℓ_2 , где ℓ_1 – неизменно связана с телом, ℓ_2 – неподвижна в пространстве) и свойством изоконичности подвижного и неподвижного годографов угловой скорости. А.В. Мазнев [2] исследование главных осей инерции твердого тела в случае резонансных регулярных прецессий проводил без учета их существования в конкретной задаче динамики.

В докладе резонансные прецессии гиростата рассмотрены в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Класс этих движений описывается равенством $\dot{\psi} = p\dot{\phi}$, где $p = \frac{m}{n}$, ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$). В предположении, что гиростат является динамически симметричным гироскопом, построены новые решения уравнений движения.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [3, 4]. Несмотря на то, что эти эффекты имеют различные физические свойства (эффект Барнетта состоит в том, что нейтральный ферромагнетик при вращении в магнитном поле становится намагниченным вдоль оси вращения; эффект Лондона объясняет движение сверхпроводящего твердого тела в магнитном поле). Магнитный момент, возникающий при указанных движениях, связан с угловой скоростью ω равенством $\mathbf{B} = B\omega$ (где B – некоторый симметричный оператор). Запишем уравнения движения гиростата в векторном виде:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + B\omega \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega \quad (1)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата;

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор напряженности магнитного поля;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор постоянного гиростатического момента;

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата;

$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая эффект Барнетта-Лондона; $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, определяющая потенциальные силы; точки над переменными $\omega(t)$, $\mathbf{v}(t)$ обозначает дифференцирование по времени t . Уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \mathbf{v} = \kappa, \quad \text{где } \kappa = \text{const}. \quad (2)$$

Опишем прецессионные движения гиростата, имеющего неподвижную точку. Пусть вектор \mathbf{a} является ортом и принадлежит главной оси ℓ_1 подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$, то есть $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Запишем инвариантные соотношения, характеризующие прецессионные движения гиростата относительно вектора $\mathbf{v} \in \ell_2$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = a_0, \quad \omega = \dot{\phi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\mathbf{v}, \quad (3)$$

где $a_0 = \cos \Theta_0$; угол Θ_0 и функции $\phi(t)$, $\psi(t)$ можно интерпретировать, как углы Эйлера прецессионной систем координат. Запишем векторы \mathbf{v} , ω в подвижной системе координат

$$\mathbf{v} = a'_0 \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_2 + a'_0 \cdot \mathbf{i}_3, \quad (4)$$

$$\omega = a'_0 \dot{\psi} \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \dot{\psi} \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_2 + (\dot{\phi} + a'_0 \dot{\psi}) \cdot \mathbf{i}_3. \quad (5)$$

Здесь $a'_0 = \sin \Theta_0$; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы подвижной системы координат.

Сформулируем постановку задачи. Найти условия существования у уравнений (1), решений (4), (5) в случае динамически симметричного гиростата: $A_2 = A_1$, для класса резонансных прецессий гиростата вида

$$\dot{\psi} = p\dot{\varphi}, \quad (6)$$

где $p = \frac{m}{n}$, ($m \in N, n \in N$)

При этом, в силу неравенств треугольника на главные моменты инерции, полагаем $2A_1 > A_3$.

Полученные результаты

Исследование уравнений (1) дает возможность при $A_2 = A_1$ получить соотношения

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{M_0} [\kappa_0 - a'_0(\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi)], \quad \dot{\psi} = p\dot{\varphi}, \quad (7)$$

и два дифференциальных уравнения вида

$$F_1(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, c_i) = 0, \quad F_2(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, d_i) = 0. \quad (8)$$

В уравнениях (7), (8), M_0, κ_0, c_i, d_i – постоянные параметры. Если подставить $\dot{\varphi}$ из (7) в (8), то из условия тождественности получим алгебраическую систему на параметры задачи.

В начале запишем более наглядные из полученных уравнений

$$B_2 = B_1, \quad a_0 = \frac{A_1 + A_3}{p(A_1 - A_3)}. \quad (9)$$

Второе условие из (9) может выполняться, например, при $p = 2, A_1 = 4A_3$ (аналог условий в решении Горячева-Чаплыгина). В этом случае параметр λ_3 имеет вид

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} [a_0 p B_1 - (1 + a_0 p) B_3].$$

На основании неравенств треугольника на главные моменты инерции гиростата из (9) получим:

$$p > 2, \frac{1}{p} < a_0 < 1; \quad p > 3, -1 < a_0 < -\frac{1}{p}. \quad (10)$$

Запишем окончательный результат, который устанавливаем для условий Ковалевской: $A_2 = A_1 = 2A_3$ и условий Горячева-Чаплыгина: $A_2 = A_1 = 4A_3$. В первом варианте получим

$$\left(p = 4, a_0 = \frac{3}{4}\right), \left(p = 5, a_0 = \frac{3}{5}\right), \dots, \left(p = N, a_0 = \frac{3}{N}\right), \quad (11)$$

а во втором случае аналог совокупности значений (11) таков

$$\left(p = 2, a_0 = \frac{5}{6}\right), \left(p = 3, a_0 = \frac{5}{9}\right), \dots, \left(p = N, a_0 = \frac{5}{N}\right), \quad (12)$$

Заметим, что в докладе представлена только часть условий резонансных прецессий гиростата. В статье [5] показано, что остальные условия на параметры совместны и не влияют на представления значений p, a_0 , указанных в (11), (12).

Заключение

В докладе изложены новые результаты, посвященные исследованию резонансных прецессионных движений гиростата в задаче о движении гиростат в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Литература

1. Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина // Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. 2009. 222 с.
2. А.В. Мазнев // Исследование движения главных осей инерции твердого тела с неподвижной точкой в случае регулярных прецессий, Механика твердого тела, Вып. 50. 2020. 43-55.
3. S.I. Barnett // Gyromagnetic and Electron-Inertia Effects, Rev. Modern. Phys, Vol. 7(2). 1935. 129-166.
4. F. London, H. London // Superfluids. 1950. 372 p.
5. А.В. Зыза, Е.С. Платонова // Резонансные прецессии гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естественные науки, №3.2022. 3–10.

МЕХАНИЧЕСКИЕ И ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР

Гращенко А.С., Кукушкин С.А.

Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
asgrashchenko@bk.ru

Аннотация. В работе представлены результаты экспериментальных исследований, полученные методом наноиндентирования, деформационных свойств наномасштабных пленок SiC, синтезированных на Si и гетероструктур AlN, AlGaN, GaN, β -Ga₂O₃ сформированных на их поверхности. Предложена методика, позволяющая при помощи метода наноиндентирования, экспериментально определять структуру пленок nano-SiC. Определены параметры твердости и модуля упругости слоев nano-SiC и пленок AlN, AlGaN, GaN и β -Ga₂O₃, выращенных на кремнии с буферным слоем SiC. Разработана экспериментальная методика визуализации остаточной деформации, возникающей в процессе наноиндентирования в прозрачных и полупрозрачных материалах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ФГПУ ИПМаш РАН по контракту № FFNF-2021-0001. Исследования проводились с использованием оборудования УНУ “Физика, химия и механика кристаллов тонких пленок” ИПМаш РАН, Санкт-Петербург.

Введение

В 2004 г. лабораторией “Структурных и фазовых превращений в конденсированных средах” ИПМаш РАН были начаты исследования по разработке нового, ранее неизвестного, метода синтеза низкодефектных слоев одного из основных широкозонных полупроводников карбида кремния (SiC) на подложках кремния (Si). Целью этих исследований было создание нового типа подложек для изготовления на их основе различных типов полупроводниковых приборов и интегральных микросхем нового поколения на основе широкозонных полупроводников. В результате этих работ был открыт принципиально новый метод роста наномасштабных слоев SiC на Si (нано-SiC/Si) [1]. Метод основан на согласованном замещении части атомов в Si на атомы углерода без разрушения кремниевой основы. По сути дела, впервые в мировой практике реализована последовательная согласованная замена атомов одного сорта другими атомами внутри приповерхностного слоя исходного кристалла без разрушения его кристаллической структуры. Открытие данного метода позволяет синтезировать такие широкозонные полупроводники, как нитрид алюминия (AlN), нитрид галлия (GaN), нитрид алюминия-галлия (AlGaN) и оксида галлия (Ga₂O₃) и ряд твердых растворов этих соединений на кремниевой подложке, покрытой буферным слоем SiC. Исследования механических и деформационных характеристик, как гибридных подложек nano-SiC/Si, так и полупроводниковых гетероструктур, сформированных на их основе, ранее не проводились.

На сегодняшний день наиболее эффективной методикой измерения деформационных и механических характеристик тонких пленок является метод наноиндентирования [2]. Метод наноиндентирования положительно себя зарекомендовал, как простая и надежная экспериментальная методика измерения параметров твердости и модуля упругости твердых тел. Однако, даже в случае наноиндентирования пленок толщиной порядка 500 нм возникают сложности в точном определении механических свойств материала пленки, вызванные именно наномасштабностью структуры, не говоря уже о более тонких слоях. Например, сложность измерения механических модулей пленки SiC, выращенной методом согласованного замещения атомов на подложке Si, связана с тем, что более твердая пленка SiC находится на более мягкой, да к тому же, пористой подложке Si. Малая толщина пленки SiC лишь усугубляют ситуацию. Таким образом для того, чтобы выделить из общего сигнала прибора часть исходящую от пленки нужно использовать не стандартные методы анализа экспериментальных данных. В настоящей работе представлены результаты наноиндентирования гибридных подложек nano-SiC/Si и тонких пленок AlN, AlGaN, GaN и β -Ga₂O₃, выращенных на гибридных подложках nano-SiC/Si.

Основной текст

Гибридные подложки SiC/Si синтезировались методом согласованного замещения атомов внутри матрицы монокристаллов Si в атмосфере смеси монооксида углерода (CO) и моносилана (SiH₄) при температурах синтеза 1200-1300°C с давлением внутри реактора 1-3 Торр. Слои AlN, AlGaN, GaN и β -Ga₂O₃ выращивали на гибридных подложках nano-SiC/Si с помощью метода хлорид-гидридной эпитаксии [3]. Структурные характеристики поверхности исследуемых пленок измеряли методом атомно-силовой микроскопии на приборе easy scan фирмы panosurf. Толщину и химический состав исследуемых слоев nano-SiC, AlN, AlGaN, GaN и β -Ga₂O₃ определяли методом оптической спектральной эллипсометрии на приборе M-2000D J.A. Woollam из экспериментальных зависимостей диэлектрической проницаемости от длины волны.

Наноиндентирование всех исследуемых полупроводниковых структур осуществляли на многофункциональном приборе Nanotest 600 фирмы Micro Materials. Вдавливание проводили алмазным

наконечником Берковича с радиусом закругления острия 100 нм при температуре 22°C со скоростью нагрузки и разгрузки индентора 1 мН/сек. Данные наноиндентирования всех исследуемых образцов анализировали с помощью метода Оливера-Фарра [4]. Полученные в результате анализа экспериментальные зависимости твердости и приведенного модуля упругости от контактной глубины погружения индентора в исследуемый материал описывали аппроксимационными моделями, представленными в работах [5-8]. Анализ начального этапа наноиндентирования, который имеет преимущественно упругий характер осуществляли путем сопоставления экспериментальной зависимости приложенной силы от смещения индентора относительно исходной поверхности образца соотношением Герца для взаимодействия жесткой и твердой сферы с упругим и эластичным полупространством [9]. В случае гибридной подложки nano-SiC/Si данные наноиндентирования преобразовывали в зависимость микротвердости от глубины погружения. Полученные зависимости описывали аппроксимационной моделью для двухслойной пленки [10]. Сопоставление экспериментальных точек с теоретическими и эмпирическими моделями осуществляли с помощью метода наименьших квадратов. Для гетероструктуры GaN/AlN/SiC/Si были проведены исследования остаточных после наноиндентирования отпечатков. Области вблизи отпечатков изучались с помощью атомно-силовой микроскопии и рамановской спектроскопии.

Наноиндентирование nano-SiC/Si проводили на образце с шероховатостью поверхности 20 нм, общей толщиной слоя SiC 120 нм, который был синтезирован методом замещения атомов на Si с ориентацией (111). Обработка данных наноиндентирования методом Оливера-Фарра и последующее сопоставление полученных зависимостей средних значений твердости и модуля упругости от глубины погружения с аппроксимационными моделями показали, что твердость и модуль упругости слоя SiC равны 30 ± 10 и 310 ± 100 ГПа соответственно. Сопоставление данных наноиндентирования на начальном этапе вдавливания с соотношением Герца приводит к выводу, что модуль упругости nano-SiC вблизи поверхности равен 350 ± 30 ГПа. Анализ зависимости микротвердости от глубины погружения моделью для двухслойной пленки показал, что верхний и нижний слой SiC исследуемой пленки имеет толщину 70 ± 8 и 60 ± 6 нм соответственно, а микротвердость обоих слоев SiC равна 42 ± 5 ГПа.

Механические характеристики пленок AlN/SiC/Si и GaN/AlN/SiC/Si исследовались на слоях AlN и GaN толщиной 1 мкм с шероховатостью поверхности 11 нм. В случае гетероструктуры AlN/SiC/Si параметры твердости и модуля упругости пленки AlN 22 ± 4 и 330 ± 50 ГПа соответственно, а модуль упругости вблизи поверхности равен 290 ± 30 ГПа. Для пленки GaN на гетероструктуре AlN/SiC/Si с помощью наноиндентирования были определены следующие характеристики: твердость 20 ± 2 ГПа, модуль упругости 270 ± 30 ГПа, модуль упругости вблизи поверхности 200 ± 20 ГПа. В рамках исследования гетероструктуры GaN/AlN/SiC/Si была разработана новая методика визуализации остаточной после наноиндентирования деформации внутри слоя. Для визуализации остаточной деформации достаточно построить рамановские карты в зависимости от позиции и полуширины рамановских линий, относящихся к материалу пленки или подложки, как это изображено на рисунке 1. На рисунке 1 хорошо видно, что вблизи отпечатка от наноиндентирования материал пленки и подложки напряжен, а положение и полуширина линий относящихся к GaN и Si отличаются от положения и полуширины линий вдали от отпечатка.

В случае пленок AlGaN механические свойства измерялись для слоев, выращенных на гибридных подложках nano-SiC/Si, синтезированных на Si с ориентацией (001), (011) и (111). Ориентация кремния существенно влияет на структурные характеристики поверхности слоев AlGaN. Это свидетельствует о том, что пленки ориентированы по-разному. Анализ данных атомно-силовой микроскопии показал, что шероховатость поверхности слоев AlGaN, выращенных на гибридных структурах SiC/Si(001), SiC/Si(011) и SiC/Si(111) равна 810, 480 и 60 нм соответственно. Толщина исследуемых слоев AlGaN равна 6-9 мкм. По данным наноиндентирования твердость пленок AlGaN на nano-SiC на Si с ориентацией (001), (011) и (111) равны 15 ± 4 , 12 ± 1 и 18 ± 3 ГПа соответственно. Приведенный модуль упругости для всех пленок AlGaN в среднем равен 300 ГПа. Вблизи поверхности приведенный модуль упругости равен 150 ± 50 , 190 ± 50 и 310 ± 40 ГПа для гетероструктур AlGaN/SiC на Si с ориентацией (001), (011) и (111) соответственно.

Механические свойства пленок β -Ga₂O₃ на nano-SiC исследовались на структурах, выращенных на Si с ориентацией (001), (011) и (111). Исследование морфологии поверхности показало, что шероховатость слоев β -Ga₂O₃ на nano-SiC на Si с ориентацией (001), (011) и (111) равна 600, 300 и 700 нм соответственно. Анализ кривых наноиндентирования по методу Оливера-Фарра в случае пленки β -Ga₂O₃ на SiC/Si(001) дает твердость 11 ± 1 ГПа, модуль упругости 215 ± 15 ГПа, в случае пленки β -Ga₂O₃ на SiC/Si(011) твердость 10 ± 2 ГПа, модуль упругости 185 ± 25 ГПа и в случае пленки β -Ga₂O₃ на SiC/Si(111) твердость 9 ± 2 ГПа, модуль упругости 120 ± 15 ГПа. Следует отметить, что для расчета модуля упругости исследуемых образцов был взят коэффициент Пуассона для поликристаллического β -Ga₂O₃, значение которого составляет 0.31. Использование усредненного коэффициента Пуассона обусловлено анизотропией кристалла β -Ga₂O₃. Вблизи поверхности приведенный модуль упругости равен 200, 120 и 170 ГПа для пленок β -Ga₂O₃, выращенных на гибридных подложках SiC/Si(001), SiC/Si(011) и SiC/Si(111) соответственно.

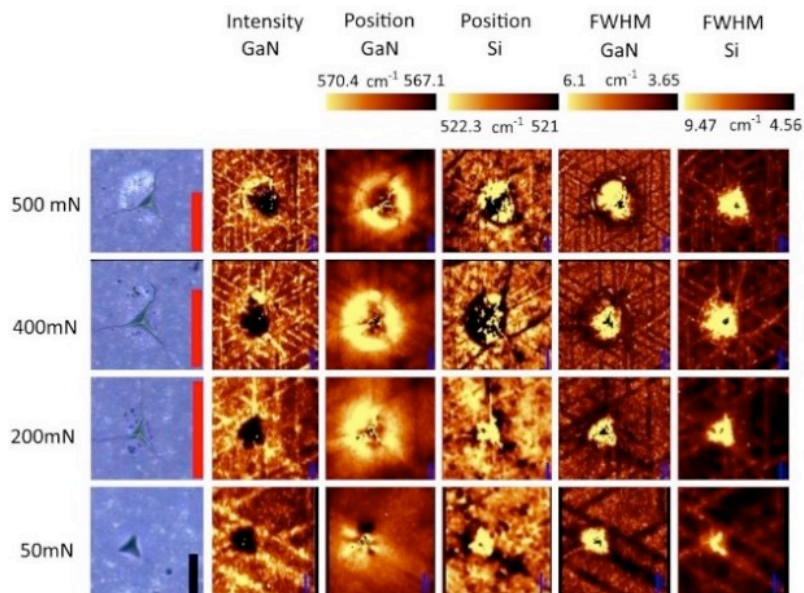


Рис. 1. Оптическое изображение и рамановские карты (80 на 80 точек) для уколов с разной силой по интенсивности, положению и полуширине линий кремния (520 см^{-1}), и нитрида галлия (567 см^{-1}).

Заключение (или Выводы)

Таким образом, в настоящей работе были определены параметры твердости, модуля упругости внутри пленки и вблизи ее поверхности для абсолютно нового полупроводникового материала nano-SiC/Si , синтезированного методом замещения атомов и ряд гетероструктур, выращенных на их основе. Измерена микротвердость nano-SiC/Si и определено, что пленка nano-SiC является двухслойной. Предложен новый метод визуализации остаточной после механических воздействий деформации в прозрачных и полупрозрачных материалах. Показано, что кристаллографическая ориентация исходной пластины Si влияет на механические и деформационные характеристики пленок AlGaIn и $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$, выращенных на гибридных подложках nano-SiC/Si .

Литература

1. С. А. Кукушкин, А. В. Осипов // Новый метод твердофазной эпитаксии карбида кремния на кремнии: модель и эксперимент, *Физика твердого тела*, 50:7 2008. 1188–1195.
2. Ю. И. Головин // Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикроразмерах, тонких приповерхностных слоях и пленках, *Физика твердого тела*, 50:12 2008. 2113–2142.
3. S. A. Kukushkin, Sh. Sh. Sharofidinov, A. V. Osipov, A. V. Redkov, V. V. Kidalov, A. S. Grashchenko, I. P. Soshnikov, A. F. Dydenchuk // The mechanism of growth of GaN films by the HVPE method on SiC synthesized by the substitution of atoms on porous Si substrates, *ECS Journal of Solid State Science and Technology*, 7:9 2018. 480–486.
4. W. C. Oliver, G. M. Pharr // An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments, *Journal of materials research*, 7:6 1992. 1564–1583.
5. A. K. Bhattacharya, W. D. Nix // Finite element simulation of indentation experiments, *International Journal of Solids and Structures*, 24:9 1988. 881–891.
6. A. M. Korsunsky, M. R. McGurk, S. J. Bull, T. F. Page // On the hardness of coated systems, *Surface and Coatings Technology*, 99:2 1998. 171–183.
7. M. F. Doerner, W. D. Nix // A method for interpreting the data from depth-sensing indentation instruments, *Journal of Materials research*, 1:4 1986. 601–609.
8. G. Huajian, C. Cheng-Hsin, L. Jin // Elastic contact versus indentation modeling of multi-layered materials, *International journal of Solids and Structures*, 29:20 1992. 2471–2492.
9. H. Hertz // On the contact of elastic solids, *Z. Reine Angew. Mathematik*, 92 1881. 156–171.
10. A. S. Grashchenko, S. A. Kukushkin, A. V. Osipov // Microhardness study of two-layer nanostructures by a nanoindentation method, *Materials Physics & Mechanics*, 24:1 2015. 35–40.

ВЛИЯНИЕ СИММЕТРИЧНОГО И АСИММЕТРИЧНОГО ОРТОТРОПНОГО ТРЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дмитриев Н.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет
dn7@rambler.ru

Аннотация. Изучено влияние симметричного и асимметричного ортотропного трения на твердое тело, опирающееся на круговую, кольцевую и узкую прямоугольную области. Особое внимание уделено финальному движению твердых тел. Рассмотрено влияние динамически согласованного ортотропного трения на динамику твердых тел. Полученные результаты могут найти широкое практическое применение в построении алгоритмов обработки материалов, при контакте с которыми возникает анизотропная сила трения.

Введение

Анизотропное трение при фрикционном взаимодействии проявляется в виде зависимости силы трения от направления скольжения и может быть описано в рамках следующей линейной модели [1, 2]:

$$T = -NQ \frac{v}{v}, \quad (1)$$

где T – вектор силы трения, N – нормальная реакция поверхности, v , v – вектор скорости и ее величина, Q – матрица коэффициентов трения:

$$Q = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если элементы матрицы (2) постоянны и она является тензором, то поворотом системы координат на некоторый угол матрица Q может быть приведена к виду [1,3]:

$$Q = \begin{pmatrix} f_x & f \\ -f & f_y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Следует подчеркнуть, что годограф силы трения, описываемой законом (1), в котором матрица Q является тензором, обладает свойством центральной симметрии. Если в (3) $f = 0$, то трение называется ортотропным.

Представляют также интерес условия фрикционного взаимодействия, когда коэффициент трения зависит от знака скорости скольжения, т.е. изменяется при реверсировании (изменении направления движения на противоположное). В этом случае трение называется асимметричным. Это может быть обусловлено, например, аномалиями упругости материалов контактирующих тел, асимметрией профиля индентора, а также асимметрией микронеровностей поверхности индентора и (или) контртела в плоскости, проходящей через вектор скорости движения [4].

Если таким свойством обладают два взаимно перпендикулярных направления и коэффициент f равен нулю, то коэффициенты на главной диагонали матрицы (3) будут функциями от направления скольжения. Отметим, что полученная матрица не будет являться тензором, но закон трения будет иметь вид (1). Назовем такое трение асимметричным ортотропным трением. Это название характеризует трение как ортотропное в каждом квадранте со своими коэффициентами f_x и f_y . Годограф силы трения в этом случае является замкнутой линией, состоящей из кусков четырех различных эллипсов, стыкующихся при пересечении осей Ox и Oy (см. рис. 1).

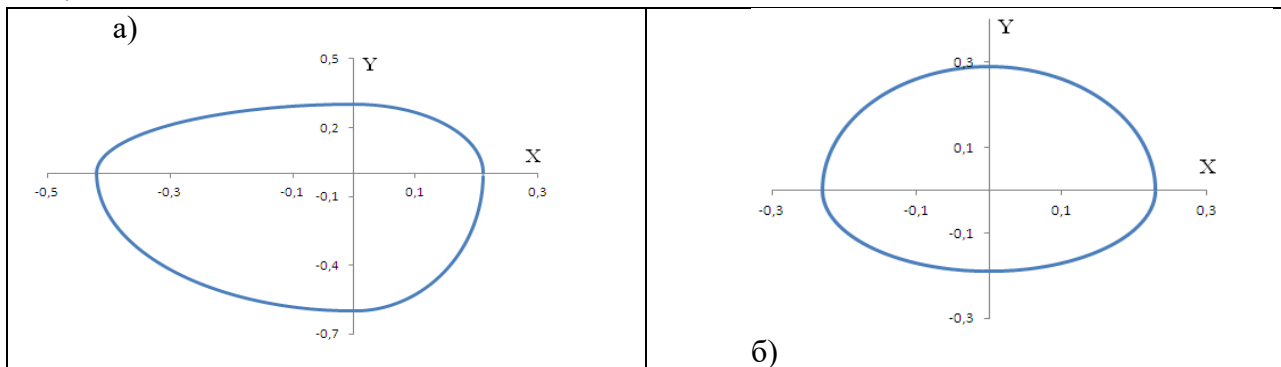


Рис. 1. Годографы силы трения: двухосевая (а) и одноосевая (б) асимметрия.

Начало движения материальной точки

Утверждение. Пусть на материальную точку, находящуюся на плоскости, действует активная сила $P = P(\cos \delta \mathbf{i} + \sin \delta \mathbf{j})$, где P - величина этой силы, δ - угол, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки, задающий ее направление. Между точкой и плоскостью возникает сила асимметричного ортотропного трения: коэффициенты трения вдоль положительных направлений осей Ox и Oy - f_{x+} и f_{y+} , в противоположных направлениях - f_{x-} и f_{y-} соответственно. Считаем, что $f_{x+} \geq f_{x-}$, $f_{y+} \geq f_{y-}$ и $f_{y+} \geq f_{x+}$. Тогда условия начала движения имеют вид:

$$\begin{cases} P \sin(\delta - \vartheta) - N \mu_i \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \\ P \cos(\delta - \vartheta) - N(f_{xi} + \mu_i \sin^2 \vartheta) > 0 \end{cases} \quad i = I, II, III, IV, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_I &= \mu_0 + \mu_1 > 0, & \mu_{II} &= \mu_0 + 2f_{xI} + \mu_1 > 0 \\ \mu_{III} &= \mu_0 - \mu_1 < 0 \text{ или } > 0, & \mu_{IV} &= \mu_0 - \mu_1 - 2f_{xI} < 0 \text{ или } > 0 \\ f_{xI} &= f_{xIV} = f_{x0} + f_{x1} = f_{x+} > 0, & f_{xII} &= f_{xIII} = f_{x0} - f_{x1} = f_{x-} > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и соответствуют квадранту (обозначенному римскими цифрами), в котором лежит вектор силы \mathbf{P} . Направление начального движения определяется углом ϑ_s , который принадлежит следующим интервалам:

$$\begin{aligned} \text{а) } \delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \vartheta_s &\in \left[\arctg \frac{f_{xI}}{f_{xI} + \mu_I} \operatorname{tg} \delta, \delta \right] \subset [0, \delta], \\ \text{б) } \delta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \vartheta_s &\in \left[\delta, \pi - \arctg \frac{f_{xII}}{f_{xII} + \mu_{II}} |\operatorname{tg} \delta| \right] \subset [\delta, \pi], \\ \text{в) } \delta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{при } \mu_{III} > 0 \quad \vartheta_s &\in \left[\pi + \arctg \frac{f_{xIII}}{f_{xIII} + \mu_{III}} \operatorname{tg} \delta, \delta \right] \subset [\pi, \delta] \\ \text{при } \mu_{III} < 0 \quad \vartheta_s &\in \left[\delta, \pi + \arctg \frac{f_{xIII}}{f_{xIII} + \mu_{III}} \operatorname{tg} \delta \right] \subset \left[\delta, \frac{3\pi}{2} \right], \\ \text{г) } \delta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \text{при } \mu_{IV} > 0 \quad \vartheta_s &\in \left[\delta, 2\pi - \arctg \frac{f_{xIV}}{f_{xIV} + \mu_{IV}} |\operatorname{tg} \delta|, \delta \right] \subset [\delta, 2\pi] \\ \text{при } \mu_{IV} < 0 \quad \vartheta_s &\in \left[\frac{3\pi}{2} + \arctg \frac{f_{xIV}}{f_{xIV} + \mu_{IV}} |\operatorname{tg} \delta|, \delta \right] \subset \left[\frac{3\pi}{2}, \delta \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В [5] решена задача о равновесии и начале движения двухмассовой системы (скамьи Жуковского) при действии на нее асимметричного ортотропного трения. Это решение актуально при рассмотрении равновесия более сложных систем [6], в которых вопрос о равновесии сводится к изучению системы, опирающейся на две точки.

Финальное движение твердых тел

Пусть с плоскостью скольжения связана прямоугольная декартова система координат $Oxuz$ так, что оси Ox и Oy лежат в этой плоскости. Будем полагать, что сила трения описывается законом

$$\mathbf{T} = -N\mathbf{Q}(\vartheta) \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{Q}(\vartheta) = \begin{pmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = v(\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j}), \quad (7)$$

$$f_x = \begin{cases} f_{x+}, & v_x \geq 0 \\ f_{x-}, & v_x < 0 \end{cases}, \quad f_y = \begin{cases} f_{y+}, & v_y \geq 0 \\ f_{y-}, & v_y < 0 \end{cases}.$$

Здесь N - давление в точке контакта, \mathbf{v} , v - вектор и величина скорости точки контакта тела с плоскостью, ϑ - угол, определяющий направление скорости точки, который отсчитывается от оси Ox , $v_x = v \cos \vartheta$, $v_y = v \sin \vartheta$ - проекции скорости точки на оси координат, $\mathbf{Q}(\vartheta)$ - матрица коэффициентов трения, f_x и f_y - компоненты матрицы трения, принимающие различные значения в зависимости от проекции скорости на соответствующие оси.

Отметим, что сила трения, действующая на площадку контакта тела с плоскостью, помимо закона трения (7) зависит от формы площадки, закона плотности давления, распределения направлений скоростей по области контакта. Нахождение областей точек контакта тела с плоскостью, в которых скорости направлены в один квадрант, удобно производить предварительно определив мгновенную ось вращения и затем произвести геометрическое разбиение площадки на соответствующие секторы. Полученное разбиение области контакта и

ее форма позволяют перейти к нахождению силы трения и момента трения путем интегрирования по площади контакта с учетом поля распределения скоростей и плотности давления.

В [7] изучается движение тела, которое опирающегося узкой прямоугольной площадкой на горизонтальную плоскость. Были выявлены следующие закономерности:

1. При изотропном трении предельное движение стержня характеризуется перпендикулярностью вектора скорости центра масс к стержню, что означает принадлежность предельного положения мгновенного центра скоростей отрезку контакта тела с плоскостью.
2. При симметричном и асимметричном ортотропном трении непосредственно перед остановкой параметры скорость центра масс не перпендикулярна отрезку, на которое опирается тело на плоскость. Соотношения, по которым находятся кинематические характеристики непосредственно перед остановкой, приведены в [7].

Влияние динамически согласованного ортотропного трения на динамику твердого тела, опирающегося на круговую или кольцевую площадку

При расположении центра масс тела над плоскостью скольжения при движении происходит перераспределение плотности нормальных напряжений. Описание этого явления приводится в [8]. В исследовании [9] рассматривается влияние симметричного ортотропного трения на динамику движения твердого тела при учете концепции динамически согласованного трения. Один из выводов поставленной задачи следующий:

Если начальная скорость направлена вдоль оси Oy ($f_y > f_x$), то сочетание согласованного трения и ортотропного трения, приводит к увеличению отклонения центра масс вправо, если смотреть вдоль вектора начальной скорости. В случае, когда начальная скорость направлена вдоль оси Ox , происходит уменьшение отклонения центра масс вправо, вызываемого учетом расстояния от центра масс до плоскости скольжения вследствие влияния сил ортотропного трения. В [3] было отмечено, что движение вдоль главной оси, соответствующей наибольшему коэффициенту трения при ортотропном трении, является неустойчивым главным направлением скольжения. Одновременный учет концепции согласованного трения и закона ортотропного трения усиливает неустойчивость движения вдоль оси Oy .

Литература

1. Zmitrowicz A. A theoretical model of anisotropic dry friction // *Wear*, 1981, vol. 73, pp. 9–39
2. Александрович А.И., Векшин В.С., Потапов И.Н. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей // *Трение и износ*, 1985, Т. 6, № 6, с. 996–1004
3. Дмитриев Н.Н. Движение диска и кольца по плоскости с анизотропным трением // *Трение и износ*, 2002, Т. 23, № 1, с. 10–15
4. Antoni N., Ligier J.-L., Saffre P., Pastor J. Asymmetric friction: Modelling and experiments // *Int. J. of Engineering Science.*— 2007.— N 45.— P. 587–600
5. Дмитриев Н.Н. Движение материальной точки и равновесие двухмассовой системы в условиях асимметричного ортотропного трения // *Трение и износ*, 2013, Т34, №6, с. 565-574
6. Черноушко Ф.Л. Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // *Изв. АН СССР, МТТ*, 1988, Т6, с. 6 - 17
7. Дмитриев Н.Н., Хан Х. Скольжение узкой прямоугольной пластины по горизонтальной плоскости с асимметричным ортотропным трением при равномерном распределении давления // *ПММ*, 2020, Т84, вып.6, С. 790-802
8. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М. Ижевск: Регул. и хаотич. дин., 2011. 302 с.
9. Дмитриев Н.Н. О движении осесимметричного твердого тела, опирающегося на горизонтальную площадку, в условиях ортотропного динамически согласованного трения // *ПММ*, 2022, том 86, вып 5, с. 666-684

МЕХАНИКА ТРАНСФОРМИРУЕМОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПРИВОДОМ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Зимин В.Н., Шахвердов А.О.

*МГТУ им. Н.Э. Баумана
zimin@bmstu.ru*

Аннотация. Увеличение габаритов современных космических конструкций из-за повышения их функциональных возможностей требует создания трансформируемых больших систем, представляющих собой особый класс крупногабаритных конструкций. При достижении рабочих орбит осуществляется процесс их раскрытия из плотноупакованного транспортного состояния в рабочее положение. Предлагается применить активный элемент в виде проволоки, изготовленной из материала никелида титана. Экспериментально-теоретические исследования модели привода показали принципиальную возможность его применения для развертывания перспективных трансформируемых космических конструкций, обеспечивая при этом управляемое безударное их раскрытие.

Введение

Создание больших космических систем, имеющих различные конфигурации в транспортном и рабочем состояниях [1], сопряжено с решением многих технических и механических проблем, обусловленных уникальностью конструкций. Процедура раскрытия таких трансформируемых систем происходит за счет силовых приводов, в качестве которых, как правило, используются различного рода пружины и электродвигатели. Перспективным направлением для совершенствования массовых характеристик трансформируемых космических конструкций является возможность использования материалов с эффектом памяти формы (ЭПФ) для создания приводов [2, 3], обеспечивающих управляемое безударное их раскрытие из транспортного состояния в рабочее положение. Определяющие соотношения для материалов, обладающих ЭПФ, представляющие зависимости деформаций от напряжений, температуры и доли фазового состава являются существенно нелинейными. Как правило, наряду с задачей деформирования активных элементов возникает необходимость решать задачу теплопроводности. Поэтому основную роль при создании подобных силовых приводов в настоящее время играют экспериментальные методы.

Экспериментальные исследования

В качестве активных элементов силового привода для раскрытия трансформируемых космических конструкций предлагается использовать проволоку диаметром 1,5 мм из материала никелида титана, нагреваемого в процессе работы путем пропускания через него электрического тока. Предварительно активные элементы длиной 160 мм подвергались температурной обработке для устранения возможных внутренних напряжений. Для оценки стабильности параметров активных элементов силового привода были созданы экспериментальные установки для предварительного деформирования активных элементов и определения их основных характеристик, рис. 1.

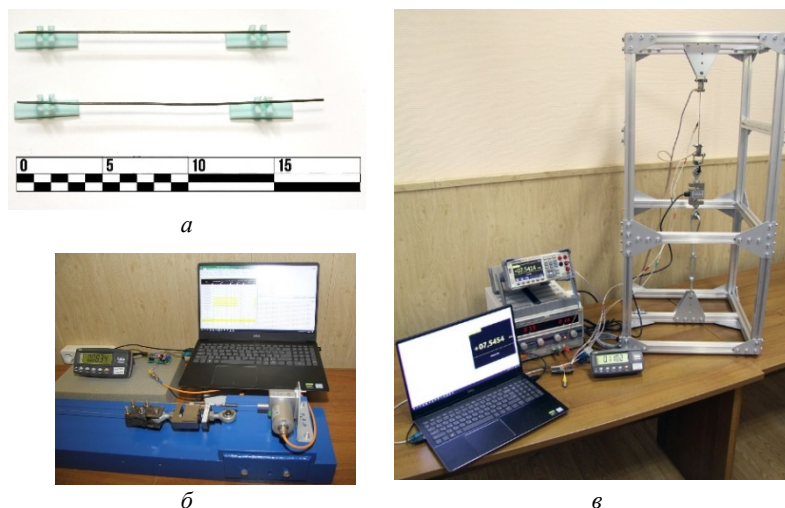


Рис. 1. Экспериментальные установки: *а* – активные элементы из материала никелида титана; *б* – установка для деформирования активного элемента; *в* – установка для определения основных характеристик активного элемента.

В ходе испытаний контролировались следующие параметры активного элемента: температура, электрическое сопротивление, рабочий ход (уменьшение относительного удлинения активного элемента), развиваемое усилие (усилие, создаваемое активным элементом) и время срабатывания. Для измерения температуры использовались два метода: контактный и бесконтактный. При контактном методе был применен

набор из датчиков термодатчиков, размещенных по длине активного элемента. При бесконтактном измерении температуры использовался тепловизор, измеряющий излучение активного элемента в ИК-диапазоне.

С помощью цифрового универсального вольтметра, работающего в режиме амперметра, измерялась сила тока. Для фиксации относительного удлинения активного элемента (перемещение, создаваемое приводом) использовался тросовый потенциометрический датчик перемещения.

Развиваемое усилие активным элементом силового привода определялось с помощью цифрового динамометра с отдельным тензометрическим датчиком. При расчете изменения температуры активных элементов силового привода в наземных испытаниях проводился подбор коэффициента теплообмена. При проведении численного эксперимента полученные результаты хорошо коррелировались с данными экспериментальных исследований. При этом в расчетах учитывалось изменение сопротивления и теплоемкости активных элементов в процессе их нагрева.

Для имитации рабочего усилия, развиваемого активными элементами в процессе экспериментальных исследований, были использованы пружинные элементы в количестве от одного до семи. Для оценки стабильности параметров силового привода были проведены исследования при многократном последовательном повторении цикла растяжение – срабатывание активных элементов. В табл. 1 приведены результаты экспериментальных исследований активного элемента, для имитации рабочего усилия которого использовались пружинные элементы в количестве от одного до семи.

Таблица 1.

Результаты испытаний

Цикл испытаний	Количество пружин	Максимальное усилие, кН	Жесткость пружин, Н/мм
1	1	0,18	17
	1	0,18	17
	1	0,17	17
2	2	0,3	42
	2	0,3	42
	2	0,3	42
3	3	0,4	49
	3	0,4	49
	3	0,4	49
4	4	0,5	106
	4	0,5	106
	4	0,5	106
5	5	0,54	135
	5	0,54	135
	5	0,54	135
6	6	0,59	146
	6	0,59	146
	6	0,59	146
7	7	0,64	175
	7	0,64	175
	7	0,64	175

Модель функционирования привода

В процессе наземных испытаний можно принять, что изменение тепловой энергии активных элементов привода равно количеству теплоты, поступившему за счет электрической энергии минус тепловые потери от естественной конвекции

$$cm \frac{dT}{dt} = RI^2 - \alpha S(T - T_c), \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость; m – масса активного элемента; T – температура активного элемента; t – время; R – сопротивление материала активного элемента; I – сила тока в активном элементе; α – коэффициент теплообмена; S – площадь поверхности теплообмена; T_c – температура окружающей среды.

При нахождении на орбите можно принять, что изменение тепловой энергии активного элемента привода равно количеству теплоты, поступившему за счет электрической энергии минус тепловые потери от излучения на орбите

$$cm \frac{dT}{dt} = RI^2 - \varepsilon \sigma_0 T^4 S, \quad (2)$$

где ε – относительный коэффициент лучеиспускания (степень черноты); σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана. Найдем равновесные температуры из (1) и (2) при условии $dT / dt = 0$

$$\bar{T}_1 = \frac{RI^2}{\alpha S} + T_c, \quad \bar{T}_2 = \sqrt[4]{\frac{RI^2}{\varepsilon \sigma_0 S}}. \quad (3)$$

Для обеспечения приближенного подобия процессов при наземных испытаниях и на орбите необходимо, чтобы

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2. \quad (4)$$

Учитывая соотношение (3), выражение (4) примет следующий вид

$$\bar{T}_2 = \frac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha} \bar{T}_2^4 + T_c. \quad (5)$$

Преобразуем (5) к виду

$$\frac{\bar{T}_2}{T_c} = \frac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha} \bar{T}_c^3 \left(\frac{\bar{T}_2}{T_c} \right)^4 + 1.$$

Окончательно получим

$$\frac{\bar{T}_2}{T_c} = N \left(\frac{\bar{T}_2}{T_c} \right)^4 + 1. \quad (6)$$

где $N = \frac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha} \bar{T}_c^3$. Из (6) можно определить \bar{T}_2 / T_c для различных N .

Обсуждение результатов

В результате экспериментальных исследований получены температурные зависимости деформаций памяти формы и деформационно-силовые зависимости для активных элементов, работающих в условиях одноосного сжатия. При изменении напряжения источника питания время срабатывания силового привода с активным элементом, изготовленным из проволоки материала никелида титана, изменялось. Однако, несмотря на разное время срабатывания силового привода, рабочий ход активного элемента оставался постоянным. Анализируя полученные результаты экспериментальных исследований, можно сделать вывод, что активный элемент при работе в условиях осевого сжатия имеет большие значения восстанавливающей силы (развиваемое усилие), но малые перемещения (рабочий ход). При этом шарнирные узлы трансформируемой космической конструкции должны обеспечивать значительные относительные перемещения смежных звеньев во время её раскрытия. Обеспечение таких перемещений активными элементами привода с ЭПФ требует значительных линейных размеров проволоки, выполненной из материала никелида титана. Этот недостаток легко преодолеть за счет укладки длинного проволочного активного элемента в составных звеньях трансформируемой космической конструкции. Техническое решение данной проблемы возможно за счет огибания шарнирного узла, связывающего составные звенья раскрывающихся частей конструкции, активным проволочным элементом.

Заключение

Силовые приводы с ЭПФ могут обеспечить «управляемое» раскрытие перспективных трансформируемых крупногабаритных космических конструкций, исключая динамические нагрузки ударного характера, фиксирующие раскрытое рабочее состояние составляющих элементов систем на орбите при срабатывании соответствующих замковых устройств. Разработка математической модели функционирования активного элемента силового привода позволит получить его основные характеристики (развиваемое усилие, время срабатывания, рабочий ход), а также мощность и напряжение источника питания. При необходимости, с использованием разработанной модели можно будет корректировать конструктивные параметры активного элемента (длину, форму и размеры его поперечного сечения) и условие его нагрева.

Литература

1. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (Часть 1) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2007, № 2. С. 51-57.
2. Likhachev, V. A., Razov, A. I., Cherniavsky, A. G., Kravchenko, Y., & Trusov, S. N. (1994, March). Truss mounting in space by shape memory alloys. In Proceedings of the First International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, California, USA (pp. 245-248).
3. Schiedeck, F., Hemsel, T., & Wallaschek, J. (2006). The use of shape memory alloy wires in actuators. In Solid State Phenomena (Vol. 113, pp. 195-198). Trans Tech Publications Ltd.

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТЧАТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ И НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Ковальчук Л.М., Бурнышева Т.В.

Новосибирский Государственный Технический Университет, Новосибирск, Россия
lol.petrushka@mail.ru

Аннотация. В исследовательской работе рассмотрены два подхода к моделированию анизотридной оболочечной конструкции регулярной структуры без обшивки. Изучено поведение сетчатых оболочек фиксированной массы при изменении плотности сетчатой структуры и ее геометрических параметров. Проводился многофакторный вычислительный эксперимент по оценке напряженно-деформированного состояния конструкции. В ходе эксперимента была определена зависимость максимальных продольных напряжений в ребрах от изменения угла наклона спирального ребра к образующей, числа пар спиральных ребер и толщины реберной структуры. Проводилось исследование устойчивости конструкции при крутящей внешней нагрузке.

Введение

Сетчатые композитные оболочки часто выступают в качестве элементов агрегатов космических аппаратов. Предпосылкой к их использованию является снижение массы сетчатой оболочки без потери жесткости и прочности конструкции. Оболочка образуется путем пересечений кольцевых и спиральных ребер и усилена шпангоутами по кромкам конструкции.

Учитывая, что масса фиксирована, изменение сетчатой структуры конструкции будет происходить за счет варьирования геометрических параметров: угла наклона спирального ребра к образующей и числа пар спиральных ребер. Изменяя геометрические параметры, в большинстве случаев получаем рост числа структурных элементов сетчатых оболочек [1].

При решении задачи структурной и параметрической оптимизации при заданной фиксированной массе применяются численные методы расчета. На начальном этапе необходимо определиться с подходом к моделированию [2], учитывая ограниченность ресурсов ПК и время, затрачиваемое конечно – элементным программным комплексом на построение модели и решение задачи.

В статье также представлены результаты численных расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) серии оболочек при кручении и анализ потери устойчивости сетчатой конструкций.

Постановка задачи

Примем за исходную модель сетчатую цилиндрическую оболочку, состоящую из 72 пар спиральных ребер с углом наклона спирального ребра к образующей равным 19° . Верхний шпангоут конструкции нагружается крутящим моментом равным $1 \text{ тс}\cdot\text{м}$. На нижнем шпангоуте расположены сферические шарниры, накладывающие ограничения на перемещение точек закрепления. Масса конструкции составляет 165 кг, материал конструкции углепластик со следующими характеристиками материала: модуль упругости (E) 190 ГПа, плотность материала (ρ) 1781 кг/м^3 .

Определение геометрических параметров реберной структуры

Расчет геометрических параметров ребер был реализован в математической среде MathCAD14 в виде алгоритма. Входными параметрами являлись: высота конструкции (H), радиус конструкции (R), толщина (b) и высота (h) реберной структуры исходной модели, масса конструкции (M) и угол наклона спирального ребра к образующей (α). В результате работы алгоритма рассчитывается объем исходной конструкции (V) и набор соответствующих толщин элементов реберной структуры в зависимости от варьируемых параметров анизотридной конструкции.

Для оценки напряженно–деформированного состояния и критической нагрузки потери устойчивости сетчатой оболочки был проведен многофакторный вычислительный эксперимент. Факторами варьирования выбирались следующие параметры конструкции: число пар спиральных ребер (N), угол наклона спирального ребра к образующей (α) и зависящая от этих факторов толщина реберной структуры (b).

Изменение обозначенных факторов позволило построить семейство реберных структур в виде оболочек с различной плотностью сетки и разным углом наклона спирального ребра к образующей. Дискретные модели оболочек были реализованы в программном комплексе ANSYS Mechanical APDL.

Подходы к моделированию в An s y s Mechanical APDL

Моделирование и расчет конструкций осуществлялся в конечно-элементном программном комплексе ANSYS Mechanical APDL. При построении расчетных моделей были рассмотрены два подхода.

Первый подход к моделированию дискретных моделей заключается в последовательном задании для семейств ребер циклами точек, образованных пересечениями спиральных ребер. В дальнейшем точки соединяются линиями с жесткостными характеристиками, соответствующими спиральному или кольцевым ребрам, а также шпангоутам.

Второй подход заключается в построении структурного элемента из всех видов ребер и его тиражировании по окружности необходимое количество раз.

Для оценки эффективности подходов к моделированию дискретных моделей, фиксировалось и анализировалось время, затраченное ПК на численный расчет напряженно-деформированного состояния оболочки (рис. 1). Вычислительный эксперимент проводился на пяти конструкциях с одинаковой массой и различной плотностью сетки.

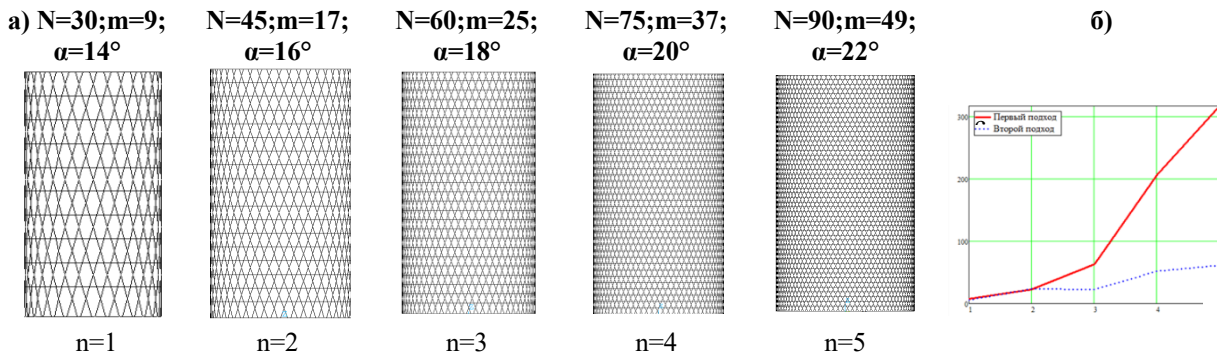


Рис. 1. К анализу подходов моделирования сетчатых оболочек в ANSYS Mechanical APDL

- а) дискретные модели сетчатых оболочек с разной плотностью ребер: N – число пар спиральных ребер; m – число кольцевых ребер; α – угол наклона спирального ребра к образующей; n – номер конструкции;
б) зависимость времени построения и расчета НДС сетчатых оболочек от плотности их реберной структуры: t – затраченное время ANSYS Mechanical APDL на расчет и построение моделей.

Подход к построению дискретной модели, основанный на первоначальном построении структурного элемента показал большую эффективность по затраченному времени для конструкций с регулярной структурой ребер. Данный подход к построению дискретных моделей сетчатых оболочек следует применять при моделировании конструкций с большим числом структурных элементов и высокой плотностью структуры.

Конечно-элементная модель оболочки и граничные условия в ANSYS Mechanical APDL

При моделировании дискретных моделей закладывалось два типа конечных элементов, обусловленных особенностью сформулированной задачи. Первый тип конечного элемента использовался при построении реберной структуры – балочный двухузловой элемент BEAM4 [3] с шестью степенями свободы в каждом узле. Второй тип конечного элемента это MPC184. Он характеризуется как ограничительный жесткий элемент, использованный для моделирования топологических связей соединяющих узлы верхнего шпангоута с мнимым узлом приложения крутящего момента.

Напряженное состояние сетчатой оболочки

Анализ напряженно-деформированного [4–6] состояния сетчатых оболочек с регулярной структурой ребер при расчете на кручение с нагрузкой равной 1 т.с. на метр показывает следующее:

- в кольцевых ребрах наблюдаются зоны, как растяжения, так и сжатия, которые чередуются друг с другом;
- спиральные ребра с наклоном вправо растягиваются, а с наклоном влево сжимаются.

Расчет НДС проводился для конструкций с различным углом наклона спирального ребра к образующей от 14° до 24° и плотностью сетки (30, 45, 60, 75, 90 спиральных ребер). По результатам многофакторного вычислительного эксперимента были построены поверхности зависимостей продольных напряжений в спиральных и кольцевых ребрах от факторов варьирования (рис. 2 (а, б)). Анализируя поверхности, можно сделать следующие выводы: максимальные и минимальные напряжения в ребрах зависят линейно от изменения толщины реберной структуры; напряжения зависят нелинейно от изменения угла наклона спирального ребра к образующей. Поверхности откликов максимальных напряжений в спиральных ребрах разглаживаются с увеличением плотности структуры, а в кольцевых ребрах сильнее искривляются.

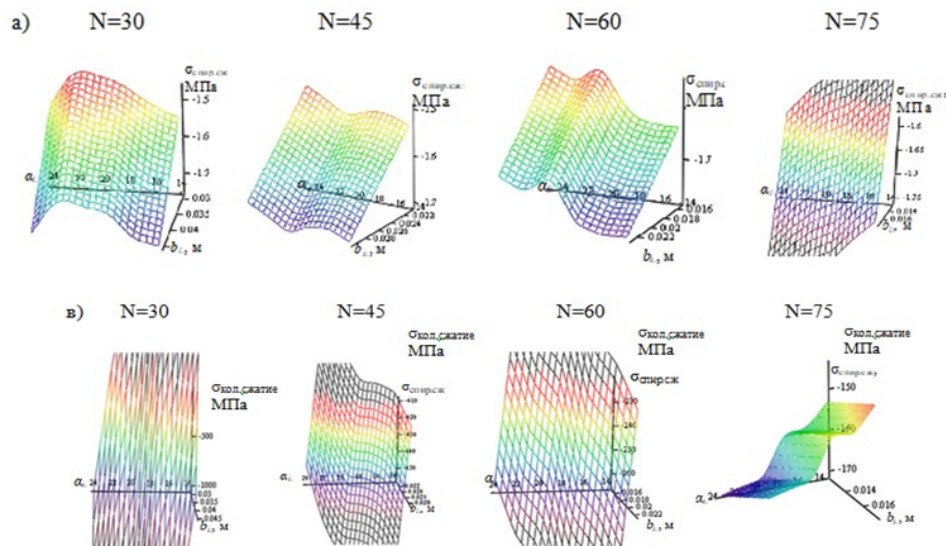


Рис. 2. Зависимости продольных максимальных и минимальных напряжений в ребрах от факторов варьирования (N – число пар спиральных ребер; α – угол наклона спирального ребра к образующей; b – толщина реберной структуры)
а) абсолютные значения максимальных сжимающих напряжений в спиральных ребрах;
в) абсолютные значения максимальных сжимающих напряжений в кольцевых ребрах.

Анализ устойчивости сетчатой оболочки

Аналогичный многофакторный вычислительный эксперимент был проведен для определения критической нагрузки потери устойчивости оболочки. Рост плотности сетчатой структуры приводит к нелинейному изменению величины необходимого критического крутящего момента (рис. 3): при варьировании угла наклона спирального ребра к образующей получена нелинейная поверхность, в то время как при изменении толщины реберной структуры зависимость сохраняет линейный характер.

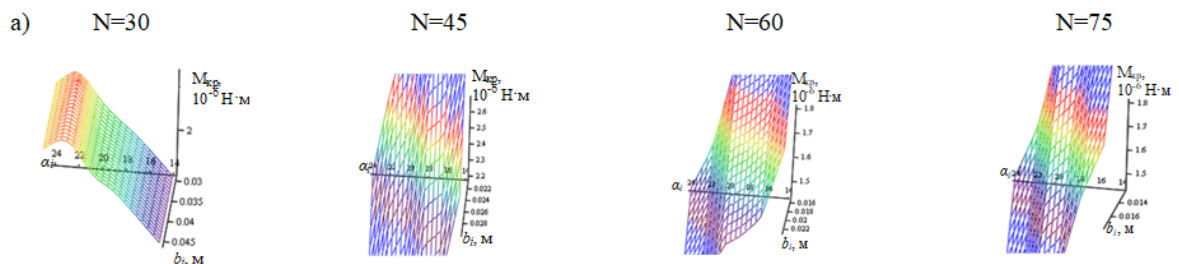


Рис. 3. Поверхности зависимости критического момента $M_{кр}$ от факторов варьирования: α – угол наклона спирального ребра к образующей; b – толщина реберной структуры.

Дополнительно можно отметить, чем выше плотность реберной структуры оболочки, тем поверхность отклика выполненного вычислительного эксперимента содержит меньше изломов и точек перегиба.

Заключение

В ANSYS Mechanical APDL можно реализовать два подхода к моделированию, но целесообразным будет являться подход с выделением структурного элемента, так как затрачиваемое время на построение и расчет существенно меньше.

По результатам многофакторного вычислительного эксперимента при варьировании угла наклона спирального ребра к образующей, числа пар спиральных ребер и толщины реберной структуры при постоянной массе конструкции были построены поверхности откликов. В зависимостях максимальных продольных напряжений в ребрах оболочки наблюдается нелинейность при варьировании угла наклона спирального ребра к образующей и линейная зависимость при изменении толщины ребра. С увеличением плотности сетки поверхности зависимостей максимальных напряжений спиральных ребер от варьируемых факторов разглаживаются, для кольцевых ребер – искривляются.

Проведенный расчет конструкций на устойчивость показал, что с увеличением плотности сетки поверхность критических моментов от варьируемых факторов разглаживается. Отмечается нелинейная зависимость критических моментов от изменения угла наклона спирального ребра к образующей.

Анализ результатов вычислительных экспериментов показали, что можно подобрать оптимальную структуру и параметры сетчатой оболочки при приложенной нагрузке и заданной массе всей конструкции.

Литература

1. Ковальчук Л. М. Методика оценки влияния плотности реберной структуры сетчатой оболочки на ее надежность / Л. М. Ковальчук. - Текст : непосредственный // Молодежь и будущее авиации и космонавтики : сб. аннотаций конкурсных работ 13 Всерос. межотраслевого молодежного конкурса науч.-техн. работ и проектов, Москва, 22–26 нояб. 2021 г. – Москва : Перо, 2021, С. 169-171. - 300 экз. - ISBN 978-5-00189-644-9.
2. Особенности задания граничных условий при моделировании сетчатых анизотридных конструкций. Бурнышева Т.В., Штейнбрехер О.А., Ульянов А.Д. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2018. Т. 11. № 1. С. 137-144.
3. ANSYS Inc. ANSYS mechanical APDL structural analysis guide release 14.0, 2011.
4. Ковальчук Л.М. Исследование напряженного состояния и оценка устойчивости анизотридной цилиндрической оболочки при изменении параметров реберной структуры при статическом нагружении / Л.М. Ковальчук, Т.В. Бурнышева // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2022. – Т. 23. – № 1. – С. 81-92.
5. Ковальчук Л. М. Исследование напряженного состояния сетчатой композитной оболочки без обшивки при кручении/ Л. М. Ковальчук ; науч. рук. Т. В. Бурнышева. - Текст : непосредственный // Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов : сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. участием, Новосибирск, 7-10 сент. 2022 г. - Новосибирск : ФАУ «Сибирский научно – практический исследовательский институт авиации им. С.А. Чаплыгина» 2022. - ISBN 978-5-6043216-4-5.
6. Бурнышева Т.В. Особенности деформирования сетчатых композиционных оболочек при статическом осевом сжатии / Т.В. Бурнышева, В.О. Каледин, А.Б. Миткевич/ Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2012. – Т. 78. – № 11. – С. 61-65.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРАКТА ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА

Кузнецов С.Ф., Позняк Е.В., Шипков А.А.

*Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва
shipkova@mpei.ru*

Введение

В докладе представлены методика и результаты определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкции теплообменного аппарата при гидростатическом и температурном воздействиях. Схема гидравлического тракта аппарата представлена на рис. 1.

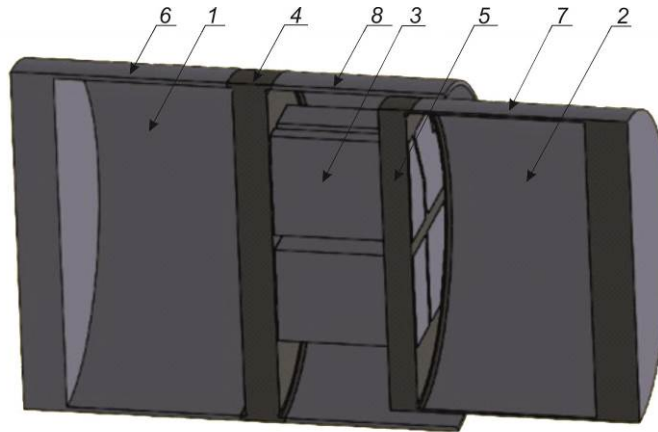


Рис. 1. Схема подогревателя низкого давления: 1, 2 – водяная и поворотная камеры, 3 – пучки труб теплообмена, 4, 5 – трубные доски водяной и поворотной камер, 6, 7 – обечайки водяной и поворотной камер, 8 – обечайка корпуса

Основная проблема проведения расчетов таких конструкций заключается в том, что система труб теплообмена (3, рис.1) может содержать до нескольких тысяч элементов, а трубные доски (4, 5, рис.1) – соответственное количество отверстий для фиксации труб [1]. Характерная схема перфорации трубной доски представлена на рис.2.

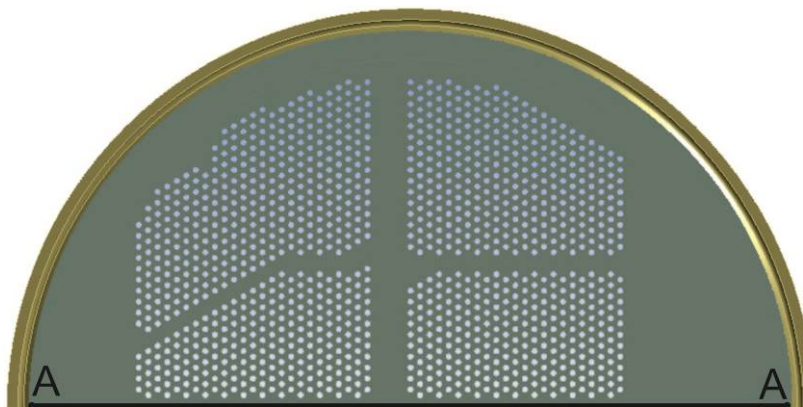


Рис. 2. Схема перфорации основной трубной доски подогревателя низкого давления (правильная треугольная сетка).

Сложность геометрии конструкции не позволяет проводить расчеты для всего ансамбля компонент гидравлического тракта на основе общей полномасштабной конечно-элементной модели. Несмотря на весьма широкие возможности современных программных вычислительных комплексов, размерность дискретных схем оказывается чрезмерно велика. По этой причине применяется комплексная методика, включающая проведение расчетов на полномасштабных моделях для отдельных элементов конструкции и применение при анализе взаимодействия компонент гидравлического тракта эквивалентных континуальных моделей для зон перфорации и пучков труб теплообмена. В обоих случаях для определения напряженно-деформированного

состояния формулируются линейно упругие пространственные краевые задачи, решение которых осуществляется с использованием отечественного программного вычислительного комплекса FideSYS на основе трехмерных конечно-элементных схем дискретизации.

Эквивалентные расчетные модели трубных досок и пучков труб теплообмена

В данном подходе зоны перфорации и теплообмена представляются сплошными упругими средами, эквивалентными по деформационным свойствам неоднородному перфорированному массиву и трубным пучкам. Областям перфорации трубных досок корреспондируются свойства трансверсальной изотропии (соответствует правильной треугольной сетке перфорации) с эффективными упругими постоянными, определяемыми в зависимости от упругих постоянных материала трубной доски и параметров сетки перфорации. Среда в зонах, в которых размещаются трубы теплообмена, рассматривается как анизотропная, обладающая свойством упругого сопротивления типа растяжение-сжатие исключительно в продольном направлении. Эквивалентность устанавливается на основе требования равенства потенциальных энергий деформации представительного объема, определяемой на уровнях фактической структуры области (микро-уровень) и вводимой сплошной среды (макро-уровень). При этом линейный масштаб изменчивости эффективных напряжений и деформаций эквивалентной среды полагается превышающим масштаб структуры на микро-уровне.

Решения краевых задач для моделей трубных досок с эквивалентным представлением зон перфорации при сопоставлении с результатами для полномасштабных моделей демонстрируют достаточную точность данного подхода в отношении определения макро-характеристик деформированного состояния. Это позволяет использовать эквивалентные континуальные модели при постановке комплексной задачи определения напряженно-деформированного состояния ансамбля конструктивных элементов гидравлического тракта.

Следует отметить, что эффективные напряжения, получаемые в рамках данного подхода в зонах перфорации и теплообмена, имеют содержание величин, осредненных на масштабе представительных объемов структуры. Вне зон перфорации напряжения имеют обычный физический смысл.

В докладе представлены теоретическое обоснование подхода, техника определения эффективных упругих постоянных для эквивалентных сред, а также описана процедура реконструкции напряженно-деформированного состояния представительных объемов на микро-уровне на основе его эффективных характеристик. Приведены результаты по верификации подхода, в том числе, сопоставление с некоторыми имеющимися аналитическими решениями [2].

Комплексная модель деформирования элементов конструкции гидравлического тракта

Применение эквивалентных континуальных моделей для зон перфорации трубных досок и пучков труб теплообмена существенно снижает размерность конечно-элементных дискретизаций, требуемых для получения численного решения удовлетворительной точности, так как линейные размеры этих областей сопоставимы с габаритными размерами элементов конструкции. Этим обеспечивается техническая возможность применения при расчетах комплексных расчетных моделей, включающих все основные конструктивные элементы гидравлического тракта теплообменного аппарата. Решение краевых задач для комплексных моделей представляется необходимым, так как дает достоверную информацию о качественных и количественных характеристиках взаимодействия конструктивных элементов гидравлического тракта и, в конечном счете, о действительном напряженно-деформированном состоянии конструкции.

Комплексная модель подогревателя низкого давления, рассмотренная в настоящей работе, включает трубные доски и участки обечаяк водяной и поворотной камер, участок обечайки корпуса и трубные пучки зоны теплообмена (рис. 1). При генерировании конечно-элементной дискретной схемы применялись трехмерные конечные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений, размерность комплексной дискретной модели составляет приблизительно $1.2 \cdot 10^6$.

Представлены результаты определения напряженно-деформированного состояния конструкции в режиме гидравлических испытаний. Качественно, характеры распределений напряжений в трубных досках аппарата подобны (рис. 3). Наибольшие напряжения возникают в областях, разделяющих участки перфорации в центральной части трубной доски, при этом на границах участков перфорации вблизи контуров отверстий образуются локальные области концентрации напряжений. Значительное повышение уровня напряжений имеет место также в зоне соединения трубных досок с обечайками, вызываемое в существенной степени наличием технологических утонений в этой зоне. Для детального исследования зон концентрации напряжений были проведены расчеты с использованием полномасштабных моделей трубных досок и специальных конечно-элементных сеток с местными сгущениями.

В отношении состояния системы труб теплообмена, возникающего в результате взаимодействия с трубными досками, решение показывает, что упругая реакция труб теплообмена распределяется по сечениям пучков неравномерно. Наибольшие растягивающие продольные деформации и напряжения испытывают периферийные области пучков. В центральной области образуется область сжатия с весьма умеренными величинами напряжений (рис. 4). Такой характер взаимодействия несколько улучшает условия работы трубных досок, вместе с тем, состояние трубной системы весьма чувствительно к характеристикам их изгибных

жесткостей. При выборе параметров конструкции данный фактор имеет существенное значение.

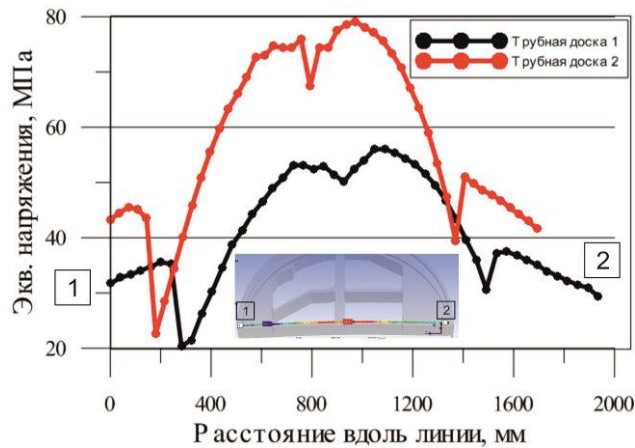


Рис. 3. Графики изменения эквивалентного напряжения по критерию Губера-Мизеса на поверхностях трубных досок (поз. 4,5, рис. 1) вдоль линии A-A (рис. 2) вне зон концентрации.

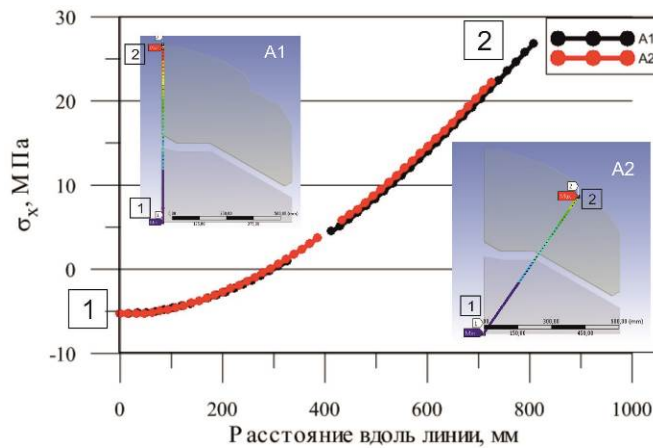


Рис. 4. Изменение нормальных напряжений в трубах теплообмена вдоль линий (A1, A2), ориентированных в радиальных направлениях сечения области теплообмена (поз.3 на рис. 1).

Заключение

В рамках предлагаемого подхода последовательно разрешаются основные проблемы, возникающие при расчете напряженно-деформированного состояния теплообменных аппаратов. Это обеспечивается применением расчетных моделей различного уровня. При решении упругой краевой задачи для всей конструкции гидравлического тракта применяются эквивалентные континуальные модели для участков перфорации и пучков труб теплообмена, что позволяет избежать использования конечно-элементных дискретизаций критической размерности. На основе результатов данного этапа с помощью полномасштабных моделей отдельных компонентов конструкции определяется напряженное состояние в локальных зонах концентрации (зона утонения трубной доски, пограничные зоны участков перфорации, корневые области труб теплообмена). Подход используется при проведении численных экспериментов по анализу конструктивных решений в целях повышения механической надежности аппаратов.

Литература

1. Фраас А., Оцисик М. // Расчет и конструирование теплообменников. 1971. 358 с.
2. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. // Перфорированные пластины и оболочки. 1970. 556 с.

КОЛЕБАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ВДОЛЬ НИХ МЕХАНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Лисенкова Е.Е.

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук”,
Нижний Новгород, Россия
eelissen@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается согласованное динамическое поведение балки, лежащей на упругом основании модели Пастернака, с движущимся объектом. Изучаются особенности генерации изгибных волн источником колебаний, носителем которого является движущийся объект. Определены критические скорости его движения. Получено выражение для силы, обусловленной давлением волн (силы сопротивления движению). Исследуется зависимость постоянной составляющей этой силы от скорости движения объекта, упругих и вязких параметров основания. Проведен расчет энергозатрат источника, обеспечивающего движение объекта с постоянной скоростью. Приводится сравнение с результатами, полученными для упругого основания модели Винклера.

Введение

Динамике упругих систем с подвижными нагрузками уделяется достаточно внимания в литературе, благодаря своему широкому практическому приложению (см., например, цитируемую в [1] литературу). Особый интерес представляют задачи о колебаниях балок на упругом основании, которые часто используются в качестве моделей, описывающих динамику железнодорожного полотна [2]. Следует заметить, что исторически первая и самая распространенная модель упругого основания базируется на гипотезе Винклера (1867 г.), развитой Циммерманом (1888 г.). Эта гипотеза предполагает, что зависимость между давлением на грунт и вызванной им осадкой точки является прямо пропорциональной. При давлении на поверхность грунта на какой-либо одной малой площадке грунт будет оседать только под ней. В действительности же грунт обладает распределительной способностью, т.е. он оседает не только под нагруженной областью, под фундаментом, но и вблизи него. К настоящему времени существует значительное число моделей деформируемого основания, учитывающий данный эффект. К ним можно отнести модели, предложенные Т. Карманом (1910 г.), К. Вигхардтом (1922 г.), М.М. Филоненко-Бородичем (1945 г.), М. Хетеньи (1946 г.), П.Л. Пастернаком (1954 г.), В.З. Власовым и Н.Н. Леонтьевым (1956 г., 1960 г.), Э. Рейсснером (1996 г.). Сопоставление данных моделей для случая модели однослойного основания, свойства которой описываются двумя обобщенными упругими характеристиками, позволяет говорить в математическом отношении об их эквивалентности. Как оказалось, расчет по указанным моделям, являющийся промежуточным между расчетами по модели Винклера и модели упругого полупространства, дает более быстрое затухание осадок поверхности грунта по мере удаления от края фундамента, чем теория упругости [см. ссылки в 1].

В связи с развитием высокоскоростных магистралей повышаются требования к модели и точности расчетов [1–6]. Использование обобщенной модели упругого основания характеризующейся двумя коэффициентами постели на «сжатие» и «сдвиг» (часто называемой моделью Пастернака), позволяет не только сохранить простоту математического аппарата, которая присуща модели Винклера, но и получить более достоверные результаты.

Постановка и решение задачи о колебаниях балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущимся вдоль нее объектом

Рассмотрим систему, состоящую из направляющей, вдоль которой по неизвестному закону $x=l(t)$ движется объект, обладающий моментом инерции I_0 и массой m , на который действует переменная сила $P(t)$. Динамическое поведение упругой направляющей и движущегося по ней объекта взаимнообусловлены, т.е. характер колебаний направляющей зависит от закона движения объекта, а движение последнего происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны направляющей. Направляющую будем считать лежащей на упругом основании модели Пастернака однородной балкой, колебания которой описываются в рамках гипотезы Бернулли-Эйлера. Для вывода уравнений движения и естественных краевых условий воспользуемся вариационным подходом. С этой целью выпишем лагранжиан λ рассматриваемой направляющей и функцию Лагранжа L движущегося объекта: $\lambda = (\rho F u_t^2 - E u_{xx}^2 - h_1 u^2 - h_2 u_x^2) / 2$, $L = (m(\dot{u}_0^2 + \dot{l}^2) + I_0 \dot{w}_0^2) / 2$ где $u(x,t)$ – поперечное смещение срединной линии балки; ρF – погонная плотность; I – момент инерции, E – модуль Юнга, h_1 и h_2 – коэффициент «постели» на сжатие и коэффициент «сдвига» основания балки, соответственно; $u_0(t)$ и $w_0(t)$ – поперечное смещение и угол поворота объекта.

Используя методику постановок краевых задач на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского [7, 8], получим, что взаимнообусловленное динамическое поведение балки и движущегося по ней объекта (в предположении, что их параметры постоянны) описывается системой уравнений.

$$u_{\eta} + \alpha^2 u_{xxx} - c_{\eta}^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0 \quad (1)$$

$$u(l+0, t) = u(l-0, t) = u(l(t), t) = u_0(t), \quad u_x(l+0, t) = u_x(l-0, t) = u_x(l(t), t) = w_0(t),$$

$$I_0 \ddot{w}_0 = IE[u_{xx}], \quad m \ddot{u}_0(t) = -\rho F [\alpha^2 u_{xxx} - c_{\eta}^2 u_{xx} - \dot{u}_x] + P(t), \quad m \ddot{l} = F_{pr} + Q,$$

$$F_{pr} = -\rho F [u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + c_{\eta}^2 u_x^2 - \omega_0^2 u^2 - 2\alpha^2 u_x u_{xxx} + 2\dot{u}_x u_t] / 2 \quad (2)$$

Здесь квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от движущейся границы $x=l(t)$; $\alpha^2 = IE/\rho F$; $c_{\eta} = \sqrt{h_2/\rho F}$; $\omega_0 = \sqrt{h_1/\rho F}$ – наименьшая частота возбуждаемых в балке волн; F_{pr} – сила, обусловленная давлением волн; Q – внешняя сила. Для полноты постановки задачи следует задать начальные условия и потребовать ограниченность значений $u(x, t)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Анализ задачи, в предположении равномерного закона ($l(t) = Vt$, $V = \text{const}$) движения объекта по направляющей, разобьем на два этапа: 1) решение задачи кинематики (отыскание частот и волновых чисел, возбуждаемых в направляющей волн, а также критических скоростей движения объекта); 2) отыскания амплитуд этих волн и сил взаимодействия. Под критической скоростью (V_*) движения объекта понимается такая скорость, при превышении которой качественно меняется картина волнообразования [7]. Необходимость в правильном расчете критических скоростей при проектировании скоростных наземных магистралей связана, прежде всего, с тем, что они являются предельно допустимыми [см. 2, 3 и литературу к ним]. В данном случае критические скорости движения объекта, на который действует источник колебаний частоты Ω , определяются решением уравнения восьмого порядка, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} & \tilde{V}^8 - \beta^2 (4 - \tilde{\Omega}^2) \tilde{V}^6 + (-9\tilde{\Omega}^2 (4 - \tilde{\Omega}^2) + 3\beta^4 (2 - \tilde{\Omega}^2) - 8(1 - \tilde{\Omega}^2)^2) \tilde{V}^4 + \\ & + \beta^2 (36\tilde{\Omega}^2 (1 - \tilde{\Omega}^2) - \beta^4 (4 - 3\tilde{\Omega}^2) + 16(1 - \tilde{\Omega}^2)^2) \tilde{V}^2 + (1 - \tilde{\Omega}^2) (\beta^4 - 4 + 4\tilde{\Omega}^2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tilde{V} = V/\sqrt{\alpha\omega_0}$, $\beta^2 = c_{\eta}^2/(\alpha\omega_0)$, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0$.

В пренебрежении коэффициентом сдвига ($\beta \rightarrow 0$) из (3) получаются известные выражения [8] для критических скоростей движения нагрузки вдоль балки Бернулли-Эйлера на винклеровом основании. Если частота источника отлична от нуля и не превосходит ω_0 , то существуют две критические скорости, в противном случае – одна. Вычисляя их для рельсовой направляющей ракетного трека [9] с параметрами: $EI = 1.16$ МНм², $\rho F = 65$ кг/м, $h_1 = 200$ МН/м², $\Omega = 620$ 1/с, получим: $V_{*1} = 920$ м/с, $V_{*2} = 1258$ м/с (в случае основания модели Пастернака), $V_1^* = 505$ м/с, $V_2^* = 846$ м/с (в случае основания модели Винклера). Наличие второго коэффициента в основании приводит к увеличению значений критических скоростей, которые сопоставимы с экспериментальными данными. Так, например, на ракетном треке ВНИИЭФ при скоростях разгона 1160–1450 м/с взаимодействие ступени ракетного поезда с направляющей в некоторых случаях приводило к появлению волнообразных остаточных деформаций и, в конечном итоге, разрушению рельсовой направляющей.

При движении по направляющей тяжелой массы ($P = -mg$, $I_0 = 0$), являющейся источником нулевой частоты, существует только одна критическая скорость, при переходе через которую возбуждаются бегущие волны. Выражение для нее находится из (3) в явном виде $V_* = \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{\eta}^2}$ и схоже с полученным другим способом в работе [10]. Эта скорость совпадает с минимальной фазовой скоростью распространения волн для данной модели и превышает аналогичную для балки на винклеровом основании [7, 8]. Принимая во внимание условия ограниченности прогибов балки на бесконечности и условия излучения Мандельштама, получим, что у неподвижной нагрузки или движущейся со скоростью $V < V_*$, поле поперечных смещений локализовано около источника и представляет собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций. Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $V > V_*$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, две из которых бегут впереди движущейся нагрузки, а две другие – ей вслед, отводя от нее энергию. Амплитуды волн неограниченно возрастают при $V = V_*$. Увеличение скорости приводит к более медленному затуханию прогибов с удалением от точки приложения движущегося источника, чем от статической нагрузки. Коэффициент затухания нераспространяющейся волны для балки, лежащей на обобщенном упругом основании, превосходит аналогичный для балки на винклеровом основании, уменьшаясь с возрастанием скорости. При $V > V_*$ для обеих моделей $u(Vt, t) = 0$. Источник, движущийся по балке на основании Пастернака, излучает волны с большими амплитудами, чем по балке на винклеровом основании.

Подстановка точного решения задачи в (2), дает выражение для давления волн (силы сопротивления движению [11]). Поскольку собственное поле не оказывает давление на нагрузку, то для $V < V_*$ имеем $\langle F_{pr} \rangle = 0$. При $V > V_*$ $\langle F_{pr} \rangle \neq 0$ вследствие потерь энергии на излучение. Случай $V = V_*$ является «резонансным».

Учет распределенных диссипативных потерь в основании балки приводит к добавлению в (1) дополнительного слагаемого $2\delta u$, где δ – приведенный коэффициент вязкости основания. Сила сопротивления движению вычисляется на основе аналитического решения, полученного в приближении малой вязкости. При скоростях $V < V_*$ сопротивление движению обусловлено лишь диссипативными потерями в основании балки, а при $V > V_*$ – вследствие потерь на работу против сил вязкого демпфирования и потерь на излучение. В силу рассматриваемого приближения (малой вязкости) критическая скорость не зависит от δ .

Представляет интерес рассчитать энергозатраты источника, обеспечивающего движение полезной нагрузки с постоянной скоростью. Под энергозатратами источника, поддерживающего равномерное движение объекта, понимается работа силы, действующей на направляющую со стороны движущегося объекта, совершаемая в единицу времени, т.е. мощность, передаваемая объектом направляющей [2]. Поскольку в установившемся режиме точка приложения контакта движется строго горизонтально, то работу совершает только продольная составляющая силы реакции со стороны направляющей, а именно, сила давления волн. При движении постоянной грузки со скоростью, не превышающей минимальную фазовую скорость распространения волн для данной модели, эти энергозатраты равны нулю и отличны от нуля при наличии диссипативных потерь в основании балки.

Заключение

При малых скоростях движения объекта использование винклеровой модели упругого основания дает завышенное значение поперечного смещения направляющей под нагрузкой по сравнению с моделью Пастернака, а при закритических скоростях – заниженные динамические характеристики бегущих волн и силы давления волн в движущемся контакте. Если движение нагрузки происходит со скоростью $\sqrt{2\alpha\omega_0} < V < \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$, то в первом случае (винклерово основание) колебания направляющей носят волновой характер, в то время как при использовании основания с двумя коэффициентами постели, бегущие волны еще не излучаются. Расчет критических скоростей по формуле (2) показал сопоставимость с экспериментальными данными, полученными на ракетном треке ВНИИЭФ при высоких скоростях разгона.

Учет диссипативных потерь в основании балки приводит к ограничению резонансных максимумов амплитудной характеристики, асимметрии прогиба направляющей впереди и позади от движущегося объекта, к наличию сопротивления движению и отличных от нуля энергозатрат источника при докритических скоростях даже в отсутствие трения.

Рассмотренная задача дополняет цикл исследований проблем волновой динамики и устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим ракетного трека [1, 9, 12]. Полученные результаты могут служить методическим и расчетным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону полезной нагрузки.

Литература

1. В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова, И. С. Царев // Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой, ПММ, 85:2 2021. 193–209
2. А. В. Метрикин, С. Н. Веричев, А. В. Вострухов // Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. 2015. 200 с.
3. И. И. Иванченко // Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. 2011. 574 с.
4. А. В. Савин // Выбор конструкции пути для высокоскоростного движения, Транспорт Российской Федерации, 68:1 2017. 18–21
5. Ю. А. Абдурашитов, В. П. Сычев, А. Ю. Абдурашитов // Оценка влияния воздействия подвижного состава с различной нагрузкой на ось на железнодорожный путь с различной толщиной балластного слоя и элементами верхнего строения пути на основе моделирования, Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство, 12:12 2018. 58–64
6. A. Savin, O. Suslov, V. Korolev, A. Loktev, I. Shishkina // Stability of the continuous welded rail on transition sections, Advances in Intelligent Systems and Computing, 1115 2020. 648–654
7. А. И. Весницкий // Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. 2001. 320 с.
8. А. И. Весницкий // Избранные труды по механике. 2010. 248 с.
9. С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев // Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека, Проблемы машиностроения и надежности машин, 3 2016. 25–27
10. И. А. Дуплякин // Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками, ПММ, 55:3 1991. 461–471
11. В. А. Бычков, С. В. Крысов, В. В. Холуев // Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль деформируемых систем, Машиноведение, 3 1988. 60–66
12. С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев, И. А. Одзериho, Д. Ю. Смирнов // Оценка влияния волновых процессов в упругой направляющей на динамику ракетного трека, Вестник научно-технического развития, 142:6 2019. 3–12

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ МАГНИТА С КВАЗИБЕССИЛОВОЙ ОБМОТКОЙ

Лобачев М.И., Лагуткина А.Д., Шнеерсон Г.А.

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
lobachev_mi@spbstu.ru

Аннотация. В данной работе проводится исследование влияния полоидального и тороидального токов для двухслойной магнитной системы на ее механическую прочность. В программном комплексе COMSOL Multiphysics решаются связанные электромагнитные задачи и задача механики деформируемого твердого тела на основании полученных объемных сил Лоренца, возникающих при течении тока в обмотке. Помимо параметров задания тока в обмотке влияют на результат также и геометрические характеристики данной системы. Для создания наилучшей конфигурации с точки зрения прочности при заданной аксиальной магнитной индукции в центральной части соленоида решается задача параметрической оптимизации. В ходе ее решения на выходе получается геометрия и параметры для задания тока для двухслойной системы квазибессилловой обмотки, которая потенциально сможет создать сверхсильное магнитное поле свыше 100 Тл.

Введение

В течение более ста последних лет среди физиков и инженеров не убывает интерес к проблеме получения всё более сильных магнитных полей. Этот интерес вызван, в первую очередь, различными применениями сильных полей в исследованиях и в технологии. Можно упомянуть такие фундаментальные открытия, как осцилляции Шубникова-де Гааза, целочисленный и дробный квантовый эффект Холла и многие другие. Другое перспективное применение – использование сильных магнитных полей в устройствах удержания плазмы для термоядерного синтеза (токамаки и стеллараторы).

Нескольким лабораториям мира удалось создать импульсное магнитное поле с индукцией 80–100 Тл с помощью неразрушающих магнитов. Эти магниты, изначально основанные на концепции токоведущего соленоида, в настоящее время характеризуются чрезвычайно сложной конструкцией обмоток и арматуры (как внешней, так и внутренней), разработанной таким образом, чтобы уменьшить максимальные механические напряжения в системе, вызванные огромными значениями силы Лоренца. В настоящее время происходят попытки увеличить максимально возможную величину магнитной индукции, при этом сохранив целостность конструкции. Потому возможность создания уникальной конфигурации магнита или вклад в теоретические исследования этому способствующие будут представлять научную новизну в данном вопросе.

Квазибессилловые системы

Итак, для построения подобной конфигурации требуется решить связную электромагнитную и механическую задачи. При решении второй требуется удовлетворить условиям прочности для конструкции. С одной стороны, повышение оной может быть реализовано увеличением отношения внешнего радиуса катушки к внутреннему [1]:

$$\frac{R_e}{R_i} = e^{\frac{1}{\eta}}$$

Где η – безразмерный параметр, характеризующий отношение максимального напряжения по Мизесу к генерируемому значению индукции в квадрате на центральной оси соленоида:

$$\eta = \frac{\sigma_{Max}}{B_0^2} \cdot 2\mu_0$$

Таким образом, размеры магнитной системы растут экспоненциально с увеличением максимально возможной величины генерируемого магнитного поля. А это делает задачу получения новых рекордов практически нереализуемой с коммерческой точки зрения. К тому же мощность для генерации тока тоже растет с невероятной скоростью, что опять же превращает исследователей в заложников технического прогресса. Для разрешения этого вопроса на помощь приходит стройная теория о создании таких конфигураций, в которых обмотка при помощи геометрических характеристик и выбора направлений пускаемого тока была бы уравновешена компонентами возникающей магнитной силы в проводнике с обеих (с внутренней и внешней) сторон. Электромагнитные силы обращаются в ноль, если выполнено векторное условие:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$$

К сожалению, в реальных конструкциях получение строго бессилловых обмоток, удовлетворяющих уравнению выше, невозможно, потому применяются квазибессилловые системы, для которых, согласно [1], увеличение кол-ва слоев ведет к уменьшению механического параметра η .

Двухслойная система электромагнита

Опыт предыдущего построения двухслойных систем, например, в [2] и в [3] показывает, что при достижения низкого уровня механических напряжений в срединной части обмотки, наиболее нагруженной

становится торцевая зона. При этом напряжения в торцевой зоне возможно значительно уменьшить путем снижения величины магнитной индукции в этой зоне. Схема с описанием подобной изначальной системы квазибессиловой модели представлена на рис. 1. Она также включает в себя два концентратора и экран для управления магнитным полем.

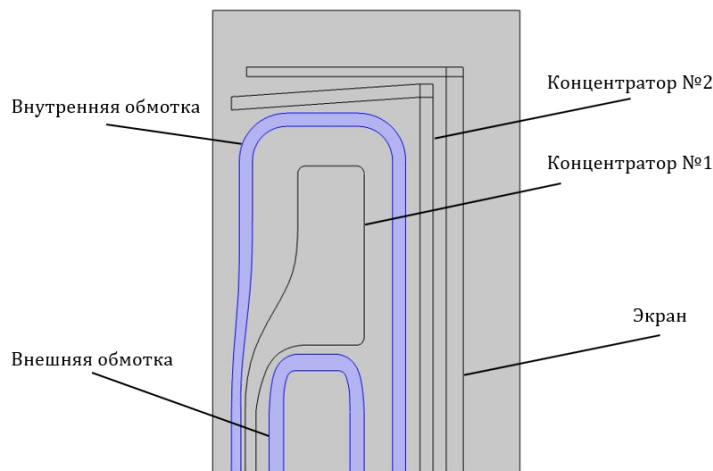


Рис. 1. Схема с описанием изначальной квазибессиловой модели.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача с изначальной геометрией, представленной на рис. 1, распределения полоидального и тороидального магнитных полей, а далее связанная задача механики деформируемого твердого тела с заданными объемными силами Лоренца. При определении полоидального магнитного поля вектор магнитной индукции \mathbf{B} характеризуется компонентами B_r и B_z , а тороидальное, в свою очередь, имеет лишь компоненту B_φ .

Вышеупомянутые магнитные поля и их величины характеризуются распределением токов, проходящих в обмотках. Для этого в программном комплексе COMSOL MuIti physics решаются две отдельные задачи: в первом случае в обмотке протекает ток в азимутальном направлении, равный величине $j_\varphi = \frac{C_i}{\mu_0 r}$, где константа C_i определяется для каждой обмотки отдельно, а во втором случае величина протекаемого полоидального тока варьируется и подбирается в соответствии с уменьшением возникающих интегральных радиальных и аксиальных механических сил, возникающих суммарно в обеих задачах. В качестве дополнительных параметров также выступают геометрические характеристики концентраторов, позволяющих разгрузить торцевые части двухслойной квазибессиловой системы.

Таким образом, в связанных задачах появляется набор параметров, влияющих на механическую прочность системы и соответственно на целостность конфигурации в целом. Для создания конфигурации с заданным аксиальным магнитным полем в центральной части соленоида и максимальным запасом прочности требуется решить задачу параметрической оптимизации. В данной работе исследуются различные методы и целевые функции для поиска наилучших значений параметров с точки зрения вышеупомянутых критериев.

Заключение

В результате решения задачи параметрической оптимизации для двух связанных электромагнитных задач и задачи механики деформируемого твердого тела была получена конфигурация двухслойной системы магнита с квазибессиловой обмотки, удовлетворяющая критериям прочности при заданной аксиальной магнитной индукции. Таким образом, данное исследование является шагом к получению сверхсильного магнитного поля свыше 100 Тл.

Литература

1. Шнеерсон Г.А. Основы техники получения сильных и сверхсильных импульсных магнитных полей. Учеб. пособие. — СПб: изд-во Политехн. ун-та, 2011. — 310 с. В. А.
2. A. Lagutkina, A. Nemov, A. Nenashev, and G. Shneerson, "Feasibility of development of non-destructive magnets with megagauss field for controlled thermonuclear fusion," in AIP Conference Proceedings, 2019, vol. 2179
3. Nemov, Alexander S., Anna D. Lagutkina, and German A. Shneerson. "A conceptual three-dimensional design of a non-destructive two-layer quasi-force-free magnet for megagauss field generation." IEEE Transactions on Magnetism (2022).

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТНО- ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Лонин К.А., Панов В.А., Патрушев В.Л., Савчук Д.В., Соловьев С.А.

АО "ОКБМ Африкантов"
varanov@okbm.nnov.ru

Аннотация. Проведена разработка математической модели с экспериментально полученными параметрами аппроксимационных зависимостей для прогнозирования длительных механических свойств конструкционного материала беличьей клетки (медь М0) приводного электродвигателя с учетом температурной ползучести. С использованием экспоненциального уравнения Нортона с коэффициентами, полученными на основе экспериментальных кривых ползучести, а также разработанной цифровой 3D модели проведено численное моделирование напряженно-деформированного состояния «беличьей клетки» ротора. Проведенные исследования позволили подтвердить прочность и назначенные ресурсные характеристики электродвигателя.

Одним из способов снижения затрат на собственные нужды энергетических установок (ЭУ), а следовательно, повышения их коэффициента полезного действия является отказ от систем охлаждения. Повышение температуры элементов оборудования ЭУ требует подбора соответствующих конструкционных материалов, но в целом эта проблема решена для большинства оборудования работающего до температур 450 °С [1]. Однако, для приводных электродвигателей асинхронного типа, в элементах короткозамкнутой обмотки (стержни, коротко замыкающие кольца), используются цветные материалы (например, медь и бронза), в которых, вследствие совместного изменения различного уровня эксплуатационных нагрузок и высоких температур (например, выше 100 °С), необходимо учитывать явление ползучести. Данные по длительным механическим свойствам и уравнениям температурной ползучести для материалов отдельных элементов электродвигателей (вал ротора, элементы короткозамкнутой обмотки ротора, листы статора) в широком диапазоне температур и напряжений отсутствуют.

Проведение натурных испытаний электродвигателей на специальных стендах с моделированием условий эксплуатации нецелесообразно по экономическим причинам и причинам безопасности вследствие возможных разрушений деталей. Это обуславливает актуальность задачи обоснования на этапе проектирования прочности и назначенного ресурса элементов электродвигателя расчетно-экспериментальными методами. Для разрабатываемых в АО «ОКБМ Африкантов» электродвигателей эта задача решается проведением комплекса расчетно-экспериментальных работ по прогнозированию ползучести и длительной прочности [1–3] конструкционных материалов за назначенный ресурс, и численного моделирования напряженно-деформированного состояния элементов электродвигателя.

В общем случае, прогнозирование проводится на основе физически обоснованных методов преобразования экспериментальных кривых зависимости времени до разрушения t_f от напряжения одноосного растяжения σ_{11} при некоторых базовых температурах к единой приведенной кривой длительной прочности ($\sigma-t$). Создаваемое эксплуатационными нагрузками напряженное состояние в элементах ротора и статора электродвигателя: изгиб стержней, кольцевые напряжения растяжения короткозамыкающих колец, сжатие листов пакета статора позволяет рассматривать его как одноосное.

На первом этапе работы, по полученной зависимости скорости деформации ползучести на установленном участке, при действующих в элементах конструкции напряжениях и рабочих температурах определено, что у материалов ротора и железа статора электродвигателя (сталь 09Х17Н и сталь 2412) при температурах до 370 °С явления ползучести не проявились. Таким образом, определяющим работоспособность и прочность электродвигателя вследствие ползучести, является материал элементов беличьей клетки (стержень, короткозамыкающие кольца и их сварное соединение) – медь М0.

Учитывая, что элементы беличьей клетки асинхронных электродвигателей работают в широком диапазоне температур и напряжений, при разработке математических моделей для прогнозирования длительных механических характеристик принимаются во внимание известные механизмы разрушения при ползучести [2, 3] (рис. 1):

- внутризеренное накопление повреждений и разрушение при высоких напряжениях, соответствующее малым долговечностям;
- хрупкое межзеренное накопление повреждений в виде клиновидных трещин при средних напряжениях;
- межзеренное накопление повреждений в виде зарождения, развития и слияния пор при невысоких напряжениях и высоких температурах.

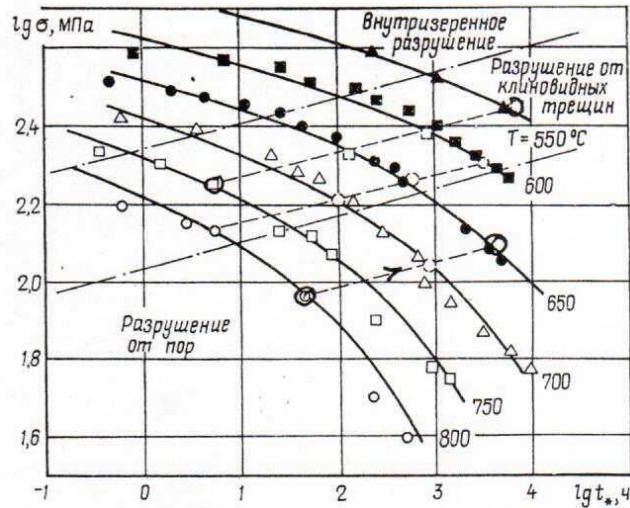


Рис. 1. Механизмы разрушения при ползучести [3].

По результатам предварительных испытаний отмечено значительное снижение пластичности материала М0 при повышенной температуре, а так же его «шелушение», что уменьшало площадь образца и приводило к недостоверности результатов. Проблема решена путем нанесения защитного покрытия. Испытания на длительную прочность проводились в соответствии с ГОСТ 10145-81 на испытательной машине Instron 8862 на воздухе.

По результатам проведенных экспериментальных работ по меди М0 на временной базе до 1000 ч. определено, что из известных методов [2], метод экстраполяции длительных механических свойств для меди М0 может быть основан на соотношении Шестерикова-Аршакуни [3]

$$\lg t^* = 9T^*/T + A - sh[\alpha(\sigma_{11} \cdot 10^{-0,525T^*/T})]^q, \quad (1)$$

где t^* – время до разрушения, час;

σ_{11} – напряжение, МПа;

T – температура испытания, °К;

T^* – температура плавления материала, °К;

A, α, q – экспериментально определяемые параметры.

Для вычисления параметров α и q , основываясь на выражении (1), решалась система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \lg \alpha + q \left(\lg \sigma_{11(1)} - 0,525 \frac{T^*}{T} \right) - \lg \ln \left[10^{9T^*/T+A-\lg t^{*(2)}} + \sqrt{10^{2(9T^*/T+A-\lg t^{*(1)})} + 1} \right] = 0, \\ \lg \alpha + q \left(\lg \sigma_{11(2)} - 0,525 \frac{T^*}{T} \right) - \lg \ln \left[10^{9T^*/T+A-\lg t^{*(2)}} + \sqrt{10^{2(9T^*/T+A-\lg t^{*(2)})} + 1} \right] = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнений использовалась экспериментально полученная кривая длительной прочности в координатах $\lg t^* \sim \lg \sigma_{11}$ для материала М0 на ограниченной временной базе 200 ч. Для вычисления параметров α и q использовались две крайние точки на экспериментальной кривой длительной прочности, средняя точка использовалась для уточнения теоретической кривой длительной прочности, с учетом минимизации отклонений численных и экспериментальных значений.

Необходимо отметить, что некоторое изменение значения параметра T^* (около температуры плавления материала), использовались при подборе констант α, q, A .

Для начального приближения параметра A использовалась таблица 4.1 [3], где для рассмотренных материалов этот параметр приведен в диапазоне $-16 \leq A \leq -11$. Окончательное значение параметра A определяется из наилучшей аппроксимации экспериментальных данных. В [3] показано, что относительная погрешность при определении напряжения $\sigma_{11(i)}$ на кривой длительной прочности по выбранной методике для широкого круга конструкционных материалов не превышает 10%, без учета разброса экспериментальных данных.

Определение параметров A, α и q , входящих в соотношение (1), осуществлялось с помощью регрессионного анализа данных в пакетах MathCAD и EXCEL. Для обеспечения консервативности прогнозов в качестве времени до разрушения принято время начала третьего участка кривой ползучести (резкого нелинейного роста деформаций ползучести).

На рис. 2 представлена теоретическая кривая длительной прочности, полученная по разработанной математической модели.

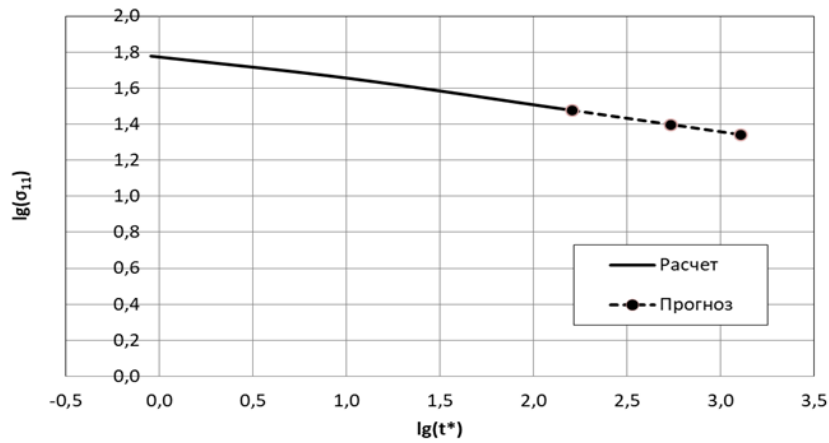


Рис. 2. Теоретическая кривая длительной прочности.

По результатам испытаний на ползучесть и длительную прочность меди М0 построены кривые ползучести (рис. 3) на различных уровнях напряжений при рабочих температурах. По результатам тестирования путем численного моделирования на стандартном лабораторном образце определено, что лучшему приближению к экспериментальным кривым ползучести дает экспоненциальное уравнение Нортон, учитывающее только второй участок ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} e^{-C_3/T}.$$

Данное уравнение использовано при численном моделировании напряженно-деформированного состояния ротора электродвигателя, цифровая 3D расчетная модель которого состоит из вала, короткозамыкающих колец сваренных со стержнями, бандажа и рубашки ротора. Сопряжения деталей моделировались контактными элементами с учетом соответствующих зазоров и натягов.

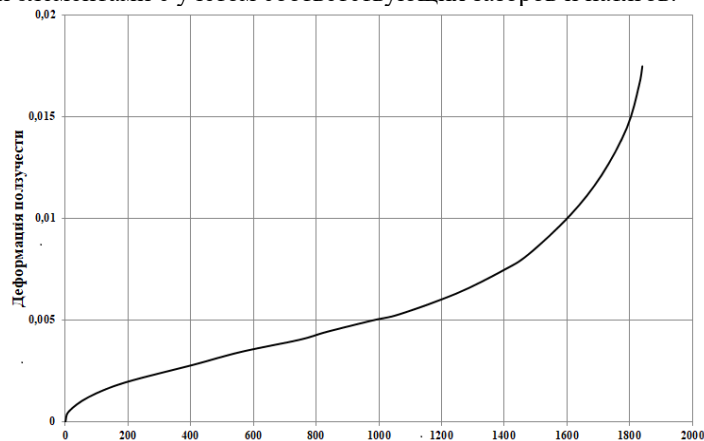


Рис. 3. Кривая ползучести образца при рабочих напряжениях и температуре.

В результате проведенных расчетно-экспериментальных работ разработана математическая модель, по которой, при принятых параметрах аппроксимационных зависимостей, проведена экстраполяция кривой длительной прочности для меди М0 на требуемое время эксплуатации электродвигателя. Тем самым, спрогнозированы длительные физико-механические свойства конструкционного материала беличьей клетки для назначенного ресурса при рабочих температурах. Результаты проведенной работы с использованием разработанной цифровой 3D конечно-элементной модели «беличьей клетки» и численного моделирования позволили обосновать ресурсные характеристики электродвигателя.

Литература

1. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. М.: Энергоатомиздат, 1989. 525 с.
2. Сапунов В.Т. // Прогнозирование ползучести и длительной прочности жаропрочных сталей и сплавов ЯЭУ. Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. 136 с.
3. Шестериков С.А., Аршакуни А.Л., Чередеева Л.В // Метод температурно-силового прогнозирования длительной прочности металлов // Проблемы прочности. 9 1989. 6-9

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЁС С ЭЛЕМЕНТАМИ ПУТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Михеев Г.В., Родиков А.Н.

ООО "Вычислительная механика", Брянск, Россия
mikheev@umlab.ru

Аннотация. Рассмотрены методы моделирования динамики железнодорожного транспорта в программном комплексе «Универсальный Механизм» с применением различных моделей колёсных пар и путевой структуры. Предложен подход к моделированию динамики пути с использованием суперэлементов рельса. Приводятся результаты моделирования движения по стрелочному переводу с применением упругой модели колёсной пары и следящей модели инерционного пути.

Введение

Решение задач повышения скорости движения и грузоподъемности железнодорожного транспорта связано с анализом динамики экипажей и путевой структуры. Он может быть составной частью комплексных исследований, целью которых является, например, оценка условий деградации пути или определение допустимых скоростей движения в кривых участках дороги и по стрелочным переводам. Подобный анализ часто выполняется с помощью компьютерных программ, реализующих методы динамики систем тел. К программам этого класса относится отечественный программный комплекс «Универсальный механизм» (ПК УМ) [1], разработанный при участии авторов. Компьютерное моделирование позволяет выявить на этапе проектирования неблагоприятные эффекты, которые могут послужить причиной снижения ресурса путевой структуры и подвижного состава, и даже приводить к авариям.

Основным подходом к созданию математической модели в ПК УМ является представление механической системы, в частности железнодорожного экипажа, множеством абсолютно твёрдых тел, связанных шарнирами и силовыми элементами. Для решения железнодорожных задач ПК УМ включает модуль УМ Лосо [2], реализующий несколько подробных моделей контактного взаимодействия колеса с рельсом, динамические модели пути, инструменты задания геометрии пути и путевых неровностей и другие программные средства. Уточнение результатов анализа возможно путём учёта упругости отдельных подсистем, которые моделируются с применением метода суперэлементов (Крэйга-Бэмптона), что позволяет расширить исследуемый частотный диапазон, а также рассчитать их динамическое напряжённо-деформированное состояние [3]. Затраты вычислительных ресурсов при этом возрастают значительно.

Многие исследования требуют выполнения сотен численных экспериментов, каждый из которых может продолжаться часами. В этих условиях одной из основных задач, стоящих перед пользователем, становится выбор компьютерных моделей, которые позволят относительно быстро и достаточно точно оценить интересующие динамические величины.

В данной работе рассматриваются методы анализа взаимодействия колёсных пар и железнодорожного пути, реализованные в ПК УМ, при этом основное внимание уделено динамическим моделям рельса. Показана зависимость результатов моделирования движения грузового вагона по стрелочному переводу, в частности значений максимальных сил в контакте колесо-рельс, от применения упругих колесных пар (КП).

Динамические модели колёсных пар и пути

Колёсные пары. Модель недеформируемой КП подробно описана в [2]. Методы моделирования упругой колесной пары, разработанные и реализованные в ПК УМ с участием авторов, приводятся в [4, 5].

Путевая структура. В ПК УМ разработаны несколько моделей пути. *Безынерционный рельс* – сложный нелинейный силовой элемент, который можно условно описать как профиль рельса на упруго-диссипативном основании, параметры жёсткости и демпфирования которого могут быть переменными вдоль пути [2]. Контактная сила рассчитывается в зависимости от относительного положения и скорости профилей колеса и рельса. Безмассовый рельс используется в задачах исследования динамики экипажей.

Инерционный путь моделирует рельсы как абсолютно твердые тела под каждым колесом (рис. 1). Тело-рельс имеет три степени свободы в СКП. Подрельсовое основание моделируется нелинейными упруго-диссипативными силовыми элементами. Эту модель пути рекомендуется использовать для анализа сложных ситуаций контакта колеса с рельсом: конформных контактов, эволюции железнодорожного пути в стрелочных переводах, моделирования случаев схода транспортных средств с рельсов, прогнозирования износа и т.д. Развитием и обобщением данного подхода является разработка шаблонов многомассовых моделей пути, которые могут быстро выбираться из готового набора в зависимости от решаемых задач. На рис. 2 показан шаблон для моделирования движения по стрелочному переводу.

Подробная трехмерная модель *упругого пути* включает упругие рельсы, прокладки, скрепления, шпалы и подшпальное основание (рис. 3). Рельсы описываются конечными элементами балок Тимошенко, максимальная длина которых равна межшпальному расстоянию. Число координат пути может достигать

нескольких тысяч, что достаточно много для задач динамики. Матрица масс рельса ленточная, имеет малую ширину, постоянная, если не учитывать матрицы Якоби от контактных сил колеса с рельсом – это позволяет организовать вычисления достаточно эффективно. С другой стороны, использование матриц Якоби от подвижной контактной нагрузки в неявных методах интегрирования уравнений, применяемых в ПК УМ, может увеличить шаг интегрирования на два порядка, повысив таким образом, эффективность моделирования по сравнению с удержанием разложения матрицы масс. Настройки методов выбираются, как правило, после выполнения тестовых расчётов.

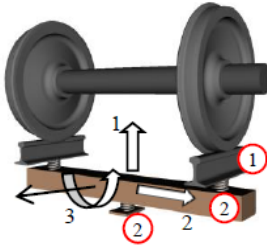


Рис. 1. Следящая модель инерционного пути с тремя степенями свободы для каждого тела: 1) инерционный рельс; 2) нелинейные силовые элементы.

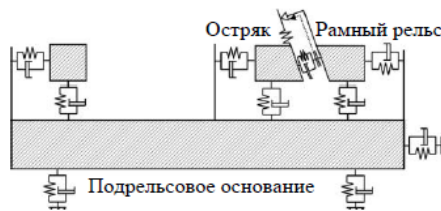


Рис. 2. Следящая модель инерционного пути для стрелки.

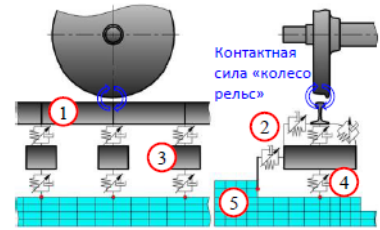


Рис. 3. Модель упругого пути: 1) рельс, 2) крепление рельса, 3) твердая шпала, 4) прокладка под шпалой, 5) абсолютно твердое или упругое основание.

Применение *объёмных суперэлементов* для моделирования динамики рельса и других элементов пути – новый подход, который недавно реализован в ПК УМ и проходит тестирование в настоящее время. Такая модель необходима, например, для расчёта динамического напряжённо-деформированного состояния рельса. Она может использоваться при планировании натуральных экспериментов с тензометрическим рельсом и выполнении проверочных расчётов. Она позволит более точно по сравнению с другими моделями пути оценить силы в контакте и возможные удары при движении по стрелочным переводам и т.д.

Рассмотрим предлагаемый подход. Он применяется в предположении о малости любых перемещений элементов пути. Конечноэлементная модель рельса строится протяжкой плоской сетки его поперечного сечения вдоль направляющей с постоянным шагом (рис. 4). Остриёк и крестовина стрелочного перевода разбиваются с масштабированием сетки их сечений. Суперэлементы создаются путём редуцирования уравнений динамики, сформированных МКЭ, для чего применяется модальный подход в соответствии с методом Крэйга-Бэмптона [3]. Множество форм, из которых формируется модальная матрица включает статические формы от единичных смещений и поворотов внешних (интерфейсных) узлов и собственные формы при закреплённых внешних узлах, (рис. 7–9). Один суперэлемент моделирует рельс между шпалами (рис. 5). Внешние узлы суперэлемента выбираются на его торцах. На рис. 6 показаны предельные случаи: 1) выбраны все узлы на торцах и 2) на торце создана твердая площадка, моделируемая уравнениями связи, с одним внешним узлом.

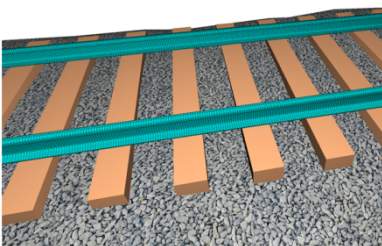


Рис. 4. Модель пути с упругим объёмным рельсом.

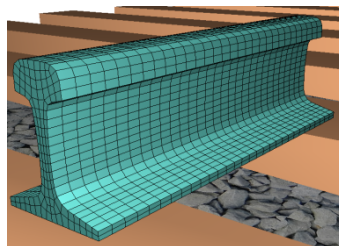


Рис. 5. Суперэлемент объёмного рельса равный по длине межшпальному расстоянию.

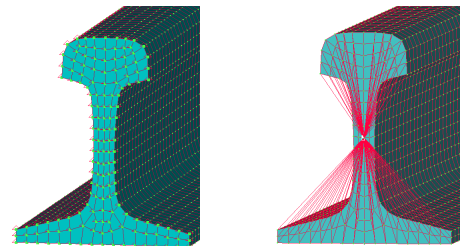


Рис. 6. Выбор интерфейсных узлов на торце суперэлемента: а) слева выбраны все узлы; б) справа – создана твердотельная площадка с одним интерфейсным узлом.

В первом случае упругие характеристики сечения на торце соответствуют заданным в КЭ модели, во втором случае – торцы суперэлемента недеформируемые. С учётом условий опирания рельса в месте соединения суперэлементов можно ожидать, что погрешность результатов, полученных второй моделью, будет незаметна, хотя реальное положение дел предстоит выяснить в численных экспериментах. Применение второй модели гораздо более привлекательно, поскольку число её координат в сто и более раз меньше по сравнению с первым подходом. Но даже при втором подходе система уравнений одного рельса имеет размер более 3 000 при моделировании участка длиной 100–150 метров. Заметим, что сетка и число внешних узлов на торцах соседних суперэлементов должны быть согласованы. При этом условии интерфейсные модальные координаты становятся для них общими, и процедура построения системных матриц масс и жёсткости становится такой же как в МКЭ, то есть матрицы соседних суперэлементов просто суммируются.

В дополнение к выводу уравнений динамики объёмного рельса разработаны и реализованы алгоритмы расчёта *кинematики профиля*, расчёта *обобщенных сил от подвижной нагрузки* – сил в контакте колесо-рельс, а также *матриц Якоби* для силовых элементов, посредством которых рельс взаимодействует с основанием.

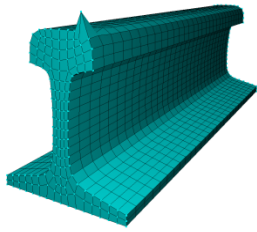


Рис. 7. Статическая форма от вертикального смещения интерфейсного узла, когда все узлы на торце интерфейсные.

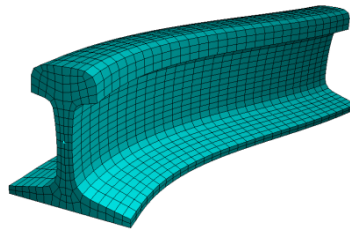


Рис. 8. Статическая форма от единичного поворота интерфейсного узла вокруг вертикальной оси, когда на торце создана площадка.

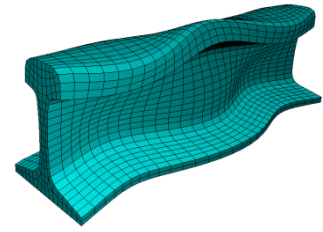


Рис. 9. Собственная форма при закрепленных торцах.

Результаты моделирования

Тестовые расчёты с рельсом из объёмных суперэлементов показали результаты, хорошо согласованные с результатами балочной модели, что говорит о корректности предложенного подхода, поскольку балочная модель была отлажена и верифицирована ранее.

Сравнение результатов моделирования движений по стрелочному переводу. Рассмотрим движение грузового вагона с трёхэлементной тележкой по стрелочному переводу. Моделирование проведено с целью выявления возможных причин возникновения дефектов стрелочного перевода, наблюдаемых в реальности. Согласно предположений повреждения могли быть обусловлены ударами при прохождении перевода и превышением допустимых значений нормальных сил в контакте колесо-путь и контактных давлений. Выполнена серия численных экспериментов, в которых изменялась загрузка вагона и скорость его движения по переводу: максимальная масса вагона 160 тонн, максимальная скорость движения 60 км/ч. Применялись две модели вагона: в первой модели все колесные пары твёрдотельные; во второй – первая колесная пара упругая, остальные – твёрдотельные. Модель упругой колёсной пары имеет конечноэлементную сетку с шагом вращения один градус (360 сечений), учтены 105 упругих форм в частотном диапазоне 99..5 491 Гц. Модель пути – следящая инерционная, представленная на рис. 2.

Графики на рис. 11 демонстрируют типичное соотношение значений нормальных сил и максимальных контактных давлений, рассчитанных в экспериментах.

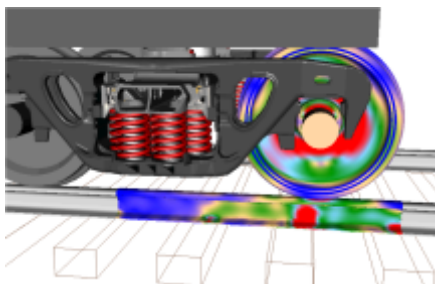


Рис. 10. Моделирование движения упругой колёсной пары по упругому фрагменту рельса из левого колеса первой КП с рельсом при движении через стрелочный суперэлементов. Раскрашивание соответствует эквивалентным напряжениям фон Мизеса.

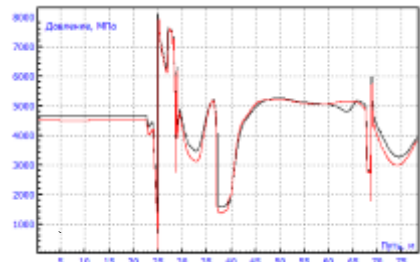
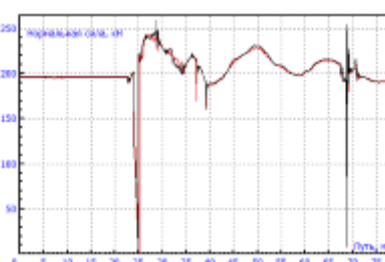


Рис. 11. Нормальные силы (а) и максимальные давления (б) в контакте колёсной пары по упругому фрагменту рельса из левого колеса первой КП с рельсом при движении через стрелочный перевод гружёного вагона со скоростью 50 км/ч; твёрдотельная КП – чёрный; упругая КП – красный.

На основе сравнения результатов моделирования можно сделать следующие основные выводы:

- отличия максимальных значений контактных сил и давлений, полученных обоими КП, малы и не влияют на общее заключение по результатам исследования;
- удары при прохождении стрелочного перевода не наблюдаются независимо от модели КП.

Литература

1. www.universalmechanism.com
2. Моделирование динамики железнодорожных экипажей в программном комплексе «Универсальный Механизм». Руководство пользователя: www.universalmechanism.com/download/80/rus/08_um_loco.pdf
3. R. R. Jr. Craig, M.C.C. Vamptan // Coupling of substructures for dynamic analysis, AIAA Journal. – 1968. – Vol.6, No.7. – pp. 1313-1319.
4. Михеев Г.В., Погорелов Д.Ю., Родиков А.Н. // Методы моделирования динамики железнодорожных колесных пар с учетом упругости, Вестник Брянского государственного технического университета, №4(77), 2019, стр. 40-51.
5. Михеев Г.В., Погорелов Д.Ю., Томашевский С.Б., Родиков А.Н. // Моделирование движения упругих железнодорожных колёсных пар по упругому пути с применением программного комплекса «Универсальный Механизм», сборник трудов XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. В 4-х томах. 2019. С. 479-481.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИПЕРСКОРОСТНОГО УДАРА ТВЕРДОГО ТЕЛА О ТОНКИЙ АЛЮМИНИЕВЫЙ ЭКРАН

Нечунаев А.Ф., Наумова Н.В., Дорофеев Н.П.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
nickdorof60@gmail.com*

Аннотация. В работе выполнено вычислительное моделирование удара твердого тела со скоростью 4190 м/с о тонкую алюминиевую пластину. Показано, что некоторые виды таких ударов весьма опасны, т.к. на оси удара концентрируется существенная масса в облаке осколков. Проведено сравнение с результатом удара сферы сопоставимой массы. Опасность такого высокоскоростного удара выражена, прежде всего, в отношении второго экрана щита Уиппла [1], который применяется для защиты космических аппаратов от техногенного космического мусора. Были изучены случаи прямого соударения, а также случаи поворота вектора скорости под различными углами. В качестве снаряда рассматривались: параболоид вращения, тор, сфера и скрещенные параболоиды. Была произведена оценка опасности повреждения космического аппарата для каждого вида столкновения.

Введение

С развитием освоения человечеством околоземного космического пространства быстро прогрессирует и объем техногенного космического мусора на орбитах различной высоты. На 2021 г. известно более 130 млн объектов размером 0,1–1 см на тех или иных орбитах, вместе взятых. Это отработанные ступени ракет, осколки от столкновения спутников, частицы краски и покрытия космических аппаратов, частицы ракетного топлива, прочий мусор. Такая частица, ударившая на большой скорости в космический аппарат, может вызвать необратимые разрушения обшивки, разгерметизацию, повреждение дорогостоящих приборов. Для защиты космических аппаратов, как правило, применяют двойной экран – так называемый щит Уиппла. Его многослойный дизайн с полостью между слоями позволяет рассеивать кинетическую энергию снарядов и распределять удар по большей площади.

После столкновения опасной частицы с первым тонким экраном щита Уиппла, как рассматривалось в [2– 4], образуется облако осколков сферо- или грушевидной формы, которое практически с такой же скоростью движется ко второму экрану. Воздействие облака осколков на второй экран гораздо менее опасно, чем воздействие компактного ударника.

Основной текст

В работе рассматривались удары тел различной формы (сфера, тор, параболоиды) на скорости $V = 4190$ м/с об алюминиевый экран (Al-6061-T6) толщиной 1 мм.

Численное моделирование проводилось методом SPH (Бессеточный Лагранжевый метод) в программном пакете ANSYS LS-DYNA.

Этот метод с большим успехом применяется для моделирования больших перемещений и деформаций не только на низких скоростях взаимодействия, но и на скоростях более, чем 2 км/с. Для построения геометрии SPH-тел и назначения модели материалов использовался препроцессор LS-Pre-Post.

Первый этап исследования заключался в проверке параметров моделирования на скорости 4190 м/с. Это было выполнено путем сравнения результатов вычислительного моделирования и эксперимента-выстрела на легко-газовой пушке по эксперименту авторов Fa-wei Ke и других [2]. Было выполнено вычислительное моделирование удара сферы из материала Al-1100 о тонкую алюминиевую пластинку из материала Al-6061-T6 с вышеуказанной скоростью. Диаметр сферы соответствовал диаметру сферы из эксперимента и был равен 5,01 мм. Толщина пластинки – аналогично, была равна 1 мм. Пластинка, при моделировании, опиралась на жестко закрепленное кольцо. Полученные результаты показывают формирующиеся в результате удара облака осколков в моменты времени 16 и 24 микросекунды. Сравнение результатов нашего числительного моделирования с результатами эксперимента автора Fa-wei Ke и других ученых, которые проводили фиксацию эволюции облака осколков при помощи лазерных тенеграм, показывает достаточно хорошее совпадение послееударных значений скоростей частиц осколков.

На следующих этапах рассматривались случаи нормального удара сплошного параболоида вращения о тонкий алюминиевый экран, а также случаи отклонения вектора скорости от оси удара на некоторый угол.

При моделировании количество частиц выбиралось так, чтобы все снаряды были сравнимой массы. Рассматривались как случаи прямого столкновения, так и повороты осей вращения и вектора скорости на углы 5, 30 и 45 градусов.

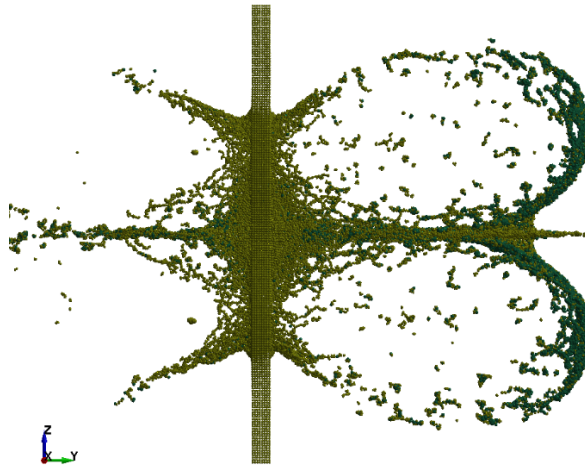


Рис. 1. Прямой (нормальный) удар параболоида вращения.

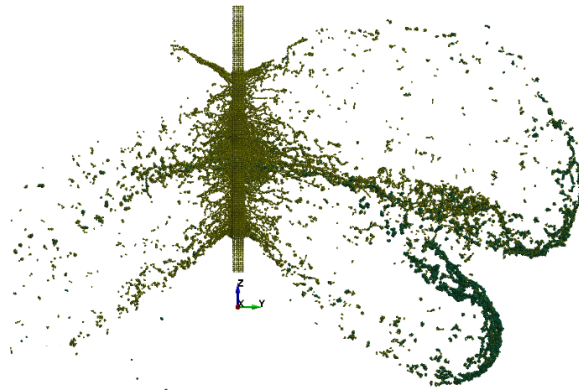


Рис. 2. Случай удара параболоида с отклонением вектора скорости от оси преграды на 30 градусов. Результаты вычислительного моделирования. Момент времени $t = 10$ мкс.

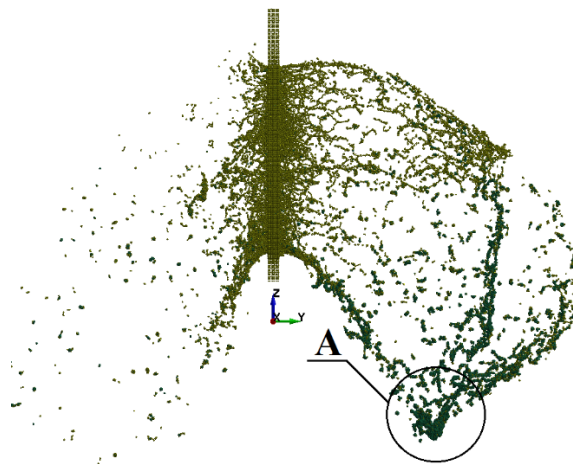


Рис. 3. Случай удара параболоида с отклонением вектора скорости от оси преграды на 45 градусов. Результаты вычислительного моделирования. Момент времени $t = 10$ мкс.

Заключение

Представлено численное моделирование высокоскоростного удара парабооида о тонкую пластину, рассматривались центральный и нецентральные удары. Показано, что при некоторых ударах значительная масса концентрируется на оси удара, это представляет угрозу целостности щита Уиппла.

Также было отмечено, что отклоненный удар парабооида на 30 градусов и более гораздо менее опасен для второго экрана щита Уиппла, т.к. в процессе эволюции два полублака осколков сливаются и явно отклоняются в сторону. Следовательно, второй экран будет нагружен скользящим ударом, который менее опасен. В отдельных случаях были отмечены значительные концентрации масс частиц, обладающих большой скоростью. Такие концентрации двигались вдоль оси удара или перпендикулярно ей, и именно они представляют опасность не только для второго экрана щита, но и могут нарушить целостность обшивки космического аппарата.

Для случая нормального удара были выделены 3 скоростные зоны: медленная, средняя и быстрая. Были описаны их положения и размеры, и представлены рассуждения о потенциальной опасности каждой из них. Отдельно были выделены случаи концентрации массы после удара, было отмечено, что именно такие концентрации представляют наибольшую угрозу.

Литература

1. F.L. Whipple. Meteorites and space travel. The astronomical journal, 52 (1947) 131
2. F. Ke, J. Huang, X. Wen, Z. Ma, S. Liu, Test study on the performance of shielding configuration with stuffed layer under hypervelocity impact, Acta Astronaut. 127 (2016) 553-560 DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.06.037.
3. Meshcheryakov Y.I., Kononov, G.V., Zhigacheva, N.I., Divakov, A.K., Nechunaev, A.F. Strain Behavior of Aluminum Alloys Under Dynamic Compression and Tensile. Advanced Structured Materials, 2022, 164, p. 413–453 DOI: 10.1007/978-3-030-93076-9_21
4. Silnikov M.V., Guk, I.V., Mikhaylin, A.I., Nechunaev, A.F., Rumyantsev, B.V. Numerical simulation of hypervelocity impacts of variously shaped projectiles with thin bumpers. Materials Physics and Mechanics, 42(1), p. 20–29 (2019) http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4212019_3

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АБСОЛЮТНЫХ УЗЛОВЫХ КООРДИНАТ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Погорелов Д.Ю.¹, Родиков А.Н.²

1 - Брянский государственный технический университет, Брянск, Россия

2 - ООО "Вычислительная механика", Брянск, Россия

pogorelov@umlab.ru

Аннотация. Рассмотрен метод моделирования динамики упругих тел, допускающих произвольное движение в пространстве, подверженных большим упругим перемещениям и малым деформациям. Приведены уравнения движения в абсолютных узловых координатах, выведенные методом конечных элементов с использованием подхода Крейга-Бэмптона. Метод предназначен для моделирования упругих трехмерных тел, оболочек и стержней, входящих в систему абсолютно твердых и деформируемых тел. В качестве практического использования приведены примеры моделирования динамики автомобильной шины, пневматической рессоры, механических пружин.

Введение

Моделирование технических систем методами динамики систем тел часто требует включения упругих тел в состав модели. Для этой цели обычно применяется метод Крейга-Бэмптона [1], позволяющий построить уравнения движения упругого тела, совершающего произвольное движение. Для данного метода характерно эффективное снижение числа степеней свободы, однако не допускаются большие упругие перемещения тел и, как следствие, невозможен учет важных нелинейных эффектов, таких как потеря устойчивости, зависимость собственных частот от нагруженности и т.д. Альтернативный подход предлагает метод абсолютных узловых координат (ANCF) [2], который снимает указанные недостатки. Использование абсолютных координат позволяет в явном виде и безытерационно вывести уравнения движения упругого тела с учетом как произвольного пространственного движения, так и больших упругих перемещений. Типичными примерами являются лента транспортера, бурильная колонна в криволинейной скважине, шина автомобиля. Примеры стержневых, пластинчатых и оболочечных конечных элементов в формализме ANCF приведены в работах [3–6].

В работе [7] нами предложен вариант применения ANCF, отличающийся от традиционного способом введения абсолютных координат и методикой построения уравнений. В качестве координат рассматриваются три декартовы координаты, определяющие положение узла, и три угла ориентации связанной с узлом системы координат. Для вывода явных уравнений движения используется подход Крейга-Бэмптона, примененный не ко всему упругому телу, а к каждому элементу конечноэлементной сетки.

В данной работе кратко рассмотрены уравнения движения упругого тела и приведены примеры динамических моделей автомобильной шины, баллона пневморессоры и механических пружин различной формы.

Уравнения движения отдельного конечного элемента в абсолютных координатах

В соответствии с классическим методом конечных элементов упругое тело предварительно разбивается на элементы, имеющие различную геометрическую форму. В нашем случае это могут быть объемные восьмиузловые элементы (для моделирования упругих тел), четырехугольники или треугольники (для оболочки или пластины), отрезки (для упругих стержней). Рассмотрим отдельный конечный элемент, имеющий n узлов. С каждым узлом свяжем систему координат (СК), положение которой относительно инерциальной СК определяется радиусом-вектором r_i и матрицей направляющих косинусов $A_{0i}, i = 1, \dots, n$. В соответствии с методом Крейга-Бэмптона свяжем с конечным элементом сопутствующую систему координат (СКf), разделяющую движение материала на произвольное пространственное движение как абсолютно твердого тела вместе с СКf и малое относительное движение за счет упругих деформаций. Введем вектор упругого смещения материала $u(\rho)$ относительно СКf, где ρ – вектор, определяющие положение точки материала относительно СКf в недеформированном состоянии. Абсолютное движение СКf определяется радиусом-вектором r_f и матрицей направляющих косинусов A_{0f} , которые должны быть выражены через положения СК узлов r_i, A_{0i} .

Для вывода кинематических уравнений и построения уравнений движения введем функции формы, аппроксимирующие упругие смещения материала относительно СКf. Выбор форм зависит от типа конечного элемента и в общем случае может быть записан как матрица–функция $N(\rho)$, размером $3 \times 6n$. Матрица состоит из $2n$ блоков $N_{r_i}(\rho), N_{\pi_i}(\rho)$ размером 3×3 каждый. Блоки соответствуют упругим перемещениям материала для поступательных (N_{r_i}) и вращательных (N_{π_i}) степеней свободы узла i

$$N(\rho) = (N_{r_1}(\rho) N_{\pi_1}(\rho) \dots N_{r_n}(\rho) N_{\pi_n}(\rho)).$$

Обозначим Δr_{if} , $\Delta \pi_{if}$ смещение начала отсчета и вектор поворота СК узла i относительно СКf за счет упругих деформаций; данные величины предполагаются малыми. С использованием функций формы упругое смещение отдельной точки материала относительно СКf может быть выражено через перемещения узлов

$$u(\rho) = \sum_{i=1}^n (N_{ri}(\rho)\Delta r_{if} + N_{\pi i}(\rho)\Delta \pi_{if}) = N(\rho)\Delta X,$$

$$\Delta X = (\Delta r_{1f}^T \quad \Delta \pi_{1f}^T \quad \dots \quad \Delta r_{nf}^T \quad \Delta \pi_{nf}^T)^T.$$

Узловые перемещения ΔX включают движения конечного элемента как абсолютно твердого тела. Для их исключения выполняется линейная замена координат $\Delta r_{if} = H_{ri}\Delta q$, $\Delta \pi_{if} = H_{\pi i}\Delta q$, $\Delta X = H\Delta q$, где Δq – матрица-столбец упругих координат размером $6(n-1)$. Для вывода этой замены используются матрицы масс и жесткостей конечного элемента, а также процедура расчета собственных частот и форм колебаний конечного элемента [7].

Уравнения движения свободного конечного элемента получаются с использованием принципа возможных перемещений [8]. В переменных Крейга-Бэмптона, соответствующих положению СКf и относительным упругим перемещениям Δq , уравнения имеют следующий вид, [7]:

$$m a_f - m \tilde{\rho}_c \varepsilon_f + M_{r_q} H \Delta \ddot{q} = -\tilde{\omega}_f \tilde{\omega}_f^T \rho_c,$$

$$m \tilde{\rho}_c a_f + J \varepsilon_f + M_{\pi_q} H \Delta \ddot{q} = -\tilde{\omega}_f J \omega_f,$$

$$H^T M_{r_q}^T a_f + H^T M_{\pi_q}^T \varepsilon_f + \Delta \ddot{q} = -\Omega \Delta q - H^T V(\omega_f).$$

Здесь m, J – масса и матрица тензора инерции конечного элемента, ρ_c – радиус – вектор центра масс относительно СКf, a_f, ε_f – ускорение начала отсчета и угловое ускорение СКf, $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2 \quad \dots \quad \omega_{6(n-1)}^2)$ – диагональная матрица квадратов собственных частот конечного элемента,

$$M_{r_q} = A_{0f} \int N(\rho) dm, M_{\pi_q} = A_{0f} \int \tilde{\rho} N(\rho) dm, V(\omega_f) = \left\{ \omega_f^T A_{0f} \left(\int (\rho N_j^T(\rho) - (N_j^T(\rho)\rho)E) dm \right) A_{f0} \omega_f \right\}.$$

Для приведения к окончательному виду в уравнениях следует перейти от координат Крейга-Бэмптона к абсолютным узловым координатам. Для этого используются кинематические соотношения

$$r_i = r_f + A_{0f}(\pi_f)(\rho_i + H_{ri}\Delta q), A_{0i}(\pi_i) = A_{0f}(\pi_f)A_{fi}(H_{\pi i}\Delta q), i = 1 \dots n.$$

Решение этих нелинейных уравнений позволяет получить значения координат Крейга-Бэмптона при заданных значениях абсолютных координат узлов. Две производные по времени от уравнений дают связь между скоростями и ускорениями и позволяют преобразовать уравнения движения свободного конечного элемента к абсолютным узловым координатам.

Для вывода полных уравнений движения упругого тела следует сформировать уравнения для каждого элемента и применить стандартную процедуру метода конечных элементов, сводящуюся к сложению и позиционированию отдельных блоков составляющих уравнений в соответствии с топологией сетки.

Моделирование динамики автомобильной шины

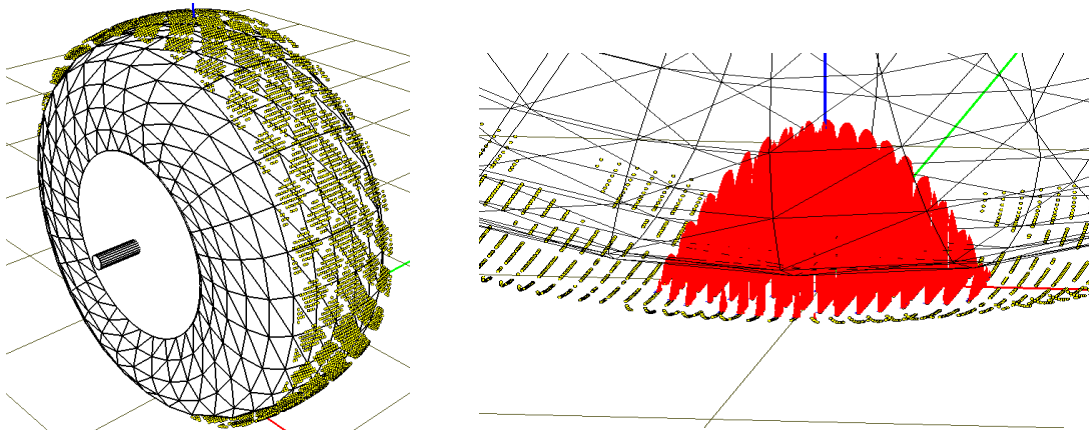


Рис. 1. Конечнoэлементная модель шины (слева). Нормальные силы контакта протектора с опорной поверхностью (справа).

Одним из основных приложений разработанного метода является моделирование динамики катящейся упругой шины, рис. 1. Шина моделируется конечными элементами типа «плоская оболочка» трапецеидальной формы, построенными по прикладной теории многослойных пластин [9]. Контактное взаимодействие протектора с опорной поверхностью моделируется с использованием «щеточного» подхода. Точками на рис.1 отмечены концы безынерционных упруго-диссипативных балочных силовых элементов (щетинок), входящих в контактное взаимодействие с поверхностью дороги.

Моделирование динамики баллона пневморессоры

Другим перспективным направлением является моделирование пневморессор транспортных средств (грузовых автомобилей, пассажирских железнодорожных вагонов) с учетом упругости баллона, рис. 2. Использование абсолютных узловых координат не только позволяет учитывать большие упругие перемещения материала баллона при движении транспортного средства, но и с высокой точностью моделировать нелинейные эффекты, в частности, потерю устойчивости оболочки.

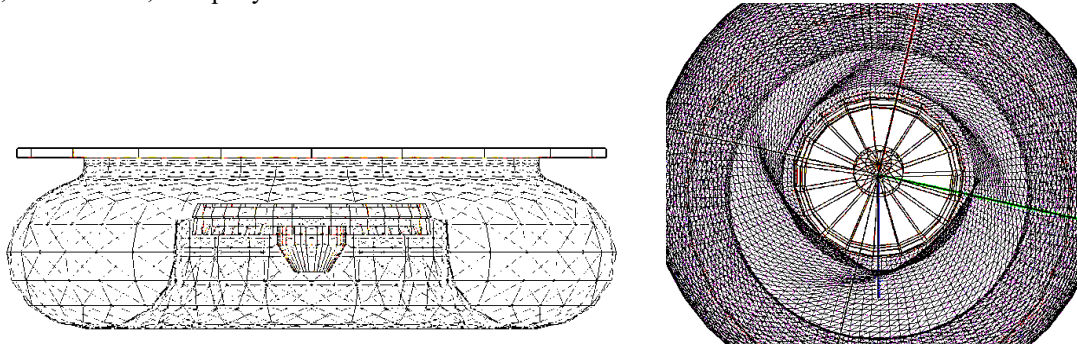


Рис. 2. Конечноэлементная модель баллона пневморессоры (слева). Потеря устойчивости при кручении (справа).

Моделирование пружин

Динамическое поведение механических пружин различной формы – цилиндрической, конической, гиперболической и т.д. достаточно точно описывается моделью гибкого стержня [10]. В процессе своей работы пружины подвержены большим перемещениям, которые вызывают изменение жесткостей и потерю устойчивости, если пружина гибкая. Разработанный стержневой конечный элемент позволяет моделировать описанные эффекты. Следует отметить, что большинство аналитических решений относится к цилиндрическим пружинам. Метод конечных элементов, благодаря своей универсальности, дает возможность единообразно моделировать пружины различных форм.

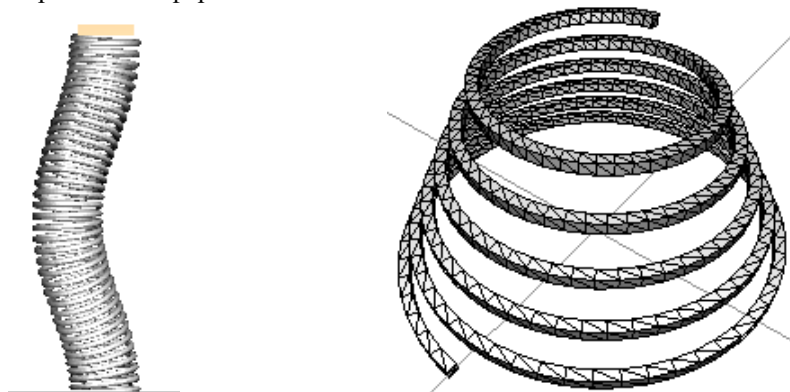


Рис. 3. Форма потери устойчивости цилиндрической пружины (слева). Коническая пружина (справа).

Литература

1. M. Bampton, R. Craig // Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*. 6:7 1968. 1313-1319.
2. A. A. Shabana // Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics*. 1 1997. 189-222.
3. O. N. Dmitrochenko, D. Yu. Pogorelov // Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*. 10 2003. 17-43.
4. A. L. Schwab, J. Gerstmayr, J. P. Meijaard // Comparison of three-dimensional flexible thin plate elements for multibody dynamic analysis: finite element formulation and absolute nodal coordinate formulation. *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*. Las Vegas, Nevada, USA. 2007. DETC2007-34754.
5. Yu. Vetyukov // Finite element modeling of Kirchhoff-Love shells as smooth material surfaces. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 94:1-2 2014. 150 – 163.
6. H. Ebel, M.K. Matikainen, V. Hurskainen, A. Mikkola // Higher-order beam elements based on the absolute nodal coordinate formulation for three-dimensional elasticity. *Nonlinear Dynamics*. 88 2017. 1075-1091.
7. D. Pogorelov, A. Rodikov // The trapezoidal finite element in absolute coordinates for dynamic modeling of automotive tire and air spring bellows. Part 1: Equations of motion. *Transport Problems*. 16:3 2021. 5-16.
8. B. Simeon // DAEs and PDEs in elastic multibody systems. *Numerical Algorithms*. 19 1998. 235-246.
9. L.P. Kollar, G.S. Springer // *Mechanics of Composite Structures*. 2003. 480 p.
10. P.Н. Бадиков // Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния и резонансных режимов вращения винтовых пружин в пружинных механизмах. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2009. 166 с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМ ТЕЛ ЧЕРЕЗ АЭРОДИНАМИЧЕСКУЮ СРЕДУ

Сатанов А.А.¹, Ерофеев В.И.¹, Хазов П.А.²

1 - *Институт проблем машиностроения РАН - филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»*

2 - *ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»*

andrewsatanov@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрены системы твердых тел горизонтальной и вертикальной конфигурации. Проведено экспериментальное и математическое исследование динамики взаимодействия тел с аэродинамической средой, а также между собой через воздушную среду. Представлены изополя ветрового давления, построенные в программно-вычислительном комплексе *ANSYS CFX*, совпадающие с результатами проведенного эксперимента. Показано, что для тел сложной формы распределение аэродинамических коэффициентов по поверхности имеет уникальный характер, не поддающийся условному зонированию, а при взаимодействии тел в системе значения аэродинамических коэффициентов могут значительно изменяться. Были рассмотрены колебания тел от полученных в результате моделирования ветровых нагрузок.

Введение

Вопрос взаимодействия тел с воздушной средой возникает во многих сферах современных исследований. При проектировании летательных аппаратов, машин, строительных конструкций необходимо учитывать реальные аэродинамические характеристики поверхностей. По данной теме проведено большое количество исследований как отечественных, так и зарубежных авторов [1–8]. Однако, необходимо также учитывать не только значительное влияние среды на конкретное тело, а рассматривать объекты в совокупности, как систему из нескольких тел, объединенных через вязкоупругую среду. Влияние частей системы друг на друга может значительно изменить картину аэродинамических характеристик каждого тела в отдельности.

Для тел сложной формы, имеющих перегибы, криволинейные участки в поверхностях, перепады высот в разных частях трудно предугадать аэродинамические характеристики. Необходимо прибегать к методам математического и физического моделирования. Математическое моделирование, применимое к ветровой аэродинамике, основано на численных схемах решения трехмерных уравнений движения жидкости и газа с адекватными моделями турбулентности, реализованными в современных программно-вычислительных комплексах [9]. Физическое моделирование подразумевает проведение испытания модели здания в аэродинамической установке с сохранением при этом аэродинамического подобия.

Под воздействием внутренних усилий и внешних динамических нагрузок, к которым относятся ветровые, механическая система совершает колебательные движения, а также возникают перемещения и изменение внутренних усилий в телах, которые изменяются во времени по гармоническим законам. Определение прогнозируемых амплитуд перемещений, внутренних усилий и напряжений при является главной составляющей динамического расчёта [10, 11].

Основной текст

Объектом исследования являлась система из двух твердых тел сложной геометрической формы горизонтальной и вертикальной конфигурации (рис. 1а).

Для проведения исследований в аэродинамической трубе были разработаны макеты, выполненные методом послойного наплавления (FDM) их ABS-пластика на принтере для трехмерной печати. В характерных точках модели выполнена система дренажных отверстий для подключения гибких силиконовых трубок и последующего измерения давления ветрового потока на поверхность модели. Эксперимент был проведен в аэродинамической трубе лаборатории кафедры «Отопления и вентиляция» ННГАСУ. Исследуемые модели располагались внутри установки (рис. 1б), где создавался равномерный поток воздуха скоростью 12 м/с.

В аэродинамической трубе была произведена серия экспериментов. Сначала были рассмотрены тела по отдельности при различных направлениях ветровых потоков. Далее тела были объединены в систему, при этом одно тело полностью или частично заслоняло другое от воздействия аэродинамической установки. Величина статического ветрового давления на поверхности модели определялась микроманометром ММН-240(5)-1,0 ТУ 25-01-816-79. После преобразований показаний микроманометра вычислялись значения аэродинамических коэффициентов как отношение давления, измеренного в изучаемой точке поверхности к динамическому давлению, оказываемому ветровым потоком на вертикальную поверхность. На основании полученных значений были построены изополя аэродинамических коэффициентов и ветровых давлений.

В рамках исследования также осуществлялось численное моделирование ветровых потоков в рабочей среде программного обеспечения *ANSYS Workbench* и модуле вычислительной гидрогазодинамики *ANSYS CFX*. Численный метод исследования распределения давлений по поверхности покрытия основан на решении уравнения Навье-Стокса, описывающего обтекание твердого тела потоком сжимаемой жидкости [1, 8]. Рабочее

пространство для моделирования было задано на основе предположения минимального влияния внешних граничных условий на ветровые потоки. Расчетная сетка была сформирована в препроцессоре *ANSYS Meshing*. В настройках сеточного генератора было задано сгущение элементов сетки к поверхности объекта. В граничных условиях на входе была задана скорость ветра, поверхностям тел было присвоено условие непротекания *Wall*, при котором нормальная составляющая скорости равна нулю, а вязкое трение отсутствует, на выходе значение статического давления равнялось нулю.

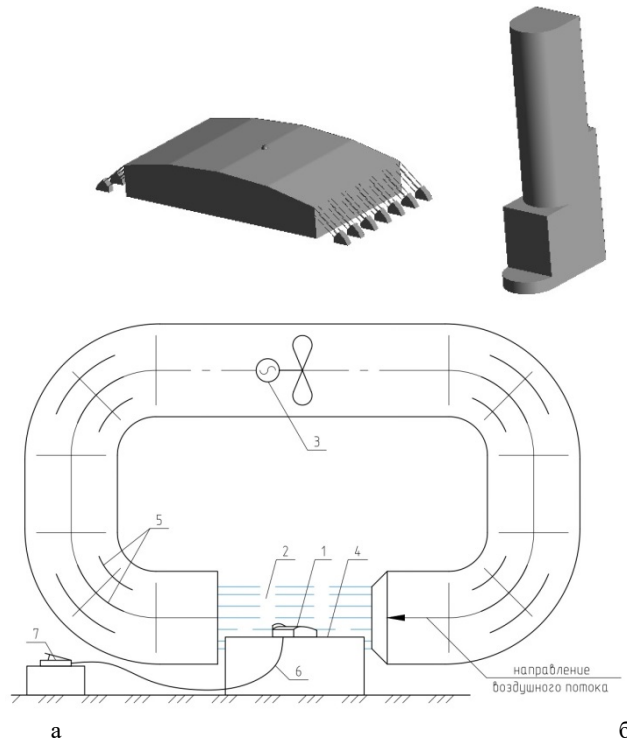


Рис. 1. а – Исследуемые твердые тела; б – Схема экспериментальной установки:

1 – исследуемая модель объекта, 2 – рабочая область аэродинамической трубы, 3 – аэродинамическая труба с осевым вентилятором, 4 – подмакетник, 5 – направляющие ребра аэродинамической трубы, 6 – гибкая силиконовая трубка, 7 – микроманометр.

Размеры тел, их расположение в рабочей зоне, скорость ветра и граничные условия соответствовали эксперименту. В результате итерационного расчета была получена визуализация распределения ветрового давления по поверхностям тел. Основные результаты распределения ветрового давления представлены на рис. 2.

Ветровые воздействия носят волновой характер, потому для расчетов необходимо определение собственных частот изучаемого объекта. Исследования систем с распределенными массами, степень свободы которых равна бесконечности, представляет в общем случае сложную математическую задачу. Однако, при динамическом расчете сооружений часто бывает, что возможно ограничиться рассмотрением только главных колебаний основного тона. Поэтому широкое применение получили приближенные методы определения основной собственной частоты колебаний. Как правило, любая механическая система имеет бесконечное число динамических степеней свободы, поскольку все ее элементы имеют массу и являются упругими. При этом для каждой распределенной системы можно получить дискретное решение [10, 11] и считать степень свободы конечным числом.

Для расчета частотных характеристик конструкции с n степенями свободы используется система уравнений (1):

$$\begin{cases} (M_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2})a_1 + M_2\delta_{12}a_2 + \dots + M_n\delta_{1n}a_n = 0 \\ M_1\delta_{21}a_1 + (M_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2})a_2 + \dots + M_n\delta_{2n}a_n = 0 \\ \dots \\ M_1\delta_{n1}a_1 + M_2\delta_{n2}a_2 + \dots + (M_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2})a_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где δ_{ij} – элемент матрицы податливости, который характеризует удельное перемещение точки сосредоточения i -той массы M_i от единичной силы, приложенной в точке сосредоточения j -той массы, ω – круговая частота собственных колебаний системы.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Резонансная частота определяется из условия максимума для амплитуды вынужденных колебаний.

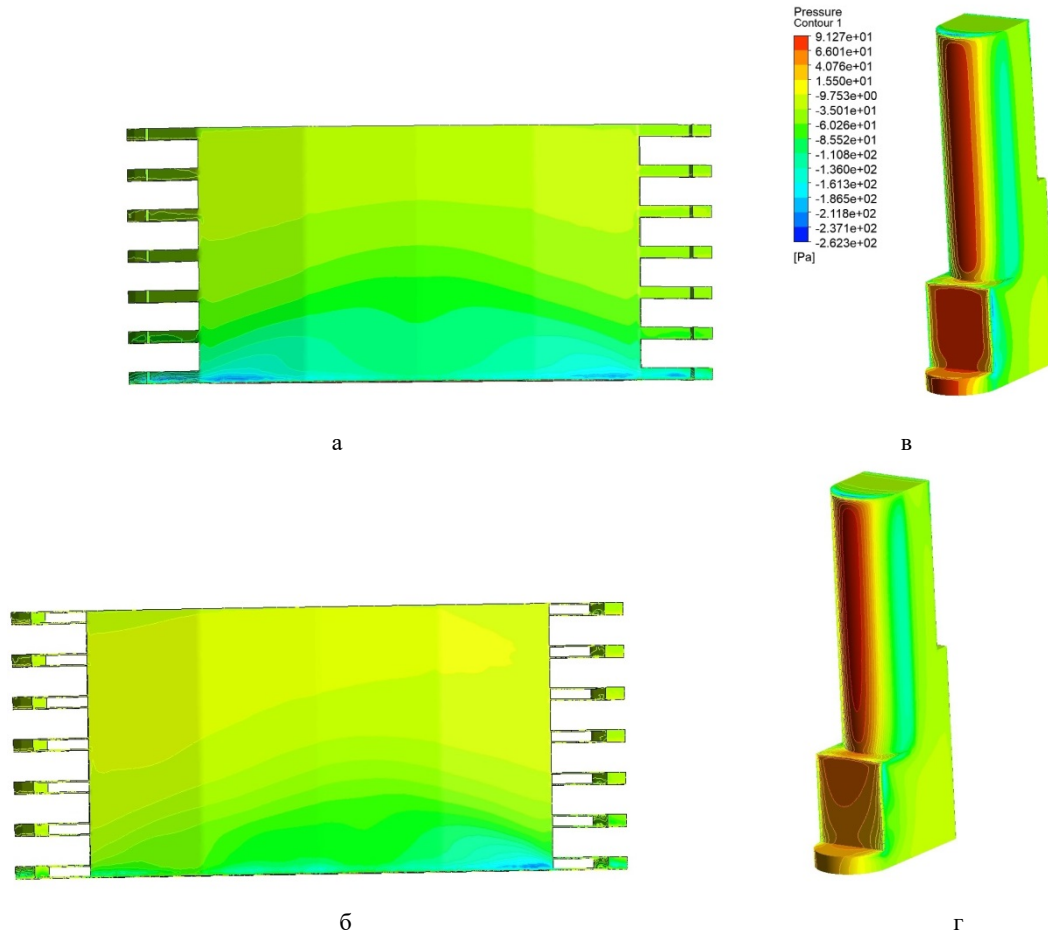
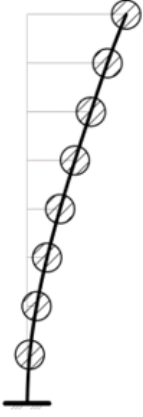
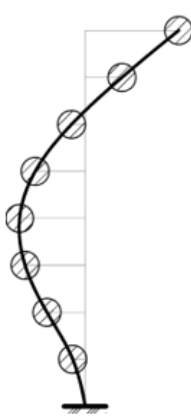


Рис. 2. Визуализация распределения ветрового давления по поверхностям тел: а – отдельстоящее тело горизонтальной конфигурации; б – тело горизонтальной конфигурации, перекрытое телом вертикальной конфигурации; в – отдельстоящее тело вертикальной конфигурации; а – тело вертикальной конфигурации, перекрытое телом горизонтальной конфигурации.

При колебаниях тела вертикальной конфигурации можно рассмотреть, как консольный стержень, на котором расположены сосредоточенные массы. В табл. 1 приводятся динамические характеристики для первых двух форм собственных колебаний (ω_k , f_k , T_k – круговая частота, техническая частота и период для k -той формы собственных колебаний соответственно, φ_{ik} – относительное смещение массы с номером i при k -той форме собственных колебаний). Подобная система может быть использована при описании различных конструкций, работу которых можно сравнить со стержнем со сосредоточенными массами.

Таблица 1. Спектр частот и форм собственных колебаний.

$\omega_1,$ рад/с	$f_1,$ Гц	$T_1,$ с	$\omega_2,$ рад/с	$f_2,$ Гц	$T_2,$ с
15,868	2,5256	0,39595	92,1204	14,663	0,0682
$\varphi_{11} = 1$			$\varphi_{12} = 1$		
$\varphi_{21} = 0,827$			$\varphi_{22} = 0,394$		
$\varphi_{31} = 0,657$			$\varphi_{32} = -0,145$		
$\varphi_{41} = 0,492$			$\varphi_{42} = -0,533$		
$\varphi_{51} = 0,339$			$\varphi_{52} = -0,7$		
$\varphi_{61} = 0,205$			$\varphi_{62} = -0,64$		
$\varphi_{71} = 0,097$			$\varphi_{72} = -0,407$		
$\varphi_{81} = 0,026$			$\varphi_{82} = -0,134$		

Заключение

Тела, помещенные в аэроупругую среду, значительно влияют друг на друга, что видно по визуализации распределения ветрового давления по поверхности тел. Ветровые потоки, обгибая переднее или отражаясь от заднего тела, изменяют свое направление и интенсивность, что влияет на аэродинамические характеристики обоих тел. Результаты численного и физического моделирования сходятся с небольшими погрешностями, что подтверждает корректность проведения исследования.

Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. // Курс теоретической механики: в 2 т.: учеб. пособие для вузов. СПб.: Лань, 1998. - 729 с.
2. С.А. Вальгер, Н.Н. Федорова, А.В. Федоров // Структура турбулентного отрывного течения в окрестности установленной на пластине призмы. Институт теплофизики СО РАН. Новосибирск, 2015. № 1. С. 29–42.
3. Г.А. Савицкий // Ветровая нагрузка на сооружения. М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1972. 111 с.
4. Э. Симмиу, Р. Сканлан. // Воздействия ветра на здания и сооружения. М.: Стройиздат, 1984. 360 с. Перевод изд.: WindEffectsonStructures / E. Simiu, R. Scanlan (1978).
5. Э.И. Реттер // Архитектурно-строительная аэродинамика: монография. М.: Стройиздат, 1984. 294 с.
6. А.В. Февральских // Численное исследование влияния удлинения крыла на характеристики движения под действием экранного эффекта амфибийного судна на воздушной подушке с аэродинамической разгрузкой. Изв. Калининградского гос. техни. Ун-та, 2019. № 53. С. 182-192.
7. И.Л. Повх // Аэродинамический эксперимент в машиностроении. Л.: Машиностроение. 1974. 479 с.
8. В.В. Бирюк и др. // Аэродинамика и самолетостроение: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского университета. 2018. 180 с.
9. Р. Темам // Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
10. Малов, Н.Н. // Основы теории колебаний. М.: Просвещение. 1971. 198 с.
11. Кузнецов С.И. // Физика: Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика. Термодинамика: Учебное пособие. М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М. 2014. 248 с.

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СТЕРЖНЯХ

Султанов К.С., Акбаров Н.А.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева АН РУз
sultanov.karim@mail.ru

Аннотация. Приведены результаты численных решений связанных задач о распространении продольных волн в составных взаимодействующих длинных стержнях. Волновые уравнения для внутреннего и внешнего стержней связаны между собой нелинейными силами взаимодействия на поверхности их контакта. С нулевыми начальными и граничными условиями задача решается методом характеристик с последующим применением метода конечных разностей. В случае, когда внешний стержень (грунт) менее прочный, чем внутренний (трубопровод), получен многократный рост продольного напряжения во внутреннем стержне по сравнению с амплитудой напряжения в грунте. Установлена зависимость амплитуды напряжения в трубопроводе от частоты продольной волны в грунте.

Введение

Распространения продольных ударных и непрерывных волн в составных упругих стержнях, взаимодействующих по закону сухого трения Кулона, исследованы в [1], где получены закономерности изменения параметров волн в рассматриваемых стержнях. В [2] исследованы изменения параметров волн, в составных упругих и вязкоупругих стержнях, взаимодействующих по более сложным нелинейным законам. В [3] эта задача рассмотрена применительно к проблеме сейсмостойкости подземных трубопроводов в случае высокочастотных продольных волн. Цель данной работы – исследование закономерности распространения низкочастотных волн в составных упругих и вязкоупругих стержнях. Нелинейные законы взаимодействия приведены и обсуждены в [4, 5]. Метод решения нелинейных связанных волновых задач обсуждается в [1–3, 6, 7].

Основная часть

Рассматривается полубесконечный соосный составной стержень. Начальные сечения стержней при $x=0$ совпадают (x -пространственная координата совпадающей с осью стержней). Прочностные характеристики стержней существенно отличаются. Внутренний стержень является моделью прямолинейного магистрального стального трубопровода, а внешний стержень – модель грунта. Как в [1, 3], в этих допущениях, составной стержень является наипростейшей моделью подземного трубопровода, окруженной грунтом.

Уравнения движения стержня и грунта с учетом силы взаимодействия (трения) имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{0i} \partial v_i / \partial t - \partial \sigma_i / \partial x + \chi_i \sigma_{\tau i} &= 0 \\ \partial v_i / \partial x - \partial \varepsilon_i / \partial t &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где v_i - скорость частиц (массовая скорость); σ_i , ε_i - продольные напряжения и деформация; ρ_{0i} - начальная плотность; $\chi_i = \text{sign}(v)$ для стержня, $\chi_i = -\text{sign}(v)$ для грунта; $v = v_1 - v_2$ - относительная скорость; σ_{τ} - приведенная сила трения, действующая на единицу длины стержня; t - время. Значения σ_{τ} для стержня и грунта определяются из соотношения

$$\sigma_{\tau i} = 4D_{Hi}\tau / (D_{Hi}^2 - D_{Bi}^2) \quad (2)$$

где τ - сила трения (касательное напряжение), действующая между стержнем и грунтом; D_{Hi} - внешние диаметры стержня и грунта; D_{Bi} - внутренние диаметры трубопровода и грунта.

Уравнения состояния стержня и грунта приняты линейно-вязкоупругими (стандартно-линейное тело)

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_i}{dt} + \mu_i \varepsilon_i &= \frac{d\sigma_i}{E_{Di} dt} + \mu \frac{d\sigma_i}{iE_{Si}} \\ \mu_i &= E_{Di} E_{Si} / (E_{Di} - E_{Si}) \eta_i \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее $i=1, 2$. При $i=1$ значения параметров относятся к стержню, а при $i=2$ – к грунту.

Решение задачи сводится к интегрированию системы (1), замыкаемой уравнением (3) отдельно для стержня ($i=1$) и отдельно для грунта ($i=2$). Это система связана условиями на поверхности контакта стержня и грунта, определяющими законы изменения силы трения.

Закон трение, основанный на модели стандартно-линейного тела и законе Кулона при $\sigma_N > \sigma_N^*$ (при $\sigma_N \leq \sigma_N^*$, τ) представлены соотношениями
при $0 \leq u \leq u_*$

$$\frac{d\tau}{K_x^D(\sigma_N, I_S) dt} + \mu_S(\sigma_N, I_S, \dot{u}) \frac{\tau}{K_x^S(\sigma_N, I_S)} = \frac{du}{dt} + \mu_S(\sigma_N, I_S, \dot{u}) u \quad (4)$$

при $du/dt \geq 0, u > u_*$

$$\tau = f_u \sigma_N \quad (5)$$

при $du/dt < 0, u \geq u_*$

$$\tau = 0 \quad (6)$$

где $K_x^D(\sigma_N, I_S)$ - функция динамического (при $\dot{u} \rightarrow \infty$), а $K_x^S(\sigma_N, I_S)$ - функция квазистатического взаимодействия (при $\dot{u} \rightarrow 0$); μ_S - функция параметра сдвиговой вязкости грунта, связанный с функцией сдвиговой вязкости грунта $\eta_S = (\sigma_N, I_S, \dot{u})$ - соотношением

$$\mu_S = K_x^D K_x^S / (K_x^D - K_x^S) \eta_S \quad (7)$$

Сущность функции взаимодействия K_x^D , K_x^S и K_x^R и параметров входящих в них приведены в [4,5].

Волна создаётся в начальном сечении $x = 0$ нагрузкой, изменяющейся по закону

$$\sigma_i = \sigma_{\max} \sin(2\pi t/T) \quad 0 \leq t \leq \theta \quad (8)$$

где σ_{\max} - амплитуда, T - период колебаний, θ - время действия нагрузки.

Граничные условия: в начальном сечении грунта выполняется (8); в начальном сечении стержня $\sigma_1 = 0$; на фронте волны в стержне

$$\sigma_1 = -C_{01} \rho_{01} v_1; \quad v_1 = -C_{01} \varepsilon_1; \quad C_{01} = (E_{D1} / \rho_{01})^{1/2} \quad (9)$$

и на фронте волны в грунте

$$\sigma_2 = -C_{02} \rho_{02} v_2; \quad v_2 = -C_{02} \varepsilon_2; \quad C_{02} = (E_{D2} / \rho_{02})^{1/2} \quad (10)$$

где c_{0i} - скорости фронта волны, соответственно, в стержне и грунте.

Расчеты проводились с использованием разработанной программы для ЭВМ численного решения уравнений (1)–(3) с учетом (4)–(10), с использованием метода характеристик с последующим применением метода конечных разностей.

В качестве исходных данных выбраны:

для стального подземного трубопровода (стержня)

$D_{H1} = 0.2$ м; $D_{B1} = 0.18$ м; $\rho_{01} = 7800$ кг/м³; $\mu_1 = 10^4$ с⁻¹; $C_{01} = 5000$ м/с; $\gamma_1 = 1.02$; $E_{D1} = C_{01}^2 \rho_{01}$; $E_{S1} = E_{D1} / \gamma_1$;

для грунтовой среды

$\rho_{01} = 1800$ кг/м³; $C_{01} = 1000$ м/с; $K_\sigma = 0.3$; $\mu_2 = 1000$ с⁻¹; $\gamma_2 = 1.1$; $E_{D2} = C_{02}^2 \rho_{02}$; $E_{S2} = E_{D2} / \gamma_2$;

параметры сейсмической нагрузки

$T = 0.01$ с; $\theta = 5$ с; $\sigma_{\max} = 0.3$ МПа;

параметры взаимодействия

$H = 1$ м; $K_N = 100$ м⁻¹; $\beta = 2$; $f = 0.5$; $u_* = 0.005$ м.

Изменения продольного напряжения по времени в сечениях трубопровода $\sigma(t)$ приведены на рис. 1. Кривые 1–6 на рис.1 относятся к сечениям трубопровода $x = 5$; 10; 15; 20; 25 и 30 м и при $\gamma_2 = 1.1$. Здесь на начальном сечении грунта $x=0$ действует нагрузка (8) с амплитудой $\sigma_{\max} = 0.3$ МПа.

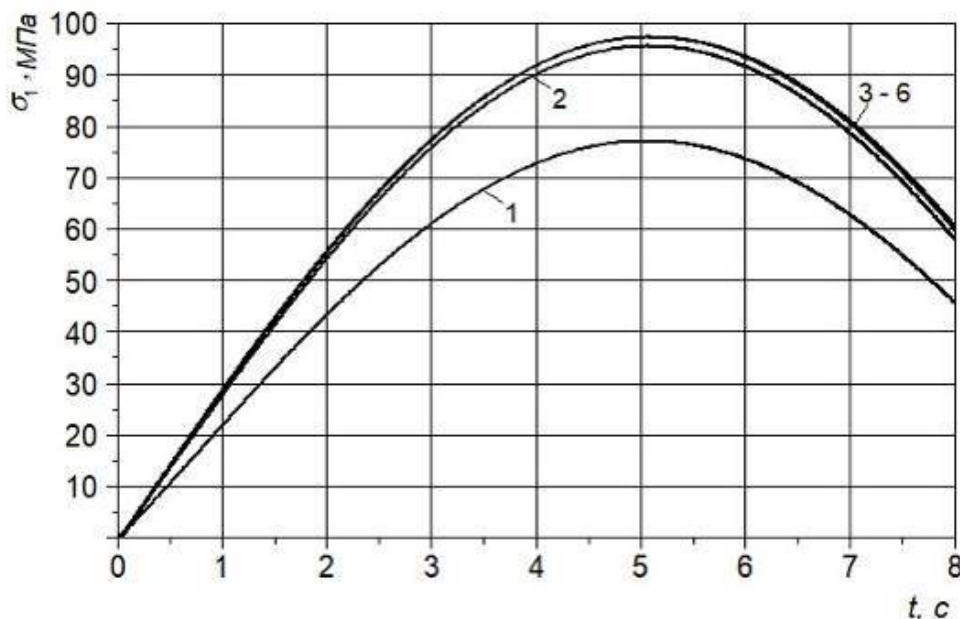


Рис. 1. Изменения продольного напряжения по времени в сечениях подземного трубопровода при $\gamma_2 = 1,1$.

В сечениях трубопровода $x = 5; 10; 15; 20; 25$ и 30 м (рис. 1), с удалением от начального сечения $x=0$ (где напряжение не действует) наблюдается существенный рост максимальных значений продольного напряжения ($\sigma_{1\max} = 96$ МПа) по сравнению с амплитудой напряжения продольной волны в грунте ($\sigma_{2\max} = 0.3$ МПа). При высокочастотных сейсмических волнах в грунте такой эффект был невысоким [3]. При $x = 5$ м (кривая 1) амплитуда напряжений $\sigma_{1\max}$ превышает амплитуды напряжения $\sigma_{2\max}$ в начальном сечении грунта, примерно в 260 раз. При $x = 10$ м - 315 раз (кривая 2), а при $x = 15; 20; 25$ и 30 м - в 320 раз (кривые 3-6). Учет деформационные характеристики грунта (γ_2) приводит к многократному повышению продольного напряжения в сечениях трубопровода. После достижения некоторого асимптотического значения $\sigma_{1\max}$ остается постоянным. В данном случае на сечении $x=15$ м трубопровода продольная напряжения достигает предельного асимптотического значения и далее остается постоянной.

Увеличения напряжения в сечениях трубопровода, является следствием превращения силы взаимодействия (трения) τ от пассивной (сопротивления) в активную (движущую) силу. В случае когда грунт невозмущенная среда, τ почти всегда является пассивной силой, что следовательно приводит, к затуханию амплитуды напряжения в подземном трубопроводе во всех его сечениях [1, 2].

Результаты расчетов показали, что максимальные значения напряжения в сечениях трубопровода, зависит от количественного изменения относительных смещений, следовательно, и касательных напряжений в этих сечениях.

Изменения напряжения по времени в фиксированных сечениях трубопровода $x = 5; 10; 15; 20; 25$ и 30 м, относящихся к результатам расчетов $\gamma_2 = 2$, показали, что по сравнению со случаем, когда $\gamma_2 = 1.1$, наблюдается качественно иная картина. В этом случае, амплитуды напряжения, в сечениях трубопровода $x=5; 10; 15$ и 20 м и все время растет и устанавливается при $x=25$ м. Количественно же, они отличаются примерно в 1.25 раза от случая $\gamma_2 = 1.1$. Увеличение максимальных значений напряжений в сечениях трубопровода при $\gamma_2 = 2$, это следствие увеличения деформируемости грунта. Процесс установления максимального значения напряжения, с уменьшением жесткости грунта, увеличивается. В этом случае также наблюдается, что увеличение значений продольных напряжений в сечениях трубопровода не происходит безгранично.

Напряжения в тех же сечениях трубопровода $x = 5; 10; 15; 20$ и 30 м для случая, когда $\gamma_2 = 4$, растет, стремится к установлению и устанавливается в сечении $x = 30$ м, достигает значения 165 МПа. Эта на 1.7 раза больше чем при $\gamma_2 = 1.1$ (на 70%) и на 1.35 (на 35%) больше чем при $\gamma_2 = 2$. Эти результаты говорят о том, когда грунт вокруг трубопровода мягкий (не уплотненный $\gamma_2 = 4$) значения продольного напряжения в трубопроводе существенно увеличивается. В случае уплотненного грунта ($\gamma_2 = 1.1$, рис. 1) значения этого напряжения в 1.7 раза меньше.

Результаты оценки значений продольных напряжений в подземных газопроводах при Газлийском землетрясении приведены в [6]. Согласно [6], для магистральных подземных трубопроводов максимальные значения продольных напряжений $\sigma_{1\max} = (36.5 \div 85)$ МПа.

Исходя из этого, можно сказать, что полученные нами расчетные значения продольных напряжений на рис. 1, на 12 % больше, чем верхней границы наблюдаемых во время землетрясений в трубопроводах, напряжение. Это подтверждает правильность результатов расчетов, полученных в работе.

Результаты расчетов показывают, что учет деформационных характеристик грунта, приводят к новым качественным и количественным результатам. В настоящей работе рассмотрено действие на подземный трубопровод плоской продольной сейсмической волны с частотой 0.05 с^{-1} . Результаты расчетов показали, что с увеличением частоты сейсмической волны максимальные значение продольных напряжений в подземном трубопроводе уменьшается.

Заключение

Полученные результаты являются научной основой для усовершенствования технологии строительства подземных трубопроводов. Для повышения сейсмостойкости подземных трубопроводов, прежде всего необходимо увеличение плотности, следовательно, увеличение силы сцепления грунта вокруг трубопровода. Следовательно, увеличивается жесткость (прочность) грунта, уменьшается относительное смещение, что обеспечивает образование относительно низких продольных напряжений в трубопроводе. Это приводит к снижению вероятности разрушений подземных трубопроводов, строящихся в сейсмоопасных регионах.

Литература

1. Л.В.Никитин // Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. Москва: 1998. 261 с.
2. К.С.Султанов // Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. 392 с.
3. K.S.Sultanov, N.I.Vatin, // Wave Theory of Seismic Resistance of Underground Pipelines. Applied Sciences. 2021. № 4. Pp. 1797.
4. К.С.Султанов, А.А.Баходиров // Законы сдвигового взаимодействия на поверхностях контакта твердых тел с грунтами. ОФМГ. 2016. № 2. С. 5-10.
5. К.С.Султанов // Параметры нелинейных законов взаимодействия подземных трубопроводов с грунтом. ОФМГ, №4, 2022. С.13-18.
6. K.S.Sultanov, J.X.Kumakov, P.V.Loginov, B.B.Rikhsieva // Strength of underground pipelines under seismic effects. Magazine of Civil Engineering. 2020. 93(1). Pp. 97-120.
7. А.А.Баходиров, К.С.Султанов // Волны в вязкоупругом стержне, окруженном грунтовой средой, при плавном нагружении. МТТ. 2014. № 3. С. 132-144.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ТОРСИОНА БАЛОЧНОГО ТИПА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАГРУЗОК НА ОРГАНЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕСУЩИМ ВИНТОМ СООСНОГО ВЕРТОЛЕТА

Суранов Я.С., Керестень И.А.

СПбПУ

jan.suranov@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена методу определения нагрузок, которые действуют на элементы системы управления несущим винтом вследствие наличия инерционных и аэродинамических сил, возникающих на лопасти соосного вертолета при его движении. Основными задачами являются: анализ существующих подходов к определению нагрузок, верификация на примере существующей модели несущего винта, определение нелинейной изгибной жесткости торсиона балочного типа, разработка цифровой модели несущего винта соосного вертолета с учетом нелинейной изгибной жесткости торсиона балочного типа.

Введение

В настоящее время постоянно возрастает необходимость улучшения летно-технических характеристик винтокрылых летательных аппаратов. Проектирование многоцелевых вертолетов с соосной схемой несущего винта является перспективным направлением авиастроения. В свою очередь, летно-технические характеристики обеспечиваются возникающими нагрузками. Применение торсионных балочного типа, заменяющих шарниры лопасти, позволяет повысить ресурс работы несущего винта (НВ). Торсион вносит нелинейную жесткость поворота лопасти, которую удобно определить с использованием прямого конечно-элементного (КЭ) моделирования.

Определению реакций связи в шарнирах посвящены работы российских ученых [1–3]. Подход к определению аэродинамических нагрузок описан авторами в работе [4] и основан на использовании обобщенной дисковой теории НВ для расчета поля индуктивных скоростей.

Описание аналитической модели

Математическая модель НВ имеет количество лопастей, равное k_l . Нагрузки, возникающие в элементах управления несущего винта имеют представлены на рис. 1 [5]. Тяги, соединяющие тарелку автомата перекоса (АП) с рычагом поворота лопасти, нагружаются осевыми силами, действующими от каждой лопасти. Компоненты системы управления, обеспечивающие воздействие как на автомат перекоса, так и на крепления элементов системы управления нагружаются суммарной осевой силой P_Σ и моментами сил от всех лопастей НВ. При этом P_Σ нагружает элементы управления общего шага, а M_x и M_z – элементы управления продольного и поперечного наклона соответственно.

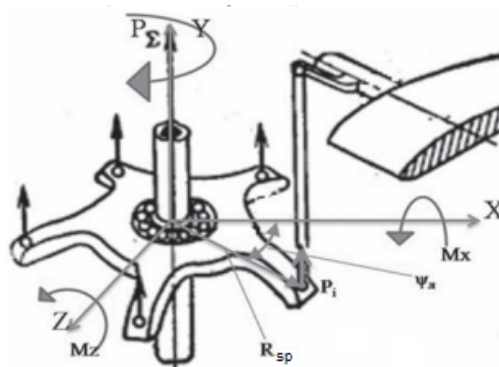


Рис. 1. Нагрузки, действующие на автомат перекоса со стороны лопасти.

Для k -лопастного винта известны следующие соотношения $i = [1; k_l]$:

$$P_\Sigma(\psi) = \sum_{i=1}^{k_l} P_i(\psi_i), M_z(\psi) = R_{sp} \sum_{i=1}^{k_l} P_i(\psi_i) \cos \psi_i, M_x(\psi) = -R_{sp} \sum_{i=1}^{k_l} P_i(\psi_i) \sin \psi_i, \quad (1)$$

$$\psi_i = \psi + \Delta\psi_l(i-1), \Delta\psi_l = \frac{2\pi}{k_l}$$

Далее авторами [5] рассмотрена задача по определению аэродинамических сил и моментов сил для случая установившегося движения вертолета. Коэффициенты суммарной осевой силы, продольного и поперечного моментов сил управления имеют следующий вид:

$$C_p(\psi) = \sum_{i=1}^{k_l} C_{P_i}(\psi_i), m_z(\psi) = \bar{R}_{sp} \sum_{i=1}^{k_l} C_{P_i}(\psi_i) \cos \psi_i, m_x(\psi) = -\bar{R}_{sp} \sum_{i=1}^{k_l} C_{P_i}(\psi_i) \sin \psi_i, \quad (2)$$

$$P_\Sigma = C_p \frac{\rho}{2} (\omega R)^2 \pi R^2, M_z = m_z \frac{\rho}{2} (\omega R)^2 \pi R^3, M_x = m_x \frac{\rho}{2} (\omega R)^2 \pi R^3$$

Также определен коэффициент момента аэродинамической силы, действующей на лопасть относительно осевого шарнира, ось которого проходит через хорду лопасти:

$$m_{aero} = \int_{\bar{r}_0}^1 \left[\bar{x}_f (C_{yp} \cos \alpha + C_{xp} \sin \alpha) + m_{zp} \bar{b} \right] \bar{W}^2 \bar{b} d\bar{r}. \quad (3)$$

Здесь α – угол атаки лопасти, \bar{r} – радиус сечения лопасти, \bar{W} – скорость обтекания сечения лопасти. Коэффициент момента инерционных сил относительно осевого шарнира определяем в виде:

$$m_{inert} = \frac{A}{\pi} (\varphi_c \cos \psi + \varphi_s \sin \psi), A = \frac{2J_f}{\rho R^5} \quad (4)$$

Здесь J_f – момент инерции лопасти относительно осевого шарнира.

Для определения момента от упругих сил рассмотрен четырехлопастной винт с пластинчатыми торсионами. Момент, обусловленный упругостью пластин торсиона:

$$M_{stiff} = K_1 \varphi \quad (5)$$

$$K_1 = \frac{2}{\pi} n_T \bar{\delta}_T \cos \frac{\gamma}{2} + \cos C_0 \left(\frac{2C}{3L_T} \bar{\delta}_T^2 \bar{b}_T + \frac{1}{8} K \right), C = \frac{G}{\rho (\omega R)^2}, K = \frac{m_l}{\rho R^3} \quad (6)$$

Силы действующие в тросах управления общим шагом, продольного и поперечного управления получены для рассмотренного четырехлопастного винта вертолета:

$$P_{CP} = P_\Sigma, P_{pitch} = \frac{M_x \sin \gamma + M_z \cos \gamma}{R_{pitch}}, P_{roll} = \frac{M_x \cos \gamma + M_z \sin \gamma}{R_{roll}} \quad (7)$$

Здесь R_{pitch} , R_{roll} – радиусы крепления тросов продольного и поперечного управления к АП соответственно.

В рамках настоящей работы разработана численная модель для верификации (см. рис. 3), входящая в состав цифрового двойника [6, 7] четырехлопастного несущего винта вертолета. Данная модель позволяет воспроизвести результаты летных испытаний и результаты расчета приведенных в работе [5] (см. рис. 2). Разработка численной модели и компьютерной моделирование проведено в программном системе MSC.Adams. Элементы НВ рассматриваются как абсолютно жесткие недеформированные тела, соединенные кинематическими связями с соответствующими степенями свободы. Торсион лопасти рассматривается как шарнир вращения (*Revolute_Joint*) и силовой элемент (*Torsion_Spring*).

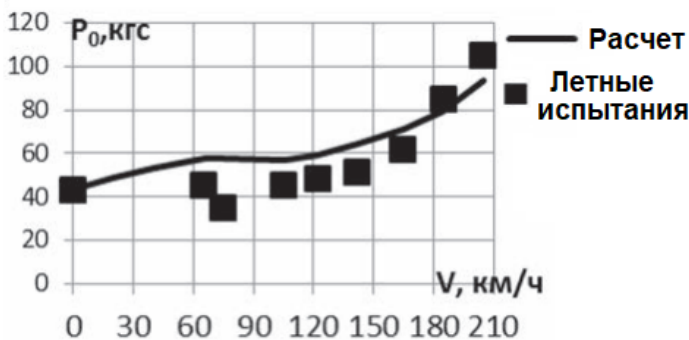


Рис. 2. Нагрузки на автомат перекаса, действующие от лопасти [4].

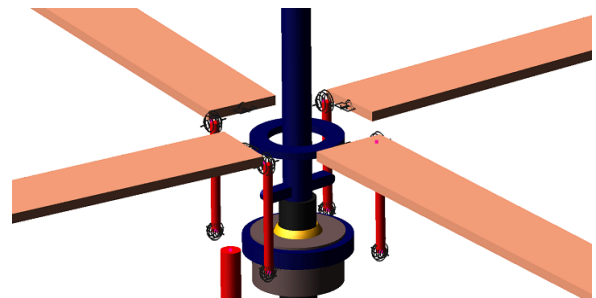


Рис. 3. Численная модель четырехлопастного несущего винта вертолета.

Определение влияния нелинейной изгибной жесткости торсиона балочного типа на нагрузки

Определение нелинейной крутильной жесткости торсиона балочного типа проведено по результатам решения задачи теории упругости с использованием прямого КЭ моделирования в программном пакете MSC.Nastran. КЭ модель торсиона балочного типа и постановка задачи показана на рис. 4. В рамках граничных условий задается закрепление одного конца торсиона с ограничением по всем степеням свободы, к противоположному концу задается момент, действующий на скручивание торсиона. В результате решения задачи о кручении торсиона можно определить крутильную жесткость:

$$m_{stiff} = \frac{M_y}{\varphi'_z} \quad (8)$$

Где M_y – приложенный момент к свободному концу торсиона, φ'_z – поворот свободного торца торсиона.

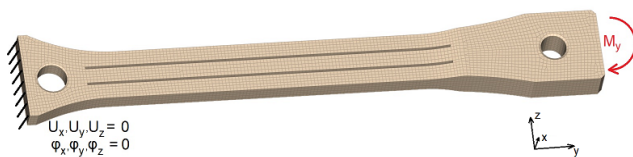


Рис. 4. КЭ модель торсиона балочного типа.

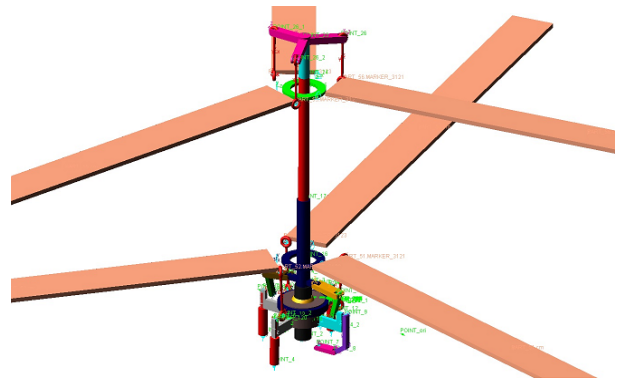


Рис. 5. Цифровая модель трехлопастного несущего винта соосного вертолета.

Учет жесткости торсиона балочного типа в программной системе MSC.Adams представляет собой внесение нелинейной характеристики крутильной жесткости (*Torsion_Spring*). Следующим шагом является определение нагрузок, действующих на автомат перекоса.

Разработка цифровой модели несущего винта соосного вертолета

Заключительным этапом настоящей работы является разработка цифровой модели трехлопастного винта соосного вертолета (см. рис. 5), являющаяся частью цифрового двойника трехлопастного несущего винта соосного вертолета. В рамках проведенной работы рассматривается соосный вертолет, в котором управление циклическим шагом реализовано для нижнего винта, а управление общим шагом реализовано для верхнего и нижнего винта. Подход к определению нагрузок для подобных систем управления описан в работе [8].

Заключение

В работе рассмотрен процесс работы НВ на установившихся режимах в общем случае движения вертолета. Представлено описание аналитической модели несущего винта соосного вертолета. Проведено исследование податливости торсиона балочного типа при определении нагрузок на органы управления несущим винтом. В рамках этого исследования определена нелинейная изгибная жесткость торсиона балочного типа и разработана цифровая модель несущего винта соосного вертолета.

Литература

1. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С., Гродко Л.Н., Лейканд М.А. Вертолеты. Расчет и проектирование. Т. 1. Аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1966. — С. 174–183.
2. Братухин И.П. Проектирование и конструкция вертолетов. — М.: Оборонгиз, 1955. — С. 122–157.
3. Новак В.Н. Расчет шарнирных моментов лопасти винта вертолета // Труды ЦАГИ. 1975, вып. 1669. — 25 с.
4. Шайдаков В.И. Дисконная вихревая теория несущего винта с постоянной нагрузкой по диску // Проектирование вертолетов: сб. науч. трудов. Вып. 381. М.: МАИ, 1976. — С. 57–68.
5. Кручинин М.М., Артамонов Б.Л. Расчет нагрузок на органы управления несущим винтом вертолета одновинтовой схемы. Научный вестник МГТУ ГА. 2016. Т.19, №. 4. — С. 139–148.
6. Боровков А.И., Рябов Ю.А. Цифровые двойники: определение, подходы и методы разработки // Цифровая трансформация экономики и промышленности: сборник трудов научно-практической конференции с зарубежным участием, 20–22 июня 2019 г. / под ред. Бабкина А.В. — СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. — 780 с.
7. Боровков А.И., Рябов Ю.А., Марусева В.М. Новая парадигма цифрового проектирования и моделирования глобально конкурентоспособной продукции нового поколения // Цифровое производство: методы, экосистемы, технологии / МШУ СКОЛКОВО. — 2018. — С. 24–44.
8. Петросян Э. А. Аэродинамика соосного вертолета. — М.: Полигон-пресс, 2004. — 816 с.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СУХОГО ТРЕНИЯ

Суханов А.А.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
alexeevich2012@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается оригинальная модель сухого трения между твердыми телами, объясняющая основные эмпирические выводы закона Амонтона–Кулона. До настоящего времени общепризнанной моделью сухого трения является модель контактного взаимодействия шероховатостей, соприкасающихся поверхностей с выделением энергии в виде тепла, обусловленной работой сил трения. Данная модель, однако, лишь качественно поясняет природу сил трения. Для количественного объяснения всех явлений сухого трения предлагается альтернативная модель, в которой сила трения представляет собой касательную проекцию силы нормального давления со стороны шероховатостей, выступающих в роли усредненной наклонной плоскости.

Введение

Первые исследования силы трения были проведены великим итальянским художником, скульптором, архитектором, инженером, изобретателем и ученым Леонардо да Винчи в 1493 г., установившим, что сила трения, действующая между двумя телами, прямо пропорциональна силе реакции между трущимися поверхностями и не зависит от площади их соприкосновения. В 1699 г. французский физик Гийом Амонтон вывел эмпирическую формулу закона сухого трения (1), где F – сила трения, N – сила нормального давления, μ – безразмерный коэффициент трения, $\mathbf{V} \in 0$ – вектор относительной линейной скорости, $V = |\mathbf{V}|$ – модуль вектора \mathbf{V} :

$$\mathbf{F} = - \mu N \frac{\mathbf{V}}{V} . \quad (1)$$

В 1785 г. французский военный инженер и ученый-физик Шарль Огюстен де Кулон подтвердил формулу (1) и предложил обобщенный закон с учетом адгезии

$$F = A + \mu N ,$$

где A – сила молекулярного сцепления, которую мы рассматривать не будем в силу ее малости.

В первом приближении сила сухого трения, возникающая при относительном смещении двух твердых тел, имеет релейную зависимость, называемую законом Амонтона–Кулона (рис. 1а). На рис. 1б в увеличенном масштабе представлены шероховатости тел, являющиеся причиной возникновения сухого трения.

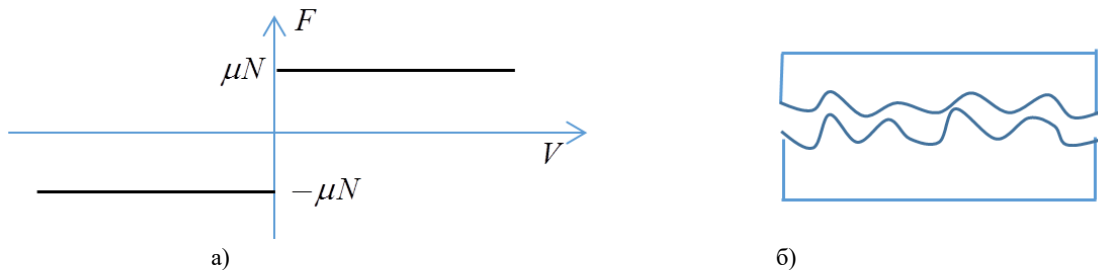


Рис. 1. Сила сухого трения Амонтона–Кулона.

Противоречия деформационной модели сухого трения

Общепринятой причиной возникновения сухого трения [1–6] является упругое и неупругое деформирование шероховатостей на поверхностях контактирующих тел с выделением затрачиваемой энергии в виде тепла. Однако подобное качественное объяснение не отвечает на многие количественные вопросы, основными из которых являются:

1. Наличие трения покоя, препятствующее относительному смещению тел при сдвигающей силе, меньшей μN . Действительно, если трение обусловлено энергией деформации шероховатостей, то оно не может бесконечно быстро нарастать при отсутствии относительного смещения тел. Следовательно, релейная зависимость трения рис. 1, а имеет принципиально другое объяснение.

2. Линейность силы трения от силы давления N или, что то же, независимость силы трения от площади соприкосновения тел. Поясним сказанное на двух примерах. В первом тело массой m расположено на горизонтальной плоскости. Сила трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона равна μmg . Во втором примере на первое тело поставлено еще одно такое же тело. В этом случае по закону Амонтона–Кулона сила трения будет ровно вдвое больше: $2\mu mg$. Последний результат далеко неочевиден, если придерживаться деформационной теории. Почему должна соблюдаться линейность трения в зависимости от давления при той же площади опоры? Монотонность трения от давления качественно понятна. Чем сильнее сжимаем тела, тем труднее их сдвинуть. Но линейность горизонтальной силы трения от вертикальной (перпендикулярной)

нагрузки под большим вопросом, если принять гипотезу деформационной природы трения. Куда естественнее иметь в этом случае нелинейную зависимость.

3. Независимость силы трения от относительной скорости смещения контактирующих тел также трудно объяснима в рамках деформационной модели трения. В последнем случае энергия деформации не может не зависеть от скорости деформации.

Существуют и другие более тонкие эффекты, например, Штрибек-эффект [1], которые невозможно объяснить деформационной моделью сухого трения.

Модель скольжения по шероховатостям

Для устранения описанных противоречий в деформационной модели сухого трения предлагается принципиально другая модель взаимодействия твердых тел, в которой сила трения представляет собой касательную проекцию силы нормального давления со стороны шероховатостей, выступающих в роли усредненной наклонной плоскости. На рис. 2а представлены сечения двух соприкасающихся тел, у которых шероховатости приближенно имеют вид горок (зубьев) с одинаковыми для начала углами α .



Рис. 2. Схема модели скольжения по шероховатостям.

Предположим далее, что при относительном смещении тел происходит, главным образом, не смятие шероховатостей, а скольжение вдоль них с неизбежным «подъемом» одного тела над другим. На рис. 2б изображена силовая схема такого подъема тела с массой m по наклонной плоскости с углом α . Из условия равновесия

$$F \cos \alpha = mg \sin \alpha$$

получаем необходимую горизонтальную силу тягу, компенсирующую соответствующую проекцию силы реакции и равную силе трения

$$F = mgtg\alpha = \mu mg, \quad (2)$$

где $\mu = tg\alpha$ можно трактовать как безразмерный коэффициент трения в законе Амонтона–Кулона. Таким образом, коэффициент трения в данном случае суть тангенс угла наклона твердых шероховатостей. Понятно, что вместо силы тяжести mg можно взять любую сжимающую силу P . В реальности тела из разных материалов имеют различные углы наклона шероховатостей. Очевидно, что в этом случае коэффициент трения будет определяться по более гладкой поверхности, т.е. $\mu = \min(tg\alpha_1, tg\alpha_2)$. В предельном случае, когда хотя бы одно тело имеет идеально ровную поверхность, относительное скольжение этого тела будет происходить без его подъема и, следовательно, без силы трения ($\mu = tg0 = 0$).

После прохождения очередного зуба шероховатости верхнее тело падает на нижнее с выделением запасенной потенциальной энергии в виде тепла. Покажем, что эта энергия в точности равна работе силы трения при перемещении тела на один зуб. Пусть длина зуба равна l , а высота его h . Тогда увеличение потенциальной энергии составляет mgh . Эта энергия обусловлена работой силы тяги F на длине пути l . Приравнявая mgh к работе Fl , находим, что сила тяги равна $F = mgh/l = mgtg\alpha = \mu mg$, т.е. совпадает с силой трения (2).

Разумеется, в реальных контактных парах углы наклона шероховатостей, их высоты и длины различные. И коэффициент трения представляет собой некое усреднение тангенсов углов наклона шероховатостей на характерной площадке контакта.

Покажем, как предлагаемая модель сухого трения легко справляется с поставленными выше вопросами.

1. Из рис. 2, а видно, что если сила тяги $F < mgtg\alpha = \mu mg$, то движение верхнего тела по клину будет отсутствовать. Это и обуславливает понятие трения покоя.

2. Линейность силы трения от нагрузки также очевидна. Она следует из формулы (2). Из нее же вытекает и экспериментально подтвержденная независимость трения от площади контакта. Сила трения в предлагаемой модели зависит только от нагрузки и коэффициента трения (среднего угла наклона шероховатостей более гладкого тела).

3. Также понятна независимость силы трения от скорости смещения тел, ибо она просто не входит в расчетную модель.

Более того, предлагаемая модель легко объясняет Штрибек-эффект [1], заключающийся в резком

уменьшении силы трения в самый начальный момент движения. Дело в том, что при сдавливании неподвижных тел кривизна (угол наклона) зуба шероховатости у его основания несколько больше за счет вдавливания вершины зуба другого тела. И в начальный момент движения подъем верхнего тела происходит по более крутому склону, т.е. с большей силой трения. Предлагаемая модель также полностью согласуется с известным явлением бокового заноса автомобиля при блокировке его колес [7].

Эксперименты

Результаты простых экспериментов с поступательным и вращательным движениями тел, имеющих форму шайбы, хорошо согласуются с законом Амонтона–Кулона при различных нагружениях. Однако, при сложном взаимодействии контактирующих тел закон Амонтона–Кулона, опирающийся на деформационную модель, дает существенно меньшее значение получаемой силы трения. В то время как модель скольжения с подъемом легко объясняет такое различие. На рис. 3а представлена схема первого такого эксперимента.



Рис. 3. Сложное относительное движение с ограничениями.

К телу A , расположенному на плоскости, прикладывается увеличивающаяся контролируемая динамометром сила тяги F_1 , равная силе трения после начала движения. На теле A расположено тело B , закрепленное так, чтобы оно имело только вертикальную степень подвижности (обозначено соответствующими треугольниками). Пусть для простоты массы тел и коэффициенты трения одинаковы и равны соответственно m и μ . Обе модели трения и эксперимент дают одинаковые силы трения, равные

$$F_1 = \mu 2mg + \mu mg = 3\mu mg$$

На рис. 3б представлена схема видоизмененного эксперимента, в котором верхнее тело B дополнительно закреплено и по вертикали. Для деформационной модели трения это закрепление не влияет на конечный результат, ибо верхнее тело все равно не поднимается. Но в модели скольжения с подъемом закрепление верхнего тела принципиально меняет всю картину взаимодействия двух тел и основания. Ограниченность подъема тел резко увеличивает силу страгивания (силу трения) F_2 , которая теперь идет на реальное смятие шероховатостей. И действительно, в данном эксперименте сила трения оказалась больше в разы по сравнению с расчетной по формуле Амонтона–Кулона. Оценить аналитически величину этой силы пока не представилось возможным в силу необходимости учета многих факторов, таких как податливость самих тел, неидеальность упорov и т.п.

Заключение

Предлагаемая модель сухого трения, заключающаяся в скольжении соприкасающихся тел вдоль жестких шероховатостей как по наклонной плоскости (подъем с последующим падением), объясняет все выводы эмпирического закона Амонтона–Кулона, которые не получить с помощью общепринятой деформационной модели трения. Более того, модель скольжения с подъемом отвечает и на многие другие вопросы, в частности, почему имеется расхождение экспериментальных результатов с аналитическими при сложных взаимных движениях с ограничениями.

Литература

1. Stribeck R. *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager*, Z. Verein. Deut. Ing. Vol. 46 Seite 38ff. 1341–1348 (1902)
2. Пенлеве П. Лекции о трении. - М.: Гостехиздат, 1954. - 316 с
3. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия /Отв. ред. А. Ю. Ишлинский. — М.: Наука, 2001. — 478 с
4. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2010. – 184 с.
5. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // ПММ / АН СССР. 1990. Т.54, вып. 4. - С. 520-529
6. Жилин П.А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие. - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. - 584 с
7. Суханов А.А. Движение юзом по наклонной плоскости //Современное машиностроение: наука и образование 2021 (ММЕSE-2021) – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2021. – С. 204-227

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТВЁРДЫХ ТЕЛ НА БАЗЕ МЕТОДА ШАРНИРНЫХ КООРДИНАТ

Сухов Е.А.

Московский авиационный институт, Москва, Россия
sukhov.george@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача численного моделирования динамики неавтономных неконсервативных механических систем, состоящих из твёрдых тел и содержащих замкнутые кинематические цепи. В настоящей работе представлен алгоритм и программный комплекс, в котором дифференциально-алгебраические уравнения движения моделируемой системы выводятся в символьном виде с использованием так называемого метода шарнирных координат. Данный подход позволяет сократить количество уравнений и повысить производительность вычислений. Для апробации алгоритма рассмотрен ряд тестовых задач, результаты решения которых верифицированы с помощью ПО OpenModelica и Maple.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-11-00116.

Введение

Задача моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами и большим числом степеней свободы представляет значительный интерес как для фундаментальной науки, так и с точки зрения прикладных исследований и инженерного дела. В настоящей работе рассматривается задача моделирования движения механических систем, состоящих из твёрдых тел, на которые могут быть наложены как голономные, так и неголономные связи. Предполагается, что моделируемая система может являться неавтономной, неконсервативной и может содержать замкнутые кинематические цепи. Входящие в систему тела имеют произвольные массово-инерционные характеристики. Решению данной задачи посвящено большое количество работ [1–15]. В частности, в работах [14, 15] изложен так называемый метод шарнирных координат. Достоинство указанного метода заключается во введении в рассматриваемой системе минимального набора независимых пространственных координат, называемых шарнирными, что позволяет уменьшить количество уравнений движения и даёт возможность оптимизировать как вывод уравнений, так и их численное интегрирование.

В данной работе представлен численный алгоритм, основанный на методе шарнирных координат и позволяющий выводить дифференциально-алгебраические уравнения движения в символьном виде. На базе данного численного алгоритма был разработан программный комплекс, содержащий систему компьютерной алгебры, библиотеку алгоритмов кинематики и динамики, библиотеку шарниров и графический пользовательский интерфейс. Для апробации алгоритма был рассмотрен ряд тестовых задач, включающих в себя плоские и пространственные задачи. Результаты решения указанных задач были верифицированы с помощью программного обеспечения для численного моделирования динамических систем OpenModelica, а также посредством сравнения с аналитическими моделями, построенными в системе компьютерной алгебры Maple.

Постановка задачи и представление структуры механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из b твёрдых тел M_i . Следуя [4, 14], свяжем с каждым из тел подвижную систему координат CK_i , начало которой совпадает с центром масс тела. Абсолютное положение тел будем задавать в неподвижной системе координат CK_0 посредством вектора $\vec{q} = (q_1, \dots, q_b)^T$,

$\vec{q}_i = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix}$, где \vec{r} – радиус-вектор центра масс, а $\vec{\varphi}$ – вектор угловых координат. Массово-инерционные

характеристики входящих в систему тел будем задавать блочно-диагональной матрицей M , содержащей значения их масс и тензоры инерции в осях системы координат CK_0 . Наложённые на систему связи будем моделировать шарнирами S_{ij} , где i, j – номера связываемых данным шарниром тел. Задаваемые шарнирами связи могут описываться либо набором локальных обобщённых «шарнирных» координат $\vec{\theta}^*$, либо алгебраическими уравнениями связи, накладываемыми на координаты и скорости тел. Данный подход позволяет моделировать как удерживающие, так и некоторые виды недерживающих связей, а также хорошо подходит для программной реализации в рамках объектно-ориентированной парадигмы.

Структуру рассматриваемой механической системы будем представлять в виде графа, узлами которого являются тела, а рёбрами – связи. В данном графе замкнутым кинематическим цепям соответствуют циклы (рис. 1). В случае, если в системе отсутствуют замкнутые кинематические цепи, то её граф является деревом. Если при этом все связи задаются шарнирными координатами, то эти координаты образуют множество

обобщённых координат системы, а её движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, данный случай редко встречается на практике.

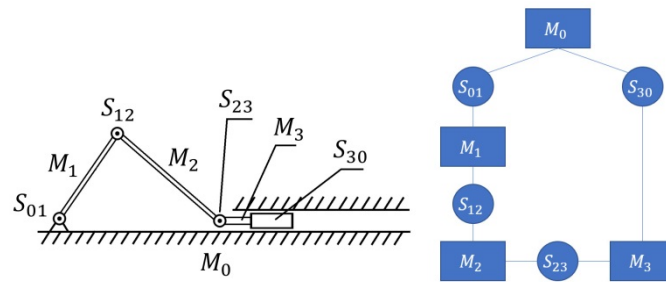


Рис. 1. Принципиальная схема и граф механической системы с замкнутой кинематической цепью на примере кривошипно-ползунного механизма.

Построение и численное интегрирование уравнений движения

Для получения уравнений движения механической системы с замкнутыми кинематическими цепями необходимо сначала «разрезать» замыкающие шарниры в каждом из элементарных циклов, приведя структуру графа механической системы к структуре дерева (рис. 2).

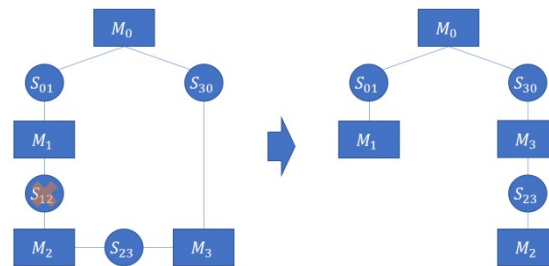


Рис. 2. Разрезание связи в механической системе с замкнутой кинематической цепью на примере кривошипно-ползунного механизма.

Так как шарнирные координаты, соответствующие разрезанным шарнирам, не могут принимать произвольных значений, в результирующей системе уравнений движения им будут соответствовать алгебраические уравнения связи

$$\psi(\vec{\theta}) = 0, \tag{1}$$

где $\vec{\theta}$ – вектор независимых шарнирных координат. Выбор разрезаемых шарниров производится таким образом, чтобы получить наиболее простые уравнения связи, что определяется типом шарнира и структурой графа.

Для вывода дифференциальных уравнений движения воспользуемся основными теоремами динамики. Уравнения движения в шарнирных координатах после разрезания связей будут иметь вид [14]

$$\overline{M}\ddot{\vec{\theta}} - C^T \vec{v} = \vec{f}, \tag{2}$$

где $\overline{M} = B^T M B$ – матрица массово-инерционных характеристик, $\vec{f} = B^T (\vec{g} - M \dot{B} \dot{\vec{\theta}})$ – вектор внешних и гироскопических сил и моментов, а \vec{v} – вектор множителей Лагранжа. Матрица B задаёт связь абсолютных и шарнирных скоростей $\dot{\vec{q}} = B \dot{\vec{\theta}}$ [1-3], а матрица C определяется из уравнения для независимых шарнирных скоростей

$$\dot{\psi} = C \dot{\vec{\theta}} = 0. \tag{3}$$

Исходными данными для моделирования служит структура связей механической системы, массово-инерционные характеристики, начальные координаты и скорости тел, а также внешние и внутренние силы и моменты, задаваемые программным образом, либо с помощью графического интерфейса. При задании наложенных на механическую систему связей используется расширяемая библиотека стандартных шарниров,

реализующая основные виды связей, такие, как цилиндрический шарнир, сферический шарнир, линейная направляющая, направляющая произвольной формы, скользящая опора, шарниры с зазорами.

Первым шагом при выводе уравнений движения является построение графа механической системы и выбор независимых шарнирных координат с помощью процедуры разрезания связей. После выбора независимых шарнирных координат выводятся алгебраические уравнения связей (1) и (3), определяются матрицы B и C , а также выражения для абсолютных координат и скоростей. Затем производится вывод дифференциальных уравнений движения (2). Вывод уравнений (1)–(3) осуществляется в символьном виде после присвоения пользователем численных значений постоянных параметров системы.

Для осуществления символьных преобразований была разработана библиотека компьютерной алгебры, поддерживающая операции подстановки, символьного и численного дифференцирования, базовые операции упрощения выражений, работу с векторами и матрицами, а также с табличными функциями одной и нескольких переменных. Для представления и обработки символьных выражений в данной библиотеке используются деревья общего вида.

После получения уравнений движения производится расчёт начальных условий и запускается процедура численного интегрирования. Для численного интегрирования системы (1)–(3) используется модифицированный метод Рунге–Кутты 4-го порядка, либо метод Радо.

Для апробации изложенного алгоритма были рассмотрены ряд механических систем разного уровня сложности, включая автономные, неавтономные и неконсервативные системы. Полученные результаты хорошо согласуются с моделями, построенными в специализированном ПО OpenModelica и Maple. Рассматривались также плоские и пространственные механические системы, содержащие от 20 до 30 тел. Полное время вычисления, включая численное интегрирование, для подобных систем составило порядка 10–30 секунд в зависимости от количества циклов и структуры дерева системы. Вычисления производились на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 и 16 гб ОЗУ.

Заключение

Представленный в данной работе алгоритм и реализующий его программный комплекс позволяет моделировать движение пространственных систем твёрдых тел с замкнутыми кинематическими цепями и связями достаточно произвольного вида. В результате апробации программного комплекса на ряде модельных систем была подтверждена корректность его работы, а также получены приблизительные оценки быстродействия. В рамках продолжения работ над программным комплексом планируется его дальнейшая оптимизация, расширение библиотеки шарниров, а также добавление функционала для моделирования движения деформируемых тел.

Выражаю благодарность профессору РАН Б.С. Бардину за полезное обсуждение.

Литература

1. W. Jerkovsky // The Structure of Multibody Dynamics Equations. J. of Guidance and Control. 1:3. 1978.
2. J. Wittenburg // Dynamics of Systems of Rigid Bodies, Штутгарт: B.G. Teubner. 1988.
3. S. S. Kim, M. J. Vanderploeg // A General and Efficient Method Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations. ASME J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. 108:2. 1986.
4. P.E. Nikravesh // Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. New Jersey: Prentice Hall. 1988.
5. A.A. Shabana // Dynamics of Multibody Systems. New York: John Wiley & Sons. 1989.
6. E.J. Haug // Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems V.1: Basic Methods. Boston: Allyn & Bacon. 1989.
7. W. Schiehlen // Multibody Systems Handbook. Berlin: Springer-Verlag. 1990.
8. R.L. Huston // Multibody Dynamics. Boston: Butterworth-Heinemann. 1990.
9. P. Flores // Concepts and Formulations for Spatial Multibody Dynamics. Springer. 2015.
10. W. Schiehlen // Research trends in multibody system dynamics. Multibody System Dynamics. 18. 2007.
11. P. Eberhard, W. Schiehlen // Computational dynamics of multibody systems: History, formalisms, and applications. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 1. 2006.
12. O. A. Bauchau, A. Laulusa // Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. J. Comput. Nonlinear Dyn. 3:1. 011005. 2007.
13. P. E. Nikravesh // Newtonian-based methodologies in multi-body dynamics. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics. 222. 2008. 277-288.
14. G. H. Gim // P. Nikravesh // Joint coordinate method for analysis and design of multibody systems: Part 1. System equations. J. of Mech. Sci. and Tech. 1993.
15. Д. Ю. Погорелов // Введение в моделирование динамики систем тел: учебное пособие. БГТУ. Брянск. 2008.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

Темис Ю.М., Азметов Х.Х.

ФАУ Центральный Институт Авиационного Моторостроения им. П.И. Баранова, Москва
ymtemis@ciam.ru

Аннотация. Методы математического моделирования процессов неупругого деформирования применены к исследованию несущей способности дисков ГТД. Обсуждаются критерии оценки несущей способности: предельного состояния и потери устойчивости процесса деформирования. Рассмотрены модельные диски, диск турбины и рабочее колесо компрессора. Показано, что методика позволяет провести численное моделирование разгонных и циклических испытаний вращающихся тонкостенных деталей двигателя. Это дает возможность существенно сократить объем натурных испытаний конструкций на стенде и в системе двигателя.

Введение

Определение несущей способности ответственных деталей авиационных ГТД является актуальной проблемой, решение которой требует создания высокоточных методов, моделей и расчетных схем. Разрушению детали предшествует сложный трудно формализуемый процесс упругопластического деформирования, который реализуется либо в некоторой зоне детали вблизи концентратора напряжений, либо во всем объеме материала детали.

В зависимости от свойств материала, условий нагружения и конструктивных особенностей диска отказ работоспособности можно рассматривать с различных точек зрения: теории предельного равновесия, механики хрупкого разрушения, теории устойчивости форм равновесия.

При проектировании несущая способность деталей ГТД определяется на основе, базирующейся на кинематической и статической теоремах для жесткопластического тела и теории предельного равновесия [1, 2]. Причем рассматриваются простейшие схемы развития разрушения, применимые к тонкостенным конструкциям: отрыв и срез в болтовых, шлицевых, шпоночных и хиртовых соединениях, модели, основанные на кинематически или статически возможных полях деформаций или напряжений. Аналогичные подходы используются как для разъемных, так и для неразъемных соединений.

Многочисленные экспериментальные результаты и опыт эксплуатации авиационных ГТД показали, что в ряде случаев теория предельного равновесия приводит к результатам, отличающимся от экспериментально определенных величин предельных нагрузок или разрушающих частот вращения. Такие отличия могут составлять до 10–15% [2], так как теория предельного равновесия не всегда позволяет учесть действие реальных температурных напряжений и деформаций. Кроме этого, до настоящего времени нет надежной методики определения несущей способности тонкостенных сварных или затянутых болтовыми соединениями корпусов, барабанных роторов или роторов смешанного типа. В связи с этим представляет интерес разработка методики исследования несущей способности тонкостенных высоконагруженных корпусных деталей, дисков и роторов, основанной на численном моделировании реального процесса нагружения.

Имитационное моделирование разгонных испытаний

Детали двигателя работают при высоких нестационарных нагрузках и температурах, что приводит к развитию в зонах концентрации напряжений деформаций неизотермической пластичности и ползучести. Расчетные схемы конструктивных элементов ГТД, основанные на применении моделей деформационной теории пластичности и теории пластического течения при нестационарном неизотермическом нагружении рассмотрены в работе [2]. Эти модели, объединенные с моделями газовой динамики и моделями теплопроводности, являются основой технологии имитационного многодисциплинарного моделирования процесса работы деталей и узлов двигателя в полетном цикле (технологии цифровых двойников) [2].

Уравнения МКЭ и алгоритмы расчета кинетики напряженно деформированного состояния конструктивных элементов ГТД для различных моделей неизотермического упругопластического деформирования приводят к формулированию задачи в виде

$$[K_k^r] \{\Delta u\} = \{\Delta F\}_k + \{\Delta F_p\}_k + \{\Delta F_c\}_k + \beta \{\Delta F^*\}. \quad (1)$$

Обозначения соответствуют работе [2], в которой приведены основные соотношения для определения коэффициентов матрицы и векторов, входящих в (1).

Следует отметить, что касательная матрица жесткости системы имеет вид

$$[K_\tau] = [K_{\tau 0}] + [K_L] + [K_\sigma] + [K_R]$$

как для физически нелинейной постановки задачи, при выполнении условий малых перемещений и гипотезы о неизменяемых размерах, так и для задачи в геометрически нелинейной постановке, в которой необходимо учитывать, как физическую нелинейность, так и изменение формы детали (большие перемещения). $[K_{\tau 0}]$ –

касательная матрица системы, построенная с учетом физической нелинейности, для начальной формы детали [2], $[K_L]$, $[K_\sigma]$, $[K_R]$ – поправки касательной матрицы жесткости, учитывающие влияния различных факторов, вызванных большими перемещениями.

Для исследования процесса упругопластической неустойчивости необходимо построение полной матрицы $[K_\tau]$. Из уравнений (1) могут быть получены конкретные зависимости и разрешающие уравнения МКЭ для различных конечных элементов и расчетных схем, применяемых для расчета деталей ГТД.

Аварийные ситуации, вызванные отказами систем двигателя, происходящие в полетном цикле, могут привести либо к недопустимому росту частоты вращения ротора или нерасчетному росту температур деталей конструкции, что может привести к потере несущей способности и разрушению деталей ротора. Фрагменты разрушившихся деталей обладают высокой кинетической энергией, и это может привести к разрушению корпуса двигателя, отказу систем летательного аппарата и катастрофическим последствиям. Возможности экспериментального исследования таких ситуаций ограничено. Имитационное моделирование, в отличие от методов, основанных на теории придельного равновесия, позволяет определить реальное напряженно деформированное состояние и работоспособность конструкции в любой момент полетного цикла и разработать методику моделирования аварийного отказа. При этом важным является задание критерия, по которому определяется момент начала процесса локализации больших упругопластических деформаций и последующее разрушение конструкции. Несущую способность или работоспособность деталь теряет, если локализация пластических деформаций приведет к резкому росту перемещений в некоторой ограниченной области конструкции и существенным изменениям ее размеров. В докладе рассмотрены варианты локализации зон больших пластических деформаций в дисках компрессора и турбины при моделировании разгонных испытаний. Таким образом, задавая характерные точки конструкции, можно по темпу изменения перемещений в них определить момент начала локализации пластических деформаций, предшествующий началу разрушения.

На рис. 1а показаны примеры расчета изменения радиальных размеров при разгонных испытаниях модельных дисков с отверстиями из сплава ВТ-9 при постоянной температуре. Резкий рост радиального размера (расстояния $R_{об} - R_{ст}$ на рис. 1) можно считать критерием начала разрушения, так как это соответствует экспериментальной величине разрушающей частоты вращения. Цветные линии показывают зоны концентрации пластических деформаций (места образования шеек) в момент, предшествующий разрушению. Применены деформационная теория пластичности и принцип начальных размеров. Очевидно, что такой критерий в ряде случаев можно использовать и для случая неоднородного напряженно-деформированного состояния в деталях, работающих в условиях нестационарного нагружения, а также и при моделировании циклических испытаний или работе конструкции по эксплуатационному циклу.

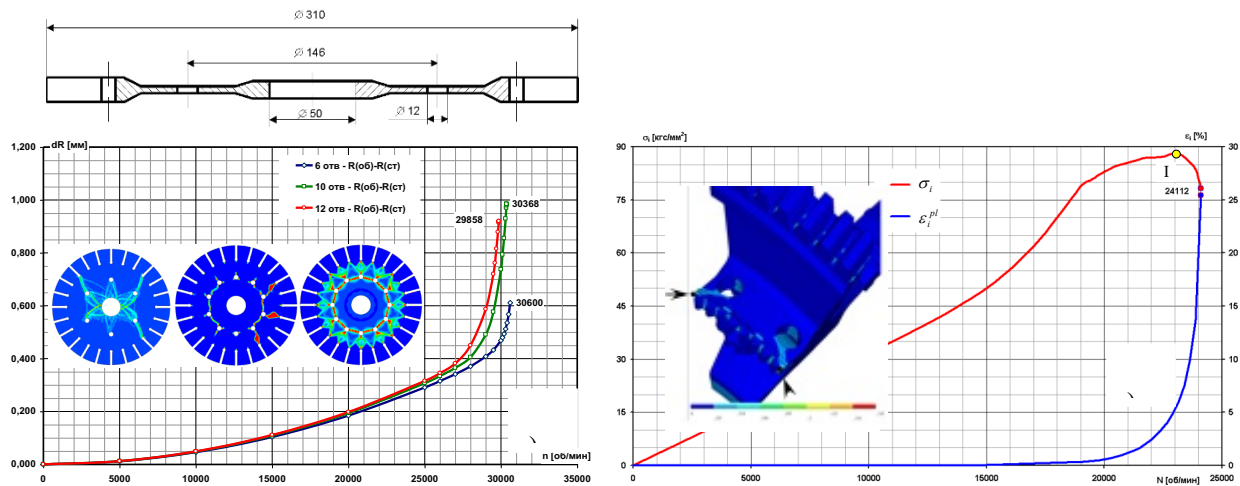


Рис. 1.

Моделирование разрушения конструкции возможно и на основе геометрически нелинейной модели, в которой физическая нелинейность учтена с использованием модели неизотермического упругопластического течения материала диска. Ценность такого моделирования заключается в том, что можно оценить несущую способность конструкции в заданный момент времени полетного цикла при условии, что либо один, либо несколько действующих силовых факторов резко изменяются при переходе двигателя на чрезвычайный режим или при аварийной ситуации. При этом необходимо рассматривать процесс быстроизменяющихся нагрузок подобный разгонным испытаниям дисков. На рис. 1б стрелками показаны зоны начала разрушения в диске турбины при росте частоты вращения и тепловом состоянии, соответствующем максимальному режиму полетного цикла. На графиках показаны зависимости максимальных эквивалентных напряжений и деформаций

от частоты вращения. Аналогичные примеры рассмотрены в докладе для различных деталей роторов ГТД.

Наряду с критерием изменения размеров конструкции можно применить критерий потери устойчивости процесса упругопластического деформирования, рассматривая конструкцию в геометрически нелинейной постановке и применяя теорию пластического течения. Неустойчивость процесса деформирования за пределом упругости при действии растягивающих напряжений для стержня, пластинки и осесимметричных цилиндрических оболочек исследована в ряде работ. Для вращающихся дисков и роторов при неоднородном распределении напряжений и деформаций эта проблема не нашла должного освещения в литературе. Отметим небольшой обзор в книге [3]. Моменту потери устойчивости соответствует условие $\delta T / \delta u = 0$, где $T(u, p)$ нелинейный оператор задачи. Косвенно это можно оценить по изменению собственных чисел касательной матрицы $[K_T]$, которую можно рассматривать как производную нелинейного оператора задачи, связывающего вектор воздействия p с вектором q отклика системы.

При действии высоких окружных и радиальных напряжений толщина диска в зоне образования шейки стремится к нулю. Учет геометрической нелинейности приводит к тому, что за счет перемещения материала детали изменяется ее жесткость и, соответственно, частоты собственных колебаний. На рис. 2 представлены собственные числа и собственные формы матрицы $[K_T]$ в зависимости от частоты вращения модельного диска. При появлении больших пластических деформаций в полотно диска частоты, соответствующие пластинчатым формам, начинают резко падать, что характеризует процесс разрушения конструкции. В экспериментах на несущую способность за несколько мгновений до разрушения диска можно наблюдать резкое увеличение амплитуд колебаний ротора разгонного стенда. Это можно объяснить, как ростом дисбаланса из-за неоднородности пластических деформаций, так и возможными явлениями автоколебаний при совпадении собственных частот матрицы $[K_T]$. Результаты, полученные при моделировании разгонных испытаний центробежного колеса компрессора показаны на рис. 3.

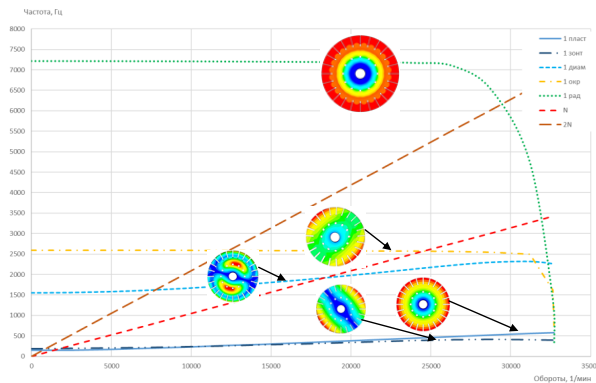


Рис. 2.

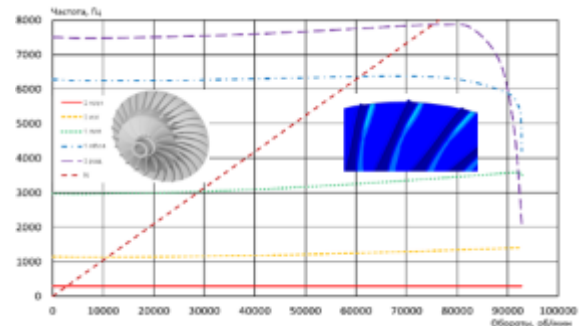


Рис. 3.

Заключение

Моделирование нелинейного процесса деформирования вращающихся деталей представляет определенные трудности, так как при стремлении к нулю собственных чисел касательной матрицы жесткости также теряется и устойчивость численного алгоритма. Если в процессе управления решением задачи заменить местами вектор воздействия и вектор отклика системы, то можно исследовать закритическое поведение конструкции. Однако, с достаточной для инженерных оценок достаточно определить момент начала резкого падения собственного значения касательной матрицы, а собственная форма, соответствующая этому собственному значению, сопоставленная с полями пластических деформаций, позволяет определить размеры фрагментов и их кинетическую энергию при разрушении конструкции.

Литература

1. Расчет на прочность деталей машин: Справочник/ И.А. Биргер, БФ. Шорр, Г.Б. Иосилевич. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.
2. Машиностроение. Энциклопедия / - М.: Машиностроение. Самолеты и вертолеты. Т IV-21. Авиационные двигатели. Кн. 3 / В.А. Скибин, В.И. Солонин, Ю.М. Темис и др.; Под ред. В.А. Скибина, Ю.М. Темиса и В.А. Сосунова - 2010. - 720 с.
3. W. Jonson and P.B. Mellor // Engineering Plasticity. London. Van Nostrand Reinold Company. 1975. - 646 p.

ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСОВ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ОБОБЩЁННОГО МАЯТНИКА КАПИЦЫ

Товстик Т.П., Беляев А.К.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
 tovstik_t@mail.ru

Аннотация. Обобщается классическая задача Капицы об устойчивости перевернутого маятника под действием вибраций опоры. Показано влияние продольных резонансов на устойчивость режима колебаний около верхнего положения равновесия. Для гибкого растяжимого стержня задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. К коэффициентам, сложным образом зависящим от частоты вибраций основания, применена аппроксимация Паде. Оценка устойчивости решения получена методом двухмасштабного асимптотического разложения. Задача решается и в других постановках. Рассмотрены однозвенный маятник с внутренней степенью свободы и двухзвенный маятник с растяжимыми не гибкими звеньями при не малых углах отклонения от вертикали. Результаты показаны на графиках.

Введение

Задача о перевернутом маятнике, впервые опубликованная в работе А. Стефенсона [1], с середины XX века начала интересовать многих учёных в разных областях науки и не только теоретической механики. Наиболее детальное решение впервые появилось в работе П.Л. Капицы [2]. Появились и решения в других постановках [3]. В настоящее время активно разрабатываются обобщения этой задачи, в том числе на случай моделей многозвенного [4, 5] и деформируемого маятника [6], теоретические и экспериментальные [7], а также исследования по повышению устойчивости стержней к продольному сжатию при помощи продольных сжимающих вибраций [8].

В данном докладе мы сосредоточимся на выявлении влияния упругих продольных деформаций и резонансов на устойчивость и области притяжения устойчивого режима колебаний маятника Капицы. Ранее были получены результаты, касающиеся первого резонанса продольных колебаний [9–11]. Здесь мы переходим к рассмотрению старших форм колебаний и резонансов.

Кроме классической модели гибкого деформируемого в продольном направлении стержня (рис. 1а), рассматривается и не гибкий стержень с внутренним подвижным элементом, моделирующим упругое продольное сжатие (рис. 1б), а также двухзвенный маятник, звенья которого допускают малое упругое растяжение-сжатие (рис. 1в).

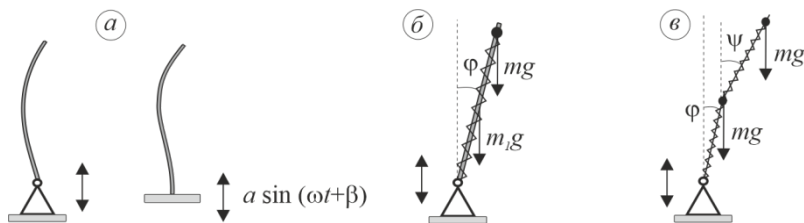


Рис. 1. Модели маятника Капицы: (а) – гибкий растяжимый стержень с шарнирным и консольным закреплением, (б) – однозвенный и (в) – двухзвенный маятник с упругими элементами.

Система уравнений Матье для гибкого стержня

Классическая задача Капицы сводится к уравнению Матье с двумя параметрами – малой величиной $\varepsilon = a/L$ отношения амплитуды вибрации a основания к длине L маятника и безразмерной величиной $\zeta = \frac{a^2 \omega^2}{gL}$, где ω – частота вибраций основания, g – ускорение свободного падения. Задача устойчивости гибкого стержня на вибрирующем основании может быть сведена к системе уравнений Матье.

Малые поперечные отклонения $w(x, t)$ продольно сжатого гибкого стержня в подвижной системе координат, связанной с основанием, в безразмерных переменных описываются краевой задачей

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{P_D \zeta}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad P_D = \frac{P_0 L^2}{D}, \quad D = EI, \quad (1)$$

где P_0 – вес стержня, D – жёсткость стержня на изгиб. Верхний конец свободен ($w_{xx} = w_{xxx} = 0$ при $x = 1$), а нижний – шарнирно или жёстко закреплён ($w = w_x = 0$, $x = 0$, для шарнира, $w = w_x = 0$, $x = 0$, для заделки).

Переменная величина $p(x,t) = -\frac{L^2}{D}ESu_x$, пропорциональная силе продольного сжатия в сечении стержня площадью S , находится из краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{g}{L\omega^2} - \varepsilon \sin(t+\beta) = \frac{E}{L^2\rho\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (2)$$

Здесь E – модуль Юнга, ρ – объёмная плотность. Решение уравнения (2) ищем в виде

$$u(x,t) = \frac{P_0}{ES} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + U(x) \sin(t+\beta),$$

где $U(x)$ является решением задачи $U'' + v^2(U + \varepsilon) = 0$, $U(0) = 0$, $U'(x)|_{x=1} = 0$, $v = \frac{L\omega}{c}$, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Находим решение $U(x) = -\varepsilon(1 - \cos vx - \sin vx \tan v)$ и далее находим

$$p(x,t) = -\frac{L^2}{D}ESu_x = P_D \left((1-x) - \frac{\zeta}{\varepsilon} \frac{(\cos vx \tan v - \sin vx)}{v} \sin(t+\beta) \right). \quad (3)$$

Заметим, что для несжимаемого стержня $v \rightarrow 0$ и $(\cos vx \tan v - \sin vx)/v \rightarrow (1-x)$.

Задача малых поперечных колебаний продольно сжатого гибкого стержня на вибрирующем основании (1) решается путём введения вспомогательной краевой задачи [10] о бифуркации статического равновесия стержня под действием собственного веса со свободным верхним концом и закреплённым нижним концом

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(x) w_n(t), \quad \frac{d^4 \Psi_n}{dx^4} + \lambda_n \frac{d}{dx} \left((1-x) \frac{d\Psi_n}{dx} \right) = 0, \quad \int_0^1 (1-x) \frac{d\Psi_k}{dx} \frac{d\Psi_n}{dx} dx = 0, \quad k \neq n, \quad (4)$$

$$\Psi_n'''(1) = \Psi_n''(1) = 0; \quad \Psi_n(0) = \Psi_n'(0) = 0 \quad (\text{шарнир}) \quad \text{или} \quad \Psi_n(0) = \Psi_n'(0) = 0 \quad (\text{заделка}). \quad (5)$$

Отметим, что собственные функции Ψ_n и безразмерные эйлеровы критические значения λ_n не зависят ни от каких параметров задачи Капицы, кроме условий закрепления стержня (5). Интегрируя уравнение (4) с граничными условиями (5), приходим к уравнению Эри $V''(x,\lambda) + \lambda(1-x)V(x,\lambda) = 0$ для $\Psi_k(x) = \int_0^x V(x,\lambda_k) dx$, и с учётом $V'(1,\lambda) = 0$, к решению в виде табличного ряда $V(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda(1-x)^3)^k}{a_k}$, $a_0 = 1$, $a_k = 3k(3k-1)a_{k-1}$.

Решение (4) вместе с выражением (3) подставляем в уравнение (1), и с учётом условий ортогональности (4), аналогично [9], получаем систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^N a_{nk} \frac{d^2 w_k}{dt^2} + \frac{\varepsilon^2 b_n}{\zeta} \left(\frac{\lambda_n}{P_D} - 1 \right) w_n + \sum_{k=1}^N \varepsilon c_{nk} \sin(t+\beta) w_k = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (6)$$

или в матричной форме, с введением вектора неизвестных функций $\{w_k\}_{k=1,N}^T$ и матриц коэффициентов,

$$\mathbf{A} \frac{d^2 \mathbf{W}}{dt^2} + \frac{\varepsilon^2}{\zeta} \mathbf{P} \cdot \mathbf{W} + \varepsilon \mathbf{C} \cdot \mathbf{W} \sin(t+\beta) = 0, \quad \varepsilon = \frac{a}{L}, \quad \zeta = \frac{a^2 \omega^2}{gL}, \quad (7)$$

где $P_m = b_n \left(\frac{\lambda_n}{P_D} - 1 \right)$, $b_n = \int_0^1 (1-x) \left(\frac{d\Psi_n}{dx} \right)^2 dx$, $a_{nk} = \int_0^1 \Psi_n(x) \Psi_k(x) dx$, $c_{nk} = \int_0^1 \frac{(\cos vx \tan v - \sin vx)}{v} \frac{d\Psi_n}{dx} \frac{d\Psi_k}{dx} dx$, $v = \frac{L\omega}{c}$.

Видим, что коэффициент при ε^2 начнёт оказывать дестабилизирующее влияние, как только весовой параметр стержня P_D превысит хотя бы одно из λ_n . Для шарнирной опоры $\lambda_1 = 0$, для заделки – $\lambda_1 = 7.8373$. Осциллирующее слагаемое может оказать стабилизирующее влияние.

Асимптотические условия устойчивости

Зададим начальные условия системы (7) в следующем виде $\mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0$, $\dot{\mathbf{W}}(0) = 0$, то есть стержень отклонён без начальной скорости. Система (7) имеет малый параметр, введём медленное время $\tau = \varepsilon t$ и представим решение в виде асимптотического разложения [12]

$$\mathbf{W}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbf{U}_m(\tau) + \mathbf{V}_m(t, \tau)) \varepsilon^m, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_m(t) dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \ddot{\mathbf{W}} = \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \tau^2}. \quad (8)$$

Для медленно меняющейся функции $\mathbf{U}_0(\tau)$ из уравнения (7) находим

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_0 = 0, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{\zeta} \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}_0(\tau)|_{\tau=0} = \mathbf{W}_0, \quad \left. \frac{d\mathbf{U}_0}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_0 \cos \beta. \quad (9)$$

Устойчивость нулевого решения уравнения (9) требует положительной определённости матрицы \mathbf{D} , – так как матрица \mathbf{A} всегда положительно определена.

Обсуждение численных результатов

Оценим влияние параметров задачи на устойчивость в случае двухмодового приближения для изгибных колебаний и с учётом двух продольных резонансов. Для коэффициентов c_{nk} применим аппроксимацию Паде [13] в виде $c_{nk} = \frac{b_{nk} + e_{nk}v^2 + f_{nk}v^4}{(1 - 4v^2/\pi^2)(1 - 4v^2/9\pi^2)}$, где b_{nk} , e_{nk} , f_{nk} – коэффициенты, дающие 1%

точность вблизи резонансов и 3% при $v \in (0, 5.3)$. Графики модулей коэффициентов показаны на рис. 2а.

Рассмотрим модель маятника Капицы в виде консольного стального стержня длиной 5 м и скоростью звука продольной волны $c = 5100$ м/с. На рис. 2б показаны области неустойчивости, найденные в двухмодовом приближении в зависимости от радиуса инерции r и частоты $v = L\omega/c$ для различных амплитуд колебаний основания. Области неустойчивости (закрашены на графике) находятся за пределами первой эйлеровой критической статической нагрузки, для $r < 2.45$ мм. Заметим, что области неустойчивости прирастают неравномерно с уменьшением амплитуды. Это связано с нелинейной зависимостью элементов матрицы \mathbf{D} от v . С ростом частоты колебаний, система проходит области устойчивости и неустойчивости. Стабилизирующие либо дестабилизирующие значения определителя матрицы \mathbf{D} в зависимости от v , для тонкого стержня, способного потерять устойчивость по третьей форме, показаны на графике (рис. 2в). Области неустойчивости, находящиеся вблизи резонансной зоны устойчивости, получены и для не гибких сжимаемых маятников.

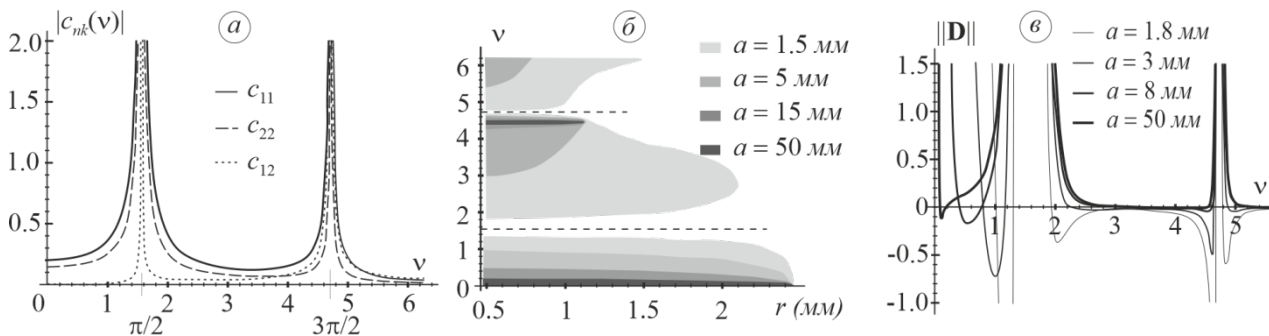


Рис. 2. Численные результаты для консольного маятника: (а) – коэффициенты матрицы $|c_{nk}|$, (б) – области неустойчивости маятника, (в) – определитель матрицы \mathbf{D} при значении радиуса инерции $r = 0,5$ мм.

Выводы

В нулевом асимптотическом приближении решена задача устойчивости обобщённого маятника Капицы для гибкого стержня с учётом продольных резонансов. Получены эффекты влияния второй формы изгибных колебаний на устойчивость маятника даже в том случае, когда его толщина не позволяет потерять статическую устойчивость по второй форме. Получено чередование областей устойчивости и неустойчивости, предсказанное в работах В.Н. Челомея. Найденная смена влияния той или иной формы потери устойчивости маятника при сменах колебательных режимов, согласуется с известными экспериментами.

Литература

1. A. Stephenson // On an induced stability, Phil. Mag. 1908. V. 15, 233–236.
2. П. Л. Капица // Маятник с вибрирующим подвесом, Успехи физических наук. 1951. Т. 44. № 1, 7–20.
3. В. Н. Челомей // О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций, ДАН СССР. 1956. Т. 110. No 3. С. 345–347.
4. D. J. Acheson // A pendulum theorem, Proc. Roy. Soc. London. 1993. Ser. A. V. 443. P. 239–245.
5. В. А. Грибков, А. О. Хохлов // Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников, Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 2. С. 22–39.
6. V. B. Vasilkov // Experimental investigation of nonlinear effects in a vibrating rope, Proceedings of XXXI Intern. Summer School “Advanced Problems in Mechanics” APM-2003. St. Petersburg: IPME RAS. 2004. P. 383–387.
7. И. И. Блехман // Вибрационная механика и вибрационная реология. 2018. 752 с.
8. А. А. Сейранян, А. П. Сейранян // Задача Челомея о стабилизации статически неустойчивого стержня с помощью вибрации, ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 6. С. 898–903.
9. А. К. Беляев, Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик // Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании, Вестник СПбУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т.5. № 3. С. 477–488.

10. Н. Ф. Морозов, А. К. Беляев, П. Е. Товстик, Т.П. Товстик // Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре, ДАН, 2018, Т. 482(2).
11. A. K. Belyaev, O. R. Polyakova, T. P. Tovstik // The Effect of Longitudinal Oscillations Resonance on Stability and Domains of Attraction in the Generalized Kapitsa Problem. In: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Springer. 2022. P. 93–100.
12. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский // Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 1958. 408 с.
13. И. В. Андрианов, Р. Г. Баранцев, Л. И. Маневич // Асимптотическая математика и синергетика. 2020. 300 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ АВТОМОБИЛЬНЫХ ШИН

Томашевский С.Б.

Брянский государственный технический университет, Брянск, Россия
tomashevskiy-sb@yandex.ru

Аннотация. В рамках данной работы создана методика идентификации упрощенных динамических моделей шин на основе их подробных конечно-элементных моделей с целью уточнённого моделирования динамики как колесных транспортных средств, так и самих шин.

Введение

Работа направлена на решение актуальной задачи – создание новых компьютерных моделей автомобильных шин для моделирования динамики колесных машин. Необходимость выполнения данной работы вызвана тем, что в большинстве публикаций [1–4] по теме взаимодействия шин с дорогой рассматриваются либо безынерционные модели шин, либо имеющие небольшое число степеней свободы.

Разработка новых моделей шин, которые учитывают их инерционные, упругие и демпфирующие характеристики, а также моделей контактного взаимодействия шин с мягкими грунтами позволит более точно выполнять моделирование, как динамики колесных машин, так и динамики самих шин.

Основная часть

Существенная сложность создания новых моделей шин для расчета динамики колесных машин состоит в идентификации их параметров. Автомобильные шины имеют сложную конструкцию. На рис. 1 показана

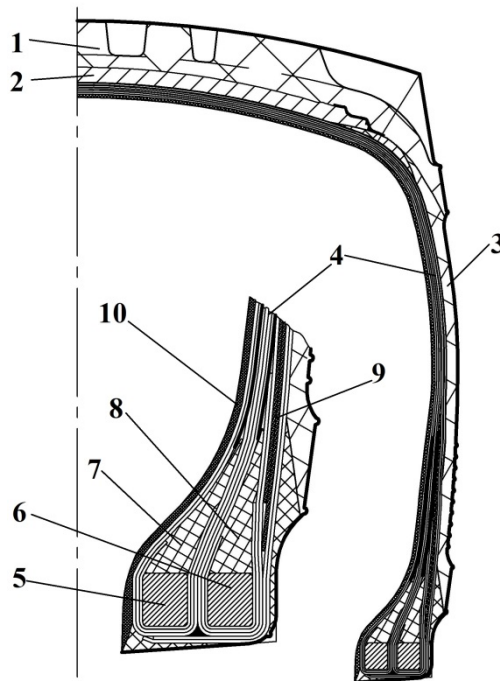


Рис. 1. Конструкция автомобильной шины: 1 – проектор; 2 – брекер;
3 – боковина; 4 – каркас; 5 – бортовое кольцо № 1, 6 – бортовое кольцо № 2;
7 – дополнительный шнур № 1; 8 – дополнительный шнур № 2;
9 – усиленная бортовая лента; 10 – герметизирующий слой.

типичная шина грузового автомобиля. В основании шины лежит резинотканевый кордный слой, который охватывает всю шину и заворачивается вокруг бортовых колец. Для увеличения жесткости части шины, которая непосредственно контактирует с дорожным покрытием, сверху на каркас накладывается брекер,

состоящий из нескольких слоёв корда. Внутренняя часть шины защищается от воздействия внешней среды специальными слоями (протектор и боковина), выполненными из резины.

Для решения задачи идентификации упрощенных динамических моделей шин предлагается использовать результаты расчетов на основе метода конечных элементов. Для тестирования разработанной методики идентификации упрощенных динамических моделей шин была подготовлена подробная конечно-элементная модель шины в одном из известных конечно-элементных программных комплексов (рис. 2). Эта модель учитывает сложную слоистую конструкцию шины и нелинейность её материалов.

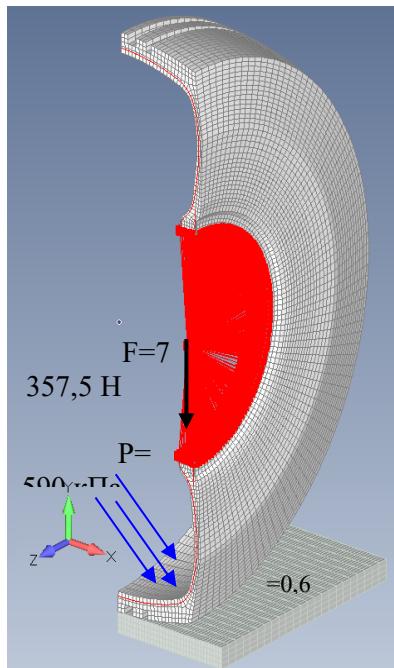


Рис. 2. Уточненная конечно-элементная модель шины.

Данная методика апробирована при выполнении следующих расчетов:

1. Определение пятна контакта шины с опорой при приложении различных видов нагрузок.
2. Определение собственных частот и форм колебаний шины.

Анализ результатов расчетов, выполненных с использованием уточненной конечно-элементной модели шины, показал пригодность разработанной методики моделирования для идентификации параметров динамических моделей шин.

Заключение

В настоящее время ведутся работы по оценке возможности применения упрощенных динамических моделей шин, идентифицированных на основе их подробных конечно-элементных моделей, для определения влияния конструкции шины на характеристики управляемости автомобиля, сравнении результатов расчетов с данными экспериментов. Другим возможным направлением практического развития работы будет выполнение уточнённых расчетов изнашивания автомобильных шин в процессе их эксплуатации.

Литература

1. J.Y.Wong. Theory of Ground Vehicles. John Wiley & Sons, 2001. 528 pp.
2. Pacejka H. B. Tire and Vehicle Dynamics, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
3. J.Y.Wong. Terramechanics and Off-Road Vehicle Engineering. 2nd Edition. Butterworth-Heinemann, 2009. 488 pp.
4. Liang, C., Allen, R., Rosenthal, T., Chrstos, J. et al., "Tire Modeling for Off-Road Vehicle Simulation," SAE Technical Paper 2004-01-2058, 2004. DOI: 10.4271/2004-01-2058.

СПЕКТРЫ КАК СВОЙСТВА МЕТРИКИ

Ханукаев Ю.И., Куракин В.А.

Московский физико-технический институт (государственный университет)
khan.yuri@gmail.com

Аннотация. Реальному пространству сопоставляется алгебра Клиффорда над полем комплексных чисел с метрикой, осциллирующей при малых значениях линейных координат и переходящей в евклидову при их больших значениях. Сопоставление не противоречит методам квантовой механики.

Введение

Разрешение вопросов, возникающих в наномеханике, состоит в учёте квантовых эффектов, что ведет к переосмыслению аксиом механики.

Положения о метрике, осциллирующей при малых значениях расстояний, основываются на анализе спектра атома водорода, а положение о сопоставлении реальному пространству алгебры Клиффорда – на анализе результата эксперимента Герлаха–Штерна по разделению в сильном неоднородном магнитном поле одного потока электронов на два, отклоняющихся в строго противоположных направлениях.

Основной текст

Введённая метрика позволяет без каких-либо дополнительных постулатов объяснить результаты всех экспериментов, которые в своё время лежали в основе создания квантовой механики:

- дискретное изменение энергии осциллятора, введённое Планком, для объяснения экспериментальной кривой спектрального распределения излучения произвольной полости при фиксированной температуре;
- интенсивность света, падающего на металл, влияет на количество выбиваемых электронов, не меняя их энергию; энергия выбитых электронов определяется частотой света;
- прерывистый характер потери энергии через механизм излучения объясняет особенность экспериментальной кривой молярной теплоемкости твердых тел при низких температурах;
- спектр атома водорода;
- дифракция частиц в поле рассеивающего центра в опыте Резерфорда (эффект Ааронова-Бома).

Метрика, оставаясь евклидовой на макро-масштабах:

- допускает существование произвольных устойчивых образований типа атом, молекула с её химическими связями, кристалл и прочее, прочее;
- находит объяснение подобие спектров всех элементов спектру водорода;
- допускает новые подходы к анализу прочности материалов;
- находит объяснение, явление самофокусировки лазеров и голография как постоянно существующее конформное отображение «всего пространства» в «любую бесконечно малую» его область.

Алгебра Клиффорда с трёхмерным вектором-генератором:

- содержит подалгебры действительных и комплексных чисел, подалгебру кватернионов;
- разграничивает понятия полярный и аксиальный вектор;
- позволяет уточнить выражение для силы Лоренца, учитывающее киральность заряда;
- понятие киральности, проявляющееся в химических реакциях и живой природе, может быть положено в основу построения модели турбулентности;
- допускает введение в динамике новых мер, отличных от классических;
- поскольку электромагнитное поле есть возмущенное состояние вакуума, то алгебра Клиффорда ставит проблему пересмотра уравнений Максвелла со всеми вытекающими последствиями.

Действия, предписываемые квантовой механикой, приобретают детерминированную трактовку:

- потенциальная энергия в макроописании определяет метрику, осциллирующую на нано-масштабах, и соответственно спектр частот высвечиваемой или поглощаемой электромагнитной энергии при переходах системы из одного устойчивого состояния в другое;
- электромагнитная энергия стоячих волн представляет собой волновую функцию, кинетическая энергия системы частиц – макроскопический эквивалент электромагнитной энергии;
- среднее значение любой физической величины, определяемой волновой функцией, является макроскопическим эквивалентом соответствующего понятия, природа которого определяется электромагнитным полем.

Литература

1. Ханукаев Ю.И. Элементы аналитической механики. Москва: МФТИ, 2022.

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ ТОРЦЕВОЙ ЗОНЫ СТАТОРА ПРИ ВНЕЗАПНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ В ТУРБОГЕНЕРАТОРАХ

Чишко С.Д.¹, Коровкин Н.В.¹, Ройтгарц М.Б.²

1 - Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

2 - АО «Силовые машины – ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашиэкспорт»

chishko_sd@spbstu.ru

Аннотация. Приведены методика и результаты моделирования нестационарных процессов в турбогенераторах и расчёт полей в торцевой зоне при этих режимах. Создана параметризованная модель шин турбогенератора. Предоставлена методика расчёта электродинамических сил на шины при нестационарных процессах. Методика позволяет определить наиболее неблагоприятные режимы и соответствующие им электродинамические воздействия на элементы конструкции турбогенераторов. Эффективность методики определяется быстродействием и достаточной точностью в рамках принятых и обоснованных допущений.

Введение

В связи с продолжающейся тенденцией по интенсификации крупных электрических машин, в частности, наиболее высокоиспользованных из них – турбогенераторов, остро стоит вопрос расчёта и анализа всех возможных режимов их работы. Более того, зачастую требуется провести расчёт электромагнитных полей в местах и сил на элементы конструкции, которые не в достаточной степени рассматриваются стандартными методиками либо в силу сложности, либо в силу малой значимости для основного расчёта.

Несмотря на постоянно ведущиеся работы по уточнению и дополнению расчётных методик, определённые нетипичные режимы эксплуатации крупных генераторов и поведение критически важных элементов конструкции в них не могут быть оценены на основе существующих наработок и требуют проведения дополнительных расчётов и исследований. Одним из таких узлов является обмотка статора, состоящая из пазовой части, лобовой части и соединительных и выводных шин, находящихся в торцевой зоне турбогенератора. Обмотка подвергается действию значительных электромагнитных сил, особенно при переходных процессах, а проблема повышенных вибраций выводных шин вплоть до их разрушения стоит очень остро в эксплуатации как отечественных, так и зарубежных турбогенераторов большой мощности.

При решении задач предварительного проектирования целесообразно применять упрощённые постановки задач, которые с достаточной степенью точности помогают оценить инженеру-конструктору приемлемость того или иного решения. Для этой цели при проектировании турбогенераторов в АО «Силовые Машины» применяется так называемая методика «вращающихся полей», позволяющая оценить характеристики поля и определить вихревые токи в элементах конструкции торцевой зоны турбогенератора.

В данной работе предлагается методика для расчёта электродинамических сил на обмотку статора и шины путём комбинирования расчётов по методике вращающихся полей и 3-мерном коммерческом пакете, рассмотренная на базе мощного турбогенератора.

Основной текст

В работе представлен алгоритм расчёта сил, действующих на обмотку статора и шины, в функции от времени. Реализация метода осуществляется путём поэтапного выполнения следующих шагов:

- Моделирование нагрузок при нестационарных процессах в пакете 1-мерного моделирования. Такими режимами являются внезапные короткие замыкания обмотки статора и резкий сброс/наброс вращающего момента турбины.
- Расчёт электромагнитных сил на пазовую и лобовую части обмотки статора по методике вращающихся полей от основного поля (ротора и статора) в функции от времени исходя из полученных результатов.
- Расчёт сил на шины в трёхмерной параметризованной модели в функции от времени от собственного поля шин при учёте вихревых токов, наводимых в проводящих элементах конструкции торцевой зоны в пакете конечно-элементного 3-мерного моделирования.
- Вычисление сил на шины от основного поля в торцевой зоне и получение полной силы на соединительные и выводные шины в функции от времени.

Моделирование нагрузок при нестационарном процессе

Принимаемые допущения при анализе нестационарных процессов в турбогенераторе при 1-мерном моделировании подробно описаны в [1].

Для устранения зависимости индуктивностей машины от положения ротора турбогенератор приводится к эквивалентной машине, две трёхфазные обмотки которой (смещённые на 30 электрических градусов) представлены в виде двух пар ортогональных обмоток на статоре: по продольной и поперечной осям.

После приведения величин ротора через соответствующие коэффициенты к величинам статора, можно составить эквивалентные схемы замещения турбогенератора при нестационарных процессах [2–4].

1-мерная модель, разработанная на базе полученной системы дифференциальных уравнений, рассмотренная в [5], позволяет рассчитать зависимости токов от времени при нестационарных процессах во всех контурах машины. Данные кривые в качестве нагрузок используются в методике вращающихся полей и при 3-мерном моделировании полей.

Моделирование основного поля генератора по методике вращающихся полей

Расчёт основного электромагнитного поля и сил на пазовую и лобовую часть обмотки статора проводится в адаптированной методике вращающихся полей. Для расширения функционала методики вращающихся полей (изначально позволяющего рассчитывать только установившиеся режимы) до возможности анализа нестационарных процессов выполнены модификации:

- Изменена модель турбогенератора путём добавления второй обмотки на роторе, которая выступает в качестве демпферной при расчёте нестационарных процессов.
- Изменён модуль процессинга, который осуществляет последовательный запуск методики вращающихся полей для всех моментов времени и с мгновенными значениями величин нагрузок (токов во всех контурах, полученных из 1-мерного моделирования нестационарного процесса). При этом произведена оптимизация быстродействия расчёта, когда для каждого последующего решения используются не нулевые начальные условия, а результаты предыдущего шага.

В результате на каждом шаге сохраняются решения полей в продольном сечении генератора в виде вращающейся с частотой ω волны с синусоидальным распределением компонент поля вдоль угловой координаты φ :

$$X(r, \varphi, z, t) = X_m(r, z) \cdot \sin(\omega \cdot t - p \cdot \varphi + \psi_x(r, z)) = X_m(r, z) \cdot \sin(\psi_x(r, z) - p \cdot \varphi), \quad (1)$$

где X_m – амплитуда, ψ_x – начальная фаза, p – число пар полюсов (пространственный порядок) волны. Здесь время t – локальное внутреннее время каждого шага, оно принимается равным нулю для каждого внешнего шага расчёта.

Таким образом, после исполнения данного шага расчёта формируются массивы радиальной, угловой и аксиальной сил, действующих на пазовую и лобовую часть обмотки статора, а также три компоненты поля основного поля магнитной индукции (ротора и статора) в лобовой части турбогенератора.

Моделирование собственного поля шин генератора в 3-мерном пакете

На данном этапе осуществляется расчёт компонентов сил от собственного поля, действующих на шины турбогенератора. Для решения данной задачи используются нагрузки, полученные в 1-мерной модели, которые прикладываются к конечно-элементной модели шин, представленной на рис. 1.

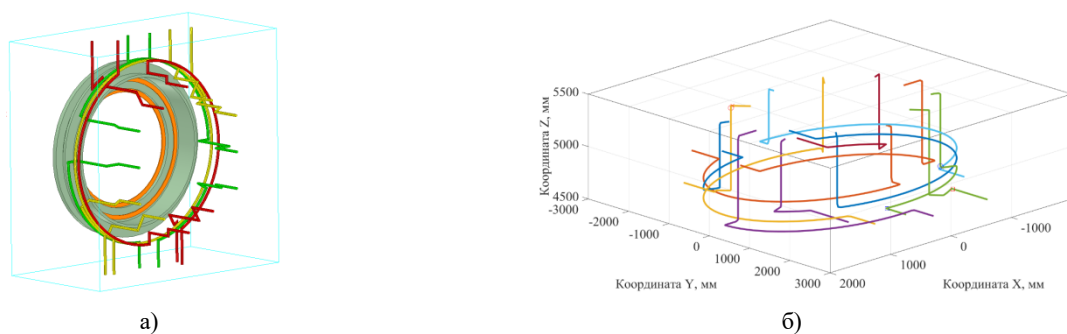


Рис. 1. Модель для вычисления сил на шины от действия собственного поля: а) Общий вид геометрии модели, где представлена расчётная область, нажимная плита, медные экраны и шины трёх фаз U, V, W обмотки (жёлтый, зелёный и красный, соответственно) со стороны «В»; б) Схема центральных линий выводных шин мощного турбогенератора в модуле постпроцессинга.

После окончания расчёта в 3-мерном пакете для каждой из шин на указанных шагах по времени автоматически заполняются таблицы данных. Для каждой шины в модели задана средняя линия, на которой с заданным ранее количеством точек по длине сохраняются 10 параметров:

1. текущая относительная координата (длина линии) L от её начала и координаты r, φ, z ;
2. компоненты плотности тока J_r, J_φ и J_z ;
3. компоненты собственного поля $B_{r3D}, B_{\varphi3D}$ и B_{z3D} .

Вычисления сил на шинах турбогенератора

Зная угол связи пространства трёхмерной модели шин и плоскости решения методики вращающихся полей Ang , по известным координатам точек средней линии шин можно определить величины внешнего поля для них, извлекая их из файлов решений методики вращающихся полей через дополненное уравнение (1):

$$X_{2,5D}(r_{3D}, \varphi_{3D}, z_{3D}, t) = X_m(r_{3D}, z_{3D}) \cdot \sin(\psi_x(r_{3D}, z_{3D}) - p \cdot \varphi_{3D} - p \cdot Ang). \quad (2)$$

После извлечения полевого массива из методики вращающихся полей можно определить все компоненты погонных сил, действующих на шины, как:

$$\begin{aligned} f_r &= S \cdot (J_\varphi \cdot (B_{z3D} + B_{z2.5D}) - J_z \cdot (B_{\varphi3D} + B_{\varphi2.5D})), \\ f_\varphi &= S \cdot (J_z \cdot (B_{r3D} + B_{r2.5D}) - J_r \cdot (B_{z3D} + B_{z2.5D})), \\ f_z &= S \cdot (J_r \cdot (B_{\varphi3D} + B_{\varphi2.5D}) - J_\varphi \cdot (B_{r3D} + B_{r2.5D})), \end{aligned} \quad (3)$$

где S – площадь поперечного сечения шины.

Определение трёх компонентов погонных сил является конечным решением задачи по нахождению сил, действующих на шины. При необходимости можно также находить силы на конкретный участок шины путём интегрирования погонной шины, например, методом трапеций. На рис. 2 представлен пример рассчитанных погонных сил на шину мощного турбогенератора.

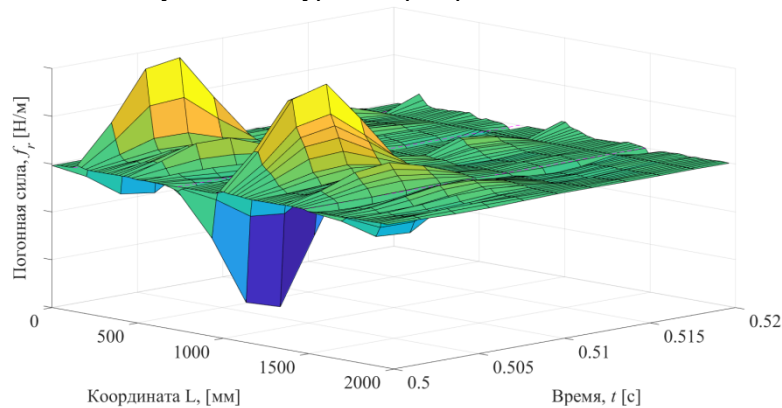


Рис. 2. Пример распределения радиальной компоненты погонных сил по шине мощного турбогенератора.

При этом, стоит отметить, согласно [6]: «Электродинамические силы, возникающие при коротких замыканиях, вызывают наибольшие деформации обмотки и определяют конструкцию крепления. Но наряду с электродинамическими силами, на износ оказывают влияние, особенно при нормальных режимах, и силы, вызываемые вибрацией других частей генератора. Эти силы также должны учитываться при конструировании крепления обмоток».

Выводы

Анализ результатов, полученных в данной работе, позволяет сделать следующие выводы:

1. Адаптированная методика является эффективным и достаточно быстрым способом оценки сил, действующих на обмотку статора в пазовой и лобовой части при нестационарных процессах.
2. Предложенный алгоритм расчёта торцевой зоны турбогенератора позволяет находить также распределение погонных сил вдоль соединительных и выводных шин.

Литература

1. А. И. Важнов // Переходные процессы в машинах переменного тока, Л.: Энергия, 1980. 256 с.
2. В. В. Титов, Г. М. Хуторецкий, Г. А. Загородная, Г. П. Варганьян, Д. И. Заславский, И. А. Смотров // Турбогенераторы: Расчёт и конструкция, Л.: Энергия, 1967. 896 с.
3. P. C. Krause, O. Wasynczuk, S. D. Sudhoff // Analysis of electric machinery and drive systems, 2 ed., John Wiley & Sons Ltd, 2002. 613 с.
4. I. Boldea // Synchronous generators, Taylor & Francis LLC, 2006. 425 с.
5. S. D. Chishko, A. S. Adalev, N. V. Korovkin // Modeling of sudden six-phase and three-phase short circuits of a six-phase turbogenerator, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 643, 2019.
6. М. Ф. Юдов // Вибрация и деформация обмоток статоров синхронных машин, М.: Энергия, 1968.

УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ БЛИСКА ПЕРВОЙ СТУПЕНИ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ В РЕАЛИЗУЕМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ НА МИКРОМАСШТАБНОМ УРОВНЕ

Шаняевский А.А.^{1,2}, Солдатенков А.П.¹, Никитин А.Д.², Никитин И.С.²

1 - *Авиационный регистр Российской Федерации, Московская область, Химки*

2 - *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

106otdel@mail.ru

Аннотация. Проанализированы закономерности возникновения и распространения усталостной трещины в лопатках блиска (диск с лопатками) силовой установки ТА12-60, изготовленного из титанового сплава ВТ8. Продемонстрированы особенности формирования очага разрушения под поверхностью, соответствующие зарождению усталостной трещины на микроскопическом масштабном уровне. Проанализированы условия нагружения лопаток на основе данных вибрографирования и проведено численное моделирование зарождения и роста усталостной трещины в лопатках исследуемого блиска с использованием мультирежимной модели усталостного разрушения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00705).

Усталостное разрушение материалов принято разделять на области малоциклового (МЦУ), многоциклового (МНЦУ) и сверхмногоциклового (СВМУ) усталости. В соответствии с иерархией масштабов протекания процессов накопления повреждений и деформирования в рамках физической мезомеханики рассматриваются три масштаба – микро-, мезо- и макромасштаб, каждому из которых соответствуют свои механизмы при зарождении и развитии трещины [1]. Переход между разными масштабными уровнями происходит в некотором интервале напряжений и представляет собой область бифуркации, когда с разной вероятностью могут быть реализованы механизмы накопления повреждения, присущие разным масштабам [2]. Было показано [3, 4], что описание усталостного поведения материалов следует рассматривать в направлении возрастания уровня напряжения с учетом различия в поведении металлических материалов на различной основе в зависимости от соотношения $\sigma_{-1}/\sigma_{0,2}$ для, где σ_{-1} – так называемый предел усталости, $\sigma_{0,2}$ – предел текучести. На основе предложенного подхода рассмотрения процесса усталости металлов проведено исследование разрушения лопатки блиска (рис. 1).



Рис. 1. Вид блиска первой ступени ВСУ ТА12-60. Стрелкой показано место отделившейся лопатки.

В процессе эксплуатации силовой установки ТА12-60 наблюдались редкие случаи разрушения широкохордных лопаток блиска при наработках не более 835 часов (1835 циклов «взлет-посадка»), что соответствует наработке до первой контрольной проверки в эксплуатации. Блиск изготовлен из титанового сплава ВТ8. Выполнен комплекс металлофизических исследований, включавший фрактографический анализ, вибрографирование лопаток на специальном стенде и численное моделирование зарождения и роста усталостных трещин на основании мультирежимной модели усталостного разрушения [5]. Предложенная модель основана на теории циклической повреждаемости и позволяет, наряду с оценкой долговечности, прогнозировать механизм зарождения трещины и её траекторию роста в элементе конструкции.

На примере разрушения лопатки блиска (см. рис. 1), изготовленного АО «УАП «Гидравлика» и наработавшего с начала эксплуатации 141 час (176 циклов «взлет-посадка»), рассмотрены закономерности

зарождения и распространения усталостной трещины на основе фрактографического анализа с использованием электронной микроскопии. Продемонстрировано, что разрушение лопаток происходит с формированием очага трещины в виде фасетки скола по альфа-фазе под поверхностью со стороны корыта лопатки (рис. 2).

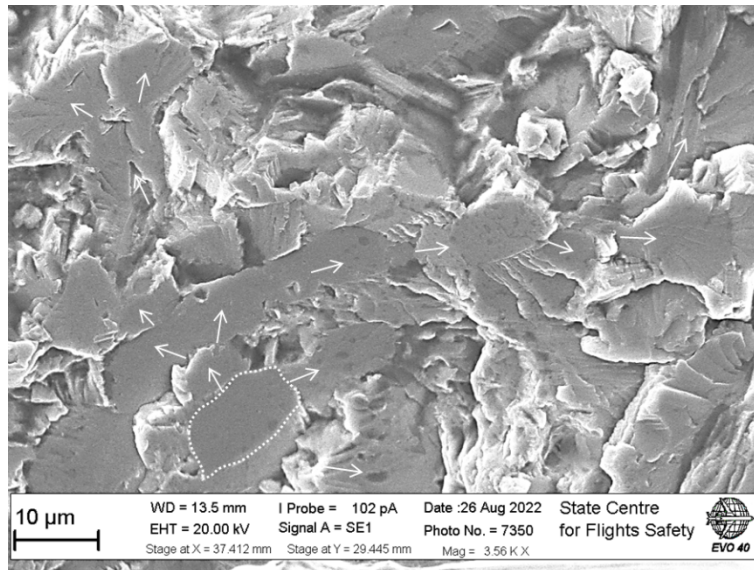


Рис. 2. Подповерхностный очаг, сформированный при раскалывании материала по альфа-фазе (выделено пунктиром). Стрелками указано последовательное формирование фасеток при продвижении трещины.

Создан специальный стенд, позволивший провести вибрографирование широкохордных лопаток блиска в широком диапазоне частот. Выявлено, что лопатки могут испытывать резонансные колебания с различными по форме и по частоте возбуждения в набегающем потоке. По месту расположения очага разрушения показано, что повреждающей нагрузкой наиболее вероятно является гармоника с частотой около 1550 Гц. В связи с этим даже при наработке 141 час, количество циклов нагружения разрушившейся лопатки составляет около 7.9×10^8 циклов. Это область микромасштабного уровня – сверхмногоциклового усталости металлов.

Проведено комплексное исследование разрушенного блиска с использованием методов численного моделирования. Оценены собственные частоты конструкции и соответствующие им формы колебаний. Для полученного спектра собственных частот проведено математическое моделирование процессов зарождения и роста трещины с использованием мультирежимной модели усталостного разрушения. Результаты математического моделирования сопоставлены с результатами фрактографического исследования и вибрографирования на специальном стенде. Показано, что наиболее вероятной причиной зарождения усталостной трещины является высокочастотное циклическое нагружение с частотой, близкой к 1550 Гц. Оценка количества циклов до разрушения лопатки указывает на процесс накопления повреждений в области сверхмногоциклового усталости. Следовательно, результаты численного моделирования и вибрографирования доказывают, что зарождение трещины происходит в режиме высокочастотного нагружения.

Заключение

Разрушение лопаток блиска происходит в области сверхмногоциклового усталости, а комплексное нагружение с учетом вибрационных нагрузок приводит к снижению усталостной долговечности конструкции.

Литература

1. В. Е. Панин // Физическая мезомеханика материалов. 2015. Т. 1, 460 с. Т. 2, 462 с.
2. А. А. Shanyavskiy, А. Р. Soldatenkov // Metallic materials fatigue behavior: Scale levels and ranges of transition between them, Int. J. Fatigue, 158 2022. 106773
3. А. А. Шаняевский, А. Д. Никитин, А. П. Солдатенков // Сверхмногоциклового усталость металлов. Синергетика и физическая мезомеханика. 2022. 496 с.
4. А. А. Шаняевский, А. П. Солдатенков // Масштабные уровни предела усталости металлов, Физическая мезомеханика, 22:1 2019. 44–53
5. I. S. Nikitin, N. G. Burago, A. D. Nikitin // Damage and Fatigue Fracture of Structural Elements in Various Cyclic Loading Modes, Mechanics of Solids, 57:7 2022. 1793–1803

ФОРМИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БЕТОННОЙ КРЕПИ В ПРОЦЕССЕ ПРОХОДКИ ШАХТНОГО СТВОЛА

Шардаков И.Н., Шестаков А.П., Глот И.О., Епин В.В., Гусев Г.Н., Цветков Р.В.

*Институт механики сплошных сред УрО РАН
shap@icmm.ru*

Аннотация. В процессе проходки шахтного ствола формируются растягивающие напряжения в передовой бетонной крепи достаточные для образования трещин. Такие трещины не вызывают крупномасштабных разрушений ствола, но нарушают его целостность и могут стать причиной водопритока. В работе рассмотрены основные факторы, влияющие на величину растягивающих напряжений. К ним относятся: технологическая схема проходки и упругое деформирование грунта, характерное для стадии разгрузки. Из полученных результатов следует: для рассмотренных схем проходки максимальные растягивающие напряжения отличаются в 13 раз, учет упругих характеристик грунта изменяет растягивающее напряжение крепи более чем в 2 раза.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 22-19-00108.

Введение

Шахтный ствол – это сооружение, обеспечивающее доступ к месту залегания полезных ископаемых. Как правило, он представляет собой вертикальную, чаще цилиндрическую, полость в земной толще. Его стенки укрепляют бетоном, железобетоном, чугунными тубингами или используют комбинированные способы. Проходка ствола выполняется поэтапно. Она включает углубление ствола на заданную величину и укрепление стенок, образовавшихся после выемки грунта. Последовательное выполнение этих этапов позволяет сформировать шахтный ствол необходимой глубины.

В работе рассмотрено укрепление стенок ствола с помощью бетона. На практике такой вариант используется в качестве первого слоя при формировании многослойной комбинированной крепи или как основной метод крепления. В процессе проходки могут происходить аварии, связанные с разрушением бетонной крепи, вывалом грунта и затоплением ствола [1, 2]. Также возможен сценарий, при котором в бетонной крепи образуются трещины, нарушающие целостность ограждения и приводящие к водопритоку в ствол. Подобные ситуации не всегда допустимы, в частности, при проходке стволов калийных месторождений стараются обеспечить их полную герметичность.

Обеспечение сплошности бетонной крепи требует определения ее напряженно-деформированного состояния (НДС). Решение этой задачи может быть выполнено методами математического моделирования [3–5], однако достоверность результатов зависит от модели, описывающей механическое поведение грунта, и от точности описания технологического процесса проходки.

В работе рассмотрены основные факторы, влияющие на значение напряжений, возникающих в бетонной крепи при проходке. Первый фактор – этапность ее формирования (технологическая схема проходочного цикла), второй заключается в учете особенности деформирования грунта в тех зонах, где происходит разгрузка.

В процессе деформирования грунта выделяют стадии нагружения и разгрузки. Нагружение характеризуется упругопластическим деформированием. При разгрузке реализуются только упругие деформации. В геотехнике стадию нагружения достаточно часто описывают в рамках линейной теории упругости, при этом в качестве модуля упругости принимают значение, соответствующее секущему или касательному модулю упругопластического деформирования [6]. Такой модуль называют модулем деформации. На стадии разгрузки грунт ведет себя упруго, с модулем в несколько раз превышающим модуль деформации [7–9]. Как правило, при инженерно-геологических изысканиях определяют модули деформации. Они используются для вычисления осадок фундаментов под воздействием вышележащих конструкций. Для таких задач применение модуля деформации оправдано, поскольку под фундаментом практически всюду реализуется упругопластическое нагружение грунта. В случае проходки ствола этот вид нагружения имеет место лишь в небольшой зоне расчетной области. В ее большей части реализуется стадия разгрузки, для корректного описания которой следует использовать модуль упругости.

Описание расчетной схемы и результаты

Проходка ствола выполняется поэтапно. Четыре первых этапа показаны на рис. 1. На нулевом этапе происходит деформирование грунта под действием собственного веса и формирование в нем начального напряженного состояния. На первом этапе осуществляется первая выемка, на втором – устанавливается первый фрагмент крепи и производится вторая выемка. На следующих этапах выполняются те же операции в той же последовательности, что и на втором этапе. В этом состоит первая схема проходки. Вторая схема отличается от первой тем, что формирование крепи отстает от выемки грунта на один шаг проходки.

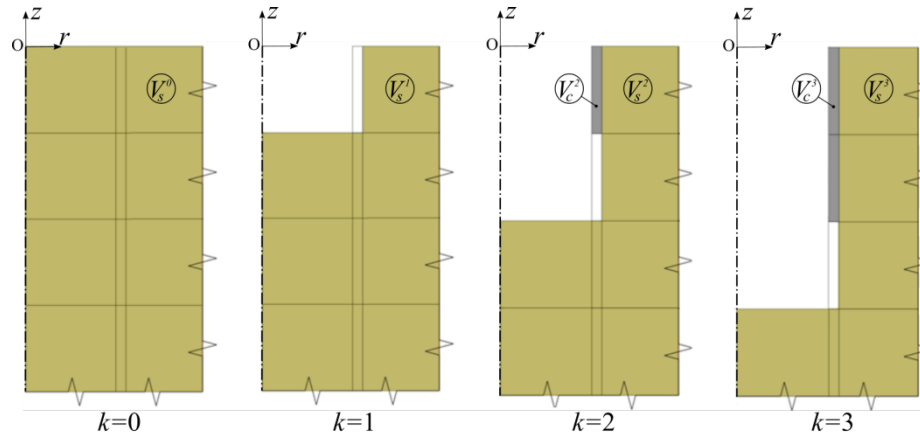


Рис. 1. Этапы проходки ствола, V_c – область бетонирования, V_s – грунт.

Диаметр ствола составляет 10 метров. Толщина бетонного ограждения 0,5 метра. В качестве грунта принята каменная соль. Ее деформационные и прочностные характеристики взяты из работы [7]. Они приведены в табл. 1. Рассмотрено три модели деформирования грунта *I*, *II* и *III*. Их графические представления даны на рисунке 2. Где: $f(\sigma)$ — поверхность текучести Кулона-Мора [10]; σ_v, ε_v — объемные напряжение и деформация; τ_i, γ_i — интенсивности касательных напряжений и угловых деформаций. Модель *I* описывает деформирование только на стадии нагрузки, *II* — только разгрузки, *III* — описывает деформирование на обеих стадиях.

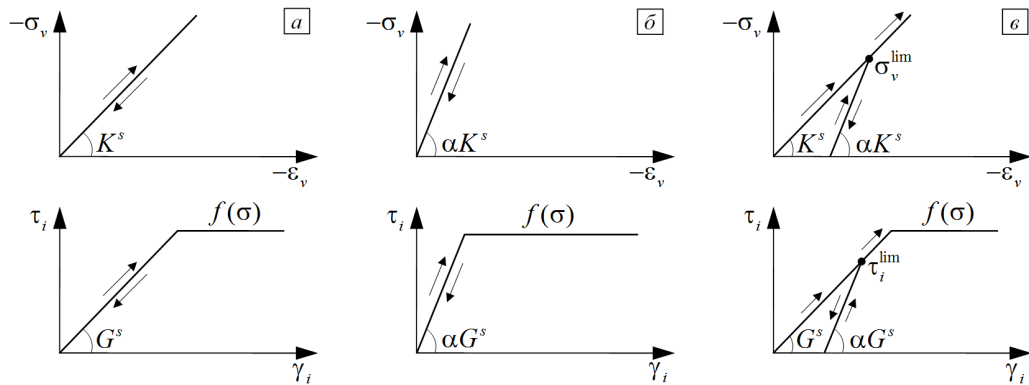


Рис. 2. Графическое представление моделей грунта: *I* – (а), *II* – (б), *III* – (в); стрелками показаны траектории деформирования при нагрузке и разгрузке.

Таблица 1. Механические свойства.

Среда	K , ГПа	G , ГПа	α	ρ , кг/м ³	C , МПа	φ , град
Бетон	17,7	14,4		2300		
Грунт	1,85	1,23	5	2100	3,5	51

Рассмотрены напряжения крепи σ_z^h вдоль границы между бетоном и окружающим грунтом. Здесь и далее эта величина будет обозначаться как σ_z^h . Графики σ_z^h , соответствующие проходке до отметок 150 и 1000 метров, показаны на рисунке 3 и 4.

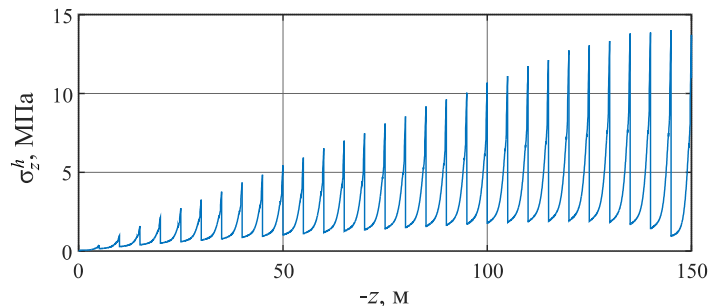


Рис. 3. График напряжения σ_z^h , первая схема проходки, глубина проходки 150 метров, модель *I*.

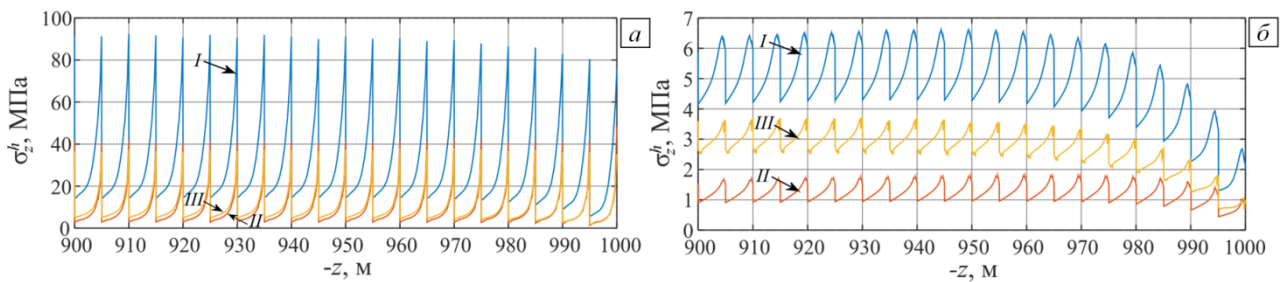


Рис. 4. Графики напряжений σ_z^h , показанные для глубин от 900 до 1000 м, (а) — соответствуют первой схеме проходки, (б) — второй (индексы I, II и III указывают на модель грунта).

Заключение

Рассмотрены основные факторы, влияющие на напряженное состояние бетонной крепи в процессе проходки шахтного ствола: этапность, технологическая схема проходки, жесткостные характеристики грунта на этапе разгрузки.

Учет этапности проходки ствола имеет первостепенное значение при оценке напряженного состояния крепи, поскольку последовательное образование новых механических связей в расчетной схеме происходит в условиях, когда существующие части схемы уже находятся в напряженном состоянии. Новые связи формируются в области бетонирования очередного сегмента бетонной крепи. Следует отметить, что после набора прочности новым сегментом он становится неразрывно связанным с окружающим грунтом и существующей бетонной крепью. Это обеспечивает совместное деформирование всех частей схемы при последующем углублении ствола.

В работе рассмотрено две технологических схемы проходки. Согласно первой схеме бетонирование выполняется до текущего положения дна выработки и затем осуществляется следующая выемка грунта. В соответствии со второй схемой бетонирование отстает от выемки на один шаг проходки. Из полученных результатов следует: максимальное вертикальное растягивающее напряжение, отвечающее первой схеме, превышает аналогичное значение при второй схеме почти в 13 раз. Таким образом, схема проходки играет важную роль в формировании напряжений крепи.

Исследованы три модели механического деформирования грунта. Первая из них соответствует деформированию с модулем деформации (нагрузка), вторая с модулем упругости (разгрузка), третья модель комбинированная. В зависимости от модели максимальные значения растягивающих напряжений в бетонной крепи (σ_z^h) соотносятся следующим образом: значение по модели I в 3,6 раза больше, чем значение, рассчитанное по модели II; напряжения, полученные по модели III, в 2 раза превышают напряжения, вычисленные по модели II. Следовательно, выбор модели грунта очень важен, так как значение напряжений в крепи может отличаться в разы. Более достоверными, по мнению авторов данной работы, следует считать результаты, полученные по комбинированной модели, поскольку она одновременно учитывает жесткостные характеристики грунта при нагрузке и разгрузке. Следует заметить, что в работах [3–5], посвященных проходке шахтных стволов, модуль разгрузки грунта не учитывается, то есть на данный момент этому фактору не уделяется должного внимания.

Следует отметить, что используемые в работе модели каменной соли не учитывают нелинейное упругопластическое деформирование при нагружении, но позволяют оценить вклад упругих свойств соли на стадии разгрузки.

Литература

1. Ю.П. Ольховиков // Крепь капитальных выработок калийных и соляных рудников. М.: Недра, 1984. 238 с.
2. Д.М. Казикаев, С.В. Сергеев // Диагностика и мониторинг напряженного состояния крепи вертикальных стволов. М.: Горная книга, 2011. 244 с.
3. Ю.А. Сильченко, М.С. Плешко // О проблеме учета технологии работ при определении параметров крепи вертикальных стволов, ГИАБ. 2020. № 11. С. 96-107
4. Т.Ф. Харисов, О.Д. Харисова, Д.Ю. Князев // Предотвращение нарушений крепи стволов при строительстве по совмещенной технологической схеме, Известия ТулГУ. Науки о земле. 2018. № 4. С. 264-274.
5. X. Zhao, L. Deng, X. Zhou, Y. Zhao, Z. Guo // A primary support design for deep shaft construction based on the mechanism of advanced sequential geopressure release, Processes. 2022. Vol. 10. 1376.
6. Н.А. Цыгович // Механика грунтов (краткий курс). М.: Высшая школа, 1983. 288 с.
7. В.А. Асанов, В.М. Жигалкин, И.Л. Паньков, О.М. Усольцева, П.А. Цой, А.В. Евсеев // Определение параметров деформирования соляных пород при объемном нагружении, ГИАБ. 2009. № 4. С. 334-342.
8. М.Н. Тавостин, А.Е. Кошелев, Ю.В. Осипов // Исследование физико-механических свойств каменной соли с учетом предварительного всестороннего нагружения, ГИАБ. 2015. № 2. С. 89-96.
9. Н.Л. Бельтюков, А.В. Евсеев // Сопоставление упругих свойств горных пород, Вестник ПГТУ. Геология, нефтегазовое и горное дело. 2010. Т. 9, № 5. С. 82-85.
10. А.Б. Фадеев // Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. 221 с.

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ЕЕ ПРИЛИВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Шатина А.В., Борец А.С.

МИРЭА - Российский технологический университет, Москва, Россия
shatina_av@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию орбитального движения искусственного спутника, движущегося в гравитационном поле вязкоупругой планеты, которая, в свою очередь, движется в гравитационном поле массивного притягивающего центра и спутника. Планета моделируется однородным изотропным вязкоупругим телом, а остальные небесные тела – материальными точками. Под влиянием гравитационных полей притягивающего центра и естественного спутника в вязкоупругом теле планеты возникают приливные горбы, которые оказывают влияние на ее гравитационный потенциал и являются возмущающим фактором орбитального движения искусственных спутников на низколежущих орбитах. Уравнения движения ИСЗ выписываются в переменных Делоне. Проводится процедура усреднения по «быстрым» угловым переменным.

Введение

Одними из основных возмущающих факторов, влияющих на движение ИСЗ на низких орбитах, являются сжатие Земли вдоль оси вращения и приливные деформации Земли, вызванные притяжением Солнца и Луны. Основной моделью представления потенциала сил, вызванных приливными деформациями в теле Земли, является модель Лява. В настоящее время в соответствии с соглашениями IERS (2010) [1] приливные деформации регистрируются в виде небольших поправок к коэффициентам геопотенциальной модели.

В данной работе рассматривается модельная задача о движении ИСЗ в гравитационном поле деформируемой планеты. Гравитационный потенциал вращающейся вязкоупругой планеты, движущейся в гравитационном поле массивного притягивающего центра и спутника, был получен в работе [2] на основе метода разделения движений, разработанного В.Г. Вильке [3].

Гравитационный потенциал вязкоупругой планеты

Рассмотрим задачу о движении искусственного спутника (ИСЗ) в гравитационном поле вязкоупругой планеты (Земли), движущейся в гравитационном поле массивного притягивающего центра (Солнца) и естественного спутника (Луны). Предполагается, что в естественном недеформированном состоянии планета имеет форму шара радиуса r_0 . Масса планеты равна m . Естественный спутник будем моделировать материальной точкой F с массой m_2 , а притягивающий центр – материальной точкой O с массой m_1 . Считаем, что

$$m_2 \ll m \ll m_1, \quad |\mathbf{R}_2| \ll |\mathbf{R}_1|. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{R}_1 = \overline{OC}$ – радиус-вектор центра масс системы «планета-спутник», $\mathbf{R}_2 = \overline{DF}$, где D – центр масс планеты.

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$, подвижную систему координат $Dx_1x_2x_3$, связанную с планетой; систему осей Кенига $Dx'Y'Z'$. Концы векторов $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ описывают заданные кеплеровские эллиптические орбиты в плоскости OXY . В системе координат $OXYZ$:

$$\mathbf{R}_i = R_i (\cos(g_i + \vartheta_i), \sin(g_i + \vartheta_i), 0), \quad R_i = a_i (1 - e_i^2) (1 + e_i \cos \vartheta_i)^{-1} \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где $a_i, e_i, g_i, \vartheta_i$ – большая полуось, эксцентриситет, долгота перицентра, истинная аномалия орбиты конца вектора \mathbf{R}_i ($i = 1, 2$). Параметры орбит a_i, e_i, g_i ($i = 1, 2$) постоянны, а истинные аномалии зависят от времени:

$$\dot{\vartheta}_i = (1 + e_i \cos \vartheta_i)^2 (1 - e_i^2)^{-3/2} n_i, \quad (i = 1, 2), \quad n_1 = \sqrt{f m_1 a_1^{-3}}, \quad n_2 = \sqrt{f (m + m_2) a_2^{-3}}, \quad (3)$$

где n_i ($i = 1, 2$) – соответствующие средние движения, f – универсальная гравитационная постоянная.

Предполагаем, что планета равномерно вращается вокруг оси, имеющей постоянное направление в системе координат $OXYZ$. Оператор перехода от подвижной системы координат $Dx_1x_2x_3$ к системе осей Кенига $Dx'Y'Z'$ можно представить в виде произведения трех ортогональных матриц: $\Gamma = \Gamma_3(\psi)\Gamma_1(\theta)\Gamma_3(\varphi)$,

где

$$\Gamma_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \psi, \theta, \varphi \text{ – углы Эйлера [4].}$$

Направим ось Dx_3 по вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Тогда углы Эйлера ψ, θ постоянны, а угол φ линейно зависит от времени. Без ограничения общности можно считать, что $\psi \equiv 0, \theta \equiv \theta_0$. Поэтому оператор Γ и обратный к нему представляются равенствами:

$$\Gamma = \Gamma_1(\theta_0)\Gamma_3(\varphi), \Gamma^{-1} = \Gamma_3(-\varphi)\Gamma_1(-\theta_0), \varphi = \omega t + \varphi(0), \omega = |\boldsymbol{\omega}| = const. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение единичные векторы, задаваемые в подвижной системе координат $Dx_1x_2x_3$:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \Gamma^{-1}\mathbf{R}_1/R_1, \boldsymbol{\xi}_2 = -\Gamma^{-1}\mathbf{R}_2/R_2.$$

Формула для гравитационного потенциала вязкоупругой планеты во внешней точке M единичной массы с радиус-вектором $\mathbf{R} = \overline{DM}$ в рамках описанной постановки задачи с учетом условий (1) имеет вид [2]:

$$\Pi = -\frac{fm}{R} - \frac{3fm^2r_0\Phi(v)}{140\pi ER^3} \left\{ \omega^2 - 3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_r)^2 - \sum_{j=1}^2 \frac{3fm_j}{R_j^3} \left[1 - 3(\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{e}_r)^2 \right] \left(1 + \frac{3\chi R_j}{R_j} \right) - \sum_{j=1}^2 \frac{18\chi fm_j}{R_j^3} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j, \mathbf{e}_r)(\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{e}_r) \right\}. \quad (5)$$

Здесь E, v, χ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент внутреннего вязкого трения материала планеты соответственно (постоянные величины), $\Phi(v) = (1+v)(9v+13)(5v+7)^{-1}$, $R = |\mathbf{R}|$, \mathbf{e}_r – единичный вектор, направленный по \mathbf{R} и задаваемый в системе координат $Dx_1x_2x_3$. Слагаемые с ω и $\boldsymbol{\omega}$ в формуле (5) отвечают за возмущения, связанные со сжатием планеты вдоль оси вращения, а остальные слагаемые в фигурной скобке – за возмущения, связанные с приливными деформациями планеты. Величины $R_j, \boldsymbol{\xi}_j$ ($j=1,2$) в формуле (5) являются заданными функциями времени согласно формулам (2)–(4).

Уравнения движения искусственного спутника Земли в переменных Делоне

Рассмотрим систему координат $Dx'_1x'_2x'_3$, в которой ось Dx_3 совпадает с осью подвижной системы координат, связанной с планетой, ось Dx'_1 – с осью Dx' , а плоскость $Dx'_1x'_2$ – с экваториальной плоскостью планеты. Оператор перехода от системы координат $Dx'_1x'_2x'_3$ к $DXYZ'$ задается матрицей $\Gamma_1(\theta_0)$, а от подвижной системы координат $Dx_1x_2x_3$ к $Dx'_1x'_2x'_3$ – матрицей $\Gamma_3(\varphi)$.

Будем изучать орбитальное движение спутника (ИСЗ) массы μ . В качестве невозмущенной задачи рассмотрим движение спутника в гравитационном поле планеты, моделируемой однородным твердым шаром. В этом случае орбита спутника является кеплеровской. В качестве орбиты невозмущенного движения будем рассматривать кеплеровскую эллиптическую орбиту. Пространственная эллиптическая орбита описывается следующими величинами: большой полуосью эллипса a , эксцентриситетом эллипса e , наклоном орбиты спутника i (углом между плоскостью $Dx'_1x'_2$ и плоскостью орбиты спутника), долготой восходящего узла h (углом между осью Dx'_1 и линией DN пересечения плоскости орбиты спутника с плоскостью DXY'), долготой g перицентра π от восходящего узла DN , (π – ближайшая к центру Земли D точка орбиты спутника), истинной аномалией ϑ .

Длина радиус-вектора точки M и единичный вектор $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$ в системе координат $Dx'_1x'_2x'_3$ выражаются через величины a, e, i, h, g, ϑ следующим образом [5]:

$$R = a(1-e^2)(1+e\cos\vartheta)^{-1}, \mathbf{e}_R = (e_{R1}, e_{R2}, e_{R3}), e_{R1} = \cos h \cos(g+\vartheta) - \sin h \cos i \sin(g+\vartheta), \\ e_{R2} = \sin h \cos(g+\vartheta) + \cos h \cos i \sin(g+\vartheta), e_{R3} = \sin i \sin(g+\vartheta).$$

Движение спутника получим в канонических переменных Делоне L, G, H, l, g, h [5]. Здесь g, h – ранее введенные элементы орбиты спутника, l – средняя аномалия. В невозмущенной задаче $l = n(t-t_\pi)$, где t – текущий момент времени, t_π – момент времени прохождения спутника через перицентр, $n = \sqrt{f\mu a^{-3}}$ – среднее движение спутника по орбите. Переменные Делоне L, G, H выражаются через большую полуось, эксцентриситет и наклонение орбиты равенствами:

$$L = \sqrt{f_0\mu^2 a}, G = \sqrt{f_0\mu^2 a(1-e^2)}, H = \sqrt{f_0\mu^2 a(1-e^2)} \cos i, f_0 = fm. \quad (6)$$

Длина R радиус-вектора точки M и истинная аномалия ϑ являются функциями переменных Делоне L, G, l . Зависимость R, ϑ от этих переменных носит неявный характер и выражается посредством соотношений:

$$R = \frac{G^2}{f_0\mu^2(1+e\cos\vartheta)}, \cos w = \frac{e+\cos\vartheta}{1+e\cos w}, l = w - e\sin w. \quad (7)$$

Здесь w – эксцентрическая аномалия, а третье уравнение в (7) называется уравнением Кеплера.

Гамильтониан невозмущенной задачи с потенциальной энергией $\Pi_0 = -f_0\mu R^{-1}$ зависит только от одной переменной Делоне $L: \mathcal{H}_0 = -f_0^2\mu^3/(2L^2)$. Возмущенное движение определяется дополнительным членом в выражении для гамильтониана

$$\varepsilon\mathcal{H}_1 = -\frac{3f_0m\mu r_0\Phi(v)}{140\pi ER^3} \left\{ \omega^2 - 3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_r)^2 - \sum_{j=1}^2 \frac{3fm_j}{R_j^3} \left[1 - 3(\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{e}_r)^2 \right] \left(1 + \frac{3\chi\dot{R}_j}{R_j} \right) - \sum_{j=1}^2 \frac{18\chi fm_j}{R_j^3} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j, \mathbf{e}_r)(\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{e}_r) \right\}. \quad (8)$$

А уравнения возмущенного движения запишутся в виде:

$$\dot{L} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l}, \quad \dot{G} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g}, \quad \dot{H} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h}, \quad \dot{i} = n(L) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}, \quad \dot{g} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}, \quad \dot{h} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H}; \quad n(L) = f_0^2\mu^3/L^3. \quad (9)$$

Усредним гамильтониан (8) по быстрым угловым переменным: средней аномалии l и средним аномалиям орбит, которые описывают концы векторов $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$. В результате получим:

$$\langle \varepsilon\mathcal{H}_1 \rangle = -\frac{3f_0^4m\mu^7r_0\Phi(v)}{280\pi EL^3G^3} \left\{ \omega^2 (3\cos^2 i - 1) - \sum_{j=1}^2 \frac{3fm_j}{a_j^3(1-e_j^2)^{3/2}} \left(2 - 3 \left[\cos^2 h + (\cos^2 \theta_0 + \cos^2 i) \sin^2 h + (\cos \theta_0 \cos h \cos i - \sin \theta_0 \sin i)^2 \right] \right) \right\}. \quad (10)$$

Усредненный гамильтониан зависит только от одной угловой переменной Делоне – переменной h . Это означает, что переменные Делоне L, G в усредненных уравнениях не изменяются, а в силу соотношений (6) не изменяются большая полуось и эксцентриситет орбиты ИСЗ. В формуле (10) отброшены слагаемые, содержащие множителем χ , так как $\chi\omega \ll 1, \chi n_i \ll 1 (i=1,2)$.

На основе уравнений движения (9) получим усредненную систему уравнений, описывающую эволюцию наклона орбиты i , долготы восходящего узла h и долготы перигея от восходящего узла g . В качестве безразмерного времени рассмотрим $\tau = 9f_0^4m\mu^7r_0\Phi(v)\omega^2 t / (140\pi EL^3G^4)$. Получим:

$$\begin{aligned} i' &= -\alpha_0 \left[\sin 2\theta_0 \cos i \sin h - \sin^2 \theta_0 \sin i \sin 2h \right], \\ h' &= -\cos i - 2\alpha_0 \left[\cos i \sin^2 h + (\cos \theta_0 \cos h \cos i - \sin \theta_0 \sin i)(\cos \theta_0 \cos h + \sin \theta_0 \operatorname{ctg} i) \right], \\ g' &= \frac{1}{2} (5\cos^2 i - 1) - \alpha_0 \left\{ 2 - 3\cos^2 h - 3\cos^2 \theta_0 \sin^2 h - 5\cos^2 i \sin^2 h - \right. \\ &\quad \left. - (\cos \theta_0 \cos h \cos i - \sin \theta_0 \sin i)(5\cos \theta_0 \cos h \cos i - 3\sin \theta_0 \sin i + 2\sin \theta_0 \cos i \operatorname{ctg} i) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i = 3n_i^2 m_i / \left(2\omega^2 \mu_i (1-e_i^2)^{3/2} \right)$, $\mu_1 = m_1$, $\mu_2 = m + m_2$. Для поставленной задачи $\alpha_0 = 3,558 \cdot 10^{-5}$, $\theta_0 = 23,45^\circ$. Если в (11) положить $\alpha_0 = 0$, то получим известную эволюционную систему уравнений орбитального движения ИСЗ, вызванную эффектом сжатия планеты [6].

Заключение

В работе на основе модели вращающейся вязкоупругой планеты, движущейся в гравитационном поле массивного центра и естественного спутника, получена система уравнений, описывающая эволюцию орбитального движения ИСЗ. Показано, что по сравнению с возмущением, вызванным сжатием Земли вдоль оси вращения, приливные эффекты имеют существенно меньшее влияние на долготу восходящего узла и долготу перигея от восходящего узла. Но они определяют эволюцию наклона орбиты ИСЗ.

Литература

1. G. Petit and B. Luzum // IERS Conventions (2010). IERS Technical Note 36. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. pp179.
2. А.С. Борец, А.В. Шатина // Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом диссипации. Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты: сборник трудов Национальной научно-практической конференции. Москва: РТУ МИРЭА. 2022. 132-137.
3. В.Г. Вильке // Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч 1,2. 1997. Ч.1. – 216 с. Ч.2. – 160 с.
4. В.Г. Вильке // Механика систем материальных точек и твердых тел. 2013. 268 с.
5. К. Мюррей, С. Дермотт // Динамика Солнечной системы. 2010. 588 с.
6. В.В. Белецкий // Очерки о движении космических тел. 2009. 432 с.

СЕКЦИЯ I

Подсекция I-5

Механика машин и роботов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ НА ДИНАМИКУ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

Астахов С.В., Ниналалов И.Г., Меркурьев И.В.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
ninalalovig@mpei.ru

Аннотация. Объектом исследования является волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), применяемый в задачах ориентации, навигации и управления движением транспортных, авиационных и космических систем. В целях повышения точности ВТГ поставлена и решена задача исследования влияния электростатической системы измерения и управления колебаниями резонатора ВТГ. Проведено сравнение различных геометрических и конструктивных схем расположения электродов системы управления и измерения колебаний резонатора ВТГ в виде оболочки вращения. С использованием асимптотических методов механики получены и исследованы дифференциальные уравнения движения, описывающие изгибные нелинейные колебания резонатора по основной форме колебаний.

Введение

Актуальным направлением развития гироскопии и инерциальной навигации является разработка прецизионных миниатюрных инерциальных измерительных модулей и бесплатформенных навигационных систем на базе микромеханических и волновых твердотельных гироскопов [1–3]. В основе функционирования ВТГ лежит физический принцип, заключающийся в инертных свойствах упругих волн в осесимметричном твердом теле [4, 5]. Чувствительным элементом ВТГ является тонкий упругий осесимметричный резонатор в виде полусферы, цилиндра, или кольца в упругом подвесе. Основы теории ВТГ были заложены в работах [4–6], влияние принципиальных погрешностей гироскопов исследовано в [7–14], алгоритмы оценки параметров математической модели и управления волновой картиной колебаний построены в [4, 13–16].

В [16] построены достаточно точные математические модели, учитывающие совместное влияние инструментальных погрешностей изготовления ВТГ и принципиальных погрешностей гироскопа с цилиндрическим резонатором, связанных с нелинейными и неанзотропными свойствами колебательного контура. Исследованы нелинейные эффекты в динамике гироскопа на подвижном основании в различных режимах функционирования.

Стремление к миниатюризации ВТГ приводит к увеличению систематических погрешностей гироскопов, систем ориентации и навигации [12]. При построении прецизионных гироскопов в микромеханическом исполнении особую сложность вызывают инструментальные погрешности изготовления резонатора и неравномерные зазоры между резонатором и электродами управления и измерения. В целях повышения точности измерения углового движения основания гироскопа поставлена задача исследования влияния электростатической системы измерения и управления малыми колебаниями резонатора ВТГ с учетом особенностей расположения электродов вблизи от свободной кромки резонатора. Проведено сравнение различных геометрических и конструктивных схем расположения электродов системы управления и измерения колебаний резонатора ВТГ.

Разработка новой математической модели ВТГ

Рассмотрим резонатор ВТГ в виде тонкой упругой оболочки вращения на опорной консольно закрепленной ножке. С основанием гироскопа свяжем ортогональный трехгранник xuz .

Серединная поверхность резонатора образована поворотом кривой Γ вокруг оси z , являющейся осью чувствительности гироскопа (рис. 1). Предполагается, что оболочка как целое вращается вокруг оси z с переменной во времени угловой скоростью Ω .

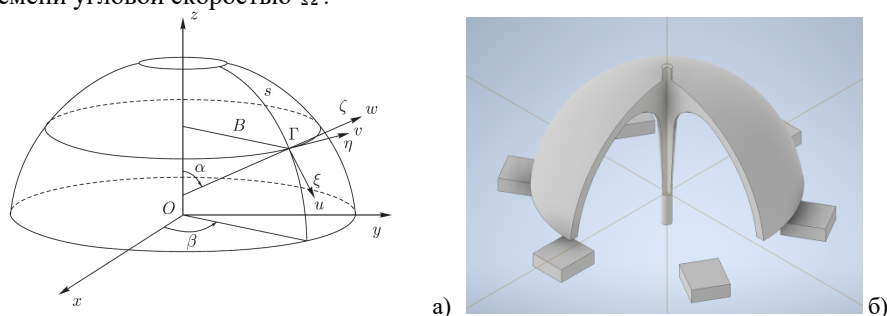


Рис. 1. Конструктивная схема резонатора ВТГ.

Функцию упругого смещения резонатора $(u, v, w)^T$ зададим в ортогональном трехграннике $\eta\zeta\xi$, связанным с медианами и параллелями серединной поверхности резонатора. Вблизи от свободной кромки

резонатора расположим электростатические датчики для управления и измерения малых изгибных колебаний (рис. 16). Рассматриваются два варианта расположения электродов – в первом варианте электроды расположены вблизи от плоскости свободной кромки неподвижного резонатора на заданном малом расстоянии h , во втором варианте электроды расположены на заданном малом расстоянии, отсчитываемом от срединной поверхности в направлении внешней нормали к поверхности резонатора. Таким образом, дискретные электростатические датчики, равномерно распределенные по окружной координате β , позволяют оценить волновую картину колебаний резонатора по координате u (в первом варианте) и по нормальной координате w (во втором варианте). В докладе обсуждается технологическая сложность и ограничения при сборке электромеханической колебательной системы.

Математическая модель низкочастотных изгибных колебаний резонатора построена двумя методами: с использованием формализма Лагранжа и теории тонких упругих оболочек, а также с применением метода конечных элементов, учитывающих взаимное влияние механических и электрических колебаний в системе.

На силовые электроды подается напряжение в виде суммы опорного напряжения и переменного по времени и по окружной координате добавочного напряжения, изменяющегося для мягкого резонансного усиления колебаний резонатора по второй основной форме.

Собственные формы и частоты колебаний резонатора, полученные с использованием методов конечных элементов сравнивались с соответствующими значениями форм и частот, найденными по формулам Рэля в частном случае полусферического резонатора, а также сравнивались с другими частными случаями для цилиндрического резонатора с различными краевыми условиями закрепления [10].

Изгибные колебания резонатора рассматриваются в одномодовом приближении. Вторая основная мода изгибных колебаний резонатора представляет собой суперпозицию двух нормальных форм, измерение которых позволяет оценить угловое движение основания гироскопа вокруг оси его чувствительности. На рис. 2 показана функция прогиба свободной кромки резонатора w для указанных двух нормальных форм.

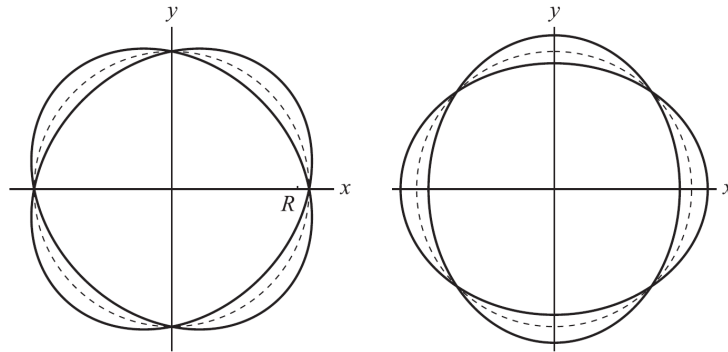


Рис. 2. Нормальные формы колебаний свободной кромки резонатора ВТГ.

На рис. 3а показана одна из форм пространственной картины колебаний резонатора, полученная с использованием метода конечных элементов. Изгибные колебания резонатора происходят на основной характерной частоте, которая может быть с высокой точностью оценена по первичной измерительной информации электростатических датчиков (рис. 3б). Из-за углового движения основания гироскопа возникает расщепление основной характерной частоты на две близкие частоты, которое приводит к прецессии волновой картины колебаний резонатора.

Одной особенностью ВТГ является нелинейные эффекты в динамике ВТГ, возникающие из-за нелинейных колебаний резонатора, обусловленных конечными по отношению к величине зазоров колебаниями и нелинейной зависимостью электростатических сил от функции упругих смещений. Нелинейные эффекты наблюдаются численно и экспериментально в виде слабой зависимости характерной частоты колебаний от амплитуды колебаний.

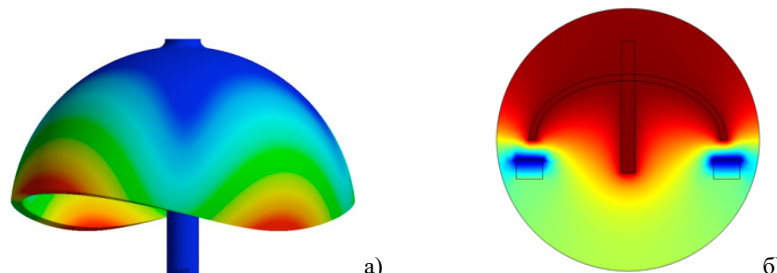


Рис. 3. Функция упругого смещения резонатора и функция распределения электростатического поля в зазорах между резонатором и неподвижными электродами.

Эффект малой «отрицательной» электростатической жесткости может быть использован для компенсации малых инструментальных погрешностей изготовления резонатора. Нелинейные эффекты приводят к дополнительной прецессии волновой картины колебаний, для учета которой требуется анализ

конструктивных особенностей гироскопа и применение асимптотических методов механики. В отличие от численных методов конечных элементов, применение асимптотических методов осреднения Крылова – Боголюбова для квазилинейных систем, позволило получить амплитудно-частотные характеристики (рис. 4) и построить новые аналитические зависимости угловой скорости прецессии от параметров колебательного контура.

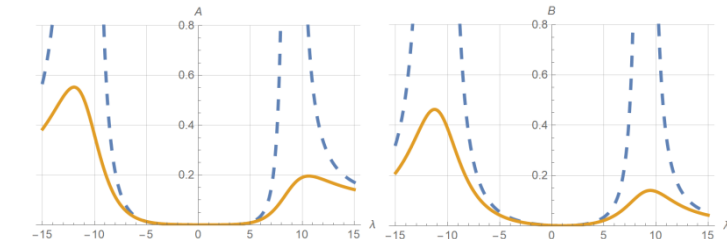


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики колебательного контура.

Полученные аналитические результаты позволяют сформулировать технические требования к точности сборки прибора. Одним из преимуществ предлагаемого режима работы ВТГ является отсутствие принципиальных ограничений на величину угловой скорости основания и возможность использования ВТГ для высокоманевренных объектов.

Заключение

Проведенное исследование влияния нелинейных электромеханических процессов в колебательном контуре ВТГ позволило построить аналитическую зависимость погрешностей гироскопа от параметров системы и применить методы силовой и алгоритмической компенсации погрешностей для повышения точности гироскопа.

Литература

1. Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. Т. 28. №2 (109), 2020. С. 3-10. DOI 10.17285/0869-7035.0028
2. Rozelle D.M., The hemispherical resonator gyro: From wineglass to the planets // Proc. 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2009, 134, – pp. 1157-1178
3. Переляев С.Е. Современное состояние и научно-технический прогноз перспектив применения зарубежных волновых твердотельных гироскопов (Аналитический обзор по зарубежным материалам) // Новости навигации. 2020. № 3. С. 14–28.
4. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
5. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С. 15–26.
6. Loper E., Lynch D.D. The HRG: a new low-noise Inertial Rotation Sensor // Proc. 16th Joint Ser-vices Data Exchange for Inertial Systems, Los Angeles, USA, 16-18 Nov. 1982. P. 432-433.
7. Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф. О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Изв. АН. МТТ 1998. №4. С 4-16
8. Измайлов Е.А., Колесник М.М., Осипов А.М., Акимов А.В. Технология волнового твердотельного гироскопа. Проблемы и возможные пути их решения // Гироскопия и навигация. 1999. № 4 (27). С. 83-96.
9. Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. Радиотехника, 2014, 176 с.
10. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009, 228 с.
11. Джашишов В.Э., Панкратов В.М. Математические модели термоупругого напряженно-деформированного состояния температурных и технологических погрешностей волнового твердотельного датчика инерциальной информации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. – № 3. – С. 55–63
12. Sun, J.; Yu, S.; Xi, X.; Lu, K.; Shi, Y.; Wu, X.; Xiao, D.; Zhang, Y. Investigation of Angle Drift Induced by Actuation Electrode Errors for Whole-Angle Micro-Shell Resonator Gyroscope. IEEE Sens. J. 2022, 22, 3105–3112.
13. Трутнев Г.А., Перевозчиков К.К., Назаров С.Б. Система съема и способы измерения колебаний резонатора твердотельного волнового. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2020. № 1. С. 50-63. DOI: 10.18698/0236-3933-2020-1-50-63
14. Шаталов М., Кетце Ш., Джуберт С. В. Динамика неидеального полусферического волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. №2. 2010 г. С. 16–28.
15. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Компенсация уходов волнового твердотельного гироскопа, вызванных анизотропией упругих свойств монокристаллического резонатора // Гироскопия и навигация. 2020. Том 28. №2 (109). С. 25-36. DOI 10.1134/S2075108720030050
16. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Учет нелинейности колебаний резонаторов при идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов разных типов // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 6. С. 28-40. DOI: 10.3103/S0025654422060073

НЕСКОЛЬКО АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ТЯЖЕЛЫХ МАШИН

Ащеулов А.В.^{1,2,3}

1 - Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург

2 - Институт машиностроения материалов и транспорта, Санкт-Петербург

3 - Высшая школа транспорта, Санкт-Петербург

atsheulov_av@spbstu.ru

Аннотация. В тезисах кратко изложены три проблемы, которые являются результатом обобщения фактов, установленных автором в ходе своей научно-производственной деятельности. Рассматривается область прикладной механики, относящаяся к тяжелому машиностроению, где механизмы машин перемещают большие массы. Это металлоконструкции разводных мостов, затворы и ворота гидротехнических сооружений, рабочие органы подъемно-транспортных, строительно-дорожных, буровых и других машин. Публикация рассчитана на ознакомление с проблемами ученых-теоретиков, в т.ч. членов РАН с целью совместного их решения.

Введение

Машины тяжелого машиностроения, как правило, являются уникальными по своей конструкции, только этап их изготовления занимает годы, они должны быть сверхнадежными и иметь большой срок службы, во многих случаях относятся к государственным объектам от работы которых зависит жизнедеятельность больших населенных пунктов, по ним невозможно проводить этап доводки и комплексные испытания в полном объеме, их ремонты (текущие и капитальные) невероятно сложны для эксплуатирующих организаций, наконец, они дорого стоят. Создание этих машин требует обязательного использования системного подхода, в котором все этапы жизненного цикла должны быть связаны цифровыми технологиями.

Проблем с созданием механизмов и машин тяжелого машиностроения очень много. И прежде чем рассматривать конкретные научно-технические проблемы, опишем ситуацию, в которой приходится работать.

Перестройка в экономике и промышленности в конце прошлого века – начале текущего столетия привела к разрушению многих отраслевых специализированных НИИ и КБ. Нынешнее строгое антимонопольное законодательство привело к тому, что порой торги на создание уникальных объектов и расположенных на них таких же уникальных машин и механизмов выигрывают непрофессионалы. На производственных этапах, во многих случаях, механиками руководят строители, недооценивая, что в механике микроны, а не сантиметры. Эти обстоятельства приводят к несоблюдению этапов проектирования механизмов и машин, нарушаются требования ЕСКД. Применяются механизмы, не прошедшие приемку и испытания в установленном порядке. Проектные организации не привлекают ученых на начальной стадии создания уникальных машин, для этого нет обязательных юридических основ, денег и времени. Решения во многих случаях последних лет искались за счет импорта механизмов и машин. Прикладная наука, в т.ч. механика практически не финансируется государством. Конкурсы и гранты РФ и Минобрнауки не ориентированы на машиностроение. До недавнего времени в перечне конструкторской документации на строительные объекты не было обязательного требования разрабатывать рабочую документацию по машинам и механизмам данного объекта. И лишь с введением ГОСТ Р 21.1101-2013 это противоречие было преодолено [1]. В нынешних условиях западных санкций ожидается только обострение ситуации в области создания машин и механизмов тяжелого машиностроения.

Проблема первая – механизмы тяжелых машин не вырабатывают назначенный срок службы

По техническим заданиям на механизмы разводных мостов, шлюзов, затворов гидротехнических сооружений назначается срок службы в 50 лет. Кто и когда установил такие нормы не известно. Имеется предположение об административном, директивном подходе в данном вопросе. Научные обоснования и комплексные исследования надежности в данном направлении не известны. Результаты авторских исследований по Санкт-Петербургским разводным мостам [2] показали, что имеются сведения о фактических сроках замены механизмов через 35 лет. Известны экспертные оценки немецких инженеров, которые обосновывали замену инженерных сетей в строительстве через 30 лет, т.к. это приводит к положительным ускорениям в экономике. А вот, например, по грузоподъемным машинам картина иная. ГОСТ 27584-88 устанавливает для мостовых и козловых кранов, работающих в помещениях срок службы от 20 до 30 лет, а для открытого воздуха – ниже на 25%. Если краны вырабатывают установленный срок службы, то срок можно продлевать путем экспертизы Ростехнадзора через каждые 5 лет. При этом крановщики ориентируются на состояние металлоконструкций, механизмы для них рассматриваются, как расходный материал. Обобщенные сведения по статистике максимальных сроков службы кранов и их механизмов никто не публикует. Рассуждая про срок службы механизмов, можно представить себе эксплуатацию собственного автомобиля или домашнего холодильника в течение 50 лет и будет ясно, что это слишком много. К этому сроку оборудование не только

материально устаревает, разрушаются производственные цепочки поставки запасных частей, но и происходят коренные изменения физико-механических свойств материалов. Вопрос предельных сроков службы современных механизмов требует научных обоснований и межотраслевых исследований, которые можно выполнить на государственном уровне при поддержке РАН.

Проблема вторая – отсутствуют методики оптимального выбора типа передачи

О конкуренции механических, электрических, гидравлических и пневматических передач известно давно [3, 4]. Находясь в единстве выполняемой задачи передачи энергии от главного двигателя к рабочим органам, они постоянно находятся в экономической борьбе. Разрабатываются новации, дающие новые свойства передачам и их использование в машинах позволяет завоевывать рынки сбыта, получать прибыль и развиваться соответствующим изготовителям. Это объективная реальность. Это нормально до тех пор пока не нарушаются общие принципы построения приводов, пока не появляются риски отказов и аварий механизмов, которые на тяжелых машинах могут привести к серьезным экономическим потерям.

Текущий период развития машиностроения можно охарактеризовать как электротехнический. Внедрение частотного управления электродвигателями переменного тока позволило обеспечить бесступенчатое регулирование скорости в электромеханических приводах вращательного движения и потеснить позиции электрогидравлических приводов, которые активно развивались в противовес приводам с системами электроуправления постоянного тока. То есть электротехники возвращают свои, казалось бы, утрачиваемые позиции. Сегодня идет экспансия и на поступательный привод. Актуаторы – электромеханические приводы называют электроцилиндрами и внедряют на многих машинах, в т.ч. закладывают в проекты тяжелых машин [5]. Экспансия идет со стороны западных компаний, поскольку в актуаторах используются зарубежные технологии. Следует также отметить, что лоббируют актуаторы почему-то электрики, хотя в большей степени своим успехам актуаторы «обязаны» механикам, которые создали шарико- и роliko-винтовые передачи. Лоббирование электромеханических передач происходит путем непрофессиональной критики гидравлических и пневматических передач [6]. А по механическим передачам, наоборот, не учитываются общеизвестные особенности: динамическая прозрачность, сложность защиты от перегрузки, инерционность и другое. При этом, не берется в расчет опыт смежных специальностей. Например, в авиационных приводах диалектический путь электромеханизмов давно пройден и они уже не применяются.

Участвуя в реальных проектах создания тяжелых машин установлено, что выбор типа передачи носит субъективный и порой конъюнктурный характер. Причина такой ситуации видится в том, что в теории механизмов и машин отсутствуют научно-обоснованные методы сравнительного анализа передач. На стадии проектирования машин порой просто нет времени на детальный анализ технических решений объекта с разными передачами и отсутствие сведений о каких-либо типовых сравнительных исследованиях не позволяет принять правильные решения.

А если рассмотреть данный вопрос с точки зрения современных тенденций фундаментальных исследований в направлении природоподобия, то всем известно, что в организмах животных электромеханических приводов нет. Поэтому делать ставку на электромеханические передачи в будущем, например при создании биоробота, не имеет смысла. Нужно искать новые решения передачи энергии.

Проблема третья – не достижение требуемой производительности

На рисунках 1-3 представлены фото тяжелых машин и некоторые их технические характеристики, взятые из технической документации.

Эти машины работают на пониженных скоростях. По данным систем мониторинга, установленных штатно на каждом разводном мосту основного фарватера р. Нева в г. Санкт-Петербурге, фактическое время разводки/наводки моста составляет 5...5,5 минут. Максимальная скорость передвижения судовозной камеры по действующему руководству по эксплуатации не должна быть более 20 м/мин (из-за важности объекта этот регламент согласован даже с министром транспорта). Время подъема водопропускного затвора (режим открытия дамбы) по измененному регламенту установлено в 30 минут. Во всех рассматриваемых случаях увеличение технологического времени работы и, соответственно, снижение скорости произошло в 3 раза, т.е. «промахнулись» существенно. Данные машины созданы в разных ведомствах и их проектные решения вряд ли являются коррелируемые. Возникает вопрос, почему результат одинаковый.

Анализ рабочих процессов этих машин показывает высокий уровень динамики механизмов на проектных скоростях. Алгоритмы управления движением разводных пролетов не совершенны и приводят на режимах разгона и торможения к большим ударным нагрузкам, коэффициенты динамичности превышают нормативные значения. По судовозной камере аналогичная ситуация. Релейная система управления скоростью при торможении камеры на неровностях рельсового транспортного пути возбуждает сильные колебания перевозимого на плаву груза, который может повредить саму машину. А на водопропускных затворах на расчетных скоростях подъема затвора из воды возникает высокочастотная вибрация, практически, по всему рабочему ходу привода.

Необходимо учитывать, что машины, эксплуатирующиеся с пониженной скоростью, в итоге имеют завышенный состав оборудования, избыточные массу и установочную мощность, а значит и завышенную стоимость.



- масса разводного пролета с противовесом - 2200 т;
- расчетная неуравновешенная масса - 450 т;
- проектное время разводки/наводки - 2 мин;
- максимальный угол раскрытия крыла - 72 град.;
- установочная мощность - 300 кВт;
- тип привода – электрогидравлический.

Рис. 1. Троицкий мост на реке Неве в Санкт-Петербурге (средний по размерам среди других мостов).



- масса с сухим грузовым кузовом (камерой) - 4500 т;
- масса машины с водой в кузове и перевозимым судном - 8100 т;
- проектная скорость передвижения - 60 м/мин;
- установочная мощность - 16 МВт;
- продольный уклон транспортного пути - 1:10;
- максимальная высота воды в кузове - 2,2 м;
- глубина погружения машины в воду - 13 м;
- тип привода – электрогидравлический.

Рис. 2. Судовозная камера судоподъемника на реке Енисей в г. Дивногорске Красноярский край.



- масса затвора - 360 т;
- проектное время открытия - 10 минут;
- установочная мощность - 75 кВт;
- максимальный ход штока гидроцилиндра - 7300 мм;
- тип привода – электрогидравлический.

Рис. 3. Водопускной затвор (1 из 64) на комплексе защитных сооружений г. Санкт-Петербурга.

Выводы

Поднимаемые в докладе вопросы являются своеобразной обратной связью от эксплуатационного этапа жизненного цикла машин к начальному – исследовательскому этапу.

Рассматриваемые проблемы являются сложными, стратегическими, требующие обсуждения и, именно, по этой причине они сформулированы для участников съезда.

Автор решал некоторые части данных проблем за счет собственных средств, пытался привлечь внебюджетные средства с текущих подрядных договоров, получал субсидии и подавал заявки на НИОКР в разные министерства и убедился, что решение данных проблем механики тяжелых машин уникальных государственных объектов возможно только в рамках долгосрочных госпрограмм прикладных исследований.

Доклад направлен на поиск единомышленников, на выявление научных школ страны, работающих в аналогичных направлениях, на установление связей с членами РАН, курирующими тяжелое машиностроение.

Литература

1. ГОСТ Р 21.1101-2013 Национальный стандарт Российской Федерации. Система проектной документации для строительства. Основные требования к проектной и рабочей документации. – М.: Стандартинформ, 2014. – 55 с.
2. Ащеулов А.В. Методология проектирования гидравлических подъемных механизмов разводных мостов: Дис: д-р техн. наук: 05.05.04; 05.02.02 / Санкт-Петербург. гос. политехн. ун-т.- СПб., 2007.- 503с.
3. Автоматизированное проектирование машиностроительного гидропривода / И.И. Бажин, Ю.Г. Беренгард, М.М. Гайцгори и др. / Под общ. ред. С.А. Ермакова.– М.: Машиностроение, 1988.– 312 с.
4. Ащеулов А.В., Экспансия электропривода на объемный гидропривод // Гидравлика, пневматика, приводы. – СПб.: 2014. – №3/14. – С.8-9.
5. Механизм привода затвора-регулятора. Водосбросная плотина. Раздел 4 «Конструктивные и объемно-планировочные решения». Проектная документация // Строительство Багаевского гидроузла на реке Дон, объекты 2-го этапа ФБУ «Азово-Донская бассейновая администрация, № 03-16-ОК-2-КР-ВП-МО.6 , ТОМ 4.10.6.: АО «Акватик», 2018. – 12 с.
6. Борисов А.В., Васильев Д.В., Звездников Д.А., Квятковский А.А., Насонов П.В. Электроцилиндры – вызов пневматике и гидравлике // Конструктор-машиностроитель. – СПб, 2014. № 2. – С.16-24.

РОБОТ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Бабаев М.С.¹, Брискин Е.С.¹, Калинин Я.В.²

*1 - Волгоградский государственный технический университет, Волгоград
2 - Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова,
Москва*

maxin1525@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются варианты применения роботов в строительстве и эксплуатации зданий и сооружений, делается вывод о перспективности роботизации некоторых технологических операций. Предложена схема тросового колёсного робота для мониторинга высотных зданий и сооружений.

Введение

Строительная отрасль является одновременно одной из самых трудоёмких, но наименее автоматизированных и роботизированных отраслей промышленности. Несмотря на развитие робототехники и роботизированных систем, доля ручного и тяжёлого труда в строительстве снижается более низкими темпами по сравнению с другими отраслями промышленности. Основная причина в том, что в строительстве имеется широкий спектр разнообразных операций, из-за которых автоматизация усложняется. Автоматизированные роботизированные системы отлично справляются с повторяющимися задачами в узком диапазоне вариативности, строительные работы же, напротив, многообразны и непредсказуемы в силу изменчивости условий на строительной площадке, в том числе метеорологических. Также важной проблемой в большинстве стран мира является производственный травматизм в строительстве, как следствие несчастных случаев и аварий в опасных для человека условиях. Роботизация строительства позволяет исключить травматизм и нахождение людей в потенциально опасных условиях.

Применение роботов в строительстве

Одним из примеров того, как роботы могут снизить количество несчастных случаев в строительной отрасли, является использование роботов для работ по сносу зданий [1].

Использование роботов позволяет сократить сроки работ, издержки, а также обеспечить сохранность расположенных в непосредственной близости к площадке зданий. Сложность строительного производства, разнообразие технологических операций и особые условия их выполнения обуславливают низкий уровень комплексной механизации и автоматизации строительных процессов, что особенно резко проявляется в связи с необходимостью увеличения объема, повышения качества и скорости строительства, снижения его себестоимости. Важную роль в строительной индустрии призвана сыграть роботизация отдельных видов операций. Анализ основных видов строительных работ показывает, что на современной стадии развития робототехники могут быть автоматизированы многие из них. Беспилотную технологию на стройплощадке в 2017 году испытал стартап Built Robotics [2]. В России АО МГК «Интерхрос» успешно производит серию мобильных роботов «РОИН» [3], способных выполнять работы как в стесненных условиях, так и тяжелых моделей, способных развить максимальную грузоподъемность до 7 тонн, а модульная система и возможность работы в радиоактивной зоне позволяет им решать различные задачи от погрузо-разгрузочных и земляных работ до аварийно-спасательных и демонтажных работ.

Известно множество патентов, в которых описываются отдельные роботы для строительства или целые робототехнические комплексы, заменяющие собой большие строительные бригады [4–6] как за счёт комплексной роботизации традиционного строительного производства [4, 6], так и за счёт применения новых, ориентированных на изначальное исключение ручного труда методов строительства [5] с применением технологий 3D-печати стен зданий и сооружений.

Применение роботов для мониторинга высотных зданий и сооружений

Так же помимо возведения зданий немаловажным является и процесс эксплуатации, который для уникальных высотных зданий и сооружений приобретает отдельную важность и может быть сопоставим по сложности со строительством или капитальным ремонтом. Процесс эксплуатации может требовать применения специальных средств и устройств, в том числе перспективных робототехнических. Цели, задачи и состав работ по мониторингу технического состояния оснований и строительных конструкций уникальных высотных зданий регламентируются индивидуальными программами мониторинга и анализа состояния несущих конструкций в зависимости от архитектурного и конструктивного решения здания и его деформационного состояния. Для высотного здания форма заключения по результатам проведения этапа мониторинга определяется индивидуальной программой мониторинга по каждой из измеряемых (контролируемых) величин.

Одним из примеров тросового робота для мониторинга стройплощадки, а также высотных зданий и сооружений, можно рассматривать робота, перемещающегося по вертикальной поверхности с помощью

тросовых движителей [7-9] (рис. 1а). Такой робот удерживается тросами на вертикальной поверхности, а его прижатие к вертикальной поверхности должно регулироваться при помощи управления параметрами робота. Рассчитывая такие параметры, как положение опор робота, центра тяжести или точки приложения силы натяжения троса, планируется его надежное прижатие и таким образом осуществить перемещение робота по поверхности. При этом учитываются ориентация тросов, устанавливаемая углами, а также силы трения в опорах в качестве условия реализации надежного удержания робота на вертикальной поверхности. Однако надежное «прижатие» робота в широком диапазоне его положения на вертикальной поверхности, хоть и возможно рассчитать, но такие поверхности должны быть идеальными, что на практике, в условиях строительства, недостижимо. В работе [8] рассчитаны силы для робота, удерживаемого двумя тросами и имеющего четыре опоры движущегося по ровной вертикальной поверхности.

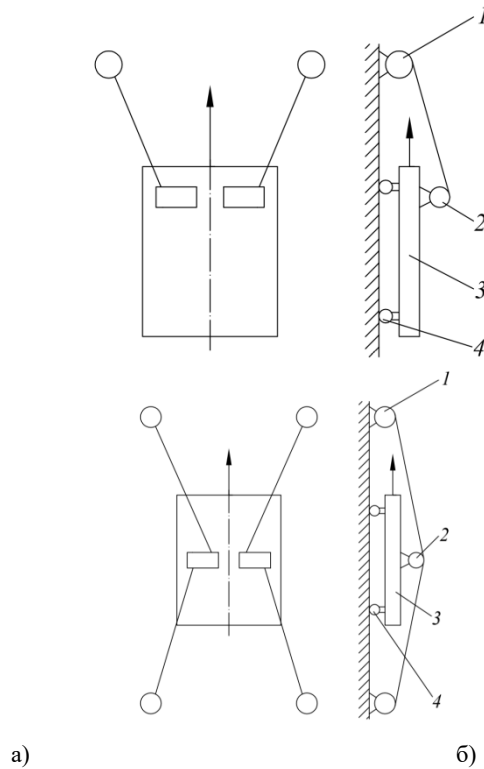


Рис. 1. Робот-прототип а) и предлагаемый вариант б) робота для мониторинга высотных зданий и сооружений

1 – опорный барабан троса, 2 – тяговый барабан троса, 3 – корпус робота, 4 – пассивные опорные колёса.

Предлагается вариант развития робота, показанного на рис. 1 а, в виде дополнения его тросов ветвями, идущими вниз (рис. 1б), что позволяет осуществлять более надёжный прижим робота к поверхности, движение по вертикальным поверхностям с отрицательными углами наклона к нормали, движению по горизонтальным поверхностям, когда вектор силы тяжести пытается оторвать робот от опорной поверхности.

Заключение

Рассмотрены варианты применения роботов в строительстве и эксплуатации зданий и сооружений: перспективным направлением является роботизация относительно узких технологических операций – рутинных либо опасных для человека. Предложена схема тросового колёсного робота для мониторинга высотных зданий и сооружений – она позволяет при простой конструкции обеспечивать мониторинг не только строго вертикальных или поверхностей с положительными углами наклона как робот-прототип, но и вертикальных поверхностей с отрицательными углами наклона, а также горизонтальных поверхностей, при движении по которым вектор силы тяжести пытается оторвать робот от опорной поверхности.

Литература

1. В Москве впервые применили роботов для сноса здания [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.interfax.ru/moscow/751687>, свободный (дата обращения: 19.02.2023)
2. Робот-трактор готов к выезду на стройплощадку будущего [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://robotrends.ru/pub/1743/robot-traktor-gotov-k-vyezdu-na-stroyploshadki-budushego>, свободный (дата обращения: 19.02.2023).
3. РОИН РК Р-700 Усиленная модель тяжелой серии РОИН [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://intehros.ru/produktsiya/robototekhnika/rk-r-700/>, свободный (дата обращения: 19.02.2023).

4. «An automated brick laying system for constructing a building from a plurality of bricks (Автоматическая система кирпичной кладки для строительства из множества кирпичей)» по международной заявке на изобретение № WO2007076581 (МПК B25J11/00; B25J9/16; E04G21/22; опубликован 12.07.2007).
5. № US2020282593 «Systems and methods for the construction of structures (Системы и методы построения конструкций)» (МПК B28B1/00; E04G21/04; опубликован 10.09.2020).
6. «Автоматизированный способ возведения зданий из строительных блоков» по патенту РФ на изобретение № RU 2606886 (МПК E04G 21/14; опубликован 10.01.2017).
7. Шаронов Н.Г., Ефимов М.И. О перемещении роботов по вертикальной шероховатой поверхности с помощью тросовых движителей // Известия ВолгГТУ. – 2019. – № 3 (226). – С. 51–54.
8. Ефимов М.И. Об усилиях, действующих на тросовый робот, перемещающийся по ровной вертикальной поверхности // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2022. – № 4 (263). – С. 31–37.
9. Патент на полезную модель РФ № 201924 U1, МПК E04G 23/00. Тросовый робот вертикального перемещения/ Е. С. Брискин, М. И. Ефимов, Н. Г. Шаронов. Патентообладатели: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Волгоградский государственный технический университет" (ВолгГТУ). – Заявка № 2020134938: заявл. 26.10.2020., опубл. 21.01.2021.

МОДЕЛЬ ЭКЗОСКЕЛЕТА ДЛЯ ОПОРНОЙ НОГИ И КОРПУСА СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ И РЕГУЛИРУЕМОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Блинов А.О.¹, Борисов А.В.¹, Мухарлямов Р.Г.², Новикова М.А.¹

1 - Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Смоленск, Россия

2 - Институт физических исследований и технологий ФГБОУ ВО НИУ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
borisowandrej@yandex.ru

Аннотация. Разработана пространственная модель экзоскелета, состоящего из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью. Предполагается использовать ее для исследования динамики опорной ноги и корпуса. Переносимая нога моделируется сосредоточенной массой, расположенной в тазобедренном суставе, голова – в верхней точке корпуса. Изменение длины и жесткости звена реализуется при помощи магнитно-реологической жидкости и прикладываемого к ней магнитного поля. Определено магнитное поле, необходимое для изменения вязких свойств магнитно-реологической жидкости так, чтобы звено выдерживало приложенные нагрузки, возникающие при ходьбе.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-21-00491, <https://rscf.ru/project/22-21-00491/>.

Введение

В работе [1] показано, что в последнее десятилетие значительно увеличилось количество публикаций и патентов по теме «экзоскелет», однако проблемы комфортабельности при использовании окончательно не решены. Одной из причин является использование массивных абсолютно твердых звеньев, оказывающих значимое влияние на динамику человеко-машинной системы человек-экзоскелет, так как в опорно-двигательном аппарате человека расстояния между осями вращения в суставах изменяются [2, 3]. Предложено пассивное управление изменением длины звена с использованием магнитно-реологической жидкости путем изменения ее вязкости под действием прикладываемого внешнего магнитного поля. Имеются научные публикации с описанием применения магнитно-реологических сред в мехатронных устройствах [4–11]. В данной работе рассматривается модель экзоскелета, состоящая из трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью для опорной ноги и корпуса человека. При этом, переносимая нога и голова моделируются сосредоточенными массами.

Описание модели экзоскелета с тремя звеньями переменной длины и регулируемой жесткостью

Рассмотрим 3D-модель экзоскелета в виде опорной ноги и корпуса, состоящего из трех закрепленных звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью и двух масс, моделирующих переносимую ногу и голову. Введем неподвижную декартову систему координат, связанную с Землей $A_0x_0y_0z_0$, (рис. 1) с началом в закрепленном шарнире A_0 , представляющем собой комбинацию двух цилиндрических шарниров с взаимно ортогональными осями вращения. Подобная конструкция обусловлена биомеханикой ходьбы человека, при которой в голеностопном суставе практически не возникает поворот голени вокруг своей оси. Поэтому в модели голеностопного сустава не используется сферический шарнир, который позволяет с избытком реализовать возможные степени подвижности, практически отсутствующие в реальном голеностопном суставе человека. В точке A_1 расположен цилиндрический шарнир, адекватно моделирующий коленный сустав человека. Тазобедренный сустав человека является сферическим шарниром, поэтому в точке A_2 находится сферический шарнир, моделирующий все имеющиеся реальные степени подвижности. Для составления системы дифференциальных уравнений движения используем подвижные локальные системы координат $A_0x_1y_1z_1$ и $A_1x_2y_2z_2$, жестко связанные с шарнирами A_0 , A_1 и A_2 , в которых реализуются повороты звеньев. Такой способ описания использует углы между звеньями, соответствующие режиму работы реальных приводов роботизированного экзоскелета, которые изменяют относительные углы. Оси z_1 , z_2 и z_3 направим вдоль подвижных звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 (рис. 1).

Звенья одинаковой конструкции A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 состоят из абсолютно твердых штоков A_1D_1 , A_2D_2 и A_3D_3 с поршнями D_1 , D_2 и D_3 , находящимися внутри корпусов B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 . Корпуса являются тонкостенными цилиндрами с намотанными на них электромагнитными катушками. Внутри цилиндры заполнены магнитно-реологической жидкостью. Снизу к цилиндрам жестко прикреплены абсолютные твердые стержни A_0B_1 , A_1B_2 и A_2B_3 , на обратном конце которых расположены шарниры. В шарнирах предполагается возможность создания необходимых управляющих моментов. В точках механизма A_2 и A_3 имеются сосредоточенные массы m_p и m_n , приближенно моделирующие переносимую ногу и голову соответственно.

Длина каждого звена изменяется вследствие относительного движения вдоль звеньев A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 поршней со штоками D_1A_1 , D_2A_2 , D_3A_3 внутри цилиндров с магнитно-реологической жидкостью B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 . Магнитно-реологическая жидкость реализует силы сопротивления F_1 , F_2 и F_3 , действующие вдоль штоков с поршнями. В результате действия внешнего магнитного поля магнитные частицы частично ориентируются вдоль силовых линий магнитного поля, причем с увеличением напряженности магнитного поля доля ориентированных частиц увеличивается, тем самым увеличивается сила сопротивления магнитно-

реологической жидкости движению поршня. Следовательно, обеспечивается управляемое изменение длины звена в соответствии с фазой ходьбы и нагрузкой от соседних звеньев.

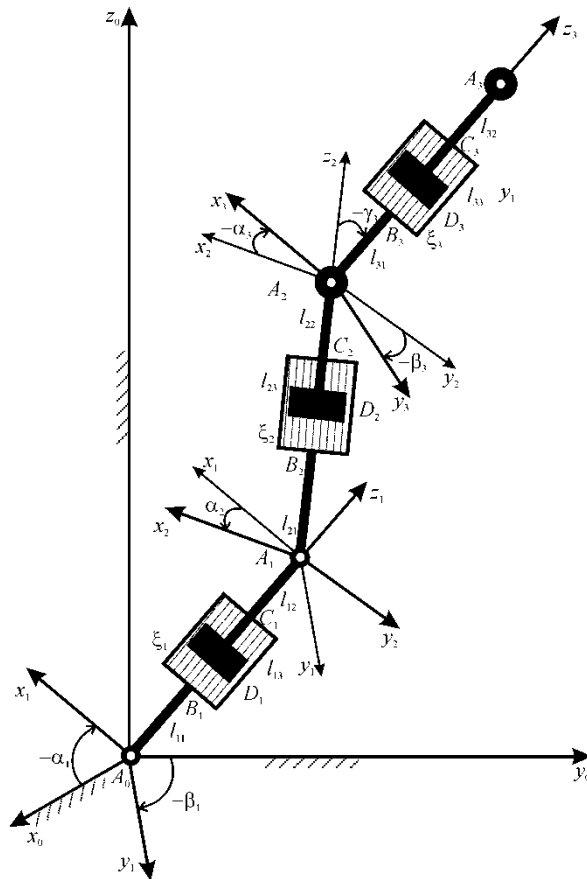


Рис. 1. Пространственная модель трех звеньев экзоскелета переменной длины с регулируемой жесткостью.

Положения звеньев однозначно определяются углами $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$ и $\alpha_3(t)$, $\beta_3(t)$, $\gamma_3(t)$ и переменными длинами участков звеньев между поршнем и дном цилиндра $B_1D_1 = \xi_1(t)$, $B_2D_2 = \xi_2(t)$ и $B_3D_3 = \xi_3(t)$ (рис. 1). Следовательно, модель имеет девять степеней свободы. Управляющие моменты, развиваемые в шарнирах A_0 , A_1 и A_2 с идеальными связями, обозначим $M_{1\alpha}$, $M_{1\beta}$, $M_{2\alpha}$ и $M_{3\alpha}$, $M_{3\beta}$, $M_{3\gamma}$.

Кинетическая энергия рассматриваемого механизма вычисляется путем интегрирования по всем весомым участкам A_0B_1 , B_1C_1 , D_1A_1 , A_1B_2 , B_2C_2 , D_2A_2 , A_2B_3 , B_3C_3 , D_3A_3

$$T = \frac{1}{2} \left(m_P V_{A_2}^2 + m_H V_{A_3}^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_{ij}} \rho_{ij} V_{ij}^2 d\xi_{ij} \right). \quad (1)$$

Здесь i – номер звена ($i = 1, 2, 3$); j – номер участка на звене, причем $j = 1$ соответствует нижним участкам A_0B_1 , A_1B_2 и A_2B_3 , $j = 2$ соответствует штокам с поршнями D_1A_1 , D_2A_2 и D_3A_3 , $j = 3$ соответствует цилиндрам B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 ; ξ_{ij} – координата бесконечно малой частицы j -того инерционного участка i -того звена, ρ_{ij} – плотность j -того участка i -того звена, при этом $m_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}$, $I_{ij} = \rho_{ij} l_{ij}^3 / 3$, l_{ij} , m_{ij} , I_{ij} – длина, масса, момент инерции j -того участка i -того звена, m_P – масса переносимой ноги, расположенная в точке A_2 , $V_{A_2}^2$ – квадрат скорости точки A_2 , моделирующей тазобедренный сустав, m_H – масса головы, расположенная в точке A_3 , $V_{A_3}^2$ – квадрат скорости точки A_3 , моделирующей голову человека, V_{ij}^2 – квадрат скорости бесконечно малой частицы j -того участка i -того звена.

С использованием уравнений Лагранжа второго рода была составлена система дифференциальных уравнений движения для предложенной на рис. 1 модели экзоскелета в виде трех звеньев переменной длины с регулируемой жесткостью.

Рассмотрим поведение магнитно-реологической жидкости. Вследствие приложения сил со стороны соседних стержней, действия реакции со стороны неподвижной опоры и силы тяжести происходит относительное движение поршней D_1 , D_2 и D_3 в цилиндрах B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 , содержащих магнитно-реологическую жидкость, которая, вследствие изменения вязкости оказывает различное сопротивление движению поршня. В отсутствие внешнего магнитного поля имеет место хаотичное поведение частиц магнитно-реологической жидкости. При этом магнитно-реологическая жидкость не оказывает значительного

сопротивления движению поршня. На рис. 1 показаны ориентированные магнитные частицы в случае приложения внешнего магнитного поля. Изменением вязкости магнитно-реологической жидкости управляет внешнее магнитное поле, реализуемое при помощи намотанных на цилиндр катушек. При приложении внешнего магнитного поля жидкость оказывает сопротивление движению поршня, которое тем больше, чем больше ориентированных частиц в ней содержится. Становится возможным регулировать жесткость звеньев A_0A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 при изменении их длины. Управление изменением вязкости магнитно-реологической жидкости реализуется использованием внешнего магнитного поля, что приводит к изменению силы сопротивления движению поршня внутри цилиндра. Зависимость силы сопротивления, реализуемой магнитно-реологической жидкостью от напряженности магнитного поля, имеет вид:

$$F = \pi^2 \left\{ \left[1 + \varphi_L \left(\alpha_n + \frac{(\zeta_n + \beta_n \lambda_n + \beta_n \cos(2\theta))}{2} + (\chi_n - 2\beta_n \lambda_n) \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \right) \right] \eta_f \dot{\gamma} + \frac{9\varphi_L \mu_0 H^2 (n-1) (\chi_f + 1) \sin(2\theta)}{16n_c} \right\}. \quad (2)$$

Здесь: φ_L – объемная доля микронных частиц, равная, n – число частиц в цепочке, n_c – максимальное число частиц в цепочке, $\alpha_n, \dots, \lambda_n$ – кинетические коэффициенты, Γ_m – магнитный момент, стремящийся выстроить цепочку частиц вдоль поля, v_L – объем микронной частицы, $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига, η_f – вязкость магнитно-реологической жидкости η_f , θ – угол между вектором, направленным вдоль прямой, соединяющей центры двух микронных частиц и вектором напряженности внешнего магнитного поля.

Получены зависимости управляющих моментов, продольных сил, напряженностей внешних магнитных полей, управляющих движением предложенной модели двух звеньев опорной ноги экзоскелета с переменной длиной и регулируемой жесткостью.

Заключение

Проведено моделирование движения экзоскелета в виде двух звеньев опорной ноги и корпуса с использованием аналитически задаваемых углов и изменения длин звеньев дифференцируемыми функциями, задающими антропоморфное периодическое движение. Определены управляющие моменты и силы, необходимые для реализации заданного движения модели. Знание продольной силы, действующей вдоль звена, позволило вычислить зависимость напряженности магнитного поля от времени, необходимой для управляемого изменения жесткости звеньев экзоскелета при заданном движении. На основании проведенного исследования установлено, что возможно осуществлять управление жесткостью звеньев переменной длины экзоскелета с помощью внешнего магнитного поля. Модель может найти применение при создании комфортабельных экзоскелетов с регулируемой жесткостью звеньев для широкого круга пользователей.

Литература

1. Борисов А. В., Каспирович И. Е., Мухарьямов Р. Г. О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов // Известия РАН. Теория и системы управления, 2021, № 5, с. 162-176.
2. Piña-Martínez E., Rodríguez-Leal E. Inverse Modeling of Human Knee Joint Based on Geometry and Vision Systems for Exoskeleton // Applications, Mathematical Problems in Engineering, V, 2015.
3. Nordin M., Frankel H. Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System. Lippicott –London, Williams & Wilkins, 2001, 467 p.
4. Cha S.W., Kang S.R., Hwang Y.H., et al. Design and control of a parallel mechanism haptic master for robot surgery using magneto-rheological clutches and brakes // J Intell Mater Syst Struct. 2018;29:3829 – 3844.
5. Andrade R.M., Fabriz Ulhoa P.H., Fragoso Dias E.A. Design and testing a highly backdrivable and kinematic compatible magneto-rheological knee exoskeleton // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. № 5, August 2022, DOI:10.1177/1045389X221117496
6. Bougrinat Y. Design and development of a lightweight ankle exoskeleton for human walking augmentation. Université de Montréal, 114 p, 2018.
7. Chen J., Liao W. Design and control of a Magnetorheological actuator for leg exoskeleton. // 2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), Sanya, 2007, pp. 1388–1393, doi: 10.1109/ROBIO.2007.4522367
8. Chen J., Liao W. Design, testing and control of a magnetorheological actuator for assistive knee braces // Smart Materials and Structures. — 2010. — Vol. 19. — P. 035029.
9. Carlson J. Magnetorheological Fluid Actuators // Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications, 2013. — P. 1808.
10. Laflamme, S. Online learning algorithm for structural control using magnetorheological actuators. — Massachusetts Institute of Technology, 2007. — 88 p. <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/39271/170931934-MIT.pdf?sequence=2>
11. Ahmadkhanlou F., Zite J.L., Washington G.N. A magnetorheological fluid-based controllable active knee brace // Proceedings SPIE. — 2007. — Vol. 6527. — P. 652700. <https://doi.org/10.1117/12.715902>

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ 3D-МОДЕЛЬ ЭКЗОСКЕЛЕТА С ПЯТЬЮ ЗВЕНЬЯМИ ДЛЯ ОПОРНО-ДВИГАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ЧЕЛОВЕКА

Блинов А.О.¹, Борисов А.В.¹, Кончина Л.В.¹, Маслова К.С.¹, Чигарев А.В.²

1 - Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске

2 - Белорусский государственный университет

borisowandrej@yandex.ru

Аннотация. Предложена пространственная электромеханическая модель экзоскелета, состоящая из пяти звеньев. Отличием данной модели является использование углов между звеньями и локальных систем координат для описания трех вращательных степеней подвижности в сферических шарнирах, расположенных в местах соединения звеньев. Составленная система дифференциальных уравнений движения представлена в обобщенном векторно-матричном виде. В модели для изменения относительных углов между звеньями предполагается использовать асинхронные электродвигатели. Для них записана электрическая подсистема, которой дополняются уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода.

Работа выполнена при поддержке регионального гранта РНФ и Смоленской области № 22-29-20308, <https://rscf.ru/project/22-29-20308/>.

Введение

Проблемы разработки электромеханических управляемых систем с изменяемой геометрией и связями становятся востребованными для реализации движения систем твердых тел под действием внутренних источников энергии и наложенных внутренних и внешних связей. Для этого необходимы кинематические цепи с шарнирами и связями, так как они обеспечивают преобразование внутренней энергии в целенаправленное движение. Такими электромеханическими системами является широкий и практически важный класс новых машин: манипуляторы, змееподобные роботы, антропоморфные роботы, экзоскелеты, биологические тела. В предложенной работе, в отличие от работ [1–10], углы отсчитываются между звеньями. То есть, между осями локальных систем координат против хода часовой стрелки от звена с меньшим номером к звену с большим номером, а в случае первого звена – от абсолютной неподвижной системы координат к подвижной локальной системе, жестко связанной с первым звеном.

Описание модели механизма

Рассмотрим модель экзоскелета, состоящую из пяти подвижных звеньев робота с углами, отсчитываемыми между звеньями и шестью системами координат – абсолютной и локальными (рис. 1). Введем абсолютную неподвижную правую декартову систему координат $Oxuz$, в которой происходит движение антропоморфного механизма (рис. 1). Для описания движения первого, нижнего звена A_0A_1 , введем подвижную локальную систему координат $Ox_1y_1z_1$, жестко связанную со звеном. Подвижную ось Oz_1 направим вдоль звена, оси Ox_1 и Oy_1 введем, исходя из условия правого базиса. Аналогично локальные системы координат вводятся для всех пяти звеньев. Вследствие особенностей конструкции антропоморфного механизма на рис. 1 углы $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) между и локальными (а в случае первого звена – неподвижной) системами координат показаны в отрицательном направлении, за исключением звена под номером два, для которого углы показаны в положительном направлении.

Рассматриваемая модель экзоскелета состоит из абсолютно твердых весомых звеньев, представляющих собой стержни (рис. 1). Звенья соединятся между собой посредством сферических шарниров, расположенных в точках A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 5$). Сферические шарниры, расположенные в точках A_0 и A_5 , соединяются с опорной поверхностью с помощью односторонней неустойчивающей связи, которая в момент постановки ноги на опору мгновенно накладывается, а в момент отрыва от опорной ноги – снимается. Модель походки экзоскелета предполагается близкой к спортивной ходьбе у человека, т.е. чередование одноопорных фаз ходьбы. При этом смена опорной и переносимой ног происходит мгновенно. Под действием силы тяжести, реакций со стороны опоры и соседних стержней, внутренних управляющих усилий (не показанных на рис. 1) происходят относительные повороты звеньев между собой вокруг каждой из осей координат, тем самым, при заданном должным образом управлении может быть реализовано антропоморфное движение всего экзоскелета.

Длины звеньев: $A_0A_1 = l_1$, $A_1A_2 = l_2$, $A_2A_3 = l_3$, $A_3A_4 = l_4$, $A_4A_5 = l_5$, представляющие собой прямолинейные стержни, считаются неизменными во все время движения при любых прикладываемых усилиях. Масса первого звена A_0A_1 равна m_1 , второго звена A_1A_2 равна m_2 и т.д.

Так как в выбранной модели механизма звенья представляют собой абсолютно твердые весомые стержни, то моменты инерции для них будут определены, как моменты инерции однородных твердых стержней. Тогда у первого звена A_0A_1 момент инерции относительно оси A_0x_1 , проходящей через его начало – точку A_0 перпендикулярно плоскости $y_1A_0z_1$, обозначим I_{x1} . Относительно оси A_0y_1 , проходящей через его начало – точку A_0 перпендикулярно плоскости $x_1A_0z_1$, обозначим I_{y1} . В силу однородности стержня $I_{x1} = I_{y1} = = ml^2/3$. В силу того, что стержень тонкий, считаем, что момент инерции относительно оси A_0z_1 ,

перпендикулярной плоскости $y_1A_0x_1$, равен нулю: $I_{z_1} = 0$. Аналогично вводятся моменты инерции для всех звеньев антропоморфного механизма относительно осей, проходящих через начало стержня.

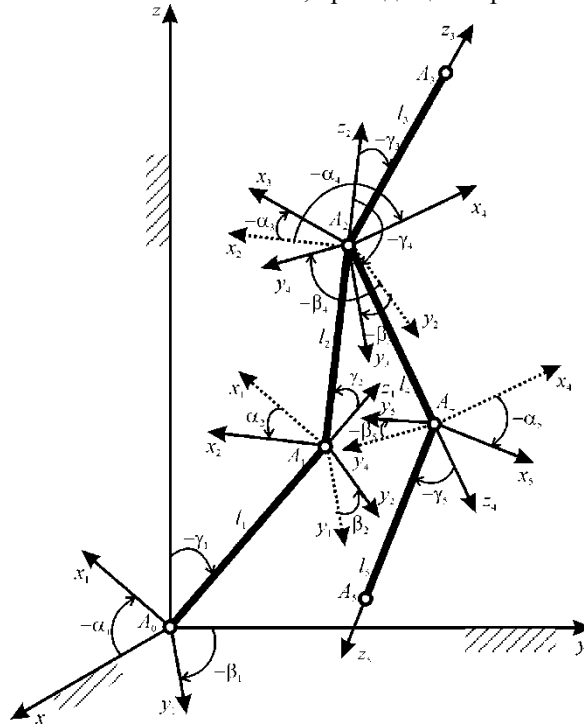


Рис. 1. Пространственная модель экзоскелета с пятью подвижными звеньями и локальными системами координат.

Первое звено A_0A_1 совершает вращательное движение в сферическом шарнире A_0 в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. Положение звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\gamma_1(t)$. Обозначим через $M_{1\alpha}$, $M_{1\beta}$ и $M_{1\gamma}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A_0 .

Положение второго звена A_1A_2 , совершающего сложное движение, зависит от движения точки A_1 , которую примем за полюс, и дополнительно от трех параметров – углами $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$, $\gamma_2(t)$. Обозначим через $M_{2\alpha}$, $M_{2\beta}$ и $M_{2\gamma}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A_1 .

Для остальных звеньев, совершающих сложное движение, углы и управляющие моменты вводятся аналогично второму звену A_1A_2 .

Обобщенными координатами, однозначно характеризующими положение механизма в пространстве, являются углы между соответствующими осями координат (рис. 1): α_i , β_i , γ_i , ($i = 1, 2, \dots, 5$). Рассматриваемая система имеет пятнадцать степеней свободы. Для реализации управляемого движения необходимо использовать пятнадцать независимых приводов – для управления каждым углом поворота каждого звена. Приводы могут быть различными: гидравлическими, пневматическими, электрическими. В дальнейшей работе предполагается использовать электрические двигатели. Для управления угловыми координатами электродвигатели будут работать в паре с редукторами, понижающими обороты и увеличивающими крутящие моменты.

Кинетическая энергия механизма складывается из энергий движения стержней $A_{i-1}A_i$, ($i = 1, 2, \dots, 5$). Составленная система дифференциальных уравнений движения для рассматриваемой модели с использованием уравнений Лагранжа второго рода имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому был проведен их анализ, выявлена структура и уравнения представлены в обобщенной векторно-матричной форме записи. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $\kappa = 1, 2, 3$, где 1 соответствует обобщенной координате α , 2 – β , 3 – γ :

$$A_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \ddot{\alpha} + B_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \ddot{\beta} + C_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \ddot{\gamma} + D_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \dot{\alpha} \dot{\alpha} + E_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \dot{\beta} \dot{\beta} + F_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \dot{\gamma} \dot{\gamma} + 2G_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \dot{\alpha} \dot{\beta} + 2H_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \dot{\alpha} \dot{\gamma} + 2K_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) \dot{\beta} \dot{\gamma} + gL_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma) = M_{\kappa}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (1)$$

где: α , β , γ – угловые обобщенные координаты звена; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ – векторы-столбцы, содержащие углы между осями систем координат; $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ – векторы-столбцы угловых скоростей; $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\gamma}$ – векторы-столбцы угловых ускорений; $\dot{A} = \text{diag}(\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n)$, $\dot{B} = \text{diag}(\dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_n)$, $\dot{\Gamma} = \text{diag}(\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_n)$ – диагональные матрицы содержащие обобщенные скорости; M_{κ} – обобщенные силы в уравнениях Лагранжа;

$A_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $B_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $C_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $D_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $E_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $F_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $G_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $H_k(\alpha, \beta, \gamma)$, $K_k(\alpha, \beta, \gamma)$ – матрицы, содержащие информацию о структуре механизма; $L_k(\alpha, \beta, \gamma)$ – векторы гравитации.

Используем в экзоскелете асинхронные электродвигатели переменного тока. Дополним систему (1) уравнениями асинхронного электродвигателя. Электродвигатель моделируется в двухфазной ортогональной системе координат в мгновенных значениях переменных от сети преобразователя до угла поворота ротора. Система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1\gamma} = I_{1\gamma} R_1 + \frac{dI_{1\alpha}}{dt} \left(L_1 - \frac{L_\mu^2}{L_2} \right) + \frac{L_\mu}{L_2} \frac{d\Psi_{2\gamma}}{dt}; \\ 0 = \frac{R_2}{L_2} (\Psi_{2\gamma} - L_\mu I_{1\gamma}) + \frac{d\Psi_{2\gamma}}{dt} + \omega_{эл} \Psi_{2\gamma}; \\ M = \frac{3}{2} p_n \frac{L_\mu}{L_2} (\Psi_{2\alpha} I_{1\beta} - \Psi_{2\beta} I_{1\alpha}); \\ \varphi = \rho \int \omega_{эл} dt; \\ M - M_c = J_\Sigma \frac{d\omega_{эл}}{dt}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где: γ принимает значения α и β , $\tilde{\gamma}$ принимает значение β если γ приняла значение α и наоборот, $U_{1\gamma}$ – компоненты напряжения цепи статора на оси неподвижной ортогональной системы координат; $I_{1\gamma}$ – компоненты токов цепи статора на оси неподвижной ортогональной системы координат; $\Psi_{2\gamma}$ – компоненты потокоцеплений цепи ротора на оси неподвижной ортогональной системы координат; M – электромагнитный момент; M_c – момент нагрузки на валу двигателя (момент сопротивления); J_Σ – суммарный момент инерции двигателя и приводного механизма; $\omega_{эл}$ – электрическая скорость ротора с учетом числа пар полюсов машины; p_n – число пар полюсов; $d\omega_{эл}/dt$ – ускорение ротора; ρ – радиус приведения редуктора и механизма при наличии; φ – угол поворота ротора; $R_1, R_2, L_1, L_2, L_\mu$ – параметры схемы замещения двигателя – активное сопротивление цепи статора; активное сопротивление цепи ротора, приведенное к статору; полная индуктивность цепи статора; полная индуктивность цепи ротора, приведенная к статору; взаимная индуктивность цепей статора и ротора соответственно.

Заключение

Таким образом, описана пространственная электромеханическая модель экзоскелета с пятью подвижными звеньями в пространстве. Далее, для предложенной математической модели требуется решить следующие задачи: 1) синтезировать траекторию движения, близкую к антропоморфному движению корпуса и ног человека; 2) на основании заданной кинематики движения звеньев определить управляющие моменты и силы; 3) зная управляющие усилия, подобрать асинхронные электродвигатели и редукторы или мотор-редукторы для реализации управляемого движения звена; 4) разработать систему управления движением электромеханической модели, провести численное моделирование движения звеньев и выполнить сравнительный анализ полученных траекторий движения звеньев с заданным исходным движением.

Литература

1. В. В. Белецкий // Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М. : Наука, 1984. 288 с.
2. А. В. Борисов, Г. М. Розенблат Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 5. С. 511-522.
3. А. В. Борисов, Г. М. Розенблат Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 148-174.
4. А. В. Борисов, И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов // Известия РАН. Теория и системы управления, 2021, № 5, с. 162-176.
5. А. В. Борисов, Г. М. Розенблат, Л. В. Кончина, М. Г. Куликова, К. С. Маслова Пространственные модели управляемых шарнирных механизмов со звеньями переменной длины для экзоскелетов человека // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 73-87.
6. A. V. Borisov, A. V. Chigarev // Mathematical Models of Exoskeleton. Dynamics, Strength, Control. Monograph. Springer, 2022, 232 p. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-97733-7>
7. Сирегар Х.П. Энергетические затраты при ходьбе антропоморфных роботов. Дисс. канд. технич. наук., М. 2003. 134 с.
8. Смалюк А. Ф. Динамика многозвенных механических систем в моделировании процессов двухногой ходьбы : дис. ... канд. физ. мат. наук. : 01.02.06. Минск. 1999. 85 с.
9. А. М. Формальский // Перемещение антропоморфных механизмов. М. Наука, 1982. 368 с.
10. А. М. Формальский // Управление движением неустойчивых объектов. М. ФИЗМАТЛИТ, 2012. 232 с.

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ С ДВИЖИТЕЛЯМИ, ДИСКРЕТНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Брискин Е.С., Артемьев К.С., Бордюгов Д.В., Смирная Л.Д.

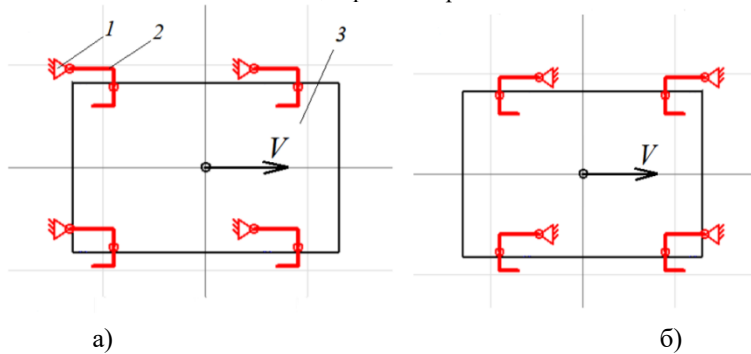
Волгоградский государственный технический университет
dtm@vstu.ru

Одна из проблем решаемая в мобильной робототехнике – обеспечение устойчивости программного режима движения. Особенно это касается мобильных роботов с двигателями дискретно взаимодействующими с опорной поверхностью, например, шагающими и «шагающе-подобными» [1].

Особенностью мобильных роботов с шагающими двигателями [2–4] и, вообще, с двигателями дискретно взаимодействующими с опорной поверхностью, например, якорно-тросовыми, применяемыми для роботов-понтонных [5], скользяще-заклинивающих, предназначенных для надежного взаимодействия мобильного робота с телами цилиндрической или близкой к ней формой [6], является прерывистое воздействие тяговых усилий на робот, в соответствии с реализуемой «походкой» [7]. Установлено, что при определенных типах задаваемых походок, скоростях и физико-механических свойств грунта движение может быть неустойчивым и, например, за определенный промежуток времени робот может выйти за рамки допустимого «коридора», самопроизвольно изменить походку и т.п. [8]. Обусловлено это также местом установки двигателей на роботе и характером их работы. Так, например, робот «Ортоног» (рис. 1), имеющий ортогонально-поворотные двигатели [9], может передвигаться подтягиваясь к стопам двигателей (рис. 2а), а может и «отталкиваться» от них (рис. 2б).



Рис. 1. Шагающий робот «Ортоног».



а) «толкающий» режим; б) «тянущий» режим; 1 – стопа, соприкасающаяся с опорной поверхностью; 2 – ортогонально-поворотный двигатель, 3 – корпус робота; V – направление скорости.

Рис. 2. Компонка двигателя робота «Ортоног».

Для обеспечения кинематически точного поворота таких роботов, что важно для снижения энергозатрат за счет отсутствия скольжения и буксования двигателей на опорной поверхности или разрабатывается достаточно сложная система управления двигателями, как правило, с минимум тремя степенями подвижности и тремя двигателями. В этом случае при N двигателях требуется согласованно управлять $3N$ двигателями. Другой вариант – например, при установке ортогональных двигателей использование $3+N$ двигателей, из которых N используется для адаптации, а три управляют общей трансмиссией и реализуют курсовое движение [10]. Однако этот вариант предъявляет большие требования к обеспечению устойчивости как по А.М. Ляпунову [11], так и в задачах обеспечения технической устойчивости [12]. Для этого разработаны алгоритмы управления, в основе которых согласованное изменение длины шага каждого двигателя [13].

К основным проблемам также относится проблема энергетической эффективности, обусловленная тем, что шагающие движители, как правило, неуравновешенные механизмы. Известны решения, связанные с введением рекуператоров [14]. Особенно это важно при относительно высоких скоростях движения [15]. Для снижения энергозатрат предложен способ, состоящий в изменении походки в зависимости от скорости движения робота. При этом следует иметь в виду, что походка влияет и на курсовую устойчивость [16].

Взаимосвязь сил сопротивления движению и развиваемых тяговых усилий по сцеплению на различных грунтах характерно и для традиционных колесных и гусеничных движителей [17, 18]. Для шагающих движителей этими характеристиками можно управлять независимо на основе значимости той или иной характеристики [9]. Эта задача важна для обеспечения должной грунтовой проходимости [19, 20].

Проблема перемещения робота по цилиндрическим произвольно ориентированным поверхностям также имеет важное значение [21], в частности, для выполнения такой технологической операции, как очистка поверхности, например, от наледи. Некоторые решения на основе учета сил Кулонова трения известны [22].

Рассмотрен способ, также опирающийся на законы сухого трения, но учитывающий, как особенности управления, так и свойства опорной поверхности [23].

Заключение

Полученные результаты используются при разработках и исследованиях мобильных роботов.

Литература

1. И. С. Пеньшин О законах распределения сил натяжения тросов в якорно-тросовых движителях подводных мобильных роботов // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2021. – № 9(256). – С. 53-57. – DOI 10.35211/1990-5297-2021-9-256-53-57.
2. Д. Е. Охоцимский, Ю. Ф. Голубев Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата – М.: Наука, 1984. – 310 с.
3. В. Е. Павловский О разработках шагающих машин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 101. – 32 с
4. Е. С. Брискин, В. В. Жога, В. В. Чернышев, А. В. Малолетов Динамика и управление движением шагающих машин с цикловыми движителями – М.: Машиностроение, 2009. – 191 с.
5. Е. С. Брискин, Н. Г. Шаронов, В. А. Серов, И. С. Пеньшин Управление движением подводного мобильного робота с якорно-тросовыми движителями // Робототехника и техническая кибернетика. – 2018. – № 2 (19). – С. 39-45.
6. В. С. Барсов, Е. С. Брискин Об управлении движением робота с поворотнo-заклинивающими движителями // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2019. – № 3 (226). – С. 7-12.
7. А. П. Бессонов, Н. В. Умнов К вопросу о систематике походок шагающих машин // Машиноведение. – 1975. – № 6. – С.23-30.
8. Е. С. Брискин. Об общей динамике и повороте шагающих машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1997. – № 6. – С. 33-39.
9. Е. С. Брискин, И. П. Вершинина, А. В. Малолетов, Н. Г. Шаронов. Об управлении движением шагающей машины со сдвоенными ортогонально-поворотными движителями // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2014. – № 3. – С. 168. – DOI 10.7868/S0002338814020036.
10. Е. С. Брискин. Об общей динамике и повороте шагающих машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1997. – № 6. – С. 33-39.
11. Д. Р. Меркин // Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
12. Н. Н. Моисеев // Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 379 с.
13. Е. С. Брискин, Я. В. Калинин, К. С. Артемьев. Об устойчивости плоского движения мобильных роботов с шагающими движителями, работающими в "тянущем" режиме // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 1. – С. 28-34. – DOI 10.17587/mau.22.28-34.
14. В. В. Лапшин, Д. Е. Охоцимский, А. К. Платонов. Об одном способе рекуперации энергии при движении шагающего аппарата // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 5. – С. 67-71.
15. Д. Е. Охоцимский, А. К. Платонов, В. В. Лапшин. Исследование энергетики движения шестиногого шагающего аппарата // Препринт ИПМ имени М. В. Келдыша АН СССР; № 96, 1981. – 27 с.
16. Е. С. Брискин, Н. Г. Шаронов. Об управлении движением механических систем с избыточным числом управляющих воздействий // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2019. – № 3. – С. 48-54. – DOI 10.1134/S0002338819030053.
17. Е. А. Чудаков // Теория автомобиля. – М.: Машгиз, 1961. – 463 с.
18. А. С. Литвинов, Я. Е. Фаробин // Автомобиль: Теория эксплуатационных свойств. Учебник для вузов – М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.
19. Л. Д. Смирная, И. П. Вершинина. Об оптимальном распределении нормальных реакций шагающих движителей подводных роботов // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2019. – № 3(226). – С. 47-50.
20. Е. С. Брискин, Л.Д. Смирная, К. С. Артемьев Об управлении тяговыми характеристиками и сопротивлением движению мобильных роботов с шагающими движителями // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2023. – Т. 24, № 2. – С. 101-106.
21. E. S. Briskin, Y. V. Kalinin, A. V. Maloletov, N. G. Sharonov. Mathematical Modelling of Mobile Robot Motion with Propulsion Device of Discrete Interacting with the Support Surface // IFAC-Papersonline, Vienna, AUSTRIA, 18 августа 2018 года. Vol. 51, Issue 2. – AUSTRIA: Elsevier B.V., 2018. – P. 236-241. – DOI 10.1016/j.ifacol.2018.03.041.
22. Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов. Построение движений инсектоморфного робота, преодолевающего комбинацию препятствий с помощью сил кулоновского трения // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2005. – № 3. – С. 136-148.
23. Я.В. Калинин, Е.С. Брискин, В.В. Арьянцев, А.В. Малолетов. Шаговый подъёмник // Патент на полезную модель RU 195302 U1, 22.01.2020. Заявка № 2019125000 от 07.08.2019

ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТОВ ЗА СЧЕТ СОГЛАСОВАННОГО ИЗМЕНЕНИЯ ВИДА ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ

Брискин Е.С., Шаронов Н.Г., Безусов С.О., Хачатрян А.А.

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия
dtm@vstu.ru

Аннотация. Рассматриваются мобильный робот, моделируемый двумя твердыми телами, связанными одним линейным приводом. Двигатели робота обеспечивают управляемое изменение вида голономных связей робота с опорной поверхностью. Рассматриваются алгоритмы перемещения за счет согласованного управления двигателями и внутренним линейным приводом.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-21-00882.

Введение

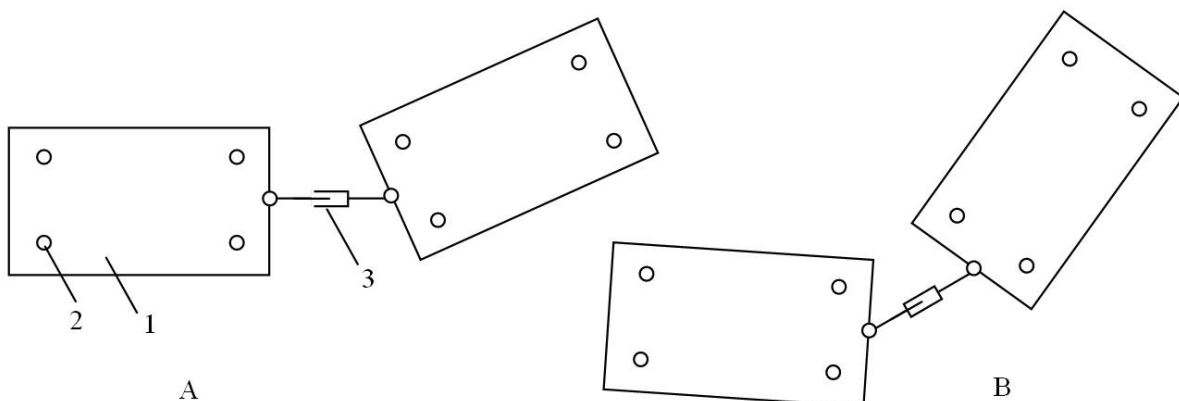
Одна из характеристик вида связей, накладываемых на движение механической системы, основывается на их разделении на удерживающие и неудерживающие [1, 2]. Причем одна и та же связь может быть удерживающей по отношению к одной части обобщенных координат и неудерживающей по отношению к другой. Например, для материальной точки, всегда перемещающейся по некоторой поверхности, сама эта поверхность является удерживающей связью, однако, криволинейная односторонняя направляющая на этой поверхности не является удерживающей. Если опора мобильного робота выполнена в виде сферического шарнира, то достаточно ровная, но шероховатая поверхность рассматривается как удерживающая робота на поверхности, но не удерживающая его от движения по этой поверхности. Однако, если сферическую опору зафиксировать относительно опорной стойки, а сила сцепления её с поверхностью достаточна, то связь для мобильного робота будет удерживающей, то есть не позволяющей опоре перемещаться по поверхности.

Постановка задачи

Мобильные роботы, состоящие из нескольких соединенных шарнирно тел (сочлененные), рассматриваются [3, 4] прежде всего с двигателями, непрерывно взаимодействующими с опорной поверхностью (например, колесными). Существуют работы [5, 6], в которых мобильные роботы рассматриваются как механическая система с двигателями, дискретно взаимодействующими с опорной поверхностью (например, шагающими или шагающеподобными).

Рассматривается робот (рис. 1), состоящий из двух твердых тел, каждое из которых опирается на четыре опоры (рис. 2). Количество опор может быть изменено в зависимости от условий выполняемой задачи. Корпусные части робота взаимодействуют между собой за счет работы одного линейного привода.

Ставится задача о перемещении робота из начального положения в конечное за счет согласованного управления линейным приводом и тормозными приводами опор.



1 – корпусные части роботов; 2 – опорные стойки; 3 – линейный привод;

А – начальное положение; В – конечное положение

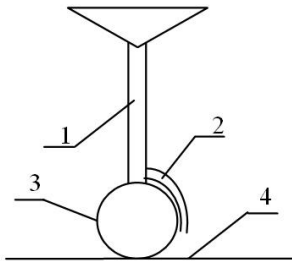
Рис. 1. Схематичное изображение модели исследуемого мобильного робота.

Метод решения

Метод решения основывается на том, что при заклинивании одной из опор корпусная часть (твердое тело) поворачивается вокруг этой опоры, а если все опоры свободны, то робот совершает поступательное

движение вместе с центром масс, в котором установлена ось линейного привода. При этом у ведущего робота все опоры заклинены. В процессе движения роботы изменяют свою значимость: ведущий становится ведомым и наоборот.

Рассмотрены некоторые алгоритмы перемещения роботов, а при учете их массово-геометрических характеристик и действующих внешних сил предложен алгоритм, обеспечивающий требуемые динамические и энергетические показатели. Энергоэффективность каждого из алгоритмов оценивается уровнем тепловых потерь в двигателе линейного привода.



1 – несущий элемент опорной стойки; 2 – привод фиксации сферической опоры;
3 – сферическая опора; 4 – опорная шероховатая поверхность

Рис. 2. Условная кинематическая схема опорной стойки мобильного робота.

Выводы

Управлением одним линейным силовым приводом возможно обеспечить «идеальное» позиционирование робота – осуществление любого наперед заданного перемещения робота в определенное положение без проскальзывания на поверхности.

Литература

1. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. —М.: Издательство Московского университета, 2019. — 728 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. —М.: Физматлит, 2005. - 264 с.
3. Исследование динамики движения цепочки "Робопоезд". Управляемое движение / В. В. Евграфов, В. Е. Павловский, Н. В. Петровская // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2005. – № 120. – С. 1-31.
4. Синтез и исследование алгоритмов управления движением робопоезда в стесненных условиях сложных сред / В. Е. Павловский, Н. В. Петровская // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2007. – № 1. – С. 55-63.
5. В. С. Барсов, Е. С. Брискин Об управлении движением робота с поворотнo-заклинивающими движителями // Известия Волгоградского государственного технического университета. –2019. –№ 3 (226). – С. 7-12.
6. Е. С. Брискин, И. П. Вершинина, А. В. Малолетов, Н. Г. Шаронов. Об управлении движением шагающей машины со сдвоенными ортогонально-поворотными движителями // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2014. – № 3. – С. 168. – DOI 10.7868/S0002338814020036.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНЫХ ПАНЕЛЕЙ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Ветлицын М.Ю., Шаронов Н.Г., Ивченко А.В.

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия
mikhail.vetlitsyn@vstu.ru

Аннотация. Рассмотрены результаты моделирования и прототипирования реконфигурируемых модульных панелей различного назначения. Показаны варианты конструкций мехатронных узлов, обеспечивающих и области применения. Исследуются напряжения, перемещения и деформации, возникающие при различных нагрузках. Результаты компьютерного исследования позволяют выбрать рациональную форму и конфигурацию панели, что приводит к повышению ее прочностных характеристик и снижению массы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01589, <https://rscf.ru/project/22-29-01589/>.

Введение

Применение современных технологий (в том числе аддитивных) позволяет ставить задачу создания конструкций несущих систем (панелей) различного назначения с возможностью изменения их конфигурации, в том числе в процессе эксплуатации. Управление конфигурированием осуществляется с применением мехатронных узлов, являющихся неотъемлемой частью рассматриваемых конструкций. Под реконфигурируемой панелью в данном исследовании понимается устройство, способное менять свою геометрию или форму, подстраиваясь под изменившиеся условия эксплуатации, при этом обязательным условием считается «не нарушение целостности профиля» как в процессе реконфигурации, так и во всех фиксированных формах.

Управление адаптивностью поверхности является актуальной и востребованной задачей в робототехнических системах. Применение реконфигурируемые конструкции находят в составе захватных устройств промышленных роботов, адаптивной части крыла летательного аппарата, адаптивной поверхности опор (стоп) мобильных роботов. Модульный характер предлагаемых конструкций позволяет изменять их геометрические размеры путем модульного наращивания реконфигурируемой структуры [1]. Подобный подход также позволяет изменять число интегрированных в структуру приводов, добиваясь рациональных решений в различных комбинациях унифицированных модулей.

Адаптивный захват

Современные производства часто специализируются на широком диапазоне выпускаемой продукции. Предприятия, снабжённые гибкими производственными комплексами, сталкиваются с проблемой использования широкой номенклатуры узкоспециализированных вспомогательных устройств. Быстрота переналадки технологических процессов часто связана с настройкой параметров вспомогательных устройств под размеры выпускаемой номенклатуры продукции. Современным решением, позволяющим сократить время перенастройки техпроцесса, считается применение адаптивных захватов, обладающие определенной универсальностью и способные взаимодействовать с большим спектром объектов.

В основе предлагаемой конструкции адаптивного захвата (рис. 1, а) лежит мехатронный узел на основе шарниров двойного действия. Получаемая гибкость конструкции дает возможность подобному рабочему элементу подстраиваться под размер и форму объектов. Захват способен менять площадь соприкосновения и усилие удержания объектов в соответствии с требованиями технологического процесса и условиями безопасности в тесной кооперации с человеком. Важнейшей технологической характеристикой является способность схватывать хрупкие и легко деформируемые объекты сложной конфигурации [2]. Пальцы захватного устройства приводятся в действие сервоприводом. Изгибающее усилие передается через систему тросов на шарниры двойного действия. При повороте сервопривода на заданный угол изменяется соотношение длин верхней и нижней части узла, что влияет на расположение шарниров относительно оси рабочего элемента. Перемещение и поворот шарниров приводит к сгибанию пальцев захвата.

Адаптивная часть крыла

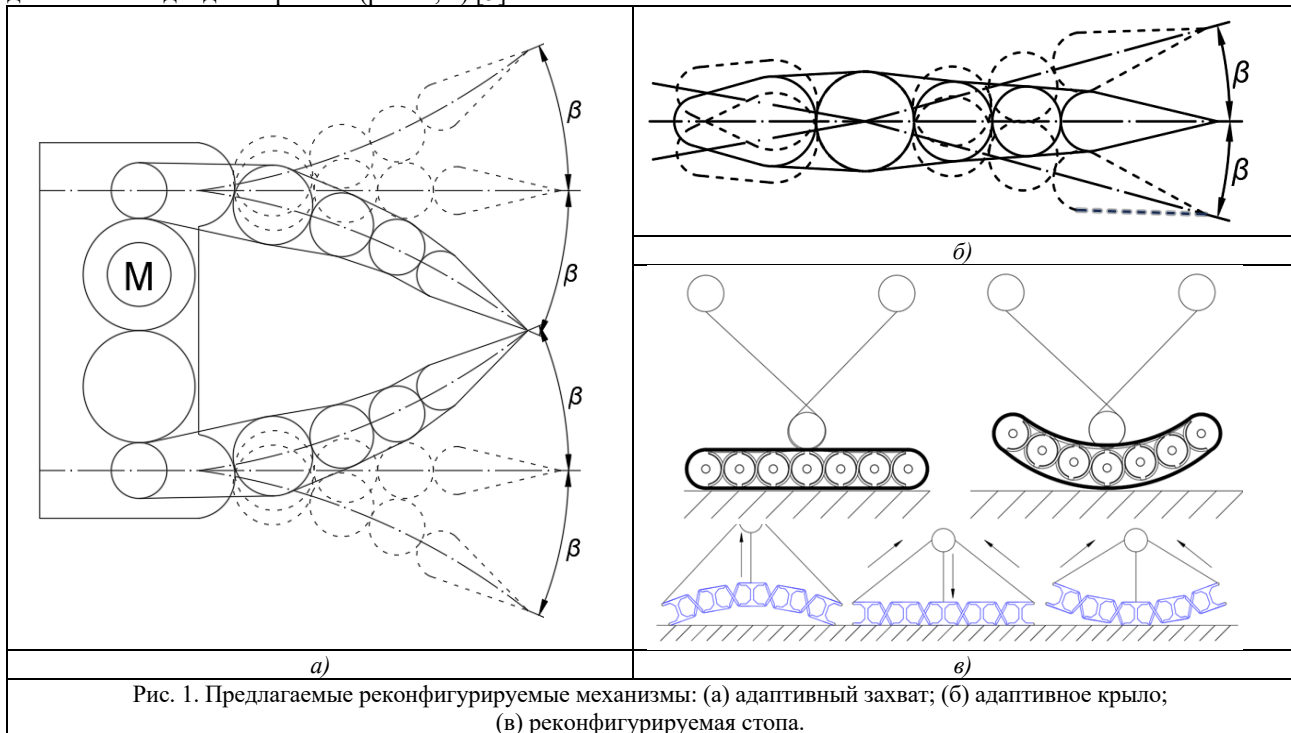
Аэродинамические характеристики летательных аппаратов в значительной степени определяются геометрией крыла, площадью его поверхности и профилем. Для улучшения характеристик, в том числе в различных режимах (например, взлета и посадки), используется механизация крыла, в том числе является актуальной задача разработки «адаптивной» части крыла [3].

В основе предлагаемой конструкции каркаса адаптивного крыла лежит мехатронный узел, который призван обеспечить заданный угол между элементами в структуре адаптивного крыла, согласованное управление которыми позволяет изменять геометрию крыла с учетом аэродинамических и технологических

требований. Мехатронный узел представляет собой последовательное объединение цилиндрических шарниров двойного действия [4], (рис. 1, б), вписанных в контур профиля крыла с приводом.

Адаптивная опора двигателя

Одним из направлений повышения эффективности взаимодействия опоры двигателя с поверхностью является управление адаптивностью поверхности. Адаптация опоры (стопы) может осуществляться за счёт формы, кривизны поверхности, обеспечивающее взаимодействие с грунтом. В перспективных конструкциях возможно использовать эластичную внешнюю обшивку, а силовые каркасы внутри этой обшивки будут приспособлены для плавного изменения заданной геометрии. Конструкция адаптивной стопы, для якорно-тросового движителя, обеспечивает управление компрессионным эффектом (эффектом повышения усилия прижатия к поверхности дна при отрыве стопы от грунта), возникающего при отрыве стопы шагающего движителя подводного робота (рис. 1, в) [5].



Заключение

Разработаны варианты конструктивных решений, обеспечивающих плавное изменение геометрии собранной из подобных мехатронных узлов панели. Проведено моделирование движения мехатронного узла, исследование статики и динамики, определены перемещения, напряжения и деформации, возникающие при различных режимах работы и внешних нагрузках.

Литература

1. Патент № 2749679 С1 Российская Федерация, МПК В64С 3/44. Реконфигурируемая упругодеформируемая панель и адаптивное крыло летательного аппарата на ее основе : № 2020141803 : заявл. 17.12.2020 : опубл. 16.06.2021 / А. В. Ивченко, Н. Г. Шаронов.
2. Разработка конструкции универсального захвата с жесткими подвижными пальцами / В. В. Николаева, Е. А. Макарова // XXVII Региональная конференция молодых ученых и исследователей Волгоградской области : Сборник материалов конференции, Волгоград, 02–15 ноября 2022 года / Редколлегия: С.В. Кузьмин (отв. ред.) [и др.]. – Волгоград: Волгоградский государственный технический университет, 2022. – С. 282-283.
3. Мехатронный узел и каркас адаптивного крыла / А. В. Ивченко, Н. Г. Шаронов // Прогресс транспортных средств и систем - 2018 : Материалы международной научно-практической конференции, Волгоград, 09–11 октября 2018 года / Под редакцией И.А. Каляева, Ф.Л. Черноусько, В.М. Приходько. – Волгоград: Волгоградский государственный технический университет, 2018. – С. 176-177.
4. Ivchenko, A. V. New conceptual design of the adaptive compliant aircraft wing frame / A. V. Ivchenko, N. Sharonov, R. Ziatdinov // Engineering Science and Technology, an International Journal. – 2019. – Vol. 22, No. 5. – P. 1149-1154. – DOI 10.1016/j.jestch.2019.10.004.
5. Патент на полезную модель № 212867 U1 Российская Федерация, МПК F16С 11/00, F16С 32/00. реконфигурируемый узел : № 2022114378 : заявл. 27.05.2022 : опубл. 11.08.2022 / А. В. Ивченко, М. Ю. Ветлицын, Н. Г. Шаронов ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Волгоградский государственный технический университет".

ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ЗАНОСА ЧЕТЫРЕХКОЛЕСНОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Влахова А.В.¹, Новодерова А.П.²

1 - МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

2 - МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

an.novoderoва@yandex.ru

Аннотация. С использованием велосипедной модели изучается динамика двухосного четырехколесного аппарата на начальном этапе заноса, развивающегося в результате блокировки или пробуксовки колес ведущей оси. Для описания взаимодействия колес с опорной плоскостью используются модель трения Кулона (для колес, потерявших сцепление с опорной плоскостью) и различные модификации модели бокового увода, а также неголономная модель (для колес, сохраняющих сцепление с опорной плоскостью). Проводится построение модели переменной структуры, описывающей различные условия движения аппарата. Для исследования применяются асимптотические методы и метод фазовой плоскости.

Введение

Одним из важнейших требований, предъявляемых к современным колесным аппаратам, служит безопасность их движения. Поэтому разработка систем управления и задачи, связанные с исследованием их динамики, актуальны и представляют как теоретический, так и практический интерес. Обеспечение безопасности движения требует, во-первых, обсуждения динамических свойств разных конструкций колесных аппаратов, и, во-вторых, создания систем безопасности, ориентированных на аппараты разного назначения. Методом решения этих задач служит математическое моделирование. В силу сложности «точные» модели, составленные в соответствии с законами классической механики, как правило, нельзя исследовать аналитически. Проблема их численного анализа состоит в том, что вращение колес обычно происходит гораздо скорее изменения поперечных и угловых движений корпуса аппарата, то есть эти модели требуют интегрирования с малым шагом по времени, что значительно усложняет или делает невозможными вычисления в реальном времени.

В настоящей работе проблема интегрирования системы дифференциальных уравнений с сильным разнесением постоянных времени изменения переменных решается с применением методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений (разделения движений) [1–3], которые дают возможность построить приближенные модели невысокого порядка, позволяющие исследовать эти переменные порознь. Такой подход решает проблему интегрирования исходной, жесткой системы в реальном времени и дает возможность развивать аналитические подходы к исследованию движения колесных аппаратов и построению законов управления, в том числе обеспечивающих безопасность их движения.

Работа продолжает исследования [4], направленные на изучение динамики колесного аппарата в ситуациях, когда заблокированные или пробуксовывающие ведущие колеса теряют сцепление с опорной плоскостью, т.е. скользят по ней; колеса другой оси либо скользят в продольном и поперечном направлениях, либо не проскальзывают (на систему накладываются неголономные связи). Здесь с использованием аналогичных методов описываются эти и другие случаи контакта колес с опорной плоскостью, проводится сравнение полученных результатов, построенная в [4] модель переменной структуры дополняется новыми моделями.

Постановка задачи и методы исследования

Занос колесного аппарата определяется динамикой поперечных и угловых движений его корпуса. Начальным этапом заноса назовем ситуацию, когда поперечная и угловая скорости корпуса аппарата принимают малые ненулевые значения.

Рассмотрим движение двухосного четырехколесного аппарата в случае, когда ведущие (передние или задние) колеса заблокированы или пробуксовывают, в результате чего теряют сцепление с опорной плоскостью в продольном направлении, и аппарат входит в режим заноса. Для корректного описания динамики аппарата в исследуемых задачах необходимо выбрать подходящую модель сил взаимодействия колес с опорной плоскостью. Для этих целей в работе изучаются различные модели:

1. Модель трения Кулона при скольжении колеса в продольном и/или поперечном направлениях.
2. Классическая модель увода, учитывающая деформируемость колеса только в поперечном направлении [5].
3. Модифицированная модель увода, учитывающая деформируемость колес в продольном и поперечном направлениях [5, 6].
4. Неголономная модель, в рамках которой запрещается проскальзывание колес в поперечном направлении [1, 2, 4].

Как и в [1, 4, 7, 8], будем изучать начальную стадию заноса, возникающую после завершения процесса

блокировки или пробуксовки колес, когда поперечная и угловая скорости корпуса аппарата принимают малые значения. Для такого движения можно не учитывать различия сил взаимодействия колес одной оси аппарата с опорной плоскостью и использовать «велосипедную» модель [1, 4, 5, 7–9], то есть заменить два передних колеса одним эквивалентным передним колесом, два задних – одним задним и пренебречь боковыми наклонами корпуса.

Ограничимся случаем, когда массы колес существенно меньше массы корпуса, то есть их моменты инерции относительно осей вращения существенно меньше момента инерции корпуса относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, и примем, что центр масс аппарата совпадает с центром масс корпуса. Положение аппарата определяется декартовыми координатами его центра масс в неподвижной системе координат, углом поворота его корпуса вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс (углом курса), углами поворота переднего и заднего колес вокруг осей их вращения и углом поворота переднего колеса относительно корпуса вокруг вертикальной оси.

Для упрощения анализа исследуемых уравнений применяется математический аппарат разделения быстрых и медленных движений, основанный на подходах фракционного анализа [1, 2] и теории сингулярных возмущений [3] по малым параметрам, характеризующим малость масс и моментов инерции колес, малость их областей контакта с опорной плоскостью, малость угла поворота передних колес и малость поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата. При построении неголономных моделей движения аппарата используется методика составления уравнений Лагранжа с множителями [10]. Системы уравнений, получаемые после пренебрежения малыми параметрами, допускают аналитическое исследование и позволяют выяснить влияние масс-геометрических параметров аппарата, угла поворота его передних колес и моделей контактных сил, описывающих взаимодействие колес с опорной плоскостью, на занос аппарата. Оно проводится с использованием метода фазовой плоскости и качественных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Выводы

В работе аналитически построены и исследованы математические модели начальной стадии заноса двухосного четырехколесного аппарата на однородной опорной плоскости при блокировке или пробуксовке колес ведущей (передней или задней) оси. Рассмотрены различные условия взаимодействия колес с опорной плоскостью: модель трения Кулона, классическая модель бокового увода, модифицированная модель увода и модель непроскальзывания. Проводится исследование модели переменной структуры, полученной объединением этих моделей с моделями из [1].

Выявлены условия, при которых аппарат входит в режим непроскальзывания незаблокированных (непробуксовывающих) колес в поперечном направлении. Найдены области начальных значений угловой скорости корпуса, для которых занос аппарата будет уменьшаться или, наоборот, развиваться. Проведена оценка влияния параметров колесного аппарата, угла поворота его передних колес и моделей контактных сил на динамику поперечной и угловой скоростей корпуса. Проведенный анализ позволяет сформировать практические рекомендации, полезные для построения алгоритмов работы систем управления рулем (поворотом передних колес) аппарата.

Литература

1. А.В. Влахова // Математические модели движения колесных аппаратов. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2014. 148 с.
2. И.В. Новожилов // Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
3. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов // Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
4. А.В. Влахова, А.П. Новодерова // Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами, Изв. РАН. МТТ, 1 2019. 23–49.
5. Н.В. Радска // Tyre and vehicle dynamics. Warrendale, PA. Soc. Automotive Eng., 2005. 621 p.
6. И.В. Новожилов, П.А. Кручинин, М.Х. Магомедов // Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью, Сб. научно-методических статей. М.: Изд-во МГУ, 23 2000. 86–95.
7. А.В. Влахова, И.В. Новожилов // О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес, Фундамен. и прикл. математика, 11:7 2005. 11–20.
8. А.В. Влахова, И.В. Новожилов, И.А. Смирнов // Математическое моделирование заноса автомобиля, Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ., 6 2007. 44–50.
9. А.С. Литвинов // Управляемость и устойчивость автомобиля. М.: Машиностроение, 1971. 416 с.
10. С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев // Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 432 с.

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТОВ СО СЛОЖНОЙ ЛОКОМОЦИЕЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ

Горобцов А.С.^{1,2}, Тарасов П.С.², Марков А.Е.², Дианский А.В.²

1 - *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН*
2 - *Волгоградский государственный технический университет*
vm@vstu.ru

Аннотация. Представлен метод синтеза управления движением антропоморфных и зооморфных роботов. Метод базируется на обобщенной задаче динамического уравнивания механических систем, в которой программные законы изменения реакций в выбранных кинематических связях выполняются путем добавления функций управления в другие связи. Показывается строгое выполнение условий устойчивости для пространственной модели антропоморфного робота в виде точного воспроизведения траектории точки приложения главного вектора сил реакции к опорной поверхности. Даны примеры использования рассматриваемого метода в задачах синтеза управления одиночного и группового движения антропоморфных и зооморфных роботов.

Введение

Актуальной задачей в управлении движением роботов со сложной локомоцией, например, антропоморфных и зооморфных роботов, является выполнение требуемого закона перемещения точки приложения главного вектора сил реакции с опорой, т.н. точки нулевого момента (ТНМ). Управление траекторией ТНМ обеспечивает условия устойчивости робота и плавности его движений (отсутствие скачков координат). Уравнения кинематических связей, соответствующих движению ТНМ, являются неголономными, т.к. содержат вторые производные от координат. Реализованных в программных комплексах методов решения уравнений динамики для таких систем на настоящий момент не существует. В большинстве работ, посвященных управлению антропоморфными роботами, используется приближенные уравнения связи для ТНМ, в которых отбрасываются члены с производными [1]. Такое допущение значительно упрощает решение уравнений динамики, однако, дает приемлемые результаты только для малых скоростей движения роботов. В настоящей работе рассматривается метод точного воспроизведения заданной траектории ТНМ за счет управления выбранными приводами системы.

Теоретическое описание

Предлагаемый подход основан на обобщенной задаче динамического уравнивания [2], которая сводится к нахождению соответствующих управляющих функций одновременно с численным интегрированием уравнений математической модели системы. При численном интегрировании уравнений динамики на каждом шаге интегрирования решается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} - вектор координат всей системы размерностью n , \mathbf{M} — матрица инерции, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ - вектор позиционных, диссипативных и внешних сил, \mathbf{D} — матрица коэффициентов уравнений связей размерностью $k \times n$ ($k \leq n$), \mathbf{p} - вектор множителей Лагранжа размерностью k , $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ - вектор правых частей второй производной уравнений связей. Решение системы линейных алгебраических уравнений (1), при соответствующих обозначениях, записывается в форме

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (2)$$

Обобщенная задача динамического уравнивания заключается в следующем. Пусть в векторе реакций связей \mathbf{p} имеется подмножество реакций \mathbf{p}_1 с номерами из множества K_1 , количеством k_1 , значения которых должны принимать заданные величины, описываемые некоторыми функциями $\varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, k_1$. Предположим также, что в векторе реакций связей \mathbf{p} имеется подмножество реакций \mathbf{p}_2 с номерами из множества K_2 , количеством k_2 , которые могут варьироваться за счет изменения значений функций управления $h_{2j}(t), j = 1, 2, \dots, k_2$. В [2] показывается, что при численном интегрировании (1) на каждом шаге интегрирования функции управления находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{h}_2(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10}, \quad (4)$$

где \mathbf{A}_1^{-1} соответствующая множеству K_1 подматрица \mathbf{A}^{-1} - состоит из строк \mathbf{A}^{-1} , номера которых принадлежат K_1 , $\mathbf{p}_{10} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}$.

Примеры задач

Рассмотрена задача сохранения равновесия роботом андроидом в неподвижном состоянии при смещении ц.м. назад с превышением на 1 см периметра области опоры стоп – рис. 1. Поскольку условие статической устойчивости не выполняется, то на некотором начальном промежутке времени робот удерживает равновесие за счет резкого изгиба корпуса назад.

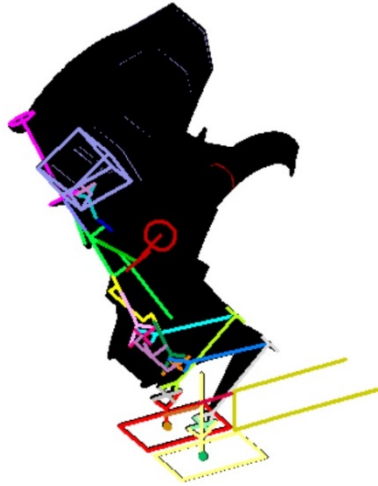


Рис. 1. Кинограмма опрокидывания антропоморфного робота.

На рис. 2. показана кинограмма движения двух шестиногих роботов при переносе единого груза [3]. Управляемое движение получено для условия равенства нагрузок на каждый из роботов.

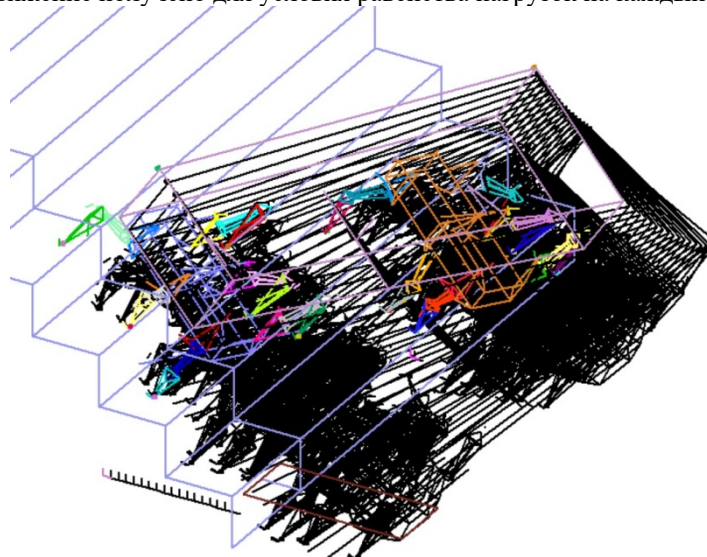


Рис. 2. Кинограмма программного движения двух шестиногих роботов с грузом по лестнице.

Заключение

Предложенный метод синтеза управляемого движения механических систем позволяет точно учитывать условия, наложенные на выбранные кинематические связи. Метод может быть применим к различным классам машин и механизмов.

Литература

1. А.С. Горобцов, А.Е. Андреев, А.Е. Марков, Ан.В. Скориков, П.С. Тарасов // Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов, Труды СПИИРАН = SPIIRAS Proceedings. - 2019. - Т. 18, № 1. - 85-122.
2. А.С. Горобцов, О.А. Сычев, Ю.А. Орлова, Е.А. Смирнов, О.Е. Григорьева, А.М. Бочкин, М.И. Андреева // Optimal Greedy Control in Reinforcement Learning, Sensors, 2022, Vol. 22, issue 22 (November-2). - Article 8920. - 14 p. - DOI: <https://doi.org/10.3390/s22228920>
3. А.С. Горобцов, А.К. Алешин, Г.В. Рашоян, С.А. Скворцов, К.А. Шалухин // Управление согласованным движением группы шагающих роботов при переносе груза, Справочник. Инженерный журнал. - 2019. - № 6 (267). - С. 9-16 + 2-я стр. обложки.

УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Жога В.В., Нелюбова А.В., Шаронов Н.Г.

Волгоградский Государственный Технический Университет, Волгоград, Россия
mqdschen@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются условия управляемости манипулятора параллельно-последовательной структуры с дополнительной геометрической связью. Устанавливается связь между скоростями исполнительных приводов и конфигурацией манипулятора. Определяются особые положения механизма манипулятора.

Введение

В настоящее время в развитии роботизированного производства большую роль играют манипуляторы параллельно-последовательной структуры, состоящие из механизмов последовательной и параллельной кинематических схем. Одним из существующих разновидностей манипуляторов параллельно-последовательной структуры является манипулятор-трипод на поворотном основании [1]. Однако нагрузка на рабочем органе приводит к возникновению изгибающих моментов на линейные приводы. В результате возникает возможность их заклинивания. Для исключения заклинивания линейных приводов разработана кинематическая схема манипулятора-трипода с дополнительной геометрической связью [2]. Такие манипуляторы могут применяться для скоростного позиционирования рабочего органа. Поэтому разработка аналитических методов синтеза программных ориентирующих перемещений исполнительных звеньев при выполнении технологических операций является актуальной задачей.

Объект исследования

Рассматривается манипулятор-трипод, конструкция которого состоит из трех линейных исполнительных звеньев 1, 2, 3, одни концы которых с помощью двухподвижных шарниров установлены на основании ABC в форме равнобедренного треугольника, а другие концы закреплены с помощью сферических шарниров на выходном звене 6 полой трубы 5 (рис. 1). Труба может свободно перемещаться вдоль оси втулки 7, но не может совершать поворот вокруг ее оси. Центральная полая труба 5 обеспечивает жесткость конструкции и принимает на себя изгибающие моменты от внешних нагрузок, возникающих при работе манипулятора. Четвертый линейный привод 4 обеспечивает поворот основания ABC , увеличивая рабочую зону манипулятора.

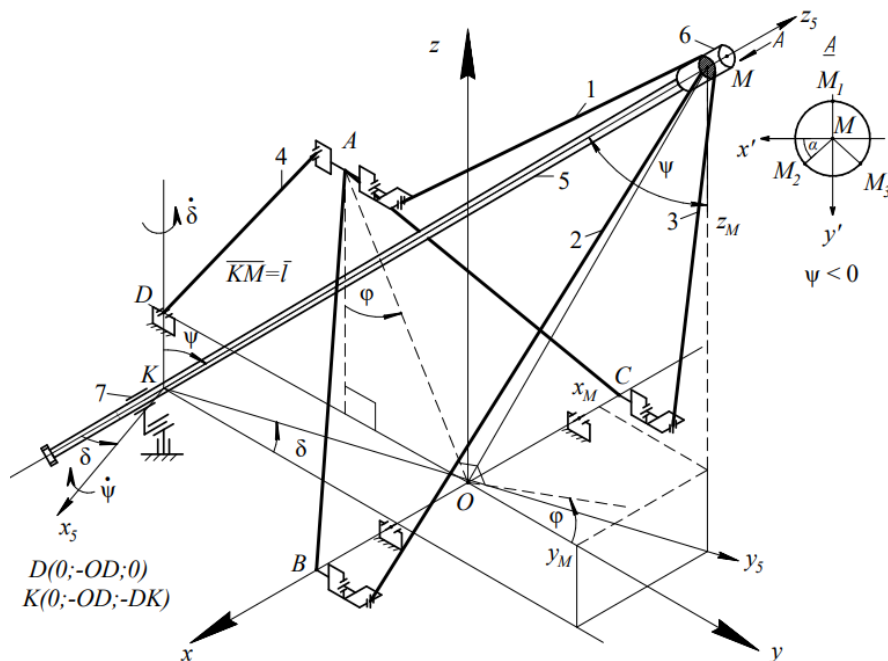


Рис. 1. Кинематическая схема манипулятора

Манипулятор имеет четыре степени подвижности [1, 2] и его конфигурацию можно описать обобщенными координатами: длиной отрезка полой трубы $q_1 = KM$, углами $q_2 = \psi$, $q_3 = \delta$, определяющими

положение подвижной системы координат $Kx_5y_5z_5$ относительно неподвижной $Oxyz$, а также угол $q_4 = \varphi$ наклона основания манипулятора. $OA, OB = OC, OD, DK$ – геометрические параметры основания манипулятора и точек крепления на поворотном основании (рис. 1).

Уравнения, связывающие обобщенные координаты и длины исполнительных звеньев $l_k(t)$, $k = 1 \div 4$ имеют вид [2]

$$l_1^2 = KM^2 + r^2 + OA^2 + OD^2 + DK^2 + 2OA(DK \cos \varphi - OD \sin \varphi) - 2OA \cdot KM \sin \varphi \sin \psi \cos \delta - 2OAr \sin \varphi \cos \psi \cos \delta + 2OD \cdot KM \sin \psi \cos \delta + 2ODr \cos \psi \cos \delta + 2OAr \cos \varphi \sin \psi - 2DK \cdot KM \cos \psi + 2DKr \sin \psi, \quad (1)$$

$$l_2^2 = OB^2 + OD^2 + DK^2 + KM^2 + r^2 + 2 \cdot (OB \sin \delta - OD \cos \delta) \cdot (r \sin \alpha \cos \psi - KM \sin \psi) - 2r \cos \alpha (OB \cos \delta + OD \sin \delta) - 2DK (KM \cos \psi + r \sin \alpha \sin \psi), \quad (2)$$

$$l_3^2 = OC^2 + OD^2 + DK^2 + KM^2 + r^2 + 2(OC \sin \delta + OD \cos \delta) \cdot (KM \sin \psi - r \sin \alpha \cos \psi) + 2r \cos \alpha (OD \cdot \sin \delta - OC \cos \delta) - 2DK (KM \cos \psi + r \sin \alpha \sin \psi), \quad (3)$$

$$l_4^2(t) = (OD - OA \sin \varphi)^2 + OA^2 \cos^2 \varphi. \quad (4)$$

Постановка задачи

В нашем случае, управляемостью исполнительных приводов манипулятора можно называть наличие взаимно однозначного соответствия между их перемещениями и перемещениями рабочего органа. Ставится задача определения аналитических зависимостей между задаваемыми программными перемещениями рабочего органа и перемещениями исполнительных приводов.

Метод решения и результаты

Связь между вектором скоростей исполнительных управляющих звеньев, и вектором скоростей изменения длины отрезка KM , его угловых скоростей и угловой скоростью поворотного основания, имеет вид

$$V_l = I(KM, \psi, \delta, \varphi) \cdot V_q, \quad (5)$$

где $V_l = [l_1, l_2, l_3, l_4]^T$ – вектор скоростей исполнительных линейных звеньев манипулятора; $V_q = [KM, \dot{\psi}, \dot{\delta}, \dot{\varphi}]^T$ – вектор скоростей изменения длины отрезка KM , его угловых скоростей и угловой скорости поворотного основания [3].

Функциональная матрица Якоби 4×4 $I(KM, \psi, \delta, \varphi)$ состоит из частных производных

$$\zeta_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial q_j}, \quad (i, j = 1 \div 4). \quad (6)$$

Эту матрицу принято называть управляющей. Обращение определителя матрицы Якоби в нуль является признаком особого положения механизма. Неравенство определителя нулю является необходимым и достаточным условием существования и единственности решения уравнения (5), то есть обеспечение однозначного соответствия между задаваемыми программными скоростями обобщенных координат и скоростями исполнительных звеньев.

Элементы матрицы определяем по формулам (6) с учетом (1–5)

$$\zeta_{11} = \frac{\partial l_1}{\partial KM} = \frac{KM + OD \cdot \sin \psi \cos \delta - OA \cdot \sin \varphi \sin \psi \cos \delta - DK \cdot \cos \psi}{l_1}, \quad (7)$$

$$\zeta_{12} = \frac{\partial l_1}{\partial \psi} = \frac{-OA \cdot KM \sin \varphi \cos \psi \cos \delta + OAr \sin \varphi \sin \psi \cos \delta + OD \cdot KM \cos \psi \cos \delta + -ODr \sin \psi \cos \delta + OAr \cos \varphi \cos \psi + DK \cdot KM \sin \psi + DKr \cos \psi}{l_1}, \quad (8)$$

$$\zeta_{13} = \frac{\partial l_1}{\partial \delta} = \frac{OA \cdot KM \sin \varphi \sin \psi \sin \delta + OAr \sin \varphi \cos \psi \sin \delta - OD \cdot KM \sin \psi \sin \delta - ODr \cos \psi \sin \delta}{l_1}, \quad (9)$$

$$\zeta_{14} = \frac{\partial l_1}{\partial \varphi} = OA \cdot \frac{-(DK \sin \varphi + OD \cos \varphi) - KM \cos \varphi \sin \psi \cos \delta - r \cos \varphi \cos \psi \cos \delta - OA \cdot r \sin \varphi \sin \psi}{l_1}, \quad (10)$$

$$\zeta_{21} = \frac{\partial l_2}{\partial KM} = \frac{KM - (OB \sin \delta - OD \cos \delta) \sin \psi - DK \cos \psi}{l_2}, \quad (11)$$

$$\zeta_{22} = \frac{\partial l_2}{\partial \psi} = \frac{-(OB \sin \delta - OD \cos \delta) \cdot (r \sin \alpha \sin \psi + KM \cos \psi) + DK (KM \sin \psi - r \sin \alpha \cos \psi)}{l_2}, \quad (12)$$

$$\zeta_{23} = \frac{\partial l_2}{\partial \delta} = \frac{(OB \cos \delta + OD \sin \delta) \cdot (r \sin \alpha \cos \psi - KM \sin \psi) + r \cos \alpha (OB \sin \delta - OD \cos \delta)}{l_2}, \quad (13)$$

$$\zeta_{31} = \frac{\partial l_3}{\partial KM} = \frac{KM + (OC \sin \delta + OD \cos \delta) \sin \psi - DK \cos \psi}{l_3}, \quad (14)$$

$$\zeta_{32} = \frac{\partial l_3}{\partial \psi} = \frac{(OC \sin \delta + OD \cos \delta) \cdot (KM \cos \psi + r \sin \alpha \sin \psi) + DK (KM \sin \psi - r \sin \alpha \cos \psi)}{l_3}, \quad (15)$$

$$\zeta_{33} = \frac{\partial l_3}{\partial \delta} = \frac{(OC \cos \delta - OD \sin \delta) \cdot (KM \sin \psi - r \sin \alpha \cos \psi) + r \cos \alpha (OD \cdot \cos \delta + OC \sin \delta)}{l_3}, \quad (16)$$

$$\zeta_{34} = \frac{\partial l_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \zeta_{41} = \frac{\partial l_4}{\partial KM} = 0, \quad \zeta_{42} = \frac{\partial l_4}{\partial \psi} = 0, \quad \zeta_{43} = \frac{\partial l_4}{\partial \delta} = 0. \quad \zeta_{44} = \frac{\partial l_4}{\partial \varphi} = \frac{-OD \cdot OA \cos \varphi}{l_4}, \quad (17)$$

Приравнявая определитель матрицы Якоби нулю, найдем особые точки механизма манипулятора.

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{14} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} & 0 \\ \zeta_{31} & \zeta_{32} & \zeta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{44} \end{vmatrix} = \zeta_{44} \begin{vmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} \\ \zeta_{31} & \zeta_{32} & \zeta_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Из (18) следует что $\Delta_I = 0$ при $\varphi = \pi/2$. Это означает, что четвертый исполнительный цилиндр (рис. 1) находится в мертвом положении. При выборе значений конструктивных параметров основания это условие необходимо учитывать. Подставляя в (18) выражения (7–17), получаем уравнение, связывающее геометрические параметры манипулятора с обобщенными координатами

$$\begin{aligned} & (KM + OD \cdot \sin \psi \cos \delta - OA \cdot \sin \varphi \sin \psi \cos \delta - DK \cdot \cos \psi) \cdot \\ & \cdot [OD \cdot (r \sin \alpha \sin \psi + KM \cos \psi) + DK (KM \sin \psi - r \sin \alpha \cos \psi)] - \\ & - (KM + OD \sin \psi - DK \cos \psi) \cdot \begin{bmatrix} -OA \cdot KM \sin \varphi \cos \psi + OAr \sin \varphi \sin \psi + OD \cdot KM \cos \psi - \\ -ODr \sin \psi + OAr \cos \varphi \cos \psi + DK \cdot KM \sin \psi + DKr \cos \psi \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Близость выражения (19) к нулю означает резкий рост программных усилий исполнительных звеньев. Аналитические исследования показали, что значение угла δ не влияет на наличие особых положений.

Заключение

Получены аналитические выражения управляющей матрицы, связывающей скорости исполнительных звеньев с программными скоростями обобщенных координат манипулятора. Близость механизма к особым положениям требует сравнения необходимых затрат механической энергии исполнительных приводов с допустимыми параметрами приводов исполнительных звеньев манипулятора. Наличие аналитического выражения для управляющей матрицы позволяет учитывать взаимное влияние приводов на перемещение рабочего органа манипулятора и определять особые положения механизма.

Литература

1. Исследование манипуляторов параллельно-последовательной структуры на базе трипода: монография / Н.С. Воробьева, И.А. Несмиянов, В.В. Жога, В.В. Дяшкин-Титов, А.В. Дяшкин, Волгоград: Волгоградский ГАУ, 2022.
2. Нелюбова, А. В. Технологический модуль на основе манипулятора параллельно-последовательной структуры / А. В. Нелюбова, В. В. Жога, Н. Г. Шаронов // XXXIV Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения : Сборник трудов конференции, Москва, 07–09 ноября 2022 года. – Москва: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, 2022. – С. 202-208.
3. О неустойчивых режимах работы электропривода манипулятора / И. А. Несмиянов, В. В. Жога, В. Н. Скакунов [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2017. – № 3. – С. 18-25.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ПРОТЯГИВАНИЯ ЛЕНТОЧНОГО МАТЕРИАЛА

Замурагин Ю.М., Саламандра К.Б., Саламандра Б.Л.

Институт Машиноведения РАН, Москва, Россия
yury.zamuragin@yandex.ru

Аннотация. При использовании рулонных материалов важной задачей является обеспечение постоянства натяжения ленты и отсутствия провиса. На основе анализа известных решений предложен новый механизм разматывания и протягивания рулонного материала. Динамический анализ показал, что разработанное устройство обеспечивает постоянную силу натяжения сматываемой ленты материала и не допускает инерционной выбег рулона. Кроме того, созданный механизм позволяет уменьшить скачки силы натяжения ленты в моменты разгона и торможения привода протягивания.

Введение

В промышленном производстве исходным материалом для будущих изделий довольно часто является свернутая в рулон лента: прокатная сталь, ткань, бумага, различные полимерные пленки и т.п. Для широкого спектра оборудования качество получаемых из листового материала изделий существенно зависит от натяжения ленты и отсутствия ее провисания. Существуют различные механизмы размотки рулонов и натяжения лент [1–3], недостатками которых являются восприятие нагрузки от инерционности рулона приводом протягивания ленты, потеря натяжения и провис ленты при инерционном выбеге рулона. Для решения этой задачи авторами на основании динамического исследования дискретного процесса размотки ленты из рулона был разработан новый механизм, обеспечивающий постоянство силы натяжения и уменьшение нагрузки на привод протягивания [4]. Динамический анализ разработанного устройства представлен в настоящей статье.

Описание

Кинематическая схема предложенного устройства разматывания и протягивания рулонного материала представлена на рис. 1.

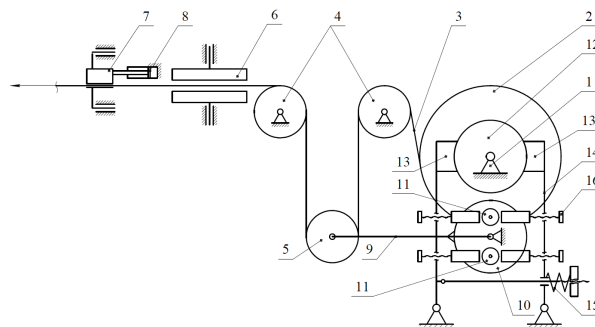


Рис. 1. Общий вид устройства: 1 – узел установки рулона, 2 – рулон, 3 – гибкая лента, 4 – неподвижные ролики, 5 – натяжной ролик, 6 – узел зажима и обработки материала, 7 – узел захвата, 8 – привод протягивания, 9 – поворотный рычаг, 10 – планшайба, 11 – кулачки, 12 – барабан колодочного тормоза, 13 – тормозные колодки, 14 – поворотный рычаг, 15 – пружина, 16 – регулируемые упоры.

В исходном состоянии между кулачками 11 и упорами 16 имеет место зазор, следовательно, колодки 13 тормоза прижаты к тормозному барабану 12 усилием пружины 15, обеспечивающей максимальный тормозной момент. Рулон 2, жестко связанный с тормозным барабаном, заторможен, и вся лента 3 от рулона до узла захвата 7 натянута усилием $P/2$ от веса P натяжного ролика 5. В начальной фазе движения – при разгоне – привод протягивания 8, преодолевая силу натяжения и инерцию ролика, будет поднимать его, поворачивая рычаг 9 и жестко связанную с ним планшайбу 10. В результате между кулачками 11, установленными на планшайбе, и упорами выберется зазор, и рычаги 14 с колодками 13 будут выходить из зоны контакта с барабаном 12, преодолевая усилие пружины и уменьшая тормозной момент. Когда тормозной момент станет меньше, чем момент от силы натяжения ленты, рулон начнет вращаться, а лента с него сматываться. По мере разгона рулона натяжной ролик перестанет подниматься вверх и остановится в положении, когда момент от силы натяжения ленты станет равным тормозному моменту – начало фазы установившегося движения. После ее завершения при торможении и остановке привода протягивания массивный рулон продолжит вращение по инерции, натяжной ролик будет перемещаться вниз, рычаг и планшайба повернется против часовой стрелки. В конечном итоге между кулачками и упорами образуется исходный зазор, колодки станут обжимать тормозной барабан, и вся кинетическая энергия, полученная рулоном в первых двух фазах протягивания, будет погашена максимальным

тормозным моментом от полного усилия пружины. Таким образом, на всех фазах протягивания сохраняется усилие натяжения ленты, а привод протягивания не загружен инерционностью рулона.

Следует отметить, что воздействие рычага через кулачки на поворотные рычаги с тормозными колодками несколько увеличивает усилие натяжения ленты.

Механизм (рис. 1) имеет две степени свободы: угол поворота рулона и угол поворота рычага. Рассматривая рулон как архимедову спираль и предполагая закон движения привода протягивания (рис. 2), с использованием принципа Даламбера [5] можно записать дифференциальные уравнения движения системы в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \phi_1'' = \frac{v' + \delta\phi_1'^2 - 2\beta\phi_2''}{\xi} \\ \phi_2'' = \frac{(\xi^4 + k_p - 1)(\delta\phi_1'^2 + v') + 2\mu(2\Phi_0\lambda_0 - \Phi_s\lambda)\xi - (1 + 2\Phi_s\kappa)\xi^2}{\beta(2\xi^4 + \sigma\xi^2 + 2(k_p - 1))} \end{cases} \quad (1)$$

где ϕ_1 – угол поворота рулона, ϕ_2 – угол поворота рычага, v – безразмерный закон изменения скорости привода протягивания, δ – безразмерная толщина материала, β – безразмерная длина поворотного рычага с роликом, ξ – безразмерный радиус рулона, k_p – отношение плотности материала ленты к плотности материала втулки рулона, μ – коэффициент трения колодочного тормоза, Φ_0 – безразмерная сила поджатия пружины, λ – отношение плеча упора к длине поворотного рычага с тормозными колодками, λ_0 – отношение плеча пружины к длине поворотного рычага с тормозными колодками, Φ_s – безразмерная реактивная сила, возникающая при контакте упоров с кулачками, κ – отношение длины поворотного рычага с роликом к расстоянию от центра планшайбы до кулачка, σ – величина, обратная безразмерной гравитационной постоянной g .

Выражение для силы натяжения ленты, полученное в предположении, что она является нерастяжимой:

$$\Phi_T = \frac{\mu(2\Phi_0\lambda_0 - \Phi_s\lambda)}{\xi} + \frac{\xi^4 + k_p - 1}{2\xi^2} \phi_1'' \quad (2)$$

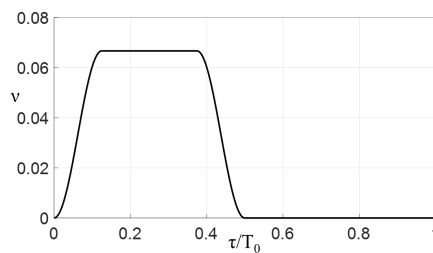


Рис. 2. Закон изменения скорости движения привода протягивания.

Результаты расчётов

Результат интегрирования системы (1) показаны на рис. 3. Из закона движения рычага с роликом (рис. 3б) видно, что в процессе размотки ленты рычаг 9 постоянно находится в контакте с упором с некоторыми скачками в моменты разгона и торможения привода протягивания, что обеспечивает изменение силы натяжения.

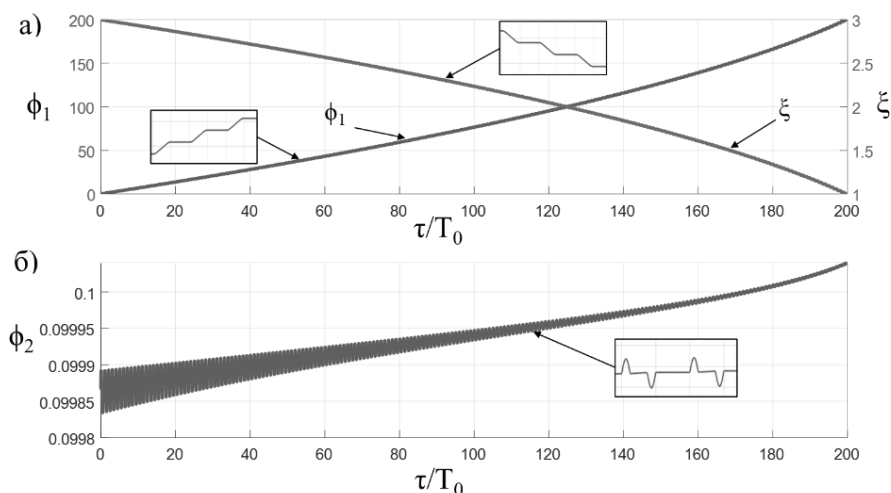


Рис. 3. Реализация движения системы: а) угол поворота рулона ϕ_1 , диаметр рулона ξ ; б) угол поворота рычага с роликом.

На основании полученных законов движения выполнен расчет силы натяжения, график которого

представлен на рис. 4. Из рис. 4а видно, что сила натяжения, необходимая для разматывания рулона при наличии устройства (кривая 1), уменьшилась на 20-60% (в зависимости от текущего диаметра рулона) по сравнению с механизмом протяжки, не имеющим поворотного рычага с подвижным роликом (кривая 2). При этом за время протяжки ленты, и, соответственно, уменьшения диаметра рулона (рис. 3а), сила натяжения увеличивается в 1,5 раза (кривая 1), а ее скачки в момент начала и конца протяжки (рис. 4б) в 3,5 раза меньше, чем при использовании механизма без рычага и тормоза, в котором сила натяжения за время размотки рулона увеличивается в 3 раза. Следует отметить, что существенные скачки силы натяжения приводят к образованию остаточных деформаций, которые могут приводить как к потере натяжения ленты материала и, следовательно, к ухудшению качества производимой продукции, так и к разрыву ленты и полной потере его натяжения.

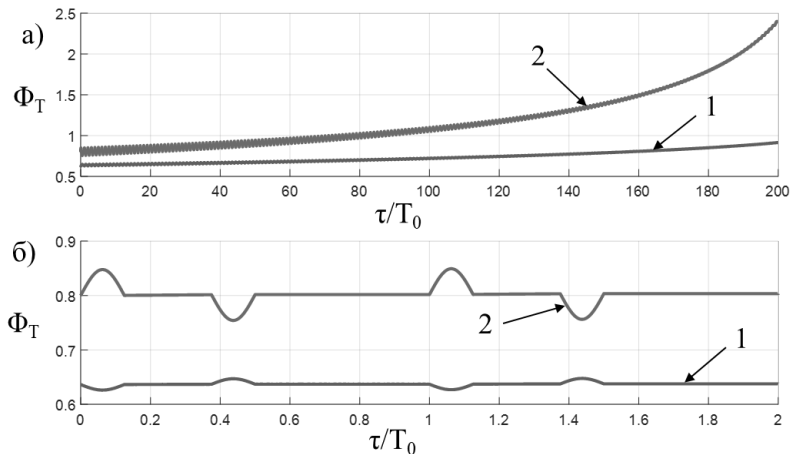


Рис. 4. Сравнение сил натяжения ленточного материала: 1 – сила натяжения при наличии устройства; 2 – сила натяжения без устройства.

Заключение

Таким образом, аналитически показано, что разработанный механизм обеспечивает постоянство силы натяжения ленты материала, сматываемого с рулона. Наличие ролика, размещенного на качающемся рычаге, и тормоза позволяет избежать инерционного выбега рулона и потери натяжения, что является важным в дискретном режиме работы оборудования. Дополнительным преимуществом созданного механизма является демпфирование скачкообразного изменения силы натяжения ленты в моменты разгона и торможения привода протягивания.

Литература

1. Жавнер В. Л., Чжао Вэнь, У Лун. Исследование мехатронного устройства для размотки и протягивания рулонных материалов в дискретном режиме // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 4. С. 322—329.
2. Niederer Kurt W., Let-off device with constant tension. Патент №US7338004B2, 04.03.2008 г.
3. Осипов В.Г., Шошунов Н.Л. Регулятор натяжения гибкого элемента, сматываемого с барабана. Патент №RU2162434C1, 27.01.2001 г.
4. Саламандра Б.Л., Саламандра К.Б., Замурагин Ю.М. «Устройство разматывания и протягивания рулонного материала» Патент № RU2790182C1, 15.02.2023г.
5. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. Под общ ред. К.С. Колесникова. 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.: ил. (Сер. Механика в техническом университете; Т.1)

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ УСКОРЕНИЯ И ЗАМЕДЛЕНИЯ ШАГАЮЩЕГО РОБОТА ПОД ВОДОЙ

Калинин Я.В.

*Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова
jkv83@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается построение оптимальных с точки зрения энергетической эффективности законов движения шагающего робота на твёрдом грунте под водой. С помощью методов классического вариационного исчисления строятся законы оптимального по критерию минимума потерь энергии ускорения и замедления робота. Получаемые законы движения соответствуют экстремали исследуемого функционала качества.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ совместно с Администрацией Волгоградской области № 22-21-20115.

Введение

Современное состояние развития мобильных роботов требует решение одного из главных вопросов их эффективного применения, а именно – повышение энергетической эффективности, которая заключается в повышении автономности и продолжительности работы без пополнения запасов энергии от внешних источников работы. Основные пути решения такой задачи два: повышение энергоёмкости аккумуляторов энергии, находящихся на борту робота, или снижение непроизводительных затрат энергии на движение робота. Поэтому актуальной является задача снижения непроизводительных потерь энергии при движении шагающих роботов, так как такой вариант тоже позволит повысить автономность мобильных роботов.

Модельная задача оптимизации ускорения и замедления шагающего робота под водой

Ключевой проблемой низкой энергетической эффективности шагающих роботов является неуравновешенность шагающего движителя [1, 2]. Для некоторых перспективных типов шагающих движителей можно добиться лучшей уравновешенности за счёт конструкции [3] или уравновешивания [4], однако, как правило, можно достичь только полной статической уравновешенности, в то время как моментной уравновешенности достичь существенно сложнее и добиться полной моментной уравновешенности для подавляющего большинства движителей, отличных от колеса, принципиально невозможно. Неуравновешенность шагающих движителей приводит к резкому росту потерь энергии на перенос движителей из одного положения в другое. Показано [5, 6], что рост мощности для обеспечения переноса движителей шагающего аппарата при поддержании постоянной скорости корпуса пропорционален кубу скорости корпуса, что существенно ограничивает возможности увеличения скорости движения шагающих роботов. Применение различных рекуператоров [7] энергии усложняет и удорожает конструкцию шагающей машины. В.В. Белецким [1] выдвигалась идея о возможности достижения существенного повышения энергоэффективности шагающих роботов при отказе от равномерного движения корпуса. В таком случае рекуператором механической энергии служит корпус робота, являясь по сути маховиком значительной массы, уже находящимся в конструкции машины. Ранее была показана [8–10] эффективность применения такого подхода к установившемуся движению шагающих аппаратов, позволяющая добиться существенного роста энергетической эффективности. Однако, задача рассмотрения энергетически эффективного ускорения или замедления шагающего робота ранее не ставилась и не решалась.

Ставится задача определения оптимальных режимов поступательного движения шагающего робота под водой, центр масс которого движется прямолинейно, и поступательного, вдоль горизонтальной оси, перемещения опоры переносимого механизма шагания, рассматриваемых как твердые тела в неустановившемся режиме движения, когда корпус робота постепенно разгоняется от нулевой скорости до скорости, соответствующей установившемуся движению. Под оптимальным в данном случае подразумевается такой режим движения корпуса и переносимого неуравновешенного движителя, при котором обеспечивается минимум квадратичного функционала потерь энергии в приводных двигателях, а также выполняется условие совместного перемещения корпуса и движителя (изопериметрическое условие функционала).

Полученные зависимости могут применяться при управлении движением шагающих роботов, например, шагающего робота «Ортоног» (рис. 1) [11].



Рис. 1. Шагающий робот «Ортоног».

Расчетная схема робота как механической системы с двумя степенями свободы вдоль горизонтальной оси приведена на рис. 2, где 1 – корпус; 2 – эквивалентный механизм шагания в фазе переноса; 3 – эквивалентный механизм шагания в фазе опоры; 4 – привод курсового движения; 5 – грунт ранее уже применялась в работах [9, 12] и соответствует точности, которая обеспечивает существенно увеличение энергетической эффективности шагающего робота, хотя исключено рассмотрение переноса движителя в вертикальной плоскости и возможные колебания корпуса в вертикальной плоскости. В рассмотрение вводятся силы: P – постоянная сила сопротивления движению робота, приложенная к корпусу (например, постоянная сила полезного сопротивления) с учётом вязкого сопротивления воды, F_1 – сила, генерируемая приводом курсового движения механизма шагания, находящегося в опоре и приводящего в движение корпус, F'_2 – сила, генерируемая приводом курсового движения переносимого механизма шагания и приводящая в движение этот механизм шагания в относительном движении относительно корпуса с учётом сил вязкого сопротивления воды, F_2 – равная по величине F'_2 сила, приложенная к корпусу робота, R_3 – опорная реакция грунта под стопой опорного механизма шагания. За счёт применения в роботе «Ортоног» двоярных движителей [11] и их синхронного перемещения относительно корпуса обеспечивается статическая устойчивость робота, а движение подразумевается происходящим без проскальзывания опор 3 по грунту 5, поэтому в рамках принятой расчетной схемы $R_3 = F_1$.

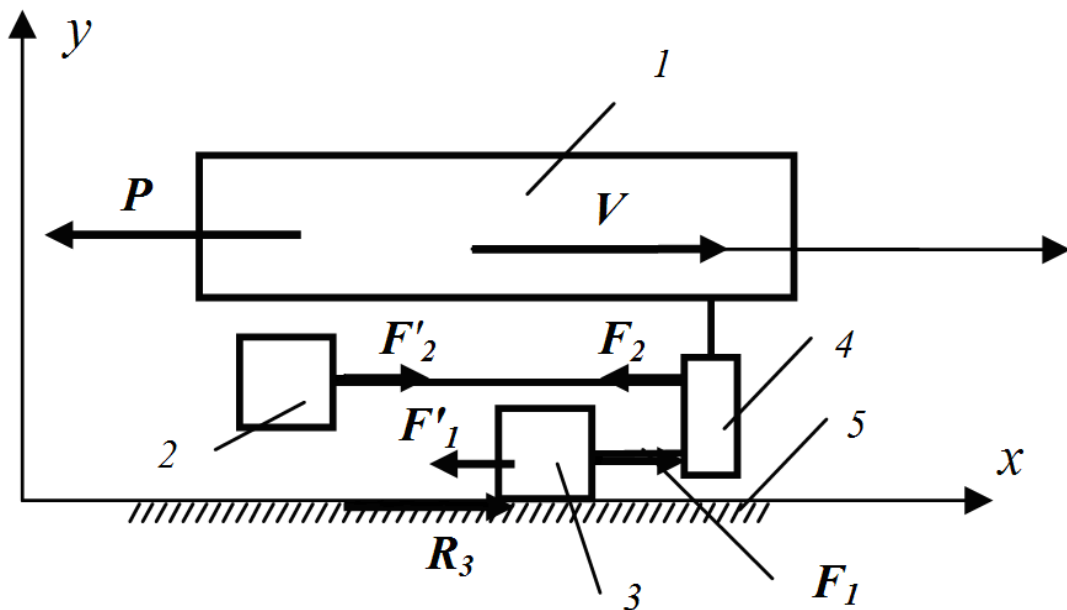


Рис. 2. Расчётная схема задачи.

Вводятся граничные условия:

$$\begin{aligned} V_1(0) &= \varepsilon V_0, V_1(\tau) = \gamma V_0, \\ V_2(0) &= V_2(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где τ – время шага V_1, V_2 – соответственно скорость поступательного прямолинейного движения какой-либо точки корпуса, например его центра масс, и скорость поступательного прямолинейного движения опорной точки эквивалентного механизма шагания в фазе переноса в абсолютном движении вдоль оси x , εV_0 – задаваемая скорость центра масс корпуса в начале ($t = 0$) и конце γV_0 шага ($t = \tau$). Скорость центра масс корпуса удобнее задавать в долях от крейсерской скорости V_0 , которую должен достигнуть корпус робота в конце разгона.

В данной работе энергетическая эффективность будет оцениваться тепловыми потерями в двигателях, что, например, для двигателей постоянного тока, даёт квадратичный функционал потерь, пропорциональных квадрату развиваемых приводами сил:

$$W = \int_0^{\tau} (F_1^2 + F_2^2) dt, \quad (2)$$

где F_1 – абсолютная величина силы, развиваемой приводом механизма шагания, находящегося в фазе опоры на грунт, приложенной к корпусу; F_2 – абсолютная величина силы, развиваемой приводом механизма шагания, находящегося в фазе переноса, приложенной к корпусу.

Заключение (или Выводы)

По результатам исследования получены зависимости перемещения корпуса шагающего робота и переносимого механизма шагания под водой в зависимости от установившейся скорости и коэффициента сопротивления движению в вязкой среде, можно сделать вывод о необходимости изменять скорость движения робота в нужных пределах за один шаг, при этом ускорение и замедление робота обладают двойственностью, поэтому можно рассматривать результаты данной работы, полученные для разгона, точно так же и для торможения с точностью до наоборот.

Литература

1. *Белецкий В.В.* Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления М.: Наука, 1984 - 288 с.
2. *Брискин Е.С., Павловский В.Е.* К истории разработок шагающих машин // Экстремальная робототехника: сб. докл. междунар. науч.-техн. конф. СПб., Центр технологии судостроения и судоремонта, ЦНИИ робототехники и техн. кибернетики. 2011. С. 69-76.
3. *Охоцимский Д.Е.* Шагающие машины. / Д.Е. Охоцимский, А.К. Платонов, А.А. Кирильченко, В.В. Лапшин // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1989, - 36 с.
4. П. м. 159369 РФ, МПК В62D57/032. Шагающее транспортное средство / Е.С. Брискин, Н.Г. Шаронов, Я.В. Калинин, А.В. Малолетов, В.А. Серов; ВолгГТУ. – 2016.
5. *Лапшин В.В.* Модельные оценки энергозатрат шагающего аппарата // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 1 - С. 65-74.
6. *Охоцимский Д.Е.* Энергетика движения шестиногого шагающего аппарата / Д.Е. Охоцимский, А.К. Платонов, В.В. Лапшин // Известия РАН. Теория и системы управления. 1976. №5. - С. 42-50.
7. *Гончаров С.И.* Анализ динамики периодической работы двигателей шагающих машин с целью увеличения их быстродействия / С.И. Гончаров // Дисс. канд. техн. наук. Ин-т машиноведения АН СССР. 1989.
8. *Калинин Я.В.* Оценка энергетической эффективности шагающих машин с цикловыми движителями // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2009. Т.12. №7. - С. 40-44.
9. *Брискин Е.С., Жога В.В., Малолетов А.В.* Об управлении движением шагающей машины с двигателем минимальной мощности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. № 6. - С. 21-30.
10. *Брискин Е.С., Калинин Я.В.* Об энергетически эффективных алгоритмах движения шагающих машин с цикловыми движителями // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 2. С. 170-176.
11. *Брискин Е.С., Вершинина И.П., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г.* Об управлении движением шагающей машины со сдвоенными ортогонально-поворотными движителями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. - С. 168-176.

ДИНАМИКА РОБОТА ТРИМАРАНА, УПРАВЛЯЕМОГО ВНУТРЕННИМ МАХОВИКОМ

Климина Л.А., Голованов С.А., Голуб А.П.

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
klimina@imec.msu.ru

Аннотация. Рассматривается задача о движении тримарана по поверхности воды. Каждый поплавок в горизонтальном сечении имеет форму аэродинамического профиля. Взаимодействие поплавков с жидкостью описывается на основе гипотезы квазистационарного обтекания. Для поплавков и для погруженной в воду части корпуса учитываются эффекты, связанные с присоединенными массами. Внутри корпуса расположен управляемый маховик с вертикально осью вращения. Предложено управление маховиком, реализующее продвижение корпуса в заданном направлении. Результаты численного моделирования сопоставлены с экспериментальными данными, полученными при тестировании созданного макета.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-29-00472.

Введение

В настоящее время активно совершенствуются подходы к конструированию и моделированию робототехнических систем, способных перемещаться за счет движения внутренних масс [1]. Такие аппараты могут применяться для выполнения работ в агрессивных средах, когда необходимо максимально изолировать внутренние элементы робота от воздействия среды.

В данной работе будем рассматривать робота с твердотельной внешней оболочкой, который совершает плоско-параллельное движение в жидкости. Единственный управляющий сигнал – напряжение, подаваемое на двигатель, который вращает маховик, расположенный внутри корпуса. Основные отличия данного исследования от ближайших подобных работ [2, 3] следующие: существенно иная форма внешней оболочки робота, другая модель взаимодействия объекта с жидкостью.

Описание модели и постановка задачи

Исследуемый объект перемещается в горизонтальной плоскости и состоит из корпуса, трех жестко соединенных с ним поплавков, а также управляемого маховика с вертикальной осью вращения, расположенного внутри корпуса. Схема аппарата приведена на рис. 1. G – центр масс всей системы (совпадает с центром масс и осью вращения маховика); A, B, C – геометрические центры поплавков; $GC = a$, $GA = b = 0.5a$, $AB = 2c$. d – хорда профиля поплавка, S – площадь боковой стороны поплавка, ρ – плотность жидкости, M – полная масса робота, J – центральный момент инерции корпуса с поплавками, J_g – центральный момент инерции маховика. x, y – координаты точки G в неподвижной системе отсчета OXY , φ – угол между осью OX и GC , ϑ – угол поворота маховика относительно корпуса (циклическая координата).

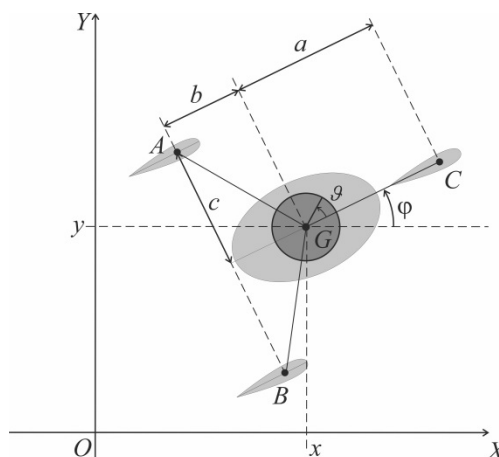


Рис. 1. Схема тримарана.

При описании взаимодействия робота с жидкостью гидродинамические силы вычисляем на основе квазистатического подхода, учитываем присоединенную массу и присоединенный момент инерции каждого

поплавка, а также погруженной в воду части корпуса. Каждый поплавок в горизонтальном сечении имеет форму аэродинамического профиля. Используем зависимости от угла атаки α коэффициента $C_l(\alpha)$ боковой силы L и $C_d(\alpha)$ силы сопротивления D для профиля NACA0015, аппроксимированные на основе экспериментальных данных [4]. Считаем, что центры приложения гидродинамических сил, действующих на поплавок, совпадают с точками A, B, C . Угол атаки α_p для соответствующего поплавка – угол между вектором скоростей \mathbf{V}_p скорости точки $P = \{A, B, C\}$ и хордой поплавка. Выражения для гидродинамических сил:

$$D_p = 0.5\rho S V_p^2 C_d(\alpha_p),$$

$$L_p = 0.5\rho S V_p^2 C_l(\alpha_p), \quad P = \{A, B, C\}.$$

На корпус действует сила сопротивления $D_G = 0.5\rho S_G (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) C_G$. Здесь S_G – характерная площадь корпуса, $C_G = 0.005$ – коэффициент сопротивления.

При расчете коэффициента m_p присоединенных масс и присоединенного момента инерции J_p поплавок используем формулу из [5] для плоской пластины (пренебрежем толщиной профиля): $m_p = \pi\rho S d / 4$, $J_p = \pi\rho d^3 S / 128$. При вычислении коэффициентов m_1, m_2 присоединенных масс и присоединенного момента инерции J_G корпуса применяем формулы из [5] для эллиптического цилиндра высоты h с полуосями l_1, l_2 ($l_1 > l_2$): $m_1 = \pi\rho h l_2^2$, $m_2 = \pi\rho h l_1^2$, $J_G = \pi\rho h (l_1^2 - l_2^2)^2 / 8$.

Уравнения движения объекта можно представить в виде:

$$\begin{cases} f_1 = D_{Gx} + D_{Ax} + D_{Bx} + D_{Cx} + L_{Ax} + L_{Bx} + L_{Cx}, \\ f_2 = D_{Gy} + D_{By} + D_{Cy} + L_{Ay} + L_{By} + L_{Cy}, \\ f_3 = T_\varphi = T_A + T_B + T_C, \quad T_p = (x_p - x)(D_{py} + L_{py}) - (y_p - y)(D_{px} + L_{px}), \quad P = \{A, B, C\}, \\ J_g(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) = T_g(U, \dot{\vartheta}) = c_1 U - c_2 \dot{\vartheta}. \end{cases}$$

$$f_1 = (M + m_1 + 3m_p \sin^2 \varphi) \ddot{x} - 1.5m_p \ddot{y} \sin 2\varphi + 3m_p (\dot{x}\dot{\varphi} \sin 2\varphi - \dot{y}\dot{\varphi} \cos 2\varphi) + m_p (2b - a)(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$f_2 = (M + m_2 + 3m_p \cos^2 \varphi) \ddot{y} - 1.5m_p \ddot{x} \sin 2\varphi - 3m_p (\dot{x}\dot{\varphi} \cos 2\varphi - \dot{y}\dot{\varphi} \sin 2\varphi) + m_p (a - 2b)(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$f_3 = (J + J_g + J_G + 3J_p + m_p (2b^2 + a^2)) \ddot{\varphi} + J_g \ddot{\vartheta} + m_p (2b - a)(\ddot{x} \sin \varphi - \ddot{y} \cos \varphi) + 1.5m_p (\dot{y}^2 - \dot{x}^2) \sin 2\varphi + 3m_p \dot{x} \dot{y} \cos 2\varphi.$$

Здесь индексы x, y обозначают проекцию вектора на соответствующую ось системы OXY ; $T_g(U, \dot{\vartheta})$ – момент, приложенный к маховику со стороны мотора, U – напряжение, подаваемое на мотор, c_1, c_2 – параметры мотора.

Цель управления: обеспечить существование притягивающего установившегося режима движения системы, при котором скорость центра масс имеет положительную среднюю проекцию на ось OX и нулевую среднюю проекцию на ось OY , а среднее значение угла φ ориентации корпуса нулевое.

Управление строим в следующем виде:

$$U = \begin{cases} U_*, & |U_*| \leq U_{\max}, \\ \text{signum}(U_*) \cdot U_{\max}, & |U_*| > U_{\max}, \end{cases}$$

$$U_* = -(u_0 \text{signum}(\sin(\omega_0 t)) - k_0 y - k_1 \varphi).$$

Первое слагаемое в U_* обеспечивает возбуждение колебаний маховика, а вслед за ним – и корпуса с поплавками. Другие два слагаемых призваны обеспечить нулевое среднее отклонение корпуса от желаемого курса на установившемся движении.

Результаты моделирования

Зафиксируем следующие значения геометрическо-массовых параметров модели (они приблизительно описывают собранный прототип устройства): $a = 0.16$ м, $c = 0.12$ м, $M = 0.58$ кг, $J = 0.0011$ кгм², $J_g = 0.00014$ кгм², $\rho = 1000$ кг/м³, $l_1 = 0.095$ м, $l_2 = 0.065$ м, $h = 0.018$ м, $d = 0.08$ м, $S = 0.0096$ м², $S_G \approx 0.024$ м², а также характеристики мотора $U_{\max} = 10$ В, $c_1 = 0.0057$ В/Н, $c_2 = 0.0022$ кгм/с и все параметры закона управления, кроме частоты ω_0 вынуждающего воздействия: $u_0 = 0.8U_{\max}$, $k_0 = 10$ В/м, $k_1 = 10$ В.

Для различных значений $\omega_0 \leq 5$ с⁻¹ численно ищем притягивающее периодическое решение уравнений движения с нулевым средним значением \dot{y} и ненулевым средним \dot{x} . При обнаружении такого решения вычисляем для него соответствующее V_{aver} – среднее значение \dot{x} . Установлено, что искомый тип решения существует при $\omega_0 > 0.78$ с⁻¹. Полученная зависимость $V_{aver}(\omega_0)$ представлена на рис. 2.

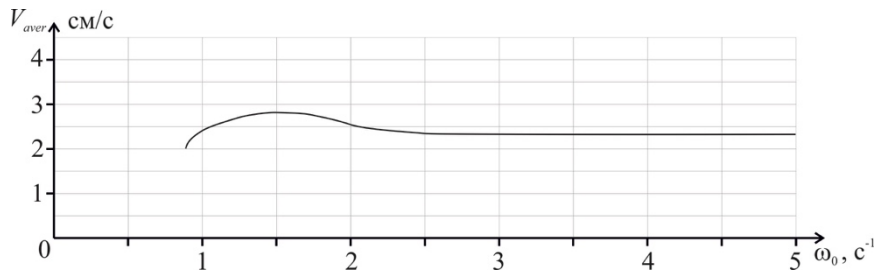


Рис. 2. Расчетная зависимость средней скорости корпуса от вынуждающей частоты.

Собран прототип тримарана. Проведена серия экспериментов с определением зависимости средней скорости направленного движения от частоты ω_0 вынуждающего воздействия. Экспериментальный график $V_{aver}(\omega_0)$ приведен на рис. 3.

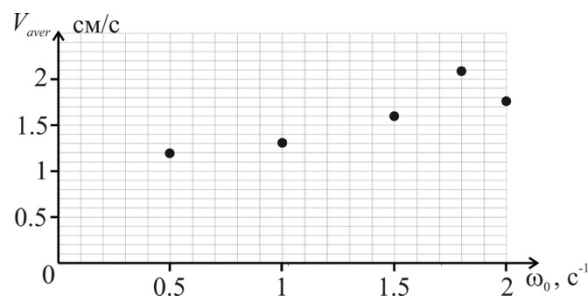


Рис. 3. Экспериментальная зависимость средней скорости корпуса от вынуждающей частоты.

Таким образом, теоретически и экспериментально установлено, что предложенное управление позволяет реализовать режим направленного продвижения тримарана. Отличия экспериментальной и теоретической зависимостей $V_{aver}(\omega_0)$ могут быть вызваны, в частности, малыми габаритами экспериментального бассейна (лишь в 3-4 раза больше габаритов прототипа), что привело к заметному влиянию стенок. В дальнейшем планируется проведение серии экспериментов в большом бассейне.

Заключение

Предложена конструкция робота тримарана, управляемого движениями внутреннего маховика. На основе гипотезы квазистационарной построена модель движения объекта. Нестационарные эффекты учитываются путем введения присоединенных масс. Построено управление маховиком, позволяющее реализовать режим продвижения тримарана в заданном направлении. Результативность управления подтверждена в экспериментах с прототипом аппарата.

Литература

1. Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник // Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. 2022. 464 с.
2. B. Pollard, P. Tallapragada // An Aquatic Robot Propelled by an Internal Rotor. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 22:2 2017. 931-939.
3. Y.L. Karavaev, A.V. Klekovkin, I.S. Mamaev, V.A. Tenenev, E.V. Vetchanin // A simple physical model for control of a propellerless aquatic robot. J. Mechanisms & Robotics, 14:1 2022. 011007.
4. О.В. Молодых, В.П. Карликов, Г.И. Шоломович, А.Н. Хомяков // Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик профилей при стационарном и нестационарном обтекании. Отчет НИИ механики МГУ, 3872 1989. 89 с.
5. И. С. Риман и Р. Л. Крепс // Присоединенные массы тел различной формы. Труды ЦАГИ. 635 1947. 1-46.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ И ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРОСОВЫХ РОБОТОВ С ПОДВИЖНЫМИ КАРЕТКАМИ

Малолетов А.В.^{1,2}

1 - Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет
Иннополис, Иннополис, Россия

2 - Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия
a.maloletov@innopolis.ru

Аннотация. В исследовании решена задача моделирования динамики движения параллельных тросовых роботов с направляющими роликами на подвижных каретках, и на её основе разработан метод решения обратной задачи кинематики. Предложена система критериев оптимальности, разработаны методы многокритериальной оптимизации конструктивных параметров и законов управления такими системами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-29-01618.

Введение

Тросовые роботы представляют собой манипуляторы параллельного типа с гибкими упругими звеньями – тросами (рис. 1). Рабочие инструменты робота размещаются на мобильной платформе, которая подвешивается на нескольких тросах. Другие концы тросов проходят через направляющие ролики и наматываются на барабаны лебёдок, согласованно управляя которыми обеспечивается требуемое перемещение мобильной платформы в пространстве. Тросы являются неударживающими связями, поэтому для работы системы с небольшим количеством тросов требуется силовое замыкание, которое, как правило, обеспечивается силой тяжести. Для геометрического замыкания при пространственном движении мобильной платформы требуется не менее 7 тросов. Из соображений симметрии обычно используются 8 тросов, лебёдки для которых располагаются на 4 вертикальных опорах. Системное изложение базовых вопросов конструирования, моделирования и управления тросовыми роботами можно найти в монографиях [1, 2].

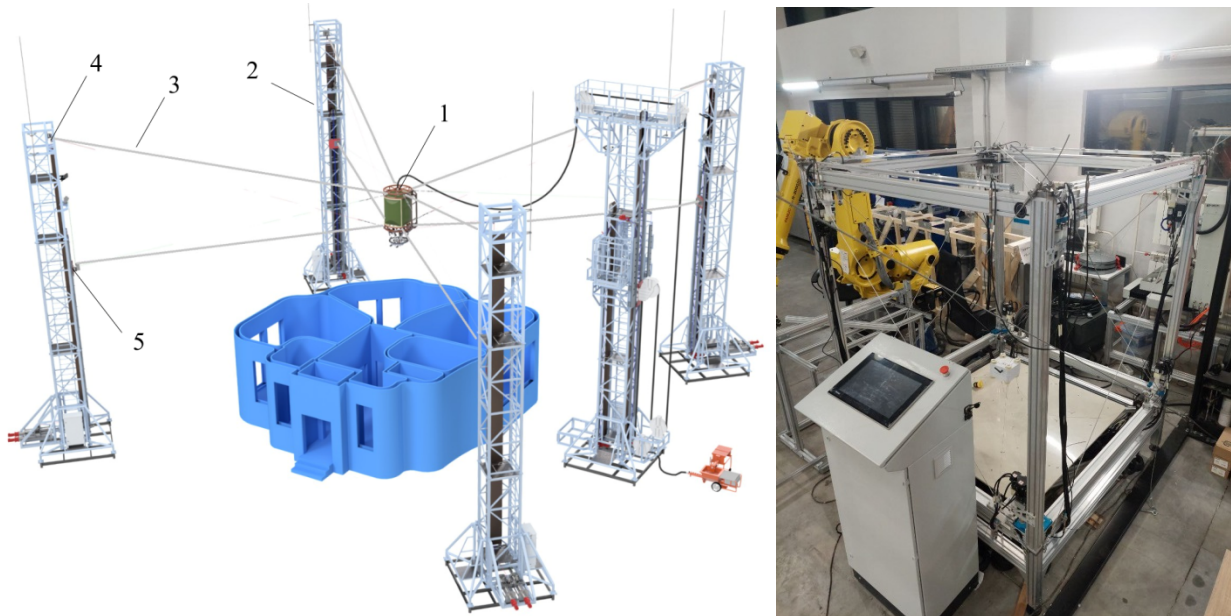


Рис. 1. Схема тросовой системы разрабатываемого строительного принтера (слева) и лабораторная модель тросового робота (справа). 1 – мобильная платформа, 2 – опора, 3 – трос, 4 – неподвижный направляющий ролик, 5 – подвижная каретка с роликом.

Направляющие ролики могут быть размещены на опорах неподвижно или быть установленными на подвижных каретках и иметь возможность перемещаться [3]. Приводы кареток работают параллельно приводам лебёдок, поэтому любое перемещение каретки должно сопровождаться согласованным движением соответствующей лебёдки. Однако конструкция и система управления тросового робота может предполагать как непрерывную работу приводов кареток при работе робота, так и перемещение кареток из одного фиксированного положения в другое при «остановленной» мобильной платформе. В случае перемещения кареток непрерывно синхронно с движением тросов число степеней свободы, работающих параллельно, увеличивается на число задействованных приводов кареток. Управление роботом значительно усложняется, а любые ошибки приводят к значительному возрастанию нагрузок на все приводы. В случае, перемещения

каретки при «остановленной» мобильной платформе одновременно работает только привод соответствующего троса, значительно снижаются нагрузки и требования к точности привода каретки. Фактически, в этом случае тросовый робот остаётся тросовой системой с фиксированными направляющими роликами, положение которых иногда меняется, для чего работа робота на время приостанавливается.

В случае, когда пролёты тросов невелики, а в качестве материала для них используются синтетические волокна с малым удельным весом и большой жёсткостью в продольном направлении, эластичными свойствами тросов можно пренебречь [4]. Упругими свойствами опор можно пренебречь, если опоры представляют собой жёсткую раму. Однако в общем случае тросы и опоры обладают значительной упругостью [5], которую следует учитывать в достаточно точных моделях.

Таким образом, рассматриваемый в работе восьмитросовый робот с подвижными каретками является сложной нелинейной системой эластичных тел с избыточным числом управляемых степеней свободы, которая характеризуется большим числом параметров и допускает бесконечное множество законов управления. Таким образом, решение оптимизационной задачи вне зависимости от критерия оптимизации должно включать в себя как поиск оптимальных конструкционных параметров системы, так и законов управления ею.

Математическое моделирование тросового робота

Обратная задача кинематики тросовых роботов заключается в том, чтобы по заданным желаемым обобщённым координатам мобильной платформы найти обобщённые координаты приводов лебёдок и подвижных кареток. При пренебрежении эластичными свойствами тросов и опор, такая задача решается достаточно просто. Причём подвижность кареток не добавляет сложностей, а заключается в простом учёте текущих координат каретки. Однако необходимость учитывать упругие деформации тросов и опорных элементов делает эту задачу намного более сложной. Поскольку деформации зависят от усилий, усилия зависят от законов движения, а законы движения, в свою очередь, зависят от деформаций, то нахождение обобщённых координат приводов лебёдок и подвижных кареток по заданным обобщённым координатам мобильной платформы становится возможным только через решение динамической модели.

Мобильная платформа тросового робота, как правило, представляет собой жёсткую раму, на которой размещено неподвижное или подвижное оборудование, например, экструдер 3D-принтера или манипулятор [6]. Таким образом, мобильная платформа с оборудованием может быть смоделирована системой твёрдых тел с наложенными на них связями и описана системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений [7].

Динамика движения тросов как гибких тяжёлых нитей описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [8]. В то же время, для оценки сил натяжения в тросах и учёта демпфирующих свойств материала троса используется известная модель Фойгта [9].

Опоры могут представлять собой достаточно сложные механические системы, моделирование которых может быть сделано с помощью методов конечно-разностного моделирования. Однако ранее проведённые исследования [5] показывают, что с достаточной точностью опора башенного типа может быть смоделирована как однородная консольно закреплённая вертикальная балка, известная также как балка Бернулли [9]. В этом случае математическая модель балки описывается алгебраическим уравнением, связывающим усилие, приложенное к балке со стороны троса, и деформацию балки, соответствующую смещению точки схода троса с направляющего ролика. Однако, возможность использования простых алгебраических уравнений для других типов конструкций опор, например, мачтового типа, требует дополнительных исследований.

Интегрирование полученной системы, которая включает обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и алгебраические уравнения, сопровождается определёнными методологическими сложностями, однако в рассматриваемом случае эту систему удаётся решить с относительно небольшими вычислительными затратами путём разделения на отдельные подсистемы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, их независимого решения и последующего сведения к общему решению методом последовательных итераций.

Определение обобщённых координат приводов тогда сводится к подбору значений, которые обращают в ноль невязку между расчётными и заданными значениями обобщённых координат платформы.

Критерии и методы оптимизации

Основным критерием для решения задач оптимизации выступают отклонения от заданного желаемого движения по линейным и угловым координатам мобильной платформы. При использовании одной и той же динамической модели как для расчёта законов управления, так и для проверки, статические отклонения будут отсутствовать. По сравнению же с реальным роботом статические отклонения будут определяться только погрешностями самой модели. Однако ошибки управления могут приводить к заметным статическим отклонениям, поэтому вектор критериев оптимальности может включать в себя частные производные обобщённых координат мобильной платформы от обобщённых координат приводов. Чем меньше значения этих критериев, тем меньше влияние погрешностей системы управления тросами на отклонения платформы от заданного закона движения.

В динамике отклонения могут быть весьма значительными. Причинами отклонений могут быть как внутренние факторы – быстрое изменение скорости движения, запаздывания в системе управления, так и

внешние – непредсказуемые силовые воздействия, например, от ветровой нагрузки. Как правило, это проявляется в виде колебаний мобильной платформы или тросов. Целью оптимизации должно быть снижение амплитуды колебаний до допустимых значений, а критериями – амплитуды линейных и угловых колебаний.

Потенциально возможное опрокидывание мобильной платформы является недопустимым. Критерием в этом случае может служить запас статической устойчивости, который определяется либо как момент, который необходимо приложить для опрокидывания платформы, либо как безразмерная величина – отношение указанного момента к весу и характерному размеру платформы. Этот критерий требует максимизации, поэтому на практике используется обратный критерий.

Несогласованное управление приводами параллельного тросового робота может приводить к резкому росту нагрузок на приводы даже при малых ошибках управления. Поэтому актуальным является оптимизация параметров и режимов движения тросового робота так, чтобы минимизировать как значения усилий на приводах, так и изменение этих усилий при ошибках управления. Критериями оптимизации выступает вектор значений усилий на приводах и их производных по обобщенным координатам приводов. Для нормализации критериев эти значения могут быть соотнесены с максимально допустимым усилием на конкретном приводе.

В процессе движения робота значения критериев меняются, поэтому целесообразно рассматривать не значения критериев в отдельные моменты времени, а минимизировать функционалы, вычисленные на базе описанных критериев. Параметры, которые варьируются в процессе оптимизации могут быть разделены на две группы: конструктивные параметры, которые могут быть оптимизированы на этапе проектирования робота и не меняются в процессе его эксплуатации, и параметры, описывающие законы управления и меняющиеся в процессе движения.

Таким образом, задача представляет собой многокритериальную многопараметрическую задачу оптимизации, целью которой является нахождение значений конструктивных параметров или законов управления, при которых достигается граница Парето-оптимальных решений. Для определения оптимальных значений параметров на этапе конструирования применяются методы поиска на многомерных кубах [10]. Однако для задачи генерации оптимальных законов управления эти методы требуют слишком больших вычислительных мощностей. Поэтому законы управления генерируются на базе либо комбинации ортогональных функций, либо методами вариационного исчисления [11].

Заключение

Разработанная динамическая модель и метод решения обратной задачи кинематики апробированы в системе управления лабораторной установкой тросового робота. Методы многокритериальной оптимизации конструктивных параметров и законов управления параллельными тросовыми роботами использованы при разработке прототипа тросовой системы строительного принтера.

Литература

1. Zi B., Qian S. Design, Analysis and Control of Cable-Suspended Parallel Robots and Its Applications. Springer Singapore, 2017.
2. Pott A. Cable-Driven Parallel Robots: Theory and Application. Springer International Publishing, 2018.
3. Патент № 2753324 С1 Российская Федерация, МПК E04B 1/16, B33Y 30/00. Строительный 3D принтер : № 2020140696 : заявл. 10.12.2020 : опубл. 13.08.2021 / М. М. Галимов, А. С. Климчик, А. В. Малолетов [и др.]
4. О выборе математических моделей висячих элементов при проектировании крупногабаритного параллельного тросового робота / Е. А. Марчук, Я. В. Калинин, М. А. Иванов, А. В. Малолетов // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2022. – № 9(268). – С. 56-62. – DOI 10.35211/1990-5297-2022-9-268-56-62.
5. Идрисова, С. М. Исследование деформаций металлических башен - опор параллельного тросового робота / С. М. Идрисова, Е. А. Марчук, А. В. Малолетов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2022. – № 2. – С. 113-123. – DOI 10.52261/02346206_2022_2_113
6. Марчук, Е. А. К вопросу гашения колебаний мобильной платформы гибридного тросового робота / Е. А. Марчук, Я. В. Калинин, А. В. Малолетов // Завалишинские чтения 21 : XVI Международная конференция по электромеханике и робототехнике, Санкт-Петербург, 15–18 апреля 2021 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2021. – С. 261-266. – DOI 10.31799/978-5-8088-1556-8-2021-16-261-266
7. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 296 с.
8. Меркин, Д.Р. Введение в механику гибкой нити / Д.Р. Меркин. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
9. Meyers M. A., Chawla K. K. Mechanical Behavior of Materials. Cambridge University Press, 2009. 856 p.
10. Соболев, И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учеб. пособие для вузов / И. М. Соболев, Р. Б. Статников — М.: Дрофа, 2006. — 175 с.
11. О прикладных экстремальных задачах с комплексным критерием качества / Е. С. Брискин, Я. В. Калинин, А. В. Леонард, А. В. Малолетов // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16–19 июля 2014 года. – Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 2184-2195.

РАСЧЕТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА КОНФИГУРАЦИИ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОЧУВСТВЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОРТРЕТА НАГРУЖЕНИЯ

Мещихин И.А., Гаврюшин С.С.

МГТУ им Н.Э. Баумана
meschihin@bmstu.ru

Аннотация. В работе представлена методика оценки состава и взаимного расположения средств измерений для синтеза информационно измерительной системы мониторинга нагружений конструкций. Портрет нагружения предлагается восстанавливать как этап, предшествующий этапу восстановления эксплуатационного состояния конструкций по истории восстановленных нагружений. Интеграция системы восстановления портрета нагружения в систему управления и мониторинга позволяет повысить качество системы управления, учитывать индивидуальную историю нагружения изделия при принятии операционных решений.

Введение

Мониторинг нагружений является важным составным элементом системы контроля и мониторинга безопасности эксплуатации сложных технических конструкций и сооружений. Конечной целью мониторинга нагружений является регистрация текущего нагружения и ведение статистики нагружений за весь период эксплуатации для эффективного управления объектом эксплуатации, оценки остаточного ресурса, идентификации опасного сочетания нагружений.

Основной текст

В общем случае искомое нагружение определяется как суперпозиция базовых нагружений, число и вид которых определяется из анализа условий эксплуатации. Таким образом проблема мониторинга нагружений во многом сводится к задаче косвенного измерения.

Представим модель объекта в виде линейного оператора и определим параметры идентификации δ как:

$$\delta = Af + Be (1),$$

где A – Матрица учитываемых параметров; B – Матрица не учитываемых параметров.

Требование максимального отношения сигнал/шум и линейной независимости откликов на линейно независимый комплекс нагружений можно сформулировать как требование максимума количества информации в регистрируемом сигнале.

Для каждой конструкции существует такое множество нагружений, что результат измерения на действие его элемента будет меньше погрешности измерений. Минимальный масштаб нагружения обозначим F_{min} .

Также существует такая область в пространстве нагружений, что вероятность реализации нагружения вне ее ниже наперед заданного порогового значения. Максимальный масштаб нагружения обозначим F_{max} .

Количество информации определяется как логарифм количества состояний, регистрация которых возможна, с учетом погрешности измерений.

Другими словами $I = \ln \left(\frac{F_{max}}{F_{min}} \right)$, [бит], где F_{max} – максимальное нагружение, реализация которого

возможна (из анализа условий нагружений либо несущей способности), $F_{min} = \frac{\Delta}{S}$, где Δ – погрешность измерений, S – коэффициент модели.

В случае если на конструкцию действует сочетание нагружений (каждое сочетание равновероятно), то информативность системы мониторинга определяется как суммарную информацию, полученную по измерению в n точках. Таким образом, среднеквадратичная информативность модели численно равна

$$I_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n I_i^{\Sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{F_{max} S_i}{\Delta} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{F_{max} S_i}{\Delta} \right) \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\frac{F_{max} \|A\|}{\Delta^n} \right).$$

Для управления исполнительными органами экзопротезов конечностей человека (протезами верхних и нижних конечностей) необходима информация о действующих на экзопротез силовых факторах. Решается задача синтеза силомоментного датчика экзопротеза конечности человека, позволяющего посредством измерения упругих деформаций материала датчика с помощью конечного числа тензорезисторов, определять базис нагружения в декартовой системе координат, связанной с датчиком. В общем случае полный базис нагружения состоит из 3-х сил в направлении осей координат и 3-х моментов сил вокруг осей координат.

Выбор оптимальных параметров (размеров элементов) геометрии несущих элементов силомоментного датчика осуществляется путем решения оптимизационной задачи градиентным методом по критерию максимизации минимального сингулярного значения матрицы откликов при ограничении на максимальное значение эквивалентных напряжений по Мизесу на уровне предела пропорциональности для выбранного материала несущего элемента, допустимых габаритах силомоментного датчика и условии на симметрию конструкции. Определение количества и синтез схемы расположения тензорезисторов для полученной на предыдущем этапе геометрии силомоментного датчика осуществляется построением матрицы откликов для всех возможных комбинаций расположения тензорезисторов с учетом скалирования тестовых нагружений под требования допустимой погрешности измерения восстанавливаемых нагружений.

При неполном базисе восстанавливаемых нагружений приведенная матрица откликов определяется как $AA^T(AA^T+BB^T)^{-1}$, где A – матрица откликов на восстанавливаемые нагружения, B – матрица откликов на дополнение к базису восстанавливаемых нагружений.

Синтез рациональной геометрии датчика реализуется как градиентный поиск максимума целевой функции минимального сингулярного значения матрицы откликов на действие модели нагружения при ограничениях на напряжения в конструкции. Матрица откликов строится на основе решения линейной статической задачи при действии модели нагружения. Так для силомоментного датчика модель нагружения состоит из комбинаций трех сил и моментов, характерных для походки человека, отклики на действие которых представлен на рисунке 1.

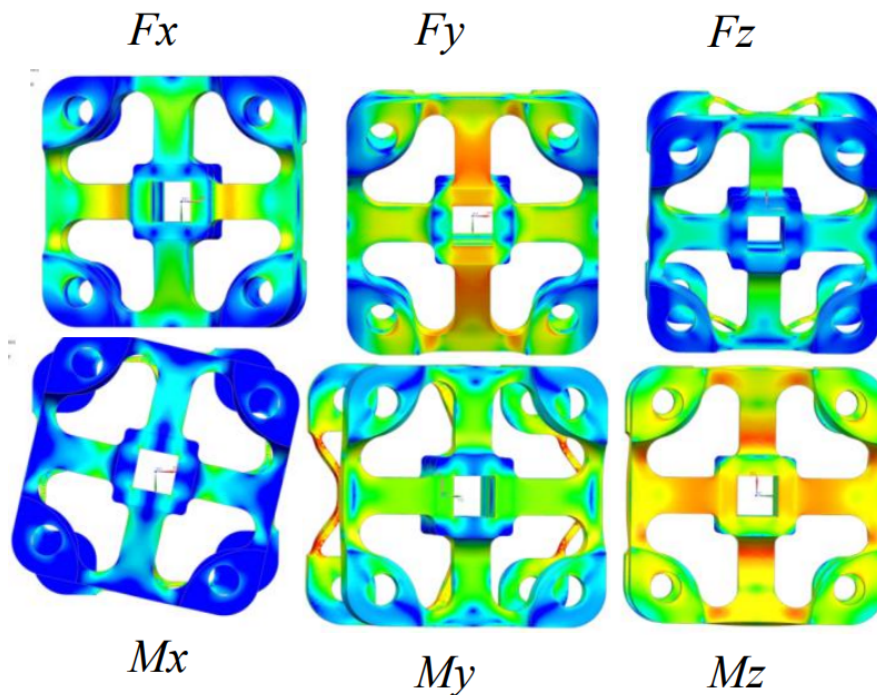


Рис. 1. Отклик конструкции на действие модели нагружения в рамках итерации оптимизации параметров конструкции.

Методом сингулярного разложения матрицы откликов производится ортогонализация модели нагружения по критерию ортогональности откликов на соответствующие нагружения. Синтезированный силомоментный датчик экзопротеза, состоящий из системы тензорезисторов, расположенных в определенных местах, и параметров геометрии, обладает свойством оптимальности по признаку соотношения точностей восстановления сил и моментов при минимальной массе при реализации модели нагружения близкой к паттерну походки человека и удовлетворяет требованиям по циклической и статической прочности.

Заключение

Для решения задач мониторинга, управления исполнительными органами необходима информация о действующих на изделие силовых факторах. Решена задача синтеза информационно измерительной системы, позволяющей восстанавливать портрет нагружения с минимальным влиянием систематических и случайных погрешностей измерений.

Представленная методика позволяет решать задачу рационального синтеза информационно-измерительной системы под модель нагружения с учетом технологических и конструктивных ограничений.

АНАЛИЗ ПЛОСКИХ ОДНОПОДВИЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШЕСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАССИВОВ

Панасенко А.Н.¹, Панасенко С.А.^{1,2}

1 - Иркутский государственный университет путей сообщения

2 - Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

a_panasenko@list.ru

Аннотация. В работе изложен алгоритм анализа плоских одноподвижных механизмов, оперирующий характеристическими массивами, в которых сконцентрирована исходная информация о механизме, необходимая и достаточная для проведения структурного, геометрического, кинематического, динамического и силового анализа. К характеристическим массивам механизма относятся матрицы функций положений звеньев и кинематических пар, матрица инерционных характеристик звеньев, матрица активного силового воздействия, матрица инцидентности подвижных звеньев и одномерный массив вида кинематических пар.

Рассматривается плоский одноподвижный механизм с голономными удерживающими связями, имеющий N_s подвижных звеньев, N_p идеальных кинематических пар и обобщённую координату q .

Таблица инцидентности кинематической цепи механизма формируется следующим образом. В верхней строке (шапке) таблицы по порядку, начиная с единицы, укажем номера кинематических пар. Нумерация кинематических пар механизма произвольная. В левом столбце таблицы (боковике) укажем по порядку, начиная с нуля, номера звеньев механизма. Нулевой номер у стойки, нумерация подвижных звеньев механизма произвольная. В каждом столбце, символизирующем кинематическую пару, поставим две единицы в строках с номерами звеньев, входящих в эту кинематическую пару. Одной единице присвоим знак «плюс», второй единице присвоим знак «минус». Матрицу инцидентности подвижных звеньев кинематической цепи механизма \mathbf{K} вырежем из таблицы инцидентности так, чтобы в неё не входила строка, характеризующая стойку.

В алгоритме определения сил реакции кинематических пар также используется последняя строка таблицы инцидентности – одномерный массив вида кинематических пар $\mathbf{\bar{N}}$.

В неподвижной системе координат определим функции положения звеньев – это координаты центра масс каждого звена и угловая координата звена. Из этих трёх компонент сформируем одномерный массив функций положения звена $\bar{\mathbf{s}}(q)_i = [s(q)_{x,i}, s(q)_{y,i}, s(q)_{\varphi,i}]^T$. После чего из столбцов $\bar{\mathbf{s}}(q)_i$ сформируем матрицу функций положения подвижных звеньев механизма $\mathbf{s}(q)$, как функцию единственной обобщённой координаты механизма q .

Дифференцирование матрицы $\mathbf{s}(q)$ по времени позволяет получить выражения для матрицы скоростей $\mathbf{v}(q, \dot{q})$ и матрицы ускорений звеньев $\mathbf{a}(q, \dot{q}, \ddot{q})$

$$\mathbf{v}(q, \dot{q}) = \zeta(q) \cdot \dot{q}, \quad \mathbf{a}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \zeta(q) \cdot \ddot{q} + \xi(q) \cdot \dot{q}^2, \quad \zeta(q)_{i,j} = \frac{\partial s(q)_{i,j}}{\partial q}, \quad \xi(q)_{i,j} = \frac{\partial \zeta(q)_{i,j}}{\partial q}. \quad (1)$$

Аналогичным образом определим функции положения центра каждой кинематической пары: $\mathbf{r}(q)_{x,j}$, $\mathbf{r}(q)_{y,j}$. В качестве центра кинематической пары выберем точку в ближайшей окрестности сопрягаемых поверхностей звеньев, к которой удобно привести главный вектор и главный момент сил реакции этой кинематической пары. Введём угловую координату кинематической пары $\mathbf{r}(q)_{\varphi,j}$ как угол между осью Ox и перпендикуляром к линии действия главного вектора сил реакции этой пары.

Из трёх функций, характеризующих кинематическую пару, сформируем одномерный массив функций положения кинематической пары $\bar{\mathbf{r}}_k(q) = [r(q)_{x,k}, r(q)_{y,k}, r(q)_{\varphi,k}]^T$. После чего описанным выше способом сформируем матрицу функций положения кинематических пар $\mathbf{r}(q)$.

Для каждого подвижного звена механизма сформируем одномерный массив его инерционных характеристик. Первый и второй элементы этого массива одинаковы – это масса звена, третий элемент массива – момент инерции относительно оси z , проходящей через центр масс звена $\bar{\mathbf{I}}_i = [m_i, m_i, J_i]^T$. Из одномерных массивов-столбцов сформируем матрицу инерционных характеристик подвижных звеньев механизма \mathbf{I} .

Сформируем выражение для кинетической энергии подвижных звеньев механизма $T = V(q) \cdot \frac{\dot{q}^2}{2}$, в котором выделим инерционный коэффициент механизма первого порядка $V(q) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^3 I_{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j}$. Для

краткой записи используемого далее дифференциального уравнения движения введём инерционный коэффициент механизма второго порядка $W(q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial q} V(q) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^3 I_{i,j} \cdot \zeta(q)_{i,j} \cdot \xi(q)_{i,j}$.

Активные силы, действующие на подвижные звенья механизма, определим проекциями главного вектора $F_{x,i}$, $F_{y,i}$ и главным моментом $F_{z,i}$, приведённым к центру масс каждого звена. Представим их в виде одномерного массива–столбца из трёх компонентов, затем из этих столбцов сформируем матрицу активного силового воздействия \mathbf{F} . После чего определим обобщённую силу следующим образом:

$$Q(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^3 F_{i,j}(q, \dot{q}, t) \cdot \zeta_{i,j}(q).$$

Используя теорему об изменении кинетической энергии, получим дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы в явной форме

$$V(q) \cdot \ddot{q} + W(q) \cdot \dot{q}^2 = Q(q, \dot{q}, t). \quad (2)$$

Если на звенья механизма действуют только постоянные и позиционные силы, то, используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме, выражение для квадрата обобщённой скорости

механизма можно записать в квадратурах $\dot{q}(q)^2 = \frac{2 \cdot \int_{q_0}^q Q(\alpha) \cdot d\alpha + V(q_0) \cdot \dot{q}_0^2}{V(q)}$. В этом случае из уравнения (2) можно

получить выражение для обобщённого ускорения механизма как функцию обобщённой координаты.

В любом варианте известных активных сил и известных начальных условий q_0 и \dot{q}_0 , решая дифференциальное уравнение (2) тем или иным способом, можно найти обобщённую скорость и обобщённое ускорение механизма в заданный момент времени. После этого становятся известны инерционные воздействия на звенья механизма $\Phi_{i,j} = I_{i,j} \cdot \ddot{a}_{i,j}$, которые поместим в матрицу Φ . Сформируем матрицу активного и инерционного силового воздействия \mathbf{S} , просуммировав полученные ранее матрицы $\mathbf{S} = \mathbf{F} + \Phi$. Векторизовав матрицу \mathbf{S} по строкам, построим одномерный массив активного и инерционного силового воздействия $\vec{\beta}$, элементы которого – это последовательно расположенные строки матрицы \mathbf{S} .

Для каждого звена составим по три уравнения динамического равновесия. Рассматривая идеальные и неидеальные кинематические пары с удерживающими связями, будем придерживаться точки зрения, изложенной у В. И. Арнольда [1] и Ф. Р. Гантмахера [2]. В соответствии с ней все связи идеальные, а реакции связей – это силы, являющиеся следствием взаимодействия тел и не совершающие работу на любом виртуальном перемещении тела. Количество составляющих реакции связей равняется количеству уравнений связей. В уравнения динамического равновесия кроме компонент матрицы \mathbf{S} войдут компоненты матрицы \mathbf{R} , составленной из проекций главного вектора и главного момента сил реакции кинематических пар. Если для каждой кинематической пары определить массив $\vec{\mathbf{R}}_k = [R_{x,k}, R_{y,k}, R_{z,k}]^T$, то из этих столбцов и сконструирована матрица \mathbf{R} . Векторизовав по строкам матрицу \mathbf{R} , получим одномерный массив составляющих сил реакции кинематических пар $\vec{\alpha}$.

Для каждой кинематической пары, в соответствии с принципом возможных перемещений, составим уравнения для касательных составляющих сил реакции. Если кинематическая пара двуподвижная, то таких уравнений два, если одноподвижная, то – одно. Для идеальной вращательной кинематической пары это уравнение имеет вид $R_{z,k} = 0$, для идеальной поступательной кинематической пары, ось которой отклонена от оси Ox на угол ψ_k , уравнение имеет вид $R_{x,k} \cdot \cos(r(q)_{\psi,k}) + R_{y,k} \cdot \sin(r(q)_{\psi,k}) = 0$.

При таком подходе число составляющих сил реакции кинематических пар $3 \cdot N_r$ на единицу меньше числа алгебраических уравнений для их определения. Исключим одно из уравнений будущей системы (обычно уравнение для касательных составляющих сил реакции одной из кинематических пар) и используем его впоследствии для проверки. Поскольку уравнения динамического равновесия и уравнения для касательных составляющих сил реакции кинематических пар линейны относительно входящих в них составляющих сил реакции кинематических пар (компоненты массива $\vec{\alpha}$) и составляющих активных и инерционных воздействий (компоненты массива $\vec{\beta}$), то представим его в матричной форме. Если сначала расположить по порядку все уравнения проекций сил на ось Ox , затем все уравнения проекций сил на ось Oy , затем все уравнения моментов, затем уравнения для касательных составляющих сил реакции кинематических пар (но без исключённого), то в результате получим следующее матричное уравнение с квадратной блочной матрицей \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\alpha} + \mathbf{B} \cdot \vec{\beta} = \vec{0}. \quad (3)$$

В случае предлагаемого порядка формирования матричного уравнения (3) матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} принимают вид, не требующий использования уравнений динамического равновесия, достаточно знать только матрицы $\mathbf{s}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{r}(\mathbf{q})$, а также матрицу \mathbf{K} и одномерный массив вида кинематических пар $\vec{\mathbf{N}}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Zrs} & \mathbf{Zrs} \\ \mathbf{Zrs} & \mathbf{K} & \mathbf{Zrs} \\ \mathbf{A31} & \mathbf{A32} & \mathbf{K} \\ \mathbf{A41} & \mathbf{A42} & \mathbf{A43} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Zss} & \mathbf{Zss} \\ \mathbf{Zss} & \mathbf{E} & \mathbf{Zss} \\ \mathbf{B31} & \mathbf{B32} & \mathbf{E} \\ \mathbf{Zrss} & \mathbf{Zrss} & \mathbf{Zrss} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} A31_{j,k} &= -r_{2,k} \cdot K_{j,k} \\ A32_{j,k} &= r_{1,k} \cdot K_{j,k} \\ B31_{j,j} &= \text{diag}(-s_{2,j}) \\ B32_{j,j} &= \text{diag}(s_{1,j}) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{Zrs} , \mathbf{Zss} , \mathbf{Zrss} – матрицы, состоящие из нулей, а \mathbf{E} – единичная матрица. Строки матриц $\mathbf{A41}$, $\mathbf{A42}$, $\mathbf{A43}$, получены из уравнений для касательных составляющих сил реакции кинематических пар с использованием логических операций, опираясь на массив вида кинематических пар $\bar{\mathbf{N}}$ и их угловые координаты $r(q)_{q,k}$.

Необходимым и достаточным условием существования и единственности решения матричного уравнения (3) является несингулярность матрицы \mathbf{A} в области допустимых значений обобщённой координаты

$$\det(\mathbf{A}(q)) \neq 0, \quad q \in q_{\text{beg}} \dots q_{\text{end}}. \quad (4)$$

Целесообразно построить график функции (4). Если при каком-то значении q^* он пересекает ось абсцисс, то следует переформировать систему уравнений (3), выбрав другое исключённое уравнение. Перебором исключённых уравнений всегда удаётся добиться отсутствия нулей функции (4) в области допустимых значений q , если связи не становятся в положении q^* вырожденными.

Если решение уравнения (2) получено в аналитической форме, то, после подстановки в исключённое уравнение выражений для $\bar{\mathbf{a}}$, оно становится тождеством. Если решение выполнялось численными методами, то исключённое уравнение можно использовать для оценки точности вычислений.

Если исключённое уравнение не становится тождеством, то в процессе формирования характеристических массивов механизма допущена ошибка.

Заключение

Алгоритм решения задач анализа плоских одноподвижных механизмов с идеальными связями основан на использовании шести характеристических массивов, определяющих портрет механизма [4]. Матрица инцидентности \mathbf{K} , массив вида кинематических пар $\bar{\mathbf{N}}$ и матрица связей, записанных в параметрической форме $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ создают структурно-геометрический портрет механизма. Матрицы \mathbf{I} , \mathbf{F} и $\mathbf{s}(\mathbf{q})$ создают его динамический портрет.

Результатом работы алгоритма преобразования этих матриц являются: а) закон изменения обобщённой координаты механизма как функции времени, если известны все активные силы, или доопределение активных сил, обеспечивающих заданный закон движения; б) выражения для положений, скоростей и ускорений характерных точек механизма как функций его обобщённой координаты или времени; в) выражения для составляющих сил реакции кинематических пар как функции обобщённой координаты или времени.

Представление механизма его шестью характеристическими массивами позволяют создать компактный и прозрачный с точки зрения законов механики (что особенно важно в учебном процессе) алгоритм вычисления геометрических, кинематических и динамических характеристик механизма, а наличие как минимум двух проверок по ходу анализа механизма существенно повышают доверие к его результатам.

Предлагаемый алгоритм анализа реализован также и для плоских механизмов с несколькими степенями свободы. Он отличается от представленного выше тем, что массив $\zeta(\bar{\mathbf{q}})$ становится трёхмерным, а массив $\xi(\bar{\mathbf{q}})$ – четырёхмерным [5].

Изложенный выше аналитический метод представления механизма обобщёнными геометрическими и силовыми параметрами применён также и к анализу кулачковых и зубчатых механизмов [5].

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. = М.: Наука. 1989. – 472 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике: учебное пособие для вузов / Под ред. Е.С. Пятницкого. – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 264 с.
3. Панасенко А.Н. Объектно-ориентированный подход к анализу плоских одноподвижных механизмов. – Сборник докладов международной конференции по теории механизмов и механике машин, - Краснодар: Кубан. гос. технол. ун-т, 2006., С. 40 - 41.
4. Аналитические методы исследования плоских механизмов: учебное пособие: в 2 ч. – Ч.1 / А. Н. Панасенко. – Иркутск: ИрГУПС, 2014. – 160 с.
5. Аналитические методы исследования плоских механизмов: учебное пособие: в 2 ч. – Ч.2 / А. Н. Панасенко. – Иркутск: ИрГУПС, 2014. – 170 с.

РАЗВИТИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЭКСКАВАТОРОВ НА РАННИХ СТАДИЯХ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И В ТЕКУЩИХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Побегайло П.А.¹, Ильина А.Н.²

1 - Независимый исследователь

*2 - Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский
Университет)*

petrp214@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе излагается текущее состояние предложенной нами ранее физической модели оценки динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов на ранних стадиях проектной деятельности – например, на стадии формирования технического задания. Сейчас данная модель расширена нами на гидравлические экскаваторы прямого копания с четырьмя звеньями рабочего оборудования. Кроме того, данная модель была вписана в проектируемый нами каркас системы экспресс – диагностики карьерных экскаваторов с различными видами привода, предназначенной для оценки текущего состояния горных машин в режиме «24/7» – иными словами, вплетена и в экспериментальную механику карьерных экскаваторов.

Введение

Исследования динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов (ОГЭ) проводятся у нас и за рубежом с начала 60-х годов прошлого века.

Однако, не смотря на обильное число исследований, в рассматриваемой нами предметной области имеется много как теоретических, так и практических проблем и задач, не нашедших своего полного или хотя бы удовлетворительного разрешения, о чем в частности говорить и в нашей работе [1 и др.].

Из этой и прочих наших работ (например, [2–4]) следует, что многочисленные исследования динамики ОГЭ никак не связаны с методологией как проектирования, так и эксплуатации ОГЭ, не вписаны в неё. Это, в большинстве случаев, ставит крест на возможности применения известных подходов в проектной и тем более в производственной практике, т.к. физические и математические модели чаще всего излишне усложнены с одной стороны (и, как следствие, требуют многочисленных исходных данных, получить которые можно обычно только из натурного эксперимента; кроме того, часто они привязаны к авторскому, очень дорогому и эксклюзивному, программному обеспечению и т.д., и т.п.), а с другой стороны содержат многочисленные мало проработанные блоки, которые при этом часто бездумно переписываются из работы в работу (например, связанные с описанием взаимодействия ковша с грунтом и пр.).

Таким образом, на наш взгляд, в отечественной проектной и эксплуатационной деятельности существует научная и практическая проблема с оценкой динамических свойств создаваемых, модернизируемых и эксплуатируемых ОГЭ.

Для разрешения выявленной проблемы необходимо создать вписанный в проектную и эксплуатационную практику, в экспериментальную механику карьерных экскаваторов, набор физических моделей (с соответствующим им математическим описанием и программной реализацией) для оценки динамики ОГЭ. Этот набор моделей должен иметь варьируемую сложность (в зависимости от этапа проектирования, имеющихся исходных данных и содержательной стороны того или иного этапа проектирования) при удовлетворительной точности.

Некоторым шагам на этом пути и посвящена настоящая работа.

Несколько слов о физической модели и про уравнения движения

В наших работах [2, 5–7 и др.] кратко описаны как методология проектирования рабочего оборудования (РО) ОГЭ, нацеленная на применение на ранних стадиях проектирования – например, на стадии формирования технического задания (предпроектный анализ (ПА)), так и ряд нюансов, связанных с синтезом каркаса системы экспресс-диагностики карьерных экскаваторов с различными видами привода, предназначенной для оценки текущего состояния горных машин в режиме «24/7».

Уже на указанном этапе проектирования могут быть выполнены некоторые оценки динамики (и кинематики) РО ОГЭ. Есть настоятельная потребность в подобном и при эксплуатации машин, особенно при оценке их текущего состояния (силами инженеров организации эксплуатирующих ОГЭ) в случае истекающего или даже уже истекшего срока их эксплуатации.

Для этого нужна максимально простая математическая модель, вытекающая из максимально упрощенной физической модели.

На рис. 1 показано, где может быть использован предлагаемый нами подход при проектировании: после этапа анализа нагруженности и после этапа синтеза металлоконструкций РО.

На рис. 2 представлена схема рассматриваемой в настоящей работе физической модели – максимально упрощенная плоская кинематическая схема РО ОГЭ прямого копания с четырьмя звеньями – типичная, на наш взгляд, манипуляционная система.

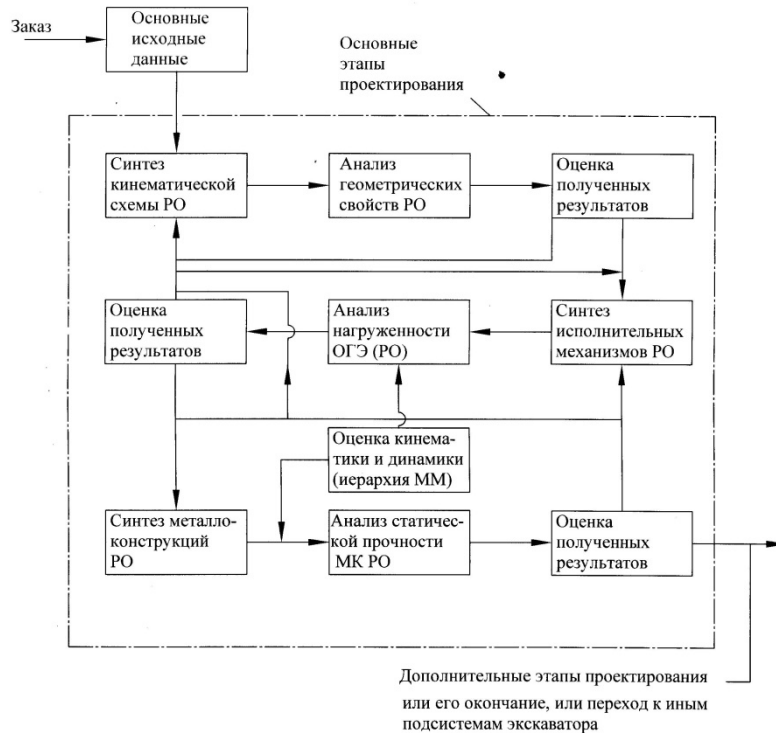


Рис. 1. Схема проектирования РО ОГЭ на стадии ПА.

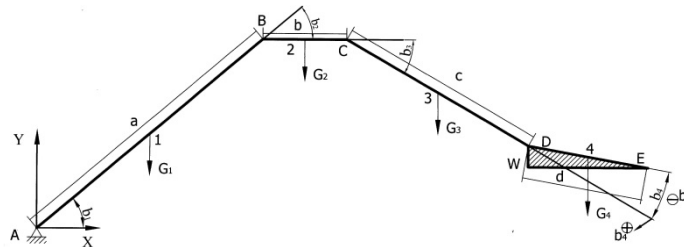


Рис. 2. Упрощенная кинематическая схема РО ОГЭ (прямого копания)
{условные обозначения мы сейчас опускаем; гидроцилиндры не показаны}.

Физическая модель, характеризуемая схемой на рис. 2, сформирована на основании следующих основных допущений: имеем неконсервативную систему; связи являются голономными, стационарными, идеальными; диссипации нет; базовая машина исключена из рассмотрения (при этом предполагается, что она стоит на абсолютно жестком и ровном основании); рассматриваем плоскую задачу; мы практически полностью не учитываем гидроцилиндры и, что очевидно, систему гидравлического привода с тем или иным первичным двигателем (на стадии ПА её еще практически нет); внешнего сопротивления нет; шарниры идеальные вращательные (без трения); звенья РО абсолютно жесткие тела; центр тяжести каждого звена расположен по середине его кинематической длины.

Динамика представленной на рис. 2 физической модели, естественно, описывается сложной и громоздкой математической моделью, в которую входят разные соотношения, неравенства, формулы и уравнения (и даже вспомогательные алгоритмы), при том, что основными в ней являются т.н. уравнения движения. По поводу формирования такого рода уравнений известны, по-видимому, уже тысячи работ, что

позволяет нам не освещать детально этот рутинный набор действий. При этом, отметим, что сейчас из-за нехватки места мы представляем только уравнения движения.

Их мы записываем в следующем "общем" виде:

$$m \cdot \ddot{b}_i = q_i + u_i$$

где b_i – шарнирные углы; $m = \|m_{ik}\|_{i=1,4}^{k=1,4}$ – матрица кинетической энергии, u_i – управления, q_i – иные обобщенные силы.

Обоснование выбора именно этого подхода даны в наших прошлых работах, например в статье [2], и сейчас мы их повторять не будем. Заметим при этом, что в генезисе нашего подхода лежат работы В.И. Матюхина [8, 9].

На основании созданной нами физической модели была разработана соответствующая компьютерная программа и с её помощью осуществлен вычислительный эксперимент, описание которого будет изложено вне рамок настоящего краткого текста.

Заключение

В ходе нашей работы была выявлена и сформулирована важная для отечественного гидроэкскаваторостроения проблема – отсутствие удобных и простых физических моделей, позволяющих оценивать динамику как создаваемых и модернизируемых, так и эксплуатируемых ОГЭ.

Такого рода модели должны быть вписаны как в методологию проектирования для создаваемых (модернизируемых) ОГЭ, так и в жизненный цикл уже эксплуатируемого изделия (например, в рамках создаваемой нами сейчас системы экспресс-диагностики и с учётом развиваемой нами в ряде аспектов эксплуатационной механики карьерных машин [7, 10 и др.]) наряду с периодическим техническим обслуживанием (как для анализа его текущего состояния, так и для совершенствования как схем проектирования новых машин, так и технологии использования таких машин).

Для разрешения указанной проблемы мы ранее рассмотрели трехзвенное РО ОГЭ [2], а сейчас нами предложена наиболее простая физическая модель для оригинального РО из четырех звеньев, дополненная необходимыми для нее математическими соотношениями, которая может быть использована на ранних этапах проектирования ОГЭ {при дефиците исходных данных} для рассмотрения ряда модельных задач (оценка скоростей, ускорений и траекторий). Точность моделирования при этом удовлетворительная. Подходит данная разработка и для условий эксплуатации такого рода машин.

Так же отметим, что предложенная в настоящей работе физическая модель, на наш взгляд, составляет один из важных кирпичиков в первичном фундаменте при синтезе системы управления ОГЭ [11 и др.].

Литература

1. П. А. Побегайло Современное состояние и некоторые перспективы исследований динамики одноковшовых гидравлических экскаваторов // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижегород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижегород: Издательский дом «Наш дом», 2016, с. 610 – 613.
2. П. А. Побегайло, А. Н. Ильина Физическая модель оценки динамики гидравлических экскаваторов на ранних стадиях проектной деятельности // Уголь. 2018. № 12. с. 33 – 37. DOI: <http://dx.doi.org/10.18796/0041-5790-2018-12-00-00>
3. А. В. Крикун, А. П. Побегайло, П. А. Побегайло Некоторые исследования колебаний системы «рабочее оборудование–гидропривод» одноковшового гидравлического экскаватора // Труды IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем». 24-29 сентября 2012 г. г. Нижегород, 2012. с. 749 – 755.
4. Mitrev R., Gruychev R. Pobegailo P.A. CAD/CAE investigation of a large hydraulic mining excavator // Machine design, Vol.3, 2011, № 3. pp. 17 – 22.
5. П. А. Побегайло Мощные одноковшовые гидравлические экскаваторы: методология проектирования рабочего оборудования (на ранних стадиях проектирования). М.: СВР-АРГУС, 2017. 210 с.
6. П. А. Побегайло, Д. Ю. Крицкий Путь совершенствования процесса эксплуатации экскаваторов // «Машиностроение и техносфера XXI века»: сб. трудов XXVII Международной научно-технической конференции. Посвящается 100-летию юбилею ДОННТУ. Донецк: Изд-во ДонНТУ, 2020. с. 303 – 309.
7. Pobegailo P. A., Gadolina I. V. Reliability of Mining Machines and Development of the Express – Diagnostic System: State and Prospects // Journal of Graphic Era University, 2022, Vol. 10 Iss. 1, pp. 12. doi: 10.13052/jgeu0975-1416.1011
8. В. И. Матюхин Управление движением манипулятора. – М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2010. – 96 с.
9. В. И. Матюхин Стабилизация движений манипулятора вдоль заданной поверхности // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 4. – с. 71 – 85.
10. Pobegailo P.A., Ilyina A.N., Kritikij D.Y. On the issue of improving the reliability of machines for open pit mining operations with expiring or expired standard exploitation period // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 1023 (2021) 012021, doi:10.1088/1757-899X/1023/1/012021
11. S. Kolesnikova, S. Tsvetnitskaya, P. Pobegailo An Extension of the Method of Aggregated Regulators to a Discrete Stochastic Object // 2019 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), 2019. 6 p. DOI: 10.1109/SIBCON.2019.8729595

О РЕШЕНИЯХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ ОПОР, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЧЕТЫРЕХКОЛЕСНУЮ ПЛАТФОРМУ, ДВИЖУЩУЮСЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Сайпулаев Г.Р., Адамов Б.И., Сайпулаев М.Р.

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия
saypulaevgr@mail.ru

Введение

Современные тренды в создании и развитии высокоточных мобильных роботов приводят к необходимости более детальному математическому описанию механики таких роботов [1]. Одними из факторов, которые необходимо учитывать при описании динамики мобильных роботов, являются силы контактного взаимодействия: нормальные реакции опоры, трение скольжения, верчения и качения. В этой связи необходимо разрабатывать достаточно точные модели сил контактного трения и нормальных реакций опор.

В случае, когда колесный робот, движущийся по горизонтальной плоскости, опирается на поверхность тремя точками, задача определения нормальных реакций опор является статически определимой и решается с помощью общих теорем динамики [1]. Но при наличии четырех точек опоры робота на поверхность задача определения нормальных реакций становится статически неопределимой и для ее решения необходимо составлять дополнительные уравнения.

Предложенный доклад посвящен рассмотрению некоторых моделей нормальных реакций опор в механике четырехколесного робота и интерпретации дополнительных уравнений, замыкающих задачу определения нормальных реакций.

Постановка задачи

Рассмотрим четырехколесную платформу (см. рис. 1). Для описания геометрии робота вводится система координат $OXYZ$, связанная с платформой. При этом ось OX является продольной осью симметрии платформы, а ось OY – поперечной. Ось OZ перпендикулярна плоскости движения платформы. Центр масс платформы C смещен относительно геометрического центра платформы O на величины a_x и a_y вдоль осей OX и OY соответственно. Расстояние между осями колесных пар обозначим $2h$, а расстояние между колесами одной колесной пары – $2l$. Центры масс колес C_i ($i = 1, \dots, 4$) робота находятся в вершинах платформы.

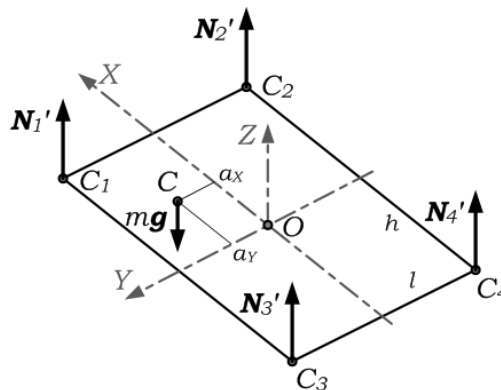


Рис. 1. Схема сил, действующих на четырехколесную платформу.

В соответствии со схемой сил, представленной на рис. 4б, и движением центров колес вдоль горизонтальной плоскости, видно, что нормальная реакция опоры N_i , действующая на i -ое колесо, определяется выражением:

$$N_i = N'_i + m_i g, \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (1)$$

где m_i – масса колеса; g – ускорение свободного падения; N'_i – приведенная нормальная реакция опоры i -го колеса. Далее более подробно остановимся на определении приведенных нормальных реакций N'_i . Для простоты рассмотрим случай покоящейся платформы. Следует отметить, что в случае движущейся платформы решение задачи принципиально не изменится (добавятся силы трения скольжения, момент трения качения, управляющие моменты колес и силы инерции). В рамках данной работы все тела системы считаются абсолютно твердыми.

Модели нормальных реакций опор

Уравнения статики в случае покоящейся платформы примут вид:

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 + N'_4 - mg = 0, \quad (N'_1 + N'_3)l - (N'_2 + N'_4)l - mga_y = 0, \quad (N'_3 + N'_4)h - (N'_1 + N'_2)h + mga_x = 0, \quad (2)$$

где m – масса платформы.

Рассмотрим условие совместности деформаций, которое выражает равенство перемещений геометрического центра платформы, обусловленных вертикальным перемещением накрест лежащих вершин этой платформ. При этом вертикальные перемещения вершин связаны с конечной жесткостью элементов колес. Тогда уравнение замыкающее систему уравнений (2) относительно N'_i примет вид [2]:

$$N'_1 + N'_4 = N'_2 + N'_3. \quad (3)$$

Отметим, что в статье [3] была дана геометрическая интерпретация уравнения (3), которая состоит в том, что концы векторов нормальных реакций N'_i лежат в одной плоскости.

Решение уравнений (2) и (3) имеет вид [2]:

$$N'_1 = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{a_x}{h} + \frac{a_y}{l} \right), \quad N'_2 = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{a_x}{h} - \frac{a_y}{l} \right), \quad N'_3 = \frac{mg}{4} \left(1 - \frac{a_x}{h} + \frac{a_y}{l} \right), \quad N'_4 = \frac{mg}{4} \left(1 - \frac{a_x}{h} - \frac{a_y}{l} \right). \quad (4)$$

Другая распространенная модель нормальных реакций имеет вид [4, 5]:

$$N'_1 = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{a_x}{h} \right) \left(1 + \frac{a_y}{l} \right), \quad N'_2 = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{a_x}{h} \right) \left(1 - \frac{a_y}{l} \right), \quad N'_3 = \frac{mg}{4} \left(1 - \frac{a_x}{h} \right) \left(1 + \frac{a_y}{l} \right), \quad N'_4 = \frac{mg}{4} \left(1 - \frac{a_x}{h} \right) \left(1 - \frac{a_y}{l} \right). \quad (5)$$

Выражения (5) для нормальных реакций использовались в модели расхода энергии, применяемой в задачах оптимального по энергозатратам планирования движения и управления [4].

Модель нормальных реакций опор, как решения задачи оптимизации

Рассмотрим задачу минимизации функционала $J_1(N'_i)$ при выполнении уравнений статики (2):

$$J_1(N'_i) = \sum_{i=1}^4 (N'_i)^2 \rightarrow \min. \quad (6)$$

Решение указанной задачи минимизации приводит к выражениям (4) для нормальных реакций опор. Отметим, что в функционале (6) коэффициенты при квадратах нормальных реакций опор были одинаковые.

Теперь рассмотрим следующий функционал $J_2(N'_i)$:

$$J_2(N'_i) = \sum_{i=1}^4 (\rho_{x_i} - a_x)(\rho_{y_i} - a_y) N'_i \rightarrow \min, \quad (7)$$

где ρ_{x_i} и ρ_{y_i} – координаты центра i -го колеса в осях $OXYZ$. Из рис. 1. имеем: $\rho_{x_1} = \rho_{x_2} = -\rho_{x_3} = -\rho_{x_4} = h$ и $\rho_{y_1} = -\rho_{y_2} = -\rho_{y_3} = \rho_{y_4} = l$.

Примечательно, что решение задачи минимизации (7) при выполнении уравнений статики (2) приводит к выражениям (5) для нормальных реакций опор.

Следует отметить, что модуль выражения $(\rho_{x_i} - a_x)(\rho_{y_i} - a_y) N'_i$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторе нормальной реакции и проекциях радиус-вектора, соединяющего центр масс платформы C с центром i -го колеса C_i (см. рис. 2). При этом объемы параллелепипедов, построенных для накрест лежащих вершин, имеют один знак в сумме из выражения (7).

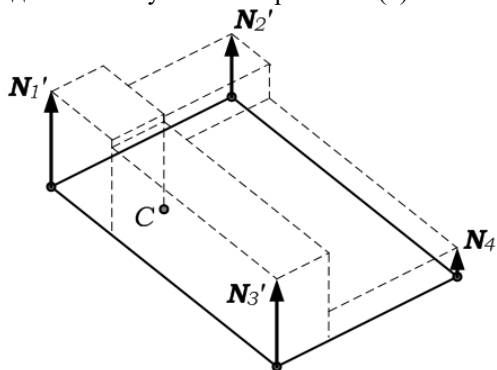


Рис. 2. Пояснение к геометрической интерпретации функционала (7)

Заключение

По результатам работы описана статически неопределимая задача о вычислении нормальных реакций

опор четырехколесной платформы и приведены опубликованные ранее модели нормальных реакций опор, полученные для покоящегося робота. Представлены физическая и геометрическая интерпретации дополнительного уравнения (3), с помощью которого устраняется неопределенность задачи.

Показана взаимосвязь известных моделей нормальных реакций опор (4) и (5) с задачами оптимизации (6) и (7), решаемых при выполнении уравнений статики (2). Дана геометрическая интерпретация функционала (7).

Описанные взаимосвязи, возможно, приведут к развитию подходов для более точного определения нормальных реакций в случае статически неопределимых колесных систем.

Литература

1. А. П. Иванов // Основы теории систем с трением. 2011. 304 с.
2. B. I. Adamov, G. R. Saipulaev // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 16:2 2020. 291–307
3. А. А. Радионов, А. Д. Чернышев // Инновационный транспорт, 18:4 2015, 69–73
4. S. Dogru, L. Marques // IEEE Transactions on Robotics, 2017, 1–13
5. L. Hou, F. Zhou, K. Kim, L. Zhang // Sensors, 21:1800 2021, 1–18

СИНТЕЗ ДВУХКОНТУРНОГО РУЛЕВОГО МЕХАНИЗМА АККЕРМАНА ТРАНСПОРТНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА

Тулешов А.К., Тулешов Е.А., Куатова М.Ж.

Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы
aman_58@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается синтез рулевого механизма, который представляет собой двухконтурный рычажный механизм, связанный левым и правым колесами. Проводится исследование структуры и кинематики механизма. На основе принципа Аккермана составлена целевая функция для кинематического синтеза механизма. Синтез механизма проводится на основе аналитического метода интерполяции по четырем параметрам. Разработан метод и проведен кинематический анализ механизма с синтезированными параметрами. Результаты моделирования показали высокую точность реализации условия Аккермана.

Работа выполнена в рамках проекта ИРН АР14870662 на грантовое финансирование Комитета науки МНВО РК.

Введение

В мобильном грузовом транспортном роботе [2], разработанного учеными Института механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова, используется модифицированный рулевой механизм, состоящий из двух контуров на базе четырехзвенника. Мобильный транспортный робот имеет габариты (1200×2300) мм, масса – 1200 кг и колесо с массивным резиновым ободом. Скорость перемещения 45 км/час.

Кинематическая схема рулевого механизма представлена на рисунке 1. Механизм состоит из двух контуров $OE_1D_1C_1O$ и $OE_2D_2C_2O$, которые приводят в движения левый и Куатова правый колеса соответственно. При этом звенья на этих контурах попарно имеют одинаковые размеры.

Колесные машины могут развивать большие скорости и даже малое отклонение условий Аккермана (до 1° градуса) приводит к нежелательным явлениям. Задача исследования заключается в разработке рулевого двухконтурного механизма Аккермана высокой точности. Исследования проводятся на основе методов кинематического анализа и синтеза рычажных механизмов.

Аналитические методы синтеза механизмов бывают алгебраическим, геометрическим и оптимизационным. К алгебраическим методам относятся: метод интерполирования; метод наилучшего приближения; метод блокируемых зон [3]; специальные методы, ориентированные на исключения дефекта ветвления [4, 5]. Геометрические методы основаны на положениях дифференциальной геометрии. Их можно разделить на методы, опирающиеся на кинематическую геометрию Бурместера и аппроксимационную кинематическую геометрию [6].

Оптимизационные методы основаны на теории нелинейной оптимизации и реализуется путем многократного анализа механизма [5, 7], а также различные аналитико-оптимизационные методы [6, 8], в которых одна часть искомых параметров механизма определяется в явном виде по формулам, а другая часть- путем нелинейной оптимизации.

Основная часть

На рис. 1 угол θ_1 представляет собой угол поворота колеса 1, θ_2 – угол поворота колес 2. Угол θ называется средним углом поворота передних колес. Условие Аккермана представляется аналитически [1, 9]. Целевая функция кинематического синтеза имеет вид

$$\Delta = |\cot \theta_2 - \cot \theta_1 - 2\lambda| \rightarrow \min . \quad (1)$$

где $\tan \gamma = b/l = \lambda$. Параметр λ для рассматриваемого транспортного робота равно $\lambda = \frac{6}{20} = 0,3$, значит $\gamma \approx 17,3^{\circ}$.

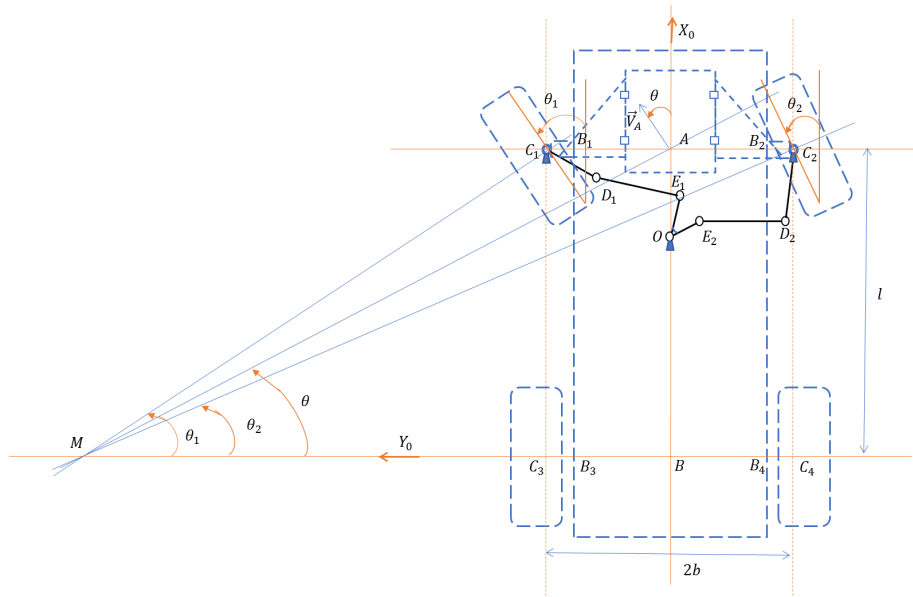


Рис. 1. Принцип Аккермана для четырехколесных платформ.

Путем преобразования уравнений кинематики двухконтурного механизма получаем на основании (1) получаем

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + B_1 p_2 + C_1 p_3 + D_1 p_4 &= F_1, \\ A_2 p_1 + B_2 p_2 + C_2 p_3 + D_2 p_4 &= F_2, \\ A_3 p_1 + B_3 p_2 + C_3 p_3 + D_3 p_4 &= F_3, \\ A_4 p_1 + B_4 p_2 + C_4 p_3 + D_4 p_4 &= F_4, \end{aligned} \quad (2)$$

которая решается относительно $p_i, i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= (\cos \theta_1 - e \sin \theta_1) - (\cos \theta_k - e \sin \theta_k), k = 2, 3 \\ B_{k-1} &= (\sin \theta_1 + e \cos \theta_1) - (\sin \theta_k + e \cos \theta_k), k = 2, 3 \\ C_{k-1} &= -\cos[f_1(\theta_1) + \theta_k + \gamma] + \cos[f_1(\theta_k) + \theta_k + \gamma], k = 2, 3 \\ D_{k-1} &= -\sin[f_1(\theta_1) + \theta_1 + \gamma] - \sin[f_1(\theta_k) + \theta_k + \gamma], k = 2, 3 \\ F_{k-1} &= -\cos[f_1(\theta_1) + \gamma] - e \sin[f_1(\theta_1) + \gamma] - \cos[f_1(\theta_k) - \gamma] - e \sin[f_1(\theta_k) - \gamma], k = 2, 3 \\ A_{k+1} &= (\cos \theta_1 - e \sin \theta_1) - (\cos \theta_k - e \sin \theta_k), k = 2, 3 \\ B_{k+1} &= -(\sin \theta_1 + e \cos \theta_1) + (\sin \theta_k + e \cos \theta_k), k = 2, 3 \\ C_{k+1} &= -\cos[f_1(\theta_1) + \theta_k + \gamma] + \cos[f_2(\theta_k) + \theta_k - \gamma], k = 2, 3. \\ D_k &= -\sin[f_1(\theta_1) + \theta_1 + \gamma] - \sin[f_2(\theta_k) + \theta - \gamma], k = 2, 3 \\ F_{k+1} &= -\cos[f_1(\theta_1) + \gamma] - e \sin[f_1(\theta_1) + \gamma] - \cos[f_2(\theta_k) - \gamma] - e \sin[f_2(\theta_k) - \gamma], k = 2, 3, \\ p_0 &= \frac{p^2 - r^2 - d^2 - e^2 - 1}{2r}, p_1 = \frac{d}{r} \cos \frac{\alpha}{2}, p_2 = \frac{d}{r} \sin \frac{\alpha}{2}, p_3 = d \cos \frac{\alpha}{2}, p_4 = d \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Система (2) решается относительно $p_i, i = 1, 2, 3, 4$. А p_0 определяется из уравнения

$$p_0 = p_1 (\cos \theta_k - e \sin \theta_k) \pm p_2 [\sin \theta_k + e \cos \theta_k] - p_3 \cos[f_i(\theta_k) + \theta_k + \gamma] - p_4 \sin[f_i(\theta_k) + \theta_k + \gamma] - \cos[f_i(\theta_k) + \gamma] - e \sin[f_i(\theta_k) + \gamma], k = 1, 3, i = 1, 2. \quad (3)$$

Результаты синтеза: $\alpha = 0,02094$ рад; $d = 0,34$; $r = 0,4077$; $p = 0,97, b = 1, e = 0,22$ – относительные величины геометрических размеров механизма.

Обсуждение результатов

Кинематический анализ двухконтурного механизма Аккермана проводится на основе алгоритмов, реализованных в программном комплексе ASIAN-2014[12].

На рисунке 2 приводится сборка двухконтурного рулевого механизма, на котором размещена таблица с указанием размеров звеньев и координат стоек и шарниров в данном положении механизма. Величины геометрических параметров определяются с использованием относительных величин при заданном $b = 246,352$ мм. Максимальное отклонение результатов синтеза в положении $\theta = 32,07^0$ и $\theta_1 = 33,78^0, \theta_2 = 33,33^0$ согласно формуле (7) составляет меньше чем 1,6%.

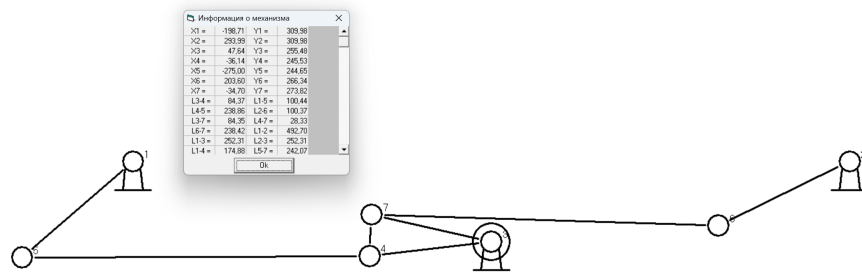


Рис. 2. Кинематическая схема, таблица параметров рулевого механизма.

Заключение

Синтезирован шестизвенный двухконтурный рулевой механизм для четырехколесных мобильных роботов, который удовлетворяет условия Аккермана. Определены значения относительных геометрических параметров двухконтурного механизма Аккермана. Синтез механизма проводится методом интерполяции по четырем положениям. Анализ кинематики механизма показал достаточную точность реализации целевой функции.

Список источников

1. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей. – Киев:Наук.думка, 1986.-232 с.
2. Отчет по НИР по грантовому финансированию (ГФ.2012) на тему: «Исследование динамики, разработка системы управления, проектирование и создание опытного образца мобильного робота» на 2012-2014 годы (№ госрегистрации 0112РК0206);
3. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988. - 232 с.
4. Пейсах Э.Е., Пирожков М.А. Синтез передаточных рычажных механизмов методом кусочно-полиномиальной параметрической аппроксимации, ориентированным на исключение дефекта ветвления//Машиностроение. 1988. №6. С.48-56.
5. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. М. 1982.
6. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. – 576 с.
7. Tuleshov, A.K., Jomartov, A.A., Ibrayev, S., Jamalov, N.K., Halicioglu, R. Optimal synthesis of planar linkages // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2020, 1(439), p. 172–180, doi: 10.32014/2020.2518-170X.21
8. Tuleshov, A., Halicioglu, R., Shadymanova, A., Kuatova, M. Kinematic synthesis method and eccentricity effects of a Stephenson mechanism // Mechanical Sciences, 2021, 12(1), p. 1–8, <https://doi.org/10.5194/ms-12-1-2021> (Article, Scopus: CiteScore 52, WoS: Q4)
9. Иоффе М.Л. Принцип Аккермана и его реализации в современных автомобилях. Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2021, № 9, с. 40–47, doi: 10.18698/0536-1044-2021-9-40-47

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Хайрнасов К.З.

Московский авиационный институт, Москва, Россия
kamilh@mail.ru

Аннотация. Рассматривается роботизированная система: многостепенной стенд полунатурного моделирования, предназначенный для имитации полетных характеристик в лабораторных условиях. Разработана методика аппроксимации деталей, осуществляющих перемещения: зубчатые венцы, подшипниковые опоры, редукторы, двигатели системой стержневых систем в методе конечных элементов. Разработана методика расположения основы слоев в многослойном композите для получения максимальной прочности и жесткости стенда. Проведен анализ поведения и напряженно-деформированного состояния стенда из магниевых сплавов, традиционно применяемого при изготовлении стенда полунатурного моделирования и из композиционного материала; углепластика при динамическом воздействии.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-29-20299.

Введение

Робототехнические системы в настоящее время получают все большее распространение во многих областях науки и техники благодаря развитию компьютерного зрения, искусственного интеллекта, позволяющего провести анализ имеющегося состояния и провести нужные преобразования. В недалеком будущем это позволит заменить человека, особенно во вредных и опасных производствах и ситуациях. Поэтому всесторонний анализ таких систем, в том числе исследование и анализ систем в процессе эксплуатации является важной и актуальной темой. Компьютерное моделирование робототехнических систем, содержащих подвижные элементы и детали, осуществляющие перемещения: подшипники, зубчатые венцы, редукторы, сервоприводы и др. – сложная задача, требующая большого объема теоретических и экспериментальных исследований в процессе проектирования и изготовления. Дополнительные трудности накладываются при рассмотрении динамического воздействия на такие конструкции. Решение такого рода задач, в основном, осуществляется численными методами с применением компьютерной техники и современных систем автоматизированного проектирования [1]. Если компьютерное моделирование конструкции роботизированных систем в системах автоматизированного проектирования отлажено и не представляет особых сложностей, моделирование механизмов, осуществляющих перемещения не достаточно изучено и математическая идентификация в методе конечных элементов требует дальнейшего исследования.

Основной текст

Для решения задач механики твердого деформированного тела при динамическом нагружении используется уравнение [2]. При этом нелинейные слагаемые определяются по перемещениям, полученным на предыдущих шагах нагружения

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} - [N_{nl}]$$

Здесь обозначено: $[M]$ – матрица масс, $[K]$ – матрица жесткости, $[N_{nl}]$ – геометрически нелинейное слагаемое, q – вектор обобщенных перемещений, $\{Q\}$ – вектор внешних сил, $\{\ddot{q}\}$ – обобщенные ускорения. Определение приведенных характеристик многослойного композиционного материала из уравнения (1)

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \chi^o \end{Bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

В настоящем исследовании рассмотрим многослойный композиционный материал с постоянными значениями параметров слоев. Тогда из уравнения (2) получим соотношения

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}(h_k - h_{k-1}), \quad i, j = 1, 2, 6, \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}(h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad i, j = 1, 2, 6, \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}(h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad i, j = 1, 2, 6, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначено: A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} – мембранные, изгибно-мембранные и изгибные жесткости.

На рисунке 1 показаны обозначения, используемые в уравнении (3).

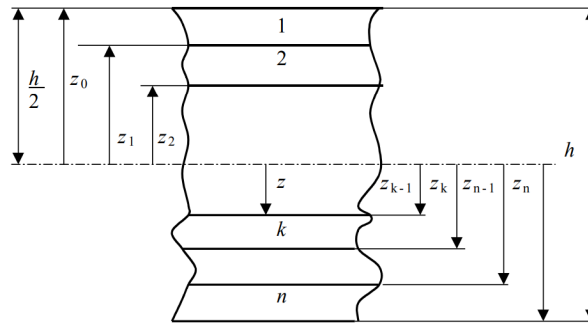


Рис. 1. Обозначения, принятые для многослойного композиционного материала.

Прочностные и жесткостные характеристики многослойного композиционного материала зависят от расположения основы и утка композита в слоях многослойной структуры. Поскольку максимальная прочность слоя обеспечивается, когда основа расположена по линии действия нагрузки необходимо расположить основу слоев композиционного материала по линиям действия максимальных растягивающих или сжимающих напряжений т.е. по линиям действия максимальных нагрузок.

В настоящем исследовании предложена методика обеспечения максимальной жесткости конструкции из композиционного материала, заключающаяся в следующем:

- Моделируем конструкцию из однородного материала.
- Проводим расчет на действующие эксплуатационные нагрузки.
- Определяем траектории действия максимальных напряжений.
- Располагаем композиционный материал по траекториям максимальных напряжений, полученным из решения задачи для однородного материала.
- Определяем траектории максимальных напряжений для конструкции из композиционного материала.
- Добиваемся того, чтобы основа композиционного материала совпадала с траекториями максимальных напряжений и проводим окончательный расчет.
- При этом оцениваем прочность по касательным напряжения с целью обеспечения достаточно числа слоев воспринимающих сдвиговые напряжения.

Робототехнические системы имеют в конструкции детали, обеспечивающие перемещения каналов. К ним относятся подшипники, зубчатые венцы, шестерни, редукторы, сервоприводы, двигатели. Идентификация таких деталей в методе конечных элементов сложная задача. В настоящем исследовании предлагается методика идентификации таких деталей путем замены их стержневыми системами идентичными по жесткости заменяемым деталям. Авторами была разработана программа по вычислению жесткости подшипников, зубчатых венцов, шестерен, редукторов, сервоприводов, двигателей методами и жесткости стержневых систем, обеспечивающих жесткость заменяемых элементов стержневыми системами идентичной жесткости. Сравнение предложенной методики с имеющимися экспериментальными данными показало правомерность предложенной методики. На рис. 2 показано напряженно-деформированное состояние стэнда при динамическом нагружении угловой скоростью канала курса 300 град/с.

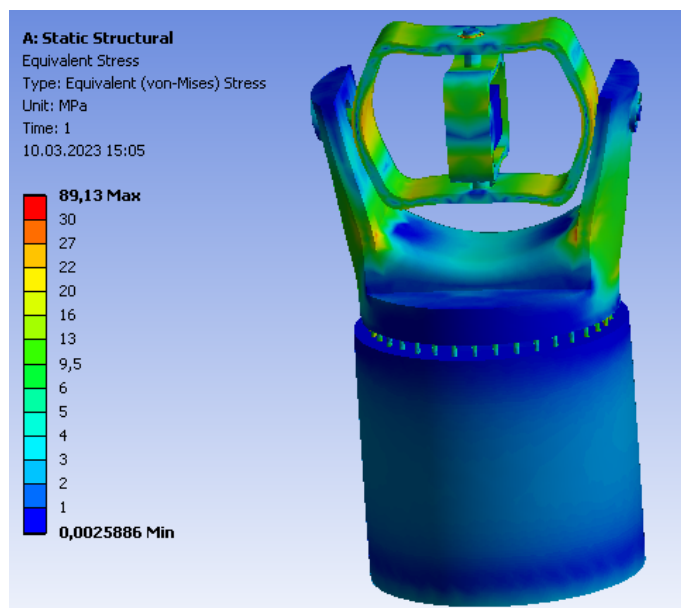


Рис. 2. Напряженное состояние стэнда при динамическом нагружении угловой скоростью канала курса 300 град/с.

В результате проведенного исследования разработаны методика определения максимальной жесткости стенда из композиционного материала, методика учета деталей стенда, обеспечивающих перемещения каналов стенда, получена модель стенда из композиционного материала максимальной жесткости, проведен расчет стенда из композиционного материала при динамических воздействиях, проведен анализ сложного напряженно-деформированного состояния стенда из магниевых сплавов и композиционного материала при динамических воздействиях

Выводы

Проведенные исследования показали, что изготовление робототехнических комплексов из композиционных материалов с высокими удельными прочностными характеристиками, по сравнению с однородными материалами: магния, позволяет снизить инерционные характеристики элементов подвижных частей робототехнических комплексов, что способствует повышению их динамичности, а это одна из основных эксплуатационных характеристик таких конструкций. В работе представлена методика определения приведенных характеристик многослойного композиционного материала. Разработана методика получения максимальной жесткости и прочности конструкции из композиционного материала. Метод основан на расположении базовых слоев многослойного композиционного материала в конструкции вдоль траекторий максимальных напряжений. Разработанный метод аппроксимации элементов робототехнических систем, таких как зубчатые венцы, подшипники, редукторы, системой стержневых систем позволил рассчитать напряженно-деформированное состояние полунатурного имитационного стенда из магния и композиционного материала под действием инерционной эксплуатационной динамической нагрузки. Анализ полученных результатов показал, что максимальные напряжения стенда из магния, традиционно используемого для изготовления стендов на 12 % выше, чем максимальные напряжения стенда из композиционного материала. При этом максимальное перемещение магниевых стендов было в 1,45 раза больше, чем у стенда из композиционного материала. Представленные методы применимы к широкому классу робототехнических систем, включающих подшипники, зубчатые венцы и редукторы.

Литература

- 1 K.Z. Khayrnasov //Methodology for calculating the stress-strain state of a robotic system made of composite materials. IOP Conference 2019 Ser.: Mater. Sci. English. 675 012028. .
- 2 И.Ф. Образцов, А.С. Вольмир, К.З. Хайрмасов //Тороидальные оболочки: запаздывающие катастрофы при динамическом нагружении. Докл. АН СССР. 1982. т. 266. №6. - С. 1343-1346.

СЕКЦИЯ I

Подсекция I-6

Механика космических аппаратов и систем

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ПО ВЕКТОРНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Алексеев М.М., Стихно К.А.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва
alienkseev@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена задача Wahba определения ориентации КА и получено её альтернативное решение. В процессе решения задача была сведена к условной минимизации функции нескольких вещественных переменных. Выведена система из трёх алгебраических уравнений от трёх переменных, точно определяющая кватернион оптимальной ориентации. Описан алгоритм численного решения полученной системы. Приведены результаты компаративного анализа полученного решения, оптимального алгоритма ESOQ и субоптимального алгоритма TRIAD. Рассмотрен эффект исчезновения части данных на работу полученного решения и оптимальных алгоритмов. Сделаны заключения о структуре, точности и эффективности предлагаемого алгоритма.

Постановка задачи

Задача определения ориентации космического аппарата (КА) является фундаментальной составляющей теории навигации и управления КА. Она заключается в нахождении ортогональной матрицы, описывающей переход между связанной с КА системой координат (ССК) и некоторой другой модельной системой координат. В данной работе представлено альтернативное решение классической постановки данной задачи, предложенной Grace Wahba [1] в 1965 году: матрица перехода определяется на основании $n \geq 2$ измерений направлений в ССК и соответствующих расчётных данных в орбитальной системе координат (ОСК). Так как идеально точными считаются только модельные значения направлений в ОСК, цель задачи Wahba – нахождение оптимальной ориентации, минимизирующей функцию потерь Wahba,

$$L_W(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \|s_i - Av_i\|^2 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i s_i^T Av_i, \quad (1)$$

где A - матрица перехода между ОСК и ССК, v_i - проекции направлений в ОСК, s_i - проекции направлений в ССК, a_i - весовые коэффициенты, определяющие относительные точности датчиков КА, такие что $\sum_i a_i = 1$.

Описание математической модели

Фундаментальной конструкцией предлагаемой модели будет являться ортонормированный базис (ОНБ) в пространстве кватернионов [2], построенный относительно некоторого предопределённого направления Λ_0 . Для нахождения такого ОНБ достаточно определить гиперплоскость, проходящую через начало координат и ортогональную исходному направлению, и выбрать из неё 3 линейно независимых вектора. Затем, пользуясь изоморфизмом пространства кватернионов и пространства \mathbb{R}^4 , мы можем ввести для кватернионов операцию скалярного произведения и применить к полученному набору векторов процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получая в результате искомый ОНБ в пространстве кватернионов.

Другим важным элементом данной модели является геометрическая структура множества кватернионов, описывающих конечные повороты в 3-х мерном пространстве [3]. Такие кватернионы (versors) удовлетворяют условию нормировки и формируют единичную 4-х мерную сферу в рассматриваемом векторном пространстве. Подставляя в условие нормировки разложение произвольного кватерниона Λ по введённому ранее ОНБ, мы можем получить следующую параметризацию рассматриваемого множества:

$$\|\Lambda\|^2 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \Lambda_i, \quad \text{где } \alpha_0 = \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2}, \alpha_i \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Стоит заметить, что, если Λ_0 является достаточно точной аппроксимацией искомой ориентации, то мы получаем право рассматривать только положительные значения α_0 , так как мы можем достаточно точно определить полусферу, в которой находится оптимальный кватернион.

Наконец, выражая функцию потерь (1) через кватернионы конечного поворота [3] и подставляя в неё полученную параметризацию (2), мы получаем следующий вариант функции потерь Wahba:

$$L_W(\Lambda) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i s_i^T [\Lambda \circ v_i \circ \Lambda^*] \quad \Rightarrow \quad L_W(\Lambda) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k s_k^T \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \alpha_i \alpha_j [\Lambda_i \circ v_k \circ \Lambda_j^*] \right). \quad (3)$$

Последняя формула является функцией от трёх вещественных переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые определены в ограниченной области – единичной сфере в 3-х мерном пространстве. Таким образом,

минимизация функционала (1) сводится к нахождению условного экстремума функции (3) через решение системы

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i \cdot \sum_{k=1}^n \Omega_k(m, i) - \frac{\alpha_m}{\alpha_0} \cdot \sum_{i=0}^3 \alpha_i \cdot \sum_{k=1}^n \Omega_k(0, i) = 0, \quad \text{где } m = \overline{1, 3},$$

$$\Omega_k(i, j) = \Omega_k(j, i) = a_k \mathbf{s}_k^T \left(\left[\Lambda_i \circ \mathbf{v}_k \circ \Lambda_j^* \right] + \left[\Lambda_j \circ \mathbf{v}_k \circ \Lambda_i^* \right] \right).$$
(4)

Алгоритм определения оптимальной ориентации

Как было замечено ранее построение удобного для последующих вычислений ОНБ играет ключевую роль в вычислении оптимального кватерниона и требует нахождения некоторого начального приближения оптимальной ориентации. В данной работе для построения такой изначальной аппроксимации используются обработанные результаты применения алгоритма TRIAD [2, 4], позволяющего рассчитать текущую ориентацию КА по проекциям двух направлений в ОСК и ССК. Действие этого алгоритма основывается на построении промежуточной триады векторов и нахождении матриц перехода из ССК и ОСК в данную триаду. Несмотря на то, что в теоретическом случае отсутствия погрешностей алгоритм TRIAD позволяет найти оптимальную ориентацию, в общем случае этот алгоритм является субоптимальным и результат его применения не минимизирует функцию потери Wahba [4]. Как следствие TRIAD зачастую применяется для получения набора относительно точных аппроксимаций оптимальной ориентации, которые авторы предлагают использовать для определения начального приближения Λ_0 . Например, тривиальным примером алгоритма вычисления Λ_0 является выбор наиболее оптимального кватерниона из всех имеющихся результатов применения TRIAD.

Ключевым практическим вопросом является непосредственное решение полученной системы (4), определяющей минимум функции потери (3). В данной работе рассматривается численный подход (метод Ньютона) к разрешению этой нелинейной системы уравнений, использующий следующие формулы для расчёта матрицы Якоби $\mathbb{H} = (H_{ij})$, где δ_j^i – символ Кронекера и $i, j = \overline{1, 3}$:

$$H_{ij} = H_{ji} = \sum_{k=1}^n \left[\Omega_k(i, j) - \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \cdot \Omega_k(0, j) - \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^3} \cdot \sum_{m=0}^3 \alpha_m \cdot \Omega_k(0, m) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha_0} \cdot \delta_j^i \cdot \sum_{m=0}^3 \alpha_m \cdot \Omega_k(0, m) - \frac{\alpha_j}{\alpha_0} \cdot \Omega_k(0, i) + 2 \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^2} \cdot \Omega_k(0, 0) \right].$$

Не менее важным вопросом является практическая реализация вышеупомянутого ограничения $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \leq 1$. Ограничение в форме нестрогого неравенства, наложенное на варьируемые параметры, требует непосредственного применения условий Каруша-Куна-Таккера (ККТ). В рамках этих условий возникает необходимость решения системы из 4-х уравнений, включающих в себя дополнительный неотрицательный весовой коэффициент. Тем не менее, представленный в данной работе выбор ОНБ в пространстве кватернионов позволяет при численном решении опустить условия ККТ, так как стартовой точкой итерационного алгоритма является начало координат (соответствует кватерниону Λ_0) и процесс построения базиса позволяет говорить о близости искомого решения к началу координат.

Результаты численного моделирования

Описанный в данной работе алгоритм был испытан для случая $n = 3$ (рассматривались направления на Солнце, Землю и магнитного поля Земли) на данных, соответствующих моделированию положения КА на орбите в течение 48 часов (163238 измерений). Для получения измеренных направлений в ССК на соответствующие модельные данные был наложен шум, имитирующий погрешности измерения. При генерации шума направления случайных отклонений были равновероятны, а угловая величина отклонения имела нормальное распределение $\theta_i \sim N(\mu = 1/2, \sigma^2 = 1/36) \cdot \mathcal{G}_i$: $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = 2^\circ$, $\mathcal{G}_3 = 4^\circ$, но значения, лежащие вне интервала $(0; \mathcal{G}_i)$, игнорировались. Кроме того, используемые данные включали в себя 18 зон обращения в нулевой вектор первого измеренного вектора (направления на Солнце), что позволило проверить точность представленного алгоритма в вырожденных случаях.

Все вычисления были проведены с алгоритмом, использующим функцию взвешенного среднего для выбора начального приближения (сравнивались 9 точек, расположенных в окрестности наиболее точного изначального результата применения TRIAD) и метод Ньютона с фиксированным количеством итераций для численного решения системы (4). Полученные результаты были сравнены с результатами применения оптимального алгоритма ESOQ [5] и результатами применения алгоритма TRIAD. Так, на рис. 1 и рис. 2 представлена гистограмма отклонений расчётных значений функции потери от соответствующих результатов ESOQ при одной и двух итерациях соответственно. На рис. 3 представлены аналогичные данные, но описывающие отклонение наилучших результатов алгоритма TRIAD от значений функции потери ESOQ. На рис. 4 представлена альтернативная форма оценки отклонения результатов представленного алгоритма (после 2-

х итераций) от ESOQ: гистограмма норм разниц между кватернионами, рассчитанными этими двумя алгоритмами. Наконец, на рис. 5 представлен график относительно времени (за первые 12 часов моделирования) расчётных значений первой координаты кватерниона и кривая, описывающая зависимость от времени точного значения этой координаты, найденного для случая отсутствия погрешностей измерений направлений в ССК. На всех графиках красным цветом выделены данные, соответствующие вышеописанным вырожденным случаям.

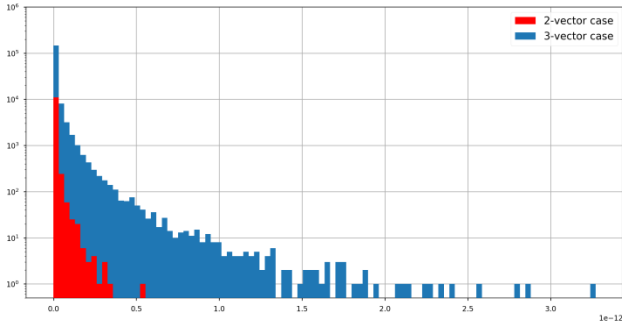


Рис. 1. Гистограмма отклонений L_W (1 итерация).

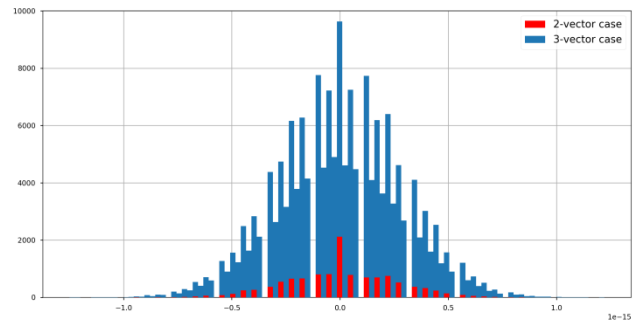


Рис. 2. Гистограмма отклонений L_W (2 итерации).

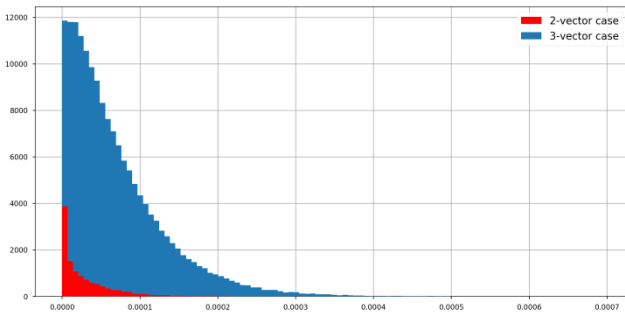


Рис. 3. Гистограмма отклонений L_W для TRIAD.

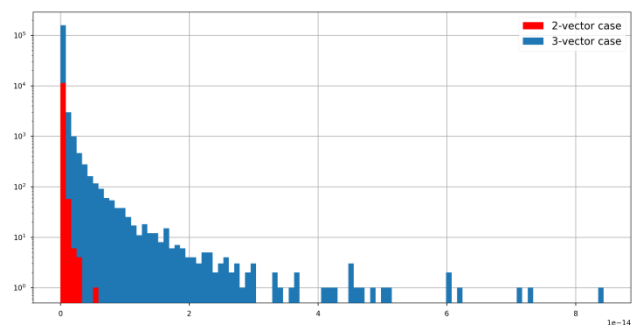


Рис. 4. Гистограмма норм разниц кватернионов.

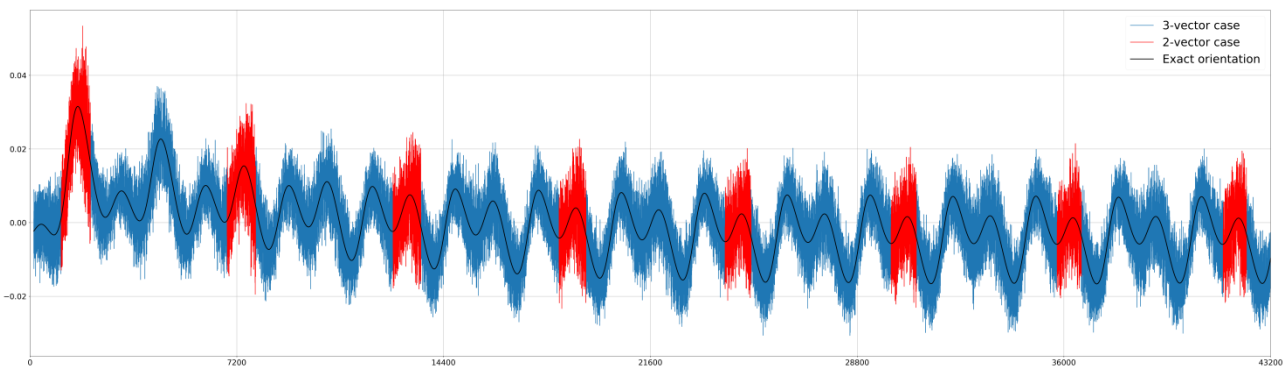


Рис. 5. Зависимость первой координаты кватерниона λ_0 от времени t в секундах.

Выводы

Предложенное в данной работе решение задачи Wahba непосредственно основывается на геометрии пространства кватернионов и на свойствах множества кватернионов, описывающих конечные повороты. Так, полученная параметризация (3) функции потери Wahba фактически описывает отклонения рассматриваемого кватерниона от некоторого фиксированного начального приближения оптимального кватерниона.

Среди достоинств предлагаемого решения стоит отметить модульную структуру полученного алгоритма. Оба основных блока (функция нахождения начального приближения и алгоритм численного решения) допускают модификации, обусловленные конкретными условиями и спецификами отдельных прикладных задач. При тестировании на модельных данных реализация алгоритма с использованием метода Ньютона показала довольно высокую вычислительную точность и эффективность.

Литература

1. Wahba G. A Least Squares Estimate of Satellite Attitude // *SIAM Review*, 7: 3 1965. p. 409
2. Shuster M. A Survey of Attitude Representations // *The Journal of the Astronautical Sciences*, 41: 4 1993. pp. 439-517
3. Landis Markley F., Crassidis J.L. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* // Springer New York. 2014. pp. 37-48
4. Tanygin S., Shuster M. The many TRIAD algorithms (17th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2007) // *Advances in the Astronautical Sciences*: 122 2007. pp. 81–99
5. Mortari D. ESOQ: A closed-form solution to the Wahba problem // *The Journal of the Astronautical Sciences*, 45: 2 1997. pp. 195–204.

ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАНТЕЛИ В ОБОБЩЁННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

Байков А.Е., Исмагилов А.Р.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
alexander@newbaikov.ru

Аннотация. Рассматриваются поступательно-вращательные движения симметричной гантели в круговой ограниченной задаче трёх тел, когда основные притягивающие тела имеют одинаковые массы. Найден новый класс движения гантели, когда её центр движется вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сама гантель образует с нормалью постоянный прямой угол (инвариантное многообразие «гравитационный пропеллер»). Показано, что указанное многообразие включает в себя несколько двумерных инвариантных подмногообразий, пересечения которых дают положения равновесия. Исследована динамика на 2D инвариантных многообразиях и устойчивость всех положений равновесия на «гравитационном пропеллере». Также изучено влияние движения центр масс гантели на её вращение вокруг нормальной прямой при условии, что отношение длины гантели к диаметру орбиты основных тел стремится к нулю.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00560).

Введение

В обобщённой ограниченной задаче трёх тел исследуется движение пассивно гравитирующего твёрдого тела в поле притяжения основных тел. Если центр масс пассивного тела движется вдоль нормали к плоскости орбит основных тел, такую задачу называют обобщённой задачей Ситникова. Такие движения на самом деле могут существовать. Отметим, что в обычной задаче Ситникова вместо твёрдого тела вдоль нормальной прямой движется материальная точка [1–6].

В [7] было рассмотрено движение однородного стержня, когда основные тела одинаковой массы движутся по круговой орбите. Обнаружен новый класс движения, соответствующей обобщённой задаче Ситникова: центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сам стержень непрерывно вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный прямой угол. Этот класс движения назван в [7] «гравитационным пропеллером». В [8] рассмотрено движение симметричной или асимметричной гантели вдоль нормали к плоскости движения двух основных тел одинаковой массы. Тела движутся по круговой или эллиптической орбите. Найденны положения равновесия гантели, исследована их устойчивость.

Цель настоящей работы – получить инвариантное многообразие «гравитационный пропеллер» для симметричной гантели, если основные тела одинаковой массы движутся по круговой орбите, а затем исследовать движения, принадлежащие этому инвариантному многообразию.

Инвариантное многообразие «гравитационный пропеллер»

Гантель длины $2l$, представляющая собой соединённые безмассовым стержнем две материальные точки A и B одной массы m , находится в гравитационном поле, созданном двумя одинаковыми по массе M основными точечными телами, которые вращаются с угловой скоростью ω_0 вокруг их общего центра масс C по круговой орбите радиуса a . Влиянием гантели на движение основных тел пренебрегаем ($m \ll M$). Рассмотрим следующие системы координат: 1) $C\xi\eta\zeta$ – инерциальная система координат; 2) $Cxuz$ – синодическая система координат, в которой ось Cx соединяет основных тела всё время движения, а ось Cz перпендикулярна плоскости движения основных тел; 3) $Ox'y'z'$ – связанная с гантелью правая декартова система координат, где O – центр гантели, ось Oz' направлена вдоль гантели; 4) $O\xi'\eta'\zeta'$ – поступательно движущаяся система координат, оси которой ориентированы параллельно осям инерциальной системы $C\xi\eta\zeta$. Ориентацию осей $Ox'y'z'$ относительно $O\xi'\eta'\zeta'$ зададим с помощью углов Эйлера ψ (прецессии), φ (собственного вращения) и θ (нутации). Уравнения движения центра масс гантели имеют вид

$$2m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, 2m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, 2m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

где ξ, η, ζ – координаты центра масс гантели в инерциальной системе координат, $U = U(\xi, \eta, \zeta, \psi, \varphi, \theta, t)$ – силовая функция, выражение для которой будет приведено ниже. Очевидно, что силовая функция не зависит от угла собственного вращения φ . Уравнения, описывающие вращательные движения гантели, можно записать в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (2)$$

где $L = T + U$ – функция Лагранжа. Выражение для кинетической энергии:

$$T = m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + ml^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2). \quad (3)$$

Так как T и U не зависят от φ , T не зависит от $\dot{\varphi}$, второе уравнение в системе (2) представляет собой

тождество. Принимая во внимание выражение (3) для кинетической энергии, перепишем уравнения (2) в виде

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{J\sin^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}, \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{J}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \quad (4)$$

где $J = J_{x'x'} = J_{y'y'} = 2ml^2$.

Представим силовую функцию задачи в виде суммы $U = U_1 + U_2$, где U_j — силовая функция притяжения гантели от основного тела с номером j , $j = 1, 2$. Имеем $U_j = f\frac{Mm}{r_{jA}} + f\frac{Mm}{r_{jB}}$, $j = 1, 2$, где f — гравитационная постоянная, r_{jA} (r_{jB}) — расстояние от j -го основного тела до точечной массы A (соответственно, точечной массы B).

Рассмотрим множество решений уравнений движения (1), (4) следующего вида:

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi = \eta = 0, \zeta = \zeta(t), \theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \omega_0 t + \delta(t) \right\}. \quad (5)$$

Вычисления показывают, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\mathcal{P}} = 0, \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\mathcal{P}} = 0, \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\mathcal{P}} = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнения для ζ , η и θ на многообразии \mathcal{P} представляют собой тождества. Итак, (5) — инвариантное многообразие системы (1), (4). В [7], где вместо гантели рассматривался однородный стержень, многообразие \mathcal{P} называется «гравитационным пропеллером». Движение гантели, принадлежащее этому инвариантному многообразию, определяется тем, что её центр масс перемещается вдоль нормальной к плоскости основных тел прямой, а сама гантель вращается вокруг нормальной прямой, образуя с ней постоянный прямой угол (рис. 1). При этом движения центра масс стержня и его вращения вокруг оси Cz взаимно влияют друг на друга.

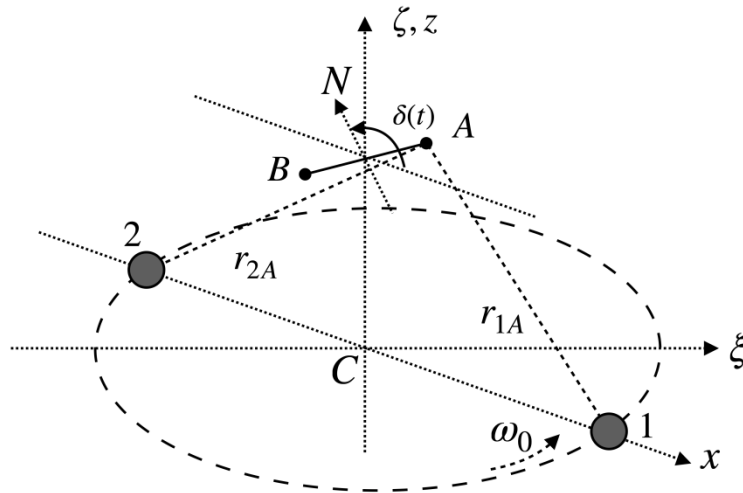


Рис. 1. Конфигурация гантели на «гравитационном пропеллере».

Запишем уравнения движения на инвариантном многообразии \mathcal{P} в безразмерном виде. Для этого рассмотрим новое безразмерное время τ , зависящее от физического времени t следующим образом: $\tau = \Omega t$, где $\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Пусть $l = sa$, $\zeta = az$, тогда уравнения движения имеют вид

$$z'' = -z \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} \right), \delta'' = -\frac{\cos\delta}{s} \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right), \quad (6)$$

где $\Delta_1 = \sqrt{1 + s^2 + z^2 + 2ss\sin\delta}$, $\Delta_2 = \sqrt{1 + s^2 + z^2 - 2ss\sin\delta}$, двойным штрихом обозначена вторая производная по безразмерному времени τ .

Анализ уравнений движения

Отметим некоторые свойства системы (6). Она зависит от единственного безразмерного параметра s , представляющего собой отношение длины гантели к диаметру орбиты основных тел. Если параметр s принадлежит интервалу $(0, 1)$, то оба выражения под корнями Δ_1 и Δ_2 положительны при любых z и δ . В этом случае правые части уравнений (6) представляют собой аналитические функции переменных z и θ , а инвариантное многообразие \mathcal{P} диффеоморфно тотальному пространству касательного расслоения

конфигурационного цилиндра $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$, где $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Уравнения (6) допускают дискретную группу симметрий, порождаемую преобразованиями $\delta \mapsto \delta + \pi$, $z \mapsto -z$ и $\delta \mapsto -\delta$.

Рассмотрим систему (6) в предположении, что параметр s мал. Разложим правые части уравнений по степеням s , удержав члены до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} z'' &= -\frac{2z}{(z^2+1)^{3/2}} + \frac{3z(z^2+5\cos^2\delta-4)}{(z^2+1)^{7/2}}s^2 + O(s^4), \\ \delta'' &= \frac{3\sin 2\delta}{(z^2+1)^{5/2}} - \frac{5\sin\delta\cos\delta(3z^2+7\cos^2\delta-4)}{(z^2+1)^{9/2}}s^2 + O(s^4). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) имеют вид регулярно возмущённой системы. В силу чётности относительно s правых частей уравнений (6), разложения в правых частях уравнений (7) включают только чётные степени s , поэтому можно ввести новый малый параметр $\varepsilon = \sqrt{s}$. При $\varepsilon = 0$ уравнение для z совпадает с (безразмерным) уравнением для точечной массы $2m$ в обычной круговой задаче Ситникова. Отметим, что вращения гантели на движения её центра масс в невозмущённой системе не влияют. Напротив, вращательные движения существенным образом зависят от поступательных движений центра масс вдоль оси Cz . В работе исследован характер этой зависимости.

Наконец, уравнения (6) допускают следующие инвариантные подмногообразия размерности два.

Подмногообразия $\{\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}\}$: гантель параллельна оси Cx всё время движения, её центр масс совершает колебания вдоль оси Cz .

Подмногообразия $\{\delta = 0, \pi \pmod{2\pi}\}$: гантель перпендикулярна оси Cx всё время движения, её центр масс колеблется вдоль оси Cz .

Подмногообразие $\mathcal{C} = \{z = 0\}$: гантель совершает неравномерные вращения в плоскости движения основных тел.

Очевидно, подмногообразия \mathcal{A} и \mathcal{B} не пересекаются, пересечение \mathcal{A} с \mathcal{C} даёт положения равновесия $z = 0$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, а пересечение \mathcal{B} с \mathcal{C} — положения равновесия $z = 0$, $\delta = 0, \pi \pmod{2\pi}$. В силу симметрий $\delta \mapsto \delta + \pi$, $\delta \mapsto -\delta$ достаточно исследовать компоненты $\mathcal{A} = \{\delta = \frac{\pi}{2}\}$, $\mathcal{B} = \{\delta = 0\}$ и положения равновесия $\{z = 0, \delta = \frac{\pi}{2}\}$, $\{z = 0, \delta = 0\}$. В работе исследована динамика на подмногообразиях \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} , а также исследована устойчивость положений равновесия на «гравитационном пропеллере» в линейном приближении и в строгой нелинейной постановке.

Литература

1. Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. No 2. С. 303–306.
2. Corbera, M. and Llibre, J., Periodic Orbits of the Sitnikov Problem via a Poincaré Map, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2000, vol. 77, no. 4, pp. 273–303.
3. Alfaro, J. M. and Chiralt, C., Invariant Rotational Curves in Sitnikov's Problem, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1993, vol. 55, pp. 351–367.
4. Sidorenko V.V. On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2011. V. 109. P. 367–384.
5. Kalas, V.O. and Krasil'nikov, P.S., On the Investigation of Stability of Equilibrium in Sitnikov Problem in Nonlinear Formulation, *Russian J. Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 117–126.
6. Маркеев А.П. О субгармонических колебаниях в близкой к круговой эллиптической задаче Ситникова // ПИММ. 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 442–454.
7. Красильников П.С. О многообразии "гравитационный пропеллер" в обобщенной круговой задаче Ситникова // ПИММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 576–586.
8. Krasil'nikov P. S., Ismagilov A. R., On the Dumb-Bell Equilibria in the Generalized Sitnikov Problem, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, Vol. 18, no. 4, pp. 577–588.

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА МЯГКОЙ ПОСАДКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТРАНСФОРМИРУЕМЫМ МЕХАНИЧЕСКИМ ПОСАДОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ

Бакулин В.Н.¹, Бычков Р.С.², Борzych С.В.²

1 - Институт прикладной механики РАН, Москва

2 - ПАО РКК "Энергия" им. С.П.Королева, Королев, Московская область

rbychkov96@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен подход к разработке математической модели процесса мягкой посадки возвращаемого космического аппарата, начиная с момента первого контакта с грунтом посадочной поверхности до полной остановки. Обоснована актуальность проблемы. Космический аппарат и элементы его посадочного устройства рассматриваются как структурно-сложная механическая система с внутренними связями, вид которых определяется конкретной кинематической схемой посадочного устройства. Для определения реакций связей получены специальные уравнения связей. Исследованы качественные особенности процесса.

Введение

Процесс мягкой посадки, с момента касания аппаратом посадочной поверхности и до его полной остановки – заключительная и крайне ответственная фаза миссии [1]. Подавляющая часть огромной кинетической энергии, которой обладает возвращаемый аппарат, гасится на участке спуска либо тормозными аэродинамическими устройствами, либо двигателями (на планетах без атмосферы). Тем не менее, к моменту касания поверхности аппарат обладает существенной остаточной кинетической энергией, поскольку, в силу погрешностей системы управления спуском, скорость его центра масс может составлять несколько метров в секунду при массе в несколько тонн. Эта энергия гасится посадочным устройством, в данном случае – механическим трансформируемым, содержащим демпфирующие элементы, при обжати которых и происходит поглощение остаточной кинетической энергии. Выбор конкретной кинематической схемы посадочного устройства и энергетических характеристик демпферов (энергопоглотителей) осуществляется на основании расчетного исследования динамики посадки с помощью специально разработанной математической модели процесса, с учетом ограничений и требований, предъявляемых к процессу мягкой посадки.

Подход к математическому моделированию динамики процесса посадки

Математическая модель процесса должна позволять учитывать ограничения и требования, предъявляемые к процессу мягкой посадки: ограничение перегрузки некоторым предельно допустимым значением; устойчивость процесса (отсутствие опрокидывания) с момента первого касания посадочной поверхности до полной остановки, минимально необходимый клиренс и ряд других.

Разработана модель движения космического спускаемого аппарата с рычажным посадочным устройством как структурно-сложной механической системы тел, состоящей из центрального тела (корпуса аппарата) и демпферов, один конец которых крепится к корпусу аппарата, а другой – к тарели, непосредственно контактирующей с посадочной поверхностью. К каждой тарели сходится от корпуса 3 демпфера; иногда один или два демпфера в «треноге» могут быть заменены жесткими стержнями (подкосами). Каждый демпфер считается состоящим из штока и стойки; внутри последней находится энергопоглотитель (например, сминаемые соты) (рис. 1).

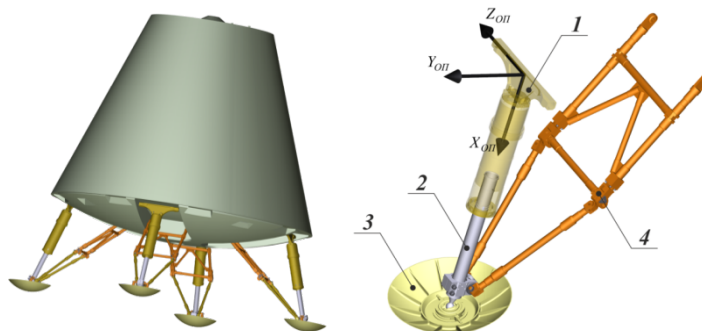


Рис. 1. Состав посадочной опоры возвращаемого аппарата: 1 – стакан, 2 – шток, 3 – тарель, 4 – подкос.

Предложен подход, основывающийся на корректной формулировке предпосылок модели – каждый элемент (корпус КА, стаканы, штоки, тарели) имеют собственную реальную массу. Для каждого тела системы записываются уравнения поступательного перемещения центра масс в инерциальных осях и уравнения вращательного движения относительно центра масс в связанных осях [2]. Каждое из этих тел условно рассматривается как свободное, а их взаимодействие учитывается в виде сил либо моментов реакций связей, в

зависимости от того, какая степень свободы – линейное или угловое перемещение – запрещается данной конкретной связью. Для определения сил и моментов реакций связей записана специальная система уравнений связей. Таким образом, динамическая модель процесса посадки включает неразвязанную систему уравнений движения и уравнений связей.

Разработаны модели специфических внешних воздействий, отвечающих реальным физическим условиям протекания процесса мягкой посадки. Поскольку общая достоверность модели в значительной мере определяется адекватностью задания свойств грунта [3], сформированы модели взаимодействия грунта с опорными элементами посадочного устройства (тарелками), опирающиеся на обширный экспериментальный материал, позволяющие свести задачу движения пространственного тела (тарели) в сплошной среде (грунте) к функциональным зависимостям для определения главных векторов сил и моментов, действующих на тарели со стороны грунта.

Разработан эффективный алгоритм процедуры совместного решения неразвязанной системы уравнений движения и уравнений связей, который позволяет гибко формировать расчетную динамическую схему посадочного устройства любой конкретной конструкции и пространственной конфигурации. На базе данного подхода разработан специализированный программный комплекс для расчета процесса посадки космического спускаемого аппарата с различными типами посадочных устройств – пружинно-рычажных, рычажно-тросовых, на отводимый щит.

Проведен анализ использования различных типов энергопоглотителей опор посадочного устройства и осуществлен их рациональный выбор. Разработаны математические модели сил, возникающих при обжатии демпфирующего элемента опоры (энергопоглотителя сотового типа).

Анализ динамики процесса мягкой посадки

На основании анализа возможностей наземной экспериментальной отработки показано, что на стендах не удастся в полной мере воспроизвести реальные условия посадки, например, отличную от земной гравитацию, профиль рельефа, тип грунта, всё многообразие сочетаний начальных условий в момент контакта с поверхностью [4], в связи с чем основным способом обоснования принятых технических решений по конструкции, геометрии, энергетике ПУ является математическое моделирование.

Получены интегральные зависимости динамики процесса посадки, позволяющие получать экспресс-оценку суммарной энергетике посадочного устройства или суммарного импульса тормозных посадочных двигателей, которые могут быть использованы на предварительных стадиях разработки возвращаемого космического аппарата, в условиях целого ряда неопределенностей.

Выполнено исследование устойчивости движения спускаемого аппарата в процессе контакта его посадочного устройства с грунтом для широкого спектра механических свойств грунта от мягких песчаных почв до твердого мерзлого грунта.

Выполнен оптимальный выбор характеристик энергопоглотителей в рамках компоновочных ограничений на длину хода демпферов.

Осуществлен анализ целого ряда нештатных ситуаций посадки, связанных с отказом одного из куполов парашюта, различными отказами элементов опор посадочного устройства, отказом одной из опор и т.д.

Литература

1. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Voronin V.V., Space vehicle landing dynamics at failure of landing gear. Russian Aeronautics (Iz VUZ). 2016, Vol. 59, No. 1, pp 23-28.
2. Bakulin V.N., Borzykh S.V. An Approach for Building Dynamic Models of the Process of Disclosure of Transformable Space Structures. Doklady Physics, 2021, Vol. 66, No. 8, pp. 243- 248.
3. Бакулин В.Н., Кокушкин В.В., Борзых С.В., Воронин В.В., Щиблев Ю.Н. Исследование влияния свойств грунта посадочной поверхности на устойчивость процесса посадки космического аппарата с механическим посадочным устройством // Вестник Московского авиационного института, 2014, т.21, №1. С. 25-32
4. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Бычков Р.С., Терешина К.В. Анализ возможностей и ограничений наземной экспериментальной отработки процессов трансформации ракетно-космических Инженерный журнал: наука и инновации ·2022. № 5. Раздел: Научные конференции. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 7–10 декабря 2021 г. Материалы конференции. В двух частях. Часть 2. С. 102-107

МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ УВОДА ГРУППЫ ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА

Баранов А.А.¹, Щеглов Г.А.²

1 - Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

2 - Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

shcheglov_ga@bmstu.ru

Аннотация. Рассматриваются результаты решения задач механики, определяющих выбор проектного облика космического аппарата, предназначенного для увода на орбиту захоронения группы объектов космического мусора. Для низких околоземных орбит и окрестности геостационарной орбиты предложены схемы облёта объектов, основанные на использовании естественных возмущений орбиты, что позволяет повысить энергетическую эффективность перелетов и обосновать выбор варианта увода: буксировки объектов или оснащения их отделяемыми тормозными модулями. Представлены компоновочные схемы космических аппаратов и результаты моделирования условий нагружения манипулятора после захвата объекта за сопло маршевого двигателя.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 23-29-00419, <https://tscf.ru/project/23-29-00419/>.

Введение

Последние годы ознаменовались успехами коммерческих компаний SSTL, Northrop Grumman и Astroscale. При проведении экспериментов в миссиях сервисного обслуживания космических аппаратов и активного увода объектов космического мусора «RemoveDebris», «MEV-1», «MEV-2» и «Elsa-D» развит успех ранних миссий, например, «Orbital Express Advanced Technology» (DARPA). Интерес к сервисным операциям, показываемый как космическими агентствами (JAXA, NASA, ESA, CNES), так и коммерческими фирмами в перспективе ведёт к возникновению востребованного рынка услуг по очистке ценного орбитального ресурса от нефункционирующих крупных объектов [1]. Под крупными объектами космического мусора (ОКМ) понимаются, прежде всего, верхние ступени ракет-носителей и разгонные блоки. Особенностью таких объектов является наличие маршевого ракетного двигателя, оснащенного соплом большой степени расширения.

В докладе представлены результаты работы над проблемой увода ОКМ с наиболее загрязнённых околоземных орбит с использованием специального космического аппарата (КА). Проводимые исследования охватывают низкие орбиты с высотами 700–1200 км и окрестность геостационарной орбиты. В этих областях ОКМ группируются и оказывается возможным существенно повысить эффективность миссий активного увода объектов за счет рационального выбора параметров орбитального движения и компоновочных схем КА, основанного на решении прикладных задач механики космического полета и динамики конструкций.

Результаты исследований

В докладе представлены результаты исследований, в которых сравнивается эффективность двух основных вариантов миссий увода нескольких ОКМ на орбиты захоронения (ОЗ). Первый вариант предполагает наличие на борту КА-сборщика тормозных двигательных модулей (ТДМ), которые могут быть закреплены на ОКМ и независимо от КА-сборщика обеспечивают увод объекта на ОЗ. При втором варианте КА-сборщик играет роль буксира, уводя объекты на ОЗ и возвращаясь обратно за следующим объектом. Для указанных вариантов увода выполнена проработка возможных конструктивно-компоновочных схем КА-сборщиков, а также проанализированы имеющиеся проекты-аналоги. Эффективность обоих вариантов увода ОКМ можно полноценно сравнить, используя оценки сухой массы КА-сборщиков и имея рассчитанные параметры манёвров, обеспечивающих облёт группы ОКМ [2].

При перелётах между объектами в случае низких орбит было целенаправленно использовано свойство прецессии долготы восходящего узла орбиты в нормальном гравитационном поле [3]. Последовательность облёта объектов определяется при помощи портрета отклонений долгот восходящих узлов. При выборе «последовательной» схемы облёта активный КА переводится на специально рассчитываемую орбиту ожидания, скорость прецессии которой отличается от скорости прецессии орбиты цели. При выборе «диагональной» схемы облёта роль орбиты ожидания выполняет орбита очередного уводимого объекта [4]. При маневрировании между ОКМ в окрестности геостационарной орбиты последовательность облёта объектов определялась исходя из долговременной эволюции наклонения под действием земных и лунно-солнечных возмущений. Были рассмотрены две близкие по смыслу схемы облёта объектов в приэкваториальной области [5].

Если для реализации миссий увода группы ОКМ с ГСО методом буксировки можно использовать КА, построенный на базе унифицированной космической платформы, то для реализации низкоорбитальных миссий требуется создание более сложного космического комплекса, состоящего из базового КА и блока ТДМ. Авторами предлагается оригинальная компоновочная схема КА-сборщика длиной 11,5 м и диаметром 3,0 м, который, как показано на рис. 1, состоит из трех отсеков: двигательного, приборно-агрегатного и отсека полезной нагрузки [6].

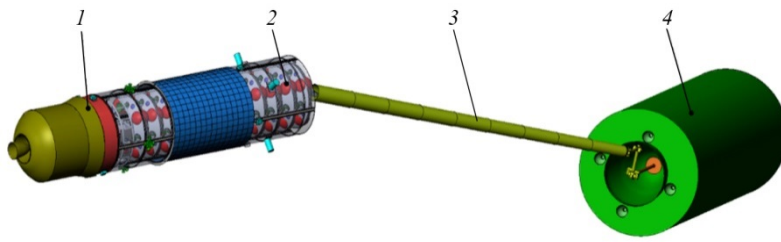


Рис. 1. Компоновка КА для удаления ОКМ: 1 – базовый КА, 2 – блок ТДМ, 3 – манипулятор, 4 – ОКМ (верхняя ступень ракеты-носителя Зенит-2).

Сухая масса аппарата в первом приближении равна 4170 кг. Двигательный отсек, предназначенный для управления движением центра масс КА может быть выполнен на основе существующего разгонного блока «Бриз-М». Приборно-агрегатный отсек, содержащий необходимые системы бортового оборудования, имеет цилиндрическую форму и расположен между двигательным отсеком и отсеком полезной нагрузки. Отсек полезной нагрузки выполнен в виде открытого с одного торца цилиндрического контейнера для ТДМ. На продольной оси контейнера размещается стыковочный манипулятор, имеющий телескопические звенья. Особенность ТДМ заключается в том, что они имеют кольцевую компоновку с центральным отверстием, что позволяет разместить их соосно продольной оси КА-сборщика в виде блока-обоймы. Таким образом удаётся исключить использование дополнительного монтажного манипулятора, применяемого в других компоновках КА-сборщиков. Предлагаемое техническое решение позволяет обеспечить заданную центровку КА за счёт поступательного перемещения обоймы по мере расходования ТДМ и запасов топлива в маршевой двигательной установке.

Захват объекта за сопло маршевого жидкостного ракетного двигателя осуществляется телескопическим манипулятором, длина которого в рабочем положении составляет 13 м. Проведенное численное моделирование показало, что при захвате объекта типа верхней ступени РН «Зенит-2» массой 9000 кг максимальные нагрузки не превысят 1.2 кН, а моменты – 11 кН*м [7]. При этом проектная масса манипулятора составит около 500 кг. За счёт большой длины манипулятора удаётся компенсировать значительные рассогласования в начальных условиях стыковки и уменьшить угловую скорость комплекса «КА-ОКМ» после стыковки с 12 до 0,3 градусов/с.

Выводы

Проведённые исследования позволили сформулировать требования к облику перспективного КА, предназначенного для увода крупных ОКМ с рабочих орбит. Доказана возможность запуска такого КА при помощи существующих средств выведения. Анализ стартовой массы КА-сборщика показывает, что очистку ГСО целесообразно выполнять в соответствии со вторым вариантом увода при помощи КА, играющего роль буксира. Очистку низких орбит выгоднее осуществлять в соответствии с первым вариантом увода посредством двухступенчатого космического комплекса, состоящего из активного КА с некоторым количеством ТДМ на борту. Проведённые расчёты позволяют утверждать, что очистка низких орбит обходится существенно дороже, чем очистка ГСО, следовательно, контролю населённости низких орбит должно уделяться повышенное внимание.

Литература

1. V. Zelentsov, G. Shcheglov, V. Mayorova, T. Biushkina Spacecrafts Service Operations as a Solution For Space Debris Problem // International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET), 9:7 2018. 1503 – 1518
2. A. A. Baranov, D. A. Grishko, G. A. Shcheglov, A. S. Sholmin, M. V. Stognii, N. D. Kamenev Feasibility analysis of LEO and GEO large space debris de/re-orbiting taking into account launch mass of spacecraft-collector and its configuration layout // Advances in Space Research, 67 2021. 371–383.
3. А. А. Баранов, Д. А. Гришко, В. И. Майорова Исследование затрат характеристической скорости, необходимой для обслуживания и восполнения спутниковых систем на круговых орбитах // Инженерный журнал: наука и инновации, 3 (15) 2013. 26
4. А.А. Баранов, Д.А. Гришко Способ определения последовательности перелётов между объектами космического мусора в окрестности геостационарной орбиты // Патент на изобретение № 2759026. Дата регистрации 08.11.2021
5. А.А. Баранов, Д.А. Гришко Способ определения последовательности перелётов между объектами космического мусора при значительном отличии в долготе восходящего узла их орбит // Патент на изобретение № 2688120. Дата регистрации 17.05.2019
6. Г.А. Щеглов, М.В. Стогний Космический комплекс для утилизации группы объектов крупногабаритного космического мусора // Патент РФ на изобретение № 2695155 Опубликовано 22.07.2019. Бюл. №21
7. V. I. Mayorova, G. A. Shcheglov, M. V. Stognii Analysis of the space debris objects nozzle capture dynamic processed by a telescopic robotic arm // Acta Astronautica, 187 2021 259–270

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ НАНОСПУТНИКА ФОРМАТА CUBESAT 6U НА НИЗКИХ ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТАХ

Барина Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А.

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва
elenabarinova3131@gmail.com*

Аннотация. Исследуется неуправляемое движение относительно центра масс наноспутника формата CubeSat 6U, двигающегося по низкой круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Получена система уравнений для определения положений углового равновесия наноспутника. Для частного случая смещения центра масс от геометрического центра наноспутника вдоль продольной оси получено аналитическое решение. Рассмотрены пассивные системы стабилизации, такие как аэродинамическая, аэродинамически-гравитационная, гравитационная и гравитационно-аэродинамическая, с учётом особенностей, обусловленных формой CubeSat 6U. Для случая использования аэродинамической стабилизации по вектору скорости движения центра масс показана возможность возникновения резонансных режимов движения и даны рекомендации по их предотвращению.

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

Введение

За последние годы наноспутники (НС) прочно заняли свою нишу среди космических аппаратов. Постоянное усложнение и комбинирование задач, решаемых такими аппаратами, постепенно увеличивает и их размеры. Так в дополнение к НС формата CubeSat 1U-3U приходят НС формата CubeSat 6U и более. В работе [1] были выделены следующие особенности движения НС формата CubeSat на низких орбитах:

1. Для НС значение баллистического коэффициента больше, чем для аппарата с большими размерами и массой (при одинаковой объёмной плотности), и, следовательно, меньше срок его существования на орбите. Это даёт возможность, учитывая небольшой срок активной работы НС (обычно от полугода до года), эффективно использовать достаточно низкие орбиты, избегая засорения околоземного космического пространства.

2. Угловое ускорение НС, обусловленное аэродинамическим моментом, значительно выше, чем аппарата с большими размерами и массой (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объёмной плотности). Это расширяет диапазон высот, на которых аэродинамический момент, действующий на НС, является значимым и его можно использовать для пассивной стабилизации аппарата по вектору скорости движения центра масс.

3. Существующие коммерческие транспортно-пусковые устройства отделения НС порождают большие величины начальной угловой скорости. Кроме того, при запуске НС с платформ, осуществляющих неконтролируемое движение, необходимо дополнительно учитывать случайный характер углового движения этих платформ.

4. Следует отметить возможность возникновения резонансных режимов движения у НС, совершающих полёт на низких орбитах. Для НС стандарта CubeSat, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения, а это создаёт предпосылки возникновения резонанса, который проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по углу атаки, когда целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю.

К особенностям НС формата CubeSat 6U в отличие от CubeSat 1U-3U, следует отнести то, что у НС CubeSat 6U различаются все три линейных размера, а, следовательно, отличается и выражение для аэродинамического углового ускорения. Кроме того, большинство НС CubeSat 1U-3U являются динамически симметричными или имеют малые различия в величинах поперечных моментов инерции, тогда как НС CubeSat 6U являются динамически несимметричными, что безусловно является благоприятным фактором для достижения трёхосной гравитационной стабилизации.

Указанные особенности движения НС CubeSat 6U на низких орбитах необходимо учитывать, как при исследовании неуправляемого движения относительно центра масс, так и при разработке алгоритмов управления угловым движением.

Положения углового равновесия НС формата CubeSat 6U под действием аэродинамического и гравитационного моментов

Вопросам определения положений равновесия относительно центра масс уделяется значительное внимание в литературе. Например, в работе В.А. Сарычева [2] рассматривается динамика спутника со смещённым центром давления относительно центра масс по трём координатам и тремя не равными главными моментами инерции, когда на него действуют аэродинамический и гравитационный моменты. Предложен символично-численный метод определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе

координат. В указанной работе «действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха» и данная сила не зависит от ориентации аппарата относительно набегающего потока, то есть является постоянной, что достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой к сферической.

Поскольку НС формата CubeSat имеют форму прямоугольного параллелепипеда, их аэродинамическая сила лобового сопротивления зависит от ориентации спутника относительно набегающего потока (углов атаки и собственного вращения). На рассматриваемых высотах движения принято считать, что обтекание НС является свободномолекулярным и удар молекул газа абсолютно неупругий. В этом случае аэродинамическая сила представляет собой силу сопротивления, которая определяется площадью проекции НС на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [3]. При рассмотрении НС формата CubeSat с тремя различными линейными размерами ($l_x > l_z > l_y$), например формата CubeSat 6U, выражение для площади проекции НС на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, будет иметь вид [4]:

$$S(\alpha, \varphi) = S_x \left(|\cos \alpha| + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi| \right) \right).$$

где $S_x = l_y l_z$ – характерная площадь НС (в данном случае площадь наименьшей грани), α – пространственный угол атаки (угол между продольной осью НС и вектором скорости центра масс), φ – угол собственного вращения (угол между плоскостью угла атаки и поперечной осью НС).

В случае НС формата CubeSat 1U-3U, то есть с квадратным поперечным сечением ($l_y = l_z$), выражение для площади проекции НС на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, упростится. В работах [5, 6] авторами были получены аналитические выражения для определения положений равновесия углового движения НС формата CubeSat 1U-3U на круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов для двух частных случаев: динамически симметричного НС при смещении центра давления от его центра масс по трём координатам и НС с тремя разными главными моментами инерции при смещении центра давления от центра масс по одной из главных осей инерции.

В данной работе приведен вывод системы уравнений для определения положений углового равновесия НС формата CubeSat 6U. А также получено её аналитическое решение для случая смещения центра масс от геометрического центра вдоль продольной оси. В работе показано, что число положений равновесия не может быть меньше 8 и больше 24. При преобладании аэродинамического момента, то есть на сравнительно низких высотах, где атмосфера оказывает заметное влияние, возможно всего 8 положений равновесия. Тогда как при преобладании гравитационного момента, то есть на высотах с менее плотной атмосферой, возможно 24 положения равновесия.

При использовании пассивных систем стабилизации важно учитывать информацию об устойчивых положениях равновесия под действием внешних моментов и анализ неуправляемого движения НС относительно центра масс.

Выбор проектных параметров наноспутника CubeSat 6U для обеспечения пассивной стабилизации

Анализ внешних моментов, создаваемых окружающей средой, показывает, что при соответствующем проектировании за счёт выбора формы, размеров и распределения масс можно создать такие условия, когда эти моменты будут оказывать стабилизирующее влияние на угловое движение НС. В этом случае совмещение связанных осей с осями базовой системы отсчёта осуществляется под действием указанных моментов без использования специальных управляющих устройств.

В известных работах задача ориентации наноспутника решается в детерминированной постановке. В работе авторов [7] задача обеспечения определенной ориентации в пространстве НС формата CubeSat 1U – 3U, применительно к его угловому движению после отделения от носителя, рассматривается в вероятностной постановке.

Важным отличием НС формата CubeSat 6U по сравнению с CubeSat 1U-3U, является то, что НС CubeSat 6U являются динамически несимметричными, что безусловно является благоприятным фактором, при использовании трёхосной гравитационной стабилизации. В данной работе в вероятностной постановке рассматривается задача обеспечения определенной ориентации применительно к НС CubeSat 6U. При этом учитывается, что существующие коммерческие пусковые устройства отделения наноспутников порождают большие неопределенности величины начальной угловой скорости. В работе приведена классификация пассивных систем стабилизации для НС CubeSat 6U, совершающих полёт по круговой орбите: аэродинамическая, аэродинамически-гравитационная, гравитационная и гравитационно-аэродинамическая, которые можно использовать применительно к диапазону высот доминирования определённого типа момента внешних сил и виду стабилизации (одноосная и трёхосная).

На основе полученных аналитических функций выведены формулы для выбора проектных параметров (геометрических размеров, запаса статической устойчивости, моментов инерции), обеспечивающих при движении на круговых орбитах отклонения осей НС от требуемых направлений меньше допустимых с заданной

вероятностью на требуемой высоте полёта при заданных погрешностях начальной угловой скорости, формируемой системой отделения. Разработан практический инструментарий в виде номограмм, которые позволяют выбрать основные проектные параметры наноспутника CubeSat 6U, обеспечивающие требуемую его стабилизацию на низких круговых орбитах применительно к диапазону высот доминирования определенного типа момента внешних сил и виду стабилизации.

Исследование условий возникновения резонансных режимов и возможные подходы к их предотвращению

В случае использования пассивной одноосной аэродинамической стабилизации НС относительно центра масс важно учитывать возможность возникновения резонансных режимов движения, которые проявляются в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю. Учёт возможности возникновения резонансных режимов движения позволит повысить эффективность работы системы ориентации НС при решении им целевых задач на низких орбитах [4].

Поскольку НС формата CubeSat имеют форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит не только от пространственного угла атаки, но и от угла собственного вращения. Это создаёт предпосылки возникновения резонанса за счет формы аппарата даже без малой асимметрии. В работе изучена взаимосвязь между компонентами асимметрии, особенностями формы и резонансными соотношениями частот. Получены формулы для определения критических значений продольной угловой скорости НС, при которых выполняются условия возникновения резонанса.

Для предотвращения резонансных режимов движения, обусловленных инерционно-массовой асимметрией, рекомендуется максимально уменьшать данную асимметрию. Однако полностью убрать инерционно-массовую асимметрию НС ввиду неточности её определения не представляется возможным. Кроме того, НС формата CubeSat 6U практически невозможно изготовить динамически симметричным ввиду различного расстояния от боковых граней до продольной оси. Также часть резонансных соотношений обусловлена только формой аппарата. Поэтому предлагается задавать ограничения на величину продольной угловой скорости при отделении от пускового устройства, а также заблаговременно включать систему стабилизации с целью достижения рассогласования резонансного соотношения частот.

Заключение

Таким образом, в работе проведено исследование динамики движения НС формата CubeSat 6U относительно центра масс при движении на низкой круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов с учётом особенностей, обусловленных его формой и соотношением моментов инерции. Получена система уравнений для определения положений углового равновесия НС, а также получено её аналитическое решение для случая смещения центра масс от геометрического центра вдоль продольной оси. Рассмотрено в вероятностной постановке использование пассивных систем стабилизации, разработан практический инструментарий в виде номограмм, которые позволяют выбрать основные проектные параметры наноспутника формата CubeSat 6U, обеспечивающие требуемую его стабилизацию на низких круговых орбитах применительно к диапазону высот доминирования определенного типа момента внешних сил и виду стабилизации. Даны рекомендации по предотвращению появления резонансных режимов движения

Полученные результаты могут быть полезны для разработчиков наноспутников, так как выбор проектных параметров позволяет обеспечить требуемую ориентацию наноспутника с минимизацией затрат энергии на её поддержание после гашения приобретенного начального кинетического момента после отделения.

Литература

1. И.В. Белоконов, И.А. Тимбай, П.Н. Николаев // Анализ и синтез движения аэродинамически стабилизированных космических аппаратов нанокласса формата CubeSat, Гироскопия и навигация, 2018, Т. 9. № 4, с. 287-300.
2. В.А. Сарычев, С.А. Гутник // Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия, Космические исследования, 2015, том 53, № 6, с. 488 – 496.
3. В.В. Белецкий // Движение искусственного спутника относительно центра масс, Москва: Наука, 1965. 416 с.
4. E. V. Barinova, I. V. Belokonov, I. A. Timbai // Motion features of aerodynamically stabilized CubeSat 6U nanosatellites, in 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2022 - Proceedings, 2022.
5. Е.В. Баринаова, И.А. Тимбай // Положения относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов, Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение, 2019, Т. 18, № 2, с. 21-32.
6. E.V. Barinova, I. A. Timbai // Determining of Equilibrium Positions of CubeSat Nanosatellite under the Influence of Aerodynamic and Gravitational Moments, in 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2020 - Proceedings, 2020.
7. И.В. Белоконов, Е.В. Баринаова, И.А. Тимбай // Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации, Гироскопия и навигация, 2020, Т. 28. № 1, С. 81-100.

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОРАЗМЕРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ОТКАЗЕ ОДНОГО КАНАЛА УПРАВЛЕНИЯ

Белоконов И.В., Елисов Н.А., Крамлик А.В., Ломака И.А.

Самарский университет им. Королева, Самара, Россия

kramlikh.av@ssau.ru

Аннотация. Для задачи пространственной переориентации малоразмерного космического аппарата из произвольного начального состояния находится программное управление при отказе одного канала управления. Решение основано на использовании чётных рядов Фурье и описания углового движения в кватернионной форме. В качестве численного метода отыскания неизвестных коэффициентов структуры управления используется метод дифференциальной эволюции. Результаты математического моделирования показали, что при отказе одного из каналов управления решение задачи переориентации малоразмерного космического аппарата с управляющим моментом сопоставимым по величине с внешними моментами является принципиально возможным.

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

Введение

В настоящее время широкую популярность приобретают малоразмерные космические аппараты (МКА) микро- и нанокласса (микроспутники и, в особенности, наноспутники). Такие КА стали популярными благодаря тому, что их создание, по сравнению с более крупными КА, не требует значительных финансовых и временных затрат, однако позволяет провести лётные испытания как отдельных систем, так и новых технических решений в условиях космического пространства прежде, чем применять их в дорогостоящих космических миссиях. Запуск нескольких КА микро- и нанокласса, совместно выполняющих целевую задачу в составе группировки, значительно расширяет область их применения [1, 2].

Одной из значимых особенностей МКА является то, что элементы контура управления его угловым движением создаются из коммерческих комплектующих, которые не отличаются высокой надёжностью, поэтому важно повысить надёжность контура управления угловым движением, в том числе, за счёт формирования программного управления при отказе одного канала управления.

Постановка задачи

Для описания углового движения МКА с помощью нормированного кватерниона q кинематические уравнения имеют вид [3]:

$$2\dot{q} = q \circ \omega \quad (1)$$

а динамические уравнения Эйлера:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = M_a + M_{gp} + U, \quad (2)$$

где $I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ – тензор инерции МКА, $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ – вектор абсолютной угловой скорости МКА, M_a – вектор аэродинамического момента, M_{gp} – вектор гравитационного момента, $U = (u_x, u_y, u_z)^T$ – вектор управляющего момента (будем предполагать, что управления как функции времени непрерывны).

Для МКА, угловое движение которого описывается уравнениями (1)-(2) необходимо перевести из некоторого начального положения:

$$q(t_0) = q_0, \quad \omega(t_0) = \omega_0 \quad (3a)$$

в требуемое конечное положение

$$q(t_k) = q_k, \quad \omega(t_k) = \omega_k \quad (3b)$$

за фиксированный интервал времени $T = t_k$.

В работе [4] было показано, что для решения задачи переориентации можно использовать чётные ряды Фурье по сравнению с другими видами функциональных рядов (степенных, тригонометрических, нечётных, Шлёмилля).

Задача переориентации МКА с отказавшим каналом управления решается с использованием следующей структуры управления (для каждого из не отказавших каналов):

$$U(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^8 A_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \theta_n\right), \quad (4)$$

где A_n, θ_n – неизвестные параметры, подлежащие определению.

Для отыскания 34 неизвестных параметров A_n, θ_n был использован алгоритм дифференциальной эволюции [5].

Математическое моделирование для оценки работоспособности подхода проводилось для МКА с характеристиками, приведёнными в таблице 1. Высота полёта МКА $H = 550$ км.

Таблица 1 – Характеристика МКА

Параметр	Значение
Продольный момент инерции I_x , кгм ²	0,0138481
Поперечный момент инерции I_y , кгм ²	0,0729356
Поперечный момент инерции I_z , кгм ²	0,0714477
Площадь мидела S_M , м ²	0,01
Запас статической устойчивости Δx , м	0,06

Числовые значения краевых условий (3а)-(3б) приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Краевые условия задачи

Параметр	Начальное условие	Конечное условие
Вектор угловая скорости $\boldsymbol{\omega}$, °/с	[0,1; 0,1; 0,1]	[0; 0; 0]
Вектор ориентации (углы Эйлера), °	[60; 70; 30]	[1; 1; 179]
Вектор ориентации (кватернионы)	[0,579; 0,579; 0,554; 0,1485]	[0; 1; 0; 0]

Время переориентации $T = t_k = 7100$ с.

Пример результата решения задачи переориентации МКА при отказавшем канале управления показаны на рисунках 1-8.

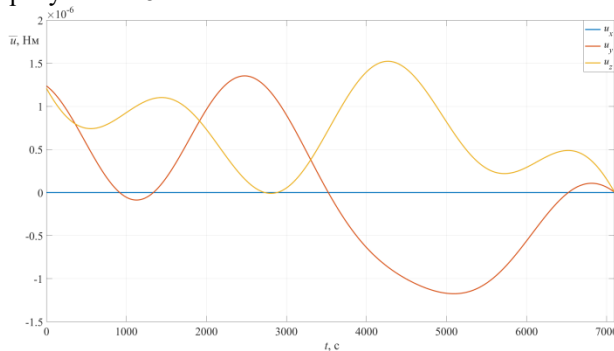


Рис. 1. Зависимость управляющих моментов от времени в случае отказа канала по оси Ox .

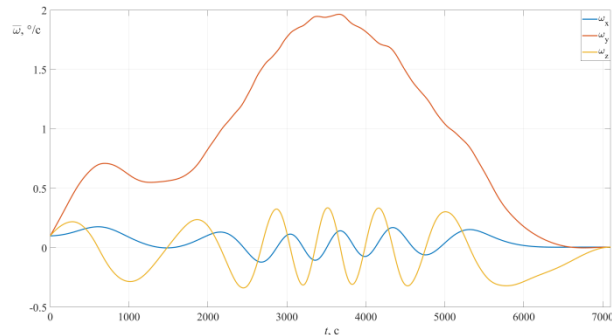


Рис. 2. Зависимость компонентов угловой скорости от времени в случае отказа канала по оси Ox .

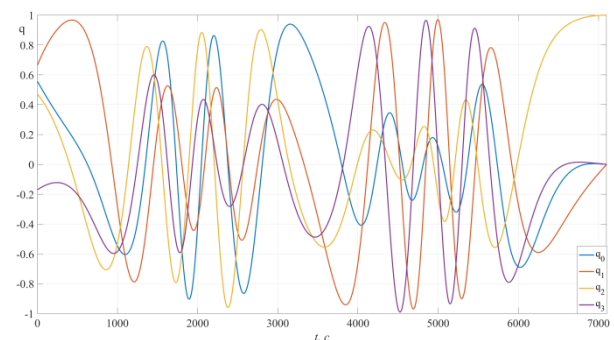


Рис. 3. Зависимость компонентов кватерниона от времени в случае отказа канала по оси Ox .

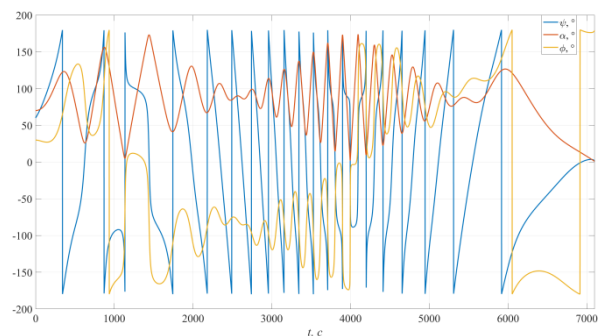


Рис. 4. Зависимость углов прецессии ψ , атаки α и собственного вращения ϕ от времени в случае отказа канала по оси Ox .

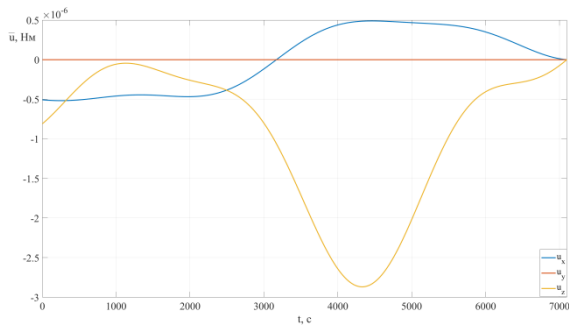


Рис. 5. Зависимость управляющих моментов от времени в случае отказа канала по оси Oy .

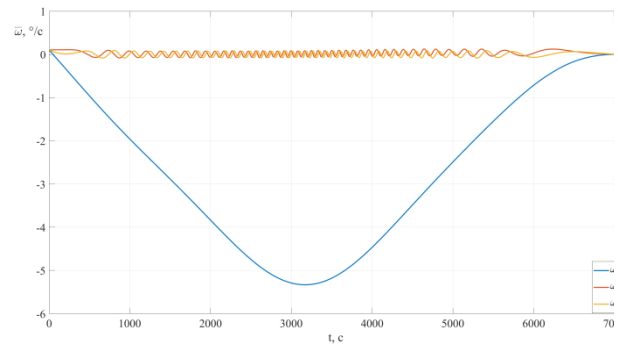


Рис. 6. Зависимость компонентов угловой скорости от времени в случае отказа канала по оси Oy .

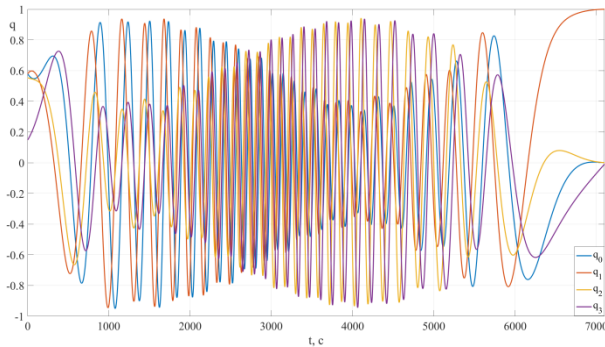


Рис. 7. Зависимость компонентов кватерниона от времени в случае отказа канала по оси Oy .

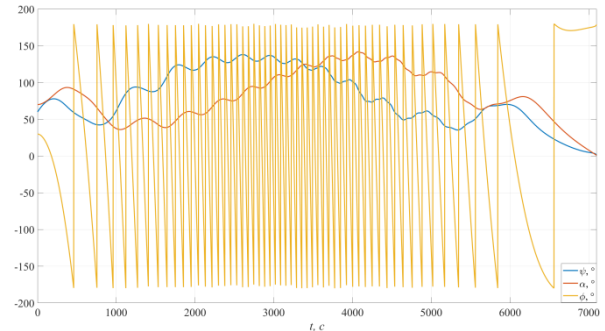


Рис. 8. Зависимость углов прецессии ψ , атаки α и собственного вращения ϕ от времени в случае отказа канала по оси Oy .

Характер поведения управления, кватерниона, угловых скоростей и углов при отказе канала по оси Oz аналогичен поведению при отказе по каналу Oy .

Заключение

В работе решена задача пространственной переориентации малоразмерного космического аппарата из произвольного начального состояния в требуемое конечное. Программное управление при отказе одного канала управления получено с использованием чётных рядов Фурье. Решение задачи свелось к отысканию 34 коэффициентов чётного ряда Фурье, которое было осуществлено с использованием алгоритма дифференциальной эволюции. При времени переориентации порядка 1,5 витка, величина управляющего момента не превысила $3 \cdot 10^{-6}$ Нм, что достижимо для магнитных исполнительных устройств, которые наиболее часто используются для МКА нанокласса стандарта кубсат. Таким образом, при отказе одного из каналов управления решение задачи переориентации малоразмерного космического аппарата с управляющим моментом сопоставимым по величине с внешними моментами является принципиально возможным.

Литература

1. В. Ю. Ключников // Построение кластеров малых космических аппаратов, Изв. вузов. Приборостроение, 59:6 2016. 423–428
2. М. Ю. Овчинников // Эх, мчится тройка удалая..., Сборник научно-популярных статей – победителей конкурса РФФИ 2012 года, ИТЦ МОЛНЕТ, 16 2013. 20–34
3. В. Н. Бранец, И П. Шмыглевский // Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. 1973. 320 с.
4. N. A. Elisov, A. V. Kramlikh, I. A. Lomaka, D. P. Avariaskin // An attitude control by the functional series in the problem of nanosatellite reorientation, // Aerospace Science and Technology, 132:108038, 2023
5. R. Storn, K. Price // Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, J. OfGlobal Optim. 11, 1997. 341–359

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ РОССИЙСКОГО СЕГМЕНТА МКС

Беляев М.Ю.

ПАО «РКК «Энергия»
mikhail.belyaev@rsce.ru

Аннотация. Реализация программ исследований на борту Международной космической станции (МКС), выведенной на орбиту 25 лет тому назад – 20 ноября 1998 г., потребовала решения новых задач теоретической и прикладной механики. Эти задачи связаны с уточнением в полете динамических характеристик станции, изучением на борту микрогравитационной обстановки, с разработкой новых технологий для управления и решения исследовательских задач на МКС и т.д. Для решения указанных задач на РС МКС были организованы эксперименты «Тензор», «Среда-МКС», «Изгиб», «Вектор-Т» и др., результаты которых использовались также в образовательных целях.

Использование МКС для выполнения космических экспериментов (КЭ) потребовало решения ряда новых задач. Это связано, прежде всего, с большими размерами и массой этой станции, причем в течение полета характеристики МКС меняются и их надо уточнять, в том числе, и для целей управления. Эксперименты на станции – КЭ «Тензор», КЭ «Среда-МКС» направлены на решение этих задач [1-8]. В экспериментах определяются динамические характеристики станции, смещения элементов её конструкции и т.д. Для оценки тензора инерции разработаны разные способы, в одном из них используются измерения собственного кинетического момента системы гиринов и угловой скорости. Понятно, что знание тензора инерции и других динамических характеристик (массы, положения центра масс) важно для управления космическим аппаратом (КА). Эти задачи используются и в образовательном процессе студентов, аспирантов, проходящих практику и работающих в РКК «Энергия». Важно, что данные задачи не просто методические, они связаны с реальным изделием на орбите, и когда студенты или аспиранты планируют эксперимент на международной станции и получают реальные измерения – это способствует образовательному процессу, т.к. они теперь причастны к самому крупному космическому проекту, 25-летие начала работы на орбите которого отмечается в этом году. Очень важно, чтобы результаты КЭ использовались не только для станции, но и для решения других практических задач. Один из примеров использования результатов экспериментов на МКС связан с эксплуатацией автоматических спутников. В процессе эксплуатации спутников связи «Ямал-200» возникали проблемные участки продолжительностью до 3 часов для управления ориентацией. Для космического спутника связи это большая проблема – можно потерять клиентов, т.к. конкуренция на этом рынке весьма высока. Технология уточнения тензора инерции космического аппарата, прогноза движения КА вокруг центра масс, созданная в экспериментах на МКС, была применена для разработки технологии управления спутниками «Ямал» по прогнозу [3]. КА «Ямал-200» работает на орбите уже 19 лет и его эксплуатация продолжается. Это один из примеров, показывающих и научный, и прикладной результат КЭ на МКС. Таких примеров не мало.

В рамках КЭ «Среда-МКС» определяются смещения элементов корпуса МКС, например, из-за перепада температуры её элементов в полёте. Разработан и используется новый способ, основанный на применении фото- и видеорегистрации элементов корпуса станции через иллюминатор МКС. С его помощью определяются смещения размерами до 0.1 мм [8].

В начале создания МКС она была провозглашена, прежде всего, исследовательской лабораторией для изучения различных процессов в области микрогравитации, хотя со временем области исследования, конечно, расширились. Микрогравитационная обстановка постоянно контролировалась и изучалась [9-14]. В настоящее время для этих целей создается новое оборудование [15].

Выполненные исследования показали, что микрогравитационная обстановка на борту российского сегмента (РС) МКС не является благоприятной. Это связано с тем, что центр масс МКС находится на американском сегменте, а многие бортовые системы, создающие микроперегрузки, размещены на РС МКС. При выполнении стыковок транспортных и грузовых кораблей с МКС уровень микроускорений составляет $10^{-3}g - 10^{-2}g$. Постоянно действующим источником вибровозмущений на борту РС МКС является функционирование агрегатов системы терморегулирования, компрессоров бортовых кондиционеров, насосов и вентиляторов системы жизнеобеспечения, а также деятельность экипажа, особенно при выполнении физических упражнений [9-14]. Для проведения исследований в области микрогравитации было предложено использовать ТГК «Прогресс» после выполнения им своих основных функций [16]. Перед расстыковкой со станцией на ТГК «Прогресс» может быть размещено оборудование для проведения экспериментов. После выполнения экспериментов при необходимости осуществляется повторная стыковка ТГК со станцией и экспериментальное оборудование возвращается на МКС. Поскольку на ТГК отсутствуют экипаж и бортовые системы жизнеобеспечения, микроперегрузки на нем оказываются значительно ниже, чем на РС МКС. Особенно благоприятными для выполнения КЭ в области микрогравитации оказываются пассивные режимы ориентации ТГК, при этом уровень микроускорений составляет $10^{-6}g$.

В ряде экспериментов требуется создание на борту калиброванных значений микроускорений для изучения их влияния на исследуемые процессы, например, конвекцию. С этой целью на борту станции может быть размещена, например, центрифуга. Для проведения экспериментов с научной аппаратурой «Дакон-П», в которых оценивается влияние микроускорений на процесс конвекции, предложена методика обеспечения калибровочных значений микроускорений с помощью специальных закруток ТГК «Прогресс». Предлагается установить «Дакон-П» на ТГК и использовать режим закрутки ТГК вокруг оси, направленной на Солнце в автономном полете. Это позволит обеспечить необходимый приход электроэнергии и требуемые значения микроускорений для изучения процесса конвекции. До начала эксперимента необходимо уточнить тензор инерции ТГК [17].

Грузовые корабли «Прогресс» позволяют также выполнить много других уникальных исследований и экспериментов, реализация которых основана на решениях некоторых новых задач механики и управления [17–21]. В рамках КЭ «Изгиб», например, было предложено создание научной аппаратуры (НА) «Космический трал», которая должна размещаться в отделяемой на тросе от ТГК «Прогресс» капсуле. С помощью НА «Космический трал» возможно исследовать верхние слои атмосферы и получить данные о её ионном составе, провести мониторинг электромагнитных излучений, выполнить измерения температуры и электронной концентрации плазмы. При отделении спускаемого модуля от ТГК на кабель-тросе исследуются маятниковые, поперечные и продольные колебания кабель-троса, темп снижения орбиты спускаемого модуля. При изучении верхних слоев атмосферы и ионосферы с помощью тросовой системы может быть отработана технология развертывания тросовой системы и передача информации с помощью оптического волокна, обеспечивающего наибольшую защиту передаваемой информации от внешних электромагнитных полей с помощью предложенной технологии. Впервые в мире будет выполнено контактное изучение верхних слоев атмосферы над всей территорией земного шара. Полет капсулы на высоте порядка 100–120 км позволит выполнять наблюдение объектов на Земле с недостижимым ранее разрешением.

Для прогнозирования движения МКС, имеющей большую, сложную конструкцию, предложены и успешно отрабатываются на борту в рамках КЭ «Вектор-Т» новые методы, основанные на использовании дополнительных измерений, в том числе, о движении спутников шарообразной формы, запускаемых с МКС и внутри МКС [22, 23]. Для определения движения станции применяются также фотоснимки, выполняемые на МКС [24].

Заключение

Рассмотрены задачи механики, решаемые в рамках космических экспериментов на РС МКС. Разработаны методы уточнения динамических характеристик станции, определения смещений элементов конструкции МКС в полете, исследована микрогравитационная обстановка на МКС. Предложены новые методы проведения исследований с помощью ТГК «Прогресс» и определения движения МКС. Результаты экспериментов используются при управлении МКС и другими КА, выполнении научных исследований на МКС и в образовательных целях [25, 26].

Литература

1. М.Ю.Беляев. Проблемы управления при проведении экспериментов на Международной космической станции // В сборнике: Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2018) Сборник трудов VI Международной научной конференции, посвященной 85-летию Ю.А. Гагарина. Под редакцией А.А. Львова, М.С. Светлова. 2019. С. 7-16.
2. Ю.Р.Банит, М.Ю.Беляев, Т.А.Добринская, Н.И.Ефимов, В.В.Сазонов, В.М.Стажков. Определение тензора инерции Международной космической станции по телеметрической информации // «Космические исследования» 2005. Т. 43, № 2. С. 135-146.
3. N.N.Sevastianov, V.N.Branets, M.Yu.Belyaev, D.A.Zavalishin, V.N.Platonov, Yu.R.Banit, V.V.Sazonov Analysis of possibilities of the Jamal-200 control using motion mathematical model // 14th Saint Petersburg international conference of integrated navigation systems, 28-30 May 2007, Saint Petersburg, Russia, pp 196-203.
4. М.Ю.Беляев, Д.А.Завалишин // Способ определения массы космической станции в полете // Патент на изобретение №2301181, № заявки 2005108231 от 24.03.2005.
5. М.Ю.Беляев, Д.А.Завалишин, Н.А.Егоров, Ю.В.Спаржин, И.И.Хамиц, М.А.Шутиков, В.В.Сазонов // Определение массы Международной космической станции в полете // «Космонавтика и ракетостроение». Научно-технический журнал, ЦНИИМаш, г.Королев. 2005. №4. С. 224-232.
6. М.Ю.Беляев, Е.В.Бабкин, Д.А.Завалишин, В.М.Стажков, В.В.Сазонов // Использование измерений кажущегося ускорения на МКС // Гироскопия и навигация. 2006. № 3 (54). 104 с.
7. Д.А.Завалишин, М.Ю.Беляев, В.В.Сазонов // Оценка динамических характеристик Международной космической станции по измерениям микроускорений. Космические исследования. 2009. Т.47. № 2 С. 193-203.
8. М.Ю.Беляев, О.Н.Волков, В.В.Монахов // Способ определения деформации корпуса космического аппарата в полёте // Патент на изобретение № 2605232 от 25.11.2016 Заявка на изобретение № 2015122901 от 15.06.2015.
9. М.Ю.Беляев, Н.А.Брюханов, С.Б.Рябуха, В.М.Стажков, А.В.Лукьященко, С.С.Обыденников // Микровозмущения, возникающие в процессе эксплуатации Российского сегмента МКС. Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 1 (46). Научно-технический журнал, ЦНИИМаш. С. 121-129.
10. М.Ю.Беляев, Е.В.Бабкин, С.Б.Рябуха, В.А.Рязанцев // Микроускорения на Международной космической станции при физических упражнениях экипажа. Космические исследования. 2011. Т. 49, № 2. С. 167-181.
11. М.Ю.Беляев, Е.В.Бабкин, Д.А.Завалишин, В.М.Стажков, В.В.Сазонов // Использование измерений кажущегося

- ускорения на МКС. XIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2006. Сборник материалов, Санкт-Петербург, Россия. С. 264-274.
12. М.Ю.Беляев, О.Н.Волков, С.Б.Рябуха // Микровозмущения на международной космической станции. Научно-технический журнал «Космическая техника и технологии». РКК «Энергия», г. Королев. 2013. № 3.
 13. М.Ю.Беляев, О.Н.Волков, Рябуха С.Б. Микровозмущения на Международной космической станции при динамических операциях // Космические исследования. 2013. Т.51.№ 4. С. 303-307.
 14. Д.А.Завалишин, М.Ю.Беляев, В.В.Сазонов // Исследование вибрационных микроускорений на борту Международной космической станции. Космические исследования. 2013. Т 51, № 4. С. 294-302.
 15. М.Ю.Беляев, В.Б.Дубовской, В.И.Леонтьев, А.Б.Манукин, С.С.Обыденников, В.Г.Пшеничник // Современное состояние и перспективы спутниковой акселерометрии и градиентометрии. Альманах современной метрологии. 2015. №3. С. 84-96.
 16. T.V.Matveeva, M.Yu.Belyaev, V.V.Tsvetkov Challenges and Perspectives of Transport Cargo Vehicles Utilization for Performing Research in Free Flight // Acta Astronautica 94 (2014), 139-144.
 17. М.Ю.Беляев, Т.В.Матвеева // Способ определения тензора инерции космического аппарата в полете. Патент на изобретение №2587764 № заявки 2014129427 от 18.07.2014.
 18. М.Ю.Беляев, Д.В.Карасев, Т.В.Матвеева, Д.Н.Рулев // Грузовые корабли «Прогресс» в программах орбитальных станций (к 40-летию первого в мире полета грузового корабля к орбитальной станции). Журнал "Космическая техника и технологии" 2018. № 1. С. 85-101.
 19. М.Ю.Беляев, Т.В.Матвеева // Способ зондирования верхней атмосферы./ Патент на изобретение № 2567998, № заявки 2014112734 от 01.04.2014.
 20. М.Ю.Беляев // Способ зондирования верхней атмосферы // Патент на изобретение RU 2655645 С1, 29.05.2018.
 21. Проблемы и задачи повышения эффективности программ исследований на космических кораблях и орбитальных станциях / Сборник статей под редакцией В.П.Легостаева, М.Ю.Беляева // Научно-техническое издание «Ракетно-космическая техника» 2011. Серия XII. Вып. 1-2. РКК «Энергия» им. С.П.Королева, Королёв. 205 с.
 22. С.Н.Алямовский, М.Ю.Беляев, Д.Н.Рулев, В.В.Сазонов, М.М.Тарасова // Сферические спутники - от начала космической эры до современных экспериментов (к 60-летию запуска первого в мире спутника Земли). Журнал «Космическая техника и технологии». 2027. № 4. С. 5-14.
 23. М.Ю.Беляев, С.И.Кудрявцев, Д.Н.Рулев, А.Н.Крылов, Ю.П.Батырев, С.Н.Алямовский // Исследование возможных траекторий дрейфа калиброванного твердого тела внутри герметичного объема МКС при проведении эксперимента «Вектор-Т» // Космическая техника и технологии. 2022. № 1 (36). С. 21-35.
 24. Микрин Е.А., Беляев М.Ю., Боровихин П.А., Караваев Д.Ю. Определение орбиты по выполняемым космонавтами снимкам поверхности Земли и Луны // Журнал "Космическая техника и технологии", № 4 (23), 2018. С. 57-67.
 25. О.М.Алифанов, М.Ю.Беляев МКС для образования // Первая Международная конференция по космическому образованию «Дорога в космос». ИКИ. 2021. С. 15-20.
 26. М.Ю.Беляев. Проблемы управления при проведении экспериментов на российском сегменте МКС и участие МФ МГТУ им. Н.Э.Баумана в их решении // Журнал «Лесной вестник». 2019. Т. 23, № 4. С. 5-11.

АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ РОЕМ ФЕМТОСПУТНИКОВ С ПОМОЩЬЮ СИЛЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭНЕРГОБАЛАНСА И ОГРАНИЧЕНИЙ НА МЕЖСПУТНИКОВУЮ СВЯЗЬ

Биктимиров Ш.Н., Ахлумадиди М.

Московский физико-технический институт (МФТИ)

biktimirovshamil@gmail.com

Аннотация Исследуется групповой полет роя фемтоспутников с учетом энергобаланса и ограничений на межспутниковую связь. Управление относительным движением осуществляется изменением силы аэродинамического сопротивления, зависящей от взаимной ориентации спутников. Предложен алгоритм управления групповым полетом спутников для устранения относительного дрейфа и поддержания периодических относительных траекторий с избеганием столкновений. Предложенный способ управления обеспечивает положительный энергобаланс спутников, поскольку для создания разности силы аэродинамического сопротивления часть спутников может находиться в солнечной ориентации. Проводится численное моделирование управляемой динамики спутников.

Распределенные системы малых космических аппаратов позволяют производить измерение пространственно-временных характеристик магнитного поля Земли, атмосферы, ионосферы и др. Особый интерес представляют малые спутники, относящиеся к классу фемтоспутники и имеющие массу порядка 10–100 граммов. Как правило фемтоспутники оборудованы стандартным набором датчиков для определения ориентации (датчик угловой скорости, магнитометр, фоторезистор) и положения – датчик GPS, трехосными магнитными катушками, солнечными панелями, бортовым компьютером, модулем связи и полезной нагрузкой для миссии. В связи с малым размером и стоимостью фемтоспутников возможно выводить на орбиту рои из нескольких сотен таких спутников. Тем не менее, для выполнения распределенных измерений необходимо обеспечивать управление относительным движением, чтобы поддерживать связь между спутниками роя.

Работа посвящена исследованию динамики и управления групповым полетом фемтоспутников в задачах развертывания роя после отстыковки от материнского спутника и поддержания периодических относительных траекторий. Рассматривается рой из фемтоспутников формата PCBSat [1], спроектированных на стандартной печатной плате размером 9,0×9,5 см и имеющих массу порядка 100 граммов. Для измерения относительного положения фемтоспутников может использоваться бортовая система связи, как было показано в [2].

Предлагаются алгоритмы управления относительным движением фемтоспутников с помощью изменения силы сопротивления атмосферы. Для линеаризованной динамики системы строятся алгоритмы управления для устранения относительного дрейфа между спутниками формации и поддержания замкнутых периодических относительных траекторий на основе работ [3, 4]. Алгоритмы управления ориентацией спутника, необходимые для изменения силы аэродинамического сопротивления основаны на трехосной магнитной системе ориентации. Целевая ориентация спутников роя выбирается таким образом, чтобы обеспечить положительный энергобаланс каждого спутника роя.

Предварительное численное исследование показало, что предложенные алгоритмы управления с помощью силы аэродинамического сопротивления позволяют поддерживать рой фемтоспутников в соответствии с заданными требованиями миссии. Тем не менее, необходимо учитывать энергопотребление основных бортовых систем спутников, в том числе системы ориентации спутника, а также полезной нагрузки, при планировании управляющих воздействий по всему рою.

Проведено численное исследование управляемой динамики фемтоспутников с учетом основных возмущений, действующих на спутники на рассматриваемых орбитах. Для различных значений баллистического коэффициента, магнитного дипольного момента и дальности межспутниковой линии связи и различных околоземных орбит определяется возможное время поддержания роя.

Литература

1. Bamhart D. J. et al. A low-cost femtosatellite to enable distributed space missions //Acta Astronautica. – 2009. – Т. 64. – №. 11-12. – С. 1123-1143.
2. Timmons T. et al. Range-Based Relative Navigation for a Swarm of Centimeter-Scale Femto-Spacecraft //Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2022. – Т. 45. – №. 9. – С. 1583-1597.
3. Ivanov D. et al. Decentralized Control of Nanosatellite Tetrahedral Formation Flying Using Aerodynamic Forces //Aerospace. – 2021. – Т. 8. – №. 8. – С. 199.
4. Morgan D. et al. Swarm-keeping strategies for spacecraft under J2 and atmospheric drag perturbations //Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2012. – Т. 35. – №. 5. – С. 1492-1506.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Буров А.А., Никонов В.И.

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии
наук

nikon_v@list.ru

Аннотация. В докладе обсуждается вопрос о том, как поле притяжения твёрдого тела, близкого к динамически симметричному, может быть приближено полем притяжения системы из двух однородных шаров таким образом, что компоненты тензора Эйлера-Пуансо окажутся совпадающими вплоть до третьего порядка, а моменты инерции тела окажутся хорошо приближёнными соответствующими моментами инерции такой системы двух шаров. Выполняется сравнение полученных результатов с результатами, получаемыми в результате применения метода K -средних, применённого в условиях, когда справедливы предположения теоремы Вернера – Ширса о приближении потенциала твёрдого тела с нерегулярным, в общем случае, распределением масс. В качестве примеров рассмотрены поля притяжения астероидов (2063) Бахус, (433) Эрос, (216) Клеопатра, а также некоторых других небесных тел.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00297.

Введение

Планы активного исследования и освоения малых небесных тел предполагают предварительное изучение их полей притяжения с целью как определения устойчивых периодических траекторий в окрестности таких тел, так и изучения свойств движения малых объектов по поверхности таких тел. Для этих целей на подготовительной стадии выполнения исследований аналитическими средствами оказывается предпочтительным приближение поля притяжения изучаемых небесных тел полем притяжения конечного числа притягивающих центров. Такой подход, восходящий в идейном плане, вероятно к Раусу [1], получил развитие в работах многочисленных исследователей [2, 3] (см., также [4]). Один из основных путей преодоления основной трудности решения задачи применительно к малым небесным телам с нерегулярным распределением масс, были намечены в [5], где в предположении об однородности тела была предложена явная формула для гравитационного потенциала в предположении о том, что поверхность тела приближена триангуляционной сеткой. Иной подход, опирающийся на идею Х. Штейнгауза [6] и приводящий к использованию метода K -средних, известного из теории распознавания образов, развивался в [7–9]. В настоящей работе на примере ряда небесных тел с распределением масс, близким к динамически симметричному, осуществляется сравнение приближений полей, получающихся с помощью классических методов [2–4], с приближениями, получаемыми в рамках подходов, развитых в [7–9].

Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим динамически симметричное твёрдое тело B с центром масс в точке O , осевой и экваториальными центральными моментами инерции которого равны I_a и I_e соответственно. Пусть $Oxyz$ – связанная с телом система отсчёта, ось Oz которой направлена вдоль оси симметрии. Как известно (см., например, [2]), разложение в ряд потенциала притяжения такого тела для произвольной, внешней по отношению к поверхности тела G точки пространства представимо в виде

$$U = -G \frac{m}{r} \left(1 + \sum_{k \geq 2} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right).$$

Здесь G – гравитационная постоянная, m – масса тела, R – характерный размер тела, например, радиус шара, объём которого равен объёму тела, r – расстояние от центра масс тела до исследуемой точки, φ – «географическая широта» точки, J_k – безразмерные константы, $P_k(x)$ – многочлены Лежандра. Решается задача о приближении поля притяжения такого тела парой однородных шаров B_1 и B_2 с массами m_1 и m_2 , расстояниями между центрами шаров L и радиусами r_1 и r_2 соответственно, сохраняя инвариантными следующие четыре параметра: (а) масса системы, (б) его центр масс, (с) разложение потенциалов до членов третьего порядка и (д) осевой и экваториальными центральными моментами инерции.

Хорошо известны ([2, 3]) формулы для выражения через J_k координат центров шаров, а также сосредоточенных в этих шарах масс. Также известно (см., например, [10]), что коэффициенты J_k могут быть выражены через моменты инерции высших порядков

$$I_{ijk} = \int x^i y^j z^k \rho dx dy dz$$

с помощью соотношений

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{2I_{002} - I_{020} - I_{200}}{I_{000} R^2}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \frac{2I_{003} - 3I_{021} - 3I_{201}}{I_{000} R^3},$$

$$J_4 = \frac{1}{8} \frac{8I_{004} + 3I_{400} + 3I_{040} + 6I_{220} - 24I_{022} - 24I_{202}}{I_{000} R^4}$$

Результаты выполненных с помощью этих формул вычислений собраны в таблице 1. В той же таблице представлены результаты аналогичных вычислений, выполненных с помощью метода К-средних. В этом случае для аналогичных параметров введены такие обозначения: L' – расстояния между центрами шаров, r_1' и r_2' – радиусы шаров соответственно.

	(2063) Vachus	(433) Eros	(216) Kleopatra
m (кг)	$2.70938 \cdot 10^{11}$	$6.69 \cdot 10^{15}$	$2.55192516 \cdot 10^{18}$
I_a / m (м ²)	$2.3753 \cdot 10^4$	$1.499 \cdot 10^7$	$6.5721 \cdot 10^8$
I_e / m (м ²)	$7.6532 \cdot 10^4$	$7.328 \cdot 10^7$	$4.5023 \cdot 10^9$
$J_2 R^2$ (м ²)	$5.2779 \cdot 10^4$	$5.829 \cdot 10^7$	$3.8451 \cdot 10^9$
$J_3 R^3$ (м ³)	$3.0111 \cdot 10^3$	$-4.935 \cdot 10^7$	$-6.7885 \cdot 10^9$
$J_4 R^4$ (м ⁴)	$4.9262 \cdot 10^3$	$5.7532 \cdot 10^9$	$1.7346 \cdot 10^{13}$
m_1 (кг)	$1.2699 \cdot 10^{11}$	$3.4377 \cdot 10^{15}$	$1.2850 \cdot 10^{16}$
m_2 (кг)	$1.4398 \cdot 10^{11}$	$3.2523 \cdot 10^{15}$	$1.2669 \cdot 10^{18}$
r_1 (м)	246	6806	44618
r_2 (м)	261	6838	44596
r_1' (м) [7]	244	6676	43549
r_2' (м) [7]	261	6674	44249
L (м)	461	15275	124021
L' (м) [7]	438	13936	117800

Таблица 1. Параметры пар шаров, приближающих астероиды

Некоторые выводы

Выполненные вычисления показали хорошее соответствие между результатами, полученными в результате использования методов, вообще говоря сильно отличающихся друг от друга. Представляет интерес выполнение аналогичных вычислений и сравнение их результатов для приближений тела с помощью трёх и четырёх шаров. Кроме того, обсуждаемый подход весьма полезен с точки зрения аналитического исследования динамики в окрестности малых небесных тел. Так в случае, когда такое тело равномерно вращается около оси, близкой к динамически симметричной, могут быть аналитически исследованы не только точки либрации, как это делалось в [11, 12], но и, например, траектории суточного спутника.

Литература

1. Э. Дж. Раус // Динамика системы твёрдых тел. Т.1. 1983. 464 с.
2. В. Г. Дёмин // Движение искусственного спутника в нецентральной гравитации. 1967. 352 с.
3. В. В. Белецкий // Очерки о движении космических тел. 1972. 360 с.
4. В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников // Введение в теорию ньютоновского потенциала. 1988. 272 с.
5. R. A. Werner, D. J. Scheeres // Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia, *Celestial Mech. Dyn. Astr.* 65 1996. 313–344.
6. H. Steinhaus // Sur la division des corps matériels en parties, *Bull. Acad. Pol. Sci.* 4:12 1956. 801–804.
7. A. A. Burov, A. D. Guerman, E. A. Raspopova, V. I. Nikonov // On the use of the K-means algorithm for determination of mass distributions in dumbbell-like celestial bodies, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 14:1 2018. 45 – 52.
8. A. A. Burov, A. D. Guerman, V. I. Nikonov // Using the K-means method for aggregating the masses of elongated celestial bodies, *Cosmic Research*, 57:4 2019. 266–271.
9. A. A. Burov, A. D. Guerman, E. A. Nikonova, V. I. Nikonov // Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points, *Acta Astronautica*, 157 2019. 225–232.
10. А. А. Буров, В. И. Никонов // О приближении двумя шарами твёрдого тела, близкого к динамически симметричному, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 62:12 2022. 2105–2111.
11. В. В. Белецкий // Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов, *Космические исследования*, 45:6 2007. 435–442.
12. В. В. Белецкий, А. В. Родников // Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трёх тел, *Космические исследования*, 46:1 2008. 42–50.

О СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ СПАРОК ГИРОДИНОВ

Гладун А.В.

Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева
aleksygladun@gmail.com

Аннотация. Исследуется задача частичной стабилизации динамической системы, описывающей движение спутника, несущего две спарки гироскопов. Получены управления, которым соответствуют стационарные решения системы, являющиеся положениями относительного равновесия и равномерными вращениями спутника. Выделены случаи управляемости системы по части переменных по линейному приближению в окрестности найденных стационарных движений. Построены управления, осуществляющие стабилизацию равномерного вращения спутника.

Введение

В процессе развития пилотируемой космонавтики выяснилось, что длительное пребывание человека в невесомости приводит к значительным изменениям в сердечно-лёгочной и костной системах. Для устранения проблемы отрицательного влияния невесомости на живые организмы может быть создана искусственная гравитация путем обеспечения равномерного вращения космической станции. Для решения такой задачи целесообразно использование гироскопических систем.

Уравнения движения

Рассматривается задача активной стабилизации спутника, осуществляемой при помощи спарок гироскопов. Гироскоп – двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Объединенные в спарку гироскопы идентичны, оси вращения гирокамер параллельны. Роторы спарки вращаются с постоянными, одинаковыми по величине и противоположными по направлению (в начальный момент времени) скоростями.

Используются уравнения движения твердого тела (носителя) с s спарками гироскопов, полученные в работе [1]. Запишем их в предположении, что у каждого гироскопа ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения

$$\theta \dot{\omega} + \omega \times \theta \omega + 2(K_0 H \cos q \dot{q} + \omega \times K_0 \sin q h) = 0, \quad (1)$$

$$2J \ddot{q} - 2(K_0 H \cos q)^* \omega = M_j^{C_j} + M_{s+j}^{C_{s+j}}. \quad (2)$$

Здесь θ – матрица тензора инерции системы твердое тело – спарки гироскопов; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор угловой скорости твердого тела (носителя); $q = (q_1, \dots, q_s)^*$ – вектор углов поворота гирокамер спарок относительно носителя; $\sin q = \text{diag}(\sin q_1, \dots, \sin q_s)$; $\cos q = \text{diag}(\cos q_1, \dots, \cos q_s)$; $h = (h_1, \dots, h_s)^*$; h_i – некоторые постоянные; $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_s)$; $K_0 = (k_{01}, \dots, k_{0s})$; k_{0i}, l_{0i}, n_{0i} – орты, задающие положение i -й спарки гироскопов в теле носителе; $M_j^{C_j}$, $M_{s+j}^{C_{s+j}}$ – главные моменты управляющих сил относительно центра инерции j -го и $s+j$ -го гироскопов, входящих в j -ю спарку, соответственно; * – символ транспонирования.

В качестве вектора управления выберем вектор угловых скоростей поворота гирокамер относительно твердого тела

$$u = \dot{q}, \quad (3)$$

тогда главный момент управляющих сил из (2) определяется равенством

$$M_j^{C_j} + M_{s+j}^{C_{s+j}} = 2J \dot{u} - 2(K_0 H \cos q)^* \omega$$

и мы можем ограничиться в рассматриваемом случае только уравнением (1), описывающим движение носителя, для которого с учетом (3) получаем

$$\theta \dot{\omega} + \omega \times \theta \omega + 2\omega \times (K_0 \sin q h) + 2K_0 H \cos q u = 0. \quad (4)$$

Запишем уравнение (4) в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\theta \omega = (A_1 \omega_1, A_2 \omega_2, A_3 \omega_3)^*, \quad \text{где } A_1, A_2, A_3 \text{ – обобщенные моменты инерции.}$$

Система уравнений (4), (3), описывающая движение твердого тела (носителя), несущего s парок гироидов, принимает вид

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + 2 \sum_{j=1}^s [h_j \sin q_j (\omega_3 k_{0j}^2 - \omega_2 k_{0j}^3) - h_j u_j \cos q_j k_{0j}^1], \quad (123)$$

$$\dot{q}_j = u_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Расположим на носителе две спарки гироидов так, чтобы оси вращения гирокамер первой спарки были параллельны оси Оу, а оси вращения гирокамер второй – оси Oz. В качестве ортов примем следующие:

$$\mathbf{k}_{01} = (1, 0, 0)^*; \quad \mathbf{l}_{01} = (0, 1, 0)^*; \quad \mathbf{n}_{01} = (0, 0, 1)^*; \quad \mathbf{k}_{02} = (0, 1, 0)^*; \quad \mathbf{l}_{02} = (0, 0, 1)^*; \quad \mathbf{n}_{02} = (1, 0, 0)^*.$$

Тогда получаем уравнения движения в форме

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= [(A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + 2h_2 \omega_3 \sin q_2 - 2h_1 u_1 \cos q_1] / A_1, \\ \dot{\omega}_2 &= [(A_3 - A_1) \omega_1 \omega_3 - 2h_1 \omega_3 \sin q_1 - 2h_2 u_2 \cos q_2] / A_2, \\ \dot{\omega}_3 &= [(A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + 2h_1 \omega_2 \sin q_1 - 2h_2 \omega_1 \sin q_2] / A_3, \\ \dot{q}_1 &= u_1, \quad \dot{q}_2 = u_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Стабилизация равномерного вращения

Равномерным вращением будем называть вращение спутника с постоянной угловой скоростью вокруг какой-либо из осей, т.е. $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3^0$, $q_1^0, q_2^0 \equiv const$.

Для случая $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ можно указать следующие равномерные вращения

$$\begin{aligned} (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2) &= \left(\frac{2h_1 \omega_2^0 \sin q_1^0}{(A_2 - A_1) \omega_2^0 + 2h_2 \sin q_2^0}, \omega_2^0, 0, q_1^0, q_2^0 \right), \quad \omega_2^0, q_1^0, q_2^0 \equiv const, \\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2) &= \left(\omega_1^0, \frac{2h_2 \omega_1^0 \sin q_2^0}{(A_1 - A_2) \omega_1^0 + 2h_1 \sin q_1^0}, 0, q_1^0, q_2^0 \right), \quad \omega_1^0, q_1^0, q_2^0 \equiv const, \\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2) &= \left(\frac{2h_1 \sin q_1^0}{A_3 - A_1}, \frac{2h_2 \sin q_2^0}{A_3 - A_2}, \omega_3^0, q_1^0, q_2^0 \right), \quad \omega_3^0, q_1^0, q_2^0 \equiv const \end{aligned}$$

и положение равновесия

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2) = (0, 0, 0, q_1^0, q_2^0), \quad q_1^0, q_2^0 \equiv const.$$

Построим стабилизирующее управление для равномерного вращения

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2) = (\omega_1^0, 0, 0, q_1^0, \pi k), \quad k \in Z, \quad \omega_1^0, q_1^0 \equiv const \quad (6)$$

вокруг координатной оси Ох с заданной угловой скоростью $\omega_1^0 = 10$.

Используя теорему 3.3 [2], получаем, что динамическая система (5) управляема по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_2$ в окрестности равномерного вращения (6) при условии, что

$$q_1^0 \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z, \quad \sin q_1^0 \neq -\frac{A_1 \omega_1^0}{2h_1}, \quad \sin q_1^0 \neq \frac{(A_3 - A_1) \omega_1^0}{2h_1}. \quad (7)$$

Сделаем замену $x_1 = \omega_1 - \omega_1^0$, $x_2 = \omega_2$, $x_3 = \omega_3$, $x_4 = q_1 - q_1^0$, $x_5 = q_2 - \pi k$ и линеаризуем систему в точке $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0)$. Первые три и последнее пятое уравнения системы линейного приближения не содержат переменную x_4 , а значит уравнение для \dot{x}_4 может быть отброшено. Полученная таким образом система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A_1 \dot{x}_1 &= -2h_1 u_1 \cos q_1^0, \\ A_2 \dot{x}_2 &= (A_3 - A_1) \omega_1^0 x_3 - 2h_1 x_3 \sin q_1^0 - 2h_2 u_2, \\ A_3 \dot{x}_3 &= (A_1 - A_2) \omega_1^0 x_2 + 2h_1 x_2 \sin q_1^0 - 2h_2 \omega_1^0 x_5, \\ \dot{x}_5 &= u_2 \end{aligned} \quad (8)$$

описывает поведение переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_2$ в окрестности стационарного движения (6). Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$ есть система (8), записанная в матричном виде. Выберем следующие значения параметров

$$A_1 = 230, \quad A_2 = 310, \quad A_3 = 210, \quad J_1 = 2, \quad J_2 = 2, \quad w = 200, \quad h_1 = J_1 w, \quad h_2 = J_2 w, \quad q_1^0 = \pi/3. \quad (9)$$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{T} = \left\{ \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{A} \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}^{(2)} \right\}, \quad \text{где } \mathbf{B} = \left\{ \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)} \right\}, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \left(-\frac{2h_1 \cos q_1^0}{A_1}, 0, 0, 0 \right)^*, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \left(0, \frac{2h_2}{A_2}, 0, 1 \right)^*.$$

Поскольку определитель матрицы \mathbf{T} не равен нулю при выполнении условий (7), то матрица \mathbf{T} невырожденная и система (8) управляема по всем переменным.

Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, тогда система (8) примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{q}_1 u_1 + \mathbf{q}_2 u_2, \quad \text{где } \mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(1)}, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(2)}. \quad (10)$$

Имеем

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.4699 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение содержит только управление u_1 , остальные уравнения не зависят от переменной y_1 , тогда выбирая u_1 соответствующим образом, можем обеспечить стабилизацию переменной y_1 фазового вектора системы (10). Для стабилизации оставшихся переменных фазового вектора достаточно решить задачу стабилизации для системы

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1.4699 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_2. \quad (11)$$

В итоге исходная система (8) распадается после замены переменных на две системы, причем в первой системе содержится управление u_1 , а во второй управление u_2 .

Возьмем в качестве первого управления $u_1 = -y_1$, тогда $y_1 = y_1^{(0)} e^{-t}$, где $y_1^{(0)} = y_1(t_0)$ и характеристическое значение $\lambda_1 = -1$. Так как $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}$, то, вычисляя из обратной замены переменную y_1 , получаем

$$u_1 = -0.575(\omega_1 - 10). \quad (12)$$

Стабилизирующее управление u_2 для системы (11) будем строить по формуле $u_2 = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$ [3],

$$\mathbf{c} = (\mathbf{T}^{-1})^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{v}) \quad (13)$$

где \mathbf{p} – последний столбец матрицы в системе (11), а \mathbf{v} – вектор коэффициентов соответствующего системе характеристического уравнения

$$\lambda^3 + v_1 \lambda^2 + v_2 \lambda + v_3 = 0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения через $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\lambda_3 = \alpha_2$.

Находим компоненты вектора \mathbf{c} коэффициентов управления $u_2 = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$, вычисляя их явно с помощью математического пакета для ЭВМ по формуле (13), с условием минимизации нормы стабилизирующего управления

$$\min_{\alpha_i \leq -1} \|u_2\| = \min_{\alpha_i \leq -1} (c_1^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \dots + c_6^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))^{1/2}$$

по мнимым β_1 , и по действительным α_1, α_2 частям корней характеристического уравнения системы. Минимум $\|u_2\|$ ищем в замкнутой области D : $\alpha_1 \leq -1$, $\alpha_2 \leq -1$, $-500 \leq \beta_1 \leq 500$ методом сопряженных градиентов, начиная спуск с точки $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 10$.

Получаем $\min_D \|u_2\| = \sqrt{9.82555}$ при $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 0.2994 \cdot 10^{-17}$.

Подставляя найденные $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ в формулу управления, имеем

$$u_2 = -0.0511 \omega_2 + 0.1215376 \omega_3 - 3.1318 q_2.$$

На рис. 1 приведены результаты численного моделирования применения построенных управлений u_1, u_2 для стабилизации системы (5) при значениях параметров (9) с начальным условием

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2) = (10.2, 0.25, -0.3, \pi/3, 0.1)^*.$$

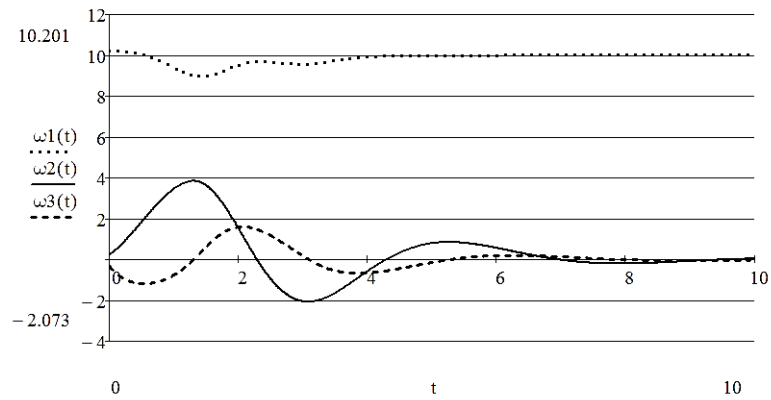


Рис. 1. Стабилизация равномерного вращения (6).

Литература

1. Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985. – 313 с.
2. Гладун А.В. Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению// Труды Института прикладной математики и механики. – 1998. Том 2. – с21 – 31.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТАХ ПЛАНЕТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЛЬКО ВОСПОЛНЯЕМЫХ РЕСУРСОВ

Голиков А.А.¹, Сагалаков А.Э.¹, Филатьев А.С.^{1,2}

1 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

2 - Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

filatyev@yandex.ru

Аннотация. Получены необходимые условия существования космических аппаратов (КА) на ультранизких орбитах (УНО) с использованием заборных атмосферных газов в качестве рабочего тела для воздушных электрореактивных двигателей (ВЭРД) и солнечных батарей (СБ) в качестве первичного источника энергии. Обобщенные условия включают параметры атмосферы, ВЭРД, СБ и компоновки КА. С учетом вариаций плотности и состава атмосферы определены УНО Земли и Марса, на которых возможно длительное существование КА с использованием только восполняемых ресурсов. Получены оптимальные УНО с минимальными требованиями к мощности электропитания КА.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, Проект № 20-69-46034.

Введение

Размещение космических аппаратов (КА) на ультранизких (для Земли 120-250 км) орбитах (УНО) открывает качественно новые перспективы для мониторинга поверхности планет, связи и научных исследований ионосферы. Удержание КА на таких орбитах требует использования двигательной установки (ДУ) для компенсации аэродинамического сопротивления. Существенными преимуществами для этих целей обладают электроракетные двигатели (ЭРД), имеющие на порядок больший удельный импульс по сравнению с жидкостными ракетными двигателями и позволяющие значительно сократить запас топлива. Кардинального же снижения требуемого запаса можно достичь, если использовать в качестве рабочего тела газы окружающей КА атмосферы.

Теоретическое обоснование методов сбора атмосферных газов и их применения для создания реактивной тяги на орбите проводилось еще в 50-60-х годах прошлого века. Первые испытания в космическом полете плазменно-ионных двигателей постоянного тока (ПИД) на атмосферных газах были проведены в 1966-71 гг. на ионосферных лабораториях «Янтарь» [1]. С середины 2000-х годов с учетом достигнутого нового технологического уровня начал возрождаться интерес к теме использования воздушных электрореактивных двигателей (ВЭРД) в КА на орбитах Земли и Марса. В последнее десятилетие в Японии, Евросоюзе, России, Китае проводятся широкие теоретические и экспериментальные исследования, связанные с созданием ВЭРД [2]. Для практической реализации КА на УНО необходимо комплексное решение взаимосвязанных проблем электрофизики ДУ и системы электроснабжения, аэродинамики внутреннего и внешнего обтекания КА с ВЭРД и динамики полета КА в ионосфере. Целью настоящей работы является определение обобщенных необходимых условий существования КА на УНО Земли и Марса, связывающих параметры атмосферы, ВЭРД, солнечных батарей (СБ) и компоновки КА. В работе представлено обобщение результатов [3] с учетом вариаций характеристик атмосферы планет.

1. Общая схема и характеристики ВЭРД

Можно выделить 6 основных элементов ВЭРД (рис. 1). Свободномолекулярный поток с концентрацией молекул $n_\infty \approx 10^{15}-10^{17} \text{ м}^{-3}$ поступает с орбитальной скоростью КА через пассивный сотовый воздухозаборник (ВЗ) в термализатор, где происходит диффузное рассеивание молекул. При использовании в ВЗ системы узких каналов-сот, реализующих принцип «молекулярной ловушки» [4, 5], увеличение концентрации молекул газа в термализаторе n по сравнению с n_∞ , $k_{\text{com}} = n/n_\infty$, может достигать ≈ 500 [4, 5]. В таком состоянии газ попадает в ионизационную камеру (ИК). Созданная плазма разгоняется в электромагнитном поле и эжектируется в окружающее пространство, создавая реактивную тягу, и, наконец, плазменная струя нейтрализуется за счет притока свободных электронов. Фазы ионизации, ускорения и нейтрализации являются энергозатратными.

Для устойчивого плазмообразования концентрация n должна превышать допустимый уровень n_{adm} [6]:

$$\varphi_n = \frac{n}{n_{\text{adm}}} = k_{\text{com}} \cdot \frac{n_\infty}{n_{\text{adm}}} \geq 1. \quad (1)$$

В силу открытости ВЗ, часть газа вытекает из термализатора навстречу набегающему потоку и не может быть использована для создания тяги. Отношение эжектируемой массы газа к массе газа, поступающего в ВЗ, назовем эффективностью забора газа η_c .

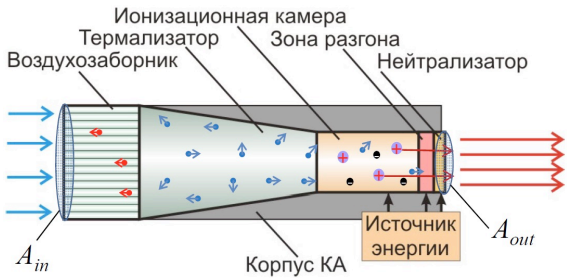


Рис. 1. Общая схема ВЭРД.

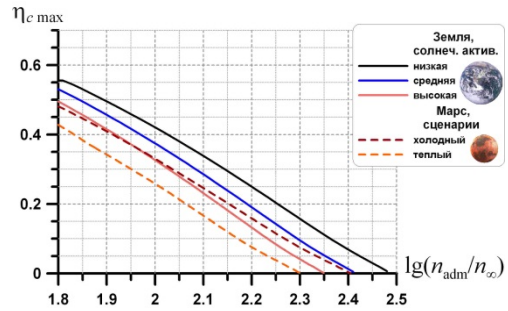


Рис. 2. Зависимости максимальной эффективности заборга газа от логарифма отношения допустимой концентрации в ИК к концентрации газов забортной атмосферы.

Оценку η_c и k_{com} при различных атмосферных условиях можно провести из условия баланса входящих и исходящих потоков молекул [4, 5] в зависимости от относительного удлинения \bar{l} каналов сотовой конструкции ВЗ и отношения площади выходного сечения ВЭРД A_{out} к площади входного сечения ВЗ A_{in} . При заданных n_{adm} и n_{∞} можно определить A_{out}/A_{in} и \bar{l} , обеспечивающие максимум η_c (далее $\eta_{c\ max}$) при выполнении условия (1). Как показывают результаты параметрического анализа [7] с использованием моделей атмосферы ISO/FDIS 14222 для Земли и MCD v5.3 для Марса, зависимости $\eta_{c\ max}$ от $\lg(n_{adm}/n_{\infty})$ близки к линейным (рис. 2). При этом производные $\partial\eta_{c\ max}/\partial(\lg(n_{adm}/n_{\infty}))$, т.е. наклон кривых на рис. 2, при заметных изменениях скорости потока, температуры и состава атмосферы Земли и Марса при различных уровнях солнечной активности отличаются в пределах 10%.

Процессы, протекающие в ИК, зоне разгона и нейтрализаторе описываются обобщенными характеристиками, типичными для обычных ЭРД, и электрическая мощность W_T , потребляемая ВЭРД, может быть определена с учетом массового потока газа через зону разгона μ_{out} [6] по формуле:

$$W_T = \mu_{out} \frac{c^2}{2\eta_T} = A_{in} \frac{\eta_c}{2\eta_T} \rho V c^2, \quad (2)$$

где ρ – плотность забортной атмосферы, V – орбитальная скорость КА, c – скорость эжектируемой струи, η_T – полный к.п.д. двигателя.

2. Обобщение необходимых условий существования КА с ВЭРД на УНО

Для определенности будем рассматривать круговые УНО. Из закона сохранения импульса (точнее превышения импульса эжектируемой струи над изменением КА импульса набегающего потока): $A_{in} \rho V \eta_c \cdot c \geq 0.5 c_{xa} A_{ref} \rho V^2$, где c_{xa} – коэффициент аэродинамического сопротивления КА, A_{ref} – характерная площадь поперечного сечения КА (включая СБ). Откуда следует необходимое условие:

$$\Phi_m = \frac{c}{V} \cdot \frac{2k_A}{c_{xa}} \eta_{c\ max} \geq 1, \quad (3)$$

где $k_A = A_{in}/A_{ref}$. Используя известные зависимости n_{∞} от высоты h , можно получить $\eta_{c\ max}(h)$ с учетом необходимого условия инициации плазмы (1). При заданной скорости истечения условие (3) с учетом зависимости $\eta_{c\ max}(h)$ ограничивает сверху высоту орбиты КА. На рис. 3 представлены зависимости предельной высоты орбиты h_{lim} по критерию (3) от скорости истечения, при $k_A = 1$, $c_{xa} = 2.2$ и различных значениях n_{adm} , для Земли при характеристиках атмосферы при средней солнечной активности и для Марса при холодном сценарии атмосферы.

Третье необходимое условие существования КА с ВЭРД на замкнутых УНО связано с требованиями к располагаемой электрической мощности КА W , которая не должна быть меньше W_T .

При выполнении условия (3) с учетом (2):

$$\Phi_W = \frac{W}{A_{ref} \rho V^3} \cdot \frac{8k_A \eta_{c\ max} \eta_T}{c_{xa}^2} \geq 1. \quad (4)$$

В условии (4) наиболее сильно от h зависят ρ и $\eta_{c\ max}$, причем ρ возрастает с уменьшением h по закону, близкому к экспоненциальному, а $\eta_{c\ max} \rightarrow 0$ при увеличении h . При заданной W условие (4) определяет допустимый диапазон высот орбит КА с ВЭРД, на рис. 4 приведены диапазоны для серии значений η_T при $n_{adm} = 1 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$, $A_{ref} = 1.0 \text{ м}^2$, $k_A = 1$, $c_{xa} = 2.2$. Существует минимальная требуемая мощность W_{min} , которая соответствует минимуму $\rho/\eta_{c\ max}$. С учетом $\rho = m_{\infty} n_{adm}/(n_{adm}/n_{\infty})$, где m_{∞} – средняя масса молекул газов атмосферы, и зависимости $\eta_{c\ max}$ от $\lg(n_{adm}/n_{\infty})$ получаем, что W_{min} достигается при $\eta_{c\ max}^* \approx 0.34$

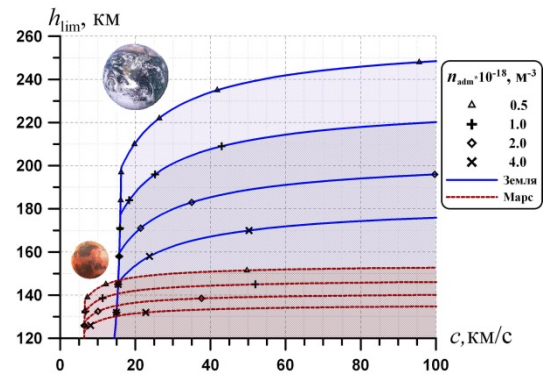


Рис. 3. Зависимость предельной высоты круговой орбиты КА от скорости истечения.

0.36, а $(n_{adm}/n_{\infty})^*$, соответствующее $\eta_c^*_{max}$, изменяется от ≈ 80 до ≈ 120 (см. рис. 2) в зависимости от характеристик атмосферы планеты. Оценку минимальной удельной мощности (на единицу площади поперечного сечения КА) \bar{W}_{min} , которая требуется для удержания КА на УНО, можно получить по формуле:

$$\bar{W}_{min} = \frac{W_{min}}{A_{ref}} = \frac{c_{xa}^2}{8k_A \eta_T} \frac{m_{\infty} n_{adm} V^3}{(n_{adm}/n_{\infty})^* \eta_c^*_{max}}. \quad (5)$$

В соответствии с (5) меньшая орбитальная скорость на околомарсианских орбитах приводит к значительно меньшей \bar{W}_{min} , чем на околоземных орбитах. При использовании СБ в качестве первичного источника энергии увеличение электрической мощности связано с увеличением площади СБ, что приводит к росту сопротивления, что, в свою очередь, увеличивает требования к мощности и т.д. Тем не менее, в определенном диапазоне значений параметров задачи компромисс существует, его наличие определяется характеристиками и условиями эксплуатации СБ: удельной мощностью солнечного излучения на единицу площади СБ, общим к.п.д. преобразования лучистой энергии в электрическую и характеристиками взаимодействия свободномолекулярного потока с СБ, на которые влияют как свойства поверхности СБ, так и температура и молекулярный состав атмосферы.

Методика, представленная в [2, 7], позволяет выполнить оценку допустимого диапазона высот орбит КА с ВЭРД с учетом зависимости между аэродинамическим сопротивлением и мощностью СБ. На рис. 5 показаны полученные для различных n_{adm} при $\eta_T = 0.6$ допустимые для КА с ВЭРД диапазоны высот околоземных УНО при средней солнечной активности.

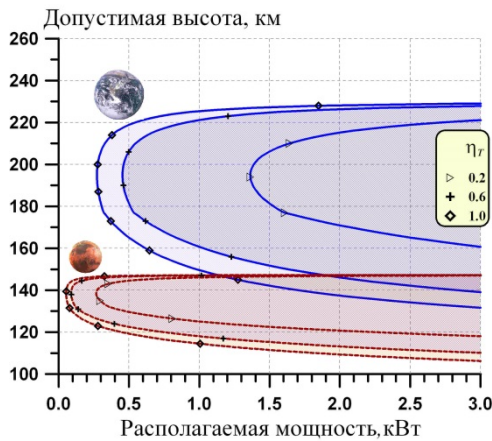


Рис. 4. Зависимости допустимых высот околоземных и околомарсианских орбит от располагаемой мощности для различных полных к.п.д. ВЭРД при $n_{adm} = 1 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

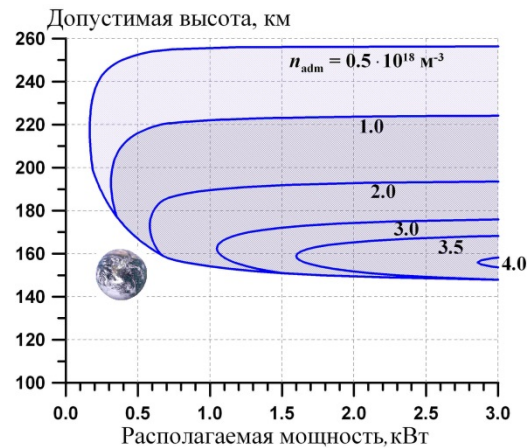


Рис. 5. Зависимости допустимых высот околоземных орбит от располагаемой мощности для различных n_{adm} при $\eta_T = 0.6$.

Заключение

Полученные обобщенные условия длительного существования КА с ВЭРД на ультранизких орбитах планет позволяют определить требования к характеристикам систем КА, ВЭРД, СБ и наилучшую высоту орбиты КА. Минимальная требуемая мощность электропитания КА пропорциональна минимальной допустимой концентрации газа для зажигания и стабильного разряда плазмы в ВЭРД и кубу орбитальной скорости КА. Последнее свойство объясняет существенно более низкие требования энергообеспечения КА с ВЭРД для околомарсианских орбит.

Литература

1. Маров М.Я., Филатьев А.С. Комплексные исследования электрореактивных двигателей при полетах в ионосфере Земли: К 50-летию Государственной программы "Янтарь" // Космические исследования. 2018. Т. 56. № 2. С. 137–144.
2. Filatyev A.S., Golikov A.A., Erofeev A.I., Khartov S.A., Lovtsov A.S., Padalitsa D.I., Skvortsov V.V., Yanova O.V. Research and development of aerospace vehicles with air breathing electric propulsion: Yesterday, today, and tomorrow // Progress in Aerospace Sciences. 2023. Т. 136. 100877.
3. Филатьев А.С., Голиков А.А. Необходимые условия существования космических аппаратов на замкнутых ультранизких орбитах // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2023. Т. 158. № 1. С. 69–75.
4. Barral S., Cifali G., Albertoni R., Andrenucci M., Walpot L. Conceptual Design of an Air-Breathing Electric Propulsion System // 34th International Electric Propulsion Conference, Hyogo-Kobe, Japan, July 4–10, 2015, IEPC-2015-271.
5. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P., Golikov A.A., Yanova O.V. Comparative evaluation of the applicability of electrical ramjets // The 58th Israel Annual Conference on Aerospace Science, WeLIT4.3, Tel-Aviv & Haifa, Israel, 14-15 March 2018, P. 503–519.
6. Goebel D.M., Katz I. // Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters, John Wiley & Sons, 2008.
7. Golikov A.A., Loktionov E.Yu., Sagalakov A.E., Filatyev A.S. Conditions for the long-term existence of spacecraft with air-breathing electric propulsion in ultra-low orbits about planets // 73rd International Astronautical Congress (IAC), Paris, France, 18-22 September 2022, IAC-C4,IP,x73281.

ДИНАМИКА ВОЗВРАЩАЕМЫХ СТУПЕНЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Гончаров Д.А., Пожалостин А.А.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
goncharov@bmstu.ru

Аннотация. В докладе приводится анализ специфических факторов, характерных для задач динамики возвращаемых ступеней ракет-носителей, обосновывается проблема контроля положения компонент жидкого топлива для возвращаемых ступеней ракет-носителей. Приводятся так же модели ударной и безударной посадки космического летательного аппарата на твердую поверхность

Различные задачи динамики возвращаемых ступеней ракет-носителей космических аппаратов возникают в связи с развитием и расширением применения многоразовых ракет [1, 2]. Широко освещаются задачи траекторного анализа [3] и оптимизации [4, 5], а также исследования поведения компонент жидкого топлива на пассивном участке как численного [6], так и экспериментального характера [7].

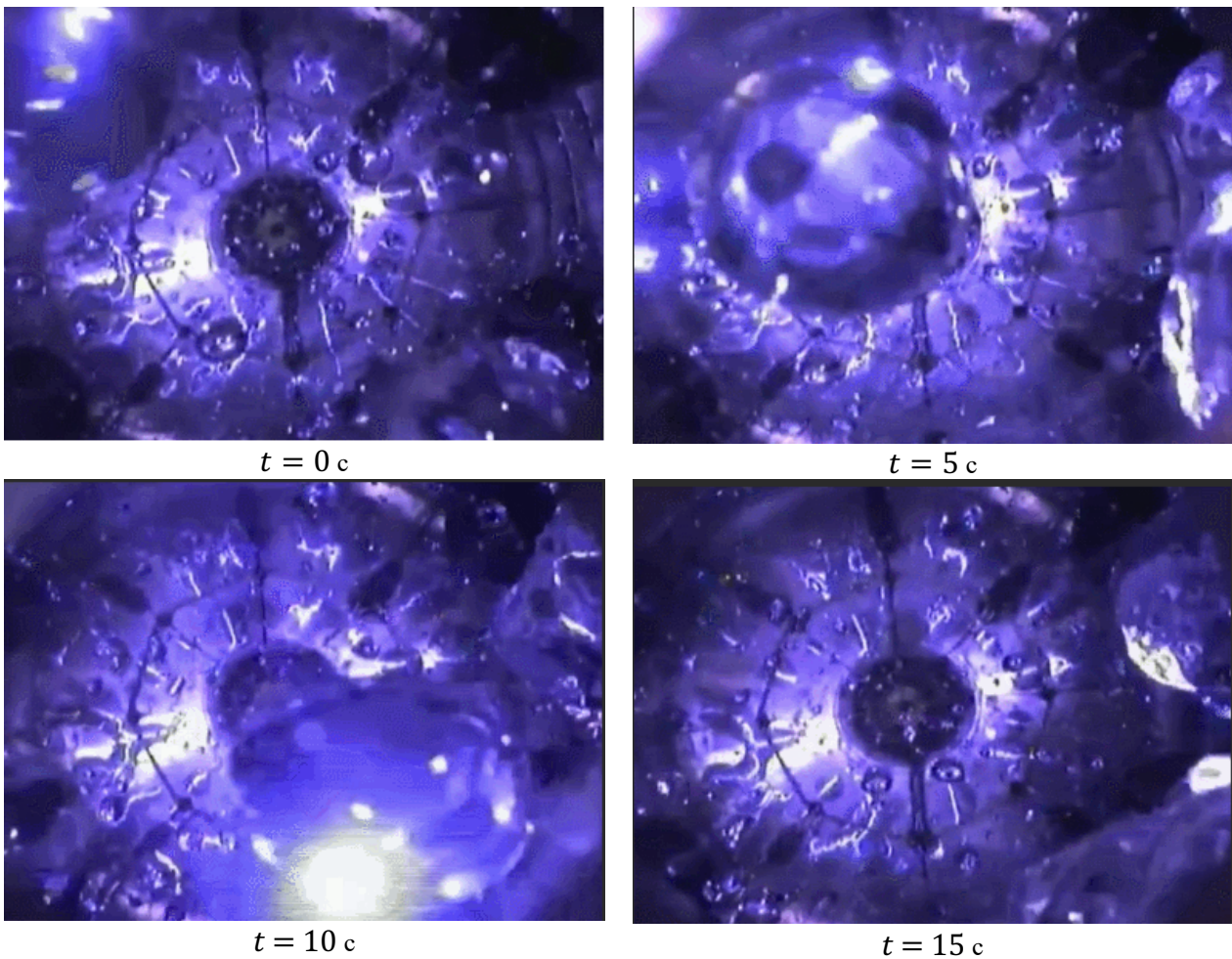


Рис. 1. Видео съемка внутренней камеры бака горючего РН «Фалькон 9» после выключения маршевой двигательной установки и отделения возвращаемой ступени

Были достигнуты значительные результаты как по повторному использованию уже отработанных первых ступеней ракет-носителей, так и по разработке многоразовых транспортных космических систем (МТКС) полного цикла, когда многократно может использоваться как первая, так и вторая ступень. Работы, направленные на практическую реализацию МТКС нового типа, актуализируют спектр различных исследовательских задач по динамике ракет-носителей, в частности: обеспечение многократного запуска маршевой двигательной установки посадочной ступени [8], в том числе и из состояния микрогравитации, динамика и управляемость посадочной ступени в условиях невесомости поперечная устойчивость при посадке космического летательного аппарата (КЛА), устойчивость КЛА при ударных нагрузках.

Важной задачей в динамике многоразовых транспортных космических систем с возвращаемыми ступенями является динамика взаимодействия компонент жидкого топлива с элементами конструкции

летательного аппарата на пассивном участке траектории. Перемещение значительных масс жидкого топлива в условиях свободного падения (рис. 1) может приводить к траекторным возмущениям, что является критичным для прецизионной посадки возвращаемой ступени в заданной точке.

Существующие методы контроля положения масс компонент жидкого топлива КЛА в основном предполагают, что жидкость, спустя некоторое время, поддающееся эмпирической оценке, занимает так называемое равновесное положение. В частности, согласно [9] характерное время, необходимое жидкости для принятия равновесной формы в условиях скомпенсированной гравитации составляет

$$t = \frac{0,15D^{3/2}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}},$$

где D – диаметр цилиндрического сосуда, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости. Так, например, для керосина, заполняющего цилиндрический бак диаметром 4 м этот временной промежуток может составлять 214 с. Важно отметить, что указанный результат хорошо согласуется с данными численного расчета и натурных испытаний, проведенных на борту МКС и отраженных в [7]. Вместе с тем, указанный временной промежуток соизмерим с длительностью работы первой ступени на этапе выведения и, таким образом, жидкость может занимать произвольное, неравновесное положение, что требует специальных мер как для обеспечения запуска двигательной установки, так и для определения характеристик аппарата (распределение масс, моментов инерции, динамическое воздействие со стороны компонент жидкого топлива)

Литература

1. Blackmore L. Autonomous precision landing of space rockets // NAE Winter Bridge Front. Eng. 2016. Vol. 46, no. 4. P. 15 — 20.
2. Афанасьев В. А., Дегтярев Г. Л., Мещанов А. С. Многоцветная транспортная космическая система // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 9 — 13.
3. Trajectory Planning for Landing Phase of Reusable Rocket with High Thrust-to-Weight Ratio / C. Wang, Z. Song, G. Shi et al. // Advances in Guidance, Navigation and Control / Ed. by L. Yan, H. Duan, X. Yu. Singapore: Springer Singapore, 2022. P. 5311 — 5323
4. Yang R., Liu X. Gravity-Turn-Based Precise Landing Guidance for Reusable Rockets // Advances in Guidance, Navigation and Control . Lecture Notes in Electrical Engineering / Ed. by L. Yan, H. Duan, X. Yu. Vol. 644. Singapore: Springer, Singapore, 2022. P. 3423– 3434
5. Design of the landing guidance for the retro-propulsive vertical landing of a reusable rocket stage / A. Botelho, M. Martinez, C. Recupero et al. // CEAS Space Journal. 2022. Vol. 14. P. 551 – 564
6. Zhou S., Kong Y., Zhang S. e. a. Numerical simulation of sloshing in the propellant tank of reusable rocket vehicle using meshfree method // Comp. Part. Mech. 2023. Vol. 10. P. 173 — 184.
7. Jedediah M. Storey, Kirk D. Progress towards a Microgravity CFD Validation Study using the ISS SPHERES-SLOSH Experiment // AIAA Propulsion and Energy Forum, August 24-28. 2020
8. Зарубин В. С., Зимин В. Н., Кувыркин Г. Н. Оценка работоспособности оболочки камеры сгорания многоцветного жидкостного ракетного двигателя // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 100 — 107.
9. Siegert C. E., Petrash D. A. Time Response of Liquid-Vapor Interface After Entering Weightlessness. Washington, D. C.: NASA TN D-2458, 1964.

ЛЕСТНИЦА ЗАДАЧ КАК МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОСМОДИНАМИКИ В ГРОМОЗДКИХ ПОСТАНОВКАХ

Григорьев И.С.¹, Заплетин М.П.¹, Самохин А.С.^{1,2}, Самохина М.А.²

1 - Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

2 - Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

samokhinalexander@yandex.ru

Аннотация. На примере экспедиции космического аппарата к Фобосу излагается идея построения лестницы задач для решения сложных задач оптимизации межпланетных перелётов. Рассматривается громоздкая математическая модель, в которой учитывается притяжение Солнца, Земли и Марса, эфемериды, производится сквозная оптимизация без использования грависфер нулевой протяжённости, предполагается, что космический аппарат оснащён двигательными установками большой и малой ограниченной тяги. Постепенным усложнением математической модели удалось шаг за шагом получать удачные начальные приближения для всё более реалистичных и близких к исходной постановке задач и построить для неё экстремали Понтрягина.

Введение

На настоящий момент универсального подхода, позволяющего строить экстремали Понтрягина в любой достаточно сложной задаче космодинамики, не существует. Построение экстремалей остается трудной задачей, посильной только высококвалифицированному вычислителю. В данной работе излагается идея постепенного уточнения и усложнения математической модели интересующего искомого процесса, позволяющая получать экстремали Понтрягина в задачах оптимизации межпланетных перелётов в громоздких постановках.

Для демонстрации работы предлагаемого подхода рассматривается задача построения экстремалей Понтрягина для миссии космического аппарата (КА) к Фобосу.

Основная идея

Настоящая работа посвящена описанию методики численного решения задач оптимизации межпланетных траекторий экспедиции КА.

Предлагаемый подход представляет собой плодотворное развитие заложенных в 90-е годы XX века в коллективе Григорьева Константина Георгиевича идей, позволивших в свое время решить интересные задачи оптимального управления. В работе используется идея постепенного уточнения и усложнения математической модели рассматриваемого процесса. Важно, что такое продолжение решения по постановкам задач не приводит к необходимости решать каждую следующую задачу заново, так скажем «из пустоты», наоборот, каждая из рассматриваемых постановок становится очередной ступенькой в «лестнице задач». При решении следующей задачи уже решённая задача при необходимости переформулируется в новых терминах и становится отправной точкой очередного варианта метода продолжения решения по параметру внутри одной постановки. При продолжении по параметру для одной ступени лестницы шаг по параметру подбирается так, чтобы решение одной задачи было удовлетворительным начальным приближением для следующей задачи.

Простая, понятная и логичная идея «лестницы задач» при практической реализации постепенно приводит ко всё более громоздким математическим моделям. Задачи нижних ступеней должны иметь аналитическое решение или быть таковы, что нахождение их решения не представляет вычислительных трудностей. В конечном итоге осуществляется переход к исходной постановке задачи. Для выполнения исследования на каждом шаге необходима чёткая математическая формализация, корректность выкладок и численных расчётов. На верхних ступенях лестницы оказывается необходимым использование самых современных идей вычислительного оптимального управления и преодоление сложностей их численной реализации.

Постановка задачи

Рассматривается задача оптимизации экспедиции пространственного перелёта КА к Фобосу. КА стартует в заданный диапазон лет с круговой орбиты искусственного спутника Земли (КОИСЗ), соответствующей выведению с космодрома с фиксированным углом наклона к экватору, заданной высотой. Положение КА на исходной орбите и её долгота восходящего узла оптимизируются. В конечный момент времени КА прилетает к Фобосу для проведения научных исследований при помощи доставленной научной аппаратуры. Положение Солнца, Земли, Марса, Фобоса соответствует эфемеридам. Гравитационные поля Солнца, Земли и Марса считаются центральными ньютоновскими. Предполагается, что КА и Фобос представляют собой непритягивающие материальные точки, их координаты и скорости в конечный момент миссии совпадают. Моменты старта и финиша оптимизируются.

Начальная масса КА на КОИСЗ задана. Предполагается, что КА последовательно управляется тремя разными двигательными установками (ДУ). Вначале двигатель большой тяги (БТ) осуществляет разгон КА у Земли; затем на протяжении перелёта от Земли к Марсу может работать ДУ малой тяги (МТ); торможение у

Марса осуществляется другой ДУ БТ. После отработки каждой очередной ДУ, она сбрасывается. Тем самым управление КА осуществляется поочередно посредством двигателей большой и малой тяги. Необходимость в таком комбинированном управлении связана с тем, что управление КА посредством только реактивных двигателей большой тяги в настоящее время не позволяет доставить к другим планетам и астероидам удовлетворительную массу научного груза, использование же только двигателя малой тяги значительно увеличивает сроки доставки и может оказаться критическим в смысле отказоустойчивости всей системы.

Использование на КА комбинации двигателей большой и малой тяги сочетает в себе достоинства манёвров с двигателями большой и малой тяги, позволяя избежать критических недостатков таких манёвров. В связи с экономической целесообразностью такая комбинация систем управления планируется к использованию в реальных проектах.

Управление КА осуществляется величиной и направлением вектора реактивной тяги. Отлёт от Земли предполагается безвитковым, реализующимся за одно включение двигателей БТ. Моменты включения, выключения ДУ МТ оптимизируются, а ДУ БТ заданы продолжительностями их работы, являющимися параметрами задачи. Максимизируется конечная масса КА.

Лестница задач

Задача космодинамики формализуется как задача оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина сводит решение задачи оптимального управления к решению нелинейной многоточечной краевой задачи. Основной, зачастую непреодолимой трудностью решения задачи оптимального управления становится именно проблема численного построения экстремалей Понтрягина. Для решения полученной краевой задачи необходимо хорошее начальное приближение, которое невозможно получить перебором за разумное время.

В такой ситуации для получения решения строится лестница задач. Поставленная задача с кусочно-непрерывным управлением КА двигательными установками БТ и МТ ставится на верхнюю, в данном случае 7-ю, ступень лестницы задач, изображённой на рис. 1. На ступенях с меньшим номером располагаются задачи в более простых постановках.

На первых пяти ступенях расположены задачи с импульсным управлением КА, аппроксимирующим работу двигателей. На шестой ступени – управление импульсными воздействиями, аппроксимирующими работу ДУ БТ и малой тягой. На первых четырёх ступенях в каждый момент времени движение КА рассматривается в центральном гравитационном поле сил притяжения одного притягивающего центра, начиная с пятой притяжение планет и Солнца учитывается на всей траектории.

Исследование начинается с 1 ступени, на которой вся миссия представляет собой задачу Ламберта, при этом учитывается притяжение только Солнца. Решение задачи Ламберта может быть сведено к поиску корня функции одной переменной, всегда существует и не представляет вычислительной трудности.

На 2 и 3 ступенях в задачу последовательно добавляется учёт притяжения Земли и Марса. Импульсная постановка с хорошим начальным приближением позволяет легко получать решения. При этом на первых трёх ступенях решения получаются легко, что позволяет провести множество исследований, например, рассмотреть различное количество импульсов на траектории, проверить выполнение условий второго порядка на найденных локальных минимумах, оценить области параметров исходной задачи, подозрительные на наличие глобального экстремума [1].

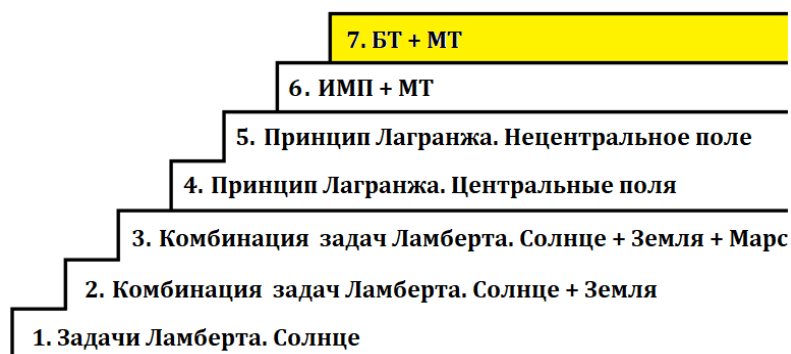


Рис. 1. Лестница задач для экспедиции к Фобосу КА с комбинированной тягой.

При переходе от 3 к 4 ступени задача математически по-другому формализуется, и на основе принципа Лагранжа определяются значения сопряжённых переменных, необходимые для дальнейшего добавления в задачу малой тяги. На 5 ступени решается задача с учётом притяжения Солнца, Земли, Марса на всей траектории [2].

На 6 ступени на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина добавляется малая тяга, и, наконец, на 7 ступени импульсные воздействия заменяются на большую тягу и получается решение исходной задачи [3, 4].

Заключение

В работе для построения начального приближения решения краевой задачи принципа максимума, и разработана методика – «лестница задач», основанная на поэтапном переходе от задач, решение которых не представляет вычислительных трудностей, таких как оптимизация комбинаций задач Ламберта прямыми методами, к задаче оптимального управления совокупностью динамических систем с кусочно-непрерывным управлением. В результате проведенного исследования на основе предложенной методики удалось построить экстремали для задачи оптимизации экспедиции КА, оснащённого ДУ БТ и МТ к Фобосу.

Исследование сложных задач траекторной оптимизации позволяет развивать методы решения громоздких задач космодинамики, повышать точность рассматриваемых математических моделей и расширять область исследования космических перелётов.

Литература

1. Samokhin A.S., Samokhina M.A. Verification of the second-order optimality conditions in the modeling of the SC expedition with the returning to the Earth based on two Lambert's problems solving // *Advances in the Astronautical sciences*, 2018, Vol. 161, pp. 843-862.
2. Samokhin A., Samokhina M., Grigoriev I., Zapletin M. Base on Phobos - Much Safer Exploration of Mars without the Need for Humans on the Surface of the Planet // *Acta Astronautica*, 2023, Vol. 204 C, pp. 920-925. doi: 10.1016/j.actaastro.2022.12.028.
3. Samokhin A.S., Samokhina M.A., Grigoriev I.S., Zapletin M.P. The optimization of interplanetary flight to Phobos with a jet engine of combined low and high limited thrust // *Advances in the Astronautical sciences*, 2020, vol. 170, pp. 213-227.
4. Заплетин М.П., Григорьев И.С., Самохин А.С., Самохина М.А. Оптимизация экспедиции к Фобосу с комбинированной тягой с возвращением к Земле // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, № 7, 24 с. doi: 10.18698/2308-6033-2017-7.

ПОИСК ВЫСОТНОЙ ГРАНИЦЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДВУХ ВАРИАНТОВ УВОДА КРУПНЫХ ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА НА ОРБИТЫ ЗАХОРОНЕНИЯ

Гришко Д.А.

МГТУ им. Н.Э. Баумана
dim.gr@mail.ru

Аннотация. В докладе рассматриваются два варианта увода крупных объектов космического мусора на орбиты захоронения (при помощи отделяемых модулей или буксировка). Предложена методика оценки стартовой массы активного космического аппарата-сборщика. Выполнен анализ высотной границы оптимальности вариантов увода в зависимости от 6 входных параметров задачи.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-29-00419, <https://rscf.ru/project/23-29-00419/>

Введение

В последние 4 года были реализованы первые демонстрационные космические полёты, в которых обрабатывались отдельные элементы технологии захвата крупных объектов космического мусора (ОКМ) с целью их увода на орбиту захоронения (Remo veDebris, HSA-d, MEV-1,2). Экономически целесообразным является увод нескольких объектов одним активным космическим аппаратом-сборщиком (КА), чему в частности будут посвящены проекты Hsa -M и MRV [1, 2]. В настоящее время все проекты по очистке околоземных орбит фактически сводятся к двум основным концепциям увода. *Первый вариант* предполагает, что на борту КА находятся отделяемые двигательные модули (ДМ). После захвата очередного объекта такой модуль фиксируется на его поверхности (чаще всего – в сопле) и после расстыковки выдаёт импульс скорости для изменения орбиты объекта. В рамках *второго варианта* КА играет роль буксира, после захвата уводя объект на орбиту захоронения самостоятельно.

В предыдущих работах авторов рассматривалась задача оптимизации затрат ΔV при планировании миссии увода крупных ОКМ с низких орбит и из окрестности геостационарной орбиты. При использовании прецессирующей орбиты ожидания на низких орбитах (последовательная схема облёта) затраты ΔV уменьшаются с увеличением продолжительности перелётов [3], поэтому выбиралось некоторое компромиссное время нахождения на орбите ожидания. При использовании «диагональной» схемы облёта продолжительность миссии полностью определяется взаимным положением орбитальных плоскостей по ДВУ [4, 5], а перелёт к очередному ОКМ осуществляется в момент совпадения ДВУ его орбиты с ДВУ орбиты предыдущего объекта. Схемы облёта, рассмотренные для ГСО [6], также не предполагают активное управление продолжительностью миссии и основаны на использовании естественной эволюции наклонений орбит к экватору.

Оптимизируемый функционал задачи состоит из суммарных затрат топлива (в первом приближении – суммарной ΔV) и продолжительности миссии. Современные космические аппараты при должном качестве производства уверенно функционируют 10–15 лет, поэтому можно утверждать, что требование минимизации энергетических затрат на маневрирование является доминирующим. Существенную роль при оценке требуемой массы топлива играет выбранный вариант увода объектов на орбиту захоронения.

При I варианте увода масса КА в ходе миссии непрерывно уменьшается, однако на его борту изначально находится некоторое количество заправленных ДМ. При II варианте увода масса КА попеременно увеличивается за счёт уводимых объектов и уменьшается за счёт сжигания топлива при исполнении манёвров. Предварительные оценки показали, что на низких орбитах более выгодным является I вариант увода, а в окрестности ГСО – II вариант [7]. В данном докладе приводятся результаты расчётов, позволивших оценить высотную границу оптимальности двух указанных вариантов увода.

Оценка стартовой массы КА при I варианте увода

При первом варианте увода полная стартовая масса КА определяется выражением:

$$M_{\Sigma} = m_{\text{КА}}^{\text{сух}} + n \cdot m_{\text{ДМ}}^{\text{сух}} + n \cdot m_{\text{КА}}^{\text{топл}} + m_{\text{КА}}^{\text{топл}} \quad (1)$$

где $m_{\text{КА}}^{\text{сух}}$ – сухая масса активного КА, $m_{\text{ДМ}}^{\text{сух}}$ – сухая масса ДМ, n – количество ДМ на борту одного КА,

$m_{\text{КА}}^{\text{топл}}$ – масса топлива для маршевой двигательной установки КА, подлежащая определению. Первое слагаемое в приведённой формуле будет определено в результате решения задачи и на основе имеющегося опыта проектирования космической техники. Количество ДМ и сухая масса каждого из них также являются входными параметрами, в то время как масса топлива в ДМ может быть достаточно точно определена, если известна масса уводимого объекта и параметры орбиты захоронения. Если обозначить $m_{\text{ОКМ}}$ как массу уводимого объекта, a_0 – средний радиус орбиты уводимого объекта и Δa – необходимое изменение большой полуоси для увода ОКМ на орбиту захоронения, то $m_{\text{ДМ}}^{\text{топл}} = f(m_{\text{ОКМ}}, \Delta V_{\text{ДМ}}) = f(m_{\text{ОКМ}}, a_0, \Delta a)$. Важно, что на низких орбитах можно выделить характерные группы ОКМ, орбиты которых имеют одно и то же наклонение и близкие значения большой полуоси, поэтому величины a и i можно принимать одинаковыми для разных объектов. Под $\Delta V_{\text{ДМ}}$

понимается импульс скорости, который переводит ОКМ на выбранную орбиту захоронения:

$$\Delta V_{\text{ДМ}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a_0} V_0 = \frac{1}{2} \Delta a \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \cdot 1000, \text{ [м/с]} \quad (2)$$

Для упрощения анализа все манёвры перелёта между двумя очередными объектами с позиции изменения массы КА рассматриваются как один манёвр, во время которого происходит мгновенное сжигание топлива. КА выводится при помощи разгонного блока непосредственно в окрестность первого объекта, для облёта n целей необходимо выполнить $n - 1$ перелётов. При каждом манёвре активного КА величиной ΔV_i оставшиеся в этот момент на борту неизрасходованные заправленные ДМ вместе с корпусом КА и остатком топлива, не участвующим в исполнении манёвра, являются полезным грузом.

После того, как будут уведены все n объектов, двигательная установка КА выдаёт тормозной импульс, также переводящий КА на орбиту захоронения. Так как ДМ также обеспечивает увод объектов на ту же орбиту захоронения, то $\Delta V_{\text{зах}} = \Delta V_{\text{ДМ}}$. С учётом приведённых рассуждений оценка массы топлива КА составляет

$$m_{\text{КА}}^{\text{топл}} = m_{\text{КА}}^{\text{сух}} \left(e^{\frac{\Delta V_{\text{зах}}}{w_{\text{eff}}}} - 1 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left[m_{\text{КА}}^{\text{сух}} + (n-i)m_{\text{ДМ}}^{\text{сух}} + (n-i)m_{\text{ДМ}}^{\text{топл}} + m_{\text{КА}}^{\text{топл}} - \sum_{j=1}^i m_j^{\text{топл}} \right] \left(e^{\frac{\Delta V_i}{w_{\text{eff}}}} - 1 \right) \right\} \quad (3)$$

Далее используются два упрощённых предположения. Во-первых, от реального импульсного манёвра ΔV_i можно перейти к среднему манёвру ΔV на перелёт к очередному объекту группы. Во-вторых, подчеркнутый в (3) текущий остаток топлива, можно представить линейной зависимостью от количества ДМ на борту. Кроме того, учитывается резерв суммарной ΔV на неучтённые операции сближения и расстыковки за счёт того, что последний объект в списке уводится не самим КА, а при помощи ДМ, сведение самого КА происходит отдельным включением маршевого двигателя. В результате масса топлива КА оценивается как

$$m_{\text{КА}}^{\text{топл}} = m_{\text{КА}}^{\text{сух}} \left(e^{\frac{\Delta V_{\text{зах}}}{w_{\text{eff}}}} - 1 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left[m_{\text{КА}}^{\text{сух}} + (n-i)m_{\text{ДМ}}^{\text{сух}} + (n-i)m_{\text{ДМ}}^{\text{топл}} + \frac{m_{\text{КА}}^{\text{топл}}}{n-1}(n-i) \right] \left(e^{\frac{\Delta V}{w_{\text{eff}}}} - 1 \right) \right\} \quad (4)$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение, а полная масса КА вычисляется по формуле (1).

Оценка стартовой массы КА при II варианте увода

При II варианте увода полная стартовая масса КА складывается всего из двух составляющих:

$$M_{\Sigma} = m_{\text{КА}}^{\text{сух}} + m_{\text{КА}}^{\text{топл}} \quad (5)$$

Каждый «манёвр» активного КА состоит из понижения орбиты вместе с ОКМ и возвращения назад без ОКМ. Вводится следующее линеаризованное допущение:

$$\frac{m_i^{\text{топл}} \downarrow}{m_i^{\text{топл}} \uparrow} = \frac{1 + m_{\text{ОКМ}} / m_{\text{КА}}^{\text{сух}}}{1} \quad (6)$$

и учитывается резерв суммарной ΔV на неучтённые операции сближения и расстыковки за счёт операции условного возвращения КА на рабочий эшелон высот после увода последнего объекта на орбиту захоронения. В общем случае $\Delta V_{\text{зах}} \neq \Delta V_i$, при этом величина $\Delta V_{\text{зах}}$ по-прежнему вычисляется по формуле (2). В результате масса топлива КА оценивается как

$$m_{\text{КА}}^{\text{топл}} = \left(e^{\frac{\Delta V_{\text{зах}}}{w_{\text{eff}}}} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \left\{ m_{\text{КА}}^{\text{сух}} + m_{\text{ОКМ}} + \frac{m_{\text{КА}}^{\text{топл}}}{n}(n-i) + \frac{m_{\text{КА}}^{\text{топл}}}{n} \cdot \frac{1}{2 + \frac{m_{\text{ОКМ}}}{m_{\text{КА}}^{\text{сух}}}} \right\} + \left(e^{\frac{\Delta V}{w_{\text{eff}}}} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \left\{ m_{\text{КА}}^{\text{сух}} + \frac{m_{\text{КА}}^{\text{топл}}}{n}(n-i) \right\} \quad (7)$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение, а полная масса КА вычисляется по формуле (5).

Высотная граница оптимальности вариантов увода ОКМ

Формулы (1) и (5) позволяют вычислить примерную стартовую массу заправленного КА в соответствии с I или II вариантом увода ОКМ на орбиту захоронения. В этих формулах входными параметрами являются следующие величины:

- сухая масса активного КА;
- сухая масса одного ДМ;
- масса типового уводимого ОКМ;
- необходимое изменение большой полуоси для перевода объекта на орбиту захоронения;
- количество ДМ на борту КА (количество ОКМ, уводимых одним КА);
- средняя величина импульса скорости для перелёта между двумя объектами.

Интерес представляют не только оценки стартовой массы КА в соответствии с обоими вариантами увода объектов на орбиту захоронения, но и высотная граница оптимальности каждого из вариантов. Приравнивая формулы (1) и (5), можно получить представление о том, как меняется требуемая стартовая масса КА в зависимости от радиуса орбиты рассматриваемой группы ОКМ (рис. 1).

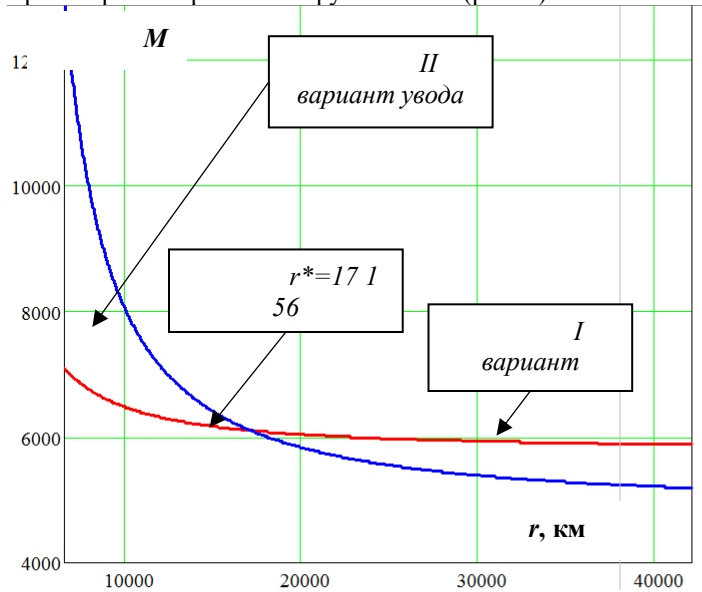


Рис. 1. Пример поиска высотной границы оптимальности I варианта увода ОКМ (входные параметры:

$$m_{КА}^{сух} = 4170 \text{ кг}, m_{ДМ}^{сух} = 90 \text{ кг}, n = 10, m_{ОКМ} = 1000 \text{ кг}, \Delta a = 400 \text{ км}, \Delta V = 50 \text{ м/с}.$$

Влияние каждого из шести входных параметров задачи на положение точки пересечения кривых на рис. 1 является достаточно сильным. Более того, не все зависимости являются прямыми: например, уменьшение количества ДМ (целей) опускает границу оптимальности I варианта увода, а уменьшение сухой массы одного ДМ повышает её. При независимом рассмотрении вариаций каждого из входных параметров следует, что граница оптимальности I варианта увода лежит в регионе средних орбит, но ниже высот функционирования глобальных навигационных спутниковых систем. Однако это утверждение нуждается в тщательной проверке из-за возможного взаимного усиления эффектов при варьировании параметров задачи.

Заключение

В докладе приводится анализ возможных диапазонов изменения 6 входных параметров задачи, предложен рациональный шаг разбиения сетки по каждому из них. Получен массив значений высотной границы оптимальности I варианта увода.

Для определения параметров орбиты захоронения использовались как требования стандарта ISO 24113:2019 (для низких орбит и ГСО), так и идеи различных авторов для возможных орбит захоронения на высотах глобальных навигационных спутниковых систем. Варьирование сухих масс КА и ДМ осуществлялось на основе проектного анализа космических систем и их компонентов. Средние величины ΔV перелётов между объектами получены на основе оптимальных схем облёта с использованием естественных возмущений орбиты. Масса уводимых объектов изменяется в интервале от 1 до 9 тонн (ракетные ступени и разгонные блоки).

Результаты многопараметрического анализа показывают, что в большинстве случаев высотная граница оптимальности вариантов увода расположена между высотами в 5 и 15 тыс. км.

Литература

1. Elsa-M // Astroscale. [Интернет-ресурс] <https://astroscale.com/> (дата обращения 25.02.2023)
2. MRV mission set to be launched by Northrop Grumman in 2024 // [Интернет-ресурс] <https://www.linksystems-uk.com/mrv-mission-set-to-be-launched-by-northrop-grumman-in-2024/> (дата обращения 25.02.2023)
3. А.А. Баранов, Д.А. Гришко, В.И. Майорова // Исследование затрат характеристической скорости, необходимой для обслуживания и восполнения спутниковых систем на круговых орбитах. Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 3 (15). С. 26.
4. A.A. Baranov, D.A. Grishko, Y.N. Razoumny // Large-size space debris flyby in low Earth orbits. Cosmic Research. 2017. Т. 55. № 5. С. 361-370 (только англ.).
5. A.A. Baranov, D.A. Grishko et al. // Flyby of large-size space debris objects and their transition to the disposal orbits in LEO. Advances in Space Research. 2017. Т. 59. № 12. С. 3011-3022.
6. A.A. Baranov, D.A. Grishko et al. // Optimal transfer schemes between space debris objects in geostationary orbit. Acta Astronautica. 2020. Т. 169. С. 23-31.
7. A.A. Baranov, D.A. Grishko et al. // Feasibility analysis of LEO and GEO large space debris de/re-orbiting taking into account launch mass of spacecraft-collector and its configuration layout. Advances in Space Research. 2021. Т. 67. № 1. С. 371-383.

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РЕЗЕРФОРДА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ МАНЕВРОВ

Грушевский А.В., Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
alexgrush@rambler.ru

Аннотация. Гравитационные маневры являются результатом целенаправленного использования феномена естественного гравитационного рассеивания. В работе получено обобщение формулы Резерфорда, учитывающее специфику рассеивающего воздействия пролетной планеты на траекторию космического аппарата. Применение полученных формул дает возможность преодолеть нелинейную неравномерность рассеянного гравитацией пучка. В итоге удастся существенно повысить вероятность попадания в сферу действия планеты назначения после совершения текущего гравитационного маневра для сокращенного числа виртуальных прототипов и формирования требуемой последовательности цепочек многократных гравитационных маневров.

Введение

Управляемые гравитационные маневры являются результатом целенаправленного использования часто встречающегося в масштабах Вселенной феномена естественного гравитационного рассеивания. Авторам удалось получить обобщение формулы Резерфорда, учитывающее специфику рассеивающего воздействия пролетной планеты на траекторию космического аппарата (КА). Применение полученных при этом формул для оценки результата гравитационного рассеивания дает возможность преодолеть проблему нелинейной неравномерности рассеянного гравитацией пучка. Также появляется возможность создания целенаправленного пучка траекторий после гравитационного маневра. В итоге существенно повышается вероятность попадания в сферу действия планеты назначения после совершения гравитационного маневра хотя бы одной пролётной траектории из ограниченного числа виртуальных прототипов. Как следствие оказывается возможным значительно уменьшить необходимое число моделируемых вариантов прохождения сферы действия пролетной планеты для формирования требуемой последовательности цепочек многократных гравитационных маневров. Существенно повышена эффективность и быстродействие рекуррентной процедуры поиска разнообразных баллистических сценариев межпланетных перелетов.

Кулоновское и гравитационное рассеяние

В астродинамике баллистический анализ полетов КА в дальнем космосе с использованием гравитационных маневров (фактически – гравитационного рассеяния пробных частиц массивными телами Солнечной системы) проводится обычно с помощью традиционного исследования конечного набора задач Коши и Ламберта [1–3]. Изучение и описание аналогичных процессов в физике (кулоновское рассеяние заряженных частиц) проводится в ином ключе – с введением в рассмотрение пучка заряженных частиц – сонаправленного компактного потока однородных частиц [4, 5]. В последние годы, при решении задач баллистического анализа и построения адаптивных сценариев проведения КА гравитационных маневров, в астродинамике также наметился тренд по использованию пучковых алгоритмов с целью синтеза точных требуемых траекторий КА в полных эфемеридах [1–3]. Здесь уже вместо ансамбля траекторий заряженных частиц фигурирует пучок виртуальных траекторий КА с почти совпадающей скоростью [1–3]. В этом контексте представляет интерес синтез обоих подходов при решении конкретных задач баллистического анализа с гравитационным рассеянием: гравитационного [1–3] и кулоновского [4, 5].

Сначала рассмотрим кулоновское рассеяние [4, 5].

Выпишем силовую функцию кулоновского взаимодействия частиц [5]:

$$U_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{aim}}{r}, \text{ где } \epsilon_0 \approx 8,85418781762 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м – электрическая постоянная, } q_\alpha, q_{aim} \text{ – заряды}$$

одноименно заряженной частицы и рассеивающей мишени с массами m_α, m_{aim} соответственно, r – расстояние между их центрами масс.

Для угла рассеяния φ (угла между исходным и отражённым векторами асимптотической скорости заряженной альфа-частицы $\mathbf{V}_{\infty, in}$ и $\mathbf{V}_{\infty, out}$) будет верно соотношение:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m b V_\infty^2}, \quad (1)$$

где $V_\infty = \|\mathbf{V}_{\infty, in}\| = \|\mathbf{V}_{\infty, out}\|$, m – приведённая масса, $m = \frac{m_\alpha m_{aim}}{m_\alpha + m_{aim}}$, b – величина прицельной дальности [5, 6].

Учитывая, что в случае $m_{aim} \gg m_\alpha$ приведённая масса $m = \frac{m_\alpha}{1 + m_\alpha/m_{aim}} \approx m_\alpha$, $m \approx m_p$, для угла рассеяния φ будет выполнено:

$$tg \frac{\varphi}{2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m_\alpha b V_\infty^2}. \quad (2)$$

Заметим, что представленные формулы остаются справедливыми и в том случае, когда заряды разноименные.

Поскольку структуры силовой функции гравитационного взаимодействия двух массивных тел U_{grav} и кулоновского электрического поля для двух заряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются идентичными, появляется возможность применения аналогов формул (1) и (2) в случае гравитационного рассеяния. Аналогом альфа-частицы с зарядом q_α становится космический аппарат (КА) с массой m_{sc} , аналогом рассеивающей мишени с потенциалом $U_{aim} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{aim}}{r}$ становится гравитационное воздействие малого тела $U_p = \frac{\mu_p}{r}$ (планеты, спутника планеты или астероида) с массой m_p и гравитационным параметром $\mu_p = Gm_p$, где G – гравитационная постоянная.

Аналог формулы (2) в случае *гравитационного рассеяния* формально может быть получен из (2) с помощью замены:

$$m_\alpha \rightarrow m_{sc}, q_\alpha \rightarrow m_{sc}, q_{aim} \rightarrow m_p, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow G. \quad (3)$$

В результате можно получить выражение для угла гравитационного рассеяния φ при совершении гравитационного манёвра:

$$tg \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_p}{b V_\infty^2},$$

где $\mu_p = Gm_p$, G – гравитационная постоянная.

Замечание. В астродинамике φ называется углом поворота вектора асимптотической скорости при совершении гравитационного манёвра. При его вычислении вместо прицельной дальности b чаще используется минимальное расстояние до КА от центра планеты R_π (очевидно – расстояние перицентра пролётной гиперболы) [2-5], при этом вместо (3) чаще используется выражение

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + (R_p/\mu_p) V_\infty^2}, \quad (4)$$

где e – эксцентриситет пролётной гиперболы.

Выражение (4) не используется в физике элементарных частиц по понятным причинам: в отличие от прицельной дальности b , экспериментальное определение R_π для α -частиц трудно реализуемо.

Очевидно, что R_π не может быть меньше радиуса планеты R_p , поэтому для максимального угла разворота вектора асимптотической скорости φ_{max} будет выполнено:

$$\sin \frac{\varphi_{max}}{2} = \frac{1}{1 + (R_p/\mu_p) V_\infty^2} = \frac{1}{1 + V_\infty^2/V_{pc}^2}, \quad (5)$$

где $V_{pc} = \sqrt{\mu_p/R_p}$ – первая космическая скорость около поверхности планеты. Случаю максимального разворота вектора асимптотической скорости соответствует минимальное допустимое значение прицельной дальности в пучке b_{min} , обеспечивающему проведение гравитационного манёвра.

Поведение пучка заряженных частиц при рассеянии описывается формулой Резерфорда [1, 2]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_\alpha q_{aim}}{8\pi\epsilon_0 m_\alpha V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}}, \quad (6)$$

где $d\sigma$ – элементарная площадка нерассеянного пучка (так что число проходящих через неё частиц $dN = n_0 d\sigma$, n_0 – средняя интенсивность пучка, характеризующая число частиц, проходящих через нормальную единичную поверхность за единицу времени), $d\Omega$ – телесный угол, в который попадают соответствующие альфа-частицы после рассеяния.

Обобщённая формула Резерфорда для гравитационного рассеяния в каноническом виде [3] может быть получена и формально из (6) с помощью замены (3).

Выражение (6) после подстановки (3) преобразуется к обобщённой формуле Резерфорда для гравитационного рассеяния:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{4} \left(\frac{V_\infty^2}{\mu_p} \right)^2 \left(b^2 + (\mu_p / V_\infty^2)^2 \right)^2, \quad (7)$$

Подставляя в (7) непосредственно выражение (4) для угла φ поворота вектора асимптотической скорости через расстояние перицентра пролётной гиперболы R_π , можно прийти к новой форме обобщённой формулы Резерфорда гравитационного рассеяния траекторий КА, выражаемой через эксцентриситет e пролётной гиперболы:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \left(1 + R_\pi \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \right)^4 = -\frac{e^4}{4} a_{hyp}^2. \quad (8)$$

Полученные аналитические законы гравитационного рассеяния (7), (8) являются ключом для эффективного моделирования гравитационных манёвров. С их использованием может быть компенсирована проблема нелинейной неравномерности рассеянного пучка, выражаемая обобщённым законом Резерфорда (6). Действительно, при равномерном распределении виртуальных траекторий в пучке виртуальных траекторий, наиболее эффективные траектории КА, в смысле воздействия на них гравитационного маневра, то есть наиболее близко пролетающие над планетой, оказываются затем и наиболее «одиночными» [3, 4, 7]. Вероятность проскока фронта рассеянных траекторий мимо планеты-мишени велика. Однако при изменении закона распределения плотности начальных виртуальных траекторий в пучке, то есть при уходе от равномерной плотности, ситуация может кардинально поменяться [3, 8]. Вместо равномерного распределения траекторий $n = n_0 = const$ следует генерировать начальную трубку виртуальных траекторий для моделирования с неоднородным, концентрическим распределением траекторий \tilde{n} по закону:

$$\tilde{n}(b) = n_0 \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right)^{-2}. \quad (9)$$

В итоге на выходе из гравитационного маневра формируется равномерно рассеянный гравитацией (инвариантный относительно прицельной дальности и угла φ) пучок виртуальных траекторий КА [3, 8], что позволяет значительно уменьшить необходимое количество моделируемых вариантов.

Заключение

Формула Резерфорда для рассеяния заряженных α -частиц в кулоновском поле может быть естественно обобщена на случай гравитационного рассеяния, учитывая факт инвариантности этой формулы относительно знака силы (притягивающей либо отталкивающей). Между тем одним из типов гравитационного рассеяния в Солнечной системе являются гравитационные манёвры. В работе для гравитационных манёвров, по аналогии, вводится эффективное гравитационное сечение рассеяния и получена обобщенная формула Резерфорда для гравитационного рассеяния (в частности, она может быть выписана как функция прицельной дальности).

В результате проведения анализа полученных соотношений открывается возможность для получения полуаналитических гарантирующих оценок плотности пучка виртуальных траекторий КА при моделировании гравитационных манёвров около массивных тел Солнечной системы и для формирования эффективного распределения этой плотности. Это позволяет существенно повысить вероятность попадания в сферу действия планеты назначения после совершения гравитационного маневра хотя бы одной пролётной траектории из ограниченного числа виртуальных прототипов. В результате оказывается возможным построение высокоэффективную рекуррентную процедуру синтеза баллистических сценариев межпланетных миссий с использованием многократных гравитационных манёвров.

Литература

1. Ю. Ф. Голубев, А. В. Грушевский, В. В. Корянов, А. Г. Тучин // Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера, Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 149-167.
2. Г. К. Боровин, Ю. Ф. Голубев, А. В. Грушевский, Г. С. Заславский, М. В. Захваткин, В. В. Корянов, С. М. Лавренов, И. М. Морской, А. В. Симонов, В. А. Степаньянц, А. Г. Тучин, Д. А. Тучин, В. С. Ярошевский // Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы. Под ред. А.Г. Тучина. МО., Химки, «НПО Лавочкина», 2018, 336 с. ISBN 978 5 905646 12-6.
3. Ю. Ф. Голубев, А. В. Грушевский, В. В. Корянов, А. Г. Тучин, Д. А. Тучин // Обобщённая формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных манёвров в Солнечной системе. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. 6.
4. Э. Резерфорд // Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов. М.: Наука, 1972.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // Механика. Издание 4-е, исправленное. М.: Наука, 1988. — («Теоретическая физика», том I).
6. Д. Е. Охочимский, Ю. Г. Сихарулидзе // Основы механики космического полета. М., Наука, 1990. 448 с.
7. В. А. Егоров // О некоторых задачах полета к Луне, УФН, 1957, LXIII, с. 73-117.
8. Ю. Ф. Голубев, А. В. Грушевский, В. В. Корянов, А. Г. Тучин, Д. А. Тучин // Обобщение формулы Резерфорда для синтеза цепочек гравитационных манёвров, Доклады российской академии наук. Физика. 2021, т. 501, с. 5–7.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВУХ СОЕДИНЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИМ ШАРНИРОМ ТЕЛ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Гутник С.А.

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
gutnik.sa@mipt.ru

Аннотация. Рассматриваются задачи определения равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, движущихся в центральном гравитационном поле по круговой орбите. Главное внимание уделяется изучению равновесных ориентаций связки двух тел для трех случаев, когда равновесные ориентации расположены в плоскости круговой орбиты, в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты и в плоскости, касательной к плоскости орбиты. Получены уравнения движения. Предложен метод преобразования системы тригонометрических уравнений, определяющих равновесия к одному алгебраическому уравнению 12 степени. С использованием алгебраических методов проведена классификация областей с равным числом положений равновесия.

Введение

В работе представлены результаты исследования положений равновесия системы двух тел (спутник-стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущейся по круговой орбите в центральном гравитационном поле. Исследование равновесных ориентаций связки тел, движущихся по круговой орбите, представляет практический интерес для создания составных схем гравитационной системы ориентации спутников, которые могут функционировать на орбите продолжительное время без расходования энергии и рабочего тела. Действие стабилизатора на спутник позволяет получить новые положения равновесия системы двух тел и ввести диссипацию в систему.

Идея использования системы двух связанных сферическим шарниром тел (система спутник-стабилизатор) в задачах гравитационной ориентации искусственных спутников Земли была предложена еще в 1956 г. Д.Е. Охоцимским и в дальнейшем развита и подробно реализована в работах В.А. Сарычева, В.В.Сазонова, С.А. Мирера [1–6]. Подробное рассмотрение динамики различных типов составных схем гравитационных систем ориентации представлено в [5].

В данной работе главное внимание уделяется изучению равновесных ориентации связки двух тел, когда сферический шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора, для трех случаев, когда равновесные ориентации расположены в плоскости круговой орбиты, в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты и в плоскости, касательной к плоскости орбиты.

Задача нахождения всех пространственных положений равновесия двух соединенных сферическим шарниром тел на круговой орбите в общем виде до сих пор не решена. Подробное исследование задачи о пространственных положениях равновесия системы двух связанных осесимметричных тел проведено в работе [6]. Динамика движения двух соединенных шарниром тел в плоскости круговой орбиты в случае, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора, исследовалась в работах [1–4, 7].

Исследование положений равновесия

Рассматривается задача о движении системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, по круговой орбите [8]. Для записи уравнений движения системы двух тел введем следующие правые системы координат (рис. 1): $OXYZ$ – орбитальная система координат; ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр масс C Земли и центр масс O системы двух тел; ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O , ось OY совпадает с нормалью к плоскости орбиты. Оси систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора соответственно (рис. 1). Ориентация системы координат $O_ix_iy_iz_i$ относительно орбитальной системы координат определяется с использованием самолетных углов тангажа α_i рыскания β_i и крена γ_i [5]. Индекс $i=1$ ($i=2$) относится к телу 1 – спутнику (телу 2, стабилизатору).

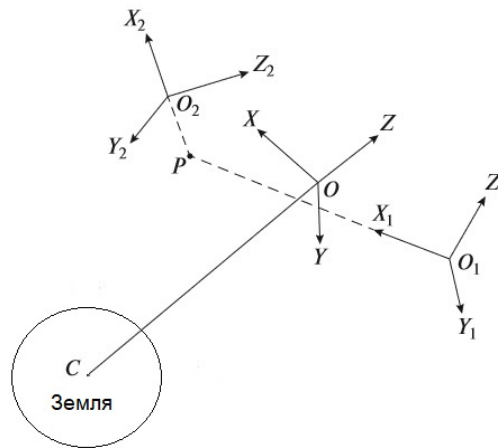


Рис. 1. Основные системы координат.

Пусть a_i, b_i, c_i – координаты сферического шарнира P в связанной с телом системе координат $O_i x_i y_i z_i$; A_i, B_i, C_i – главные центральные моменты инерции тел, $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$; M_i – масса i -го тела; Рассмотрим случаи, когда шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора. **Случай 1**, когда $b_1 = b_2 = 0$ и равновесные ориентации системы двух тел находятся в плоскости орбиты ($\alpha_i \neq 0, \beta_i = \gamma_i = 0$). **Случай 2**, когда $c_1 = c_2 = 0$ и равновесные ориентации системы двух тел находятся в плоскости касательной к плоскости орбиты ($\beta_i \neq 0, \alpha_i = \gamma_i = 0$). **Случай 3**, когда $a_1 = a_2 = 0$ и равновесные ориентации системы двух тел находятся в плоскости перпендикулярной к плоскости орбиты ($\gamma_i \neq 0, \alpha_i = \beta_i = 0$).

Первый случай был подробно рассмотрен в [8]. С использованием выражений для силовой функции и кинетической энергии из [5] и с применением символического дифференцирования были получены уравнения движения в форме уравнений Лагранжа 2 рода и стационарные уравнения, которые определяют равновесные ориентации системы двух тел в виде

$$\begin{aligned} & ((A_1 - C_1)/M) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - (a_1 \cos \alpha_1 + c_1 \sin \alpha_1)(a_1 \sin \alpha_1 - c_1 \cos \alpha_1) + \\ & + (a_1 \cos \alpha_1 + c_1 \sin \alpha_1)(a_2 \sin \alpha_2 - c_2 \cos \alpha_2) = 0, \\ & ((A_2 - C_2)/M) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - (a_2 \cos \alpha_2 + c_2 \sin \alpha_2)(a_2 \sin \alpha_2 - c_2 \cos \alpha_2) + \\ & + (a_2 \cos \alpha_2 + c_2 \sin \alpha_2)(a_1 \sin \alpha_1 - c_1 \cos \alpha_1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тригонометрическую систему уравнений (1) относительно двух неизвестных самолетных углов α_1, α_2 аналитически решить не удастся. Для решения системы (1) была использована универсальная замена синусов и косинусов углов α_1 и α_2 через их тангенсы $t_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, t_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Далее система (1) была преобразована в алгебраическую систему двух уравнений относительно двух неизвестных t_1 и t_2

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 t_1^3 + \bar{a}_1 t_1^2 + \bar{a}_2 t_1 + \bar{a}_3 &= 0, \\ \bar{b}_0 t_1^2 + \bar{b}_1 t_1 + \bar{b}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

коэффициенты которой являются полиномами от параметров системы. Исключая из системы (2) t_1 с использованием понятия результата и символических вычислений его определителя было получено алгебраическое уравнение 12 порядка относительно переменной t_2 , которое после факторизации представляет собой произведение трех полиномов $P(t_2) = P_1(t_2)P_2(t_2)P_3(t_2)$. Здесь $P_1(t_2)$ и $P_2(t_2)$ полиномы второго порядка и имеют не более двух действительных корней. $P_3(t_2)$ является полиномом 8 порядка и имеет не более 8 действительных корней. Каждый из трех полиномов определяет отдельный класс положений равновесия системы.

По определению результата каждому корню t_2 уравнения $P(t_2) = 0$ соответствует один общий корень t_1 системы (2). Число действительных корней полученного алгебраического уравнения четно и не превышает 12. Подставляя значение действительного корня t_2 алгебраического уравнения 12-го порядка в уравнения системы (2), найдем совпадающий корень t_1 этих уравнений. Можно показать, что каждому действительному корню полученных уравнений соответствуют 4 равновесных решения исходной системы (1). Так как общее число действительных корней уравнения не превышает 12, то система двух связанных тел спутник-стабилизатор в плоскости орбиты может иметь не более 48 равновесных ориентаций в орбитальной системе координат. Используя эти уравнения для каждого набора системных параметров, мы можем определить все плоские

равновесные ориентации системы спутник–стабилизатор в орбитальной системе координат.

Для исследования числа положений равновесия системы спутник–стабилизатор в случае $P_3(t_2)=0$ можно определить в пространстве 6 параметров системы области с одинаковым числом вещественных корней этого алгебраического уравнения 8 порядка. Эти области в пространстве параметров были получены путем построения дискриминантной гиперповерхности полинома $P_3(t_2)$ с использованием символьных вычислений.

Случай 2. ($c_1=c_2=0, \beta_i \neq 0, \alpha_i = \gamma_i = 0$). Этот случай исследуется аналогично случаю 1. Здесь равновесные ориентации определяются тригонометрической системой аналогичной системе (1), если в уравнениях, входящих в нее, заменить A_i на B_i , C_i на A_i , a_i на b_i , c_i на a_i и α_1 на β_1 , α_2 на β_2 . Результаты исследования положений равновесий с точностью до обозначений совпадают с результатами случая 1.

Случай 3. ($a_1=a_2=0, \gamma_i \neq 0, \alpha_i = \beta_i = 0$). Этот случай наиболее сложный по сравнению с предыдущими и вычисления здесь более громоздкие. В случае 3 также получено алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно неизвестной $\text{tg}^2 \gamma_2$, которое тоже факторизуется на три полинома, два из которых второго порядка, а третий 8-го порядка. Каждый из трех полиномов определяет отдельный класс положений равновесия системы двух тел. Для уравнения 8-го порядка проведена в пространстве параметров классификация областей с равным числом положений равновесия с использованием алгебраических методов построения дискриминантной гиперповерхности.

Таким образом показана возможность существования равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром не только в плоскости круговой орбиты, но и в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты и в плоскости, касательной к плоскости орбиты, а также исследованы условия при которых равновесные ориентации имеют место.

Заключение

В настоящей работе проведено исследование движения системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, движущихся по круговой орбите под действием гравитационного момента. Главное внимание уделено изучению равновесных ориентаций системы двух тел в плоскости круговой орбиты, в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты и в плоскости, касательной к плоскости орбиты.

Показана возможность и найдены условия существования равновесных ориентаций системы двух тел как в плоскости круговой орбиты, так и в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты и в плоскости, касательной к плоскости орбиты. Предложен алгебраический метод определения положений равновесия системы двух тел в орбитальной системе координат при условии, когда сферический шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора. Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования гравитационных систем управления ориентацией искусственных спутников Земли

Литература

1. В. А. Сарычев // Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите, Космические исследования, Т.5, №3. 1967. 360–364
2. В. А. Сарычев, Сазонов В.В. // Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников, Космические исследования, Т.14, №2. 1976. 198–208
3. В. А. Сарычев, Мирер С.А. // Оптимальные параметры гравитационной системы спутник–стабилизатор, Т.14, №2. 1976. 209–219
4. Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V. // Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response, Acta Astronautica. Vol.3, No.9–10. 1976. 651-669
5. Сарычев В.А. // Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства». Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. 223 с.
6. В. А. Сарычев // Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите, Космические исследования, Т.37, №2. 1999. 176–181
7. Gutnik S.A., Sarychev V.A. // Symbolic investigation of the dynamics of a system of two connected bodies moving along a circular orbit, In: England M., Koepf W., Sadykov T.M., Seiler W.M., Vorozhtsov E.V. Eds. CASC 2019. LNCS. Springer, Cham, 2019. V. 11661. 164–178
8. Гутник С.А., Сарычев В.А. // Исследование динамики системы двух связанных тел в плоскости круговой орбиты с применением методов компьютерной алгебры, Журнал вычислительной математики и математической физики, Т. 63. № 1. 2023. 112–120

УПРАВЛЕНИЕ РЕЖИМОМ ЗАКРУТКИ РАЗГОННОГО БЛОКА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

Давыдов А.А.¹, Иванов Г.А.²

1 - ГКНПЦ им. М.В. Хруничева

2 - МГТУ им. Н.Э. Баумана

georgyivanov1911@gmail.com

Аннотация. Во время выведения космических аппаратов разгонным блоком, на пассивных участках полета применяется закрутка тела. В данной работе разработан алгоритм, позволяющий осуществлять стабилизацию вращающегося тела. Описана математическая модель поведения жидконаполненного разгонного блока и способ осуществления его стабилизации.

Введение

В процессе выведения полезной нагрузки (ПН) на целевую орбиту разгонным блоком (РБ), встречаются продолжительные промежутки пассивного полета связи ПН и РБ. В целях осуществления устойчивого полета и обеспечения теплового режима на промежутках продолжительного полета применяется режим закрутки РБ. Данный режим предполагает придание вращения изделию вокруг неподвижной оси в пространстве и поддержание постоянной угловой скорости вращения.

В виду действия внешних возмущающих моментов, а также больших объемов жидкого наполнения топливных баков РБ, на практике режим закрутки оказывается нестабильным и в процессе полета может потребоваться остановить вращение связи, осуществить переориентацию и заново произвести закрутку.

Данная работа посвящена созданию и исследованию алгоритма управления, который позволит осуществлять одновременное управление угловой скоростью вращения тела и положением оси закрутки в пространстве. Предполагается исследовать возможность применения подобного алгоритма для управления телом с жидким наполнением.

Основной текст

Рассмотрим в инерциальном пространстве три оси: R – неподвижная ось, вдоль которой должна быть организована закрутка; r – продольная ось в системе координат, связанной с космическим аппаратом (КА); ω – вектор угловой скорости тела.

Тогда задача стабилизации сводится к созданию алгоритма, который будет обеспечивать совмещение трех этих векторов. Уравнение движения вектора r принимает следующий вид $\dot{r} = \omega \times r$. Тогда требуется обеспечить, чтобы постоянно присутствовала нормальная составляющая r' вектора скорости перемещения конца вектора r (см рис. 1). Это будет обеспечиваться в том случае, если вектор угловой скорости будет изменяться по закону (см. рис. 2):

$$\omega = k_{\omega}[r + c(R - r) + k(r \times R)]$$

где k , c – коэффициенты, определяющие положение вектора угловой скорости относительно r и R ; k_{ω} – масштабный коэффициент, определяющий величину угловой скорости закрутки.

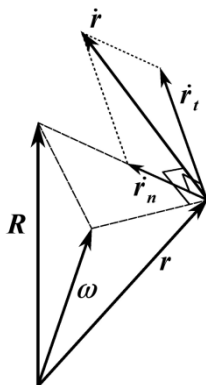


Рис. 1. Составляющие вектора \dot{r} . \dot{r}_n – нормальная составляющая; \dot{r}_t – тангенциальная составляющая.

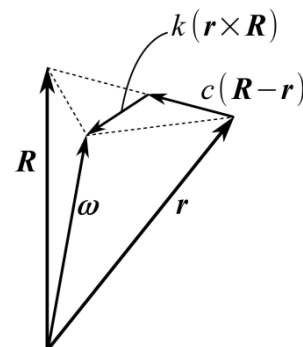


Рис. 2. Составляющие, входящие в закон изменения вектора угловой скорости.

В таком случае, при переходе к связанной с главными центральными осями тела системе координат, задача исследования устойчивости подобного управления может быть сведена к исследованию системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = k_{\omega}[\mathbf{r} + c(\mathbf{R} - \mathbf{r}) + k(\mathbf{r} \times \mathbf{R})] - \boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

После линеаризации системы, можно записать уравнение шестого порядка, определяющее значения корней характеристического многочлена. Для устойчивости движения достаточно, чтобы действительные части всех корней данного уравнения имели значения меньше, чем ноль. Тогда при помощи ЭВМ можно предельно величину наибольшей действительной части среди корней характеристического уравнения как функцию от коэффициентов k , c . Если построить поверхность, отражающую данную зависимость, можно наблюдать, что есть область таких значений коэффициентов, при которых все действительные части корней характеристического уравнения меньше нуля, то есть обеспечивается устойчивость движения (см. рис. 3а). Так же видно, что данная поверхность имеет особую точку, в которой наблюдается наибольший запас устойчивости (см. рис. 3б).

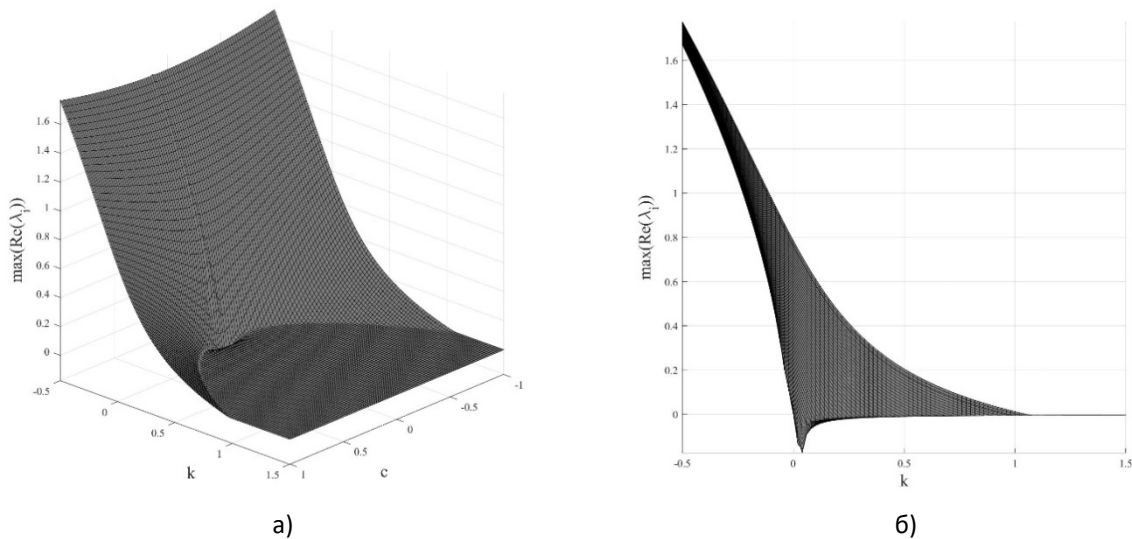


Рис. 3. Значение наибольшей из действительных частей корней характеристического уравнения как зависимость от k , c .

Для анализа применимости данного алгоритма при стабилизации тела с жидким наполнением потребуется исследовать модель приближенного поведения жидкости в топливных баках РБ. Угловая скорость закрутки выбирается таким образом, чтобы центробежные силы, действующие на частицы жидкости, имели большее влияние, чем силы поверхностного натяжения, в таком случае обеспечивается прилипание жидкости к боковым поверхностям баков. Тогда приближенное поведение изделия может быть представлено как одновременное вращение РБ и маховика, описывающего движение жидкости. Так же для включения в описание поведения жидкости при включении и выключении двигателей стабилизации предполагается колебательное взаимодействие между корпусом изделия и маховиком (см. рис. 4). Для исследования движения РБ с несколькими топливными баками предполагается вводить в систему несколько колеблющихся маховиков.

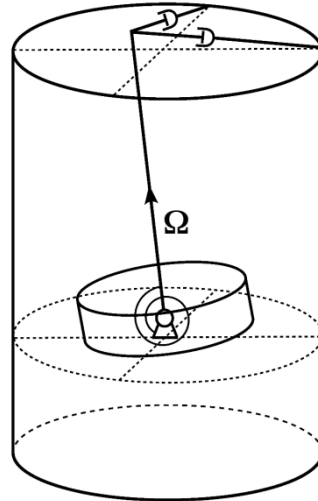


Рис. 4. Расчетная схема для приближенного описания поведения жидкости топливном баке РБ.

Тогда система уравнений, описывающих движение данной системы с учетом малости углов отклонения оси вращения маховика может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(I\omega) = -\omega \times I\omega - a\sigma - b\dot{\sigma} + \sum M_B^\omega + M_y \\ \frac{d}{dt}(J\Omega) = -\omega \times J\Omega + a\sigma + b\dot{\sigma} + \sum M_B^\Omega \\ \dot{\sigma} = \Omega - \omega \end{cases}$$

где ω – угловая скорость вращения «сухого» РБ; Ω – угловая скорость вращения маховика; I – тензор инерции «сухого» РБ; J – тензор инерции маховика; σ – вектор, составленный из углов отклонений оси маховика; a , b – матрицы коэффициентов, определяющих колебания жидкости в баке; $\sum M_B^\omega$ – сумма возмущающих моментов, действующих на разгонный блок; $\sum M_B^\Omega$ – сумма возмущающих моментов, действующих на маховик; M_y – момент, создаваемый системой управления.

При помощи данной модели проведен анализ применимости описанного управления для стабилизации жидконаполненного разгонного блока, описана методика управления при помощи системы газовых двигателей, проведено математическое моделирование.

Заключение

Для решения задачи стабилизации вращением связки КА и РБ с жидким наполнением была разработана математическая модель, описывающая поведение изделия. Разработан алгоритм управления, позволяющий осуществлять стабилизацию вращающегося тела, проведен анализ на устойчивость, представлена связь между устойчивостью и введенными коэффициентами. Описана возможность применения для системы управления, построенной на реактивных двигателях и проведено математическое моделирование процесса стабилизации.

Литература

1. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов // Теория систем автоматического управления. Изд-во «Профессия», 2004.
2. Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь // Управление ориентацией космических аппаратов. М., Наука, 1974.
3. В.В. Белецкий // Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
4. Ф.Р. Гантмахер // Теория матриц. М., Наука, 1966.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-ЛУНА ДЛЯ РАЗВЕРТЫВАНИЯ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ

Дворник Е.С., Иванова М.В., Притыкин Д.А.

Московский физико-технический институт, Москва
pritykin.da@mipt.ru

Аннотация. Рассматривается задача о развёртывании спутниковой системы навигации в окололунном пространстве. Спутники группировки предполагается разместить на орбитах близких к предполагаемой орбите лунной орбитальной станции, то есть непосредственно на почти прямолинейной гало-орбите L2 (9:2) или ряде других близких к ней периодических орбит. Количество аппаратов и их орбитальное построение выбирается из тех соображений, чтобы обеспечить непрерывную видимость не менее четырёх КА из районов южного полюса Луны. Оценивается точность предполагаемых навигационных решений для приёмников на поверхности Луны. Оценивается бюджет характеристической скорости на поддержание спутниками своих орбит, изучается возможность перелёта спутников к лунной орбитальной станции для дозаправки.

Введение

Космическая программа «Артемиды», реализуемая в настоящее время, предполагает создание обитаемой лунной орбитальной станции для исследования Луны и дальнего космоса. В рамках изучения Луны в районе её южного полюса планируется спуск на поверхность роботов, а в перспективе и создание обитаемой базы. Эти планы предварялись и в настоящий момент сопровождаются исследованиями окололунного пространства с целью выбора орбит, отвечающих целям, сформулированным в космической программе. Так, обеспечение долгосрочного существования обитаемой орбитальной станции требует выбора устойчивой орбиты с низким переселением, требующей минимального расхода топлива на поддержание и находящейся в прямой видимости с Земли для непрерывной связи. Такими свойствами обладают орбиты семейства почти прямолинейных гало-орбит [1, 2] (near rectilinear halo-orbits, NRHO). Для обеспечения более благоприятных условий доставки спускаемых модулей с орбитальной станции в район южного полюса Луны наиболее вероятной орбитой для станции считается южная NRHO точки L2, находящаяся в резонансе 9:2, то есть совершающая девять витков (примерно 6,5 дней каждый) за два синодических периода Луны.

Ещё одно направление исследований – обеспечение инструментов навигации, как в окололунном пространстве, так и на поверхности Луны. Орбита лунной станции выбрана таким образом, что связь с Землёй, то есть с Сетью дальней космической связи (DSN), будет непрерывна, а значит, как показывают последние исследования [3] можно будет получать достаточно точные навигационные решения. Однако спутники на низких орбитах Луны, а также роверы на поверхности Луны не всегда будут в зоне видимости с Земли, а значит для таких случаев необходимы специальные решения. Одним из таких решений может стать развернутая в окололунном пространстве орбитальная группировка спутниковой навигации (аналог ГЛОНАСС/GPS). Например, для навигации на обратной стороне Луны в работе [4] рассматривается группировка, состоящая из четырёх кубсатов формата 3U, развернутая на одной из гало-орбит в окрестности точки L2. В работе [5] предлагаются алгоритмы автономного (независимого от связи с Землёй) определения орбит для группировки из трёх космических аппаратов с межспутниковой линией связи. Оценка навигационных решений в [4] даёт ошибку положения приёмника на поверхности Луны около 2,5 км, в то время как ошибка определения состояния КА в [5] оценивается в 1 м при ошибке по скорости несколько мм/с.

Первые выводы об обоснованности этих оценок можно будет делать на основании результатов миссии CAPSTONE [6], в рамках которой на перспективную орбиту лунной станции запущен кубсат формата 12U для проверки расчётов орбиты NRHO L2 9:2, стратегии её поддержания и возможностей связи.

В нашей работе предлагается развернуть группировку спутниковой навигации в окололунном пространстве, причём задействовать для этого орбиты, позволяющие осуществлять обслуживание и дозаправку спутников группировки на базе лунной орбитальной станции. Предполагается использовать кубсаты (предварительные расчёты показывают, что в зависимости от бюджета топлива это могут быть кубсаты формата 12U или 18U). В качестве орбит для рассматриваемой группировки предлагается использовать описанные в [7] периодические орбиты, семейство которых получается в результате бифуркации семейства почти прямолинейных гало-орбит. Касательная бифуркация приводит к удвоению периода по сравнению с порождающей гало-орбитой, в результате, получаются орбиты, состоящие из двух петель, охватывающих Луну (одна проходит со стороны Земли, другая – со стороны точки L2). За свою форму это семейство получило название орбиты-бабочки [7]. По свойствам орбиты-бабочки схожи с порождающими их почти прямолинейными гало-орбитами. Они тоже относительно устойчивы, и также имеют низкий переселений. Правильный выбор периода орбиты бабочки позволит осуществлять манёвр перехода с этой орбиты на NRHO так, чтобы сфазироваться с лунной орбитальной станцией (например, для дозаправки). В то же время размещение достаточного количества спутников на орбите-бабочке, позволит получить глобальное покрытие поверхности Луны. Впрочем, в этой работе наша цель – обеспечить постоянную видимость, как минимум четырёх аппаратов группировки из районов южного полюса Луны, то есть в месте предлагаемой высадки роботов.

Оценки точности навигационных решений делаются с учётом ошибок определения орбит спутников, входящих в группировку [3, 5], возможностей синхронизации часов [5] и с помощью уравнения псевдодальностей.

Используемые модели

В работе используются две модели. Модель ограниченной круговой задачи трёх тел применяется для поиска периодических орбит и начальных приближений для манёвра смены орбиты. Более сложная модель, включающая гравитацию Солнца и некоторых планет Солнечной системы, а также силу светового давления, применяется для уточнённого анализа динамики космического аппарата и манёвров поддержания периодических и переходных орбит.

Модель ограниченной круговой задачи трёх тел предполагает движение двух массивных тел – Земли и Луны – по круговым орбитам вокруг их общего центра масс. Масса третьего тела – космического аппарата – считается пренебрежимо малой и не оказывающей влияния на орбиты Земли и Луны. Пусть масса Земли – m_1 , а масса Луны – m_2 . Уравнения движения тела с малой массой во вращающейся системе координат (первая ось проходит через два основных тела, вторая в плоскости их орбиты, третья – вдоль угловой скорости вращения системы m_1 - m_2) имеют вид:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \quad \dot{y} + 2\dot{x} = U_y, \quad \ddot{z} = U_z,$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$
$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad \mu = m_2 / (m_1 + m_2).$$

Известно [1, 2], что эти уравнения допускают пять стационарных решений, называемых точками либрации. В окрестности этих точек существуют семейства устойчивых и неустойчивых периодических орбит, некоторые из которых – гало-орбиты и орбиты бабочки – рассмотрены в этой работе.

Уточнённая модель уравнений движения, используемая в работе, основана на эфемеридах NAIF. Интегрирование осуществляется в инерциальной системе координат J2000 с началом в центре Луны. Учитываются силы притяжения Земли и Солнца (оба тела моделируются точечными массами). Поскольку рассматриваемые орбиты лежат в окололунном пространстве, используется уточнённая модель гравитации Луны (GRAI L до 8го порядка). В модель также включена сила светового давления со стороны Солнца (спутники считаются сферами с постоянным сечением). Затраты топлива на поддержание орбит вычислены как среднее по 100 реализациям с учётом случайных навигационных ошибок. Выбор орбиты и манёвры перехода с орбиты-бабочки на орбиту орбитальной станции осуществляются как в работе [8].

Заключение

Рассматривается задача о развёртывании спутниковой системы навигации в окололунном пространстве на периодических орбитах-бабочках, позволяющих осуществлять глобальное покрытие поверхности Луны и предоставлять навигационные решения роботам, находящимся на поверхности Луны. Численность спутников в группировке оптимизирована под покрытие районов южного полюса (из условий непрерывной радиовидимости как минимум четырёх аппаратов, что позволяет получать навигационные решения из уравнения псевдодальностей). Численные эксперименты позволяют определить наиболее благоприятную орбиту с точки зрения затрат характеристической скорости на поддержание и возможные перелёты к лунной орбитальной станции для дозаправки и обслуживания.

Литература

1. М. Л. Лидов Об одном семействе пространственных периодических орбит около Луны и планет, Докл. АН СССР, 233:6 (1977), 1068–1071
2. Breakwell, J. and Brown, J. The “Halo” Family of 3-Dimensional Periodic Orbits in the EarthMoon Restricted 3-body Problem, Celestial Mechanics, 1979, Vol. 20, No. 4, pp. 389–404.
3. Spencer Boone, Oliver Boodram and Jay McMahon Efficient Nonlinear Filtering Methods for Near Rectilinear Halo Orbit Navigation // AAS Guidance, Navigation and Control Conference At: Breckenridge, CO, Feb. 2023
4. Hongru Chen, Jiangkai Liu, Long Long, et al, Lunar far side positioning enabled by a CubeSat system deployed in an Earth-Moon halo orbit, Advances in Space Research, Volume 64, Issue 1, 2019, Pages 28–41,
5. Sirbu, G.; Leonardi, M. Fully Autonomous Orbit Determination and Synchronization for Satellite Navigation and Communication Systems in Halo Orbits. Remote Sens. 2023, 15, 1173
6. NASA. NASA Lunar Gateway; NASA: Washington, DC, USA 2022
7. R. J. Whitley, D. C. Davis, L. M. Burke, B. P. McCarthy, R. J. Power, M. L. McGuire, and K. C. Howell, Earth-Moon Near Rectilinear Halo and Butterfly Orbits for Lunar Surface Exploration, AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Snowbird, Utah, Aug. 2018
8. Giordana Bucchioni, Stephanie Lizy-Destrez, Thomas Vaujour, Valentin Thoraval, Léa Rouverand, Catarina Silva, Phasing with near rectilinear Halo orbits: Design and comparison, Advances in Space Research, Volume 71, Issue 5, 2023, Pages 2449-2466,

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ НА ОРБИТЕ

Дьяков П.А.¹, Малашин А.А.^{1,2}

1 - МГУ им. М.В. Ломоносова

2 - МГТУ им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал

dyakov_pavel@bk.ru

Аннотация. Рассмотрена актуальная проблема применимости тросовых систем для перемещения полезной нагрузки между орбитами. Авторами предлагается модель тросовой системы, в которой учитывается как динамика троса (которая моделируется методами механики деформируемого твердого тела), так и динамика подвижных частей системы. В рамках данной модели были получены оценки на основные параметры (длины тросов, величина масс частей системы), при которых процесс перемещения нагрузки по тросу является асимптотически устойчивым с учетом внешних возмущений, вызванных сложным совместным движением частей системы и продольно – поперечными колебаниями троса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 23-21-00230.

Введение

В настоящее время широко рассматриваются вопросы применения тросовых систем для различных орбитальных миссий [1, 2]. Это связано, в первую очередь, с возможностью перемещения полезной нагрузки между орбитами без существенных энергетических и топливных затрат. В качестве нагрузки, также может выступать пойманные на операционной орбите частицы космического мусора, которые необходимо переместить на менее актуальную орбиту, или орбиту захоронения.

Применение таких массивных и сложных с технической точки зрения объектов как протяженные тросовые системы в условиях орбиты ставит широкий круг вопросов, требующих подробного теоретического и инженерного исследования. Это и создание новых материалов (для увеличения прочности и уменьшения массы троса), и орбитальная механика (движение присоединенных масс в системе) и механика деформируемого твердого тела (устойчивое движение троса на всех этапах функционирования системы).

Основной текст

В работе рассматривается космическая тросовая система, состоящая из массивного головного космического аппарата (орбитальная станция, спутник-ловушка частиц мусора и т.д.), малого космического аппарата (оконечная масса), кевларового троса между ними, и полезной нагрузки, которая может перемещаться по тросу между двумя аппаратами.

Сложное совместное движение частей системы в поле внешних сил на орбите (считаем, что на аппараты и трос действуют сила Кориолиса, сила гравитационного взаимодействия с Землей, центробежная сила инерции) приводят к возникновению в тросе продольно-поперечных колебаний, которые, в свою очередь, могут стать причиной операционного отказа в процессе перемещения нагрузки (повышенные амплитуды поперечных колебаний троса, скачки натяжения, падение натяжения до нуля). В связи с этим, необходимы оценки на основные параметры системы, при которых процесс перемещения нагрузки в поле внешних сил будет устойчивым.

Общая постановка задачи аналогична рассматриваемой в [3]. Отличительной чертой данной модели является учет продольно поперечных колебаний троса в общей динамике системы. Трос моделируется с помощью нелинейных уравнений в частных производных как гибкая упругая растяжимая нить в поле внешних сил. Подобный подход позволяет учитывать волновые и колебательные процессы в тросе при сложном совместном движении частей системы и эффекты, связанные с ними (например, эффект резонанса между продольными и поперечными колебаниями). Таким образом, в общей постановке рассматриваются неклассические задачи математической физики.

В рамках данной модели были получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости процесса размотки троса с оконечной массой вдоль заданной траектории [4]. С инженерной точки зрения, управление на данном этапе сводится к контролю скорости размотки и поперечном движении точки выхода троса с головного космического аппарата. При этом, сам процесс размотки показал сильную зависимость от выбора начальных условий размотки. Предложенные решения показали хорошее приближение траектории к расчетной при изменении скорости выпуска оконечной массы с головного спутника в начале размотки и устойчивую стабилизацию системы в развернутом состоянии (при постоянной длине троса). Полученные результаты верифицировались при помощи данных реальной орбитальной размотки, которая проводилась в рамках миссии YES-2 (2007).

Оценка на скорость перемещения нагрузки по тросу, которая является необходимым условием асимптотической устойчивости процесса перемещения получена авторами в [5]. При этом, полученное условие связывает динамику перемещаемого груза и динамику движущегося вследствие этого перемещения и действия

внешних сил троса. С практической точки зрения, полученное условие на скорость перемещения нагрузки по тросу можно описать достаточно простым выражением:

$$V < b,$$

V – скорость движения нагрузки по тросу; b – скорость поперечной волны в тросе.

В данной работе проведена аналитическая оценка длины троса и величину оконечной массы на основании оценки скорости движения нагрузки. Стоит отметить, что скорость поперечной волны не является константой, а зависит от локального натяжения в тросе. При получении критериев на массу и длину троса данный эффект учитывается.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрен аналитический поиск условий на основные параметры тросовой системы на орбите, при которых процессы размотки троса системы с оконечной массой и перемещения полезной нагрузки по тросу будут асимптотически устойчивыми. Рассматриваемая математическая модель тросовой системы включает в себя все ее подвижные части: трос, подвижная оконечная масса, перемещаемый груз. Отличительной чертой подобного подхода является моделирование динамики троса методами механики деформируемого твердого тела. Полученные результаты могут лечь в основу расчетов параметров тросовых систем, применимых в реальных орбитальных миссиях для решения широкого круга задач.

Литература

1. Vladimir Aslanov, Alexander Ledkov. Dynamics of Tethered Satellite Systems. Elsevier, 2012, 356 p. ISBN: 988-0-85709-156-7.
2. Aslanov V. S. Prospects of a tether system deployed at the L1 libration point //Nonlinear Dynamics 106(3), 2021. Pp 1-13. DOI: 10.1007/s11071-021-06884-4.
3. N.N.Smironov, Yu.A.Demyanov, A.V. Zvuaguin, A.A. Malashin, A.A. Luzhin. Dynamical simulation of tether in orbit deployment//ActaAstronautica, 2010. Vol. 67. Pp. 324-332. DOI: 10.1016/j.actaastro.2010.02.020.
4. A.A. Malashin, N.N. Smironov, Bryukvina O. Yu, P.A. Diakov. Dynamic control of the space tethered system //Journal of sound and vibration, 2017. Vol 389. Pp 41-51. DOI: jsv.2016.11.026;
5. P.A. Diakov, A.A. Malashin, N.N. Smironov. Estimation of parameters of the space tethered system for stable load transportation along the tether//Acta Astronautica, 2020. Vol 181. Pp 5-12. DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.12.006

УРАВНЕНИЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ БАЗИС-ВЕКТОРА ЛОУДЕНА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ МАНЕВРОВ КА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА Л.С. ПОНТРЯГИНА

Заборский С.А.

ПАО «РКК «Энергия» им. С.П.Королева», г. Королев Московской области
sergey.zaborsky@rsce.ru

Аннотация. Базис-векторы Лоудена удовлетворяют необходимым условиям оптимальности Л.С. Понтрягина при оптимизации межорбитальных маневров КА в центральном гравитационном поле. В аналитических выражениях базис-вектора на пассивных участках траектории используются параметры Лоудена. Предлагается система дифференциальных уравнений оскулирующих параметров базис-вектора Лоудена. Эта система уравнений может служить альтернативой системе уравнений ψ -функций Л.С. Понтрягина (аналогично система уравнений движения в оскулирующих элементах является альтернативой уравнениям в прямоугольных координатах), либо давать возможность получать нулевое приближение этих функций при решении краевой задачи оптимизации.

Введение

Необходимые условия оптимальности на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] (ПМП) позволяют свести задачу оптимизации к краевой задаче. Одним из методов исследования оптимальных маневров КА, связанным с принципом максимума, является теория базис-векторов Лоудена [2], удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Аналитические выражения базис-вектора для компланарных маневров на пассивном участке траектории при движении в центральном гравитационном поле включают два параметра. Методов определения этих параметров, кроме частных случаев при импульсном приложении силы тяги двигателя, не разработано. В работе Горнера [3] приводится оптимальное решение для одного из таких случаев постановки задачи. В работе автора [4] получено решение для параметров Лоудена задачи Горнера. В настоящей работе для получения начального приближения начальных условий интегрирования системы сопряженных переменных при решении задачи оптимизации космических маневров, сведенной на основе ПМП к краевой задаче, предлагается система дифференциальных уравнений оскулирующих параметров Лоудена. Эти уравнения дают возможность получать начальные приближения и решения для сопряженных переменных при оптимизации на основе ПМП космических маневров при протяженной во времени силе тяги двигателей, в том числе с двигателями малой тяги.

Постановка задачи

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение КА в центральном гравитационном поле, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_r \\ \frac{dv_r}{dt} = \left(v_\theta^2 - \frac{\gamma}{r} \right) \frac{1}{r} + \frac{d\Delta v}{dt} \sin \varphi \\ \frac{dv_\theta}{dt} = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{d\Delta v}{dt} \cos \varphi \\ \frac{d\Delta v}{dt} = \frac{m_s I_{sp}}{m_0} \exp\left(\frac{\Delta v}{I_{sp}}\right) \end{cases} \quad (1)$$

где Δv - приращение кажущейся скорости от действия силы тяги двигателя, I_{sp} - удельный импульс силы тяги двигателя, m_0 - начальная масса КА, φ - угол наклона вектора силы тяги двигателя к местному горизонту, m_s - массовый секундный расход топлива, который может принимать максимальное значение $m_{s \max}$ при работающей двигательной установке и 0 при ее выключении, $r = l/(1 + e \cos f)$ - радиус, $v_\theta = \sqrt{\gamma/l}(1 + e \cos f)$ - трансверсальная составляющая скорости, $v_r = \sqrt{\gamma/l} e \sin f$ - радиальная составляющая скорости, e - эксцентриситет, l - фокальный параметр, f - истинная аномалия.

Начальные условия движения в начальный момент времени t_0 (фиксированная точка на начальной орбите):

$$\Delta v_0 = 0 \quad v_r = v_{0r} \quad v_\theta = v_{0\theta} \quad r = r_0 \quad (2)$$

Краевые условия (фиксированная точка на конечной орбите):

$$v_r = v_{3r} \quad v_\theta = v_{3\theta} \quad r = r_3 \quad (3)$$

Задача оптимизации состоит в следующем: при заданных начальных условиях (2) перевести систему (1), пользуясь управляющими функциями $m_s(t)$, $\varphi(t)$, в состояние (3) таким образом, чтобы было выполнено условие минимизации суммарной кажущейся скорости:

$$\Delta v_\Sigma^{opt} = \min_{m_s, \varphi} \Delta v \quad (4)$$

Необходимо отметить, что на время перелета t_3 и угловую дальность перелета θ ограничений не накладывается. Использование ПМП позволяет привести поставленную задачу оптимизации к краевой задаче. При этом функции управления m_s и φ определяются из выражений, зависящих от вектора сопряженных переменных $\psi = (\psi_{v_r}, \psi_{v_\theta}, \psi_{\Delta v})^T$:

$$m_s = \begin{cases} m_{s \max}, \kappa \geq 0 \\ 0, \kappa < 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\psi_{v_r}^2 + \psi_{v_\theta}^2}} \begin{bmatrix} \psi_{v_r} \\ \psi_{v_\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

где $\kappa = \psi_{\Delta v} + \sqrt{\psi_{v_r}^2 + \psi_{v_\theta}^2}$ - функция переключения.

Составляющие вектора ψ определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{v_r}}{dt} = \frac{1}{v_r} \left(\psi_{v_r} \left(v_\theta^2 - \frac{\gamma}{r} \right) \frac{1}{r} + \frac{d\Delta v}{dt} \kappa \right) \\ \frac{d\psi_{v_\theta}}{dt} = \left(-2\psi_{v_r} v_\theta + \psi_{v_\theta} v_r \right) \frac{1}{r} \\ \frac{d\psi_{\Delta v}}{dt} = -\frac{m_s}{m_0} \exp\left(\frac{\Delta v}{I_{sp}}\right) \kappa \end{cases} \quad (6)$$

Краевая задача ПМП формулируется следующим образом: найти такой вектор сопряженных переменных $\psi_0 = (\psi_{v_r}(t_0), \psi_{v_\theta}(t_0), \psi_{\Delta v}(t_0))^T$ в момент начала движения, чтобы в результате интегрирования системы уравнений (1) выполнялись краевые условия (3).

При мгновенном приложении импульса кажущейся скорости Δv , т.е. при бесконечной величине силы тяги двигателя $I_{sp} m_s = \infty$, поставленная задача решена Горнером [3] путем оптимизации двухимпульсного маневра.

Уравнения оскулирующих параметров Лоудена

При $m_s = 0$, т.е. при пассивном полете от момента времени t_1 до t_2 , уравнения для ψ_{v_r} и ψ_{v_θ} системы (6) имеют решение, полученное Лоуденом (при этом вектор p назван базис-вектором):

$$p = \begin{bmatrix} \psi_{v_r} \\ \psi_{v_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{l/\gamma} B v_r \\ B l/r + D r/l \end{bmatrix} \quad (7)$$

Выразим B и D из (7) (при этом $l = v_\theta^2 r / \gamma$):

$$\begin{cases} B = \gamma \psi_{v_r} / (v_r v_\theta r) \\ D = (v_r \psi_{v_\theta} - v_\theta \psi_{v_r}) v_\theta^2 r / (\gamma v_r) \end{cases} \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по времени с использованием уравнений (1) и (6) и равенствами (7), получим систему уравнений оскулирующих параметров B и D , которую совместно с третьим уравнением из (6) можно использовать вместо системы уравнений (6)

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = \frac{d\Delta v}{dt} \sqrt{\frac{l}{\gamma}} \left(\frac{\kappa}{v_r^2} \frac{\gamma}{l} - B \left(2B + D \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right) \frac{1}{\sqrt{\psi_{v_r}^2 + \psi_{v_\theta}^2}} \right) \\ \frac{dD}{dt} = -\frac{d\Delta v}{dt} \sqrt{\frac{l}{\gamma}} \left(\frac{\kappa}{v_r^2} \frac{\gamma}{l} \left(\frac{l}{r} \right)^2 - D \left(B + 2D \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right) \frac{1}{\sqrt{\psi_{v_r}^2 + \psi_{v_\theta}^2}} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, постоянные на пассивном участке траектории параметры Лоудена B и D под действием силы тяги двигателя начинают оскулировать и совместно с (5) и (7) определяют оптимальное управление движением КА. Система уравнений (9) и уравнение для $\psi_{\Delta v}$ из (6) могут служить альтернативой

системе уравнений сопряженных переменных (6) аналогично системе уравнений движения в оскулирующих элементах [5], которая является альтернативой уравнениям движения в прямоугольных координатах.

Начальные условия для решения уравнений оскулирующих параметров Лоудена

Предположим, что происходит мгновенное приложение импульса кажущейся скорости Δv (при этом $I_{sp} m_s = \infty$). Тогда из условий непрерывности базис-вектора и радиусов в точках приложения импульсов [2] $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2$, $r_1 = r_0$ и $r_2 = r_3$ (индексы 1 и 2 обозначают моменты окончания первого и начала второго импульса соответственно) следует, что в момент начала первого импульса параметры B_0 и D_0 , входящие в выражения для базис-вектора (7), будут иметь следующий вид

$$B_0 = B_1 v_{1r} / v_{0r} \sqrt{l_1 / l_0} \quad D_0 = (B_1 r_0 / l_1 + D_1 l_1 / r_0 - B_0 l_0 / r_0) l_0 / r_0 \quad (10)$$

Вычислить B_0 , D_0 позволит приведенное в [4] решение, полученное на основе результата Горнера [3], для входящих в выражения (10) параметров B_1 , D_1 базис-вектора, а также l_1 , и v_{1r} в момент окончания первого импульса. Необходимо отметить, что параметры B_1 и D_1 вычислены исходя из единичности базис-вектора $\sqrt{\psi_{0v_r}^2 + \psi_{0v_\theta}^2} = \sqrt{\psi_{1v_r}^2 + \psi_{1v_\theta}^2} = 1$ и из равенства $\psi_{1\Delta v} = -1$ при мгновенном приложении импульсов.

Начальное условие для $\psi_{0\Delta v}$ вычисляется из условия $\kappa(t_1) = 0$ при величине первого импульса Δv_1^{opt} из решения Горнера [3]

$$\psi_{0\Delta v} = \psi_{1\Delta v} - \frac{d\sqrt{\psi_{1v_r}^2 + \psi_{1v_\theta}^2}}{dt} \Delta t_1 \quad (11)$$

где $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = m_0 / m_s (1 - \exp(-\Delta v_1^{opt} / I_{sp}))$. Если сила тяги двигателя $I_{sp} m_s \rightarrow \infty$, то $\Delta t_1 \rightarrow 0$, $\psi_{0\Delta v} \rightarrow \psi_{1\Delta v} = -1$ и $\Delta v_1 \rightarrow \Delta v_1^{opt}$.

Интегрирование систем (1), (9) и уравнения $d\psi_{\Delta v} / dt$ с использованием равенств (7) производится с момента времени t_0 до момента времени $t_3 = \Delta t_1 + \Delta t_p + \Delta t_2$ с начальными условиями (10) и (11) При этом $\Delta t_2 = t_3 - t_2 = (m_0 / m_s - \Delta t_1) (1 - \exp(-\Delta v_2^{opt} / I_{sp}))$ - продолжительность второго участка работы двигателя, Δv_2^{opt} - величина второго импульса [3], $\Delta t_p = t_2 - t_1$ - продолжительность пассивного участка траектории, определяемая из условия $\sqrt{\psi_{2v_r}^2 + \psi_{2v_\theta}^2} = 1$. В результате интегрирования системы (1) получаются параметры \tilde{v}_{3r} , $\tilde{v}_{3\theta}$ и \tilde{r}_3 , которые уточняются в результате решения краевой задачи. Степень близости параметров \tilde{v}_{3r} , $\tilde{v}_{3\theta}$ и \tilde{r}_3 к заданным краевым условиям (3) определяется величиной силы тяги двигателя $I_{sp} m_s$, позволяющей краевой задаче сходиться. Величина силы тяги может быть достаточно большой. Поэтому далее необходимо решение ряда краевых задач с постепенным снижением силы тяги до требуемой величины.

Заключение

Таким образом, для получения начального приближения начальных условий интегрирования системы сопряженных переменных при решении задачи оптимизации космических маневров, сведенной на основе ПМП к краевой задаче, требуется интегрирование системы дифференциальных уравнений оскулирующих параметров Лоудена. Эти уравнения дают возможность получить оптимальные решения при протяженной во времени силе тяги двигателей, в том числе и малой. В докладе приведены результаты численных расчетов.

Литература

1. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.И., Понтрягин Л.С.// Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1960, т.24, вып. 1, 3-42
2. Lawden, D. F.// *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworths, London, 1963, Chaps. 3, 5
3. Horner, J. M.// "Optimum Two-Impulse Transfer between Arbitrary Coplanar Terminals," *ARS Journal*, Vol. 32, No. 1, Jan. 1962, pp. 95-96
4. Zaborsky, S.// "Analytical Solution of Two-Impulse Transfer between Coplanar Elliptical Orbits, " *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No 3, May-June 2014, pp. 996-1000
5. П.Е.Эльясберг// Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. 1970. 540 с.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА К ВЕНЕРЕ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПОСАДКИ В ЖЕЛАЕМОМ РЕГИОНЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТЫ

Зубко В.А., Эйсмонт Н.А., Федяев К.С., Беляев А.А.

Институт космических исследований РАН
v.zubko@iki.rssi.ru

Аннотация. Рассмотрена задача построения траектории перелета космического аппарата к Венере в рамках миссии, предусматривающей посадку посадочного аппарата в заданном регионе поверхности планеты. Предлагается подход, основанный на применении гравитационного маневра у Венеры для перевода космического аппарата на гелиоцентрическую орбиту, резонансную с орбитой Венеры таким образом, чтобы при следующем сближении с планетой обеспечить его посадку в заданном регионе поверхности. Показано, что наилучшим с точки зрения затрат характеристической скорости является выбор резонансной орбиты с соотношением периода к орбитальному периоду Венеры 1:1. Описывается процедура выбора одной из возможных резонансных орбит в зависимости от координат на поверхности требуемой точки посадки и даты старта миссии. Приводится пример расчета гелиоцентрической траектории КА с последующей посадкой в заданный район поверхности Венеры.

Введение

В настоящее время в России разрабатывается несколько проектов по исследованию в дальнем космосе: «ЭкзоМарс», «Луна-25», «Венера-Д» и прочие. Последний проект нацелен на изучение поверхности и атмосферы Венеры при помощи спускаемого аппарата и орбитального модуля. Предполагается, что данная миссия к Венере будет осуществляться в несколько этапов, запуск которых планируется в период окон старта в 2029–2034 гг. Старт первого этапа намечен на осень 2029 года, и этот этап в основном должен повторить исследовательскую миссию аппаратов «Вега-1» и «Вега-2». Последующие этапы будут стартовать позднее, их основной научной целью является получение и доставка на Землю образцов венерианского грунта.

Одним из важных вопросов разработки проекта «Венера-Д» является вопрос выбора места посадки спускаемого аппарата. С одной стороны, рельеф места посадки должен удовлетворять необходимым требованиям. С другой стороны, это место должно быть достижимо для спускаемого аппарата, т.е. необходимо рассчитать траекторию аппарата таким образом, чтобы обеспечить спуск в заданный район венерианской поверхности. Расчет такой траектории ограничивается как особенностями собственного вращения Венеры, так и возможными окнами запуска аппарата с Земли, определяемыми из условия минимума необходимых затрат характеристической скорости. Также при построении траектории спускаемого аппарата необходимо учитывать особенности движения орбитального модуля и необходимость обеспечения его взаимной радиовидимости со спускаемым аппаратом. С учетом всех перечисленных условий возможность выбора допустимых областей посадки спускаемого аппарата может быть весьма ограниченной.

Основная часть

В данной работе предлагается методика построения траекторий полета космического аппарата к Венере, которая обеспечит посадку аппарата в любой заданный район на поверхности планеты. В основу методики заложен принцип использования гравитационного маневра, а также резонансных орбит. Гравитационный маневр выполняется космическим аппаратом при первом сближении с Венерой и служит для его перехода на нужную резонансную орбиту (рис. 1). Посадка КА в нужный район поверхности планеты обеспечивается выбором резонансной орбиты, позволяющей совершить посадку в заданной точке после одного витка полета КА по резонансной орбите. Приводится пример расчета траектории перелета, обеспечивающей посадку в регионе Велламо-Юг при старте с Земли в 2031 году с использованием предлагаемого подхода, проводится анализ его эффективности в сравнении с другими подходами, традиционно применяемыми для обеспечения посадки в заданный регион поверхности.

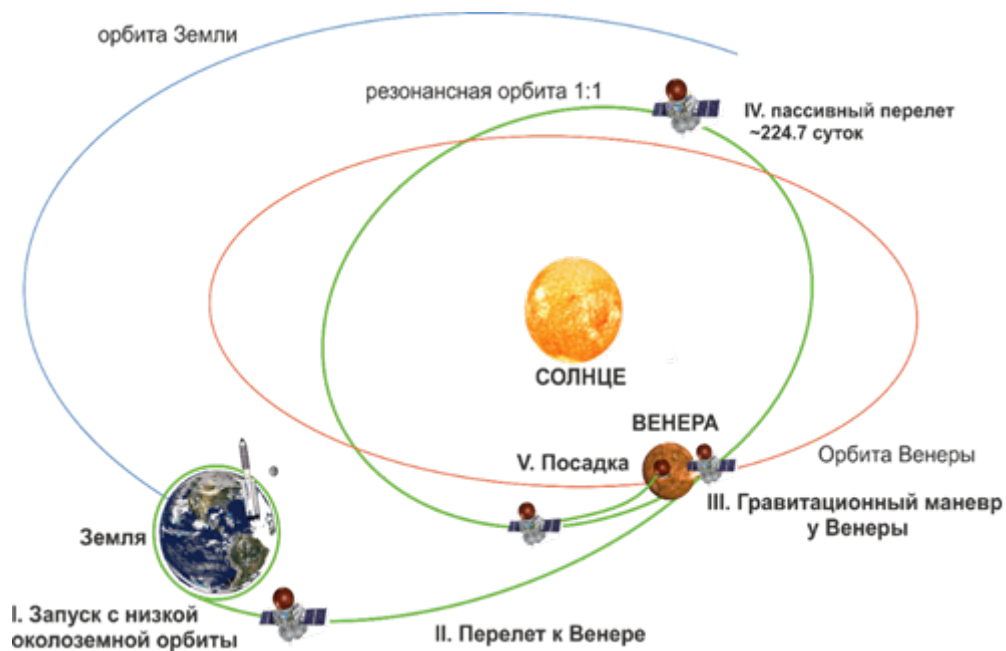


Рис. 1. Схема полета КА к Венере с гравитационным маневром.

Заключение

Результаты исследования показывают, что предлагаемая стратегия позволяет существенно расширить достижимые для посадки области поверхности Венеры и, более того, обеспечить посадку в любую точку поверхности при небольшом увеличении стартового импульса и продолжительности полета. Результаты моделирования при использовании предлагаемого метода приводятся на рис. 2. На этом рисунке явно видны преимущества, обеспечиваемые гравитационным маневром у Венеры, по сравнению с традиционно используемым подходом. Следует также отметить, что такое расширение достижимых областей посадки связано с увеличением общей сложности миссии и увеличением времени перелета аппарата. Но это может быть единственным способом обеспечить посадку в ранее недоступные области, поэтому важность предлагаемого подхода представляется несомненной.

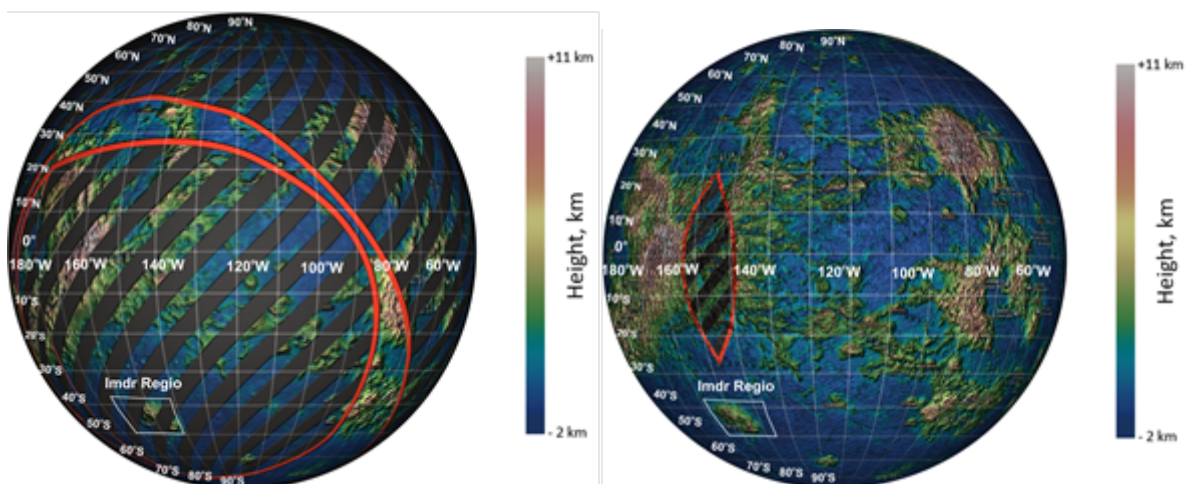


Рис. 2. Сравнение недоступных районов посадки при запуске в 2029 году (темные линии внутри красных кривых) для двух подходов: прямой перелет (левое изображение) и перелет с помощью гравитационного маневра у Венеры (правое изображение).

ДУХИМПУЛЬСНЫЙ МЕЖОРБИТАЛЬНЫЙ ПЕРЕЛЁТ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМБЕРТА С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ВРЕМЕНИ ПЕРЕЛЁТА

Иванюхин А.В.^{1,2}, Кравченко В.С.^{1,2}

1 - Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва

2 - Российский университет дружбы народов, Москва
einboesesgenie@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается алгоритм определения двухимпульсного перелёта между произвольными орбитами основанный на модификации задачи Ламберта с добавлением оптимизации времени перелёта для уменьшения суммарного импульса скорости. Для полученного алгоритма проводится сравнение вычислительной сложности с решением подобной задачи на основе многократного решения задачи Ламберта. Рассматриваются примеры решения задачи перелёта между некомпланарными эллиптическими орбитами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00329, <https://rscf.ru/project/22-19-00329/>.

Введение

Задача Ламберта является классической проблемой небесной механики, сформулированной в работах Ламберта и Эйлера для определения орбит небесных тел. В практической космонавтике эта задача приобрела новое значение и часто является основой для проектирования перелётов космических аппаратов (КА) различных типов. В этом случае предполагается, что орбита, соединяющая два заданных положения, является траекторией перелёта, затраты на который определяются суммой двух импульсов скорости. Первый импульс равен разнице между скоростью на начальной орбите и полученной в результате решения задачи Ламберта, а второй аналогично с конечной орбитой. Так, с помощью решения задачи Ламберта проводится оптимизация импульсных межорбитальных перелётов, определяются гиперболические избытки скорости и окна старта межпланетных миссий и многое другое.

Задача Ламберта с оптимизацией времени перелёта

Традиционная задача Ламберта формулируется как двухточечная краевая задача в рамках модели двух тел, в которой известны векторы положения в два разных момента времени [1, 2, 3]. Так как задача двух тел допускает аналитическое решение краевая задача сводится к одному нелинейному уравнению, связывающему время перелёта и параметры орбиты. Это уравнение следует из уравнения Кеплера, и может быть представлено в различной форме: через орбитальные элементы [1, 2], регулярные переменные (например, KS-переменные) или в обобщённом виде через функции Штумпфа [3]. Существует большое количество методов решения задачи Ламберта, отличающихся формой записи уравнения, численным методом его решения и правилом выбора начального приближения [4, 5].

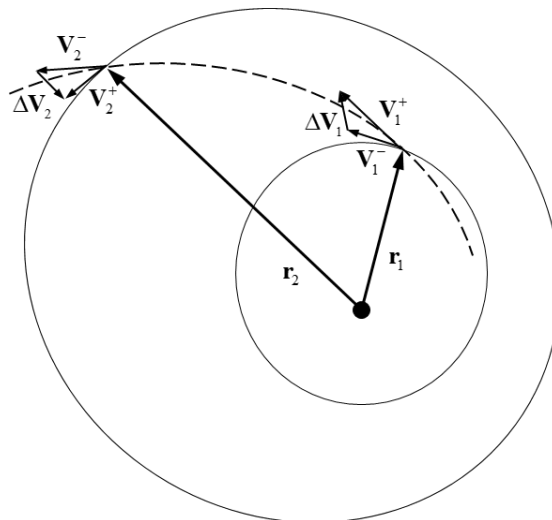


Рис. 1. Импульсный перелёт.

Уравнение, необходимое для решения задачи Ламберта, можно представить в общем случае следующим образом

$$\Delta t = F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x), \quad (1)$$

где Δt – время перелёта, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – начальное и конечное положение, x – неизвестный параметр орбиты перелёта.

После решения уравнения (1) и определения x решение выражается с помощью коэффициентов Лагранжа $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)$, $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)$, $\dot{f}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)$, $\dot{g}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)$, как функций параметра x , начального и конечного положения:

$$\mathbf{r}_2 = f\dot{\mathbf{r}}_1 + g\mathbf{v}_1^+, \quad \mathbf{v}_2^- = \dot{f}\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{g}\mathbf{v}_1^+, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_1^+, \mathbf{v}_2^-$ – начальная и конечная скорость на траектории перелёта.

При использовании задачи Ламберта для определения двухимпульсного межорбитального перелёта предполагается, что начальное и конечное положение принадлежат некоторым орбитам и соответственно в начальный и конечный момент времени известны скорости движения \mathbf{v}_1^- и \mathbf{v}_2^+ . Тогда импульсы для совершения манёвра определяются разностью

$$\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-, \quad \Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_2^-, \quad (3)$$

Типичное время решение задачи Ламберта очень мало. Однако, в задачах оптимизации траекторий перелётов КА, построенных на её основе, приходится подбирать все необходимые для решения исходные данные – начальное и конечное положение, время перелёта. Обычно это происходит путём надстройки над задачей Ламберта численного метода оптимизации, например, градиентного типа [6]. Это уже значительно повышает вычислительную сложность.

Целесообразно рассмотреть постановку аналогичную задаче Ламберта, но предусматривающую оптимизацию параметра орбиты перелёта x перелёта исходя из минимума суммарного импульса скорости. Сформулируем соответствующую задачу на условный экстремум в достаточно общем виде:

$$J = \Delta \mathbf{v}_1^T \Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2^T \Delta \mathbf{v}_2 \rightarrow \min,$$

$$\Phi_r = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)\mathbf{r}_1 + g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)(\mathbf{v}_1^- + \Delta \mathbf{v}_1) - \mathbf{r}_2 = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_v = \dot{f}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)\mathbf{r}_1 + \dot{g}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, x)(\mathbf{v}_1^- + \Delta \mathbf{v}_1) - \mathbf{v}_2^+ + \Delta \mathbf{v}_2 = 0,$$

где J – минимизируемая функция, Φ_r, Φ_v – ограничение на конечное положение и скорость соответственно.

Функция Лагранжа для этой задачи примет вид

$$L = J + \lambda_r^T \Phi_r + \lambda_v^T \Phi_v, \quad (5)$$

где λ_r^T, λ_v^T – множители Лагранжа.

При оптимизации времени перелёта с практической точки зрения представляются интересными два варианта постановки: оптимальное время перелёта с фиксированными начальным и конечным положением и оптимальное время перелёта с произвольными (подвижными) начальным и конечным положением, принадлежащим заданным орбитам.

В первом случае необходимые условия экстремума, после исключения из них неизвестных множителей Лагранжа, примут вид:

$$\left[\frac{df}{dx} \mathbf{r}_1 + \frac{dg}{dx} (\mathbf{v}_1^- + \Delta \mathbf{v}_1) \right]^T \left[\dot{g} \Delta \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_1 \right] \frac{1}{g(x)} - \left[\frac{d\dot{f}}{dx} \mathbf{r}_1 + \frac{d\dot{g}}{dx} (\mathbf{v}_1^- + \Delta \mathbf{v}_1) \right]^T \Delta \mathbf{v}_2 = 0, \quad (6)$$

$$\Delta \mathbf{v}_1^- = \frac{\mathbf{r}_2 - f\dot{\mathbf{r}}_1}{g} - \mathbf{v}_1^-, \quad \Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^+ - \frac{\dot{g}\mathbf{r}_2 - \dot{f}\mathbf{r}_1}{g}.$$

Во втором случае наиболее важным является случай независимого изменения начального и конечного положения, и соответственно скорости, которые зависят от положения на соответствующей орбите, например, от истинной аномалии $\mathbf{r}_1(\nu_1), \mathbf{v}_1^-(\nu_1), \mathbf{r}_2(\nu_2), \mathbf{v}_2^+(\nu_2)$. С учетом этой зависимости и необходимости оптимизировать ν_1, ν_2 , условия (6) должны быть дополнены соотношениями:

$$\frac{d\Phi_r}{d\nu_1} \left[\dot{g} \Delta \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_1 \right] \frac{1}{g} - \frac{d\Phi_v}{d\nu_1} \Delta \mathbf{v}_2 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d\Phi_r}{d\nu_2} \left[\dot{g} \Delta \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_1 \right] \frac{1}{g} - \frac{d\Phi_v}{d\nu_2} \Delta \mathbf{v}_2 = 0.$$

Во всех рассмотренных случаях условие (1) не участвует, так как время перелёта может быть найдено после решения системы (6) или (6)–(7), отдельно по известному x с помощью (1).

Очевидно, что система уравнений (6) сводится к одному уравнению относительно x , а система (6)–(7) к трём, относительно x, ν_1, ν_2 . Основная вычислительная сложность при их решении связана с вычислениями участвующих в них производных, форма которых зависит от формы представления уравнения (1) и метода

решения задачи Ламберта. В данной работе алгоритмы для решения систем (6) и (6)-(7) разрабатывались на основе методов решения задачи Ламберта с итерациями по большой полуоси и уравнением (1) в форме Лагранжа [7]. Вычисление производных проходило аналитически и с помощью метода комплексного шага.

Заключение

В работе представлен алгоритм решения задачи оптимального двухимпульсного перелёта между орбитами за оптимальное время, построенный аналогично алгоритмам решения задачи Ламберта. Предложенная методика базируется на формулировке соответствующей задачи на условный экстремум и позволяет включить оптимизацию времени в общий алгоритм решения. Для полученного алгоритма проводится сравнение вычислительной сложности с решением подобной задачи на основе многократного решения задачи Ламберта. Рассматриваются примеры решения задачи перелёта между некомпланарными эллиптическими орбитами.

Литература

1. М.Ф. Субботин // Введение в теоретическую астрономию. 1968. 800 с.
2. П. Эскобал // Методы определения орбит: 1970. 471 с.
3. А.А. Суханов // Астродинамика. 2010. 201 с.
4. N. Arora, Russell R. P. A fast and robust multiple revolution Lambert algorithm using a cosine transformation // Paper AAS 13-728, 2013, С. 1-20.
5. D. Torre Sangra, E. Fantino. Review of Lambert's problem // ISSFD 2015: 25th International Symposium on Space Flight Dynamics, 2015, С. 1-15.
6. T. Chen, E. Van Kampen, H. Yu, Q.P. Chu. Optimization of time-open constrained Lambert rendezvous using interval analysis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013, Т. 36, № 1, С. 175-184.
7. J.E. Prussing, B.A. Conway // Orbital mechanics. 1993. 194 с.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ К ЛУНЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ НА ТРАЕКТОРИИ ВРЕМЕННОГО ЗАХВАТА

Иванюхин А.В.^{1,2}, Ивашкин В.В.^{1,3}, Петухов В.Г.¹, Юн Сон Ук⁴

1 - Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики

Московского авиационного института, Москва

2 - Российский университет дружбы народов, Москва

3 - Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

4 - Московский авиационный институт, Москва

ivanyukhin.a@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача расчета низкоэнергетического перелёта космического аппарата с малой тягой к Луне на орбиту временного захвата. Перелёт осуществляется с использованием транзитной траектории в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 или L_2 системы Земля-Луна. Предлагается метод определения подходящей транзитной траектории с последующей оптимизацией перелета к ней с начальной околоземной орбиты. Для решения задачи оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина в сочетании с методом продолжения по параметру.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>.

Введение

Луна является ближайшим и одним из самых притягательных объектов солнечной системы, однако, перелёты к ней энергозатратны. Одним из вариантов снизить затраты топлива является использование эффектов динамики трёх и четырёх тел при проектировании траектории перелёта, такие перелёты часто называются низкоэнергетическими.

Перспективным для проектирования низкоэнергетических перелётов механизмом являются траектории временного захвата, осуществляющие транзит КА от одного массивного тела к другому. Такие траектории при проектировании лунных миссий в рамках задачи трёх тел начали исследоваться ещё во второй половине прошлого века в работах В.А. Егорова [1], В.Г. Фесенкова, Девидсона и других авторов. Значительным шагом в проектировании траекторий временного захвата стало их рассмотрение в рамках четырёх тел, с учётом влияния Солнца, за счёт которого оказалось возможным реализовать перелёт по траектории с промежуточным оскулирующим апогеем сопоставимым с размерами грависферы Земли – WSB-траектории (Weak Stability Boundary), предложенные Белбруно [2] и исследованные В.В. Ивашкиным [3].

Следуя работам В.А. Егорова [1], Бельбруно [2] и В.В. Ивашкина [3] будем называть захватом пребывание в грависфере Луны КА, попавшего туда от Земли или из внешней части пространства, при отрицательных значениях константы энергии на траектории относительно Луны. Соответствующий период времени определяется следующим образом:

$$h(t) = v^2(t) - \frac{2\mu}{r(t)} \leq 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (1)$$

где h – константа энергии, r , v – положение и скорость относительно Луны, μ – гравитационная постоянная Луны, t_1 – момент гравитационного захвата, t_2 – момент гравитационного освобождения.

Ещё одним способом повышения эффективности лунных миссий является использование для их реализации электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) с высоким удельным импульсом тяги, что позволяет существенно сократить затраты топлива на перелет. Однако, перелёт с малой тягой трудно сочетать с WSB-траекторией в виду необходимости для её реализации достижения большого значения константы энергии (большой полуоси), а траектории перелёта с малой тягой характерны медленным изменением константы энергии, поэтому типичная траектория перелета между околоземной и окололунной орбитами входит в сферу Хилла Луны в окрестности точки либрации L_1 .

Основной проблемой проектирования низкоэнергетических траекторий на основе орбит временного захвата является получение этих орбит. В данной работе предлагается метод определения орбиты захвата на основе анализа транзитных орбит порожденных инвариантными многообразиями точек либрации L_1 и L_2 .

Ограниченная задача трёх тел

Для определения основных эффектов, влияющих на движение КА в системе Земля-Луна, рассмотрим математическую постановку ограниченной круговой задачи трёх тел (ОКЗТТ). Транзитные траектории в окрестности коллинеарных точек либрации можно получить, рассматривая решение линеаризованной в окрестности одной из этих точек системы уравнений ОКЗТТ. В этом случае решение имеет вид [6]:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{st} + \beta e^{-st} + A_x \cos(\omega_p t + \phi_p), \\ y(t) = k_1 \alpha e^{st} - k_1 \beta e^{-st} - k_2 A_x \sin(\omega_p t + \phi_p), \\ z(t) = A_z \cos(\omega_v t + \phi_v), \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, A_x, A_z, \phi_p, \phi_v$ - константы интегрирования, зависящие от начальных условий, а коэффициенты k_1 и k_2 определяются следующим образом

$$k_1 = \frac{s^2 - 1 - 2c_2}{2s}, \quad k_2 = \frac{\omega_p^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_p}, \quad c_2 = \frac{1}{\gamma^3} \left(\mu + \frac{(1-\mu)\gamma^3}{(1 \pm \gamma)^3} \right) \quad \text{для } L_1 \text{ и } L_2, \quad (3)$$

$$x_{L1} = 1 - \mu - \gamma, \quad x_{L2} = 1 - \mu + \gamma,$$

x_{L1}, x_{L2} - координаты соответствующей точки либрации, s, ω_p, ω_v - определяются корнями характеристического уравнения линеаризованной системы

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}{2}} = \pm s, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{c_2 - 2 - \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}{2}} = \pm \omega_p i, \quad \lambda_{5,6} = \pm \sqrt{c_2} = \pm \omega_v i. \quad (4)$$

Исходя из вида решения линеаризованной системы в малой окрестности коллинеарных точек либрации транзитные траектории соответствуют случаю $\alpha\beta < 0$.

Поскольку орбита Луны является эллиптической, оскулирующая точка либрации обладает скоростью во вращающейся системе $(v_x^{Li}, v_y^{Li}, 0)$, но при движении Луны сохраняется геометрическая пропорция её положения. Следовательно, скорость оскулирующей точки либрации пропорциональна скорости Луны. Для определения скорости обеспечивающей транзит через точку либрации проанализируем соответствующие коэффициентам решения линеаризованной системы (2). Продифференцировав (2) и положив $t = 0$, исключим периодические слагаемые. В результате получим систему для определения констант α и β :

$$\begin{pmatrix} s & -s \\ k_1 s & k_1 s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^{Li} \\ v_y^{Li} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

График зависимости произведения $\alpha\beta$ от истинной аномалии Луны для точек L_1 и L_2 приведён на рис. 1. Как видно, транзит с пролётом точки либрации с околонулевой скоростью возможен только в окрестности 90° и 270° по истинной аномалии, что соответствует окрестности максимальных значений радиальной скорости в орбитальной системе координат. Очевидно, что при переходе от эллиптической задачи трёх тел к возмущённой модели четырёх тел произойдёт значительное возмущение полученных решений. Однако, и в эфемеридной задаче четырёх тел удаётся определить траекторию временного захвата с длительностью прибывания у Луны порядка 1000 суток в окрестности значений оскулирующей истинной аномалии $260^\circ - 280^\circ$. Одна из таких траекторий приведена на рис. 2.

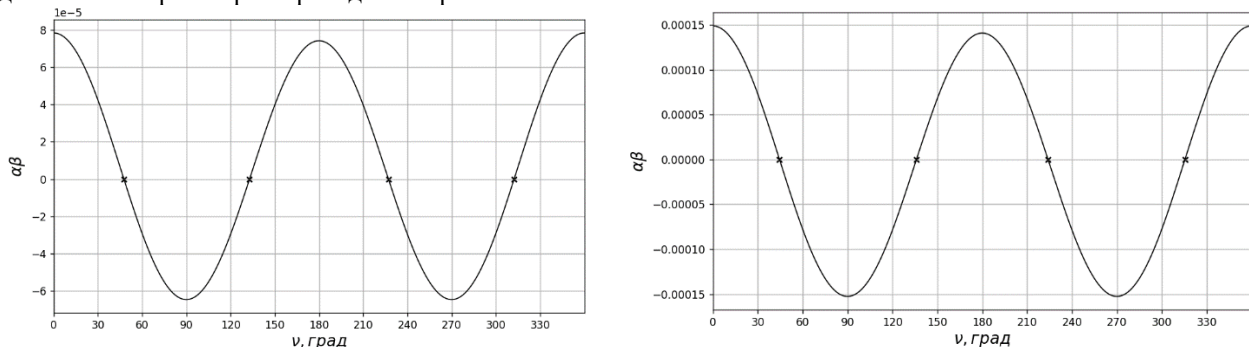


Рис. 1. Зависимость произведения $\alpha\beta$ для точек L_1 (слева) и L_2 (справа) от истинной аномалии Луны.

Задача оптимального управления

В качестве примера рассмотрим перелёт в системе Земля – Луна на транзитную траекторию в окрестности точки либрации L_1 порождённую её инвариантными многообразиями. При этом работа двигательной установки КА предполагается только на геоцентрическом участке. Для оптимизации траектории перелёта с малой тягой использовался подход на основе фиксированной угловой дальности и свободным временем перелёта [7]. Для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина использовалась методика автоматического дифференцирования на основе комплексно-дуальных чисел [8, 9] и последовательного решения ОМ-задачи, задачи с минимальной тягой T_{min} - задачи и задачи с ограниченной (заданной) тягой ОТ-задачи, аналогично [10, 11].

Для перелёта на транзитную траекторию временного захвата конечным положением является точка инициализации устойчивого многообразия L_1 , такой выбор в данной задаче позволяет автоматически оптимизировать выход на устойчивое многообразие в ОТ-задачи. Так как в точке оптимального выхода функция переключения равна нулю, что соответствует выключению тяги и пассивному движению до конечного положения – точки инициализации устойчивого многообразия. Само инвариантное многообразие может быть получено интегрированием уравнений пассивного движения из любой его точки, таким образом последний пассивный участок является инвариантным многообразием точки L_1 .

На рис. 11 приведена траектория перелёта КА с характеристиками двигательной установки: тяга 0,32 Н, удельный импульс 3500 с, начальная масса 1000 кг. Начальная точка находилась на круговой орбите высотой 35 793 км., наклоном 28°. В результате решения было получено, что длительность всего перелёта к точке либрации с указанной угловой дальностью 30 витков занимает 86,12 суток, а выход на инвариантное многообразие происходит за 8,06 суток до сближения с точкой либрации. Конечная масса КА равна 953,51 кг.

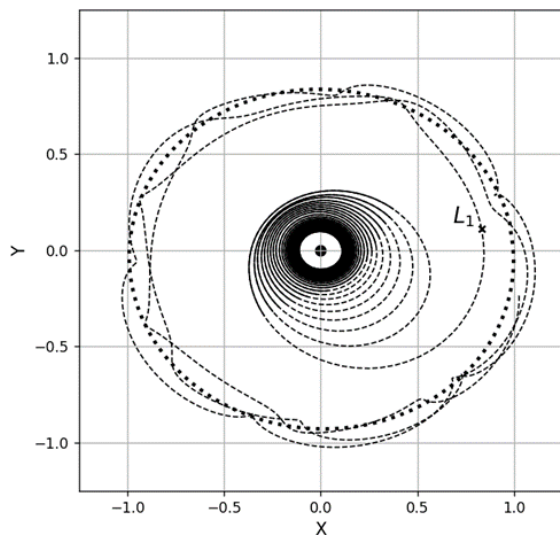


Рис. 2а. Траектория перелёта на транзитную траекторию временного захвата: активный участок (сплошная линия), пассивный участок (прерывистая линия), орбита Луны (точки).

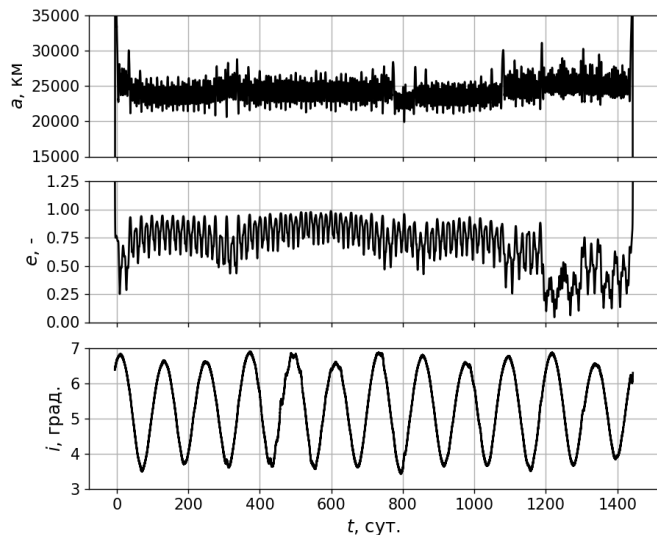


Рис. 2б. Оскулирующие элементы окололунного участка траектории временного захвата начиная с пролёта L_1 (большая полуось, эксцентриситет, наклонение).

Заключение

Разработан метод проектирования транзитных траекторий временного захвата на основе инвариантных многообразий точек либрации, позволяющий осуществлять проектирование низкоэнергетических перелётов КА с ЭРДУ малой тяги к Луне с длительным пребыванием в её окрестности. Показано, что предположение о работе двигательной установки КА только на геоцентрическом участке траектории при типичных характеристиках ЭРДУ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Литература

1. В.А. Егоров // К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек, ИСЗ, 1959, № 3, с. 3-12.
2. Belbruno E.A., Miller J.K. // Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture; Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1993. Vol. 16. № 4. Pp. 770 - 775.
3. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной // ДАН, 2002, Т. 387, № 2, С. 196-199.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.
5. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982, 655 с.
6. Conley C.C. Low energy transit orbits in the restricted three-body problems // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1968, Т. 16, №. 4, pp. 732-746.
7. Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance. Acta Astronautica, 2022, Т. 197, С. 354-367.
8. Petukhov V.G., Sung Wook Yoon Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 1: Theory and method. Cosmic Research. 2021. V. 59. № 5. P. 401 – 413.
9. Petukhov V.G., Sung Wook Yoon. Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 2: Numerical Results. Cosmic Research. 2021. V. 59. № 6. P. 517 – 528.
10. Иванюхин А. В., Петухов В. Г. Задача минимизации тяги и ее приложения. Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 320-331.
11. Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Ук Юн Сон. Траектории перелета к Луне с минимальной тягой. Космические исследования. 2022. Т. 60, № 6, с. 517-527.

ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА-ЛАМБЕРТА И ЕЕ РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОХОЦИМСКОГО-ЕГОРОВА

Ивашкин В.В.

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
ivashkin@keldysh.ru

Аннотация. Метод решения важной для астрономии и космонавтики задачи Эйлера-Ламберта, предложенный В.А. Егоровым, основан на применении результатов Д.Е. Охоцимского по анализу задачи перелета между двумя заданными точками в центральном ньютоновском поле, например, в поле притяжения Солнца. В методе строится однопараметрическое семейство орбит перелета между двумя данными точками. Эти орбиты задаются углом наклона начальной скорости к трансверсали. Затем численно определяется значение этого угла, для которого время перелета равняется заданному, что решает задачу. Численному анализу помогают результаты аналитического исследования задачи.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-79-10206.

Введение. Постановка задачи Эйлера-Ламберта

Рассмотрим материальную точку P (моделирующую некоторое небесное тело малой массы), которая движется в центральном ньютоновском гравитационном поле, создаваемом материальным центром O с гравитационным параметром μ . Известны два положения этой точки P_1 и P_2 , им соответствуют радиус-векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и соответствующие моменты времени t_1 и t_2 . Задача состоит в том, что надо определить такую орбиту перелета точки P из P_1 в P_2 , чтобы в момент времени t_1 она находилась в положении P_1 , а в момент t_2 – в P_2 . Эта задача впервые была поставлена еще Л. Эйлером в 1743 г. Он сформулировал и решил задачу для одного, параболического случая [1]. Затем И. Ламберт в 1761–1771 гг развил эти результаты. Поэтому указанная задача получила название задачи Эйлера-Ламберта. Разработано много методов ее решения ([1–13] и др.). Сравнительный анализ некоторых методов дан в работах Р. Бэттина [3], П. Эскобала [4]. В работе А. Лан [14] эта задача с ее решением с помощью универсального метода [12] использована для определения траекторий полета от Земли к астероиду и назад к Земле. Большинство из этих методов обычно основано на том, что орбиты перелета между двумя точками пространства образуют однопараметрическое семейство орбит, осуществляющих перелет между заданными точками за разное время $(t_2 - t_1)$. В зависимости от выбора параметра этого семейства получаем разные методы решения задачи Эйлера-Ламберта. В.А. Егоров, по-видимому, впервые отметил, что результаты Д.Е. Охоцимского по анализу баллистических перелетов можно использовать для построения нового, очень наглядного и несложного метода решения задачи Эйлера-Ламберта.

Идея и основы метода

Предполагая, что в случае общего положения векторы OP_1 и OP_2 неколлинеарны, построим плоскость, проходящую через центр O и две заданные точки P_1 , P_2 . В этой плоскости лежат и орбиты перелета между данными точками P_1 , P_2 . Возьмем некоторую произвольную орбиту этого семейства. Пусть \mathbf{V}_1 – вектор скорости в начальной точке на данной орбите. В рассматриваемом методе в качестве параметра однопараметрического семейства перелетов между двумя точками берется угол θ_1 наклона начальной скорости \mathbf{V}_1 к трансверсали в начальной точке, на расстоянии r_1 до центра притяжения. Задание угла θ^1 определяет однозначно формулой (1) Д.Е. Охоцимского [6, 8] величину этой скорости V_1 , необходимую для прилета в конечную точку на конечном расстоянии r_2 от центра притяжения через полярный угол φ :

$$2\beta_1 = \frac{1 - \cos\varphi}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \cos\varphi\right) \cos^2\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1 \sin\varphi \cdot \cos^2\theta_1}, \quad (1)$$

здесь величина β_1 есть безразмерное отношение квадратов начальной скорости V_1 и начальной параболической скорости $V_{p1} = (2\mu/r_1)^{1/2}$. После определения этого параметра β_1 однозначно определяется и начальная скорость:

$$V_1 = \sqrt{\beta_1} V_{p1}, \quad (2)$$

а также время перелета, так как знание величины и угла наклона начальной скорости полностью определяет начальный вектор состояния и всю орбиту. Меняя теперь угол θ_1 , находим то его значение, для которого время перелета равно заданному времени $\Delta t = t_2 - t_1$, что решает задачу. В силу указанных выше обстоятельств можно называть такой метод решения задачи Эйлера-Ламберта методом Охоцимского-Егорова.

Рассмотрим основные моменты алгоритма этого метода, предполагая, что плоскость орбиты КА определена:

1. Определение хорды, соединяющей данные точки P1, P2:

$$s = P_1 P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi} \quad (3)$$

2. Минимальное значение большой полуоси:

$$a_0 = (r_1 + r_2 + s)/4. \quad (4)$$

3. Минимальные значения константы энергии и начальной скорости:

$$h_0 = -\mu/a_0; V_{10}^2 = \frac{2\mu}{r_1} + h_0. \quad (5)$$

4. Минимальный начальный скоростной параметр

$$\beta_{10} = \frac{V_{10}^2}{2\mu/r_1} \quad (6)$$

5. Угол θ_{10} наклона минимальной начальной скорости

$$tg \theta_{10} = \frac{\beta_{10} \sin \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (7)$$

6. Задание (в цикле, начиная с θ_{10}) угла наклона начальной скорости к начальной трансверсали:

$$\theta_1 = \theta_{10} + \Delta\theta, \Delta\theta_{min} \leq \Delta\theta \leq \Delta\theta_{max}. \quad (8)$$

7. Начальная скорость – по формулам Д.Е. Охоцимского (1, 2).

8. По векторам положения и скорости определяем орбитальные параметры \mathbf{q} и время перелета Δt :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(r_1, \mathbf{v}_1(\theta_1)) = \mathbf{q}(\theta_1), \Delta t = \Delta t(\theta_1). \quad (9)$$

9. Меняя угол θ_1 наклона начальной скорости к начальной трансверсали, находим то его значение, для которого время перелета равно заданному времени $\Delta t_{дан}$:

$$\Delta t(\theta_1) = \Delta t_{дан}, \quad (10)$$

что решает задачу. Отметим, что успешному численному решению задачи помогает ряд результатов аналитического исследования задачи.

Выводы

Результаты Д.Е. Охоцимского по динамике баллистического движения можно положить в основу численного метода решения задачи Эйлера – Ламберта. Данный метод, который можно назвать методом Охоцимского–Егорова, привлекает своей наглядностью и хорошей сходимостью итерационного процесса.

Литература

1. М.Ф. Субботин // Курс небесной механики. Том 1. Гостехиздат. 1933. 321 с.
2. Н.Е. Жуковский // Собрание сочинений. Том 1. Общая механика, математика и астрономия: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. Москва – Ленин град, 1948. С. 605-609.
3. R.H. Battin // Astronautical guidance: New York, San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1964 (Русский перев.: «Наведение в космосе», Изд. «Машиностроение», 1966 г., 449 с.).
4. H.R. Escobal // Methods of Orbit Determination: John Wiley and Sons, New York, 1965 (Русский перев.: П. Эскобал, Методы определения орбит. Изд. «Мир», М., 1970).
5. П.Е. Эльясберг // Введение в теорию полета искусственных спутников Земли: М.: Наука. Глав. редакция ф.-м. лит., 1965. 549 с.
6. Д.Е. Охоцимский // Динамика космических полетов. Конспект лекций в МГУ / М.: Изд-во Московского университета. 1968 г. 158 с.
7. В.Н. Кубасов, А.А. Дашков // Межпланетные полеты: М.: «Машиностроение», 1979. 272 с.
8. Д.Е. Охоцимский, Сихарулидзе Ю.Г. // Основы механики космического полета: учебное пособие. М. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 448 с.
9. А.А. Суханов // Астродинамика: М.: Институт космических исследований РАН, 2010. 202 с.
10. А.К. Платонов, Р.К. Казакова // Создание проектного и оперативного баллистического обеспечения полетов космических аппаратов. Проектные работы на первых ЭВМ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 37. 35 с.
11. Л.Н. Лысенко Л.Н., В.В. Бетанов, Ф.В. Звягин // Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов; под общ. ред. Л.Н. Лысенко / М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2014. 518 с.
12. D. Izzo // Revisiting Lambert's problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2015, Vol. 121, No. 1, Jan. 2015.

ISSN 0923-2958. doi:10.1007/s10569-014-9587-y. Pp. 1–15.

13. Г.К. Боровин и др. // Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / Под ред. д.ф.-м.н. А.Г. Тучина. Химки: изд. АО «НПО Лавочкина». 2018. 336 с.
14. Лан Аньци // Методика определения траекторий космического аппарата для экспедиции Земля-астероид-Земля с учетом выбора орбит пребывания у астероида и ее применение для экспедиции к астероиду Апофис: автореф. дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. н. М.: 2018. 23 с.

ПОДДЕРЖАНИЕ РЕЖИМА ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННО НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Игнатов А.И., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В.

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
ignatov@bmstu.ru

Аннотация. Исследуется движение космического аппарата в режиме поддержания его орбитальной ориентации в окрестности неустойчивого положения равновесия. Управление вращательным движением аппарата осуществляется с помощью комплекса электромеханических исполнительных органов – гиросистемы. Предложен соответствующий закон управления кинетическим моментом гиросистемы, с помощью которого можно продолжительное время поддерживать достаточно точную орбитальную ориентацию аппарата в окрестности его гравитационно неустойчивого положения равновесия без накопления гиросtatического момента. Рассмотрены способы вычисления коэффициентов указанного закона управления.

Введение

В данной работе орбитальной ориентацией космического аппарата (КА) будем называть его движение близкое заданному положению покоя в орбитальной системе координат [1]. Начало этой системы находится в центре масс КА, третья ось (орт E_3^-) направлена вдоль геоцентрического радиус-вектора центра масс КА, вторая ось (орт E_2^-) – вдоль вектора кинетического момента орбитального движения КА, первая ось дополняет систему до правой. Режим стабилизации орбитальной ориентации является одним из самых распространенных и используется при решении многих целевых задач, выполняемых КА на орбите. Поддержание рассматриваемого режима выполняется с помощью комплекса электромеханических исполнительных органов (гиросистемы), состоящего из двигателей-маховиков или силовых гироскопов (гиродинов) [2–5]. В работе рассматривается режим ориентации, в котором КА совершает малые колебания в орбитальной системе координат в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия, а собственный кинетический момент гиросистемы (гиросtatический момент КА) остается ограниченным [1]. Отсутствие накопления кинетического момента гиросистемы в процессе поддержания заданной ориентации КА является очень важным преимуществом, поскольку при этом не требуется проводить разгрузку гиросистемы. Обычно разгрузка гиросистемы осуществляется с помощью внешних моментов, создаваемых либо электрореактивными двигателями, либо электромагнитными исполнительными органами. Соответственно, при ограниченном значении кинетического момента гиросистемы экономится рабочее тело для электроракетных двигателей и не требуется наличие электромагнитных исполнительных органов в составе системы управления КА.

Математическая модель движения космического аппарата

Полная математическая модель движения КА описывается системой уравнений, состоящей из двух подсистем. Первая подсистема уравнений описывает орбитальное движение КА, она записывается в гринвичской системе координат, переменными служат компоненты геоцентрического радиус-вектора и вектора скорости центра масс КА [2]. В этих уравнениях учитываются нецентральность гравитационного поля Земли с точностью до членов порядка (32,32) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по сферическим функциям, а также влияние атмосферы. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Баллистический коэффициент КА и параметры атмосферы считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Вторая подсистема уравнений описывает относительное (вращательное) движения КА. Ее составляют уравнения, выражающие теорему об изменении кинетического момента КА в его движении относительно центра масс, а также кинематические уравнения Пуассона для элементов первых двух строк матрицы B перехода от системы координат связанной с КА, образованной его главными центральными осями инерции, к гринвичской системе координат. Замыкают вторую подсистему уравнения, описывающие изменение собственного кинетического момента гиросистемы [1]. В векторной форме записи подсистема уравнений вращательно движения КА имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K} &= \bar{M}_g + \bar{M}_a, & \bar{K} &= I\bar{\omega} + \bar{H}, & \frac{d\bar{H}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{H} &= -\bar{M}_c, \\ \frac{d\bar{b}_1}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}_1 &= \omega_E \bar{b}_2, & \frac{d\bar{b}_2}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}_2 &= -\omega_E \bar{b}_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где \bar{K} – кинетический момент КА в его движении относительно центра масс, $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА, $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции КА, \bar{H} – гиросtatический момент КА (собственный кинетический момент гиросистемы), \bar{M}_g – гравитационный момент, действующий на КА, \bar{M}_a –

аэродинамический момент, действующий на КА, \bar{M}_c – момент, действующий со стороны гиросистемы, на корпус КА, \bar{b}_1 и \bar{b}_2 – соответственно первая и вторая строки матрицы перехода B . Третья строка этой матрицы $\bar{b}_3 = \bar{b}_1 \times \bar{b}_2$. Значения \bar{M}_g и \bar{M}_a рассчитывались согласно формулам, приведенным в [6].

Управляемая орбитальная ориентация космического аппарата

Закон управления гиростатическим моментом КА принят в виде [1]:

$$\bar{M}_c = K_e(\bar{e}_2 \times \bar{E}_3 + \bar{E}_2 \times \bar{e}_3) - K_\omega(\bar{\omega} - \omega_0 \bar{E}_2) + K_h \bar{H}, \quad (2)$$

где K_e , K_ω , K_h – матрицы постоянных коэффициентов закона управления, ω_0 – среднее движение (орбитальная частота) КА, \bar{e}_2 , \bar{e}_3 – орты второй и третьей осей связанной с КА системы координат, которая образована его главными центральными осями инерции. Следует отметить, что форма КА, рассматриваемого в данной работе, аппроксимируется прямым круговым цилиндром, для моментов инерции которого выполняются соотношения $I_2 \approx I_3 \approx 4I_1$.

Рассмотрим подсистему уравнений вращательного движения КА в упрощенной ситуации, предположив, что орбита КА – круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на КА действует один лишь гравитационный момент и собственный кинетический момент гиросистемы равен нулю. Линеаризуем полученную упрощенную систему из 9 уравнений вращательного движения КА в окрестности неустойчивого положения равновесия, задаваемого соотношениями

$$\bar{e}_1 = \bar{E}_1, \bar{e}_2 = \bar{E}_3, \bar{e}_3 = -\bar{E}_2. \quad (3)$$

Полученная линеаризованная система разбивается на две независимые подсистемы уравнений – третьего и шестого порядков. Необходимые значения коэффициентов K_e , K_ω , K_h закона управления (2) вычисляются отдельно для каждой подсистемы. Для подсистемы третьего порядка наибольшая степень относительной устойчивости достигается при наличии действительного трехкратного отрицательного корня характеристического многочлена. Исходя из этого условия получены аналитические зависимости для нахождения соответствующей части коэффициентов. Значения коэффициентов подсистемы шестого порядка найдены численно из решения алгебраического матричного уравнения Рикатти. Полученные таким образом значения коэффициентов, составляющие матрицы K_e , K_ω , K_h были использованы при численном моделировании движения КА с помощью полной системы уравнений его движения. Результаты моделирования показали, что закон управления (2) с полученными значениями коэффициентов обеспечивает на длительном интервале времени стабилизацию КА в окрестности его неустойчивого положения равновесия (3) и при этом ограничивает рост собственного кинетического момента гиросистемы.

Заключение

В работе показано, что с помощью гиросистемы можно с необходимой точностью обеспечить длительную орбитальную ориентацию КА в окрестности его неустойчивого положения равновесия без накопления гиростатического момента. Рассмотрен соответствующий закон управления собственным кинетическим моментом гиросистемы. Приведены аналитические зависимости для вычисления значений части коэффициентов рассмотренного закона управления, обеспечивающие наибольшую степень относительной устойчивости. Значения остальных коэффициентов найдены численно. Показаны результаты математического моделирования полной системы уравнений движения КА, подтверждающие эффективность приведенного в работе закона управления с выбранными значениями соответствующих коэффициентов.

Литература

1. А.И. Игнатов, В.В. Сазонов. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Известия РАН. ТиСУ. 2020. №1. с. 129-142.
2. А.И. Игнатов, Г.А. Иванов, Е.С. Коломиец, Е.В. Мартыненко. Использование системы двигателей-маховиков при реализации режима солнечной ориентации космического аппарата // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 10 (130). с. 1 - 26. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-10-2219>
3. А.И. Игнатов. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата // Известия РАН. ТиСУ. 2022. №1. с. 124-144.
4. Е.С. Коломиец, А.И. Игнатов. Выбор геометрических параметров системы двигателей-маховиков при поддержании орбитальной ориентации космического аппарата // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 5 (125). с. 287 – 294. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-5-2182>
5. Е.В. Мартыненко, Г.А. Иванов, А.И. Игнатов. Анализ схем расположения двигателей-маховиков на борту космического аппарата при управлении движением относительно центра масс // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 5 (125). с. 295 – 300. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-5-2182>
6. В.В. Белецкий. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука. 1965. 416 с.

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА ГРАВИТАЦИОННОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА БЕЗ НАКОПЛЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ГИРОСИСТЕМЫ

Игнатов А.И., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В.

*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
ignatov@bmstu.ru*

Аннотация. Исследуется движение космического аппарата в различных вариантах режима его гравитационной ориентации. Рассмотрено неуправляемое и управляемое вращательное движение аппарата, при наличии управления оно осуществляется с помощью комплекса электромеханических исполнительных органов – гиросистемы. Предложены два варианта закона управления гиросистемой обеспечивающих гравитационную ориентацию аппарата, для реализации которых не требуется информация об его угловом положении. Показано, что с помощью гиросистемы можно поддерживать достаточно точную ориентацию аппарата в окрестности его гравитационного положения равновесия без накопления гиросистемического момента.

Введение

Режим гравитационной ориентации космического аппарата (КА) используется для решения ряда целевых задач, в частности, он предпочтителен при проведении космических экспериментов, требующих минимальную область вариации вектора микроускорений возникающих на борту [1]. При этом гравитационную ориентацию КА можно реализовать как неуправляемую (пассивную), так и управляемую (активную). Для управления вращательным движением КА можно использовать различные исполнительные органы: электроракетные двигатели, электромагнитные органы управления, а также электромеханические органы управления – гиросистему (двигатели-маховики или силовые гироскопы) [1–7]. В данной работе в качестве исполнительного органа системы управления КА рассматривается гиросистема. При использовании гиросистемы одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления собственного кинетического момента (гиросистемического момента КА). Эта скорость должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки невозмущенного полета КА, на которых нет необходимости проведения разгрузки гиросистемы. Ниже рассматриваются законы управления вращательным движением КА, позволяющие поддерживать его достаточно точную гравитационную ориентацию продолжительное время без насыщения кинетического момента гиросистемы.

Математическая модель движения космического аппарата

Полная математическая модель движения КА описывается системой уравнений, состоящей из двух подсистем. Первая подсистема уравнений описывает орбитальное движение КА, она записывается в гринвичской системе координат, переменными служат компоненты геоцентрического радиус-вектора и вектора скорости центра масс КА [2]. В этих уравнениях учитываются нецентральность гравитационного поля Земли с точностью до членов порядка $(32,32)$ включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по сферическим функциям, а также влияние атмосферы. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Баллистический коэффициент КА и параметры атмосферы считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения. Вторая подсистема уравнений описывает относительное (вращательное) движения КА. Ее составляют уравнения, выражающие теорему об изменении кинетического момента КА в его движении относительно центра масс, а также кинематические уравнения Пуассона для элементов первых двух строк матрицы перехода от системы координат связанной с КА, образованной его главными центральными осями инерции, к гринвичской системе координат. Замыкают вторую подсистему уравнения, описывающие изменение собственного кинетического момента гиросистемы [3]. В уравнениях, выражающих теорему об изменении кинетического момента, учитываются гравитационный и аэродинамический моменты.

Пассивная гравитационная ориентация космического аппарата

Чтобы пояснить этот режим, упростим подсистему уравнений вращательного движения КА, отбросив второстепенные факторы. Предположим, что орбита КА – круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на КА действует один лишь гравитационный момент и собственный кинетический момент гиросистемы равен нулю. Полученная упрощенная система состоит из 9 уравнений, записанных в проекциях на оси связанной с КА системы координат, и имеет 24 стационарных решения [8]. Эти решения описывают положения равновесия (покой) КА в орбитальной системе координат. Начало орбитальной системы координат находится в центре масс КА, третья ось направлена вдоль геоцентрического радиус-вектора центра масс КА, вторая ось – вдоль вектора кинетического момента орбитального движения КА, первая ось дополняет систему до правой.

В зависимости от соотношений между главными центральными моментами инерции КА часть стационарных решений являются устойчивыми, а часть – неустойчивыми [8]. Каждое устойчивое стационарное решение можно использовать для реализации режима пассивной трехосной гравитационной

ориентации КА. Такой режим удобен при неуправляемом полете КА. В работе рассматривается одно из устойчивых стационарных решений – гравитационно устойчивая ориентация КА в орбитальной системе координат.

Рассмотрим полную систему уравнений вращательного движения КА при отсутствии гиросtatического момента. Такая система не имеет решений, описывающих покой КА в орбитальной системе координат, однако в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров эти уравнения допускают решения, которые оказываются близки положению покоя [3]. Такие решения можно выбирать из условия минимума функционала [1] $\Phi = \int_0^T (\bar{\omega} - \omega_0 \bar{e}_2)^2 dt$, где $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА, ω_0 – среднее движение КА в начальный момент времени, \bar{e}_2 – орт второй оси орбитальной системы координат, значение T равно нескольким орбитальным периодам $2\pi/\omega_0$. В частности, $\Phi = 0$ для положения покоя и $\Phi > 0$ на решениях, лежащих в окрестности этого положения и не совпадающих с ним. В работе минимизация Φ по начальным условиям проводилась методом Гаусса-Ньютона. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях, в которых отбрасывались члены, характеризующие аэродинамический момент. В результате были получены усредненные значения углов ориентации КА на отрезке $0 \leq t \leq T$ в режиме пассивной гравитационной ориентации, построенном минимизацией функционала Φ . Показано, что в данном случае разница между значениями углов, задающих точную гравитационную ориентацию КА и значениями углов полученных при минимизации функционала Φ не превышает 1 градус, для каждого из трех рассматриваемых углов ориентации. Полученные значения углов можно использовать при реализации режима управляемой гравитационной ориентации КА.

Управляемая гравитационная ориентация космического аппарата

Управляемой гравитационной ориентацией КА будем называть его движение, близкое к гравитационно устойчивому положению покоя в орбитальной системе координат и реализуемую с помощью гиросистемы [4–6]. В случае рассматриваемого в данной работе КА технически доступные реализации гиросtatического момента не могут обеспечить существование решений полной системы уравнений вращательного движения, описывающих точный покой в орбитальной системе координат, но они могут обеспечить решения, близкие к покою.

В работе рассмотрена управляемая ориентация КА в положении, задаваемом углами, полученными при минимизации функционала Φ режима пассивной гравитационной ориентации. Приведен соответствующий закон управления гиросистемой, для реализации которого требуется информация об угловой ориентации и угловых скоростях КА. На интервале времени моделирования полной системы уравнений движения КА равном 8 суток приведены значения собственного кинетического момента гиросистемы. Приведено сравнение полученных значений собственного кинетического момента гиросистемы со значениями, полученными в результате моделирования режима точной гравитационной ориентации КА. Показано, что несмотря на относительно небольшую разницу между значениями углов, задающих ориентацию сравниваемых режимов, значения накопленного кинетического момента гиросистемы в случае точной гравитационной ориентации примерно в 23 раза больше на рассматриваемом интервале времени моделирования при одинаковой точности угловой ориентации КА.

В данном случае использование значений углов ориентации КА полученных при минимизации функционала Φ представляет методический интерес. Их расчет в реальном времени сложен хотя бы из-за необходимости учета влияние аэродинамического момента на вращательное движение КА. Значения накопленного кинетического момента гиросистемы, полученные при поддержании ориентации КА задаваемой этими углами можно рассматривать как эталонные. Однако поддержание достаточно точной гравитационной ориентации КА можно обеспечить и без накопления гиросtatического момента.

Для обеспечения длительной гравитационной ориентации КА при наличии дестабилизирующего действия аэродинамического момента можно использовать демпфирующие устройства. В качестве таких устройств можно использовать гироскопические исполнительные органы системы управления (гиросистему) КА. Чтобы реализовать демпфирование с помощью гиросистемы (гиродемпфирование) достаточно задать надлежащий закон управления гиросtatическим моментом КА [7]. Такая гравитационная ориентация КА является полупассивной, ее можно считать активной, однако расходы энергии на ее поддержание невелики. Кроме того, полупассивную ориентацию можно реализовать без накопления кинетического момента КА и не будет затрат энергии или рабочего тела для проведения разгрузок гиросистемы. Рассмотренный в работе закон управления гиросистемой реализующий режим гиродемпфирования КА имеет вид:

$$\bar{M}_c = -\bar{\omega} \times \bar{H} - \dot{\bar{H}} = \bar{H} \times \bar{\omega} - P^{-1}J(\bar{\omega} - \omega_0 \bar{e}_2) + P^{-1}(\bar{H} - H_0 \bar{e}_2), \quad (1)$$

где \bar{M}_c – момент, действующий со стороны гиросистемы на корпус КА, \bar{H} – гиросtatический момент КА, $P = \text{diag}(p_1, p_2, p_3)$, $J = \text{diag}(j_1, j_2, j_3)$, p_i, j_i – положительные постоянные, $i = 1, 2, 3$, \bar{e}_2 – орт второй оси связанной системы координат H_0 – произвольная постоянная. Как видно из (1), для реализации рассмотренного закона управления гиросистемой не требуется информация об угловой ориентации КА, но необходима

информация о текущем состоянии гиросистемы. Также, в работе показано, что закон управления (1) можно реализовать при значении $H_0 = 0$.

При линеаризации упрощенной системы уравнений вращательного движения КА в окрестности устойчивого положения равновесия полученная линеаризованная система разбивается на две независимые подсистемы уравнений – третьего и шестого порядков. Необходимые значения коэффициентов закона управления (1) вычисляются отдельно для каждой подсистемы. Для подсистемы третьего порядка наибольшая степень относительной устойчивости достигается при наличии действительного трехкратного отрицательного корня характеристического многочлена. Исходя из этого условия получены аналитические зависимости для нахождения соответствующей части коэффициентов. Показано, что при использовании закона управления (1) степень устойчивости многочлена третьего порядка зависит только от главных центральных моментов инерции КА и высоты орбиты. Для нахождения необходимых значений коэффициентов закона управления (1) подсистемы шестого порядка можно использовать несколько подходов. Один из них – это исследование устойчивости рассматриваемого стационарного решения с помощью прямого метода Ляпунова и теоремы Барбашина – Красовского, используя которые, в работе получены области значений коэффициентов, обеспечивающих устойчивость решений подсистемы шестого порядка. Другой подход – это использование математических методов теории управления, позволяющих определить необходимые значения коэффициентов характеристического полинома (в частности, для случая $H_0 = 0$) с точки зрения различных критериев оптимальности, в частности, с использованием линейно-квадратичного регулятора.

Полученные значения коэффициентов закона управления использовались при численном моделировании движения КА с помощью полной системы уравнений. Результаты моделирования показали эффективность рассмотренных законов управления и подтвердили правильность расчетов значений коэффициентов законов управления.

Заключение

В работе показано, что с помощью гиросистемы можно обеспечить длительную и достаточно точную ориентацию КА в окрестности его гравитационного положения равновесия без накопления гиросtatического момента. Рассмотрены два варианта соответствующих законов управления собственным кинетическим моментом гиросистемы, одним из преимуществ реализации которых является отсутствие требований к информации об угловой ориентации КА. Приведены аналитические зависимости для вычисления значений части коэффициентов рассмотренных законов управления, значения остальных коэффициентов найдены численно с использованием методов математической теории управления. Показаны результаты численного моделирования полной системы уравнений движения КА, подтверждающие эффективность приведенных в работе законов управления с выбранными значениями соответствующих коэффициентов.

Литература

1. А.И. Игнатов, В.В. Сазонов. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими исполнительными органами // *Космические исследования*. 2012. Т. 50. № 5. с. 380-393.
2. А.И. Игнатов, Г.А. Иванов, Е.С. Коломиец, Е.В. Мартыненко. Использование системы двигателей-маховиков при реализации режима солнечной ориентации космического аппарата // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2022. № 10 (130). с. 1 - 26. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-10-2219>
3. А.И. Игнатов, В.В. Сазонов. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // *Известия РАН. ТиСУ*. 2020. №1. с. 129-142.
4. А.И. Игнатов. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата // *Известия РАН. ТиСУ*. 2022. №1. с. 124-144.
5. Е.С. Коломиец, А.И. Игнатов. Выбор геометрических параметров системы двигателей-маховиков при поддержании орбитальной ориентации космического аппарата // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2022. № 5 (125). с. 287 – 294. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-5-2182>
6. Е.В. Мартыненко, Г.А. Иванов, А.И. Игнатов. Анализ схем расположения двигателей-маховиков на борту космического аппарата при управлении движением относительно центра масс // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2022. № 5 (125). с. 295 – 300. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-5-2182>
7. В.В. Сазонов. Гравитационная ориентация искусственных спутников с гиродинами // *Космические исследования*. 1988. Т. 26. № 2. с. 315-318.
8. В.В. Белецкий. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука. 1965. 416 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ПОЛЕТА КА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЕГО ВХОДА В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ С БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ

Константинов М.С.

*Московский авиационный институт
mkonst@bk.ru*

Аннотация. Оптимизируется схема полета, обеспечивающая большую (параболическую) скорость входа космического аппарата (КА) в земную атмосферу. Такой маневр может быть интересным для экспериментальной отработки входа КА, возвращающегося на Землю от Луны или после межпланетного перелета. Анализируются две модели КА: КА с химической двигательной установкой ограниченной тяги и модель, использующая импульсную аппроксимацию активных участков траектории полета. Разработана математическая модель для анализа схем одновиткового и многовиткового полетов КА и метод оптимизации этих схем. Основой разработанного метода оптимизации схемы полета и самой траектории КА выбран принцип максимума. Приводятся результаты численного анализа.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-19-00329.

Введение

Развитие космических программ предполагает возвращение космических аппаратов после реализации лунной или межпланетной миссии на Землю. Такое возвращение, как правило, предполагает вход КА в земную атмосферу с большой скоростью. При возвращении КА с поверхности Луны или из окололунного пространства (в частности, с окололунной орбиты) скорость входа КА в земную атмосферу оказывается близкой к местной параболической скорости. Отработать этапы входа КА с большой скоростью, отработать конструкцию спускаемого аппарата (СА) с её теплозащитой представляется интересным, используя макет СА. К сожалению, реализация маневра входа КА в земную атмосферу с большой скоростью оказывается энергетически сложной задачей. Оптимизация схемы полета КА с обеспечением большой скорости его входа в атмосферу и есть предмет настоящей работы.

Постановка задачи

Под большой скоростью входа КА в атмосферу в дальнейшем будем полагать скорость равную местной параболической скорости на высоте условной атмосферы. Высоту условной атмосферы примем равной 100 км. Местная параболическая скорость на этой высоте 11,09936 км/с. Если иметь в виду натурные эксперименты с КА-демонстратором, то естественной постановкой задачи выбора схемы полета КА является следующая постановка:

Найти такую схему полета КА, при которой КА входит в земную атмосферу со скоростью равной 11,09936 км/с и с некоторым заданным углом входа в атмосферу.

Мы посчитали целесообразным начальные условия для анализа схемы полета КА, предназначенного для входа КА, рассматривать, как условия движения КА на низкой околоземной орбите. То есть предполагается, что маневр реализуется стартом КА с низкой круговой околоземной орбиты. Её высота предполагается заданной и при численном анализе принята равной 200 км.

Анализируются две модели двигательной установки КА. В первой модели предполагается, что в составе КА имеется химическая двигательная установка, имеющая ограниченную тягу. В этом варианте предполагается найти оптимальный закон включения-выключения двигательной установки $\delta(t)$ и оптимальные программы угла тангажа на активных участках траектории $\vartheta(t)$, время перелета t_p которые обеспечат вход КА в земную атмосферу со скоростью равной местной параболической и заданный угол входа в атмосферу $\theta_{вх}$. Критерием оптимальности рассматривается характеристическая скорость анализируемого маневра.

Во второй модели двигательной установки предполагается возможность использовать импульсную аппроксимацию активных участков траектории КА. При этом условия транспортной задачи не меняются, а выбираемыми параметрами рассматриваются следующие характеристики: число импульсов скорости, моменты сообщения КА этих импульсов скорости, величина и направление импульсов скорости. Критерий оптимизации – суммарный импульс скорости.

Для импульсной модели в рассматриваемой задаче необходимо ввести ограничение на максимальное удаление КА от Земли на траектории перелета. Без введения такого ограничения оптимальная траектория перелета включает уход КА из окрестности Земли по параболической траектории. Введение такого типа фазовых ограничений сопряжено с рядом трудностей. Преодолеть эти трудности возможно с введением ограничения на максимальное время перелета. Именно этот прием использовался в настоящей работе.

Важнейшей итоговой зависимостью рассматривается зависимость характеристической скорости от времени перелета. Такая зависимость построена для одно и много витковых перелетов (максимальное число рассмотренных витков 5). При этом угловая дальность перелета анализируется, как оптимизируемая

характеристика схемы перелета. Выявляются диапазоны времени перелета, в которых целесообразно использовать то или иное число витков на траектории перелета с конкретной угловой дальностью.

Математическая модель, описывающая оптимальное движение КА на траектории перелета

Используемая математическая модель описывает плоское (в общем случае многооборотное) оптимальное движение КА в ньютоновском гравитационном поле. Модель включает решение краевой задачи принципа максимума, как для варианта двигателя конечной тяги, так и для импульсной аппроксимации активных участков траектории перелета [1]. Активно используется метод гладкого продолжения по параметру [2]. В качестве начального приближения перелетной траектории использовалась модель КА с идеально-регулируемой двигательной установкой [3]. При этом удается жестко не фиксировать число активных участков на траектории перелета и их расположение. Характеристики оптимальной траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой используются для оптимизации траектории КА с двигателем ограниченной тяги [1, 2]. Характеристики траектории КА с двигателем ограниченной тяги используются для оптимизации импульсной траектории.

Анализ численных результатов оптимизации схемы перелета

При численном анализе модели КА с двигателем ограниченной тяги были выбраны следующие характеристики КА: химическая двигательная установка обеспечивает начальное реактивное ускорение равное 1 м/с^2 , удельный импульс двигательной установки 330 с.

В табл. 1 показаны основные характеристики траектории КА с ограниченной тягой при угле входа в атмосферу -10° . Рассмотрены варианты с различным числом витков на траектории перелета (от одного до 5 витков). Увеличение числа витков приводит к заметному уменьшению характеристической скорости маневра: с 3512 м/с для однооборотной траектории до 3264,0 м/с для 5-ти витковой траектории.

Таблица 1. Основные характеристики траекторий одно и много виткового перелета. Угол входа в атмосферу $\theta_{atm} = -10^\circ$.

	Одновитковый перелет	2-х витковый перелет	3-х витковый перелет	4-х витковый перелет	5-ти витковый перелет
Характеристическая скорость, м/с	3512,0	3382,9	3236,2	3285,6	3264,0
Время перелета, часы	12,32	10,00	20,00	30,00	80,00
Угловая дальность перелета, град.	402,9	720,8	1077,8	1436,1	1796,1

На рис. 1 приведены функции переключения двигателя на одновитковой, двух витковой и трех витковой траектории перелета. Аргумент рассматриваемой функции – текущая угловая дальность полета. Анализируется вариант с углом входа в атмосферу -10° . Интервалы, на которых эта функция положительна, соответствуют активным участкам траектории. Там, где функция переключения отрицательна, двигатель КА выключен. Видно, что одновитковая и двух витковая траектории состоит из трех активных участков, разделенных двумя пассивными участками. Трех витковая траектория состоит из 4-х активных участков, разделенных 3-мя пассивными участками.

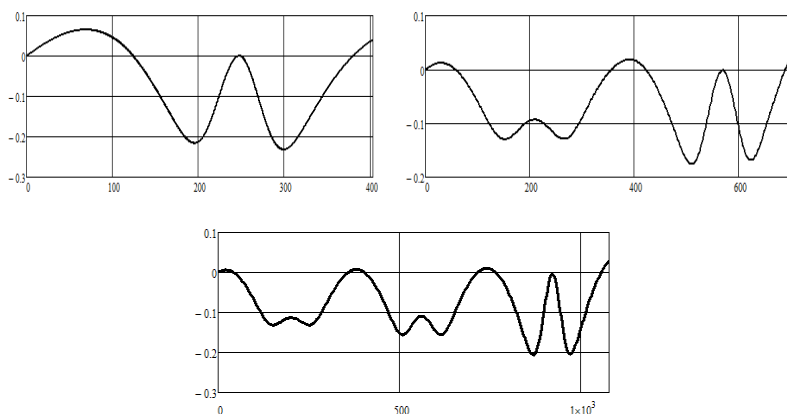


Рис. 1. Функция переключения двигателя на оптимальных траекториях перелета. Ось абсцисс – текущая угловая дальность (градусы). Слева – одновитковый перелет. В центре - двух витковый перелет. Справа – трех витковый перелет.

Второй активный участок при одновитковом перелете расположен в апогейной области перелетной траектории. Он имеет малую протяженность ($0,064^\circ$) и малую продолжительность 35,9 сек.

Слева на рисунке 2 показана величина базис-вектора вдоль траектории одновиткового перелета для модели движения, использующую импульсную аппроксимацию активных участков траектории. Время перелета выбрано равным оптимальному времени одновиткового перелета при ограниченной тяге (12,32 час.). Видно, что величина базис-вектора трижды на траектории перелета становится равным 1. В этих точках траектории КА сообщается импульсы скорости. Отметим, что в соответствии с условиями оптимальности принципа максимума

представленная зависимость имеет локальные максимумы в точках, где КА сообщаются первые два импульса скорости.

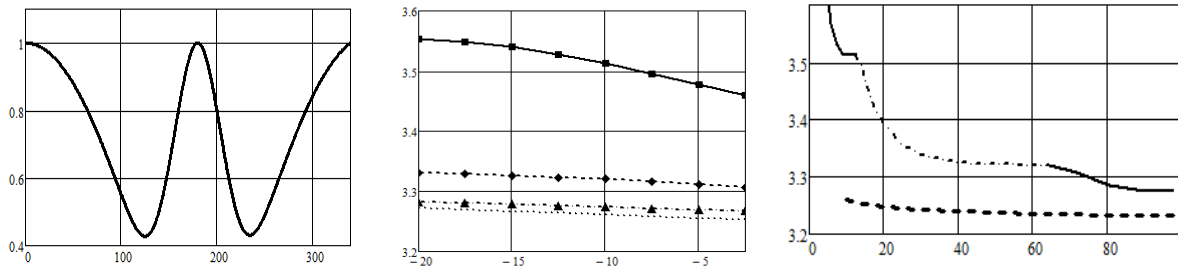


Рис. 2. Слева – функция переключения двигателя на оптимальной траектории импульсного одновиткового перелета. Ось абсцисс – текущая угловая дальность (градусы). Время перелета 12,315 час. Угол входа в атмосферу $\theta_{ам} = -10^\circ$. В центре – характеристическая скорость (км/с) как функции угла входа КА в атмосферу (град.). Верхняя сплошная линия – одновитковый перелет, пунктирная линия с ромбиками – двух витковая траектория, штрихпунктирная линия с треугольниками – трех витковая траектория. Нижняя линия – четырех витковая траектория. Справа – характеристическая скорость (км/с) как функция времени перелета (часы). Угол входа в атмосферу $\theta_{ам} = -10^\circ$. Нижняя линия – для траектории импульсного одновиткового перелета. Верхняя линия – для КА с ограниченной тягой.

На рис. 2 в центре показана характеристическая скорость рассматриваемого маневра как функция угла входа КА в атмосферу. Увеличение величины угла входа в атмосферу приводит к увеличению характеристической скорости. Увеличение величины угла входа с $2,5^\circ$ до 20° увеличило характеристическую скорость одновитковой траектории на 93,8 м/с (с 3459,2 до 3553,0 м/с).

Справа на рис. 2 показана зависимость характеристической скорости манера как функция времени перелета. Нижняя линия соответствует импульсной одновитковой траектории. Найденные экстремали импульсного многовиткового перелета оказались менее эффективными, чем одновитковые импульсные перелеты. Верхняя линия на рисунке соответствует КА с двигателем ограниченной тяги. Эта линия состоит из трех по-разному оформленных частей. Левая часть описывает зависимость для одновитковой траектории. Средняя часть – для двух витковой траектории, правая часть – для трех витковой траектории. При увеличении времени перелета появляется целесообразность увеличивать число витков траектории перелета, перейти от одного типа экстремали к другому.

Заключение

Разработан метод оптимизации траектории КА, обеспечивающей его вход в атмосферу с большой скоростью и фиксированным углом входа.

Из проведенного численного анализа можно сделать следующие выводы: Рассматриваемый космический маневр требует большой энергетики. Его характеристическая скорость более 3,25 км/с.

При использовании модели импульсной траектории перелета для фиксированной угловой дальности перелета не существует оптимального времени перелета (оно бесконечно большое). Поэтому целесообразно оптимизировать траекторию, фиксируя время перелета и оптимизируя угловую дальность перелета.

Аналогичный эффект наблюдается и для многовитковых траекторий перелета для КА с двигателем ограниченной тяги. В этом случае оптимальное время перелета если и существует, то оказывается слишком большим. При этом траектория КА уходит из окрестности Земли, так что её анализ в рамках задачи двух тел некорректен.

Для КА с двигателем ограниченной тяги при небольших величинах угла входа в атмосферу для одновитковых и даже двух витковых перелетов зависимость характеристической скорости от времени перелета немонотонна и существует оптимальное время перелета (также как и оптимальная угловая дальность).

Не удалось найти многовитковую импульсную траекторию более эффективную, чем одновитковая импульсная траектория во всем разумном диапазоне времен перелета. Скорее всего, такой траектории нет.

Использование многовитковых траекторий перелета для КА с двигателем ограниченной тяги может позволить уменьшить характеристическую скорость маневра на несколько сотен м/с.

Литература

1. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелётов. Москва: Издательство МАИ, 2015. 259 с. ISBN 978-5-4316-0287-0
2. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 3. С. 258-270.
3. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 3. С. 224-237.

ПРОЕКТНО-БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ТИПА CUBESAT С ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЬНЫМИ УСТАНОВКАМИ ДЛЯ ПЕРЕЛЕТА «ЗЕМЛЯ–ЛУНА»

Кульков В.М.¹, Юн С.У.², Петухов В.Г.¹

1 - Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики

Московского авиационного института

2 - Московский авиационный институт

vmk_1@mail.ru

Аннотация. Представлен анализ возможности обеспечения перелета малого космического аппарата типа Cubesat к Луне для применения его в полетах в системе «Земля-Луна» с учетом характеристик электроракетной двигательной установки. Показана схема перелета к Луне с малой тягой, приведены результаты проектно-баллистического анализа перелета «Земля-Луна». Даны оценки основных параметров электроракетных двигателей малой мощности, отвечающих требованиям по выполнению динамических задач перелета «Земля-Луна». Приведены удельные массовые и объемные характеристики электроракетной двигательной установки в составе малого космического аппарата Cubesat.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-19-00329.

Введение

Актуальность применения малых космических аппаратов (МКА) типа Cubesat для лунных или межпланетных миссий с течением времени возрастает. Для успешного выполнения полетов за пределы околоземной орбиты с использованием МКА Cubesat необходимо преодолеть ряд технических сложностей: адаптация бортовых систем (система электропитания, система управления, ориентации и стабилизации, двигательная установка и т.д.) в рамках массогабаритных ограничений стандарта Cubesat.

Для обеспечения перелета МКА типа CubeSat между околоземной и окололунной орбитами рассматривались электроракетные двигательные установки (ЭРДУ) во многих работах [1–4]. Высокий удельный импульс ЭРДУ позволяет снизить требуемые затраты рабочего тела, однако малая тяга ЭРДУ приводит к существенному увеличению длительности перелета к Луне. В связи с этим, возникает необходимость проведения анализа зависимости длительности перелета (или затрат рабочего тела) МКА CubeSat от характеристик ЭРДУ (тяга и удельный импульс).

Целью проектно-баллистического анализа является оценка возможности обеспечения перелета МКА типа Cubesat к Луне с учетом характеристик электроракетной двигательной установки. Приводится пример траектории перелета МКА Cubesat к Луне с ЭРДУ и анализируется зависимость длительности перелета и требуемых затрат рабочего тела от различных характеристик ЭРДУ. Для вычисления основных параметров траекторий и нахождения режимов управления вектором тяги ЭРДУ на траектории перелета к Луне используется программное обеспечение, построенное на основе применения принципа максимума и метода продолжения, приведенное в [5].

Показана возможность перелетов к Луне с использованием электроракетных двигателей (ЭРД) [6]. Приведены характеристики электроракетных двигателей разных типов в составе ЭРДУ МКА Cubesat, дана оценка массовой и объемной доли ЭРДУ в составе МКА Cubesat для обеспечения полетов к Луне.

Схема перелета лунного МКА типа Cubesat с ЭРДУ

Траектория перелета к Луне КА с малой тягой включает геоцентрический и селеноцентрические участки, стыкуемые в точке либрации L_1 . Траектория перелета с низкой орбиты искусственного спутника Земли (ОИСЗ) представляет собой раскручивающуюся вокруг Земли многовитковую спираль, проходящую через точку либрации L_1 , затем скручивающуюся вокруг Луны с выходом на низкую орбиту искусственного спутника Луны (ОИСЛ). На рис. 1 показана проекция оптимальной траектории перелета МКА массой 14 кг с геосинхронной орбиты с наклоном 25° на круговую орбиту вокруг Луны с высотой 500 км и наклоном 25° на плоскость XY в инерциальной системе координат J2000 для различных вариантов ЭРД: (а) ионный двигатель «Busek ВIT-3» [7], (б) ионный двигатель ИД-50 [10], (в) стационарный плазменный двигатель СПД-25 [9].

На рис. 2 показаны траектории селеноцентрического участка в селеноэкваториальной системе координат для тех же вариантов ЭРД.

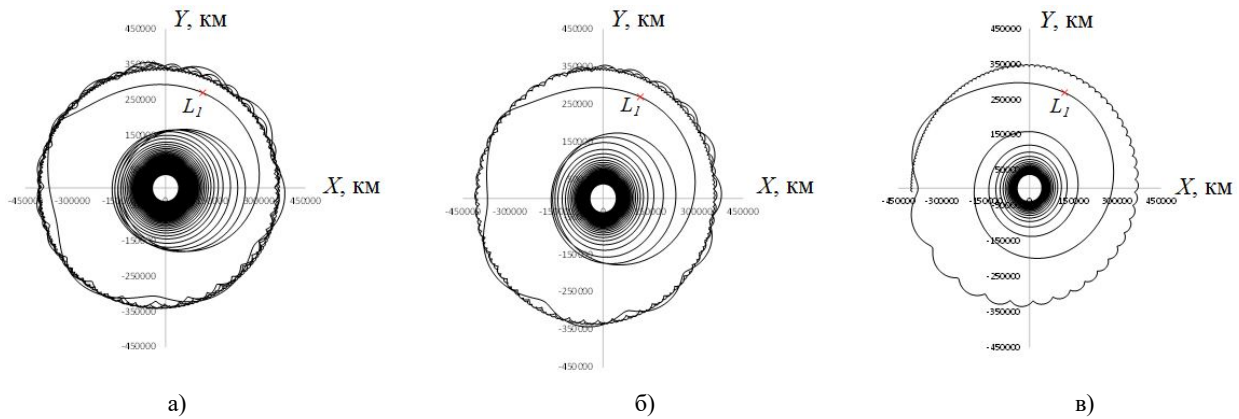


Рис. 1. Проекция оптимальной траектории «ОИСЗ – L₁ – ОИСЛ» на плоскость XY.

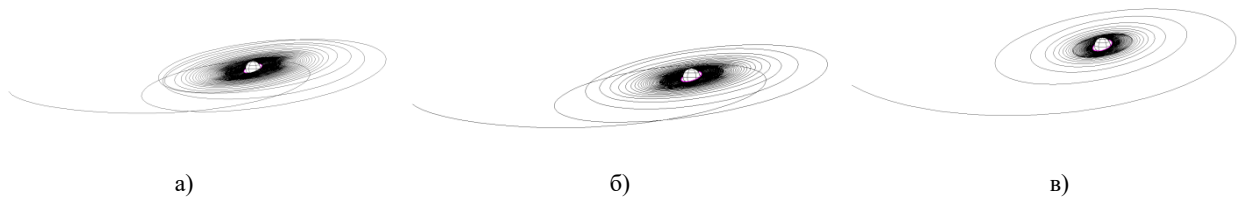


Рис. 2. Траектории селеноцентрического участка в селеноэкваториальной системе координат.

Анализ основных требований к ЭРДУ МКА типа Cubesat

Проектно-баллистический анализ перелета к Луне КА с малой тягой позволяет оценить длительность перелета «Земля-Луна» Δt_{Σ} , затраты характеристической скорости $\Delta V_{хар}$ и массу рабочего тела $m_{рт}$, для различных вариантов ЭРД: («Busek ВТ-3», ИД-50, СПД-25). В табл. 1 приведены проектно-баллистические характеристики для вариантов ЭРД.

Таблица 1. Характеристики перелета «Земля-Луна»

Характеристики перелета	Варианты ЭРДУ		
	Ионный двигатель Busek ВТ-3 [7]	Ионный двигатель ИД-50 [10]	Стационарный плазменный двигатель СПД-25 [9]
Тяга T , мН	1,25	2,3	4,5
Удельный импульс $I_{уд}$, с	2300	3500	800
Длительность перелета Δt_{Σ} , сутки	392	221	102
Характеристическая скорость $\Delta V_{хар}$, м/с (МКА массой 14 кг)	3241,76	3312,27	3472,67
Масса рабочего тела $m_{рт}$, кг	1,847	1,288	5,007

Выбор параметров ЭРДУ для перелета лунного МКА типа Cubesat

Двигатели малой мощности, к которым относятся стационарные плазменные двигатели (СПД) и ионные двигатели (ИД), имеют преимущества для перелета к Луне КА с малой тягой с использованием МКА Cubesat по техническим характеристикам, массе, объему и степени отработанности. Двигатели семейств СПД и ИД обладают приемлемыми для рассматриваемых задач значениями мощности, тяги и удельного импульса [7–10]. В табл. 2 показаны характеристики вариантов ЭРД.

Таблица 2. Характеристики ЭРД

Характеристики ЭРД	Варианты ЭРДУ		
	Ионный двигатель Busek ВТ-3 [7]	Ионный двигатель ИД-50 [10]	Стационарный плазменный двигатель СПД-25 [9]
Тип ЭРД			
Мощность P_w , Вт	56–75	50–140	100
Тяга T , мН	1,1	1–5	до 7
Удельный импульс $I_{уд}$, с	2150	3100–3700	800–1000
Масса двигателя $M_{эрд}$, кг	1,4	–	0,3
Суммарный импульс I_{Σ} , Нс	33460	–	35000

ЭРД малой мощности этого класса отвечают требованиям по энергомассовым характеристикам и ресурсу. ЭРД имеют массу и габариты, позволяющие разместить ЭРДУ на МКА типа Cubesat с учетом массовых и габаритных ограничений. На рис. 3 показана доля ЭРДУ в составе лунного Cubesat «Lunar IceCube».

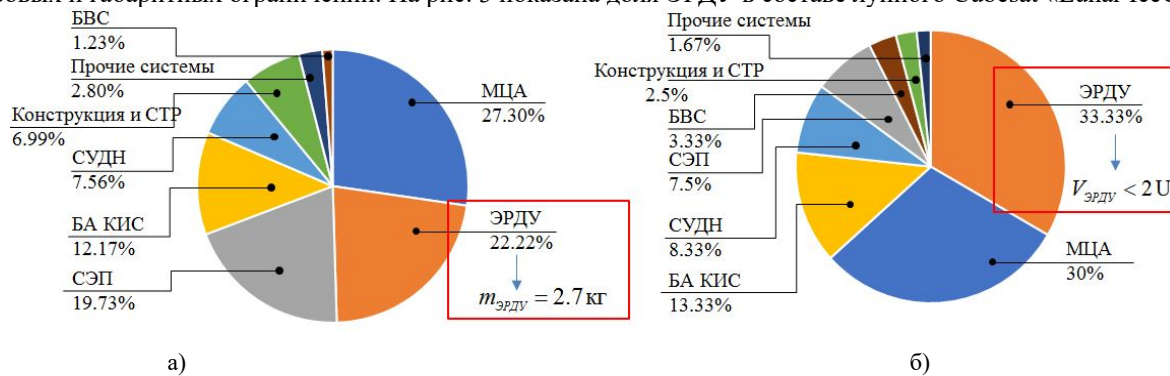


Рис. 3. Удельные массовые и объемные характеристики ЭРДУ в составе МКА типа Cubesat «Lunar IceCube» (МЦА – модуль целевой аппаратуры; ЭРДУ – электроракетная двигательная установка; СЭП – система электропитания; БА КИС – бортовая аппаратура командно-измерительной системы; СУДН – система управления движением и навигации; СТР – система терморегулирования; БВС – бортовая вычислительная система).

Заключение

В результате проектно-баллистического анализа исследованы схема и основные баллистические параметры перелета “ОИСЗ – L₁ – ОИСЛ” МКА типа Cubesat и сформированы требования к характеристикам ЭРД. Показано, что этим требованиям отвечают ионные и стационарные плазменные двигатели малой мощности. Ионные двигатели, обладая более высоким удельным импульсом, обеспечивают более низкие значения массы рабочего тела по сравнению со стационарными плазменными двигателями, но вследствие более низкой тяги отличаются большей продолжительностью перелета “Земля-Луна”.

Поскольку величина электрической мощности, доступной для питания ЭРДУ на борту МКА CubeSat, пропорциональна тяге и удельному импульсу, при использовании ЭРДУ с фиксированной потребляемой электрической мощностью может возникнуть необходимость увеличения площади солнечных батарей (СБ) в рамках ограничений стандарта Cubesat, т.е. требуется установить дополнительные СБ.

Проведен анализ возможности обеспечения перелета МКА типа Cubesat к Луне для применения его в полетах в системе “Земля-Луна” с учетом характеристик ЭРД.

Литература

1. J. Schoolcraft, A.T. Klesh, T. Werne MarCO: Interplanetary Mission Development On a CubeSat Scale, 14th International Conference on Space Operations, AIAA 2016-2491, 2016, 8 p.
2. S.D. Creecha, K.F. Robinson, R.Cox NASA's Space Launch System: Deep Space Access for CubeSats, 69th International Astronautical Congress, IAC-19,B4,5,5,x51284, 2019, 11 p.
3. R. Pritchett, K.C. Howell, D.C. Folta Low-Thrust Trajectory Design for a Cislunar CubeSat Leveraging Structures from the Bicircular Restricted Four-Body Problem, 69th International Astronautical Congress, IAC-19-C1.1.10, 2019, 19 p.
4. D. Folta, D. Dichmann, P. Clark, A. Naapala, K. Howell Lunar Cube Transfer Trajectory Options, 25th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS 15-353, 2015, 20 p.
5. S.W. Yoon, V.G. Petukhov, A.V. Ivanyukhin Minimum-Thrust Lunar Trajectories, 72nd International Astronautical Congress, IAC-21-C1.4.3, 2021, 10 p.
6. Юн Сон Ук, С.О. Фирсюк, В.М. Кульков. Проектно-баллистический анализ вариантов миссии Cubesat с электроракетными двигательными установками для перелета Земля-Луна. // Материалы 57-х Научных чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. 58-59.
7. S.D. Creecha, K.F. Robinson, R.Cox Electric propulsion for cubesats: a review, 72nd International Astronautical Congress, IAC-21, C4,8-B4.5A,1,x64088, 2021, 10 p.
8. R. Akhmetzhanov, A. Bogatyy, G. Dyakonov, D. Korolyov, D. Kashirin, G. Popov, S. Semenikhin. Electric Propulsion Thrusters of Next Generation Developed at RIAME MAI for Small Satellites // Presented at the 7th Russian-German Conference on Electric Propulsion and Their Application. Marburg, Germany, October 21-26, 2018.
9. В. Ким Стационарные плазменные двигатели в России. Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск №60.
10. В. М. Кульков, В. А. Обухов, Ю. Г. Егоров, А.А. Белик, А.М. Крайнов. Сравнительная оценка эффективности применения перспективных типов электроракетных двигателей в составе малых космических аппаратов // Авиационная и ракетно-космическая техника. Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета, №3(34) 2012. 187-195.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА УПРАВЛЯЕМОГО МЕТОДОМ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЕЗНОЙ НАГРУЗКИ

Кухаренко А.С., Корянов В.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
kuharenko-as@mail.ru

Аннотация. В работе представлен анализ вращательного движения возникающего в результате управления спускаемым аппаратом. Управление спускаемым аппаратом осуществляется методом смещения центра масс, которое происходит за счет изменения углового положения полезной нагрузки. Анализ вращательного движения заключается в выявлении особенностей в движении спускаемого аппарата управляемого вышеуказанным методом. Для проведения данного анализа в работе составлена математическая модель вращательного движения спускаемого аппарата. Моделирование углового движения выполнено с применением разработанного программного обеспечения, реализующего метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Результаты моделирования представлены в виде графических зависимостей, к которым относится траектория движения точки на поверхности спускаемого аппарата, а также годограф вектора угловой скорости в подвижной системе координат. По результатам проведенных исследований сделаны выводы об особенностях вращательного движения при управлении, а так же о возможности применения данного способа управления.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития передовой инженерной школы «Системная инженерия ракетно-космической техники» МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Введение

Объектом исследования в работе является спускаемый аппарат, в конструкции которого применено надувное тормозное устройство. Существует ряд преимуществ у спускаемых аппаратов оснащенных надувным тормозным устройством, перед спускаемыми аппаратами жесткой конструкции. К данным преимуществам относятся:

1. Повышение объемной доли полезной нагрузки под головным обтекателем ракетносителя. Связано это с вариативностью укладки надувной конструкции, что позволяет более эффективно использовать имеющийся объем.
2. Диаметр надувных тормозных систем не ограничен размером обтекателя ракетносителя. Таким образом, возможно создать больший диаметр миделева сечения спускаемого аппарата, это позволит достичь более приемлемую скорость посадки на ранних этапах спуска и осуществить посадку на возвышенностях.
3. Сложенная надувная тормозная система не закрывает доступ к полезной нагрузке. Данное преимущество позволяет использовать датчики и энергосистему полезной нагрузки космического аппарата при межпланетном полете и это дает возможность избежать дублирования этих систем.

Таким образом, применение надувных тормозных устройств повышает эффективность применения космической техники и их разработка и применение является актуальной задачей.

Однако, гибкость надувных тормозных устройств приводит к его деформации в процессе движения в атмосфере. Эти деформации, в свою очередь, изменяют аэродинамические характеристики, а так же динамическую устойчивость спускаемого аппарата. Указанные особенности вызывают возмущения траектории движения спускаемого аппарата, что приводит к отклонению точки посадки от расчетной либо к разрушению его конструкции в процессе спуска.

С целью компенсации возмущений, вызванных деформацией надувных тормозных устройств, а так же возмущений траекторных параметров необходимо осуществить управление движением спускаемым аппаратом.

Предложено реализовать управление методом изменения углового положения полезной нагрузки. В работе представлены результаты проведенного исследования движения спускаемого аппарата, возникающего при управлении указанным способом.

Основной текст

Конструкция исследуемого спускаемого аппарата состоит из 3-х основных составных частей (рис. 1). Внутри тормозного устройства расположен космический аппарат, который является полезной нагрузкой. С тормозным устройством полезная нагрузка соединена при помощи поворотного механизма, предназначенного для поворота полезной нагрузки вокруг точки их сопряжения. Изменение углового положения космического аппарата приводит к смещению центра масс спускаемого аппарата относительно продольной оси тормозного устройства. Управление движением происходит следующим образом: смещение центра масс вызывает поворот спускаемого аппарата на некоторый угол атаки, в результате чего появляется аэродинамическая сила перпендикулярная направлению его движения.

1.

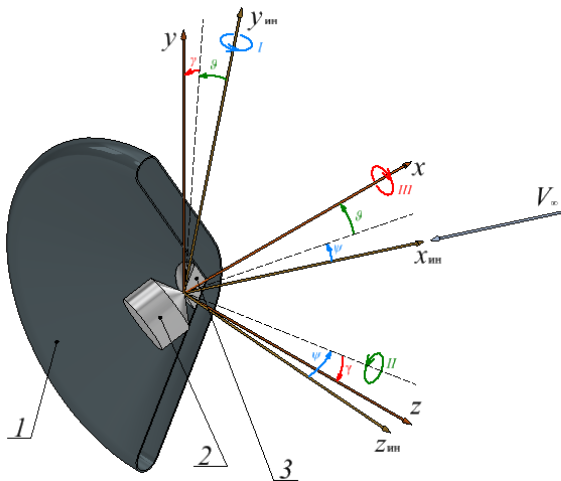


Рис. 1а. Схема рассматриваемого спускаемого аппарата и расположения используемых систем координат.

2. Надувное тормозное устройство
3. Космический аппарат
4. Поворотное устройство

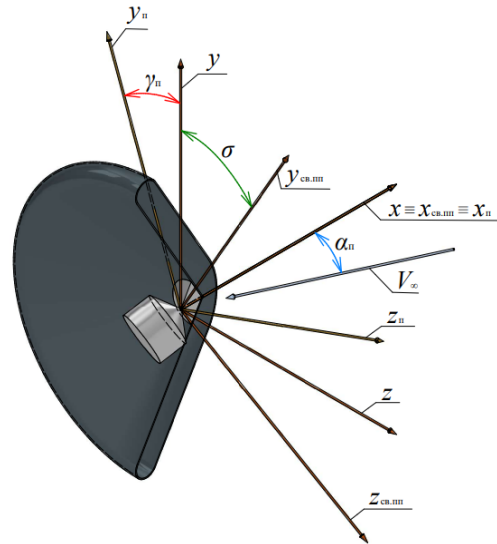


Рис. 1б. Схема рассматриваемого спускаемого аппарата и расположения используемых систем координат.

С целью математического описания вращательного движения спускаемого аппарата использованы следующие прямоугольные системы координат:

- $x_{ин}y_{ин}z_{ин}$ – инерциальная система координат относительно которой рассматривается угловое положение спускаемого аппарата.
- $xуz$ – система координат связанная со спускаемым аппаратом.
- $x_{св.пп}y_{св.пп}z_{св.пп}$ – система координат, связанная с плоскостью поворота полезной нагрузки. Изменение углового положение космического аппарата происходит в плоскости $x_{св.пп}y_{св.пп}$.
- $x_n y_n z_n$ — система координат связанная с плоскостью пространственного угла атаки, то есть плоскость $x_n y_n$ совпадает с плоскостью образованной осью x_n и вектором набегающего потока \vec{V}_∞ .

Согласно схемам, изображенным на рис. 1, составлена математическая модель вращательного движения спускаемого аппарата [1, 2]. Составленная математическая модель учитывает влияние на вращательное движение как внешних моментов, обусловленных взаимодействием с набегающим потоком, так и внутренних обусловленных работой поворотного устройства при управлении. В составленной математической модели принято допущение о том, что все элементы спускаемого аппарата являются абсолютно твердыми телами.

В результате смещения центра масс происходит изменение инерционных характеристик спускаемого аппарата. Тензор инерции спускаемого аппарата в системе координат связанной с плоскостью поворота полезной нагрузки имеет следующие значения:

- Тензор инерции спускаемого аппарата до поворота полезной нагрузки $J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$, где

$$J_{xx} \neq J_{yy} = J_{zz}$$

- Тензор инерции спускаемого аппарата после поворота полезной нагрузки $J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & 0 \\ J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$, где

$$J_{xx} \neq J_{yy} \neq J_{zz}; J_{xy} < 0$$

$J_{xx}; J_{yy}; J_{zz}$ — главные моменты инерции, J_{xy} — центробежный момент инерции.

В тензоре инерции спускаемого аппарата после поворота полезной нагрузки присутствуют центробежные моменты инерции, а так же главные моменты инерции становятся не равны между собой.

В работах [3], [4] проведены исследования вращательного движения твердых тел с неравными между собой главными моментами инерции. Показано, что данные инерционные свойства приводят к возникновению связей между проекциями угловых скоростей на оси системы координат связанной с твердым телом.

В работе была поставлена задача исследовать вращательное движение системы из трех твердых тел взаимодействующих с набегающим потоком при изменении их взаимного углового положения в процессе движения.

Результаты решения уравнений математической модели

Решение уравнений математической модели проведено численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Результаты моделирования вращательного движения спускаемого аппарата представлены в виде траектории движения точки на поверхности спускаемого аппарата. Годограф вектора угловой скорости относительно подвижной системы координат так же представлен в результатах моделирования.

Заключение (или Выводы)

1. Рассмотрен метод управления спускаемым аппаратом оснащенного специальным тормозным устройством.
2. Составлена математическая модель вращательного движения спускаемого аппарата, которая учитывает как моменты от внешних сил так и моменты от внутренних сил, возникающие при осуществлении управления.
3. Результаты решения представлены в виде траекторий движения точки на носке спускаемого аппарата, а так же в виде годографа вектора угловой скорости.
4. Полученные результаты позволяют сформулировать требования к системе автоматического управления.

Литература

1. Дмитриевский А.А., Казаковцев В.П., Устинов В. Ф., Лысенко Л. Н., Жилейкин В. Д., Кольцов Ю. Ф. Движение ракет. М., Военное издательство, 1968. 464 с.
2. Динамика движения спускаемых аппаратов в атмосфере планеты : учебное пособие / В. В. Корянов. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — 108 с.
3. Корянов В.В., Кухаренко А.С. Влияние неравенства главных моментов инерции на вращательное движение летательного аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 2. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-2-2254>
4. Mark S. Ashbaugh, Carmen C. Chiconc, Richard H. Cushman The Twisting Tennis Racket. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 3, No. 1, 1991

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ БЕСКОНТАКТНОЙ ТРАНСПОРТИРОВКИ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА ИОННЫМ ПОТОКОМ

Ледков А.С.

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
Самара, Россия
ledkov@inbox.ru*

Аннотация. Рассматривается задача уборки крупногабаритного космического мусора с низкой околоземной орбиты с помощью ионного потока, генерируемого двигателем активного космического аппарата. Разработана математическая модель, описывающая пространственное движение осесимметричного объекта космического мусора под действием гравитационных и ионных сил и моментов. Предложен алгоритм определения наиболее благоприятного для бесконтактной транспортировки режима движения космического мусора относительно его центра масс. Проведено численное моделирование спуска с орбиты объекта космического мусора в неблагоприятном и благоприятном режимах движения.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-19-00160.

Введение

Проблема космического мусора является одной из наиболее актуальных проблем современной космонавтики. Крупногабаритный космический мусор, к которому относятся старые ступени ракет, разгонные блоки и нефункционирующие спутники, представляет серьезную опасность как для уже функционирующих, так и для вновь выводимых на орбиту космических аппаратов. Активная уборка космического мусора, под которой понимается его спуск с орбиты на Землю или перемещение на орбиту захоронения с помощью специального активного космического аппарата, является одной из ключевых мер на пути решения этой проблемы. В настоящее время обсуждается несколько различных подходов к созданию систем активной уборки, которые можно разделить на контактные, подразумевающие непосредственную стыковку или захват космического мусора с использованием троса, и бесконтактные – исключаящие прямой механический контакт между активным космическим аппаратом и космическим мусором. Основными достоинствами бесконтактных способов являются их безопасность и возможность осуществлять транспортировку быстро вращающихся объектов [1].

В данном исследовании рассматривается бесконтактная уборка космического мусора с помощью ионного потока, генерируемого электрическим ракетным двигателем активного космического аппарата (рис. 1). Предполагается, что активный космический аппарат подлетает к космическому мусору на расстояние порядка десяти метров и направляет на него реактивную струю своего двигателя. Врезаясь в поверхность космического мусора, частицы этой струи передают ему часть своего импульса. Таким образом потоком частиц создается сила порядка нескольких десятков миллиньютонов. В дальнейшем будем называть эту силу ионной. Создающий ионный поток двигатель генерирует тягу, которая стремится отдалить активный космический аппарат от объекта космического мусора. Для компенсации этой тяги аппарат должен быть оснащен еще одним, противоположно направленным двигателем. Двойной расход топлива является основным недостатком описанного способа бесконтактной транспортировки. Поскольку точка приложения генерируемой потоком ионной силы не совпадает с центром масс объекта космического мусора, помимо силы ионный поток создает и ионный момент, который стремится повернуть объект относительно центра масс. Изменение ориентации объекта в потоке приведет к изменению величины и направления ионной силы. Предыдущие исследования показали, что в плоском случае движение объекта космического мусора относительно центра масс оказывает существенное влияние на время его увода с орбиты [2].

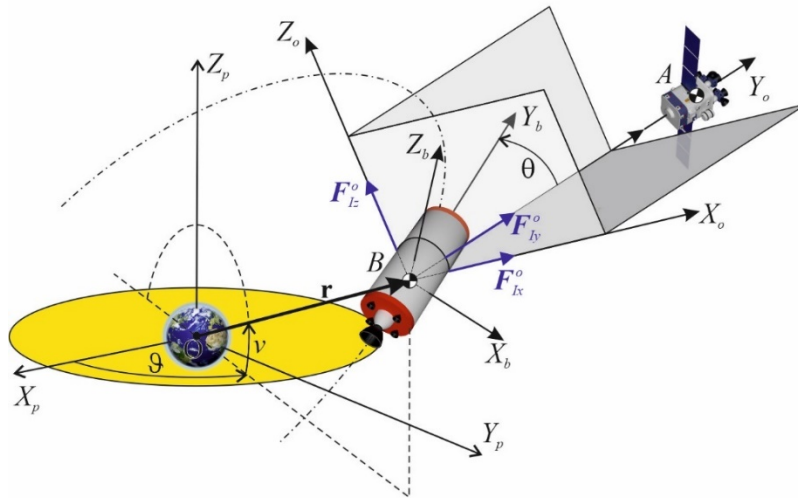


Рис. 1. Рассматриваемая механическая система и системы координат.

Целью работы является определение наиболее благоприятного для транспортировки режима движения объекта космического мусора относительно центра масс под действием ионного и гравитационного моментов, и оценка эффективности транспортировки в этом режиме по сравнению с другими возможными режимами движения. Под наиболее благоприятным будем понимать режим движения объекта космического мусора относительно центра масс, при котором проекция осредненной ионной силы на касательное к орбите космического мусора направление максимальна по модулю.

Математическая модель

Рассматривается пространственное движение осесимметричного объекта космического мусора, имеющего форму цилиндра. Считается, что центр масс объекта лежит на оси его симметрии. На объект действуют гравитационный и ионный моменты. Генерирующий ионный поток активный космический аппарат удерживается его системой ориентации в неизменном положении относительно объекта космического мусора [3]. Ось ионного потока проходит через центр масс объекта.

С помощью теоремы об изменении момента количества движения записаны динамические уравнения движения объекта космического мусора относительно центра масс, которые совместно с кинематическими уравнениями Эйлера составляют замкнутую системы. Для случая динамически симметричного цилиндра осуществлен переход к новым R-G переменным [4], опираясь на классический случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа

$$R = \omega_y \bar{I}_y, \quad G = Rc_\theta + (\omega_x s_\varphi - \omega_z c_\varphi) s_\theta, \quad (1)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости на оси связанной системы координат $BX_b Y_b Z_b$ (рис. 1), $c_q = \cos(q)$,

$s_q = \sin(q)$, $\bar{I}_y = I_y/I$, I и I_y – поперечный и продольный моменты инерции космического мусора. После этого записана упрощенная система дифференциальных уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{M_I}{I} + \frac{\dot{\vartheta}^2 c_\theta c_\gamma^2 - \nu}{s_\theta} + \frac{2\dot{\vartheta} c_\gamma - \nu(G - Rc_\theta)}{s_\theta} + \ddot{\vartheta} s_{\gamma-\nu} - \frac{3\mu(\bar{I}_y - 1)s_\theta c_\theta s_\gamma^2}{r^3} - \frac{(G - Rc_\theta)(R - Gc_\theta)}{s_\theta^3}, \\ \dot{\gamma} &= \frac{(G - Rc_\theta)}{s_\theta^2} + \dot{\nu} + \frac{\dot{\vartheta} c_\gamma - \nu c_\theta}{s_\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{R}{\bar{I}_y} - \frac{(G - Rc_\theta)c_\theta}{s_\theta^2} + \dot{\nu} + \frac{\dot{\vartheta} c_\gamma - \nu}{s_\theta}, \\ \dot{G} &= \dot{\vartheta}^2 s_{\gamma-\nu} c_{\gamma-\nu} - \dot{\vartheta} \dot{\theta} c_{\gamma-\nu} - \frac{(R - Gc_\theta)\dot{\vartheta} s_{\gamma-\nu}}{s_\theta} - \frac{3\mu(\bar{I}_y - 1)c_\gamma s_\gamma s_\theta^2}{r^3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где γ, θ, φ – углы Эйлера, ν и ϑ – углы, задающие положение радиус вектора центра масс космического мусора относительно инерциальной системы координат (рис. 1), r – расстояние от центра масс Земли до центра масс космического мусора, μ – гравитационный параметр Земли, M_I – ионный момент, $R = const$ для случая осесимметричного тела. Положение центра масс определяется уравнениями

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + (\dot{\nu}^2 + \dot{\vartheta}^2 c_\nu^2) + \frac{F_{Ix}^o}{m_B}, \quad \ddot{\nu} = -\frac{2\nu\dot{r}}{r} - \dot{\vartheta}^2 c_\nu s_\nu + \frac{F_{Iz}^o}{rm_B}, \quad \ddot{\vartheta} = -\frac{2\dot{\vartheta}r}{r} + \frac{2\dot{\nu}s_\nu}{c_\nu} + \frac{F_{Iy}^o}{rm_B c_\nu}, \quad (3)$$

где m_B – масса объекта космического мусора, $F_{Ix}^o, F_{Iy}^o, F_{Iz}^o$ – проекции ионной силы на оси орбитальной системы координат $BX_o Y_o Z_o$ (рис. 1).

Для случая осесимметричного тела и неизменного относительного положения активного космического аппарата величина и направление ионных силы и момента зависят от угла между осью тела и проходящей через центр масс тела осью ионного потока. Эти зависимости могут быть получены численно с помощью расчетной процедуры, описанной в [5]. Ее суть заключается в разбиении поверхности тела на треугольники, вычислении силы, оказываемой ионным потоком на каждый из них, и нахождении результирующей ионной силы и момента относительно центра масс объекта. Полученные численные зависимости проекций ионной силы и момента на оси связанной с объектом системы координат могут быть аппроксимированы рядами Фурье.

Для случая невозмущенного движения, когда центр масс объекта движется по круговой орбите, найдены выражения, определяющие положение равновесия системы

$$M_I(\theta_*) + 3n^2(I - I_y)c_{\theta_*}s_{\theta_*} = 0, \quad c_{\gamma_*} = \frac{R}{n(4-3I_y)s_{\theta_*}}, \quad G_* = \frac{3c_{\theta_*}R(1-I_y)}{4-3I_y}, \quad (4)$$

где n – угловая скорость движения по круговой орбите. С помощью уравнений (4) построена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая зависимость положения равновесия от коэффициента $\chi = 3n^2(I - I_y)/\max(M_I)$. Записан обобщенный интеграл энергии невозмущенного движения. С помощью этого интеграла получена приближенная оценка Ω для максимальной угловой скорости вращения объекта космического мусора относительно центра масс в форме

$$\Omega^2 = \theta_0^2 + R^2 + \frac{(G_0 - Rc_{\theta_0})^2}{s_{\theta_0}^2}, \quad (5)$$

где индекс «0» обозначает значение координат в начальный момент времени.

Определение благоприятного режима движения

При определении наиболее благоприятного режима движения космического мусора будем отталкиваться от случая невозмущенного движения объекта космического мусора под действием гравитационного и ионного моментов по круговой орбите. В качестве показателя эффективности режима будем использовать осредненную по времени проекцию ионной силы на ось BY_0

$$\bar{F}_{Iy}^o(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_{Iy}^o(\theta(t)) dt, \quad (6)$$

где τ – интервал времени, на котором вычисляется осредненная сила.

Предлагается следующий алгоритм поиска наиболее благоприятного для бесконтактной транспортировки углового режима движения.

Генерируется набор из N точек $P_{oi} = (\gamma_{oi}, \theta_{oi}, G_{oi})$, случайным образом расположенных в области фазового пространства, заданного неравенствами $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, $-\Omega_{max} \leq G \leq \Omega_{max}$. При выборе граничных угловых скоростей целесообразно ограничиться значением $\Omega_{max} = 7$ рад/с, что соответствует данным наблюдений, приведенным в [6].

Для каждой точки P_{oi} вычисляется значение Ω_i с помощью формулы (5). Каждая точка P_{oi} используется в качестве начальных условий при интегрировании системы уравнений для круговой орбиты. Если $\Omega_i < 10n$, то интегрирование ведется до момента времени T_1 . Если $\Omega_i \geq 10n$, то в процессе интегрирования отслеживается текущее значение G и интегрирование останавливается, когда переменная G второй раз принимает начальное значение G_0 .

На основе результатов интегрирования с помощью формулы (6) вычисляется осредненная сила $\bar{F}_{Iy_i}^o$.

Из полученного набора N значений $\bar{F}_{Iy_i}^o$ выбирается K наименьших значений и формируется соответствующий набор точек P_j , где $j \in [1, K]$.

От каждой начальной точки P_j производится поиск оптимальной точки P_j^{opt} , которой соответствует наименьшее значение $\bar{F}_{Iy_j}^o$ (вычисляется согласно шагам 3 и 4).

Из полученного на шестом шаге набора K значений P_j^{opt} выбирается наименьшее. Соответствующая ему точка P_j принадлежит фазовой траектории, соответствующей наиболее благоприятному для бесконтактной транспортировки режиму движения.

Следует отметить, что выбор конкретных значений N и K определяется доступными исследователю вычислительных ресурсов. Предлагаемый алгоритм хорошо распараллеливается. Для определения оптимального режима движения целесообразно последовательно проводить серии из N расчетов до тех пор, пока на протяжении нескольких серий оптимальное значение $\bar{F}_{Iy_j}^o$ не перестанет улучшаться.

С помощью приведенного выше алгоритма для объекта космического мусора цилиндрической формы близкого по геометрическим параметрам к ступени Космос 3М была определена фазовая траектория, на которой осредненная ионная сила имеет максимальное по модулю значение.

Заключение

Проведено исследование пространственного движения относительно центра масс осесимметричного объекта космического мусора под действием гравитационного и ионного моментов и предложен алгоритм определения наиболее благоприятного для бесконтактной транспортировки режима движения. Анализ результатов численного моделирования показал, что:

1. При поиске благоприятного режима движения особое внимание следует уделить области сравнительно небольших угловых скоростей $\Omega_i < 10n$.

2. В отличие от случая плоского движения, положение равновесия находится довольно далеко от оптимального режима. Разница в осредненной ионной силе в положении равновесия и на наиболее благоприятной траектории для рассматриваемого объекта космического мусора составляет 0,8%.

3. Разница в осредненной силе между самым благоприятным и неблагоприятным режимом движения для рассматриваемого объекта космического мусора составляет около 7%.

4. В случае, если объект находится в неблагоприятном режиме, то имеет смысл перевести его в режим вращения. Эта операция может быть осуществлена смещением оси потока с центра масс объекта.

Литература

1. A. Ledkov, V. Aslanov // Review of contact and contactless active space debris removal approaches, Progress in Aerospace Sciences, 134:100858 2022. 1-19.
2. V. S Aslanov, A. S. Ledkov // Fuel costs estimation for ion beam assisted space debris removal mission with and without attitude control, Acta Astronautica, 187 2021. 123-132.
3. V. S Aslanov, A. S. Ledkov // Spatial dynamics and attitude control during contactless ion beam transportation, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 44:8 2021. 1572-1577.
4. В.С. Асланов // Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. 2004. 160 с.
5. A. Alpatov, F. Cichocki, A. Fokov, S. Khoroshylov, M. Merino, A. Zakrzhevskii // Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object, Acta Astronautica, 119 2016. 241-251.
6. J. Šilha, J. N. Pittet, M. Hamara, T. Schildknecht // Apparent rotation properties of space debris extracted from photometric measurements, Advances in space research, 61:3 2018. 844-861.

ПОСТРОЕНИЕ ОПОРНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗГРУЗКИ МАХОВИКОВ ПРИ МЕЖПЛАНЕТНОМ ПЕРЕЛЕТЕ

Маштаков Я.В., Ткачев С.С.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия
mashtakov@keldysh.ru

Аннотация. Рассматривается задача обеспечения требуемой ориентации космического аппарата при выполнении межпланетного перелета с малой тягой. В качестве исполнительных органов используются двигатели-маховики. При компенсации возмущающих моментов, вызванных наличием эксцентриситета тяги и влиянием давления солнечного излучения, маховики накапливают избыточный кинетический момент. Предлагаются различные режимы углового движения, существенно снижающие скорость его накопления.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10009, <https://rscf.ru/project/22-71-10009/>.

Введение

В настоящее время для совершения маневров при осуществлении межпланетных перелетов в основном используются химические двигатели, обладающие высокой тягой и способные в очень короткие сроки существенно изменить скорость аппарата. К недостаткам этих двигателей можно отнести низкую величину удельного импульса (около 300 секунд), что приводит к высоким затратам топлива. Альтернативой традиционным двигателям служат плазменные или ионные установки. Их удельный импульс достигает уже тысячи секунд и более [1], что существенно увеличивает возможный запас характеристической скорости. Отметим, что эти двигатели обладают и недостатками. В первую очередь, это высокое энергопотребление, а значит необходимость установки больших солнечных панелей или радио-изотопных энергетических установок. Во-вторых, тяга таких двигателей существенно меньше, чем у химических, и время их непрерывной работы может составлять недели и даже месяцы. При этом на всем отрезке активной работы двигателей необходимо обеспечивать достаточно точную ориентацию аппарата для выдачи тяги в нужном направлении. Последняя задача решается, например, при помощи системы управления ориентацией на основе двигателей-маховиков.

Отметим, что на практике ось тяги двигателя не проходит точно через центр масс космического аппарата, а значит будет возникать постоянно действующий момент. Помимо этого, на спутник также будет действовать момент сил, связанный с давлением солнечного излучения. При компенсации этих возмущений двигатели-маховики будут постоянно накапливать избыточный кинетический момент. Это, в конечном итоге, потребует их разгрузки. Для околоземных миссий эта проблема может эффективно решаться при помощи магнитных исполнительных органов [2], однако в условиях межпланетного перелета единственным способом является установка дополнительных двигателей ориентации для разгрузки маховиков. Затраты топлива при этом могут оказаться существенными. Также, еще одним решением является установка двигателя на подвижную платформу [3], которая позволяет изменять направление оси тяги относительно корпуса аппарата, однако установка таких систем потребует дополнительных затрат места и массы, и может быть сопряжена с техническими трудностями по адаптации двигательных установок.

В настоящей работе предлагается подход к построению опорного углового движения космического аппарата, позволяющий, с одной стороны, учесть требования по направлению вектора тяги двигателя, а с другой – существенно снизить скорость накопления избыточного кинетического момента. При этом полагается, что двигатель жестко закреплен относительно корпуса аппарата.

Постановка задачи

Будем полагать, что космический аппарат представляет собой конфигурацию из трех твердых тел: центральное тело (корпус) и две солнечные панели, закрепленные относительно корпуса при помощи одностепенных шарниров. Также полагаем, что угол ориентации панелей относительно корпуса идеально управляем, а ось вращения солнечных панелей ортогональна вектору тяги двигателя. В случае, когда центр масс панелей находится на оси их вращения, центр масс системы в целом будет неподвижен относительно корпуса аппарата. Рассматривая такую упрощенную постановку задачи, и пренебрегая влиянием солнечного давления на угловое движение, уравнения движения для абсолютной угловой скорости записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\Sigma \dot{\boldsymbol{\omega}} = & -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_\Sigma \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 + \mathbf{H}) - \mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 - \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 \\ & - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{J}_1 (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_1) - \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{J}_1 (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_2) \\ & - \mathbf{J}_1 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_1) - \mathbf{J}_2 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_2) - \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{M}_{thr}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{J}_\Sigma = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, \mathbf{J}_s – тензор инерции корпуса относительно общего центра масс системы (точки C), \mathbf{J}_k – текущий тензор инерции k -ой солнечной панели относительно точки C , записанный в проекции на оси связанной с корпусом системы координат, $\boldsymbol{\Omega}_k$ – относительная угловая скорость солнечных панелей, \mathbf{H} –

величина запасенного маховиками кинетического момента, M_{thr} – момент тяги двигателя. Отметим, что эти уравнения – следствие закона изменения суммарного кинетического момента системы, то есть

$$\frac{dK_C}{dt} = M_{thr}.$$

Если аппарат не меняет своего положения относительно инерциального пространства, то и момент в правой части остается постоянным. Это приводит к линейному росту суммарного кинетического момента системы, а значит и к накоплению маховиками избыточного кинетического момента. В то же время, если рассматривается постоянная закрутка аппарата вокруг вектора тяги, или же периодическая переориентация вокруг вектора тяги на 180° , то момент тяги двигателя «усредняется», а значит маховики не будут накапливать избыточный кинетический момент. Это подтверждается результатами моделирования (рис. 1)

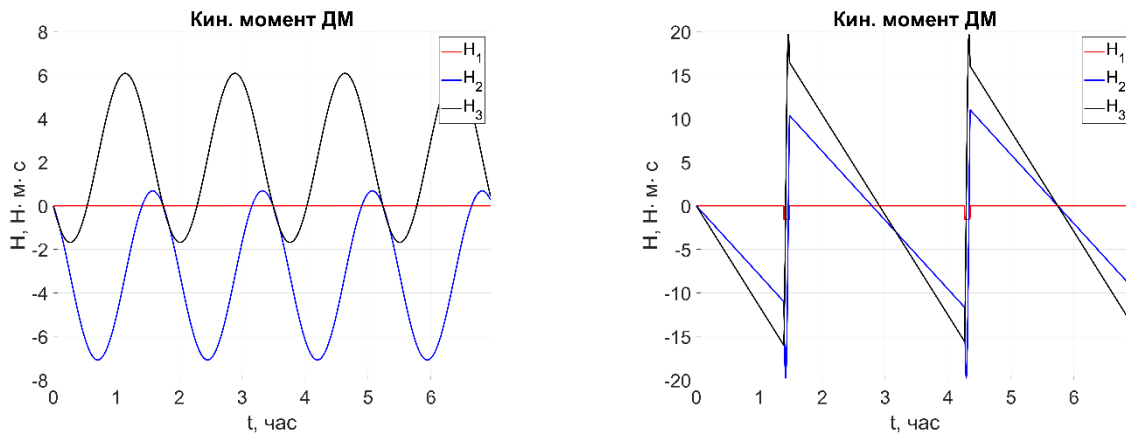


Рис. 1. Эволюция кинетического момента маховиков при постоянной закрутке (слева) и периодической переориентации (справа).

При постоянной закрутке аппарата может существенно снижаться токосъем солнечных панелей. Это связано с взаимной ориентацией требуемой оси тяги и направления на Солнце (рис. 2). В случае, когда требуемое направление тяги близко к направлению на Солнце, эффективность солнечных панелей практически не снижается (левый рисунок). В случае же большого угла между требуемой тягой и направлением на Солнце, эффективность токосъема может снижаться уже существенно (правый рисунок).

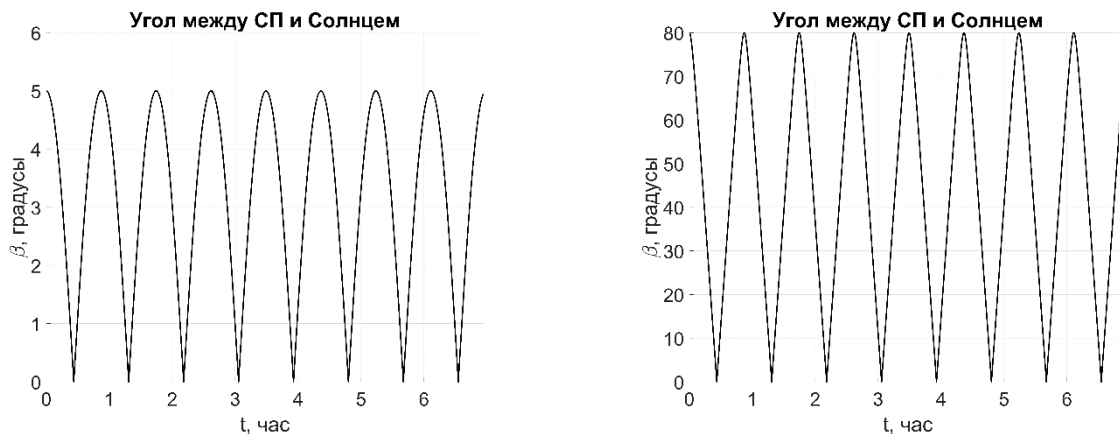


Рис. 2. Угол между нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце.

В то же время, при периодической переориентации время уменьшения токосъема оказывается уже существенно меньше, и общая эффективность энергосистемы оказывается практически независимой от взаимной ориентации требуемой оси тяги и направления на Солнце.

Заключение

Представленная упрощенная постановка задачи показывает, что удастся существенно снизить скорость накопления маховиками избыточного кинетического момента путем выбора определенного режима движения. Отметим, что в более полной постановке, учитывающей смещения общего центра масс системы из-за вращения солнечных панелей, влияние давления солнечного излучения, а также орбитальное движение и эволюцию взаимной ориентации оси тяги и направления на Солнце, качественный результат существенного снижения скорости накопления избыточного кинетического момента сохраняется.

Литература

1. Bugrova A.I. et al. Experimental investigation of a low-power stationary plasma thruster // *Technical Physics Letters*. 2014. Vol. 40, № 1. P. 81–83.
2. Giulietti F., Quarta A.A., Tortora P. Optimal control laws for momentum-wheel desaturation using magnetorquers // *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. 2006. Vol. 29, № 6. P. 1464.
3. Pizzetti A., Rizza A., Topputo F. Autonomous Wheel Off-Loading Strategies for Deep-Space CubeSats // *Aerotecnica Missili & Spazio*. 2023. Vol. 102, № 1. P. 3–15.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Морозов В.М.¹, Каленова В.И.¹, Рак М.Г.²

1 - НИИ механики МГУ, Москва, Россия

2 - МГУ, механико-математический факультет

moroz@imec.msu.ru

Аннотация. Важный класс задач управления – стабилизация стационарных движений спутников относительно центра масс при помощи магнитных моментов сил различной природы. Для исследования указанных задач применяется разработанная авторами теория приводимости линейных нестационарных систем с управлением и наблюдением к стационарным системам. Свойство приводимости системы к стационарной эффективно используется при анализе управляемости и при построении алгоритмов стабилизации. Решен ряд конкретнейших задач магнитной стабилизации спутников.

Введение

Задачи управления ориентацией спутников актуальны и представляют большой интерес как в прикладном, так и в теоретическом отношении. Обзор работ по магнитной стабилизации содержится в [1, 2]. Различные задачи стабилизации стационарных движений спутника (положений относительного равновесия и регулярных прецессий) при помощи магнитных моментов различной природы рассматривались авторами в ряде работ [3–6].

Линеаризованные в окрестности стационарных движений уравнения представляются линейными нестационарными системами (ЛНС), так как управляющий момент является функцией геомагнитного поля, которое изменяется во время движения спутника по орбите. Предлагаемый аналитический подход к изучению рассматриваемых задач основан на принадлежности исходной ЛНС к классу систем, приводимых к стационарным системам большего порядка [7].

Основной результат

Рассматривается движение спутника вокруг центра масс, движущегося по круговой орбите, в гравитационном поле Земли. Управляющий момент создается либо за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли [1–3], либо силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность спутника [8].

Линеаризованные в окрестности стационарных движений (относительного равновесия или регулярных прецессий), уравнения управляемого движения имеют вид

$$\ddot{x} + D\dot{x} + Rx = B(t)u \quad (1)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 – малые углы отклонений от стационарных решений.

В зависимости от модели магнитного поля элементы матрицы $B(t)$ считаются периодическими функциями орбитальной частоты и/или кратных ей частот.

Задача стабилизации состоит в построении управления в виде обратной связи по переменным вектора состояния системы (1), которое обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарного движения.

Показано [3–6], что линейная нестационарная система (1) относится к классу ЛНС, приводящихся к стационарным системам большего порядка при помощи конструктивного преобразования. Следуя разработанному подходу к исследованию таких систем [7], при наличии управляемости стационарной системы строятся корректные алгоритмы стабилизации в виде линейной обратной связи с постоянными коэффициентами. Для введения управления в исходную нестационарную систему (1) используются дополнительные переменные таким образом, чтобы линейное преобразование вектора состояния расширенной стационарной системы к вектору, содержащему переменные исходной системы и дополнительные, было невырожденным.

Указанный способ был успешно применен при решении задач стабилизация положения относительного равновесия и регулярных прецессий спутника как при помощи собственных магнитных моментов, так и при помощи моментов сил Лоренца. Математическое моделирование подтвердило эффективность разработанной методики [3–6].

Литература

1. М. Ю Овчинников, Д.С.Ролдугин. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии, 3:2. 2019.73-86.
2. M. Yu.Ovchinnikov, D. S. Roldugin. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites //Progress in Aerospace Sciences. 2019. 100546.
3. В.М.Морозов, В.И.Каленова. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед., 58:3. 2020. 199–207.
4. V.I.Kalenova, V.M.Morozov. Novel Approach to Attitude Stabilization of Satellite using Geomagnetic Lorentz forces// Aerosp. Sci. Technol., 106: 106105. 2020.
5. Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. 2021. Т. 59. № 5. С. 393-407.
6. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикладная математика и механика. 2021. Т.85. № 4. С. 436-453.
7. В.И.Каленова, В.М.Морозов// Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. 2010, 2016. 208с.
8. А.А.Тихонов. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед., 41:1. 2003. 69-79.

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ПЕРЕЛЁТА К ЛУННОЙ ОРБИТАЛЬНОЙ СТАНЦИИ НА ВЫСОКОЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕЙ ДОСТАВКИ ЭКИПАЖА НА ЛУННУЮ БАЗУ

Муртазин Р.Ф., Беляева Е.К.

*ПАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва
ketti-g67@mail.ru*

Аннотация. В работе предлагается использование Лунной орбитальной станции на полярной высокой круговой орбите, которая обеспечит надежность и безопасность транспортной системы для доставки экипажа на Лунную базу. Для повышения эффективности системы разработан «грависферный» способ, позволяющий существенно увеличить массу доставляемой полезной нагрузки на Луну. В работе представлены варианты транспортных систем с использованием Лунной орбитальной станции и проведено их сравнение с существующей двухпусковой схемой на базе РН сверхтяжелого класса.

Основными крупными проектами пилотируемой космонавтики за последние 50 лет являются околоземные станции. Следующий шаг в её развитии видится в организации пилотируемых полётов за пределы земных орбит, а именно освоение Луны. В перспективе планируется создание Лунных Баз в районе Южного полюса, где в кратерах были открыты большие запасы воды в виде льда. На сегодня, единственная транспортная система (ТС) для лунных миссий была реализована в рамках программы «Аполлон». Для упрощения полётных операций была использована прямая баллистическая схема полёта, предложенная Ю.В. Кондратьевым. Корабль «Аполлон» состоял из соединённых служебного и командного отсеков и лунного модуля, выводимых совместно на околоземную орбиту с помощью ракеты-носителя (РН) «Сатурн-5» сверхтяжёлого класса (СТК) грузоподъёмностью около 140 т. Масса лунного модуля составляла около 15 т, что позволяло обеспечить трёхсуточное пребывание на поверхности Луны двух астронавтов [1].

В этой же парадигме предполагается реализовать ТС в Российской Лунной программе. Согласно схеме, с помощью двух РН СТК на НОО выводятся пилотируемый транспортный корабль (ПТК) «Орёл» и лунный взлётно-посадочный корабль (ЛВПК). После стыковки экипаж из четырёх космонавтов переходит в ЛВПК для двухнедельной экспедиции на поверхность Луны. По некоторым оценкам для построения Лунной Базы потребуется не менее 400 человеко-выходов на лунную поверхность, для чего необходимо выполнить около 10 таких парных запусков.

Временная приостановка разработки отечественной РН СТК приводит к переносу сроков создания Лунной базы и необходимости рассмотрения других подходов, обеспечивающих решение задачи высадки российских космонавтов в районе Южного полюса Луны.

В 2021 году в качестве альтернативы рассматривалась четырёхпусковая схема полёта с использованием РН тяжёлого класса «Ангара-А5В», позволяющая за счёт околоземной орбитальной станции (ОС) отказаться от дорогостоящих сверхтяжёлых РН в качестве средства выведения. При таком подходе стартовая масса ПТК-М, а достижимая масса ЛВПК на НОО составляют 19 т, что позволяет осуществить выход на Луну только двух космонавтов. Для обеспечения жизнедеятельности экипажа в течение двух недель требуется «опережающая» доставка в район посадки ЛВПК лунного грузового корабля, т.е. потребуются дополнительный двухпусковой кластер и, таким образом, вся схема превращается в шестипусковую. Надёжность выполнения шестипусковой схемы, согласно расчётам, составила только 0,67 при требуемом показателе 0,8. Кроме того эта схема очень чувствительна к возможным переносам запусков РН «Ангара-А5В» [2]. Двухпусковая, как и четырёхпусковая схемы предполагают одноразовое использование всех элементов ТС и достижение НОО осуществляется прямым перелётом, где требуется ~3,15 км/с для отлетного импульса при выходе на транслунную траекторию и ~900 м/с на выдачу тормозного импульса в окрестности Луны (время перелёта 3,5 суток).

В отличие от российской программы в США в качестве транспортного узла для миссий в дальний космос рассматриваются лунные орбитальные станции (ЛОС), например, «Deep Space Gateway» на высокоэллиптической лунной гало-орбите (NRHO) с высотами пери- и апоцентра 2500 км и 75000 км соответственно. Такая станция позволит осуществлять высадку на поверхность Луны, а также предполагается ее использование для полётов к другим планетам в качестве Космопорта. Основным преимуществом NRHO являются малые затраты характеристической скорости необходимые для перехода на эту орбиту ~480 м/с [3]. Существенным недостатком NRHO является её неустойчивость, приводящая к необходимости проведения высокоточных коррекций с частотой 1-2 раза за один виток, составляющий ~7 суток [4].

С целью исключения недостатков NRHO в работе предлагается разместить ЛОС на круговой полярной высокой лунной орбите (ВЛО) высотой около 10000 км. Основным преимуществом ВЛО по сравнению с NRHO является долгосрочная устойчивость орбиты, а вследствие круговой орбиты появляются большие возможности для срочного возвращения экипажа с поверхности Луны на станцию. Прямой перелёт на ВЛО составит ~700 м/с, однако за счёт использования «грависферного» способа перехода на ВЛО, включающего в себя предварительный перевод корабля на высокоэллиптическую орбиту с апоселением вблизи грависферы Луны, можно получить снижение затрат V_x – характеристической скорости на достижение ВЛО на 150 м/с по

сравнению с РНО и почти на 550 м/с по сравнению с НОО. Это позволит, при прочих равных условиях, доставлять на ЛОС большую полезную нагрузку [5].

Развертывание ЛОС является эффективным подходом для увеличения масс ПТК-М и ЛВПК и снижения чувствительности схемы к переносам запусков. Предлагаемая ЛОС фактически является «базовым лагерем», позволяющим разместить на ней многоразовый лунный корабль (МЛК), представляющий собой взлётный модуль (ВМ) ЛВПК. Доставка экипажа на ЛОС осуществляется по двухпусковой схеме с использованием РН тяжелого класса «Ангара-А5В». За счёт снижения характеристической скорости на достижение ВЛО при использовании «грависферного» способа стартовая масса ПТК-М составит 22,4 т, что соответствует полноразмерному ПТК «Орёл», и при этом сохраняется резерв по V_x в 350 м/с достаточный для парирования различных НШС. Для сборки всего ЛВПК и высадки космонавтов на поверхность потребуется доставка на ЛОС заправленной посадочной ступени (ПС) и межорбитального буксира (МБ) типа РБ «Фрегат». Помимо основной функции, заключающейся в обеспечении перелёта ЛВПК на НОО, а затем МЛК с НОО на ВЛО, МБ выполняет и логистическую доставку топлива для дозаправки МЛК. Одним пуском РН «Ангара – А5В» может доставить на ВЛО при использовании «грависферного» способа квант полезной нагрузки массой 13,8 т. Это, в свою очередь, позволяет обеспечить посадку на Луну МЛК с экипажем массой 4 т, что почти в два раза превышает размерность лунного корабля «Eagle» из программы «Аполлон». Предлагаемая альтернативная схема также является четырёхпусковой, однако, два пуска с ПС и МБ являются независимыми – не требуются промежуточные стыковки. Экономичность этой ТС достигается за счёт отказа от РН СТК и перехода с одноразового на частично многоразовый ЛВПК. К тому же ЛОС позволит обеспечить устойчивость четырёхпусковой схемы за счёт допустимого разнесения по времени всех элементов ТС и повысить безопасность экипажа при срочном возвращении с Луны.

Следующей возможностью повышения экономичности является переход к многоразовой транспортной системе «Рывок» [6]. На РОС размещается многоразовый пилотируемый корабль (МПК), выполняющий перелёты для доставки экипажа с РОС на ЛОС. Для возвращения на околоземную орбиту МПК использует аэроторможение. Согласование прилётной траектории с плоскостью орбиты РОС осуществляется боковой коррекцией в наиболее удалённом от Земли совместном узле двух орбит.

Проведенное сравнение предлагаемых схем с двухпусковой на базе РН СТК по критерию, определяемому отношением конструктивной массы взлётного модуля или МЛК к суммарной грузоподъёмности всех РН, задействованных в ТС, показало превосходство на 11% альтернативной ТС с ЛОС на базе РН «Ангара-А5В». Переход на многоразовую ТС «Рывок» повысит эффективность уже на ~41%.

Литература

1. Мировая пилотируемая космонавтика. История. Техника. Люди / Гл. ред. Ю.М. Батулин. –М.: РТСоф, 2005. 747 с.
2. Муртазин Р.Ф., Беляева Е.К. Парирование переносов запусков в четырёхпусковой схеме высадки на поверхность Луны // Космическая техника и технологии. 2022. № 4 (39). С. 94-100.
3. Whitley R., Martinez R. Options for Staging Orbits in Cislunar Space. – Aerospace Conference IEEE, Big Sky, MT, USA. 2016. p. 9.
4. Tselousova A., Trofimov S., Shirobokov M. Station-keeping in high near-circular polar orbits around the Moon // Acta Astronautica, 2021. № 188. P. 85–192.
5. Муртазин Р.Ф. Эффективное выведение КА на высокую круговую окололунную орбиту // Космонавтика и ракетостроение. 2019. № 3 (108). С. 5-12.
6. Муртазин Р.Ф. Транспортная космическая система нового поколения для обеспечения лунных экспедиций // Космонавтика и ракетостроение. 2017. № 2(95). С. 55 – 63.

ПОСТРОЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ФЕРМЕНОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА-СБОРЩИКА

Орлов В.В., Иванов Д.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
orlov.vv@phystech.edu

Аннотация. В настоящей работе исследуется построение управления движением аппарата-сборщика в задаче орбитального построения конструкции типа фермы. Считается, что изначально на орбиту выводится контейнер с набором стержней и космический аппарат-робот. Космический аппарат может отталкиваться от конструкции с заданной относительной скоростью с помощью манипулятора. Задача перелёта между точками конструкции решается только с помощью нахождения скорости отталкивания, либо в случае отсутствия решения краевой задачи с помощью отталкивания и управления относительным движением с помощью бортового двигателя с непрерывной регулируемой тягой. В работе представлены результаты исследования характеристик управляемого движения при сборке орбитальных конструкций различной сложности.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00845.

Введение

Размещение крупногабаритных конструкций на околоземной орбите необходимо для решения ряда важных и актуальных задач [1–3]. Одна из главных сложностей создания таких систем возникает из-за ограничений, связанных с запуском. Требование компактного размещения системы под обтекателем ракеты-носителя может быть выполнено с помощью запуска отдельных элементов и последующей сборкой космической системы на орбите. Это также увеличивает вероятность выживаемости элементов развёртывания в результате действия вибрационных нагрузок на соединения во время запуска. В качестве примера конструкции, для которой выгодно использовать орбитальную сборку, можно привести зеркало телескопа на основе конструкции типа фермы или на основе отдельных модулей.

В настоящей работе исследуется построение управления движением аппарата-сборщика в задаче орбитального построения конструкции типа фермы. Считается, что изначально на орбиту выводится контейнер с набором стержней и космический аппарат-робот. Методика сборки заключается в перемещении космического аппарата между точками конструкции, где находится контейнер со стержнями, и точками их крепления. Космический аппарат оснащен двумя роботизированными манипуляторами, способными прикрепляться к станции и удерживать стержни. Кроме того, аппарат может отталкиваться от конструкции с заданной относительной скоростью с помощью манипулятора. Таким образом, космический аппарат и конструкция получают импульсы, и аппарат перемещается по конструкции в результате свободного полёта.

На задачу накладываются ограничения на допустимое поступательное и угловое движение конструкции относительно орбитальной системы координат. Для предотвращения столкновения вводится условие отсутствия пересечения траектории аппарата и элементов конструкции. Задача перелёта между точками конструкции решается только с помощью нахождения скорости отталкивания, либо в случае отсутствия решения краевой задачи с помощью отталкивания и управления относительным движением с помощью бортового двигателя с непрерывной регулируемой тягой. Первый тип решения задачи решается путём поиска минимума целевого функционала – и имеет решение, если расстояние между конечной точкой траектории и целевой точкой перелёта находится в допустимых пределах. Второй тип решения используется если решение первого типа не было найдено. При этом, решение ищется аналогично, если бортовое управление импульсное, или же с помощью пропорционально-дифференциального или линейно-квадратического регуляторов, если тяги двигателя является непрерывной и регулируемой. Для выполнения ограничений предложены модификации этих регуляторов.

Уравнения движения

Рассматривается движение конструкции на круговой околоземной орбите. Угловое движение конструкции рассматривается как движение твёрдого тела, оно описывается динамическими уравнениями Эйлера, в которых внешние моменты содержат только гравитационный момент:

$$\dot{\mathcal{J}}\Omega = -\Omega \times \mathcal{J}\Omega + 3\omega_0^2 \mathbf{e}_r \times \mathcal{J}\mathbf{e}_r,$$

где \mathcal{J} – текущий тензор инерции конструкции, рассчитанный в связанной с телом системе координат, Ω – вектор угловой скорости конструкции в инерциальной системе координат, ω_0 – орбитальная угловая скорость, \mathbf{e}_r – единичный вектор из центра масс Земли в центр масс конструкции, записанный в связанной системе координат.

Поступательное движение аппарата и центра масс конструкции относительно орбитальной системы координат, центр которой движется по круговой орбите, описывается уравнениями Хилла-Клохесси-Уилтшира:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_0 \dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega_0 \dot{x} - 3\omega_0^2 z = 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{R}_s = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор центра масс аппарата или центра масс конструкции в орбитальной системе координат.

В работе предполагается, что взаимодействие аппарата и конструкции в результате отталкивания или закрепления приводит к мгновенному изменению поступательной и угловой скорости конструкции. Параметры отталкивания рассчитываются из законов сохранения импульса и момента импульса согласно следующим выражениям:

$$\begin{aligned} (m+M)\mathbf{V}^p &= m\mathbf{v} + M\mathbf{V}, \\ (m+M)(\mathbf{R}^p \times \mathbf{V}^p) + J^p \boldsymbol{\Omega}^p &= M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + J\boldsymbol{\Omega}, \end{aligned}$$

где m – масса аппарата, M – масса конструкции, \mathbf{r} – радиус-вектор аппарата в системе координат, связанной с конструкцией, \mathbf{R} – радиус-вектор центра масс конструкции, \mathbf{v} – поступательная скорость аппарата, \mathbf{V} – поступательная скорость конструкции. Верхние индексы (p) обозначают параметры до отталкивания.

Постановка задачи

Решаемая краевая задача формулируется следующим образом. При заданном тензоре инерции, массе аппарата и массе орбитальной станции требуется найти такую относительную скорость отталкивания аппарата, чтобы траектория движения пересекла требуемую точку конструкции, заданную в связанной со станцией системе координат. Если из-за сложной собираемой конструкции или ограничений задачи решение краевой задачи не удастся найти, то в результате отталкивания аппарата от конструкции решается задача сближения аппарата к требуемой точке, а окончательное попадание в точку обеспечивается применением управления с помощью бортового двигателя. В этом случае вектор скорости отталкивания находится с помощью нахождения минимума следующего функционала, который зависит от сближения аппарата с требуемой точкой конструкции без учёта управления, и от кинематических параметров, ограниченных постановкой задачи:

$$f(\mathbf{v}_o) = \Delta \mathbf{r} - \mu_1 \sum_{i=1}^m \log(c_i(\mathbf{v}_o) + \varepsilon_i) + \mu_2 \sum_{i=1}^m \varepsilon_i,$$

где $\Delta \mathbf{r}$ – невязка (разница между радиус-вектором аппарата и требуемой точкой конструкции), μ_1 и μ_2 – параметры барьерной функции, $c_i(\mathbf{v}_o)$ – функция для задания ограничения типа неравенства, ε_i – величина нарушения ограничений, m – количество ограничений типа неравенства.

В работе представлены примеры работы предложенных алгоритмов управления движением космического аппарата во время сборки и проводится численное исследование характеристик движения в зависимости от параметров системы.

Заключение

В настоящей работе предложена схема управления движением космического аппарата-сборщика в задаче построения орбитальной конструкции типа фермы с помощью набора стержней. Математическое моделирование показало, что при достаточно сложных конструкциях решение краевой задачи не всегда удастся найти и в этом случае отталкивание с помощью манипуляторов используется для сближения с точкой конструкции, а приведение в точку реализуется с помощью бортового двигателя. Тем не менее, предложенный подход к управлению с помощью отталкивания позволяет существенно сократить расход требуемой характеристической скорости аппаратов сборщиков.

Литература

1. Erics L. Gralla, Oliver L. De Weck. Strategies for on-orbit assembly of modular spacecraft// Journal of the British Interplanetary Society . – 2007. V. 60, I. 6. P. 219-227.
2. Danielle Piskorz, Karen L. Jones. On-orbit assembly of space assets: a path to affordable and adaptable space infrastructure. – 2018. The Aerospace Corporation. 12 p.
3. Zhihui XUE, Jinguo LIU, Chenchen WU, Yuchuang TONG, Review of in-space assembly technologies // Chinese Journal of Aeronautics. – 2021, V. 34, I. 11. P. 21-47.

СИНТЕЗ ПРОГРАММНЫХ РЕЖИМОВ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Охитина А.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
anna.ohitina@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача построения управляемого углового движения космического аппарата (КА) с помощью магнитных катушек. В работе предлагается трехэтапный подход к построению специальной угловой траектории, при движении КА вдоль которой проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции близка к нулю. На каждом этапе используется метод роя частиц – для поиска оптимальной аппроксимации геомагнитного поля на заданном временном интервале, оптимальной траектории и оптимальных коэффициентов управления для обеспечения асимптотической устойчивости. На последующих интервалах этапы повторяются со «склеивкой» с предыдущей траекторией. Полученный подход позволяет улучшить точность итоговой ориентации и уменьшить ошибки отслеживания.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10009, <https://rscf.ru/project/22-71-10009/>.

Введение

Управляемое угловое движение КА является одной из наиболее важных задач динамики космического полета. С ростом числа практических и научных задач, которые решаются с помощью малых космических аппаратов, встает вопрос о возможности удешевления аппаратов, делая их более доступными для широкого пользования и простыми в изготовлении. Магнитная система управления ориентацией позволяет значительно снизить расходы, а также обеспечить более длительный срок службы аппарата за счет износостойкости магнитных катушек. Однако существенным её недостатком является ограничение в направлении управляющего момента – вдоль вектора индукции геомагнитного поля невозможно создать магнитный момент.

В работе предлагается синтез программных режимов углового движения для обхода этого ограничения. Подход состоит из трех этапов. Первый этап – это поиск оптимальной аппроксимации геомагнитного поля на некотором заданном интервале времени. Далее на втором этапе строится оптимальная угловая траектория, при движении по которой управляющий момент перпендикулярен вектору геомагнитной индукции (с учетом найденного на первом этапе вектора индукции геомагнитного поля). На третьем этапе ищутся оптимальные коэффициенты управления для обеспечения асимптотической устойчивости (на основе подхода с использованием функции Ляпунова [1, 2]). На каждом из перечисленных этапов оптимизация проводится с помощью метода роя частиц (PSO) [3–5].

Для уменьшения ошибок отслеживания траектории при моделировании в полной модели перечисленные три этапа повторяются каждые 3 витка. Это необходимо для того, чтобы аппроксимация геомагнитного поля на этапе построения траектории лучше соответствовала модели геомагнитного поля, используемой при моделировании в полной модели. Таким образом, реальный реализуемый магнитной системой управляющий момент будет ближе к программному управлению. В моменты времени, когда происходит переключение между интервалами, для обеспечения гладкости управления необходимо гарантировать непрерывность вторых производных программного движения путем процедуры «склейки» траекторий. «Склейка» реализуется за счет изменения количества независимых параметров (коэффициентов) траектории на этапе поиска оптимальных значений методом роя на всех интервалах, начиная со второго.

Приведенный подход к построению управляемой угловой траектории позволяет уменьшить ошибки реализации и улучшить точность итоговой ориентации.

Постановка задачи и уравнения движения

Рассматривается космический аппарат, находящийся на круговой орбите под воздействием гравитационного и аэродинамического, а также возмущающих моментов случайной природы. Необходимо стабилизировать КА с помощью магнитной системы управления ориентацией в заданном произвольном положении относительно орбитальной системы координат (ОрбСК) $OXYZ$, где ось OZ направлена вдоль радиус-вектора аппарата, ось OY – вдоль нормали к плоскости орбиты, а ось OX дополняет до правой тройки.

Угловое движение КА описывается динамическими уравнениями Эйлера в связанной со спутником системе координат (ССК) $O\xi\eta\zeta$, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции КА:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} = \mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{aero} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{dist}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{abs}$ – абсолютная угловая скорость КА, \mathbf{J} – тензор инерции КА, \mathbf{M}_{grav} – гравитационный момент, \mathbf{M}_{aero} – аэродинамический момент, \mathbf{M}_{ctrl} – управляющий момент и \mathbf{M}_{dist} – внешний случайный возмущающий момент.

Метод роя частиц

Метод роя частиц (PSO) представляет собой алгоритм эволюционной оптимизации, основанный на механизме принятия решения о дальнейшем поиске каждой частицей после получения информации об исследуемой области как от самой частицы, так и от ее соседей. Ставится следующая задача оптимизации для роя:

$$\Phi(\mathbf{x}_{p,i}) \rightarrow \min_U,$$

где $\mathbf{x}_{p,i}$ – положение частицы p на итерации (в поколении) i , каждое из которых является потенциальным лучшим положением всего роя, соответствующим лучшему значению функционала, U – заданная область поиска.

На каждой итерации частицы принимают решение о дальнейшем перемещении на основе своего наилучшего положения и наилучшего положения всего роя (или некоторой окрестности частицы) и в соответствии с этим обновляют направление движения. Когда все частицы собрались в окрестности наилучшего положения роя, а значение функционала не меняется (или меняется незначительно) несколько итераций подряд, можно считать, что алгоритм нашел оптимальное решение.

Построение опорного движения и «склейки»

Для построения опорного движения разделим требуемый временной интервал (например, планируемую продолжительность миссии) на меньшие интервалы, каждый из которых равен 3 виткам. На каждом таком интервале применим трехэтапный подход к построению опорного движения с процедурой «склейки» в моменты переключения между интервалами, который подробнее описан далее.

Магнитный момент вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}_{magn} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{magn} = \left(\frac{\mathbf{B}_{magn} \times \mathbf{M}_{ctrl}}{B_{magn}^2} \right) \times \mathbf{B}_{magn} = \mathbf{M}_{ctrl} - \frac{\mathbf{B}_{magn} (\mathbf{B}_{magn}, \mathbf{M}_{ctrl})}{B_{magn}^2}, \quad (2)$$

где \mathbf{B}_{magn} – вектор геомагнитной индукции, \mathbf{m} – дипольный момент аппарата, \mathbf{M}_{ctrl} – управляющий момент (программное управление).

В работе для описания вектора \mathbf{B}_{magn} используется модель диполя, выражение для описания которой

$$\mathbf{B}_{magn} = -B_0 \left(\mathbf{k} - 3 \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

где $B_0 = \text{const}$, \mathbf{k} – соответствующий орт оси диполя, \mathbf{r} – радиус-вектор КА.

При построении опорной траектории используется постоянный вектор диполя $\mathbf{k}_{oblique}$, найденный на первом этапе оптимизации, а при моделировании в полной модели – наклонный диполь, где вектор $\mathbf{k}_{inclined}$ меняется. При построении траектории использовать наклонный диполь нельзя за счет его не периодичности, но уменьшение ошибки отслеживания траектории возможно за счет выбора более близкого к наклонному диполу описания геомагнитного поля и использования его на втором этапе (этапе построения оптимальной траектории). Задача метода роя на первом этапе – найти вектор $\mathbf{k}_{oblique}$ такой, чтобы отклонение вектора геомагнитной индукции в модели наклонного диполя от модели, используемой на этапе построения траектории было минимально:

$$\delta \mathbf{B} = \mathbf{B}_{magn}^{inclined} - \mathbf{B}_{magn}^{oblique} \rightarrow \min.$$

Второй этап решения задачи – построение опорной траектории, при движении по которой управляющий момент имеет минимальную проекцию на вектор геомагнитной индукции. Опорная траектория строится в упрощенной модели движения спутника. Неизвестное возмущение \mathbf{M}_{dist} равно нулю, а аэродинамический момент \mathbf{M}_{aero} является постоянным в малой окрестности положения равновесия. В работе опорная траектория на первом временном интервале параметризуется аналогично предложенному в [2]

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= a_1 \sin u(t) + a_2 \cos u(t) + a_3 \sin 2u(t) + a_4 \cos 2u(t), \\ \beta(t) &= b_1 \sin u(t) + b_2 \cos u(t) + b_3 \sin 2u(t) + b_4 \cos 2u(t), \\ \gamma(t) &= g_1 \sin u(t) + g_2 \cos u(t) + g_3 \sin 2u(t) + g_4 \cos 2u(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $u = \omega_0 t$ – аргумент широты, ω_0 – орбитальная угловая скорость, a_i, b_i, g_i ($i=1,2,3,4$) – искомые параметры опорной угловой траектории, оптимальные значения которых определяются с помощью PSO, минимизируя проекцию управляющего момента на вектор геомагнитной индукции. Выражения (3) задают ориентацию опорной системы координат (ОпСК) относительно ОрбСК.

Цель третьего этапа – обеспечения асимптотической устойчивости. Для этого используем подход к построению управления с помощью функции Ляпунова, который подробно описан в [2]:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_a \mathbf{S}_d + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J} \dot{\mathbf{A}} (\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - \mathbf{M}_{grav} - \mathbf{M}_{aero}, \quad (4)$$

где k_{ω} , k_a – коэффициенты управления, \mathbf{A} – матрица перехода из ОрбСК в ССК, $\mathbf{S}_d = (d_{23} - d_{32}, d_{31} - d_{13}, d_{12} - d_{21})$, где d_{ij} – элементы матрицы перехода \mathbf{D} из ОпСК в ССК, $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ – относительная угловая скорость, $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ – опорная угловая скорость.

Оптимальные коэффициенты управления находятся также методом роя. Функционал на этом этапе выбирается исходя из линеаризации уравнений движения (1) с учетом выражений (2) и (4), и теории Флоке [6], согласно которой для того, чтобы система линейных однородных ДУ с периодическими коэффициентами вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}$$

являлась асимптотически устойчивой, мультипликаторы (собственные значения) матрицы монодромии этой системы должны лежать внутри единичного круга ($|\lambda_i| < 1, \forall i$). В [6] утверждается также, что если тривиальное решение $\mathbf{x}_0 \equiv 0$ линейной однородной системы является асимптотически устойчивым при $t \rightarrow \infty$, то исходная линейная неоднородная система вида

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

соответствующая исходной нелинейной системе (1), является асимптотически устойчивой.

На последующих временных интервалах описанные три этапа повторяются, но для обеспечения гладкости управления проводится процедура «склейки». Для этого на втором и последующих интервалах на втором этапе траектория ищется с учетом значений на конце предыдущего интервала. Вместо 12 искомого

параметров в (3), останутся лишь 3 параметра, например, a_1, b_1, g_1 , а другие будут зависеть от опорной траектории на предыдущем интервале следующим образом

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Psi} \begin{pmatrix} \alpha(3T) - a_1 \sin u \\ \dot{\alpha}(3T)/\omega_0 - a_1 \cos u \\ \ddot{\alpha}(3T)/\omega_0^2 + a_1 \sin u \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin 2u & \cos 2u \\ -\sin u & 2 \cos 2u & -2 \sin 2u \\ -\cos u & -4 \sin 2u & -4 \cos 2u \end{pmatrix}$, T – период движения КА по орбите. Аналогично можно найти

выражения для b_2, b_3, b_4 и g_2, g_3, g_4 .

Таким образом, разбив весь требуемый временной интервал на меньшие интервалы длительностью $3T$, можно добиться хорошей итоговой точности ориентации (около 3–5 градусов), а также уменьшить ошибки отслеживания за счет более близкой аппроксимации вектора геомагнитной индукции на каждом интервале при численном моделировании в полной модели с наличием неучтенных внешних возмущений, неточности знания моделей и параметров КА.

Заключение

Предложен трехэтапный подход к построению управляемого углового движения космического аппарата, оснащенного магнитными катушками. Требуемый временной интервал движения разбивается на интервалы меньшей длительности, на каждом из которых строится опорная траектория, с использованием оптимальных на этом интервале параметров аппроксимации геомагнитного поля. Описан способ «склейки» полученных траекторий для обеспечения гладкости управления. Итоговая точность ориентации составляет около 3–5 градусов при моделировании в полной модели.

Литература

1. Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S., Karpenko S.O. A Study of Angular Motion of the Chibis-M Microsatellite with Three-Axis Flywheel Control // *Cosm. Res.* 2012. Vol. 50, № 6. P. 431–440.
2. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S. Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion // *Acta Astronaut.* Pergamon, 2022. Vol. 195. P. 86–97.
3. Eberhart R., Shi Y. Particle swarm optimization: Developments, applications and resources. // *IEEE Congr. Evol. Comput.* Seoul, Korea., 2001. P. 81–86.
4. Kennedy, J., Eberhart R. Particle swarm optimization // *Proc. Int. Conf. Neural Networks.* IEEE. 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.
5. Simon D. *Evolutionary Optimization Algorithms.* WILEY, 2013. 742 p.
6. Yakubovich V.A. *Linear differential equations with periodic coefficients.* Keter Publishing House Jerusalem Ltd., 1975. 386 p.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ РАКЕТА И ЭФФЕКТ ОБЕРТА В СИЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Павлов Ю.В.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург
yuri.pavlov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается динамика релятивистской ракеты в сильном гравитационном поле, в частности в поле невращающихся черных дыр. Вводится и оценивается коэффициент полезного действия релятивистской ракеты. Даны оценки эффекта Оберта для релятивистской ракеты вблизи черных дыр. Рассмотрены вопросы о реактивном движении вблизи горизонта черных дыр.

Введение

В 1929 Н. Oberth [1] заметил, что использование реактивного топлива ракеты становится более эффективным при высокой скорости движения ракеты. Ракетный двигатель, движущийся с высокой скоростью, при той же тяге совершает большую полезную работу, чем в случае медленного движения.

Высокая скорость при движении в гравитационном поле достигается в нижних точках траектории, поэтому использование ракетного топлива в «периастре» траектории более эффективно, чем в верхних точках траектории. Это может быть объяснено на основании закона сохранения энергии, поскольку полная энергия истекающего реактивного топлива есть сумма положительной кинетической и отрицательной потенциальной энергии топлива в гравитационном поле. Если сумма потенциальной и кинетической энергии использованного реактивного топлива ракеты в гравитационном поле отрицательна, то, как впервые было отмечено в работе [2], эффект Оберта является нерелятивистским аналогом эффекта Пенроуза для вращающейся черной дыры [3].

В докладе, следуя [4], исследуется эффект Оберта для релятивистского случая и движения в сферически симметричном гравитационном поле. Предполагается, что гравитационное поле может быть сильным, включая случаи сферически симметричных черных дыр произвольного типа.

Кратковременный выброс реактивного топлива в релятивистском случае

Рассмотрим простейший случай мгновенного испускания топлива реактивной ракетой или, по-другому, распад исходного тела (ракеты с топливом) на два фрагмента: собственно ракету и части испущенного реактивного топлива. В релятивистском случае сумма масс фрагментов должна быть меньше, чем масса исходного тела, поскольку в полную энергию в релятивистском случае дает вклад и кинетическая энергия движения фрагментов. Поэтому для значений исходных энергии E_0 и массы m_0 , энергии E_1 и массы m_1 топлива и энергии E_2 и массы m_2 ракеты справедливы соотношения

$$E_0 = E_1 + E_2, \quad m_0 > m_1 + m_2. \quad (1)$$

Рассмотрим следующую постановку задачи о распаде частицы в случае больших скоростей и сильных гравитационных полей. Будем считать заданными массу m_0 и энергию E_0 исходного тела, массу осколка m_2 и относительную скорость u разлета осколков. В случае ракеты это соответствует тому, что известны начальная масса и энергия (следовательно, и скорость) ракеты, известна масса ракеты после кратковременной работы двигателя и известна характеристика двигателя, а именно, относительная скорость вылета топлива из него. Если ракета имеет фотонный двигатель, то скорость вылета фотонов из него есть скорость света c .

Согласно общей теории относительности гравитационное поле описывается метрикой пространства-времени. Рассмотрим движение в сферически симметричном гравитационном поле с интервалом вида

$$ds^2 = A(r)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2(d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2). \quad (2)$$

В случае черной дыры Шварцшильда

$$A(r) = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

где r_g – гравитационный радиус, G – гравитационная постоянная, M – масса черной дыры. Энергия частицы с массой m в пространстве-времени с такой метрикой может быть вычислена по формуле (см. (88.9) в [5])

$$E = \frac{mc^2 \sqrt{A(r)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4)$$

v – скорость, измеренная наблюдателем, покоящимся в системе координат r, ϑ, ϕ в точке, которую пролетает частица.

Используя законы сохранения энергии-импульса и выражение (4) получим для случая ракеты с фотонным двигателем при кратковременном выбросе излучения по касательной к траектории движения формулу

$$\frac{E_0}{E_2} \sqrt{1 - \frac{A}{\varepsilon_0^2}} = \sigma_u \left(1 - \frac{E_0}{E_2}\right) + \sigma_v \sqrt{1 - \frac{A}{\varepsilon_0^2}}, \quad (5)$$

где $\varepsilon = E/(mc^2)$ – удельная энергия, $\sigma_u = 1$ для режима ускорения ракеты, $\sigma_u = -1$ соответствует режиму торможения – реактивное топливо (в данном случае электромагнитное излучение) выбрасывается (излучается)

в сторону начального направления полета ракеты. Знаковый множитель $\sigma_v = 1$, если направление скорости ракеты, после включения двигателя остается неизменным. Если же выброс топлива в режиме торможения был столь большим, что направление скорости ракеты изменилось на противоположное, то $\sigma_v = -1$. Случай нефотонной релятивистской ракеты описывает формула (43) в [4].

В релятивистском случае коэффициент полезного действия (кпд) реактивного двигателя должен учитывать полную энергию использованного топлива. В работе [4] нами предложена следующая формула для релятивистского кпд

$$\eta = \frac{|E_2 - \varepsilon_0 m_2 c^2|}{E_0 - \varepsilon_0 m_2 c^2}. \quad (6)$$

Числитель есть модуль приращение полной энергии ракеты без использованной части топлива. Знаменатель – это полная первоначальная энергия использованной части топлива. Знак модуля в числителе учитывает случай торможения ракеты. Если в рассматриваемой метрике отсутствуют состояния с отрицательной энергией, как в случае метрики Шварцшильда, то $0 < E_2 < E_0$ и кпд (6) может изменяться от 0 до 1. Для фотонной ракеты, используя (5) для значения кпд получим

$$\eta = \left| \frac{m_0 - m_2}{2m_0} + \sigma_u \left(1 - \frac{m_0 - m_2}{2m_0}\right) \sqrt{1 - \frac{A}{\varepsilon_0^2}} \right|. \quad (7)$$

В случае режима ускорения, при уменьшении A , т.е. с приближением к центру тяготеющего тела коэффициент полезного действия фотонного двигателя возрастает, стремясь к единице, при $A \rightarrow 0$, на горизонте событий черной дыры. На большом удалении от притягивающего тела к.п.д. минимален и равен $(m_0 - m_2)/2m_0$ для случая $E_0 = m_0 c^2$. Для малого выброса топлива $(m_0 - m_2) \ll m_0$ релятивистский кпд равен

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{A}{\varepsilon_0^2}}. \quad (8)$$

Вычисления кпд для различных случаев нефотонной релятивистской ракеты представлены в [4].

Приведем выражения для оценки эффекта Оберта в случае ракеты с фотонным двигателем (более общий случай см. [4]) при движении в поле невращающейся черной дыры

$$E_2 - E_2^{(0)} = \frac{(m_0^2 - m_2^2)c^2}{2m_0} \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad (9)$$

где $E_2^{(0)}$ – энергия, ракеты после такого же выброса реактивного топлива, но в отсутствии гравитационного поля. Как и следовало ожидать, выигрыш в энергии ракеты за счет эффекта Оберта тем больше, чем ближе к гравитационному радиусу черной дыры находится ракета, то есть чем сильнее гравитационное поле.

Остановка падения и вылет от горизонта черных дыр

Полученные формулы типа (5) позволяют решить задачи о зависании над горизонтом черной дыры и вылета на большое удаление от нее. Так, допустимая масса падающей ракеты, тормозящей у горизонта, должна быть мала по отношению к исходной массе ракеты

$$m_2 \approx \frac{m_0 \sqrt{A}}{2\varepsilon_0}. \quad (10)$$

У горизонта событий $A \rightarrow 0$ и, следовательно, $m_2/m_0 \rightarrow 0$. Отношение к исходной массе становится еще более малым при вылете из поля черной дыры [4]:

$$m_2 \approx \frac{m_0 A}{4\varepsilon_0^2}. \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, выигрыш в энергии ракеты за счет эффекта Оберта тем больше, чем ближе к гравитационному радиусу черной дыры находится ракета, то есть чем сильнее гравитационное поле.

Показано, что падающая ракета может затормозить у горизонта событий черной дыры только при скорости истечения топлива, близкой к скорости света. Показано, что при зависании вблизи горизонта событий черной дыры ракета должна по экспоненциальному закону расходовать свое реактивное топливо, в частности, для метрики Шварцшильда

$$m(t) = m_0 \exp\left[-\frac{c^2 r_g}{2|u|r^2}(t-t_0)\right]. \quad (12)$$

Из (12) следует, что время возможного зависания у горизонта черной дыры, измеряемое по часам на ракете, стремится к нулю для любого сколь угодно мощного ракетного двигателя. По часам удаленного наблюдателя возможное время зависания у горизонта не превышает времени, которое необходимо световому лучу для прохождения расстояния, равного «диаметру» черной дыры $\Delta t \approx 2r_g / c$. Для черной дыры с массой равной массе Солнца это время составляет всего 20 мкс.

Заключение

В работе также рассмотрены вопросы движения ракеты вблизи горизонта невращающихся черных дыр, отсутствующие в литературе. Даны оценки для эффекта Оберта в релятивистском случае, представлен релятивистский коэффициент полезного действия, учитывающий энергию покоя реактивного топлива, и даны оценки для него. Показано, что эффект Оберта позволяет в окрестности горизонта невращающейся черной дыры всю полную энергию реактивного топлива, включая энергию покоя, использовать на увеличение кинетической энергии фотонной ракеты. Более подробное исследование указанных и других вопросов реактивного движения в сильном гравитационном поле рассмотрено в работе [4].

Литература

1. Н. Oberth // Wege zur Raumschiffahrt. R. Oldenbourg Verlag: Munich-Berlin, 1929 [Engl. transl.: H. Oberth, Ways to Spaceflight; NASA: TT F-622, 1970, pp. 200–201].
2. A.A. Grib, Yu.V. Pavlov // Particles with negative energies in nonrelativistic and relativistic cases.. Symmetry, 12, 2020, 528
3. R. Penrose // Gravitational collapse: The role of general relativity. Rivista Nuovo Cimento I, Num. Spec., 1969, 252–276.
4. Yu.V. Pavlov, O.B. Zaslavskii // Particle decay, Oberth effect and a relativistic rocket in the Schwarzschild background, Int. J. Mod. Phys. D, 32:2 2023, 2250143
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Теория поля. М., Наука, 1988. 509 с.

АНАЛИЗ СПОСОБОВ СТАБИЛИЗАЦИИ И ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ПРЯМОТОЧНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ВОЗДУШНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА СВЕРХНИЗКИХ ОРБИТАХ

Падалица Д.И.^{1,2,3}, Филатьев А.С.³, Янова О.В.^{2,3}, Голиков А.А.^{2,3}

1 - Сколковский Институт Науки и Технологий, Москва, Россия

2 - Центральный Аэрогидродинамический Институт, Жуковский, Россия

3 - Московский Государственный Университет, Москва, Россия

d.padalitsa@skoltech.ru

Аннотация. Концепция космического аппарата с прямоточным воздушным электрореактивным двигателем (ПВЭРД) привлекает все большее внимание исследователей. Такой космический аппарат может функционировать на сверхнизких орбитах (150–250 км), используя при этом воздух из окружающей остаточной атмосферы в качестве рабочего тела для ионного двигателя. Так, масса выводимого на орбиту груза увеличивается за счет отсутствия большого запаса топлива на борту космического корабля, кроме того, полеты на сверхнизких орбитах позволяют, например, улучшить качество аэрофотосъемки при дистанционном зондировании Земли. В то же время, поскольку космический аппарат с ПВЭРД функционирует на орбите в присутствии разреженного газа, то на него действуют аэродинамические силы и по аналогии с самолетом должны быть обеспечены аэродинамическая устойчивость и управляемость. В данной работе рассмотрены вопросы управления траекторией полета космического аппарата с ПВЭРД с использованием различных способов управления (маховики, смещение центра тяжести, изменяемый вектор тяги, отклоняемые аэродинамические поверхности). Для моделирования движения космического аппарата использовалась программа LMS Amesim, а аэродинамические характеристики частей космического аппарата предварительно рассчитывались методом прямого численного моделирования Монте-Карло. Также для всех вышеперечисленных способов траекторного управления были разработаны базовые алгоритмы управления. Результаты показывают, что при наличии статической аэродинамической неустойчивости средства активной стабилизации в сочетании с работой системы автоматического управления позволяют минимизировать сопротивление и обеспечить балансировку и управление движением космического аппарата с ПВЭРД.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20-69-46034.

Введение

В настоящий момент времени существует довольно много работ по теме космических аппаратов (КА) с прямоточным воздушным электроракетным двигателем (ПВЭРД), в которых рассматриваются отдельные аспекты функционирования таких КА на орбите, например, обеспечение поджига и постоянной генерации плазмы при использовании разреженного атмосферного газа в качестве рабочего тела на различных высотах. С нашей точки зрения не менее важным вопросом по этой тематике являются вопрос устойчивости и стабилизации такого КА при движении по орбите.

Основные методы управления ориентацией КА можно классифицировать следующим образом:

- основанные на расходе рабочего тела и создании реактивной тяги в нужном направлении;
- основанные на действии механических сил (использование маховиков, например);
- основанные на использовании электростатических (КА SCATHA [1]) и магнитных сил (в работах [2] и [3] предложен алгоритм, обеспечивающий управление КА под действием силы Лоренца);
- переброс массы (описан в работе [4]);
- основанные на использовании аэродинамических сил (например, с помощью отклоняемых в потоке поверхностей) (рис. 1).

Последний метод рассматривается как основной для управления движением и ориентацией КА в работе [5] и работах [6],[7] и [8], касающихся применения такого метода для обеспечения устойчивости и управления движением КА с ПВЭРД в рамках проекта Discoverer.

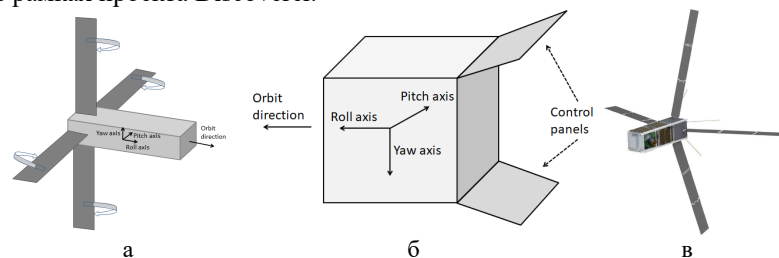


Рис. 1. Проекты КА с отклоняемыми в потоке аэродинамическими поверхностями: а – проект ΔDSat с поворотными управляющими поверхностями, б – Cubesat в форме «волана», в – Концепт спутника SOAR.

В работе [6] указывается, что классический подход, когда центр тяжести размещается впереди аэродинамического фокуса летательного аппарата обеспечивает статическую устойчивость подобного КА, но согласно работе [9] не обеспечивается динамическая устойчивость на высотах больше 160 км, при движении КА постоянно колеблется вокруг точки равновесия. Поэтому предлагается в таком случае использовать

дополнительные средства стабилизации, например, маховики. Дополнительно в данной статье сообщается, что по оценкам авторов управление аэродинамическими силами может обеспечить управляющие моменты до 10^{-5} Н*м на высоте 300 км и до 10^{-7} Н*м на высоте 500 км.

С нашей точки зрения требуют особого рассмотрения следующие вопросы, касающиеся устойчивости и стабилизации движения КА с ПВЭРД, пока не освещенные в достаточной мере в доступной литературе:

- оценка моментов и сил, действующих на объекты различной форм, характерных для КА с ПВЭРД в свободномолекулярном потоке на сверхнизких орбитах (150–250 км), положения их аэродинамического конуса;
- анализ динамических процессов при движении КА с ПВЭРД по орбите в зависимости от различных применяемых способов стабилизации (отклоняемые поверхности, маховики, создание заряда на поверхности и т.д.);
- оценка вероятности пролёта частиц для воздухозаборников, обеспечивающих поступление газорабочего тела в ионный двигатель, различных форм для разных углов атаки и анализ работы такого воздухозаборника в условиях колебания КА вокруг точки равновесия.

Основной текст

Для моделирования работы систем пассивной и активной стабилизации полёта была построена математическая модель, использующая дифференциальные уравнения движения КА для расчёта его траектории, а также включающая в себя дополнительные математические модели такие как атмосферная модель, гравитационная модель, аэродинамическая модель и т.д. (см. рис. 2).

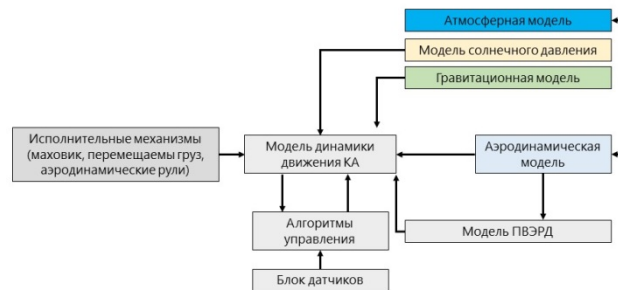


Рис. 2. Архитектура математической модели движения КА по орбите.

В качестве основной среды для создания математической модели использовался программный продукт LMS Amesim. В этой же среде были созданы базовые алгоритмы управления двигателем, системами стабилизации (маховики, перемещаемый груз, аэродинамические рули).

Для моделирования аэродинамики были использованы результаты уже проведенной работы по исследованию аэродинамических характеристик КА с ПВЭРД (как процессы внешнего обтекания корпуса КА свободномолекулярным потоком, так и процессы внутри канала ПВЭРД), в рамках которой методом прямого численного моделирования Монте-Карло в программном продукте OpenFOAM для прототипа КА с ПВЭРД были вычислены все коэффициенты аэродинамических моментов и сил, действующих на КА в полёте, а также оценена пропускная способность канала ПВЭРД.

В качестве модельной задачи был выбран расчёт движения по сверхнизкой орбите прототипа КА с ПВЭРД (рис. 3).

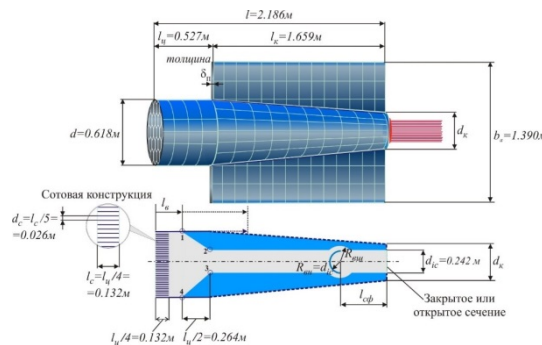


Рис. 3. Геометрия прототипа КА с ПВЭРД.

Основные массово-инерционные и геометрические характеристики:

- Вес КА – 100 кг.
- Максимальная тяга двигателя – 10 мН.
- Моменты инерции – $I_{xx} = 7,1289$ кг*м², $I_{yy} = 25$ кг*м², $I_{zz} = 27,4576$ кг*м².
- САХ руля высоты – 0,5 м, относительная площадь руля высоты – 25%.

Все процессы рассматривались на временном промежутке равном 10 полным оборотам КА вокруг Земли, высота орбиты – 175 км, скорость полёта – 7802,23 м/с.

В рамках задачи была рассмотрена пассивная аэродинамическая стабилизация для статически устойчивого КА, а также активная стабилизация с помощью руля высоты в канале тангажа, а также маховиков и перемещаемого груза для случая статически неустойчивого аппарата.

В качестве способов активной стабилизации в данной работе были рассмотрены 3 основных: использование маховика, перемещаемого груза (данный способ и схема управления изложены в работе [11]). Помимо указанных способов одним из способов активной стабилизации (некоторые авторы относят его к способам пассивной стабилизации, т.к. скорость вращения может оставаться неизменной) является применение гироскопа.

Для всех случаев рассматривался статически неустойчивый аппарат, у которого центр масс находится за аэродинамическим фокусом на расстоянии 10 % САХ. К летящему КА в начальный момент времени прикладывался кратковременный возмущающий момент равный 0.1 Н*м длительностью 0,1 с.

Изменение угла тангажа при работе маховика представлен на рис. 4а, а работы руля высоты на рис. 4б.

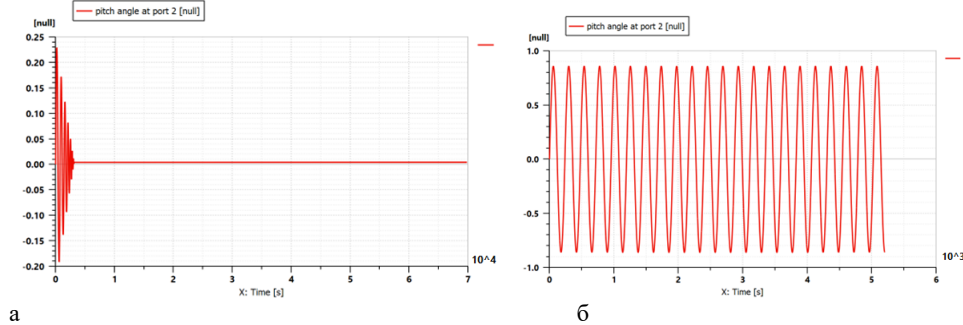


Рис. 4. Изменение угла тангажа во времени.

Как видно из рис. 4а КА система управления КА с помощью маховиков имеет асимптотическую устойчивость в канале тангажа, после воздействия возмущающего момента колебания угла тангажа начинают затухать, т.е. обеспечивается необходимая стабилизация и управление траекторией КА. При отклонении рулей высоты в канале тангажа отсутствует динамическая устойчивость. При этом минусом маховика является накапливаемая угловая скорость, которая в случае появления серии возмущающих воздействий одинаковых по знаку может достигнуть предельных значений. Для предотвращения этого в системе должна быть обеспечена «разгрузка», что усложняет её. Также габариты колеса маховика обуславливают сложность его размещения в КА такой размерности, в то время как амплитуда приводы рулей высоты будут иметь сравнительно небольшие габариты в силу небольшой частоты и амплитуды отклонения рулей.

По результатам проведенной работы сделан вывод о предпочтительности использования отклоняемых аэродинамических поверхностей как основного способа стабилизации и ориентации КА с ПВЭРД, функционирующего на сверхнизких орбитах и целесообразности комбинирования такой системы с системами другого типа, например, маховиками для улучшения работы системы в заданном канале или параллельном обеспечении стабилизации в другом канале (например, по крену).

Литература

1. Mullen E.G., Gussenhoven M.S., Hardy D.A. SCATHA Survey of High Voltage Spacecraft Charging in Sunlight // Journal of the Geophysical Sciences. 1986. V. 91. P. 1074–1090.
2. Saaj C.M. et.al. Electrostatic Forces for Satellite Swarm Navigation Reconfiguration P. 96.
3. Peck M.A. et.al. Spacecraft Formation Flying Using Lorentz Forces // Journal of the British Interplanetary Society. 2007. V. 60. P. 263–267.
4. Шестаков С.А., Иванов Д.С. Управление движением спутников в групповом полете с помощью переброса массы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 81. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-81>
5. Кушнирук М.С. Исследование алгоритмов управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы, магистерская диссертация, МФТИ, 2017 г. URL: https://www.keldysh.ru/microsatellites/Master_Thesis_Kushniruk.pdf
6. Becedas J. et al. Aerodynamic Technologies for Earth Observation Missions in Very Low Earth Orbit. Presented at the 16th Reinventing Space Conference (RISpace), London, UK, October 30-November 1, 2018.
7. Traub C., Romano F., Binder T., Boxberger A., Herdrich G., Fasoulas S., Roberts P. et al. (2018). A Review and Gap Analysis of Exploiting Aerodynamic Forces as a Means to Control Satellite Formation Flight. Presented at Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2018, Friedrichshafen, Germany, September 4-6, 2018.
8. Traub C., Romano F., Binder T. et al. (2019). On the exploitation of differential aerodynamic lift and drag as a means to control satellite formation flight. CEAS Space Journal 12567: 1–18, May 2019, DOI: 10.1007/s12567-019-00254-y
9. Virgili Llop J. and P. C. E. Roberts, Z. Hao. 2014. “Aerodynamic Attitude and Orbit Control Capabilities of the ΔDsat CubeSat,” American Astronautical Society, 37th Annual Guidance and Control Conference, January 31- February 2.
10. Chesi, Simone & Gong, qi & Romano, Marcello. (2017). Aerodynamic Three-Axis Attitude Stabilization of a Spacecraft by Center-of-Mass Shifting. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 40. 10.2514/1.G002460.

КРАТКОСРОЧНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ АСТЕРОИД - СПУТНИК

Прошкин В.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
proschkin@mail.ru

Аннотация. В работе показано, что модель, учитывающая основные качества многих двойных систем астероид–спутник, наблюдаемых в Солнечной системе, представляет собой близкую к интегрируемой гамильтонову систему с нестандартной симплектической структурой. В случае, встречающемся в приложениях, ее уравнения приближенно разделяются на три интегрируемые задачи. Это представление имеет ошибку, малую вместе с возмущением, на интервалах времени порядка одного оборота вокруг Солнца. Оно относится к движениям с любыми начальными данными в соответствующей области фазового пространства за исключением окрестности некоторых многообразий, где вырождаются используемые координаты. Описана зависимость главных эффектов эволюции относительной орбиты спутника от вращения астероида и его динамического строения.

Введение

Отметим следующие свойства, присущие многим парам астероид–спутник, обнаруженным в Солнечной системе [1]. Расстояние между центрами масс велико по сравнению с размерами обоих тел, но очень мало по сравнению с расстоянием до Солнца, размеры спутника малы по сравнению с размерами основного астероида, угловые скорости вращения тел меньше некоторой критической величины, но существенно больше среднего движения в соответствующей задаче двух материальных точек. Эти свойства можно учесть в рамках задачи двух гравитирующих твердых тел. На интервалах времени порядка одного оборота системы вокруг Солнца влияние самого Солнца и тем более других планет (если с ними нет слишком тесных сближений) на движение астероида со спутником оказывается гораздо более слабым, чем влияние размеров тел и нецентральности их гравитационных полей. Приближенное исследование основных эффектов удобно проводить методом разделения движений, но предварительно этот метод в данной задаче следует обосновать, т.к. по небесно-механическим меркам соответствующие малые параметры в ней не очень-то и малы.

Параметры и уравнения

Параметры и функции, относящиеся к вращению основного астероида, отметим индексом 1, спутника – индексом 2, функции и параметры, относящиеся к оскулирующей эллиптической траектории центра масс спутника относительно центра масс основного астероида отметим индексом 0. Обозначим характерные значения параметров: размеры тел – r_i , массы – m_i , угловые скорости – ω_i , $i = 1, 2$; приведенная масса – $m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, большая полуось – a_0 , среднее движение – ω_0 . Положим $m_1 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $a_0 = 1$, $\omega_0 = \delta$, $r_1 = \varepsilon$, $r_2 = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon$, $\delta \ll 1$. Тогда можно принять $m_2 = m_0 = \varepsilon^3$. Для характерных значений модулей кинетических моментов получаем $G_0 = m_0 a_0^2 \omega_0 = \varepsilon^3 \delta$, $G_1 = m_1 r_1^2 \omega_1 = \varepsilon^2$, $G_2 = m_2 r_2^2 \omega_2 = \varepsilon^7$, кинетических энергий вращения – $G_i \omega_i = G_i$, $i = 1, 2$, модуля полной энергии соответствующей задачи Кеплера – $G_0 \omega_0 = G_0 \delta$. Для многих наблюдаемых систем $\varepsilon \sim \delta \sim 10^{-1}$.

Функция Гамильтона имеет вид $H = T_1 + T_2 + K_0 + V_2$, где T_i – кинетические энергии вращения тел, K_0 – полная энергия соответствующей задачи Кеплера, $V_2 = V - V_0$, V – потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел, $V_0 = -\frac{f m_1 m_2}{r}$, f – гравитационная постоянная, r – расстояние между центрами масс тел. Обозначим условно (φ_0, I_0) элементы Делоне – переменные действие – угол задачи с гамильтонианом K_0 , (φ_i, I_i) – наборы переменных действие – угол задач с гамильтонианами T_i , $i = 1, 2$. Симплектическую структуру в этих координатах запишем в виде $\Omega = \sum d I_i \wedge d \varphi_i$. Все координаты I_i являются либо модулями кинетических моментов, либо их проекциями, поэтому их характерными значениями можно считать введенные выше параметры G_i . В безразмерных координатах $\bar{I}_i = I_i / G_i$ гамильтониан и форма приобретают вид

$H = \omega_1 G_1 \bar{I}_1 + \omega_2 G_2 \bar{I}_2 + \omega_0 G_0 \bar{K}_0 + \omega_0 G_0 \bar{V}_2$, $\Omega = \sum G_i d \bar{I}_i \wedge d \varphi_i$ и дают соответствующие уравнения:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{1}{G_i} \frac{\partial H}{\partial \bar{I}_i} = \frac{\partial H_i}{\partial \bar{I}_i}, \quad \dot{\bar{I}}_i = -\frac{1}{G_i} \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \varphi_i}, \quad H_i = \frac{H}{G_i}.$$

Функция V_2 , представленная в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$, имеет старший член, зависящий от поворота основного астероида, V_{20} – вторую сферическую гармонику разложения гравитационного потенциала астероида и точки m_2 в центре масс спутника, и старший член, зависящий от поворота спутника, V_{02} с аналогичным механическим смыслом. В безразмерных координатах эти функции принимают вид: $V_{20} = \left(\frac{r_1}{a_0}\right)^2 \bar{V}_{20}$, $V_{02} = \left(\frac{r_2}{a_0}\right)^2 \bar{V}_{02}$. С учетом принятых предположений о выборе единиц и параметров получаем:

$$H_0 = \delta \overline{K}_0 + \delta \varepsilon^2 \overline{V}_{20} + O(\delta \varepsilon^3), \quad H_1 = \overline{T}_1 + \delta^2 \varepsilon^3 \overline{V}_{20} + O(\delta^2 \varepsilon^4), \quad H_2 = \overline{T}_2 + \delta^2 \overline{V}_{02} + O(\delta^2 \varepsilon^2).$$

Приведенные формулы показывают отдельное влияние каждого из малых параметров на величину возмущений. Положим теперь $\varepsilon \sim \delta$ и заметим, что, отбросив в этих формулах слагаемые порядка ε^4 и выше, мы получим три односторонне связанные задачи: о вращении по инерции основного астероида вокруг центра масс с гамильтонианом $\overline{H}_1 = \overline{T}_1$, о движении спутника как точки вокруг вращающегося астероида с гамильтонианом $\overline{H}_0 = \varepsilon \overline{K}_0 + \varepsilon^3 \overline{V}_{20}$, о вращении спутника вокруг центра масс на этой орбите с гамильтонианом $\overline{H}_2 = \overline{T}_2 + \varepsilon^2 \overline{V}_{02}$.

Об эволюции орбиты центра масс спутника

Первая из перечисленных задач полностью отделена от остальных. Вторая допускает осреднение по времени, т.е. вдоль любых движений основного астероида, кроме перманентных вращений и движений, асимптотически стремящихся к вращению вокруг средней оси эллипсоида инерции. Причем соответствующее каноническое преобразование приводит к одному и тому же результату, независимо от того, резонансное это вращение или нет [2]. Добавив к этому преобразованию осреднение по сравнительно быстрой угловой переменной – средней аномалии, получим гамильтониан вида $\overline{H}_0 = \varepsilon \overline{K}_0 + \varepsilon^3 \overline{V}_{20} + O(\varepsilon^4)$, в котором два первых слагаемых дают интегрируемую гамильтонову систему. Не выписанные здесь слагаемые имеют указанный порядок малости только в области, отделенной от нулевых наклона и эксцентриситета. Аналогичное преобразование допускает и третья задача. В результате ее гамильтониан принимает вид $\overline{H}_2 = \overline{T}_2 + \varepsilon^2 \overline{V}_{02} + O(\varepsilon^3)$, в котором первые два слагаемых также дают гамильтониан некоторой интегрируемой системы. Ее движения описаны и используются в [3].

Здесь мы опишем движения в системе с гамильтонианом \overline{H}_0 . Они представляют самые грубые эффекты в эволюции относительной орбиты центра масс спутника. Вектор кинетического момента вращающегося основного астероида неподвижен в рассматриваемом приближении. Пусть угол между ним и вектором кинетического момента орбитального движения является наклоном орбиты спутника. Тогда имеем явную формулу

$$\overline{H}_0 = -\varepsilon \frac{1}{2L^2} - \varepsilon^3 \frac{D_0}{8L^3 G^3} \left(1 - 3 \frac{H^2}{G^2}\right) + O(\varepsilon^4),$$

в которой использованы традиционные обозначения элементов Делоне для безразмерных координат, которые ε^2 – близки к безразмерным элементам Делоне в результате всех преобразований, но ими не являются. Если условно использовать известные формулы для кеплеровских элементов, то можно записать

$$\overline{H}_0 = -\varepsilon \frac{1}{2a} - \varepsilon^3 \frac{D_0}{8a^3(1-e^2)^{3/2}} (1 - 3(\cos i)^2) + O(\varepsilon^4).$$

Символом D_0 обозначена константа, которая является функцией (см. [2], [3]) от главных центральных моментов инерции и от расположения вектора кинетического момента в теле астероида, точнее от отношения к его модулю среднего значения его проекции на главную ось инерции, которую охватывает полодия при движении. Это отношение – интеграл первой задачи.

С точностью до ε^3 имеем интегрируемую задачу в ее переменных действие-угол (l, g, h, L, G, H) , близких к соответствующим безразмерным элементам Делоне. Получаем следующую приближенную интерпретацию движения. Большая полуось, эксцентриситет и наклонение плоскости орбиты к плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента астероида, постоянны. Среднее движение приобрело добавку: $\dot{l} = \omega(1 + \varepsilon^2 n_1)$. Аргумент перигентра и долгота восходящего узла начали изменяться: $\dot{g} = \varepsilon^2 n_2 \omega$, $\dot{h} = \varepsilon^2 n_3 \omega$. В этих формулах $\omega = \varepsilon \frac{1}{L^3}$ среднее движение на кеплеровской орбите

$$n_1 = \frac{3}{8} D_0 \frac{1-3(\cos i)^2}{a^2(1-e^2)^{3/2}}, \quad n_2 = \frac{3}{8} D_0 \frac{1-5(\cos i)^2}{a^2(1-e^2)^2}, \quad n_3 = \frac{3}{4} D_0 \frac{\cos i}{a^2(1-e^2)^2}.$$

Эти формулы похожи на известные формулы, описывающие эволюцию орбиты спутника планеты, и превращаются в точности в них, когда астероид имеет ось динамической симметрии и вокруг нее вращается. Пусть при произвольном вращении астероида полодия, по которой его мгновенная ось вращения протыкает эллипсоид инерции, охватывает главную ось с моментом инерции C и пусть B – средний из главных моментов инерции, т.е. $(B - A)(B - C) \leq 0$. Тогда при выполнении условия $(A - B)(A - (2B - C)) \leq 0$ существует ровно одна полодия, на которой D_0 равно нулю. По разные стороны от ней эволюция орбиты имеет разные направления, а на ней отсутствует. Например, в случае динамической симметрии $A = B$ имеем $D_0 = (C - A)(1 - 3(\cos \theta)^2)$, где θ – угол между вектором кинетического момента и осью динамической симметрии.

Заключение

Для многих систем астероид–спутник, обнаруженных в главном поясе астероидов и среди астероидов, близких к Земле, период обращения вокруг солнца имеет порядок ε^{-3} в наших обозначениях. Возмущения от Солнца, если их учесть, появляются в гамильтонианах среди членов порядка ε^5 . В поведении медленных переменных на интервалах порядка одного оборота вокруг Солнца такие возмущения могут привести только к ошибкам порядка ε^2 , сравнимым с теми, которые уже допущены выбором приближения.

Литература

1. J.-L. Margot, P. Pravec, P. Taylor, D. Carry, S. Jacobson // Asteroid Systems: Binaries, Triples and Pairs. arXiv:1504.00034v3 [astro-ph.] 30 Aug 2015.
2. В. А. Прошкин // Приведение задачи о быстром вращении несимметричного тела на возмущенной орбите ИСЗ, Космические исследования. 34:6 1996. 633–636.
3. В. А. Прошкин, О.А. Филиппова // Трехчастотные резонансы в задаче о быстром вращении несимметричного тела на эллиптической орбите, Космические исследования. 51:3 2013. 214–223.

ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАГНИТНО ОРИЕНТИРУЕМОГО НА СОЛНЦЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА СОЛНЕЧНО-СИНХРОННОЙ ОРБИТЕ

Ролдугин Д.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
rolduginds@gmail.com

Аннотация. Рассматривается угловое движение космического аппарата с магнитными катушками на солнечно-синхронной орбите. Аппарат поддерживает ориентацию одной из осей в направлении Солнца, вращаясь вокруг этого направления. Приводится алгоритм стабилизации, задающий требуемые направление и скорость вращения. С помощью эволюционных уравнений исследуется устойчивость как требуемого режима движения, так и других нежелательных положений равновесия. Получены условия на моменты инерции аппарата и параметры управления, при которых достигается требуемая ориентация.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10009, <https://rscf.ru/project/22-71-10009/>.

Введение

Обеспечение стабилизации на Солнце – важный служебный режим, предусмотренный на многих искусственных спутниках Земли. В настоящей работе исследуется алгоритм стабилизации, примененный на аппарате Prisma и основанный на текущих данных о требуемом направлении и скорости аппарата [1]. Для исследования динамики аппарата используются эволюционные переменные [2, 3]. Для усредненных уравнений движения исследуется устойчивость возникающих положений равновесия на солнечно-синхронной орбите. При этом оказалось, что стабилизация оси минимального момента инерции возможна только при правильном выборе параметров управления и заданном соотношении между максимальным и минимальным моментами инерции. Показано, что существуют также устойчивые косые положения, когда аппарат вращается вокруг заданной оси, но эта ось вращается вокруг направления на Солнце вместо того, чтобы совпадать с ним.

Уравнения движения

Механический момент со стороны системы управления, действующий на аппарат, имеет вид $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}$,

что требует задания конкретных выражений для управляющего дипольного момента \mathbf{m} и вектора геомагнитной индукции \mathbf{V} . При анализе динамики аппарата применяется осредненная модель поля [4].

Управление [1] основано на рассогласовании угловой скорости аппарата с требуемым значением. Заданная величина скорости складывается из двух компонент,

$$\boldsymbol{\omega}_{ref} = \omega_0 (\mu \mathbf{S} + \mathbf{e}_3).$$

Первое слагаемое означает, что вектор угловой скорости должен совпадать с направлением на Солнце \mathbf{S} , заданным в связанной системе координат. Второе слагаемое указывает, что вращение при этом также должно происходить вокруг оси \mathbf{e}_3 , которую считаем перпендикулярной плоскости солнечных панелей.

Коэффициент μ является параметром управления, показывающим относительный вклад обеих компонент. Параметр ω_0 задает целевую скорость закрутки. Отметим, что можно ожидать выход скорости на значение $\omega_0 (1 + \mu)$. Магнитное управление, которое обеспечивает заданный режим движения, имеет вид

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{ref}) \times \mathbf{b}, \quad (1)$$

где \mathbf{b} – единичный (или близкий к единичному) вектор геомагнитной индукции, k – коэффициент усиления.

Введем систему координат $OZ_1Z_2Z_3$, связанную с центром Земли, третья ось которой направлена на Солнце. Эту систему будем считать инерциальной на интервалах времени в несколько часов. Поскольку интерес представляет лишь одноосная ориентация аппарата, направление первой и второй осей этой системы может быть выбрано произвольным образом.

Для описания динамики спутника используем эволюционные переменные. Эти переменные разделяются на две группы. Первая группа включает модуль вектора кинетического момента L и углы его ориентации относительно системы OZ ρ и σ . С вектором кинетического момента связана система координат $OL_1L_2L_3$, третья ось которой совпадает с направлением вектора момента. Чтобы определить две другие оси, произведем поворот вокруг оси OZ_3 на угол σ , а затем поворот вокруг оси OL_2 на угол ρ . Вторая группа переменных описывает ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$, заданной главными центральными осями аппарата, относительно $OL_1L_2L_3$. Для этого используются углы Эйлера ψ , θ , ϕ (последовательность поворотов 3-1-3).

Рассматривая осесимметричный аппарат в режиме вращения, усредняем уравнения движения

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varepsilon l} \dot{l} &= -(b_1^2 + b_2^2) \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \mu \frac{l_{ref}}{l} \{ b_1 b_3 \sin \rho + (b_1^2 + b_2^2) \cos \rho \} + \frac{l_{ref}}{l} (b_1^2 + b_2^2) \cos \theta, \\
 \frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} &= b_1 b_3 \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) - \mu \frac{l_{ref}}{l} \{ b_1 b_3 \cos \rho + (b_2^2 + b_3^2) \sin \rho \} - \frac{l_{ref}}{l} b_1 b_3 \cos \theta, \\
 \frac{1}{\varepsilon} \sin \rho \dot{\theta} &= b_2 b_3 \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \mu \frac{l_{ref}}{l} \{ b_1 b_2 \sin \rho - b_2 b_3 \cos \rho \} - \frac{l_{ref}}{l} b_2 b_3 \cos \theta, \\
 \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} &= \frac{A-C}{2A} (b_1^2 + b_2^2 + 2b_3^2) \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} (b_1^2 + b_2^2 + 2b_3^2) \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Для усреднённых переменных сохраняются обозначения, $l_{ref} = L_{ref}/L_0$ задает целевую величину вектора кинетического момента, малый параметр $\varepsilon = kB_0/\omega_0 C$ характеризует величину изменения кинетического момента за один виток по орбите.

Дальнейший анализ требует конкретных выражений для компонент вектора индукции. Для этого нужно определить матрицу перехода от системы, в которой известно выражение для вектора индукции, к системе OZ . Напомним, что в системе OZ третья ось направлена на Солнце, тогда как две другие выбираются произвольным образом. Рассмотрим движение аппарата на солнечно-синхронной орбите, практически перпендикулярной направлению на Солнце. Чтобы дополнительно упростить выражения, будем считать, что $i = 90^\circ$. В этом случае для вектора индукции в системе OZ [5] получаем простое выражение $\mathbf{b}_z = (\sin 2u, \cos 2u, 0)$. Тогда усредненные по аргументу широты уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varepsilon l} \dot{l} &= -\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \rho) \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \mu \frac{l_{ref}}{l} \cos \rho + \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} (1 + \cos^2 \rho) \cos \theta, \\
 \frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \rho \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) - \mu \frac{l_{ref}}{l} - \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} \cos \rho \cos \theta \right\} \sin \rho, \\
 \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A-C}{A} \cos \theta - \frac{l_{ref}}{l} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \rho \right) \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Положения равновесия и их устойчивость

Исследуем устойчивость полученной системы, чтобы выяснить, как ориентируется аппарат. Из второго и третьего уравнений видно, что положениям равновесия соответствуют $\sin \rho = 0$ и $\sin \theta = 0$, а также некоторые «косые» конфигурации. В зависимости от того, чему равны углы ρ и θ , аппарат выходит на разную скорость закрутки согласно первому уравнению в (3). Рассмотрим все положения равновесия отдельно.

1. $\theta = 0$, $\rho = 0$ (требуемый режим движения). Это положение равновесия представляет основной интерес, так как именно оно соответствует выходу аппарата на требуемый режим вращения вокруг направления на Солнце. Из первого уравнения (3) в положении равновесия имеем

$$\frac{1}{\varepsilon l} \dot{l} = -1 + \mu \frac{l_{ref}}{l} + \frac{l_{ref}}{l},$$

откуда заключаем, что аппарат выходит на вращение с кинетическим моментом $l = (1 + \mu) l_{ref}$. Далее, используя эту величину и линеаризуя два оставшихся уравнения в (3), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{1 + \mu} \rho, \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{C-A}{A} + \frac{1}{\mu+1} \right) \theta.$$

Отметим, что при $C > A$ положение равновесия устойчиво. То есть, если требуется поддерживать вращение вокруг оси максимального момента инерции, заданный режим движения устойчив. Если же необходимо поддерживать вращение вокруг оси с меньшим моментом инерции, такое движение будет устойчиво, если

$$\frac{C-A}{A} + \frac{1}{\mu+1} > 0, \text{ откуда } C > A \frac{\mu}{1+\mu}. \tag{4}$$

Так, при $\mu = 1$ $C > 1/2 A$, при $\mu = 2$ $C > 2/3 A$. При необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции его отличие от максимального не должно быть слишком велико. Причем чем меньше параметр μ , тем большее отличие является допустимым.

2. Положение равновесия $\theta = 0$, $\rho = \pi$ (ось e_3 развернута от Солнца) оказывается неустойчивым.

3. Положение равновесия $\theta = \pi$, $\rho = 0$ (также ось e_3 развернута от Солнца) устойчиво, если

$$C > A \frac{\mu}{-1 + \mu}.$$

4. Косые положения равновесия получаем из третьего уравнения (3)

$$\cos \theta = \frac{1}{\mu} \frac{C}{A - C}, \quad l = \mu A l_{ref} / C. \quad (5)$$

Аналогичные положения возможны и для ρ согласно второму уравнению в (3). Как оказалось, для их существования необходимо $\mu = 0$. Фактически, учитывая анализ случаев 1-3, можно заключить, что кинетический момент аппарата всегда оказывается направленным на Солнце, то есть $\rho = 0$. Относительно оси симметрии этого сказать нельзя. Возможна как ориентация КА в обратном направлении, так и движение в косых положениях.

Чтобы такое положение равновесия существовало, необходимо

$$-1 < \frac{1}{\mu} \frac{C}{A - C} < 1. \quad (6)$$

Полагая, что $C > A$, отсюда получаем

$$C > \frac{\mu}{\mu + 1} A \quad \text{и} \quad C > \frac{\mu}{\mu - 1} A.$$

Эти неравенства не выполняются при $\mu \in [1, 2]$ в силу свойств тензора инерции. Если же $C < A$, то из (6) получаем

$$A > \frac{\mu - 1}{\mu} C \quad \text{и} \quad A > \frac{\mu + 1}{\mu} C. \quad (7)$$

Так, при $\mu = 1$ $A > 2C$, при $\mu = 2$ $A > 1.5C$. Положение (5) устойчиво при выполнении (7).

Подводя итог исследованию, приведем условия успешной работы управления:

- Параметр μ следует брать в диапазоне от 1 до 2.
- Желательно осуществлять закрутку вокруг оси максимального момента инерции.
- При вращении вокруг оси минимального момента инерции необходимо выполнить условие

$$C > A \frac{\mu}{1 + \mu}. \quad \text{В частности, оно выполняется при } C > 1/2 A \text{ и } \mu \in [1, 2].$$

Если же при $\mu = 1$ выполняется $C < 1/2 A$, аппарат выходит на косое положение.

Заключение

Рассмотрено угловое движение аппарата в режиме одноосной стабилизации в направлении Солнца с помощью электромагнитной системы ориентации. Использован алгоритм управления, основанный на информации о текущей и требуемой ориентации одной из осей спутника и вектора его кинетического момента. Показано, что существует опасность стабилизации аппарата в противоположном направлении и косых положениях. Получены условия на параметры управления и моменты инерции аппарата, при которых достигается требуемая ориентация, в том числе при необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции.

Литература

1. Chasset C. et al. 3-axis magnetic control with multiple attitude profile capabilities in the PRISMA mission // 57th International Astronautical Congress. Valencia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. Paper IAC-06-C1.2.3.
2. Белецкий В.В. Эволюция вращения динамически-симметричного спутника // Космические исследования. 1963. Т. 1, № 3. с. 339–385.
3. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладные математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. с. 473–483.
4. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // Астрономический журнал. 1973. Т. 50, № 2. с. 327–335.
5. Ovchinnikov M.Y. et al. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies // Acta Astronaut. 2018. V. 144. pp. 171–180.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЛЕТАТЕЛЬНОГО/КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рулёв Д.Н.

ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва»

dmitry.rulev@rsce.ru

Аннотация. Задача оптимизации планирования наблюдений задаваемого множества наземных объектов с летательного/космического аппарата, движущегося по заданной траектории, рассматривается как задача выбора маршрута подвижного наблюдателя с учётом наложения ограничений на моменты выполнения наблюдений и угловое положение и скорость переориентации оси визирования аппаратуры наблюдения. В рамках теории графов предложен алгоритм решения задачи как задачи минимальной размерности, равной сумме количества объектов наблюдения и количества используемых комплектов аппаратуры наблюдения. Предложена методика планирования, обеспечивающая решение задачи практически без ограничений на количество объектов наблюдения.

Задача планирования наблюдений заданного перечня объектов подвижным наблюдателем – аппаратурой наблюдения, размещённой на летательном/космическом аппарате (ЛА/КА), движущемся по заданной траектории, - рассматривается как задача выбора маршрута. Требуется построить программу наблюдений так, чтобы минимизировать суммарное время на переориентацию оси визирования аппаратуры наблюдения от очередного объекта к последующему. Если все объекты не могут быть просмотрены одним наблюдателем, то искомый маршрут должен состоять из сегментов, каждый из которых составляет последовательность наблюдений объектов отдельным наблюдателем – отдельным комплектом аппаратуры наблюдения. Наблюдения выполняются в течение временных интервалов видимости объектов посредством размещённой на ЛА/КА аппаратуры наблюдения с учетом ее разрешающей способности. Угловая скорость переориентации оси визирования аппаратуры наблюдения ограничена техническими характеристиками аппаратуры наблюдения.

Формализация и метод решения задачи. Рассматриваем полный ориентированный граф $G=(V, A)$: $V=N \cup K$ - множество вершин, включающее подмножество $N = \{1, n\}$ внутренних вершин сегментов маршрута (объекты наблюдения) и подмножество $K = \{1, |K|\}$ граничных вершин сегментов маршрута; $A = \{(i, j) \in V \times V: i \neq j, (i, j) \notin K \times K\}$ - множество дуг; длина c_{ij} дуги (i, j) составляет затраты на переход от вершины i к вершине j , оцениваемые временем переориентации t_{ij} оси визирования аппаратуры наблюдения между наблюдениями, для $i = j \in N$ и $(i, j) \in K \times K$ значения c_{ij} доопределяем как ∞ . Требуется найти кратчайший замкнутый маршрут (цикл), проходящий через все вершины, каждую не более одного раза. Используя булевские переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{дуга } (i, j) \text{ входит в маршрут,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{дуга } (i, j) \text{ входит в } k\text{-й сегмент маршрута,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A; \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A, \forall k \in K; \quad \sum_{k \in K} x_{ij}^k = x_{ij}, \forall (i, j) \in A; \quad (1)$$

формулируем задачу минимизации целевой функции затрат (длины или стоимости маршрута)

$$\min \sum_{(i, j) \in A} x_{ij} c_{ij} \quad (2)$$

при (1) и условиях, что в каждой внутренней вершине заканчивается и начинается по одной дуге одного и того же сегмента; в каждой граничной вершине начинается дуга с окончанием во внутренней вершине и заканчивается дуга с началом во внутренней вершине; запрещены циклические последовательности внутренних вершин:

$$\sum_{i \in V, i \neq l} x_{il} = 1, \quad \sum_{j \in V, j \neq l} x_{lj} = 1, \quad \forall l \in N; \quad \sum_{i \in V, i \neq l} x_{il}^k \leq \sum_{j \in V, j \neq l} x_{lj}^k, \quad \forall l \in N, \forall k \in K; \quad \sum_{i \in N} x_{il} = 1, \quad \sum_{j \in N} x_{lj} = 1, \quad \forall l \in K; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} x_{j_i j_{i+1}} + x_{j_p j_1} < p, \quad p = \{2, n - |K|\}, \quad j_1 j_2 \dots j_p \subseteq P(n, |K|), \quad |P(n, |K|)| = \sum_{p=2}^{n-|K|} \frac{n!}{(n-p)! p}, \quad (4)$$

а также условиях, что каждая вершина $i \in N$ должна быть пройдена в течение заданного интервала времени $[t_i^-, t_i^+]$ видимости i объекта посредством аппаратуры наблюдения при длительности нахождения в вершине не менее Δ_i ; угловая скорость поворота оси визирования аппаратуры наблюдения по двум углам γ, β управления ее угловым положением не превышает заданных значений $\omega_*^\gamma, \omega_*^\beta$:

$$t_i^- \leq t_i, \quad t_i + \Delta_i \leq t_i^+, \quad \vec{r}(t_i) + \vec{l}(t_i, \gamma_i, \beta_i) = \vec{\rho}_i, \quad \vec{r}(t_i + \Delta_i) + \vec{l}(t_i + \Delta_i, \gamma_i^\Delta, \beta_i^\Delta) = \vec{\rho}_i, \quad (5)$$

$$\omega_{ij}^\gamma = \frac{\gamma_j - \gamma_i^\Delta}{t_{ij}}, \quad \omega_{ij}^\beta = \frac{\beta_j - \beta_i^\Delta}{t_{ij}}, \quad \omega_j^\gamma = \frac{\gamma_j^\Delta - \gamma_j}{\Delta_j}, \quad \omega_j^\beta = \frac{\beta_j^\Delta - \beta_j}{\Delta_j}, \quad |\omega_{ij}^\gamma| \leq \omega_*^\gamma, \quad |\omega_j^\gamma| \leq \omega_*^\gamma, \quad |\omega_{ij}^\beta| \leq \omega_*^\beta, \quad |\omega_j^\beta| \leq \omega_*^\beta, \quad (6)$$

где t_i – момент начала наблюдения объекта i ; $\gamma_i, \beta_i, \gamma_i^\Delta, \beta_i^\Delta$ – значения углов γ и β на моменты начала и окончания наблюдения объекта i ; $\omega_{ij}^\gamma, \omega_{ij}^\beta$ – угловые скорости поворота оси визирования после наблюдения объекта i в положение для наблюдения объекта j по углам γ и β ; $\omega_j^\gamma, \omega_j^\beta$ – угловые скорости поворота оси визирования по углам γ и β в процессе наблюдения объекта j ; $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор ЛА/КА в момент t ; $\vec{l}(t, \gamma, \beta)$ – вектор от ЛА/КА в момент t до земной поверхности вдоль направления оси визирования, заданного углами γ и β ; $\vec{\rho}_i$ – радиус-вектор объекта i .

Коэффициентами матрицы затрат являются длительности поворота оси визирования между наблюдениями объектов, точные значения которых определяются как

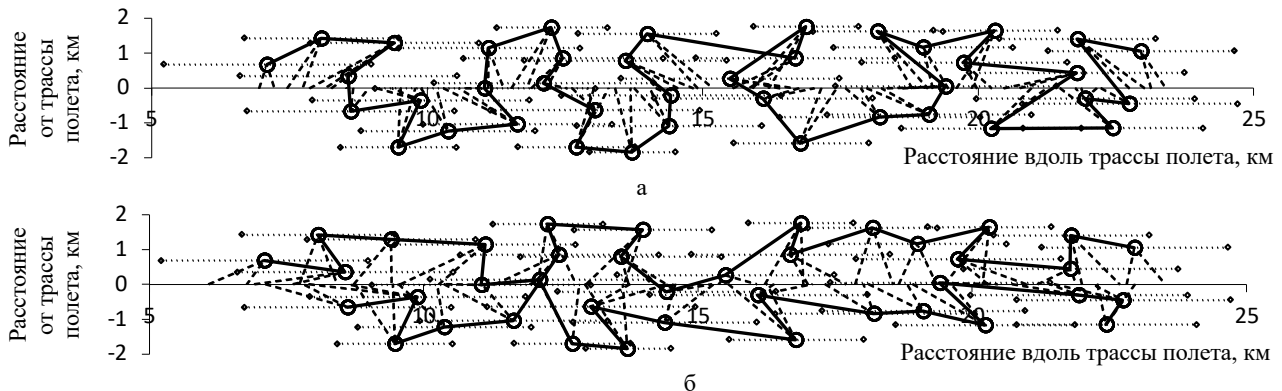
$$t_{ij} = \max\{|\gamma_j - \gamma_i^\Delta|/\omega_{ij}^\gamma, |\beta_j - \beta_i^\Delta|/\omega_{ij}^\beta\}, \quad (7)$$

и в рассматриваемой формулировке задачи не могут быть определены заранее – до получения точных значений углов $\gamma_i, \beta_i, \gamma_i^\Delta, \beta_i^\Delta$. Поэтому для составления целевой функции используем *условные* (ожидаемые) значения длительности поворота, соответствующие наблюдениям объектов на минимальном удалении от ЛА/КА, рассчитываемые как длительности переориентации оси визирования после завершения наблюдения объекта i в момент минимального удаления ЛА/КА от объекта i в положение для наблюдения объекта j в момент, максимально близкий к моменту минимального удаления ЛА/КА до объекта j [1]. Поскольку решение оптимизационной задачи будет получено для целевой функции (2) не с точными (7), а с указанными *условными* значениями длительности переориентации оси визирования, то найденное таким образом решение в общем случае превышает кратчайшее решение исходной задачи. Поэтому получаемые решения называем не оптимальными, а оптимизированными.

Сформулированную задачу решаем как задачу (2) минимальной размерности – при условиях (1), (3) (размерность решаемой задачи равна сумме количества объектов и количества сегментов маршрута $n + |K|$), – а учет (4)–(6) осуществляем путем проверки их выполнения на каждом шаге итерационного процесса решения задачи. Для решения задачи применяем алгоритм Литтла [2], использующий идею метода «ветвей и границ». Алгоритм основан на разделении числа перебираемых вариантов на классы (ветви) с расчетом оценок (границ) для этих классов так, чтобы иметь возможность прерывать ветви, которые не приведут к оптимальному решению. Дополнительно к этому на каждом шаге итерационного процесса решения задачи исключаем из дальнейшего рассмотрения те ветви, которые содержат комбинации вершин, не удовлетворяющие указанным ограничениям (4)–(6).

Примеры. На рис. 1, 2 представлены примеры оптимизированных решений при наблюдении случайных каталогов $n=40$ объектов с ЛА с высотой полета 2 км (рис. 1) и с КА с высотой орбиты 400 км (рис. 2). Угол поля зрения аппаратуры наблюдения от надира составляет 45° для наблюдений с ЛА и 30° – с КА. Направление оси визирования аппаратуры наблюдения определяем углами: γ – угол от направления в надир до проекции оси визирования на плоскость орбиты ЛА/КА (положительный отсчет в сторону полета); β – угол от направления в надир до проекции оси визирования на плоскость, перпендикулярную вектору скорости ЛА/КА (положительный отсчет в сторону вектора кинетического момента орбитального движения). Ограничение на угловую скорость переориентации оси визирования аппаратуры наблюдения по данным углам составляет $30^\circ/\text{с}$ для аппаратуры наблюдения, установленной на ЛА, и $3^\circ/\text{с}$ – на КА.

На рисунках в системе координат, связанной с трассой полета, пунктиром показаны направления от ЛА/КА на наблюдаемый объект в моменты начала и окончания наблюдения, точечными линиями – отрезки, проекция которых на трассу полета составляет интервал местоположений ЛА/КА, когда соответствующий объект доступен наблюдению.



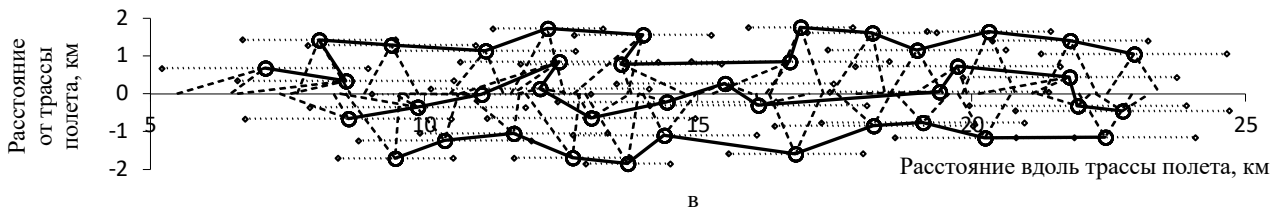


Рис. 1. Оптимизированные последовательности наблюдения $n=40$ объектов с ЛА с высотой полета 2 км: (а) – $\Delta=2$ с, $K=1$, значение функции затрат $S=37$ с; (б) – $\Delta=5$ с, $K=2$, $S=38$ с; (с) – $\Delta=7$ с, $K=3$, $S=35$ с.

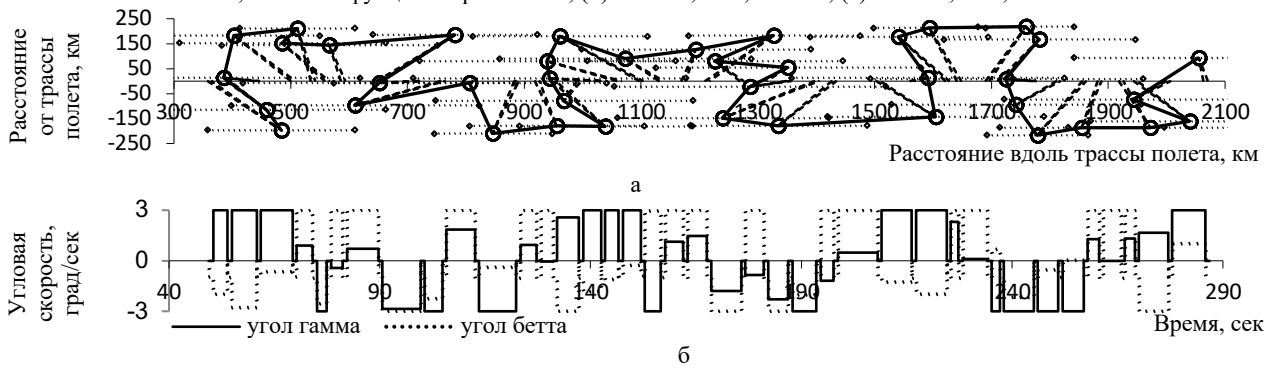


Рис. 2. Оптимизированная программа наблюдения $n=40$ объектов с КА с высотой орбиты 400 км, $\Delta=1$ с, $K=1$, $S=197$ с: (а) – последовательность наблюдения объектов; (б) – угловые скорости поворота оси визирования по углам γ (сплошная линия) и β (пунктирная линия).

На рис. 1 представлены оптимизированные решения с 1, 2 и 3 сегментами маршрута, соответствующие наличию на ЛА нескольких комплектов аппаратуры наблюдения. Данные решения иллюстрируют возможность увеличения длительности наблюдения Δ за счет использования дополнительных комплектов аппаратуры наблюдения.

Результаты моделирования. Для анализа эффективности получаемых решений выполнено моделирование по 100 случайным каталогам n объектов для 4-х вариантов высоты полета (ЛА – 2 км, КА – 400, 500 и 600 км) и 4-х вариантов частоты появления объектов на подстилающей поверхности вдоль трассы полета (от максимально-допустимой до двукратно уменьшенной): получены оптимизированные решения, точные кратчайшие решения (методом перебора) и очевидные простые решения (простым решением называем лучшее из имеющихся в наличии двух решений в виде последовательностей объектов по порядку времен их минимального удаления от трассы и по порядку времен начала зон видимости). Моделирование показало, что получаемые оптимизированные решения превышают кратчайшие на 5–10 % (не существенно) и улучшают простые решения (при их наличии) до 45 % (рис. 3а). Объем вычислений для получения оптимизированных решений оценивается средним числом выполненных итераций и средним числом переменных в решенных задачах. С ростом количества объектов среднее число выполненных итераций существенно возрастает (рис. 3в), среднее число переменных монотонно увеличивается с коэффициентом $\sim 1/2$, наличие простых решений сокращается (рис. 3б), а отличие значений имеющихся простых решений от оптимизированных остается примерно на одном и том же уровне (рис. 3а).

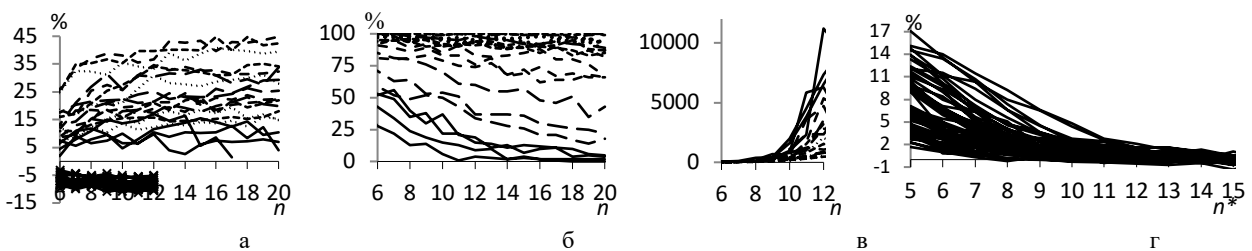


Рис. 3. Результаты моделирования: (а) – среднее отличие значений простых решений (линии без маркеров) и кратчайших решений (линии с маркером) от оптимизированных; (б) – % наличия простых решений; (в) – среднее количество итераций при решении оптимизационной задачи; (г) – среднее отличие оптимизированных решений с $n^*=5-15$ от решения с $n^*=16$.

Спецификой решаемой задачи является то, что возможность выполнения наблюдений объектов возникает последовательно по мере пролета ЛА/КА над набегающей подстилающей поверхностью. При этом на оптимальный выбор следующего объекта для выполнения наблюдений влияние оказывает только ограниченное количество n^* предшествующих наблюдений, которое можно определить термином *глубина планирования*. Моделирование показывает (рис. 3г), что для рассмотренных вариантов ЛА/КА *глубину планирования* можно определить значениями $n^* \sim 10-12$. Оптимизированные решения для $\forall n > n^*$ могут быть получены последовательным решением оптимизационных задач для n^* объектов, в которые входят n^*-1 последних

объекта из решения предшествующей оптимизационной задачи и один новый объект – следующий объект из упорядоченной (по временам минимального удаления объектов от трассы или по временам начала зон видимости объектов) последовательности объектов наблюдения. Таким образом, описанная методика обеспечивает возможность решения задач планирования практически без ограничений на количество объектов наблюдения.

Литература

1. Рулев Д.Н. Оптимизация планирования наблюдения каталога объектов подвижным наблюдателем с учетом накладываемых ограничений // Известия РАН. Теория и системы управления, 2022, № 2, с. 62-79.
2. Литтл Дж. и др. Алгоритм решения задачи о коммивояжере // Экономика и мат. методы. 1965. Т. 1. № 1. с. 94-107.

ОТРАБОТКА МЕТОДОВ УЧЁТА УХОДЯЩЕГО ОТ ЗЕМЛИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРИХОДА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ОТ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ ОРБИТАЛЬНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Рулев Д.Н.

ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва»

dmitry.rulev@rsce.ru

Аннотация. При решении ряда задач управления и определения (реконструкции) движения космических аппаратов (КА) возникает задача расчета величины тока, генерируемого солнечными батареями (СБ) КА, при этом точность выполняемого расчета тока СБ влияет на решение исходной целевой задачи управления / определения движения. В настоящей работе описываются методы учёта уходящего от Земли излучения при моделировании величины тока от СБ орбитального КА и обработки их применения на российском сегменте Международной космической станции (РС МКС), выполненная по результатам реализации на РС МКС космического эксперимента «Альбедро».

С учетом основных факторов, обуславливающих переменность тока от солнечных батарей (СБ) орбитального космического аппарата (КА), для оценки эффективности СБ КА используем параметр $EF(B_{const})$, определяемый как ток, который генерируют СБ за счет освещения лицевой поверхности СБ солнечным излучением эталонной яркости B_{const} под прямым углом к плоскости поверхности СБ. В качестве B_{const} используем опубликованное в 2008 году значение солнечной постоянной $1360,8 \pm 0.5$ Вт/м² (данное значение ниже полученного в 1990-х годах значения $1365,4 \pm 1.3$ Вт/м²) [1, 2]. Ток СБ I рассчитываем как сумму составляющих, генерируемых за счет освещения лицевой и тыльной сторон СБ излучением Солнца и излучением, уходящим от Земли:

$$I = \frac{B_{тек}}{B_{const}} \left\{ \sum_j K_j [P_j \cos \alpha_j + K_T P_j^* \cos(\pi - \alpha_j)] + \sum_{j,k} K_j \frac{\theta_k d_k \sinh k}{\pi} [P_{jk} \cos \alpha_{jk} + K_T P_{jk}^* \cos(\pi - \alpha_{jk})] \right\}, \quad (1)$$

где $B_{тек}$, B_{const} – текущее и эталонное значения интенсивности солнечного излучения на орбите КА; K_j – коэффициент генерации тока от освещения лицевой поверхности j -го элемента фотоэлектрических преобразователей (ФЭП) СБ; K_T – коэффициент эффективности тыльной поверхности ФЭП относительно лицевой поверхности ФЭП СБ; P_j, P_j^* – освещенная Солнцем площадь лицевой и тыльной поверхностей j -го элемента ФЭП СБ; α_j – угол между направлением на Солнце и нормалью к лицевой поверхности j -го элемента ФЭП СБ; θ_k – телесный угол, под которым k -ая ячейка Земли видна с КА; d_k – коэффициент диффузного отражения k -ой ячейки Земли (значение двулучевой функции отражения BRF); h_k – угол высоты Солнца в k -ой ячейке Земли; P_{jk}, P_{jk}^* – освещенная излучением от k -ой ячейки Земли площадь лицевой и тыльной поверхностей j -го элемента ФЭП СБ; α_{jk} – угол между направлением от КА на k -ую ячейку Земли и нормалью к лицевой поверхности j -го элемента ФЭП СБ.

Значения d_k получаем по калиброванным данным видимых каналов спектра аппаратуры спутников дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) – в частности, используем данные с геостационарных спутников *Meteosat* и *Электро-Л*, а при их отсутствии альбедро ячеек Земли принимаем равным среднему альбедро Земли 0.29 [1].

Коэффициенты генерации тока находим из условия минимизации отличия расчетного тока СБ от ТМИ

$$\|F(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{i=1}^n (I_i^{TMI} - I_i(\mathbf{x}))^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

где I_i^{TMI} – измеренное значение тока СБ на момент t_i ; $I_i(\mathbf{x})$ – модельное значение тока СБ под воздействием прямого солнечного и уходящего от Земли излучений на момент t_i , \mathbf{x} – вектор определяемых параметров. Задачу решаем с использованием итерационного метода Ньютона-Гаусса [3]: начиная с начального значения \mathbf{x}_0 последовательные приближения \mathbf{x}_{l+1} , $l = 0, 1, 2, \dots$, рассчитываются по соотношению

$$\mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{x}_l - (J^T(\mathbf{x}_l)J(\mathbf{x}_l))^{-1} J^T(\mathbf{x}_l)F(\mathbf{x}_l), \quad (3)$$

где $J(\mathbf{x}) = \left[\frac{dI_i(\mathbf{x})}{dx_j} \right]_{i=1, j=1}^{n,m}$ – матрица Якоби для функции $F(\mathbf{x})$.

Для реализации расчетной схемы (1)–(3) сбор ТМИ тока СБ необходимо выполнять на интервале наличия со спутников ДЗЗ калиброванных измерений яркости всей видимой с КА освещенной подстилающей поверхности. Для обеспечения определения эффективности тыльной поверхности СБ дополнительно выполняем режим ориентации тыльной поверхности СБ на Солнце. Для обеспечения определения эффективности отдельных СБ по ТМИ суммарного тока СБ режимы ориентации лицевой и тыльной поверхности СБ на Солнце выполняем для необходимого числа различных комбинаций лицевой и тыльной поверхностей разных СБ [4].

Модели расчета тока СБ. Используем следующие модели учета альбедро Земли при расчете тока СБ:

А) (учет альбедро Земли путем завышения коэффициентов генерации тока) – расчет тока СБ только с

учетом освещения СБ прямым излучением Солнца, при этом применяются значения коэффициентов генерации тока, завышенные относительно точных фактических значений коэффициентов генерации тока и определяемые из условия получения расчетных значений тока по модели А, максимально близких к значениям тока по модели В;

В) (учет среднего альbedo Земли) – применяются характеристики среднего альbedo Земли ко всем ячейкам поверхности Земли;

С) (учет альbedo ячеек Земли) – к ячейкам поверхности Земли применяются индивидуальные характеристики альbedo;

Д) (альbedo Земли=0) – расчет тока СБ только от излучения Солнца с применением фактических значений коэффициентов генерации тока, определенных для моделей В и С.

Модели В и С обеспечивают высокоточный прогноз прихода электроэнергии с точным моделированием потоков уходящего от Земли излучения. Модели А и Д обеспечивают прогноз прихода электроэнергии без моделирования потоков уходящего от Земли излучения с получаемыми интегральными значениями прихода электроэнергии за виток, точность которых достаточна для штатного обеспечения полета КА, при этом модель А дает ожидаемый приход электроэнергии, а модель Д дает гарантированный приход электроэнергии (гарантированный максимум, не превышающий фактический приход). Коэффициенты генерации тока для модели А x^A определяются из условия минимизации отличия расчетных токов СБ, полученных по моделям А и В

$$\|F(x^A)\|^2 = \sum_{i=1}^n (I_i^A(x^A) - I_i^B(x^B))^2 \rightarrow \min,$$

где $I_i^A(x^A)$, $I_i^B(x^B)$ – значения тока СБ на момент t_i по моделям А и В; x^B – используемые в модели В фактические значения коэффициентов генерации тока от освещения лицевой и тыльной поверхностей СБ.

Апробация. На рис. 1 представлены результаты анализа данных замеров тока СБ служебного модуля (СМ) российского сегмента (РС) Международной космической станции (МКС) в сеансах оценки эффективности СБ СМ за весь период эксплуатации МКС и полученные по результатам выполнения на РС МКС космического эксперимента «Альbedo» значения параметра $EF(B_const)$ оценки эффективности СБ СМ.

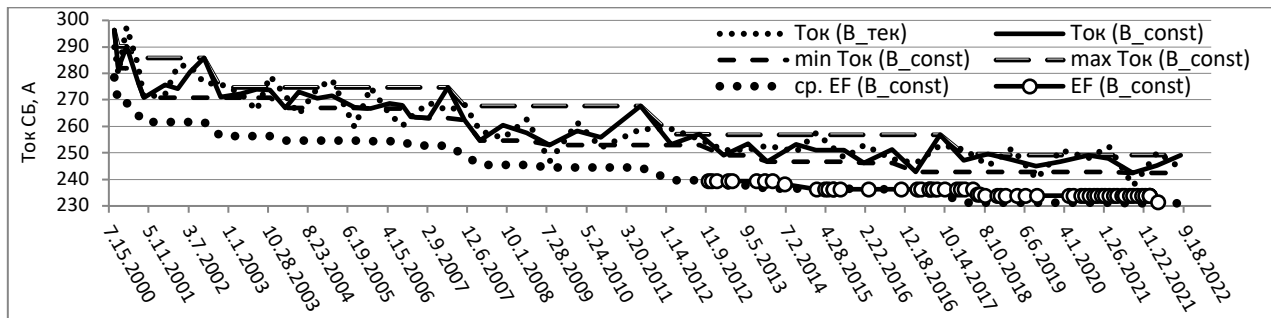


Рис. 1. Результаты анализа данных замеров тока СБ в сеансах оценки эффективности СБ СМ РС МКС за весь период эксплуатации МКС: Ток ($B_тек$) – данные замера тока СБ (соответствуют текущей яркости Солнца $B_тек$); Ток (B_const) – ток СБ, пересчитанный к условию освещения СБ световым потоком эталонной яркости B_const ; min/max Ток (B_const) – нижняя и верхняя границы значений Ток (B_const) от начала полета до текущего момента.

На рис. 1 также показан график значений $ср. EF(B_const)$ – среднее оценочное значение параметра эффективности СБ СМ, получаемое путем вычитания из средне-арифметической величины граничных значений min/max Ток (B_const) среднего значения составляющей тока СБ, которая генерируется (при штатной ориентации СБ в режиме слежения за Солнцем) за счет освещения тыльной поверхности СБ уходящим от Земли излучением, с последующим увеличением результата на величину, компенсирующую уменьшение измеренного тока СБ из-за отклонения поступающего на СБ солнечного светового потока от нормали к лицевой поверхности СБ:

$$ср. EF(B_const) = [\min \text{Ток}(B_const) + \max \text{Ток}(B_const)]/2 \cdot (1 - K_z/100\%)/\cos \theta_s, \quad (4)$$

где K_z (%) – средняя величина в суммарном токе СБ СМ, измеренном в сеансе оценки эффективности СБ (на интервале 10 минут в середине светового участка витка при нахождении Солнца в плоскости орбиты МКС) составляющей тока, которая генерируется за счет освещения тыльной поверхности СБ уходящим от Земли излучением, соответствующим среднему альbedo Земли 0,29, с применением номинального паспортного значения коэффициента относительной эффективности тыльной поверхности СБ СМ $K_T = 0,38$ (для конфигурации РС МКС в составе с многофункциональным лабораторным модулем «Наука» $K_z \approx 7,45\%$); $Q_s = 10^\circ$ – среднее отклонение солнечного светового потока от нормали к лицевой поверхности СБ СМ в сеансе оценки эффективности СБ.

Расчет $ср. EF(B_const)$ по (4) выполняется в рамках экспресс-обработки данных выполненного сеанса оценки эффективности СБ СМ и предвещает расчет точных значений параметра $EF(B_const)$ по (1)–(3).

Для иллюстрации на рис. 2 представлены данные ТМИ и расчетного тока СБ СМ РС МКС для витка

штатной ориентации СБ на Солнце и витка специальной ориентации СБ на Землю (на интервале 54000÷57000 сек). Точная модель – Модель С – реализуется на интервале наличия необходимых измерений с двух спутников *Meteosat* яркости всей видимой с МКС освещенной подстилающей поверхности (интервалы dt2 на рис. 2).

Обозначим: СКО и СИО – среднеквадратическое и среднее интегральное отклонения тока I_2 от тока I_1

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I_2 - I_1)^2} \text{ А и } 100 \sum (I_2 - I_1) / \sum I_1 \%, N - \text{ количество точек измерений (точка объединяет 5 сек).}$$

Результаты сравнения расчетного тока СБ между моделями и с ТМИ [1, 2] подтверждают теоретические положения о взаимосвязи моделей расчета тока СБ. Так, для штатной ориентации СБ: СИО между моделями С, В, А ~ 1%; СИО модели D от моделей С, В, А ~ -5÷6%; СИО от ТМИ модели С ~ ±1.5% (СКО ~ 2,5÷6 А), моделей В, А ~ ±2% (СКО ~ 7÷15 А), модели D ~ -5÷7% (СКО ~ 15÷21 А). Отметим, что из сравнения исключались интервалы времени витка, на которых ошибки расчета тока СБ определяются существенными ошибками расчета сложно-моделируемого затенения СБ СМ элементами конструкции американского сегмента (АС) МКС (интервалы dt3 на рис. 2), вклад данных интервалов в генерацию тока СБ на витке не превышает 6 %, а включение их в рассмотрение приведет к неверным оценкам точности получаемых решений.

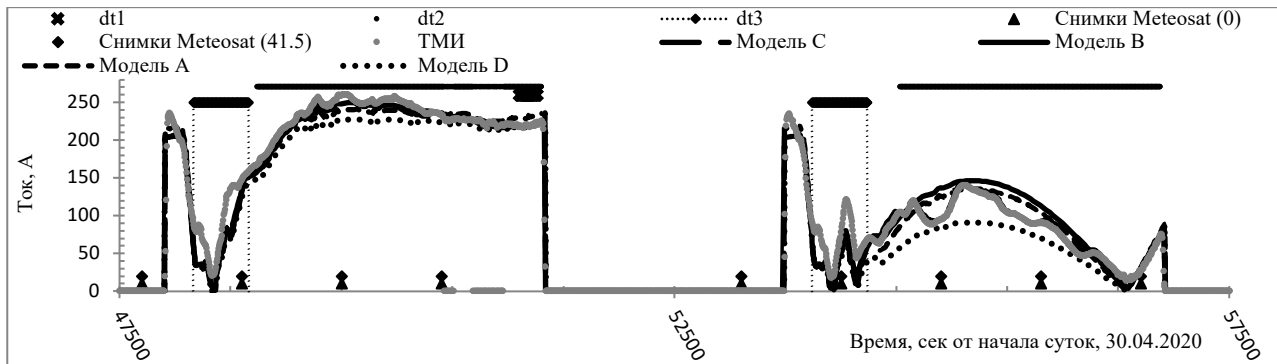


Рис. 2. Графики расчетного тока СБ СМ и данные ТМИ: Модель А,В,С,Д и ТМИ – ток СБ по моделям А,В,С,Д и данные ТМИ; Снимки *Meteosat* – моменты снимков со спутников *Meteosat* (точки стояния 0 и 41,5° в.д.); dt1 – интервал, когда составляющая тока от освещения СБ уходящим от Земли излучением менее 0,5% тока СБ (1.1 А); dt2 – интервал наличия измерений со спутников *Meteosat*; dt3 – интервалы существенного затенения СБ СМ элементами конструкции АС МКС.

Анализ точности моделей С и В в зависимости от шага разбиения поверхности Земли на ячейки показал (рис. 3), что в штатном полете достаточная точность (СКО ≤ 0,1 А, $\max|\Delta I| \leq 0,5$ А) достигается при шаге ≤ 3° для модели В и ≤ 2° для модели С. При отворотах СБ от Солнца указанная точность достигается с шагом ≤ 2° для модели В и с шагом 1° для модели С. Отметим, что в анализ не включается наблюдаемый при штатной ориентации СБ всплеск $|\Delta I|$ до 1 А в конце светового участка (момент времени ≈ 51000 сек), когда нормаль к рабочей поверхности СБ направлена на узкую освещенную Солнцем полосу видимого с КА горизонта Земли - поскольку расчетная яркость данной полосы существенно и разнонаправленно изменяется при изменении размера ячеек.

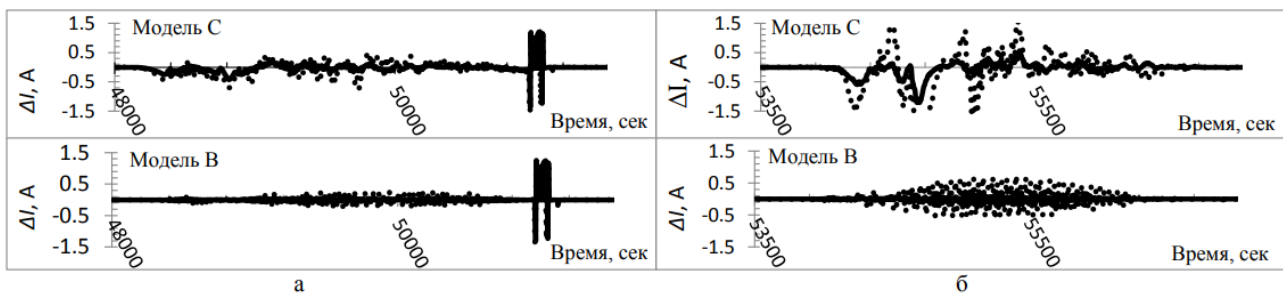


Рис. 3. Зависимость точности расчета тока СБ от шага разбиения поверхности Земли (сплошная линия – шаг 2°, пунктирная линия – шаг 3° относительно шага 1°): (а) – штатная ориентация СБ на Солнце; (б) – специальная ориентация СБ на Землю.

Заключение. Предложенные расчетные схемы позволяют выполнять как высокоточный расчет прихода электроэнергии от СБ КА с точным моделированием потоков уходящего от Земли излучения, так и расчет прихода электроэнергии без моделирования потоков уходящего от Земли излучения с получаемыми интегральными значениями прихода электроэнергии за виток, точность которых достаточна для штатного обеспечения полета. Методика апробирована на РС МКС, ее использование позволяет максимально точно контролировать эффективность СБ модулей РС МКС. Методология применима для СБ КА на околоземной и окололунной орбите.

Литература

1. Рулев Д.Н. Учет уходящего от Земли излучения в модели системы электропитания российского сегмента Международной космической станции // Известия РАН. Энергетика. 2021, № 4, с. 90–102.
2. Rulev D.N., Spirin A.I. Evolution of the performance monitoring techniques for solar arrays of the service module Zvezda within the ISS Russian segment over the course of its orbital flight // Acta Astronautica, Volume 198, 2022, Pages 680-688, ISSN 0094-5765, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.06.036>.
3. Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. Практическая оптимизация: Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 509 с.
4. Спири́н А.И., Рулев Д.Н. Способ оценки эффективности солнечных батарей системы электропитания аппарата, преимущественно космического // Патент на изобретение РФ № 2784977. Бюл. № 34 от 01.12.2022.

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ ПРОГРАММНОГО РАЗВОРОТА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.

*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
molalexei@yandex.ru*

Аннотация. Исследуется классическая задача оптимального по быстродействию программного разворота космического аппарата как осесимметричного твердого тела при произвольных граничных условиях. С помощью замен переменных исходная задача упрощается до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В рамках концепции Пуансо об интерпретации углового движения твердого тела вокруг неподвижной точки, с использованием принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи. Описываются численные примеры, показывающие близость квазиоптимального решения задачи к оптимальному.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00218 и в рамках темы FFNM-2022-0007.

Введение

По проблеме программного управления пространственным угловым движением космического аппарата (КА) опубликовано большое количество работ, но аналитическая нерешенность задачи в общем виде оставляет актуальной эту тематику исследований. При произвольных краевых условиях точное решение не известно даже в случае сферически-симметричного КА, поэтому в общем случае используют только приближенные решения задачи. Явное решение задачи оптимального управления угловым движением КА имело бы не только теоретическую, но и большую прикладную значимость, так как позволило бы использовать в системе управления заранее полученные выражения для управления и траектории КА. Это касается, например, КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности.

В докладе исследуется классическая задача оптимального по быстродействию программного управления угловым движением КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА с ограниченной функцией управления. С помощью взаимно-однозначных замен переменных исходная задача упрощается (в отношении динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. При этом правый конец переходного процесса представляет собой многообразие в восьмимерном фазовом пространстве.

С использованием кватернионов и принципа максимума Понтрягина получены формулы краевой задачи оптимизации. Кратко описано численное решение этой краевой задачи на основе алгоритма Левенберга-Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Основываясь на проведенных численных экспериментах для различных параметров задачи, сделан вывод о близости решений упрощенной классической задачи и ниже описываемой модифицированной задачи оптимального управления угловым движением КА.

В докладе получено явное решение модифицированной задачи оптимального по быстродействию разворота КА с произвольными краевыми условиями по угловой скорости и ориентации КА, доведенное до алгоритма. В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением КА, а его траектория задана явными выражениями в этом классе движений, содержащими произвольные кватернионные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. При этом общность исходной задачи практически не нарушается: известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного КА в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач относительная погрешность между значениями функционала оптимизации составляет не более нескольких процентов, включая угловые маневры КА на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче оптимального углового движения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА исходной классической постановки, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула вектора управляющего момента КА. Полученные результаты на основе решения обратной задачи динамики могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи различных возмущений. Примеры показывают, что предложенное аналитическое решение задачи справедливо для КА по своей динамической конфигурации близких к осевой симметрии.

1. Классическая задача оптимальной переориентации КА

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается уравнениями:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w}, \quad (1.1)$$

$$I_1 \dot{w}_1 = M_1, \quad I_2 \dot{w}_2 = M_2 - (I_1 - I_2)w_1 w_3, \quad I_2 \dot{w}_3 = M_3 + (I_1 - I_2)w_1 w_2. \quad (1.2)$$

Здесь фазовыми координатами являются $\mathbf{L}(t)$ – нормированный кватернион поворота КА:

$$\mathbf{L}(t) = l_0(t) + l_1(t)i_1 + l_2(t)i_2 + l_3(t)i_3 = [l_0(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t)]^T,$$

$$\|\mathbf{L}\| = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1,$$

где i_1, i_2, i_3 – орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ жестко связанного с КА трехмерного векторного пространства, и $\mathbf{w}(t)$ – вектор угловой скорости КА $\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3 = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$, причем символ “ \circ ” означает кватернионное умножение, а управление – вектор $\mathbf{M}(t)$ действующего на КА внешнего момента

$$\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3 = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T.$$

Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ($\mathbf{L}(t), \mathbf{w}(t)$ – непрерывные функции, $\mathbf{M}(t)$ – кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (1.2) для КА с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта \mathbf{i}_1 связанной с КА системы координат) I_1, I_2 – главные центральные моменты инерции твердого тела, $I_1, I_2 = \text{const} > 0$.

На модуль вектора управления наложено ограничение

$$|\mathbf{M}| \leq M_{\max}. \quad (1.3)$$

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \quad \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \quad (1.4)$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T. \quad (1.5)$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$ системой (1.1),(1.2) при ограничении (1.3) и граничных условиях (1.4),(1.5), доставляющее минимум функционалу (задача быстродействия):

$$J = T. \quad (1.6)$$

2. Замены переменных

Так как основная переменная задачи кватернион \mathbf{L} является безразмерной величиной, в задаче осуществляется переход к безразмерным переменным [1], при котором вид формул (1.1),(1.2), (1.4)–(1.6) не изменится, а ограничение (1.3) запишется так

$$|\mathbf{M}| \leq 1. \quad (2.1)$$

С целью упрощения (в отношении динамических уравнений Эйлера) задачи (1.1),(1.2), (1.4)–(1.6), (2.1) осуществим замены переменных типа [1–3], сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота КА со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение.

Для этого перепишем уравнения (1.2) в виде: $\dot{w}_1 = m_1$, $\dot{w}_2 = b_1 m_2 - b w_1 w_3$, $\dot{w}_3 = b_1 m_3 - b w_1 w_2$, где $m_1 = M_1/I_1$, $m_2 = M_2/I_1$, $m_3 = M_3/I_1$, $b = (I_1 - I_2)/I_2$, $b_1 = I_1/I_2$.

Заменим переменные w_1, w_2, w_3 на новые $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Тогда получим для уравнений Эйлера (1.2) в кватернионной записи

$$\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}(t) = \exp\{\mathbf{i}_1 \theta(t)/2\}, \quad (2.4)$$

где “ \sim ” - сопряжение кватерниона, “ $\exp\{.\}$ ” – кватернионная экспонента, вектор $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T$, а

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

$b_2 = bb_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}$. Отметим, что $|\mathbf{B}(t)| = 1, \forall t$.

Кватернионное уравнение углового движения КА (1.1) при этом запишется так:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1}\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.6)$$

где кватернион \mathbf{B} определяется (2.4).

С учетом начального условия по угловой скорости КА (1.5) уравнение (2.3) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}, \quad (2.7) \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \exp\left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left(\int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{01} \right) d\tau / 2 \right\}. \quad (2.8)$$

Нелинейное выражение, стоящее в правой части (3.5) и зависящее только от переменных $m_k(t)$, $k = 1, 3$, примем за новое управление $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}, \quad (2.9)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ определяется (2.8). Отметим, что $u_1(t) = b_1 m_1(t)$, и поэтому в замене переменных (2.9) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной $\mathbf{u}(t)$ (когда она будет известна) восстановить управление $\mathbf{m}(t)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4) – (1.6), (2.1).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА так:

$$|\mathbf{u}| = |\tilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}| = b_1 |\tilde{\boldsymbol{\beta}}| |\mathbf{m}| |\boldsymbol{\beta}| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}| / I_1 = |\mathbf{M}| / I_2.$$

Исходя из (2.5), осуществим еще одну замену переменных:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.10)$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(t)$ – новая кватернионная переменная описывающая угловое положение КА.

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6), (2.1) примет вид

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \quad (2.11) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}, \quad (2.12) \quad \dot{\theta} = b_2 \omega_1, \quad (2.13) \quad |\mathbf{u}| \leq I_2^{-1}, \quad (2.14) \quad \theta(0) = 0, \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3, \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 = \mathbf{L}_0,$$

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)), \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(T) = \boldsymbol{\Lambda}_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta(T)),$$

$$J = T \rightarrow \min, \quad (2.18)$$

где $w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{T1}, w_{T2}, w_{T3}$ – компоненты вектора $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$ в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион $\mathbf{B}(\theta(T))$ определяется по формуле (2.4).

Согласно (2.10), (2.17), задачу (2.11)–(2.18) можно переформулировать так: в восьмимерном фазовом пространстве $\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega} \times \theta$ управляемую систему (2.11)–(2.13) необходимо за минимальный промежуток времени перевести из начального состояния (2.15), (2.16) на многообразие, которое определяется соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} - \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta) = 0, \quad \text{vect}(\boldsymbol{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \tilde{\mathbf{L}}_T) = 0, \quad (2.19)$$

где “ $\text{vect}(\cdot)$ ” обозначает векторную часть кватерниона.

Из этой задачи найдем оптимальное управление $\mathbf{u}^{\text{опт}}$ и траекторию $\boldsymbol{\Lambda}^{\text{опт}}, \boldsymbol{\omega}^{\text{опт}}$. Как видно, векторное дифференциальное уравнение (2.12) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически-симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

Далее будем рассматривать задачу (2.11) – (2.18) ((2.19)).

3. О модифицированной задаче оптимального разворота КА

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела является разрешимость классической задачи Дарбу – аналитического определения $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ из

уравнения (2.11) при известных $\Lambda_0, \omega(t)$. При условии, что вектор угловой скорости $\omega(t)$ принудительно задается своим выражением в классе обобщенных конических движений [4]

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}, \quad (3.1)$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ – произвольные функции времени, \mathbf{K} – произвольный постоянный кватернион, известно решение, удовлетворяющее начальному условию (2.16)

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K} \quad (3.2)$$

Формулы (3.1), (3.2) включают в себя все известные точные аналитические решения классической задачи оптимального разворота твердого тела при его динамической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения твердого тела постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1,4]. Предлагаемая структура угловой скорости (3.1) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела [5]. Граничные условия задачи удовлетворяются следующим образом:

$$\mathbf{i}_1 \dot{f}(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(0) = \mathbf{K} \circ \omega_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{i}_1 \dot{f}(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(T) = \mathbf{K} \circ \omega_T \circ \tilde{\mathbf{K}}, \quad (3.4)$$

$$\exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \mathbf{K} \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T \circ \tilde{\mathbf{K}}. \quad (3.5)$$

Относительно функций f и g , их первых и вторых производных (которые рассматриваются в качестве новых управлений) ставится оптимизационная задача быстрого действия, которая аналитически решается на основе принципа максимума Понтрягина; вектор управляющего момента КА получается из вектора угловой скорости на основе решения обратной задачи динамики твердого тела. Аналитическое решение модифицированной задачи доведено до алгоритма и допустимо как квазиоптимальное аналитическое решение классической задачи оптимального разворота КА.

Заключение

Аналитическое квазиоптимальное решение задачи программного управления угловым движением осесимметричного КА с произвольными краевыми условиями применимо в системах управления КА. Предлагаемый алгоритм имеет теоретическое обоснование и с хорошими точностями решает задачу оптимальной переориентации КА. Отметим, что аналитическое решение модифицированной задачи оптимального разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях, полученное на основе решения приведенной задачи (2.11)–(2.18) ((2.19)), оказалось существенно точнее, чем решение [6] (применительно к осевой симметрии КА), где квазиоптимальный управляющий момент КА строился на основе обратной задачи динамики КА по результатам решения модифицированной задачи без приведения с помощью замен переменных системы уравнений Эйлера для осесимметричного твердого тела к такой же системе для тела со сферической динамической симметрией.

Литература

1. А.В.Молоденков, Я.Г. Сапунков // Аналитическое решение задачи оптимального по быстрдействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений, Изв. РАН. Теория и системы управления, 2018. 131–147.
2. А.В.Молоденков, Я.Г. Сапунков // Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата, Изв. РАН. Теория и системы управления, 6 2010. 61–69.
3. Ю.Н. Челноков // Об осцилляторном и ротационном движениях одного класса механических систем, Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1 1989. 28–35.
4. А.В.Молоденков, Я.Г. Сапунков // Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений, Изв. РАН. Теория и системы управления, 6 2016. 129–145.
5. A.V. Molodenkov, S.E. Perelyaev // Solution of approximate equation for modified Rodrigues vector and attitude algorithm design, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 44:6 2021. 1224–1227.
6. А.В.Молоденков, Я.Г. Сапунков // Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата, Изв. РАН. Теория и системы управления, 4:4 2021. 142–156.

ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА ТОРМОЖЕНИЯ ДЛЯ КРУПНЫХ ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА ДЛЯ УСКОРЕНИЯ ДЕГРАДАЦИИ 25-ЛЕТНЕЙ ОРБИТЫ ЗАХОРОНЕНИЯ

Стогний М.В., Иванов С.Г.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
mihael199617@yandex.ru

Аннотация. В докладе представлены результаты численного эксперимента, целью которого является исследование эффективности совместного применения технологий активного (тормозной импульс скорости) и пассивного (надувной аэродинамический тормоз) удаления крупного космического мусора при очистке низких околоземных орбит. В качестве уводимых объектов выступают 23 ступени «Зенит-2», каждая из которых обладает массой 9 тонн и движется по околокруговой орбите со средней высотой 910 км.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-29-00419, <https://rscf.ru/project/23-29-00419/>.

Введение

Согласно действующему стандарту ISO 24113:2019 [1] срок существования низкой орбиты захоронения не должен превышать 25 лет. Следовательно, это значение может рассматриваться как один из целевых критериев в перспективных миссиях по активному удалению космического мусора. Проведённые ранее исследования показали, что в диапазоне высот 700–1200 км для увода крупных объектов космического мусора (ОКМ) – отработавших ракетных ступеней – наиболее эффективным является оснащение активного КА-сборщика (КА) отделяемыми тормозными двигательными модулями (ТДМ) [2]. После захвата объекта такой модуль фиксируется в его сопле и далее обеспечивает независимый увод объекта на орбиту захоронения. В то же время, КА выполняет перелёт к следующему ОКМ с оставшимися ТДМ. Баллистический анализ показал, что ТДМ должен обладать запасом характеристической скорости около 120 м/с, что приводит к значительной массе топлива на борту ТДМ. В результате для выведения КА на орбиту требуется ракета-носитель тяжелого класса, что существенно повышает стоимость миссии.

Одним из способов снижения массы ТДМ может быть оснащение его системой на основе технологии пассивного удаления космического мусора. В литературе описано множество проектов таких систем [3, 4]. Анализ проектов показал, что наиболее рациональным для ТДМ может быть использование надуваемого аэродинамического тормоза (НАТ), основным элементом конструкции которого является надуваемый газом сферический баллон. Предложены различные варианты конструкции таких НАТ [5, 6].

Целью работы является поиск рационального сочетания активных и пассивных технологий, которое позволит значительно сократить время существования орбиты захоронения или обеспечит существенное снижение массы ТДМ (если «правило 25 лет» превалирует).

Описание НАТ, используемого в ТДМ

Подробное описание особенностей компоновки КА и ТДМ можно найти в предшествующих публикациях [2, 7]. НАТ состоит из закрытого крышкой контейнера со сложенной в транспортном положении сферической оболочкой баллона и системой раскрытия, состоящей из кронштейна контейнера, приводов кронштейна и системы зачеховки контейнера.

Особенность предлагаемого НАТ заключается в том, что используется технология отверждаемой оболочки, надуваемой в космосе. Оболочка баллона является композиционной и состоит из трёх слоёв: двух слоёв алюминия, между которыми располагается тонкоплёночный полимерный материал (Mylar). Удельная масса такой оболочки принята равной 0.04 кг/м². Отверждение оболочки осуществляется посредством её надува выше предела текучести, после чего необходимость в постоянной поддержке внутреннего давления отпадает. В результате чего такая система более устойчива к столкновениям с мелким космическим мусором и микрометеоритам, так как отсутствует вероятность взрыва и повреждения оболочки. Аналогом предлагаемой конструкции является конструкция спутников серии «Эхо» [8].

Главное преимущество описанного устройства заключается в том, что при относительно малой массе применяемых конструкций удается получить вспомогательное средство пассивного торможения ОКМ, дающее значительное увеличение площади сечения миделя, что позволяет либо сократить продолжительность существования орбиты захоронения до нескольких лет, либо уменьшить тормозной импульс скорости для захоронения ОКМ.

В предшествующих работах авторов показано, что сухая масса ТДМ составит около 90 кг, а масса топлива, необходимая для перевода ОКМ типа вторая ступень РН «Зенит-2» на эллиптическую орбиту захоронения, составит около 360 кг [2].

Торможение, обусловленное сферической оболочкой, зависит от отношения площади миделя A к массе m системы «ступень+ТДМ (сухой)+НАТ». График на рис. 1 показывает, что масса всего НАТ медленно увеличивается с увеличением диаметра оболочки, и эта масса на два порядка меньше массы сводимой ступени.

Применительно к отношению A/m это означает, что знаменатель остается практически неизменным. В то же время площадь мидаля оболочки квадратично зависит от ее диаметра. Таким образом, основное преимущество описанного устройства заключается в том, что при относительно небольшой массе вспомогательных конструкций получается эффективный инструмент пассивного воздействия на орбиту захоронения объекта.

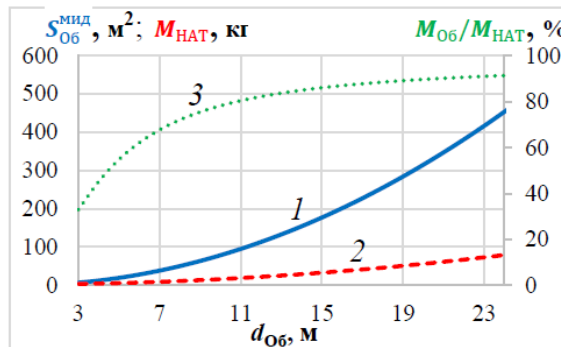


Рис. 1. Параметры НАТ в зависимости от диаметра оболочки $d_{об}$: 1 – площадь мидаля оболочки, 2 – масса всей системы НАТ, 3 – процент массы оболочки в массе всей системы НАТ (показан на вспомогательной оси).

Описание рассматриваемого ОКМ

В качестве ОКМ рассматривается отработавшая вторая ступень РН «Зенит-2» массой 9000 кг, имеющая форму цилиндра диаметром 3.9 м и длиной 10.4 м. При движении по орбите площадь поверхности ОКМ, экспонируемой к набегающему потоку может изменяться от 12 м² (касательная ориентация) до 40 м² (нормальная ориентация), составляя в среднем 26.25 м².

Орбиты ОКМ являются околосферическими со средней высотой около 910 км и наклоном 71°. В результате приложения тормозного импульса скорости начальная орбита захоронения имеет параметры $a = 7040.3$ км, $e = 0.0342$ (910 x 428 км).

На рис. 2 показана зависимость продолжительности баллистического существования ОКМ, оснащённого НАТ, от площади центрального сечения надувной оболочки.

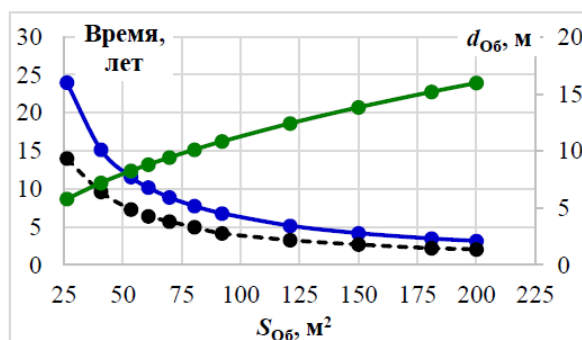


Рис. 2. Процесс деградации эллиптической орбиты захоронения второй ступени РН «Зенит-2» с начальными параметрами 910 x 428 км при наличии НАТ. Пунктирной линией показана продолжительность превышения высотой апогея отметки в 700 км, синей линией – продолжительность баллистического существования, зеленой линией – диаметр оболочки НАТ, соответствующий данной площади её мидаля.

Из приведённого графика (рис. 2) видно, что разумно ограничивать площадь центрального сечения оболочки величинами 100–150 м², что соответствует диаметрам 11–14 м. Дальнейшее увеличение этой площади слабо влияет на продолжительность схода с орбиты вследствие малой плотности атмосферы на высотах выше 600 км.

Упрощённая математическая модель углового движения ОКМ с НАТ

Для определения рационального диаметра сферической оболочки НАТ используется упрощённая математическая модель движения с интервалом времени не более суток. Предполагается, что ступень движется по орбите захоронения (910 x 428 км) в центральном гравитационном поле. Движение центра масс определяется только силой притяжения, поскольку эффект торможения об остаточную атмосферу в течение суток крайне мал для выбранной орбиты захоронения.

ОКМ был упрощенно представлен в виде двухмассовой динамической системы – несимметричной гантели, состоящей из сосредоточенных масс корпуса (m_1) и маршевой двигательной установки (m_2), соединенных абсолютно жестким невесомым стержнем. Сухая масса ТДМ не была включена в расчётную схему, т.к. она на два порядка меньше массы ОКМ. При моделировании дополнительно было сделано предположение о том, что ОКМ, ТДМ и НАТ, а также все соединения между ними являются абсолютно жёсткими. Для ОКМ, с установленным ТДМ и НАТ расчетная схема дополняется сферой с диаметром $d_{об}$, на

конце гантели, где расположена точечная масса m_2 . Увеличением массы m_2 в расчете пренебрегают, поскольку сухая масса ТДМ и масса оболочки, на два порядка меньше массы ступени.

Угловое движение системы зависит от соотношения гравитационного и аэродинамического моментов. Фактически, необходимо найти такой диаметр оболочки, при котором объект будет статически стабилизирован при прохождении области перигея даже на начальной орбите захоронения.

Результаты моделирования

Для выбора наилучшего сочетания активных и пассивных технологий увода и определения конструктивных параметров НАТ было проведено численное моделирование кратковременного движения связки ОКМ-ТДМ-НАТ на орбите захоронения.

Диаметр оболочки баллона подбирался таким образом, чтобы колебания связки ОКМ-ТДМ-НАТ были малыми (амплитуда колебаний не превышает 30°), т.е. чтобы связка в потоке была стабилизирована.

Расчёты показывают, что в первом приближении сферы с диаметром около 12,5 метров достаточно, чтобы обеспечить стабилизацию амплитуды колебаний в пределах не более 30° в области перигея даже для орбиты 910 x 428 км. В этом случае сход объекта с орбиты займёт примерно 5 лет. В последние дни своего полёта ОКМ будет двигаться по околокруговой орбите и его площадь миделя будет постоянной в связи с большим запасом статической устойчивости, что повысит точность прогноза точки входа объекта в атмосферу.

Наибольший интерес представляет комбинированное использование тормозного импульса скорости, исполняемого ТДМ, и силы сопротивления, создаваемой НАТ. Изначально орбита захоронения имеет параметры 910 x 428 км, величина тормозного импульса составляет около 122 м/с, что для сухой массы ТДМ требует около 365 кг топлива. Если уменьшить величину тормозного импульса скорости, это приведёт к формированию орбиты захоронения с более высоким перигеем и более длительным сроком существования орбиты. При этом развёртывание сферической оболочки должно за счёт увеличения площади миделя скомпенсировать этот эффект. Итерационно подбирая диаметр сферической оболочки и высоту перигея орбиты захоронения можно добиться того, чтобы выполнялось правило 25 лет.

Найденному рациональному решению диаметру оболочки $d_{об} = 13,75$ м соответствует *компромиссная орбита захоронения* 910 x 581 км. Для её формирования требуется тормозной импульс скорости около 84 м/с вместо 122 м/с ранее, что означает уменьшение массы топлива в ТДМ с 365 до 250 кг.

Выводы

1. Продолжительность существования начальной орбиты захоронения (910 x 428 км), сформированной тормозным импульсом скорости 122 м/с, составит 25 лет.
2. НАТ с диаметром оболочки 12,5 м уменьшает время существования этой орбиты захоронения до 5 лет. Это минимальный диаметр оболочки, который обеспечивает стабилизацию связки ОКМ-ТДМ-НАТ даже при начальном перигее 428 км.
3. Найден компромиссный диаметр оболочки ($d_{об} = 13,75$ м), позволяющий, соблюдая нормативное время деградации орбиты в 25 лет, снизить массу топлива ТДМ на 115 кг (на 30% от начальных 365 кг). При этом масса НАТ составит примерно 28 кг. В результате полная масса запущенного ТДМ вместе с НАТ снизится на 20 %, в сравнении с изначальным вариантом.

Литература

1. ISO 24113:2019(E), Space Systems — Space Debris Mitigation Requirements. – Impl. 2019 – 07, ISO Central Secretariat, Geneva, 2019, p. 13.
2. A.A. Baranov, D.A. Grishko, G.A. Shcheglov, A.S. Sholmin, M.V. Stognii, N.D. Kamenev, Feasibility analysis of LEO and GEO large space debris de/re-orbiting taking into account launch mass of spacecraft-collector and its configuration layout, *Advances in Space Research*, 67(1) (2021) 371-383.
3. K.T. Nock, K.M. Aaron, Removing orbital debris with less risk, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 50(2) (2013) 365-379.
4. M.S.J. Guo, E. Gill, Review and comparison of active space debris capturing and removal methods, *Progress in Aerospace Sciences*, 80 (2016) 18-32.
5. A.J. Petro, Space station trash removal system, Patent US on invention US5242134 (1993).
6. E.Y. Robinson, Spacecraft for removal of space orbital debris, Patent US on invention US6655637 (2003).
7. Щеглов Г.А., Стогний М.В. Космический комплекс для утилизации группы объектов крупногабаритного космического мусора, Патент РФ на изобретение RU 2695155 (2019).
8. L. Kobren, C.L. Staugaitis, Mechanical and physical properties of the Echo II metal-polymer laminate, NASA-TN-D-3409, 1 August 1966, <https://ntrs.nasa.gov/citations/19660025569>, (дата обращения: 10.02.23).

УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДВУХ ГРУПП МИКРОСПУТНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИЛ ЛОРЕНЦА

Чернов К.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
chernov.ks@phystech.edu

Аннотация. В приведенной работе исследуется управляемое относительное движение двух тетраэдральных групп микроспутников. Каждая группа представляет собой четыре аппарата в вершинах правильного тетраэдра, соединенные между собой жесткими стержнями. По стержням течет электрический ток, взаимодействие которого с геомагнитным полем приводит к возникновению силы и момента, действующего на тетраэдр. Проводится численное моделирование движения системы и исследование зависимости времени достижения требуемого движения от различных параметров системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00845.

Введение

Космическая миссия, в рамках которой осуществляется полет нескольких спутников по определенным относительным траекториям, называется групповым полетом. Такие миссии могут решать различные задачи, например, измерять параметры околоземного пространства, такие как плотность атмосферы или пространственное распределение параметров ионосферы [1]. Для уменьшения стоимости миссии можно применять малые космические аппараты – микроспутники. Такие спутники имеют ограничения по массе полезной нагрузки, поэтому часто на них не устанавливаются бортовые двигатели. Таким образом, возникает задача разработки бестопливных методов управления группой спутников.

Один из возможных методов управления основан на использовании магнитного поля Земли. На проводник с электрическим током в магнитном поле действует сила, которая называется силой Лоренца. Если закрепить такой проводник на космическом аппарате, то эта сила будет действовать на тело аппарата. Тогда управляя величиной и направлением тока, текущего по проводнику, можно управлять орбитальным движением спутника. А если проводник будет закреплен несимметрично относительно центра масс, то на спутник будет действовать механический момент, позволяющий управлять угловым движением.

В данной работе рассматривается относительное движение двух групп космических аппаратов. Каждая группа имеет конфигурацию правильного тетраэдра, в вершинах которого находятся микроспутники. В каждой группе аппараты соединены друг с другом стержнями, проводящими электрический ток. Задачей управления является поддержание заданного относительного движения тетраэдров и достижение заданного углового движения каждого тетраэдра относительно своего центра масс.

Алгоритм управления относительным движением

В ньютоновом поле тяготения уравнения движения спутников имеют вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\frac{\mu_g \mathbf{R}_i}{R_i^3} + \mathbf{f}_i^c, \quad i = 1, 2,$$

где \mathbf{R}_i – радиус-вектор центра масс i -го спутника в инерциальной системе координат, связанной с Землей, (ИСК), $\mu_g = 3.986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Земли, \mathbf{f}_i^c – управляющее ускорение. При $|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| \ll |\mathbf{R}_1|$ для относительного движения на околокруговых орбитах справедливо следующее дифференциальное уравнение Хилла–Клохесси–Уилтшира [2]:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_{orb}\dot{z} = f_{2,x}^c - f_{1,x}^c, \\ \ddot{y} + \omega_{orb}^2 y = f_{2,y}^c - f_{1,y}^c, \\ \ddot{z} - 2\omega_{orb}\dot{x} - 3\omega_{orb}^2 z = f_{2,z}^c - f_{1,z}^c. \end{cases}$$

Здесь $[x, y, z]^T = \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ – разность радиус-векторов аппаратов, записанных в орбитальной системе координат, ω_{orb} – орбитальная угловая скорость. В работе [3] показано, что для того чтобы относительные траектории были ограничены, необходимо в течение времени Δt прикладывать следующее управление

$$f_{2,x}^c(t) - f_{1,x}^c(t) = -\frac{\omega_{orb}}{\Delta t} \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{\omega_{orb}} + 2z(t_0) \right).$$

Угловое движение тетраэдра и связанной с ним системы координат (ССК) описывается динамическими уравнениями Эйлера и кинематическими соотношениями в кватернионах

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{J}^{-1}(-\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{M}_i^{grav} + \mathbf{M}_i^c), \\ \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i \circ [0; \boldsymbol{\omega}_i] / 2, \end{cases}$$

где \mathbf{J} – тензор инерции тетраэдра, $\boldsymbol{\omega}_i$ – полная угловая скорость ССК относительно ИСК, \mathbf{q}_i – кватернион перехода из ИСК в ССК, $\mathbf{M}_i^{grav} = 3\mu_g \frac{\mathbf{R}_i \times \mathbf{J}\mathbf{R}_i}{R_i^5}$ – гравитационный момент, действующий на i -й

спутник. Для описания требуемого углового движения вводится опорная система координат, имеющая в начальный момент времени некоторую заданную ориентацию $\mathbf{q}^{ref}(t_0)$ и постоянную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}^{ref}$. Управляющий момент должен раскручивать тетраэдр до этой угловой скорости и отслеживать ориентацию опорной системы. На основе метода Ляпунова [4] можно получить следующее выражение для управляющего момента:

$$\mathbf{M}_i^c = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_i^{rel} \times \boldsymbol{\omega}^{ref}) - \mathbf{J}\mathbf{K}_a \mathbf{q}_i^{rel} - \mathbf{J}\mathbf{K}_w \boldsymbol{\omega}_i^{rel} - \mathbf{M}_i^{grav},$$

где $\boldsymbol{\omega}_i^{rel} = \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}^{ref}$, $\mathbf{q}_i^{rel} = \tilde{\mathbf{q}}^{ref} \circ \mathbf{q}_i$, а \mathbf{K}_a и \mathbf{K}_w – положительно определенные матрицы коэффициентов управления.

На проводник длиной \mathbf{L} с текущим по нему током I в магнитном поле \mathbf{B} действует сила $\mathbf{F} = \mathbf{L} \times \mathbf{B}$. Тогда суммарное ускорение, которое получает i -й тетраэдр при протекании тока по всем шести его ребрам, равно $\mathbf{f}_i^a = \sum_{j=1}^6 I_i^j \mathbf{L}_i^j \times \mathbf{B}_i / m$. Разность первых компонент имеет следующий вид:

$$f_{2,x}^a - f_{1,x}^a = \left(B_{2,z} \sum_{j=1}^6 L_{2,y}^j I_2^j / m - B_{2,y} \sum_{j=1}^6 L_{2,z}^j I_2^j / m \right) - \left(B_{1,z} \sum_{j=1}^6 L_{1,y}^j I_1^j / m - B_{1,y} \sum_{j=1}^6 L_{1,z}^j I_1^j / m \right).$$

Момент, действующий на j -е ребро i -го тетраэдра, равен

$$\mathbf{M}_i^{j,a} = \mathbf{N}_i^j \times (I_i^j \mathbf{L}_i^j \times \mathbf{B}_i) = \mathbf{L}_i^j (\mathbf{N}_i^{jT} \mathbf{B}_i) I_i^j - \mathbf{B}_i (\mathbf{N}_i^{jT} \mathbf{L}_i^j) I_i^j = \mathbf{L}_i^j (\mathbf{N}_i^{jT} \mathbf{B}_i) I_i^j,$$

где \mathbf{N}_i^j – радиус-вектор из центра i -го тетраэдра к середине его j -го ребра, в правильном тетраэдре перпендикулярный вектору \mathbf{L}_i^j . Суммарный момент сил относительно центра масс тетраэдра равен

$$\mathbf{M}_i^a = \sum_{j=1}^6 \mathbf{L}_i^j (\mathbf{N}_i^{jT} \mathbf{B}_i) I_i^j.$$

Можно заметить, что ускорения и моменты сил зависят от токов линейно, то есть можно записать, что

$$\begin{bmatrix} f_{2,x}^a - f_{1,x}^a, \mathbf{M}_1^{aT}, \mathbf{M}_2^{aT} \end{bmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} I_1^1, \dots, I_1^6, I_2^1, \dots, I_2^6 \end{bmatrix}^T,$$

где \mathbf{A} – матрица, элементы которой не зависят от токов. Чтобы электрический ток, текущий по ребрам тетраэдра, обеспечивал требуемое движение аппаратов, нужно чтобы выполнялось равенство $\begin{bmatrix} f_{2,x}^a - f_{1,x}^a, \mathbf{M}_1^{aT}, \mathbf{M}_2^{aT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2,x}^c - f_{1,x}^c, \mathbf{M}_1^{cT}, \mathbf{M}_2^{cT} \end{bmatrix}$. Таким образом, для нахождения сил тока получилась линейная система из семи уравнений с двенадцатью неизвестными $\mathbf{A} \begin{bmatrix} I_1^1, \dots, I_1^6, I_2^1, \dots, I_2^6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} f_{2,x}^c - f_{1,x}^c, \mathbf{M}_1^{cT}, \mathbf{M}_2^{cT} \end{bmatrix}^T$. Можно искать решение с наименьшей суммой токов, в этом случае оно выражается формулой

$$\begin{bmatrix} I_1^1, \dots, I_1^6, I_2^1, \dots, I_2^6 \end{bmatrix}^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \begin{bmatrix} f_{2,x}^c - f_{1,x}^c, \mathbf{M}_1^{cT}, \mathbf{M}_2^{cT} \end{bmatrix}^T.$$

Итак, представлен алгоритм расчета сил тока для обеспечения заданного орбитального и углового движения тетраэдров. Для приближения к реальным системам величины токов ограничиваются параметром I_{\max} , и затем рассчитываются ускорения $\mathbf{f}_i^a = \sum_{j=1}^6 I_i^j \mathbf{L}_i^j \times \mathbf{B}_i / m$ и моменты $\mathbf{M}_i^a = \sum_{j=1}^6 \mathbf{L}_i^j (\mathbf{N}_i^{jT} \mathbf{B}_i) I_i^j$, отличающиеся от требуемых. Они подставляются в уравнения поступательного и углового движения, которые интегрируются численно методом Рунге–Кутты.

Заключение

Проведено исследование движения двух групп спутников под управлением с помощью электромагнитных сил, действующих в геомагнитном поле. Показано, что использование сил Лоренца позволяет поддерживать заданное относительное поступательное и угловое движение. Разработанные алгоритмы могут быть использованы для управления движением групп малых космических аппаратов.

Литература

1. Chernyshov A.A. et. al. Approaches to studying the multiscale ionospheric structure using nanosatellites // *Geomagnetism and Aeronomy*, 2016. V. 56. P. 72-79.
2. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // *American Journal of Mathematics*, 1878. V. 1. №. 1. P. 5-26.
3. Ivanov D.S., Monakhova U.V., Ovchinnikov M.Y. Nanosatellites swarm deployment using decentralized differential drag-based control with communicational constraints // *Acta Astronautica*, 2019. V. 159. P. 646-657.
4. Mashtakov Y.V., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. Study of the disturbances effect on small satellite route tracking accuracy // *Acta Astronautica*, 2016. V. 129. P. 22-31.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕТОДАМИ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Широбок М.Г., Корнеев К.Р., Перепухов Д.Г.

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
shirobokov@keldysh.ru*

Аннотация. Доклад посвящен новым подходам к построению устойчивого управления движением космических аппаратов на основе методов обучения с подкреплением. Сформулирована проблема автономного управления с учетом внешних возмущений и неопределенности в динамических и навигационных параметрах, представлены типичные подходы к решению этой проблемы. Коротко описывается постановка задачи обучения с подкреплением, перечисляются рабочие методы управления аппаратом. Описывается метаобучение как альтернатива к построению робастного управления. Работа методов демонстрируется на задачах посадки спускаемого модуля на поверхность небесного тела и полета к фокусной линии гравитационной линзы Солнца.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-71-00051.

Содержание

Автономное управление космическими аппаратами, то есть управление на основе внутренних алгоритмов бортового комплекса управления, при использовании которых не подразумевается внешнее вмешательство человека или других систем, позволяет аппарату принимать решения быстрее и эффективнее и избежать многих проблем и опасностей в процессе полета. Автономность управления особенно важна при движении аппарата на больших расстояниях от Земли, а также в условиях ограниченной или отсутствующей радиовидимости аппарата. В идеале автономное управление должно также учитывать малые ошибки в параметрах аппарата и внешние возмущения.

Одним из современных и быстро развивающихся подходов к проектированию автономного управления является обучение с подкреплением. Обучение с подкреплением – это агентный подход в машинном обучении, в рамках которого предполагается, что есть среда и агент, взаимодействующий со средой и получающий от нее скалярный сигнал – вознаграждение. Задача агента состоит в том, чтобы путем взаимодействия со средой методом проб и ошибок выработать оптимальную с точки зрения максимизации суммарного вознаграждения стратегию поведения. В отношении космических полетов агентом является программное обеспечение на борту аппарата, а средой – сам космический аппарат.

Взаимодействие агента со средой формализуется в виде марковского процесса принятия решения с полностью или частично наблюдаемой средой. Все методы обучения с подкреплением условно можно поделить на три крупные категории [1]: 1) динамическое программирование, 2) методы Монте-Карло, 3) методы на основе временных различий. Методы динамического программирования относятся к наиболее ранним работам, в которых предполагались дискретные и небольшие по размерности пространства состояний среды и действий агента, известная функция перехода из состояния в состояние и известная функция вознаграждения [2]. Более общие предположения приводят к уравнениям оптимальности Беллмана в частных производных, для решения которых следует обращаться к специальным методам. Попытки обойти предположения об известности функции перехода и вознаграждения привели к методам Монте-Карло. Здесь интересной оказалась высокая эффективность и удобство применения эволюционных алгоритмов для обучения моделей на основе нейронных сетей. В астродинамике появилась серия работ, в которых этот подход применялся для поиска оптимальных перелетов с малой тягой, причем по построению управление получается с обратной связью, а не программное. В методах Монте-Карло применение теории оптимальности Беллмана не обязательно, но возможно. В этом случае функция перехода и функция вознаграждения оцениваются в серии испытаний. Наибольшее внимание сейчас обращают на себя методы из третьей категории. Временные различия – это применяемая в прикладной статистике альтернатива сдвигу вдоль градиента. Появившись в 1970-х годах, эти методы применялись преимущественно в случаях с дискретными множествами состояний и действий. В связи с появлением мощных графических и центральных процессоров, а также новых алгоритмов развития этих методов был дан сильный толчок, появились целые семейства нейросетевых методов обучения с подкреплением, такие как Actor-Critic methods [3], Deep Deterministic Policy Gradient [4], Proximal Policy Optimization [5]. Уникальным и интересным кажется метод Proximal Policy Optimization («оптимизация близкой стратегии»), представляющий собой соединение двух идей – метода доверительных областей из теории оптимизации и использования функции ценности состояний из теории оптимальности Беллмана.

Методы обучения с подкреплением активно исследуются для решения разнообразных задач астродинамики [6, 7]. Отдельно выделим серию работ по управлению посадкой аппарата на поверхность небесного тела [8, 9, 10, 11]. В этих работах исследователи делают упор на автономизацию и адаптивность закона управления. Перспективным методом построения такого рода управления является метод метаобучения с подкреплением (reinforcement meta-learning, meta-reinforcement learning). В основе метаобучения лежат две идеи. Во-первых, во время обучения нейросетевых моделей закона управления в начале каждого эпизода

симуляции случайно инициализируется не только состояние среды (например, начальное состояние аппарата), но и параметры этой среды, полагаемые обычно постоянными (например, моменты инерции аппарата, стартовая масса, смещение центра масс относительно оси симметрии). Таким образом, агент обучается действовать в совокупности ситуаций, как штатных, так и нештатных. Во-вторых, в качестве модели агента выбирают рекуррентные нейронные сети. В этом случае агент, обрабатывая последовательность состояний среды, понимает с какой ситуацией он имеет дело и применяет соответствующий алгоритм управления.

Обучение с подкреплением можно рассматривать как общую методологию для проектирования законов управления с обратной связью, а использование рекуррентных нейросетевых моделей позволяет исследователям интегрировать системы навигации, наведения и управления в одном модуле [8, 10]. Действительно, агент способен отображать в действия не оцененные стандартными навигационными средствами состояние среды, а непосредственно навигационные измерения. Распространение сигнала в слоях рекуррентной сети заменяет таким образом алгоритмы навигации.

Автономное управление требуется в перспективных миссиях к далеким небесным телам и за пределы Солнечной системы. Например, большую ценность представляют гелиофизические исследования во внешних областях Солнечной системы. Здесь можно привести пример разрабатываемой сейчас в Лаборатории прикладной физики Университета Джонса Хопкинса (Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory) миссии *Interstellar Probe*, который будет отправлен на расстояние в 1000 а.е. от Солнца для изучения гелиосферы и межзвездного пространства. Другой важнейший пример – миссия к гравитационному фокусу Солнца. В рамках этой миссии планируется отправить космический аппарат с телескопом за 550 а.е. от Солнца в область, в которой преломляются лучи света от удаленных объектов под действием гравитационной линзы Солнца. В проекте, активно разрабатываемом сотрудниками *Jet Propulsion Laboratory (NASA's JPL)* под руководством В. Турышева (Slava Turyshev) показано, что аппараты-телескопы, расположенные в окрестности таких фокальных линий, способны по наблюдаемым кольцам Эйнштейна предоставить изображения экзопланет, удаленных от Солнца на 30 парсек, со степенью разрешения порядка 10 км – точностью, недостижимой при использовании стандартных телескопических средств [12].

В докладе рассматривается задача автономного управления и навигации на линии фокуса гравитационной линзы Солнца. Для обеспечения устойчивости движения аппарата вблизи линии фокуса по отношению к внешним возмущениям и ошибкам знания параметров аппарата применяются методы обучения с подкреплением и метаобучение. Для обучения рассматриваются методы Монте-Карло на основе генетических алгоритмов оптимизации, а также современный метод оптимизации близкой стратегии (*Proximal Policy Optimization*). Делаются выводы о пригодности указанных подходов.

Заключение

Автономное управление – важный элемент повышения надежности и живучести космического аппарата, оно существенно для миссий на больших расстояниях от Земли и/или за пределами радиовидимости. Теория обучения с подкреплением предоставляет общую методологию для проектирования автономного управления с обратной связью. Метаобучение с подкреплением – перспективный способ получать законы управления, устойчивые к внешним возмущениям и ошибкам в знании параметров аппарата. Применение рекуррентных нейронных сетей в агенте в некоторых случаях может заменить навигационную обработку измерений и отображать непосредственно измерения в управляющие воздействия. Методы обучения с подкреплением зарекомендовали себя в ряде задач, в частности, в задачах посадки аппарата на поверхность небесного тела, а также являются перспективными в задачах полета во внешние области Солнечной системы, например, к линии фокуса гравитационной линзы Солнца.

Литература

1. R. S. Sutton, A. G. Barto // *Reinforcement learning: An introduction*. 2018. 526 p.
2. M. L. Puterman // *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming*. 2014. 649 p.
3. V. Konda, J. Tsitsiklis // *Actor-critic algorithms*. *Advances in neural information processing systems*. 12 1999. 1008–1014.
4. D. Silver, G. Lever, N. Heess, T. Degris, D. Wierstra, M. Riedmiller // *Deterministic policy gradient algorithms*. *International conference on machine learning*. 2014. 387–395.
5. J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal, A. Radford, O. Klimov // *Proximal policy optimization algorithms*. arXiv preprint arXiv:1707.06347. 2017 Jul 20.
6. M. Shirobokov, S. Trofimov, M. Ovchinnikov // *Survey of machine learning techniques in spacecraft control design*. *Acta Astronautica*. 186 2021. 87–97.
7. M. Tipaldi, R. Iervolino, P. R. Massenio // *Reinforcement learning in spacecraft control applications: Advances, prospects, and challenges*. *Annual Reviews in Control*. 2022. 1–23.
8. B. Gaudet, R. Linares, R. Furfaro // *Adaptive guidance and integrated navigation with reinforcement meta-learning*. *Acta Astronautica*. 169 2020. 180–190.
9. B. Gaudet, R. Linares, R. Furfaro // *Deep reinforcement learning for six degree-of-freedom planetary landing*. *Advances in Space Research*. 65:7 2020. 1723–1741.
10. B. Gaudet, R. Furfaro // *Integrated Guidance and Control for Lunar Landing using a Stabilized Seeker*. *AIAA SCITECH 2022 Forum*. 2022. 1838 p.

11. A. Scorsoglio, A. D'Ambrosio, L. Ghilardi, B. Gaudet, F. Curti, R. Furfaro // Image-based deep reinforcement meta-learning for autonomous lunar landing. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 59:1 2022. 153–165.
12. S. G. Turyshv, M. Shao, V. T. Toth, L. D. Friedman, L. Alkalai, D. Mawet, J. Shen, M. R. Swain, H. Zhou, H. Helvajian, T. Heinsheimer, S. Janson, Z. Leszczynski, J. McVey, D. Garber, A. Davoyan, S. Redfield, J. R. Males // Direct Multipixel Imaging and Spectroscopy of an Exoplanet with a Solar Gravity Lens Mission. The Final Report, A NASA Innovative Advanced Concepts (NIAC) Phase II, (2020), arXiv:2002.11871.

ОРБИТАЛЬНАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ КАК МЕТОД СЛЕЖЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ КА В ОКОЛОЛУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Шпекин М.И., Фазлетдинова. Р.Ю.

Казанский федеральный университет
michaels1@yandex.ru

Аннотация. Опыт авторской обработки снимков показал, что высоты КК над сферой стандартного радиуса удалось определить с погрешностями на уровне плюс-минус $40 \div 70$ метров. В докладе представлены графики движения КК над кратером полученные по эфемеридным расчетам НАСА, а также графики построенные авторами по своим собственным измерениям. В докладе предпринята попытка проанализировать фактическое движение КК над кратером на предмет наличия отклонений в движении от невозмущенной траектории. .

Введение

Надежная координатная привязка космического аппарата (КА) в окололунном пространстве играет важную роль в решении многих задач связанных с Луной. Самые распространенные из них включают координатную привязку одиночных снимков, привязку стереопар и стереомоделей, координатную привязку 3D-моделей, цифровых моделей, фотограмметрических сетей [1, 2, 6], посадочных площадок и другие задачи [5]. Особая роль отводится координатной привязке, когда планируется мягкая посадка автоматической станции, или еще более сложный вариант, когда предполагается посадка модуля с экипажем на борту.

Основной текст

Координатная привязка на окололунной орбите имеет свои особенности, в отличие от привязки КА на околоземной орбите. Важным отличием окололунной орбиты является ее удаленность от Земли. Расстояние почти в 400 тысяч км заметно ограничивает точность координатной привязки КА методом доплеровского слежения с Земли. Кроме того, будучи на окололунной орбите, КА примерно половину времени находится над обратной стороной Луны, когда нет прямой видимости с Земли. В такой ситуации слежение за спутником с Земли становится невозможным, а его селеноцентрические координаты определяются на основе прогноза движения. Тогда как для решения целого ряда задач орбитальной фотограмметрии требуются не теоретические, а фактические положения КА.

Измерения фотоснимков проводились на экране монитора в графической программе IrfanView с последующим переводом измеренных координат в систему координат снимка [7]. Координаты опорных кратеров в системе снимка, а также селеноцентрические координаты этих кратеров, полученные по вышеназванным картам [3, 4], служили в качестве исходных данных для решения обратной фотограмметрической засечки по всем измеренным снимкам.

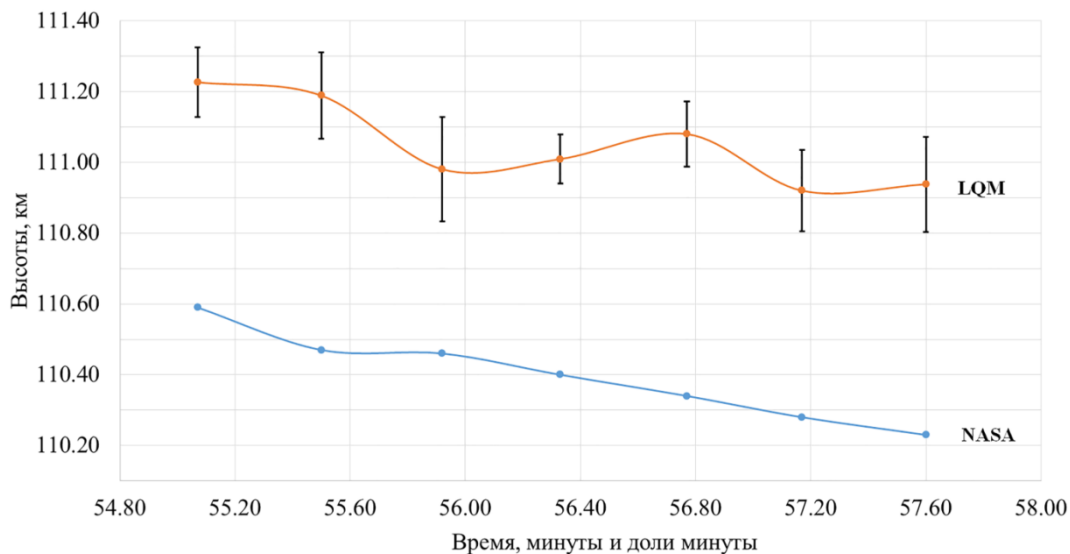


Рис. 1. Движение КК «Аполлон-17» над кратером Циолковский 16 декабря 1972 года на 74 витке орбиты. Верхний график содержит высоты КК в моменты получения снимков, найденные авторами из привязки к опорным кратерам карты LQM. Нижний график включает высоты КК «Аполлон-17» рассчитанные в НАСА и опубликованные на сайте университета Аризоны [8].

В результате такого решения были найдены элементы внешнего ориентирования снимков вместе с их средними квадратическими погрешностями.

Выводы и результаты

Опыт авторской обработки снимков показал, что высоты КК над сферой стандартного радиуса удалось определить с погрешностями на уровне плюс-минус $40 \div 70$ метров. В докладе представлены графики движения КК над кратером полученные по эфемеридным расчетам НАСА, а также графики построенные авторами по своим собственным измерениям.

В докладе предпринята попытка проанализировать фактическое движение КК над кратером на предмет наличия отклонений в движении от невозмущенной траектории

Литература

1. Aleksashin E.P., Timofeev Y.S., Shirenin A.M. Selenocentric coordinate system "Zond-8". Methods for constructing and cataloging the coordinates of reference points // Collection of scientific works of TsNIIGAiK. - M., TsNIIGAiK GUGK USSR, 1989. - 216 p.
2. Ziman Ya.L., Krasikov V.I., Rodionov B.N. Selenocentric coordinate system for the eastern sector of the far side of the Moon // Atlas of the far side of the Moon, Nauka, Moscow, 1975, pp. 52-58.
3. Lunar QuickMap [Электронный ресурс]. - <https://quickmap.lroc.asu.edu/>
4. Applied Coherent Technology Corp. <https://www.actgate.com/>
5. Shpekin M.I. "South Pole — Aitken" basin from first measurements ("Zond-6", 1968) to first landing of the lunar rover ("Chang'e-4", 2019) // INASAN Science Reports. Vol 5(3). M.: Janus-K, 2020, pp. 157-162.
6. – DOI 10.26087/INASAN.2020.5.3.014. – EDN YKYGQZ.
7. Shpekin M.I. Relief of the marginal zone of the Moon in the area of the Orientale Mare // Deposited in VINITI Moscow Russia 18.05.83, № 2652-83, 51p.
8. Pashukov E.A. Measuring properties of orbital images of the Moon. Graduate work, Institute of Physics of Kazan Federal University, 2010, 49 p.
9. Apollo Image Archive <https://apollo.sese.asu.edu/> (вход 27 июля 2023).

ИССЛЕДОВАНИЕ СИЛОВЫХ СХЕМ КУБ-БАЛЛОНА ДЛЯ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НАНОСПУТНИКА

Щеглов Г.А., Мордовский А.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва
shcheglov_ga@bmnstu.ru

Аннотация. Рассмотрена актуальная задача выбора силовой схемы куб-баллона – баллона высокого давления кубической формы, обеспечивающей наилучшее сочетание массы конструкции и располагаемого запаса характеристической скорости двигательной установки на холодном газе для наноспутника форм-фактора CubeSat. В сравнении с оптимальным по массе шар-баллоном рассмотрены пять вариантов силовых схем куб-баллона. Показана возможность увеличения запаса характеристической скорости двигательной установки на 30 ... 40% при увеличении массы конструкции баллона в 1,7 ... 4,8 раза. Установлено, что наилучшее сочетание массы и запаса характеристической скорости дает полисферическая силовая схема.

Введение

Развитие сверхмалых космических аппаратов, относящихся к классу наноспутников (имеющих массу от 1 до 10 кг), в настоящее время проходит те же этапы, которые ранее проходили искусственные спутники более тяжелых классов: от аппаратов, не имеющих средств управления движением центра масс, переходят к маневрирующим аппаратам. В настоящее время разработка двигательных установок для наноспутников является актуальной задачей, прежде всего для широко распространенного формата CubeSat [1, 2]. Одной из наиболее рациональных с технико-экономической точки зрения для аппаратов такого класса является двигательная установка на холодном газе [3]. Однако при компоновке подобной двигательной установки в форм-факторе CubeSat возникает проблема эффективного использования объема, возникающая вследствие того, что оптимальная форма баллона высокого давления – сфера занимает только половину предоставленного кубического объема юнита с размером стороны 0,1 м. Увеличить объем рабочего тела можно путем перехода к баллону кубической формы – т.н. куб-баллону, однако это ведет к росту массы конструкции баллона и возникает комплексная задача выбора проектных параметров данного элемента конструкции.

Целью работы является синтез рациональной силовой схемы куб-баллона, обеспечивающей наилучшее сочетание массы конструкции и располагаемого запаса характеристической скорости двигательной установки. Для достижения указанной цели в работе рассмотрены различные варианты силовых схем и применены алгоритмы топологической оптимизации.

Варианты силовой схемы куб-баллона

В качестве конструктивно-силовых схем куб-баллона предложены следующие варианты (рис. 1): комплекс из четырех цилиндров со сферическими днищами (рис. 1а); комплекс из 14 одинаковых сфер, расположенных по схеме гранецентрической кубической упаковки (рис. 1б); тонкостенный куб, подкрепленный ребрами, расположение и параметры которых обеспечивают наименьшую массу конструкции (рис. 1в); куб, схема подкрепления которого рассчитана методом топологической оптимизации в программном пакете Altair OptiStruct (рис. 1г); оригинальная полисферическая конструкция, в которой заполнение объема куба производится набором сферических оболочек разного радиуса (рис. 1д). Все рассмотренные варианты баллонов могут быть получены с использованием аддитивных технологий, например методом селективного лазерного спекания. В докладе представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния куб-баллонов и обсуждаются достоинства и недостатки рассмотренных силовых схем.

Примеры результатов расчетов приведены в таблице 1 для наноспутника CubeSat 3U, имеющего массу бортового оборудования 3.8 кг и двигательную установку с удельным импульсом 760 м/с. Рассматривались варианты баллонов, выполненных из алюминиевого сплава (плотность 2700 кг/м³, допускаемое напряжение по Мизесу 150 МПа), содержащих азот под давлением 10 МПа при температуре 300 К. Максимальные габариты баллона были ограничены кубом со стороной 0.097 м. Для каждого варианта получены внутренний объем V и масса баллонов M , а также полученный с учетом массы баллона и массы запасенного газа запас характеристической скорости для заданного прототипа космического аппарата Δv . В таблице 1 дополнительно указаны удельные характеристики: отношение массы бака к его внутреннему объему Q и отношение δ запаса характеристической скорости для данного варианта к запасу характеристической скорости для сферического баллона.

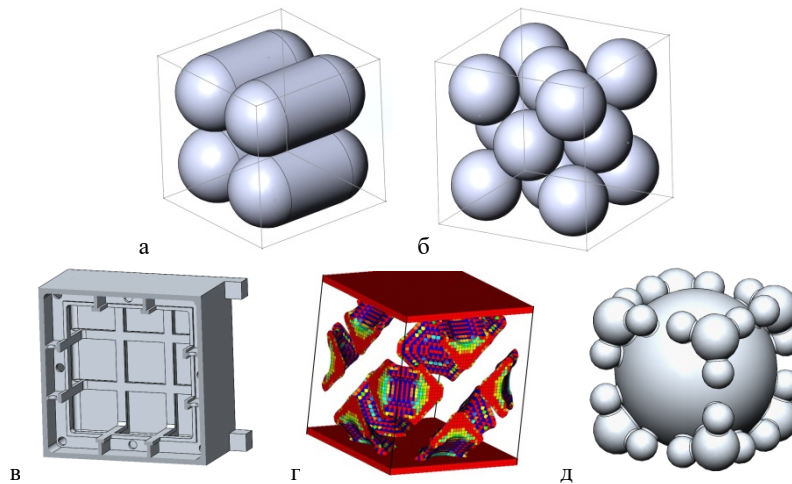


Рис. 1. Варианты силовых схем куб-баллона.

Таблица 1. Сравнение вариантов силовых схем куб-баллона.

Наименование варианта	M , г	V , л	Δv , м/с	Q , г/л	δ
Сфера (эталонный вариант)	126	0,445	9,62	285,4	1
Четыре цилиндра	245	0,525	11	466,7	1,14
Гранецентрическая кубическая упаковка 14 сфер	120	0,424	9,17	285,4	0,95
Тонкостенный, подкрепленный ребрами, куб	612	0,716	13,65	854,7	1,42
Топологическая оптимизация	614	0,685	13,12	896,4	1,36
Полисферическая конструкция	211	0,601	12,67	351	1,32

Анализ полученных результатов показывает, что имеются два наиболее рациональных варианта. Подкрепленный ребрами куб обеспечивает наибольший запас характеристической скорости, но обладает наибольшей массой. Полисферическая конструкция обеспечивает почти на 1 м/с меньший запас характеристической скорости, но имеет на 0,4 кг меньшую массу. Следует отметить, что разница в массе баллонов не является критической величиной для спутников форм-фактора CubeSat. Большой запас характеристической скорости может оказаться более важным фактором при выборе рациональной конструкции.

Выводы

Расчеты показали возможность увеличения запаса характеристической скорости двигательной установки наноспутника на холодном газе на 30 ... 40% за счет перехода от шар-баллона к куб-баллону. При этом масса конструкции баллона увеличивается от в 1,7 ... 4,8 раза, что можно считать приемлемой ценой за повышение эффективности двигательной установки. Наилучшее сочетание массы и запаса характеристической скорости дает полисферическая силовая схема. Для силовой схемы с подкрепленной оболочкой, дающей наибольший запас характеристической скорости следует продолжить поиск резервов снижения массы.

Литература

1. Y. Zheng Space microsystems and micro/nano satellites. Butterworth-Heinemann. 2017. 440 p.
2. Z. S. Zhumaev, G. A. Shcheglov Operations dynamics analysis of solar thermal propulsion for CubeSats // Advances in Space Research, 64:4. 2019. 815–8233.
3. И.С. Прохоренко, А. В. Каташов, М. И. Каташова Газовая двигательная установка коррекции для наноспутников // Вестник МАИ, 28:2 2021. 152–165.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА ВБЛИЗИ ТОЧКИ L2 В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ-ЛУНА

Юй В., Старинова О.Л.

Самарский Национальный Исследовательский Университет, Самара
yussau@foxmail.com

Аннотация. В данной работе исследовали характеристики периодических орбит космических аппарат (КА) с солнечным парусом вблизи точки L2 в системе Земля-Луна. Период этих орбит составляет 1/2 синодического периода Луны ($T_M = 6.794$). Направление нормали солнечного паруса относительно направления солнечного света остаётся неизменённым в полёте КА. Метод многократной стрельбы используется для получения периодических орбит КА с солнечным парусом: принимая естественные орбиты Гало и Ляпунова в качестве первоначальной догадки, скорректировать начальные параметры движения КА, чтобы параметры движения после одного цикла полёта совпадают с начальными. Метод продолжения используется для получения орбит КА с большим ускорением солнечного давления: принимая предыдущую орбиту в качестве первоначальной догадки, постепенно увеличивать ускорение солнечного давления на КА до целевого ускорения. В работе рассмотрели влияние различных начальных фаз положения Солнца, различных ускорения солнечного давления, и различных углов наклона солнечного паруса на орбиты КА. Результаты могут быть использованы для установления орбиты КА с солнечным парусом для задачи исследования Луны.

Гало-конформные орбиты

Гало-конформные орбиты получены с методом продолжением и с использованием орбит Гало (период орбиты равен $T_M/2$) в качестве начального предположения.

Во-первых, рассмотрим влияние начальной фазы положения Солнца на орбиты солнечного паруса. Пусть $a_{max} = 0,02$, $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$, где a_{max} – характеристическое ускорение солнечного паруса, α и γ – угол поворота и угол наклона поверхности солнечного паруса относительно солнечного света соответственно. С помощью метода многократного стрельбы обнаружено, что периодические орбиты могут быть получены только для случаев, когда начальные фазы положения Солнца φ_0 равны $0, \pi/2, \pi$ или $3\pi/2$. После сравнении доказали, что орбиты, соответствующие $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$ полностью совпадают. Как и $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = 3\pi/2$.

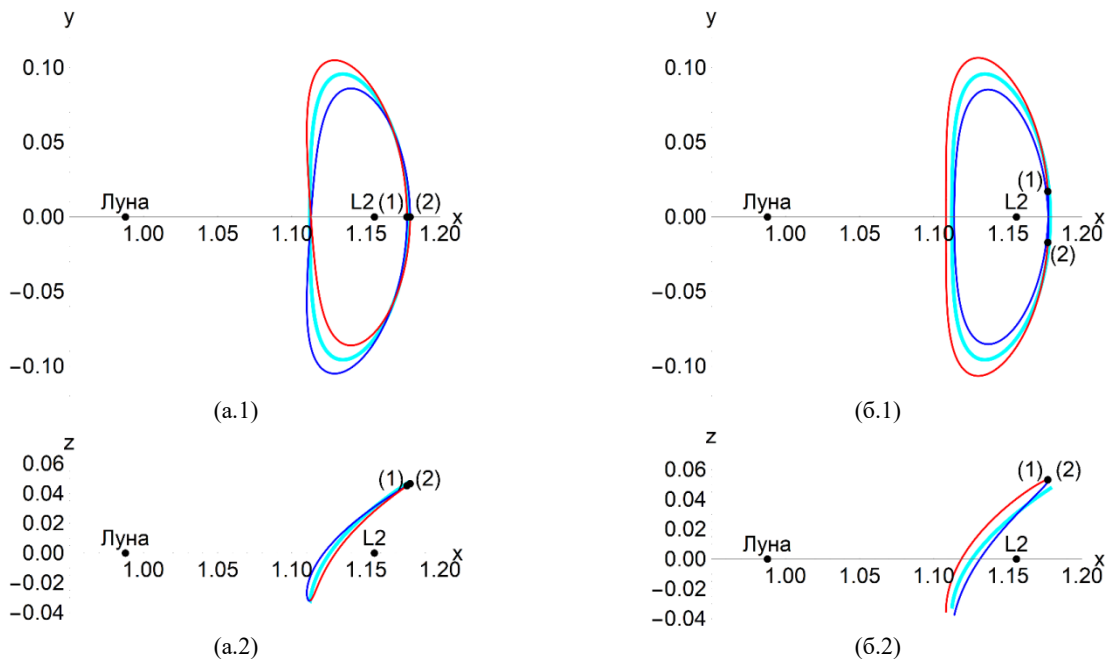


Рис. 1 Два типа Гало-конформных орбит солнечного паруса ($a_m = 0.02, \gamma = 0, \alpha = 0$). Сине-зелёная линия – Гало-орбита с периодом $T_M/2$. Синяя и красная линии – две ветви траектории орбиты с временем полёта $T_M/2$. Точки (1) и (2) – точки разделения синей линии траектории и красной линии траектории. (а) – орбита для случая начальная фаза солнечного света $\varphi_0 = 0$ и π . (б) – орбита, для случая $\varphi_0 = \pi/2$ и $3\pi/2$.

Во-вторых, рассмотрим влияние величины давления на орбиты солнечного паруса. Пусть $a_{max} = 0,002 \sim 0,02$, $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$. С такими же методами получили конфигурации орбит при разных a_m и зависимости координатных границ орбит от a_m .

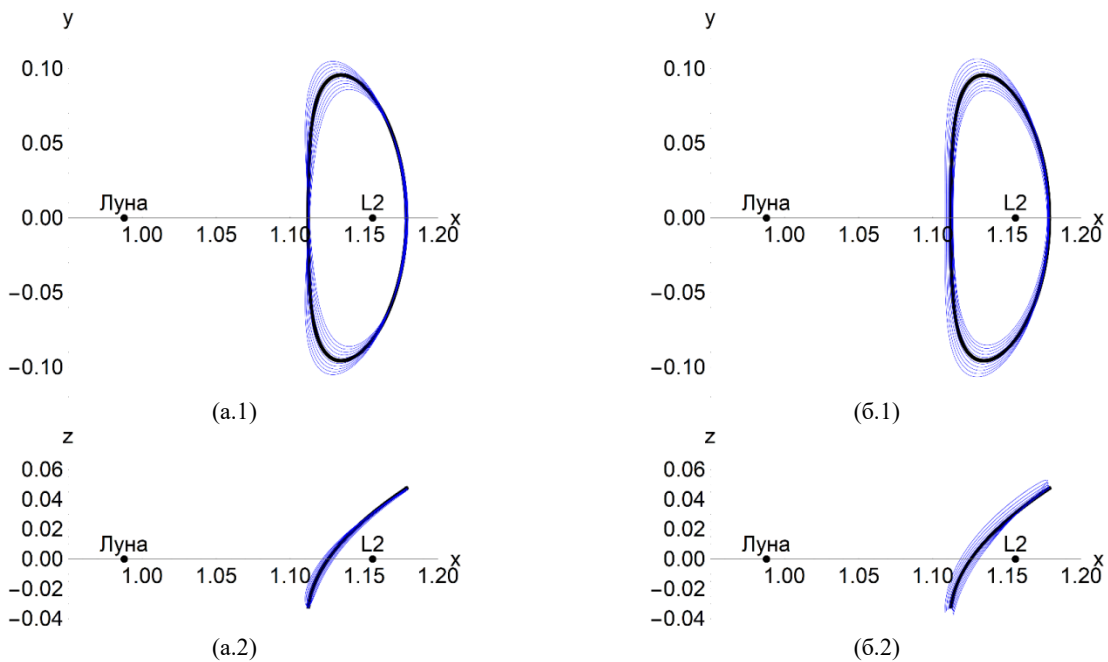


Рис. 2 Орбиты солнечного паруса при разных a_m (с постоянным шагом 0,002). Среди них черная линия – Гало-орбита с периодом $T_M/2$. Синяя линия – орбиты КА с солнечным парусом.

В-третьих, рассмотрим влияние угла наклона γ на орбиты солнечного паруса. Пусть $a_{max} = 0,008$, $\gamma = -60^\circ \sim 60^\circ$ и $\alpha = 0$.

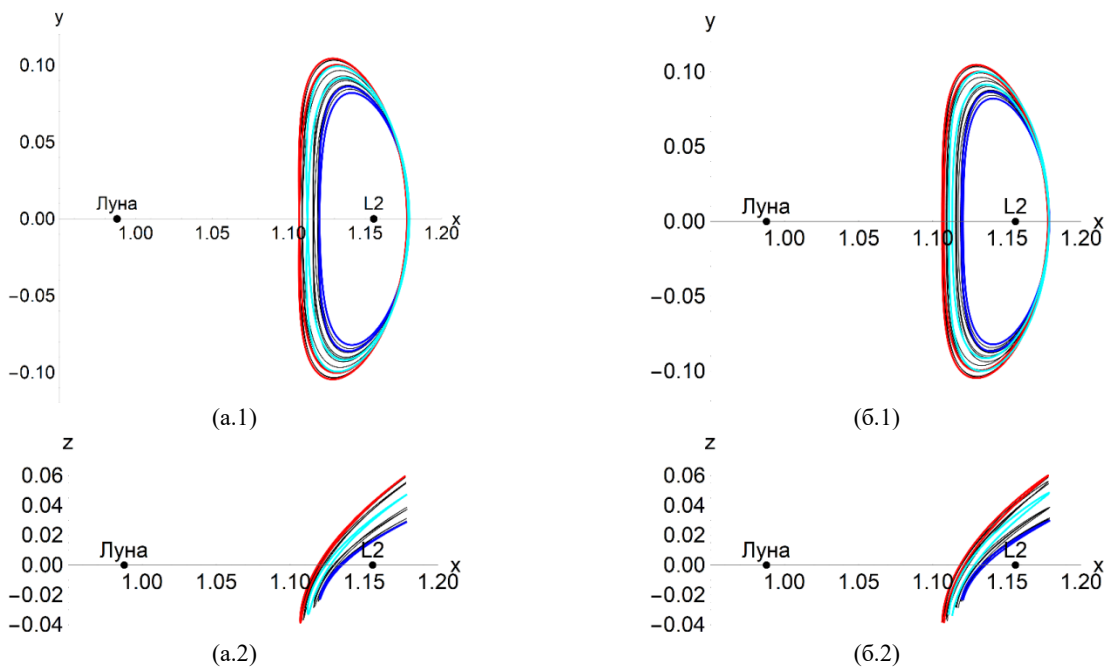


Рис. 3 Орбиты солнечного паруса при разных γ . Синие и красные линии представляют собой граничные орбиты для всех значений γ , и соответствующие значения $\gamma = 35.26^\circ$ и -35.26° . Сине-зелёная линия представляет орбиты с $\gamma = 0^\circ$. Черные линии – орбита с другими значениями γ .

Ляпунов-конформные орбиты

Ляпунов-конформные орбиты получены с методом продолжением и с использованием орбит Ляпунова (период орбиты равен $T_M/2$) в качестве начального предположения.

Во-первых, рассмотрим влияние начальной фазы положения Солнца на орбиты солнечного паруса. Пусть $a_{max} = 0,02$, $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$. Как и Гало-конформные орбиты, Ляпунов-конформные орбиты тоже делятся на 2 типа: типа III соответствует $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$, и типа IV соответствует $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = 3\pi/2$. Они обладают теми же свойствами, что и Гало-конформные орбиты типа I и типа II.

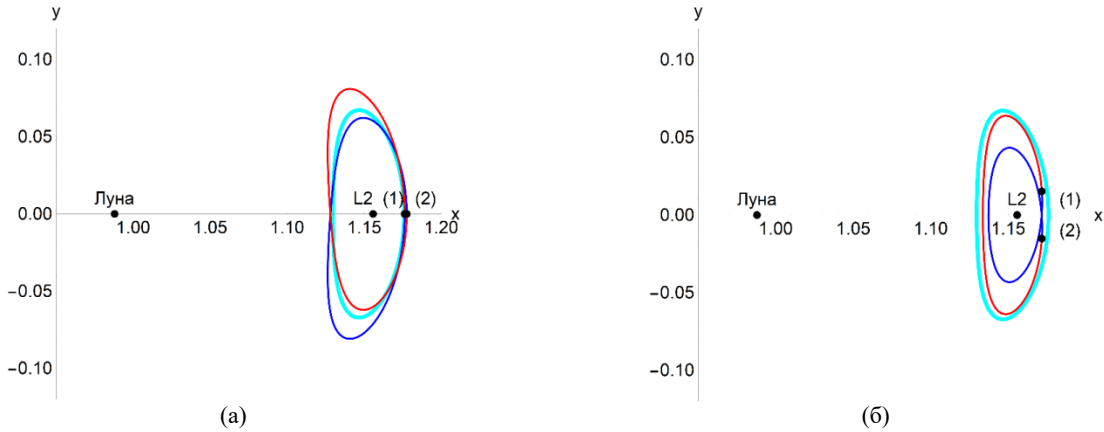


Рис. 4 Два типа Ляпунов-конформных орбит солнечного паруса ($a_m = 0.02$, $\gamma = 0$, $\alpha = 0$). Сине-зелёная линия – Гало-орбита с периодом $T_M/2$. Синяя и красная линии – две ветви траектории орбиты с временем полёта $T_M/2$. Точки (1) и (2) – точки разделения синей линии траектории и красной линии траектории. (а) – орбита для случая начальная фаза солнечного света $\varphi_0 = 0$ и π . (б) – орбита, для случая $\varphi_0 = \pi/2$ и $3\pi/2$.

Во-вторых, рассмотрим влияние угла наклона γ на орбиты солнечного паруса. Пусть $a_{max} = 0,008$, $\gamma = -60^\circ \sim 60^\circ$ и $\alpha = 0$.

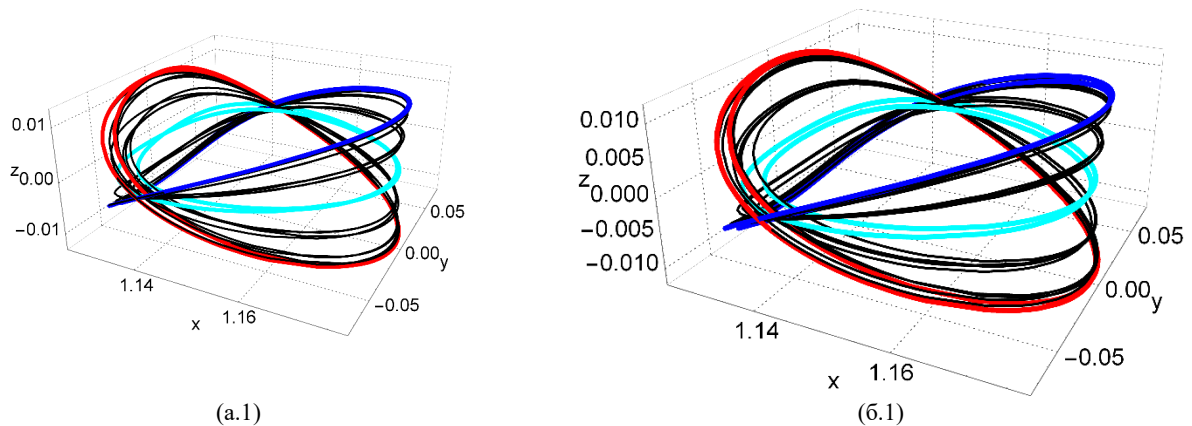


Рис. 5 Орбиты солнечного паруса при разных γ . Синие и красные линии представляют собой граничные орбиты для всех значений γ , и соответствующие значения $\gamma = 35.26^\circ$ и -35.26° . Сине-зелёная линия представляет орбиты с $\gamma = 0^\circ$. Черные линии – орбита с другими значениями γ .

Заключение

В работе рассматриваются Гало-конформные и Ляпунов-конформные орбиты солнечного паруса вблизи точки L2 в система Земля-Луна. Получены 2 типа орбит для каждого конформных орбит и анализировали закон изменения параметров орбит от ускорения солнечного давления и угла наклона солнечного паруса. Эти орбиты увеличивают количество естественных периодических орбит и могут служить опорными орбитами для КА с солнечным парусом в миссиях вокруг Луны.

Литература

1. Sohn R. L. Attitude Stabilization by Means of Solar Radiation Pressure. ARS Journal. 1959. № 29. С. 371–373.
2. Gong, S., Li J., Zhu K. Dynamical analysis of a spinning solar sail // Advances in space research. 2011. № 48(11). С. 1797-1809.
3. Gong S., Li J., Simo J. Orbital motions of a solar sail around the 1 2 earth–moon libration point // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2014. № 37(4). С. 1349-1356.
4. Heiligers J., Hiddink S., Noomen R., McInnes C.R. Solar sail Lyapunov and Halo orbits in the Earth–Moon three-body problem // Acta Astronautica. 2015. № 116. С. 25-35.
5. Gómez G., Masdemont J. J., Mondelo J. M. Libration point orbits: a survey from the dynamical point of view // Libration point orbits and applications. 2003. С. 311-372.
6. Howell K. C. Families of orbits in the vicinity of the collinear libration points // Journal of the astronautical sciences. 2001.
7. Richardson D. L. A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points // Celestial Mechanics. 1980. № 22(3). С. 231-236.

ТЕЛО С ПЕРЕМЕННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ - НОВЫЙ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ

Яковлев А.Б., Колесников Е.К.

Санкт-Петербургский государственный университет
a.b.yakovlev@spbu.ru

Аннотация. Находящиеся в космической плазме объекты приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы и степени освещенности Солнцем и, следовательно, от положения и ориентации тела в процессе движения. Интерес к изучению движения заряженных тел первоначально был связан с рассмотрением концепции новых двигательных систем, а затем также с исследованием особенностей движения в околоземном космическом пространстве микрочастиц техногенного происхождения, влияния моментов электродинамических сил на ориентацию космических аппаратов и движения полых баллонов, входящих, например, в состав тросовой системы. В статье дан обзор результатов численных и аналитических исследований авторов, посвященных динамике в космической плазме тел с переменным электрическим зарядом.

Введение

Развитие космических исследований поставило вопрос о движении тел в плазменном окружении. Известно, что находящиеся в космической плазме объекты приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы и степени освещенности Солнцем и, следовательно, от положения и ориентации тела в процессе движения. Впервые задача о движении тела с переменным электрическим зарядом была поставлена в работе О.И. Нестеренко [1] в связи с рассмотрением концепции новых двигательных систем.

В последние годы возникло новое экологическое приложение этой проблемы, связанное с изучением особенностей движения в околоземном космическом пространстве (ОКП) микрочастиц (МЧ) техногенного происхождения, которые в большом количестве выбрасываются в ОКП при работе твердотопливных ракетных двигателей (библиографию по этому вопросу можно посмотреть в статье Е. К. Колесникова и С. В. Чернова [2]). Аналогичная задача возникает в связи с изучением механизмов формирования пылевых колец в окрестности других небесных тел, обладающих сильными магнитными полями (Юпитер, Сатурн и др.). Наконец, задача динамики в космической плазме микрочастиц с переменным зарядом возникает в связи с исследованием проблемы электростатического переноса пылевых частиц у поверхности безатмосферных небесных тел. Подробный список работ по этой проблеме можно посмотреть, например, в [3, 4].

Формулировка задачи

Все выше изложенное позволило нам в [5] утверждать о появлении нового объекта динамического исследования – тела постоянной массы и переменного электрического заряда.

Вследствие большого числа физических факторов, которые в общем случае могут оказывать влияние на динамику заряженных тел в ОКП, основным методом теоретического исследования особенностей орбитального движения указанных тел в окрестности Земли является рассмотренный, например, в [2] метод численного моделирования, основанный на совместном численном решении уравнений движения в ОКП и уравнения зарядки в плазменной среде околоземного пространства. Тем не менее, физические оценки и результаты численных экспериментов показывают, что в определенных практически интересных случаях число факторов влияющих на орбитальную динамику существенно уменьшается, что упрощает постановку задачи баллистики в ОКП и делает возможным использование для определения особенностей орбитального движения вблизи Земли соответствующих аналитических методов.

В общем случае описание эволюции такого тела дается системой из нечетного числа дифференциальных уравнений 1 порядка: шести уравнений движения и уравнения зарядки.

Качественный анализ подобной системы очень сложен и поэтому имеет смысл рассмотреть случаи когда система уравнений упрощается и могут быть использованы известные методы анализа движения механических систем.

Основные направления исследования

В рамках упомянутого выше численного подхода построена модель взаимодействия микрочастицы с окружающей средой и разработан комплекс компьютерных программ, позволяющих определять ее долговременную эволюцию в околоземном космическом пространстве. С использованием указанного комплекса программ проведены численные эксперименты с целью определения условий длительного орбитального существования техногенных частиц, инжектируемых в ОКП на разных круговых и эллиптических орбитах.

Для частиц с низким выходом фотоэмиссии возможны ситуации когда ее электрический заряд с высокой степенью точности можно считать квазиравновесным, то есть зависящим только от положения частицы на траектории. В этом случае нами в [5] были предложены следующие подходы.

- 1) Записать функцию Гамильтона и применить аппарат анализа гамильтоновых систем.
- 2) Обобщить на случай переменного заряда теорию дрейфового движения заряженных частиц.

Вблизи поверхности облучаемых Солнцем безатмосферных небесных тел возникает тонкий фотоэлектронный слой, толщина которого много меньше размеров тела. Для исследования движения мельчайших частиц грунта таких тел в фотоэлектронном слое также возможно применение как численных, так и аналитических методов. Например, в [6] показано, что в зависимости от размеров пылинок могут существовать принципиально различные режимы их движения.

В последнее время активизировался интерес к задачам управления и защиты КА с помощью наведенного на поверхности КА электрического заряда. В частности, это связано с использованием так называемых привязных систем. Можно выделить два основных направления указанных исследований: 1) влияние электродинамических сил, понимаемых как возмущение, на значения основных элементов орбиты спутника; 2) влияние моментов электродинамических сил на ориентацию КА и возможность управления ориентацией изменением электрического заряда на его поверхности (развернутый список работ по этой проблеме можно посмотреть, например, в [7]).

Литература

1. О.Н. Нестеренко // Движение электрически заряженного спутника в магнитном поле Земли под действием силы Лоренца, *Космические исследования*, 7:3 1969. 359 - 367.
2. Е.К. Колесников, С.В. Чернов // Исследование условий длительного орбитального существования субмикронных частиц в околоземном космическом пространстве, *Сильно неравновесные процессы в механике неоднородных сред: Межвуз. сб. Серия Физическая механика*, 9 2018. 49-69.
3. Яковлев, А.Б. // Анализ последних российских публикаций по проблеме левитации микрочастиц лунного реголита, *Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития. Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции (Красноярск, 11 ноября 2016 г.)*, 2016. 16-24.
4. S. I. Popel, L. M. Zelenyi, B. Atamaniuk // Dusty Plasma in the Region of the Lunar Terminator, *Plasma Physics Reports*, 42:5 2016. 543–548.
5. Е.К. Колесников, А.Б. Яковлев // Основные подходы к исследованию динамики тел с переменным электрическим зарядом в космической плазме, *Модели неоднородных сред: Межвуз. сб. Серия Физическая механика*, 8 2004. 120-126.
6. E. K. Kolesnikov, A. B. Yakovlev // Vertical dynamics and horizontal transfer of submicron-sized lunar-regolith microparticles levitating in the electrostatic field of the near-surface photoelectron layer, *Planet. Space Sci.*, 51 2003. 879–885.
7. A.Yu. Aleksandrov, K.A. Antipov, A.V. Platonov, A.A. Tikhonov // Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame, *Nonlinear Dynamics*, 82 2015. 1493-1505. doi:1007/s11071-015-2256-1.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО СОЗДАНИЮ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

Колесников В.И., Колесников И.В., Больших Е.П.

*Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС), Ростов-на-Дону
kvi@rgups.ru*

Аннотация. Рассмотрены вопросы перспективного развития транспортной системы высокоскоростного железнодорожного сообщения в России на основе вакуумного магнито-левитационного транспорта. Озвучены основные проблемы и подходы по их решению.

Исследование выполнено в рамках гранта Российского научного фонда (проект № 21-79-30007) в Ростовском государственном университете путей сообщения.

Введение

Создание высокоскоростных транспортных систем в России определит не только рост экономики государства, регионов, но и свяжет между собой города, сократив время в пути грузов и пассажиров и тем самым усилит экономическую связь. Углубление экономической связи между регионами устраним демографическую диспропорцию внутри России и приведет к росту численности населения. Если проводить анализ перспектив эксплуатации существующего транспорта, то следует отметить, что по скорости подошли к пределу: автомобильный транспорт не более 200 км/ч – по обеспечению безопасности, авиация – не более 1000 км/ч, поезда до 500 км/ч – по энергоэффективности в связи с возрастанием сопротивления движению при скорости свыше 400 км/ч. Вместе с тем на сегодня в развитии мировой авиации можно определить три направления – создание электросамолетов, сверхзвуковых и гибрида самолета и вертолета с использованием композитных материалов, авионики и эффективных компонентов топлива.

Основная часть

Среди Российской авиационной техники можно выделить МС-21, а вертолетов К-62 и МИ-38 с подъемом на высоту более 8000 м.

Сегодня перед Россией стоит грандиозная задача – за короткий срок преодолеть техническую отсталость и обеспечить экономический рост.

Для решения этих задач очевидно, что инновационное развитие транспортной системы должно базироваться на высокоскоростном железнодорожном сообщении. Речь идет о строительстве сети высокоскоростных магистралей, способствующих развитию экономики, координации железнодорожного, авиационного, автомобильного, морского и речного транспорта в единую транспортную систему и тем самым обеспечить высокую интеграцию регионов и вовлечение их в хозяйственную деятельность с переработкой природных богатств Арктики, Сибири и Дальнего Востока, что способствует решению демографических проблем. Связанность страны является важным критерием устойчивости и единства России, устраним неравномерное заселение Европейской части и богатой ресурсами Сибири. Строительство промышленных кластеров вдоль транспортной магистрали потребует обустройства быта переселенцев, что будет означать появление новых городов – начнется демографическое контраступление. Этому будет способствовать привлечение квалифицированных специалистов, обеспечив их комфортными условиями жизни – создание качественного и доступного медицинского обслуживания, а также образовательных услуг – развитие университетских, инновационных центров, возможность трудоустройства.

В рамках строительства высокоскоростной железнодорожной транспортной (ВСЖТ) сети необходимо модернизировать железнодорожную инфраструктуру ТРАССИБа и БАМа. В первую очередь здесь необходимо обратить особое внимание на конструктивные особенности верхнего строения пути и физико-механические свойства земляного полотна. Конструкция земляного полотна на участках, где реализуется высокоскоростное движение должна быть спроектирована с учетом инженерно-геологических изысканий, которые могут выявить слабые основания. Такие подходы могут быть реализованы и на основании математического моделирования сложных технических динамических систем, содержащих сосредоточенные и непрерывно распределенные параметры, что представляет и научный интерес с точки зрения использования в геологии, сейсморазведке, строительстве, проектировании железнодорожных и автомагистралей. В связи с этим возникает необходимость изучения новых математических моделей динамических процессов, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих воздействие генератора колебаний на гетерогенные слоистые основания. Так, в работе [1] было показано, что наличие обводненного слоя в слоистой среде, моделирующей земляное полотно значительно увеличивает динамичность среды, особенно при низких частотах. В работе [2] рассмотрено динамическое поведение верхнего строения пути с учетом свойств основания – жесткости на деформации растяжения (сжатия) и сдвига основания.

Перспективные инновационные транспортные проекты должны проявляться в создании новых видов энергии, новых конструкционных, фрикционных и антифрикционных материалов, а также исключения

взаимодействия «колесо–рельс» и «подвижной состав–воздух». Сегодня это – тенденция в развитии вакуумного магнито-левитационного транспорта (ВМЛТ) со скоростями выше 1000 км/ч с построением архитектуры взаимодействия ВМЛТ с традиционными транспортными системами [3, 4]. Учитывая, что речь идет о транспорте будущего, необходимо особое внимание к безопасности и надежности эксплуатации ВМЛТ и не в последнюю очередь к работоспособности узлов трения, эксплуатируемых в вакууме. При трении в вакууме рабочая поверхность трибосистем очищается от окисных пленок, которые образуются на воздухе и возникает контакт ювенильных поверхностей, что приводит к схватыванию. В результате, удаление с поверхности металла адсорбированной и окисной пленки при работе трибосистемы в вакууме нарушает режим работы узла трения и процесс трения переходит к задиру. Решение этой проблемы состоит в установлении механизма формирования пленок переноса в процессе трения «металл–полимер» и разработки технологии модифицирования полимеров наполнителями и нанодобавками в них [5, 6]. Для исследований нами были подготовлены образцы из полимерного материала – Фенилона С-2 с добавками: шпинели ($\text{FeAl}_2\text{O}_4 + \text{MnAl}_2\text{O}_4$), волокнами арамида-Т и фторполимера 4МБ. Трибологические испытания на машине трения ИИ-5018 показали, что максимальной износостойкостью и минимальным коэффициентом трения обладают образцы со следующей рецептурой: фенилон С-2 + фторопласт – 4МБ (8%) + арамид-Т (4%) + шпинель (3%). Для подтверждения того, что высокие трибологические характеристики обеспечиваются за счет образования пленок переноса между трущимися поверхностями, была проведена оценка их качественного и количественного состава на ИК-Фурье-спектрометре Series Nicolet 380 и рентгеновской фотоэлектронной и оже-электронной спектроскопии на приборе SPECS.

Спектроскопические исследования показали, что в начальный период трения на поверхности металлического контртела регистрируются в ИК-спектре полосы фенилона С-О и С=О ($1300\text{-}1750\text{ см}^{-1}$), а через некоторое время в ИК-спектре регистрируются полосы валентной С-Ф ($1150\text{-}1200\text{ см}^{-1}$), относящиеся к фтору. Анализ рентгеноэлектронные спектров и энергии связи перенесенных продуктов износа полимера на металл показывает наличие спектральных линий F1s, характеризующих связь F-Fe с энергией 685эВ и линий C1s – связь С-Ф с энергией 285эВ, а также связь С-С с энергией 288эВ. При добавлении в композит шпинели наблюдаются линии Al2р с энергией связи 74эВ и значительное снижение коэффициента трения. Добавление в композит арамида-Т не меняет спектральную картину и компенсирует низкие механические характеристики фторопласта – 4МБ, придавая композиции высокую прочность и несущую способность.

Заключение

Анализ полученных результатов позволяет утверждать о механизме образования пленок фрикционного переноса: в начальный момент процесса трения продукты износа фенилона С-2 за счет адгезионных сил удерживаются на поверхности металлического образца, а затем из продуктов износа фторопласта формируется второй слой и удерживается на первом слое из фенилона электростатическими силами за счет их разнополярности [5,6].

Разработанные научные практические методы и технологии образования пленок переноса можно рекомендовать в трибосопряжения, работающие в вакуумной среде.

Учитывая, что речь идет о транспорте будущего, необходимо иметь программу о подготовке специалистов по конструированию, изготовлению и обслуживанию вакуумно-левитационных транспортных систем, а также разработать методику мониторинга всех транспортных узлов трения.

Литература

1. Колесников, В. И. Моделирование динамического поведения системы «верхнее строение железнодорожного пути – слоистая грунтовая среда» / В. И. Колесников, Т. В. Суворова. — Москва: ВИНТИ РАН, 2003. — 232 с.
2. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Царев И.С. Эволюция квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2023, № 2 (107), с. 83-97.
3. Лapidус Б.М., Лapidус Л.В. Железнодорожный транспорт: философия будущего. – М. : Прометей, 2015. – 232 с.
4. Вакуумно-левитационные транспортные системы: научная основа, технология и перспективы для железнодорожного транспорта: коллективная монография членов и научных партнеров Объединенного ученого совета ОАО «РЖД» / под ред. Б.М. Лapidуса и С.Б. Нестерова. – М. : ООО «РАС», 2017. – 192 с.
5. Колесников И.В. Системный анализ и синтез процессов, происходящих в металлополимерных узлах трения фрикционного и антифрикционного назначения. – М.: ВИНТИ РАН, 2017, – 384 с.
6. Колесников И.В. Повышение износостойкости металлических и металлополимерных трибосистем путём формирования структуры и свойств их поверхностного слоя / Колесников И.В., Мотренко П.Д., Колесников В.И., Мантуров Д.С. – М.: ВИНТИ РАН, 2021. – 168 с. Ил.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ	6
<i>Алексеев С.В.</i> КЛИМАТ, ОЗООНОВЫЙ СЛОЙ, ЭНЕРГЕТИКА.....	7
<i>Андреев В.Е.</i> ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКТЫ ОАО «РЖД»: ПОДВИЖНОЙ СОСТАВ И ИНФРАСТРУКТУРА.....	9
<i>Боровков А.И.</i> РОЛЬ МЕХАНИКИ И ПЕРЕДОВЫХ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В РАЗВИТИИ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ ОТРАСЛЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ	12
<i>Васильев В.В., Лурье С.А.</i> ПРОБЛЕМА СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ	16
<i>Голубев Ю.Ф.</i> ВКЛАД ШКОЛЫ Д.Е. ОХОЦИМСКОГО В ТЕОРИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДЕФИЦИТОМ УПРАВЛЕНИЯ	18
<i>Козлов В.В.</i> ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ: КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СИНГУЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ.....	23
<i>Сильников М.В.</i> МЕХАНИКА СПЕЦМАТЕРИАЛОВ ПРИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ	24
<i>Хасанов М.М.</i> ЦИФРОВОЙ ИНЖИНИРИНГ И ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ В НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ	25
СЕКЦИЯ I. Общая и прикладная механика	28
<i>Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.</i> МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ	29
<i>Бизяев И.А., Мамаев И.С.</i> НЕЛИНЕЙНОЕ УСКОРЕНИЕ В НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКЕ	32
<i>Болотник Н.Н., Фигурин Т.Ю.</i> ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ ВДОЛЬ ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ В БЕЗРЕВЕРСНОМ РЕЖИМЕ	35
<i>Болотник Н.Н., Дмитриев А.С., Жуков А.А., Чащухин В.Г.</i> ШАГАЮЩИЕ МИКРОРОБОТЫ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНСПЕКЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ.....	39
<i>Валиуллин А.А., Васильченко Л.Б., Данилин А.Н., Денисов Е.А., Онучин Е.С., Фельдштейн В.А.</i> МЕХАНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ. КОНЦЕПЦИИ, ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА	42

<i>Решимин С.А., Бектыбаева М.Т.</i> ЭФФЕКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЕМ ТЯГИ ПРИ СКОРОСТНОМ МАНЁВРЕ В ПЛОСКОСТИ	44
<i>Сидоренко В.В.</i> АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСОВ СРЕДНИХ ДВИЖЕНИЙ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ	48
<i>Стрекалов С.Д.</i> ВОЛНОВАЯ ТЕХНИКА: ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ, СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ	51
<i>Тихонов А.А.</i> ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ИСЗ: НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ	53
<i>Ушаков В.Н., Измestьев И.В., Ухоботов В.И., Ушаков А.В.</i> ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАЯТНИКОМ, НАХОДЯЩИМСЯ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ	56
<i>Челноков Ю.Н.</i> КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ: ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ОРБИТАЛЬНОЕ (ТРАЕКТОРНОЕ) ДВИЖЕНИЕ	59
<i>Яскевич А.В., Леонтьев В.А.</i> УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА КОСМИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ЗВЕНЬЯМИ	62
Подсекция I-1. Аналитическая механика и устойчивость движения	65
<i>Балакина Е.В., Сергиенко И.В., Сарбаев Д.С., Кочетов М.С.</i> УЛУЧШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ ТОРМОЖЕНИЕМ НА ОПОРНЫХ ЭЛАСТИЧНЫХ КОЛЕСАХ НЕОДИНАКОВЫХ СВОБОДНЫХ РАДИУСОВ ПО ОСЯМ	66
<i>Бардин Б.С.</i> МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	69
<i>Беличенко М.В.</i> СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ ВИБРАЦИЙ ТОЧКИ ПОДВЕСА	72
<i>Бондаренко С.О., Юшков М.П.</i> УПРАВЛЕНИЕ УСКОРЕНИЕМ ДЛЯ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛЕЖКИ С ТРОЙНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ	74
<i>Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.</i> О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ	77
<i>Волков Е.В.</i> НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В РЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ	80

<i>Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М.</i> ОСОБЕННОСТИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ ОДНОЙ ТОЧКОЙ НА ШЕРОХОВАТУЮ НАКЛОННУЮ ПЛОСКОСТЬ.....	83
<i>Зубенко В.А., Кугушев Е.И., Шахова Т.В.</i> О ВОЗМОЖНОСТИ ДИССИПАТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	86
<i>Иванов А.П.</i> УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ГИРОСТАТА БЕЗ ДВИГАТЕЛЯ	88
<i>Иванов К.С., Ярославцева Е.К.</i> ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ АКТИВНОЙ СИЛЫ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛОЙ.....	91
<i>Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.</i> О ПОЛОЖЕНИЯХ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ШАРОВОМ ПОДВЕСЕ.....	93
<i>Килин А.А., Пивоварова Е.Н.</i> ДИНАМИКА ОМНИДИСКА С ОДНОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗЬЮ	96
<i>Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.</i> ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЭЛЕКТРОМОТОРОМ.....	99
<i>Косов А.А.</i> ОБ АНАЛОГАХ КЛАССИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ В ДИНАМИКЕ ГИРОСТАТА.....	102
<i>Кошелев А.А., Кугушев Е.И., Шахова Т.В.</i> О ДВИЖЕНИИ ШАРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛОСКОСТЯМИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ	104
<i>Красильников П.С., Доброславский А.В.</i> УСРЕДНЕННАЯ КРУГОВАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ: ВНУТРЕННИЙ ВАРИАНТ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	107
<i>Красинский А.Я.</i> КОМПЛЕКСНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ИЗБЫТОЧНЫХ КООРДИНАТАХ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ СТАБИЛИЗАЦИИ КОНФИГУРАЦИЙ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ.....	110
<i>Логинов М.Ю., Челноков Ю.Н.</i> ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ БИНС	113
<i>Максимов Б.А.</i> АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПРИ УСЛОВИИ ГОРЯЧЕВА-ЧАПЛЫГИНА	115
<i>Моисеев Г.Н., Зобова А.А.</i> ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМ ОМНИ-ЭКИПАЖЕМ	118
<i>Муницына М.А.</i> ДИНАМИКА ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПРИ МАЛОМ ТРЕНИИ.....	120
<i>Ольшанский В.Ю.</i> НОВЫЕ СЛУЧАИ ПРЕЦЕССИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ БЕЗ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ	122

<i>Переляев С.Е.</i> ОТ МАЯТНИКА ФУКО ДО БЕСКАРДАННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАЯТНИКОВОГО ТИПА	125
<i>Пивоварова Е.Н., Килин А.А.</i> КАЧЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ	128
<i>Рябов П.Е., Соколов С.В.</i> ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АТЛАС ДВУХПОЛЕВОГО ОБОБЩЕННОГО ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ	131
<i>Сальникова Т.В., Кугушев Е.И.</i> ФИНАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ (ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ) ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ	133
<i>Сидиков М.Н.</i> СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА С МНОГОПОЛОСТНЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ	135
<i>Тхай В.Н.</i> ГЛОБАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ	138
<i>Холостова О.В.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЯХ КРАТНЫХ РЕЗОНАНСОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА	140
<i>Шамолин М.В.</i> ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ	143
<i>Шкапов П.М., Сулимов В.Д., Сулимов А.В.</i> АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЯКОБИ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ	144
Подсекция I-2. Управление и оптимизация в механических системах	148
<i>Аветисян В.В.</i> УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ	149
<i>Ананьевский И.М.</i> ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ	152
<i>Бригаднов И.А., Лутонин А.С., Богданова К.А.</i> ЛОКАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ПО ОШИБКЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ В УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ СИГНАЛОВ GNSS	155
<i>Бугров Д.И.</i> О ТРАЕКТОРИЯХ НА ГРАНИЦЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА	158
<i>Гарбуз М.А., Досаев М.З.</i> ЗАДАЧА О ПОДСКОКЕ ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА	161
<i>Голубев Ю.Ф., Мелкумова Е.В.</i> ЧЕТЫРЁХЗВЕННЫЙ РОБОТ-ГИМНАСТ НА РУКОХОДЕ	163
<i>Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.</i> ВЫХОД РОБОТА ИЗ АВАРИЙНОЙ СИТУАЦИИ НА СПИНЕ	166

<i>Горбенко И.Д., Шагнцев О.Б.</i> ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ СВЕРЛЕНИЯ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ЗАГОТОВКИ	169
<i>Городецкий А.Е., Тарасова И.Л., Кучмин А.Ю.</i> ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА БЕСПИЛОТНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С УЧЕТОМ ЭМОЦИЙ И ТЕМПЕРАМЕНТА ПАССАЖИРОВ	172
<i>Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А.</i> НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МЭМС-РЕЗОНАТОРА В КОНТУРАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ УСИЛЕНИЯ	174
<i>Ким А.В.</i> СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СГОРАНИЯ ТОПЛИВА В ЖИДКОСТНОМ РАКЕТНОМ ДВИГАТЕЛЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ	177
<i>Князьков Д.Ю., Фигурина Т.Ю.</i> ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ОДИНАКОВЫХ ТЕЛ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ	179
<i>Корнеев В.А., Болотник Н.Н.</i> ПОСТРОЕНИЕ НАИХУДШЕГО ПОСТОЯННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ....	182
<i>Костин Г.В., Гавриков А.А.</i> ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ АКТЮАТОРАМИ	185
<i>Лобачев А.М., Шагнцев О.Б., Гаврилов О.О., Исаев К.О.</i> РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-ЛАБОРАТОРНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА	188
<i>Панкратов И.А., Челноков Ю.Н.</i> ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИКВАТЕРНИОНОВ КЛИФФОРДА, КОНЦЕПЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА	190
<i>Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А.</i> ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ	193
<i>Петров Н.Н., Можегова Е.С.</i> КОНФЛИКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ	197
<i>Рачков А.А.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОСРЕДСТВОМ ОТНОСИТЕЛЬНОГО КРУГОВОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ВНУТРЕННИХ МАСС	201
<i>Сагалаков А.Э., Филатьев А.С.</i> ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С ВОЗДУШНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ НА УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТАХ ПЛАНЕТ С УЧЕТОМ ВЕТРА	204

<i>Серохвостов С.В., Чуркина Т.Е.</i> ПРОВЕРКА НЕОБХОДИМОГО УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕЖИМА ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ СОЛНЕЧНЫМ САМОЛЕТОМ.....	207
<i>Смирнова Н.В., Малых Е.В., Черкасов О.Ю.</i> ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ТЯГИ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА	210
<i>Смирнова Н.В., Черкасов О.Ю.</i> ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ	212
<i>Смирнов А.С., Смольников Б.А.</i> НЕЛИНЕЙНЫЙ АВТОРЕЗОНАНС В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ МНОГОМЕРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	214
<i>Соболев В.А.</i> МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ЭТАЛОННОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ.....	217
<i>Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.</i> О РЕКОНСТРУКЦИИ СКОЛЬЗЯЩИХ УПРАВЛЕНИЙ.....	220
<i>Сутыркина Е.А.</i> СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ	223
<i>Ткачев С.С., Шестопёров А.И.</i> ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ СПУТНИКА С КРУПНОГАБАРИТНЫМИ НЕЖЕСТКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	227
<i>Федотов А.В., Беляев А.К., Полянский В.А.</i> ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ АКТИВНОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ.....	230
<i>Формальский А.М., Климина Л.А.</i> РАСКАЧИВАНИЕ КАЧЕЛЕЙ СТОЯЩИМ НА НИХ ЧЕЛОВЕКОМ.....	233
<i>Цаплин В.А., Пашиковский Д.М., Груздев И.Е., Кондратенко Ф.И., Кузькин В.А.</i> АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАНЕВРОВ РАСХОЖДЕНИЯ СУДОВ В ОТКРЫТОМ МОРЕ	236
<i>Чекина Е.А., Чекин А.М.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ	238
<i>Черноусько Ф.Л.</i> ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ПОДВИЖНЫХ ВНУТРЕННИХ МАСС	241
<i>Шагалова Л.Г.</i> ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	243
<i>Шамин А.Ю.</i> ДИНАМИКА ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ.....	246
<i>Янова О.В., Филатьев А.С.</i> ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРБИТОЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ВОЗДУШНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ	248

Подсекция I-3. Колебания механических систем.....	251
<i>Абрамян А.К., Вакуленко С.А.</i> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЕЁ ЗАДАННОГО СПЕКТРА.....	252
<i>Акимова Е.Д., Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В.</i> СКРЫТЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ГРАНИЦЫ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ АНДРОНОВА-ВЫШНЕГРАДСКОГО О ЦЕНТРОБЕЖНОМ РЕГУЛЯТОРЕ	254
<i>Артюнин А.И., Суменков О.Ю.</i> ЭФФЕКТ «ЗАСТРЕВАНИЯ» МАЯТНИКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВАЛУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	256
<i>Большаков Р.С., Елисеев А.В.</i> ПАМЯТИ Д.Т.Н., ПРОФЕССОРА, ЗАСЛУЖЕННОГО ДЕЯТЕЛЯ НАУКИ РФ ЕЛИСЕЕВА С.В.	260
<i>Брысин А.Н., Соловьев В.С.</i> ОБ РАСШИРЕНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ИНЕРЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ДВИЖЕНИЯ	264
<i>Буданов В.М.</i> АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА.....	267
<i>Булашов Д.А., Сидоров И.Н.</i> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОТСТРОЙКИ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ВАЛОПРОВОДА ГАЗОПЕРЕКАЧИВАЮЩЕГО АГРЕГАТА	270
<i>Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А.</i> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ "ТРУБОПРОВОД - ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ"	273
<i>Гаврилов С.Н., Исаков Н.Ю., Сандовский А.В.</i> УСТАЛОСТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ, КАК НЕОТЪЕМЛЕМАЯ ЧАСТЬ РЕИНЖИНИРИНГА ЛОПАТОК ОСЕВЫХ ТУРБОМАШИН.....	276
<i>Досаев М.З.</i> ТАНГЕНЦИАЛЬНАЯ РЕАКЦИЯ ГИБКОЙ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ОПОРЫ ПРИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ	279
<i>Елисеев А.В., Кузнецов Н.К.</i> РАЗВИТИЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ОСНОВ СТРУКТУРНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ВИБРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ	282
<i>Зотов А.Н.</i> ТЯНУЩАЯ СИЛА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО ПОДВЕШЕННОЙ ПЛАСТИНКИ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА.....	284
<i>Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ СЛАБОСВЯЗАННЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РЕЗОНАНСНОГО МЭМС- АКСЕЛЕРОМЕТРА В РЕЖИМЕ ДВУХКОНТУРНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА	287

<i>Кожевников А.Н., Бурнышева Т.В.</i> МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ФАКТИЧЕСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОПОР ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ ПО ИХ ДИНАМИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ	291
<i>Козик А.Е., Анохина Е.Н., Горбушин А.Р.</i> МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК В АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕСОВ	294
<i>Крестниковский К.В., Пановко Г.Я., Шохин А.Е.</i> ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВИБРОМАШИН С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ	297
<i>Крылова Е.Ю., Синичкина А.О.</i> РЕЗОНАТОР НА ОСНОВЕ НАНО ПЛАСТИНЫ СЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ	300
<i>Кубышкин Е.П.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГИБКОГО ВАЛА С ТВЕРДЫМ ДИСКОМ	304
<i>Куликов А.Н., Куликов Д.А.</i> О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СЦЕНАРИЯ ЛАНДАУ-ХОПФА ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ТРУБЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА ЖИДКОСТИ	307
<i>Куликов Д.А.</i> О ДИНАМИКЕ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В СЛУЧАЯХ СЛАБОЙ ДИССИПАТИВНОЙ И СЛАБОЙ ИНЕРЦИОННОЙ СВЯЗЕЙ	309
<i>Кумакиев С.А.</i> АВТОКОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА РЕЛЕЯ С КУБИЧЕСКОЙ ВОЗВРАЩАЮЩЕЙ СИЛОЙ	312
<i>Литвинов В.Л., Литвинова К.В.</i> СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КАНАТА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ С УЧЕТОМ ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ	315
<i>Литвинов В.Л., Литвинова К.В.</i> ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА – ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ НА ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦАХ	318
<i>Локтев А.А., Локтев Д.А.</i> ОПТИМИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОКОЛОГАБАРИТНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ МОСТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА	321
<i>Лукин А.В., Попов И.А.</i> ОБ ЭВОЛЮЦИИ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЕЁ ВРАЩЕНИИ ВОКРУГ ОСИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПЛОСКОСТИ ПЛАСТИНКИ	323
<i>Малашин А.А., Острогомгильский А.Д.</i> ВЗАИМОВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НИТИ МАЯТНИКА	326
<i>Можгова Н.В., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В.</i> НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СЛАБОСВЯЗАННЫХ МИКРОБАЛОЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ЭЛЕКТРОТЕПЛОМ ВОЗБУЖДЕНИИ	328

<i>Муницын А.И.</i> КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОЛОННЫ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ ...	332
<i>Полехин И.Ю.</i> МАЯТНИК КАПИЦЫ-УИТНИ.....	335
<i>Полищук А.Д.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.....	337
<i>Селюцкий Ю.Д.</i> О КОЛЕБАНИЯХ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ, ИСПОЛЗУЮЩЕЙ ЭФФЕКТ ГАЛОПИРОВАНИЯ	340
<i>Смольников Б.А., Смирнов А.С.</i> О СООТВЕТСТВИИ СЛАБО-НЕЛИНЕЙНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛЕЙ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА	343
<i>Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А., Урбан А.М.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ	347
<i>Удалов П.П., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В., Полеткин К.В.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО НЕКОНТАКТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПОДВЕСА.....	350
<i>Усманов А.Р., Модестов В.С.</i> ВЛИЯНИЕ ДВОЙКОЙ ИЗГИБОЙ ЖЕСТКОСТИ ВАЛА НА ЕГО РАБОЧИЙ ПРОГИБ	353
<i>Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф.</i> ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПРОДОЛЬНЫМ НАДРЕЗОМ	357
<i>Федотова И.А., Федотов А.В.</i> УЧЕТ УПРУГОСТИ ОПОР ПРИ РАСЧЕТАХ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	360
<i>Филиппов С.Б., Нестерчук Г.А.</i> НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН.....	363
<i>Храмов Д.А., Звягин А.В., Зубков А.Ф.</i> ДИНАМИКА НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ	366
<i>Цейтлин Б.В.</i> СИНТЕЗ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УТОЧНЕННЫМ УЧЕТОМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОДСТРУКТУР	369
<i>Шевченко С.А., Мельников Б.Е.</i> ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ РЕЗОНАТОРА ВТГ ОТ РАЗНОПЛОТНОСТИ	372
<i>Штукин Л.В., Лукин А.В., Попов И.А., Игумнова В.С., Привалова О.В.</i> ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ СИММЕТРИИ НА ДИНАМИКУ МИКРО- И НАНОРЕЗОНАТОРОВ	375
<i>Юлмухаметов А.А., Хакимов А.Г., Аитбаева А.А.</i> СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ НАНОПЛАСТИНКИ В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ	378

Подсекция I-4. Механика систем твердых и деформируемых тел.....	381
<i>Аксенов А.А., Азаров А.А., Вершинин А.В., Левин В.А., Овсянникова Е.Е., Улькин Д.А.</i> СОВМЕСТНЫЙ РАСЧЁТ ФЛАТТЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ В СВЯЗКАХ FLOWVISION-ABAQUS И FLOWVISION-FIDESYS.....	382
<i>Богданов В.В., Орешин Я.А., Чабунин И.С.</i> МНОГОСЛОЙНЫЕ УДАРОПОГЛОЩАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА НА ОСНОВЕ ТОРОИДАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК.....	385
<i>Горобцов А.С., Карцов С.К.</i> ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ТЕЛ.....	388
<i>Горр Г.В., Данилюк Д.А.</i> ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ПУАНСО В ИСТОЛКОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ .	390
<i>Горр Г.В., Зыза А.В., Платонова Е.С.</i> РЕЗОНАНСНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА БАРНЕТТА-ЛОНДОНА.....	393
<i>Гращенко А.С., Кукушкин С.А.</i> МЕХАНИЧЕСКИЕ И ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР.....	395
<i>Дмитриев Н.Н.</i> ВЛИЯНИЕ СИММЕТРИЧНОГО И АСИММЕТРИЧНОГО ОРТОТРОПНОГО ТРЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	398
<i>Зимин В.Н., Шахвердов А.О.</i> МЕХАНИКА ТРАНСФОРМИРУЕМОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПРИВОДОМ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ.....	401
<i>Ковальчук Л.М., Бурнышева Т.В.</i> ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТЧАТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ И НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ.....	404
<i>Кузнецов С.Ф., Позняк Е.В., Шипков А.А.</i> АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРАКТА ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА.....	408
<i>Лисенкова Е.Е.</i> КОЛЕБАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ВДОЛЬ НИХ МЕХАНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ.....	411
<i>Лобачев М.И., Лагуткина А.Д., Шнеерсон Г.А.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ МАГНИТА С КВАЗИБЕССИЛОВОЙ ОБМОТКОЙ.....	414
<i>Лонин К.А., Панов В.А., Патрушев В.Л., Савчук Д.В., Соловьев С.А.</i> РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТНО- ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ.....	416
<i>Михеев Г.В., Родиков А.Н.</i> МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЁС С ЭЛЕМЕНТАМИ ПУТЕВОЙ СТРУКТУРЫ.....	419

<i>Нечунаев А.Ф., Наумова Н.В., Дорофеев Н.П.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИПЕРСКОРОСТНОГО УДАРА ТВЕРДОГО ТЕЛА О ТОНКИЙ АЛЮМИНИЕВЫЙ ЭКРАН	422
<i>Погорелов Д.Ю., Родиков А.Н.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АБСОЛЮТНЫХ УЗЛОВЫХ КООРДИНАТ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ ТЕЛ	425
<i>Сатанов А.А., Ерофеев В.И., Хазов П.А.</i> ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМ ТЕЛ ЧЕРЕЗ АЭРОДИНАМИЧЕСКУЮ СРЕДУ	428
<i>Султанов К.С., Акбаров Н.А.</i> ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СТЕРЖНЯХ	432
<i>Суранов Я.С., Керестень И.А.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ТОРСИОНА БАЛОЧНОГО ТИПА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАГРУЗОК НА ОРГАНЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕСУЩИМ ВИНТОМ СООСНОГО ВЕРТОЛЕТА	436
<i>Суханов А.А.</i> ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СУХОГО ТРЕНИЯ	439
<i>Сухов Е.А.</i> ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА БАЗЕ МЕТОДА ШАРНИРНЫХ КООРДИНАТ	442
<i>Темис Ю.М., Азметов Х.Х.</i> НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ	445
<i>Товстик Т.П., Беляев А.К.</i> ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСОВ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ОБОБЩЕННОГО МАЯТНИКА КАПИЦЫ	448
<i>Томашевский С.Б.</i> ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ АВТОМОБИЛЬНЫХ ШИН	452
<i>Ханукаев Ю.И., Куракин В.А.</i> СПЕКТРЫ КАК СВОЙСТВА МЕТРИКИ	454
<i>Чишко С.Д., Коровкин Н.В., Ройтгарц М.Б.</i> МЕТОДИКА РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ ТОРЦЕВОЙ ЗОНЫ СТАТОРА ПРИ ВНЕЗАПНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ В ТУРБОГЕНЕРАТОРАХ	455
<i>Шанявский А.А., Солдатенков А.П., Никитин А.Д., Никитин И.С.</i> УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ БЛИСКА ПЕРВОЙ СТУПЕНИ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ В РЕАЛИЗУЕМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ НА МИКРОМАСШТАБНОМ УРОВНЕ	458
<i>Шардаков И.Н., Шестаков А.П., Глот И.О., Епин В.В., Гусев Г.Н., Цветков Р.В.</i> ФОРМИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БЕТОННОЙ КРЕПИ В ПРОЦЕССЕ ПРОХОДКИ ШАХТНОГО СТВОЛА	460
<i>Шатина А.В., Борец А.С.</i> ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ЕЕ ПРИЛИВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ	463

Подсекция I-5. Механика машин и роботов.....	466
<i>Астахов С.В., Ниналалов И.Г., Меркурьев И.В.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ НА ДИНАМИКУ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА.....	467
<i>Ащеулов А.В.</i> НЕСКОЛЬКО АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ТЯЖЕЛЫХ МАШИН.....	470
<i>Бабаев М.С., Брискин Е.С., Калинин Я.В.</i> РОБОТ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ.....	473
<i>Блинов А.О., Борисов А.В., Мухарлямов Р.Г., Новикова М.А.</i> МОДЕЛЬ ЭКЗОСКЕЛЕТА ДЛЯ ОПОРНОЙ НОГИ И КОРПУСА СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ И РЕГУЛИРУЕМОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ.....	476
<i>Блинов А.О., Борисов А.В., Кончина Л.В., Маслова К.С., Чигарев А.В.</i> ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ 3D-МОДЕЛЬ ЭКЗОСКЕЛЕТА С ПЯТЬЮ ЗВЕНЬЯМИ ДЛЯ ОПОРНО-ДВИГАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ЧЕЛОВЕКА.....	479
<i>Брискин Е.С., Артемьев К.С., Бордюгов Д.В., Смирная Л.Д.</i> ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ С ДВИЖИТЕЛЯМИ, ДИСКРЕТНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.....	482
<i>Брискин Е.С., Шаронов Н.Г., Безусов С.О., Хачатрян А.А.</i> ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТОВ ЗА СЧЕТ СОГЛАСОВАННОГО ИЗМЕНЕНИЯ ВИДА ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ.....	484
<i>Ветлицын М.Ю., Шаронов Н.Г., Ивченко А.В.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНЫХ ПАНЕЛЕЙ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ.....	486
<i>Влахова А.В., Новодерова А.П.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ЗАНОСА ЧЕТЫРЕХКОЛЕСНОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ.....	488
<i>Горобцов А.С., Тарасов П.С., Марков А.Е., Дианский А.В.</i> СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТОВ СО СЛОЖНОЙ ЛОКОМОЦИЕЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ.....	490
<i>Жога В.В., Нелюбова А.В., Шаронов Н.Г.</i> УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНО- ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ.....	492
<i>Замурагин Ю.М., Саламандра К.Б., Саламандра Б.Л.</i> ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ПРОТЯГИВАНИЯ ЛЕНТОЧНОГО МАТЕРИАЛА.....	495
<i>Калинин Я.В.</i> О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ УСКОРЕНИЯ И ЗАМЕДЛЕНИЯ ШАГАЮЩЕГО РОБОТА ПОД ВОДОЙ.....	498
<i>Климина Л.А., Голованов С.А., Голуб А.П.</i> ДИНАМИКА РОБОТА ТРИМАРАНА, УПРАВЛЯЕМОГО ВНУТРЕННИМ МАХОВИКОМ	501
<i>Малолетов А.В.</i> ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ И ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРОСОВЫХ РОБОТОВ С ПОДВИЖНЫМИ КАРЕТКАМИ.....	504

<i>Мецихин И.А., Гаврюшин С.С.</i> РАСЧЕТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА КОНФИГУРАЦИИ ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОЧУВСТВЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОРТРЕТА НАГРУЖЕНИЯ	507
<i>Панасенко А.Н., Панасенко С.А.</i> АНАЛИЗ ПЛОСКИХ ОДНОПОДВИЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШЕСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАССИВОВ	509
<i>Побегайло П.А., Ильина А.Н.</i> РАЗВИТИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЭКСКАВАТОРОВ НА РАННИХ СТАДИЯХ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И В ТЕКУЩИХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ	512
<i>Сайпулаев Г.Р., Адамов Б.И., Сайпулаев М.Р.</i> О РЕШЕНИЯХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ ОПОР, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЧЕТЫРЕХКОЛЕСНУЮ ПЛАТФОРМУ, ДВИЖУЩУЮСЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ.....	515
<i>Тулешов А.К., Тулешов Е.А., Куатова М.Ж.</i> СИНТЕЗ ДВУХКОНТУРНОГО РУЛЕВОГО МЕХАНИЗМА АККЕРМАНА ТРАНСПОРТНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА.....	518
<i>Хайрнасов К.З.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ.....	521
Подсекция I-6. Механика космических аппаратов и систем	524
<i>Алексеев М.М., Стихно К.А.</i> АЛЬТЕРНАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ПО ВЕКТОРНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ.....	525
<i>Байков А.Е., Исмагилов А.Р.</i> ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАНТЕЛИ В ОБОБЩЁННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА	529
<i>Бакулин В.Н., Бычков Р.С., Борзых С.В.</i> ДИНАМИКА ПРОЦЕССА МЯГКОЙ ПОСАДКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТРАНСФОРМИРУЕМЫМ МЕХАНИЧЕСКИМ ПОСАДОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ	532
<i>Баранов А.А., Щеглов Г.А.</i> МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ УВОДА ГРУППЫ ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА	534
<i>Баранова Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А.</i> ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ НАНОСПУТНИКА ФОРМАТА CUBESAT 6U НА НИЗКИХ ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТАХ	536
<i>Белоконов И.В., Елисов Н.А., Крамлих А.В., Ломака И.А.</i> ФОРМИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОРАЗМЕРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ОТКАЗЕ ОДНОГО КАНАЛА УПРАВЛЕНИЯ	539
<i>Беляев М.Ю.</i> ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ РОССИЙСКОГО СЕГМЕНТА МКС	542

<i>Биктимиров Ш.Н., Ахлумади М.</i> АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ РОЕМ ФЕМТОСПУТНИКОВ С ПОМОЩЬЮ СИЛЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭНЕРГОБАЛАНСА И ОГРАНИЧЕНИЙ НА МЕЖСПУТНИКОВУЮ СВЯЗЬ.....	545
<i>Буров А.А., Никонов В.И.</i> ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	546
<i>Гладун А.В.</i> О СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ СПАРОК ГИРОДИНОВ	549
<i>Голиков А.А., Сагалаков А.Э., Филатьев А.С.</i> ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТАХ ПЛАНЕТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЛЬКО ВОСПОЛНЯЕМЫХ РЕСУРСОВ.....	553
<i>Гончаров Д.А., Пожалостин А.А.</i> ДИНАМИКА ВОЗВРАЩАЕМЫХ СТУПЕНЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ.....	556
<i>Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А.</i> ЛЕСТНИЦА ЗАДАЧ КАК МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОСМОДИНАМИКИ В ГРОМОЗДКИХ ПОСТАНОВКАХ	558
<i>Гришко Д.А.</i> ПОИСК ВЫСОТНОЙ ГРАНИЦЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДВУХ ВАРИАНТОВ УВОДА КРУПНЫХ ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА НА ОРБИТЫ ЗАХОРОНЕНИЯ	561
<i>Грушевский А.В., Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.</i> ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РЕЗЕРФОРДА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО РАССЕЙЯНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ МАНЕВРОВ.....	564
<i>Гутник С.А.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВУХ СОЕДИНЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИМ ШАРНИРОМ ТЕЛ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ	567
<i>Давыдов А.А., Иванов Г.А.</i> УПРАВЛЕНИЕ РЕЖИМОМ ЗАКРУТКИ РАЗГОННОГО БЛОКА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ	570
<i>Дворник Е.С., Иванова М.В., Притыкин Д.А.</i> ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-ЛУНА ДЛЯ РАЗВЕРТЫВАНИЯ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ	573
<i>Дьяков П.А., Малашин А.А.</i> РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ НА ОРБИТЕ.....	575
<i>Заборский С.А.</i> УРАВНЕНИЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ БАЗИС-ВЕКТОРА ЛОУДЕНА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ МАНЕВРОВ КА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА Л.С. ПОНТРЯГИНА.....	577
<i>Зубко В.А., Эйсмонт Н.А., Федяев К.С., Беляев А.А.</i> МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА К ВЕНЕРЕ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПОСАДКИ В ЖЕЛАЕМОМ РЕГИОНЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТЫ.....	580

<i>Иванюхин А.В., Кравченко В.С.</i> ДВУХИМПУЛЬСНЫЙ МЕЖОРБИТАЛЬНЫЙ ПЕРЕЛЁТ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМБЕРТА С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ВРЕМЕНИ ПЕРЕЛЁТА.....	582
<i>Иванюхин А.В., Ивашкин В.В., Петухов В.Г., Юн Сон Ук</i> ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ К ЛУНЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ НА ТРАЕКТОРИИ ВРЕМЕННОГО ЗАХВАТА	585
<i>Ивашкин В.В.</i> ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА-ЛАМБЕРТА И ЕЕ РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОХОЦИМСКОГО-ЕГОРОВА.....	588
<i>Игнатов А.И., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В.</i> ПОДДЕРЖАНИЕ РЕЖИМА ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННО НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ	591
<i>Игнатов А.И., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В.</i> РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА ГРАВИТАЦИОННОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА БЕЗ НАКОПЛЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ГИРОСИСТЕМЫ.....	593
<i>Константинов М.С.</i> ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ПОЛЕТА КА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЕГО ВХОДА В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ С БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ.....	596
<i>Кульков В.М., Юн С.У., Петухов В.Г.</i> ПРОЕКТНО-БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ТИПА CUBESAT С ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЬНЫМИ УСТАНОВКАМИ ДЛЯ ПЕРЕЛЁТА “ЗЕМЛЯ–ЛУНА”	599
<i>Кухаренко А.С., Корянов В.В.</i> ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА УПРАВЛЯЕМОГО МЕТОДОМ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЕЗНОЙ НАГРУЗКИ.....	602
<i>Ледков А.С.</i> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ БЕСКОНТАКТНОЙ ТРАНСПОРТИРОВКИ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА ИОННЫМ ПОТОКОМ.....	605
<i>Маштаков Я.В., Ткачев С.С.</i> ПОСТРОЕНИЕ ОПОРНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗГРУЗКИ МАХОВИКОВ ПРИ МЕЖПЛАНЕТНОМ ПЕРЕЛЁТЕ	609
<i>Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г.</i> СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ	612
<i>Муртазин Р.Ф., Беляева Е.К.</i> ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ПЕРЕЛЁТА К ЛУННОЙ ОРБИТАЛЬНОЙ СТАНЦИИ НА ВЫСОКОЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕЙ ДОСТАВКИ ЭКИПАЖА НА ЛУННУЮ БАЗУ.....	614
<i>Орлов В.В., Иванов Д.С.</i> ПОСТРОЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ФЕРМЕНОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА-СБОРЩИКА	616

<i>Охитина А.С.</i> СИНТЕЗ ПРОГРАММНЫХ РЕЖИМОВ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА.....	618
<i>Павлов Ю.В.</i> РЕЛЯТИВИСТСКАЯ РАКЕТА И ЭФФЕКТ ОБЕРТА В СИЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ.....	621
<i>Падалица Д.И., Филатьев А.С., Янова О.В., Голиков А.А.</i> АНАЛИЗ СПОСОБОВ СТАБИЛИЗАЦИИ И ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ПРЯМОТОЧНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ВОЗДУШНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА СВЕРХНИЗКИХ ОРБИТАХ.....	624
<i>Прошкин В.А.</i> КРАТКОСРОЧНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ АСТЕРОИД - СПУТНИК.....	627
<i>Ролдугин Д.С.</i> ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАГНИТНО ОРИЕНТИРУЕМОГО НА СОЛНЦЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА СОЛНЕЧНО-СИНХРОННОЙ ОРБИТЕ.....	630
<i>Рулев Д.Н.</i> ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЛЕТАТЕЛЬНОГО/КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ	633
<i>Рулев Д.Н.</i> ОТРАБОТКА МЕТОДОВ УЧЁТА УХОДЯЩЕГО ОТ ЗЕМЛИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРИХОДА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ОТ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ ОРБИТАЛЬНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА	637
<i>Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.</i> КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ ПРОГРАММНОГО РАЗВОРОТА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА	641
<i>Стогний М.В., Иванов С.Г.</i> ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА ТОРМОЖЕНИЯ ДЛЯ КРУПНЫХ ОБЪЕКТОВ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА ДЛЯ УСКОРЕНИЯ ДЕГРАДАЦИИ 25-ЛЕТНЕЙ ОРБИТЫ ЗАХОРОНЕНИЯ.....	645
<i>Чернов К.С.</i> УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДВУХ ГРУПП МИКРОСПУТНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИЛ ЛОРЕНЦА	648
<i>Широбоков М.Г., Корнеев К.Р., Перепухов Д.Г.</i> ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕТОДАМИ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ.....	651
<i>Шпекин М.И., Фазлетдинова. Р.Ю.</i> ОРБИТАЛЬНАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ КАК МЕТОД СЛЕЖЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ КА В ОКОЛОЛУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ	654
<i>Щеглов Г.А., Мордовский А.В.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ СИЛОВЫХ СХЕМ КУБ-БАЛЛОНА ДЛЯ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НАНОСПУТНИКА	656
<i>Юй В., Старинова О.Л.</i> ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА ВБЛИЗИ ТОЧКИ L2 В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ-ЛУНА	658

Яковлев А.Б., Колесников Е.К.

ТЕЛО С ПЕРЕМЕННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ - НОВЫЙ ОБЪЕКТ
ИССЛЕДОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ..... 662

Колесников В.И., Колесников И.В., Больших Е.П.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО СОЗДАНИЮ
ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ..... 664

ХІІІ ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Сборник тезисов докладов в 4 томах

21–25 августа 2023 года
Санкт-Петербург

Том 1

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 12.10.2023. Формат 60×84/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 83,5. Тираж 50. Заказ 4760.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.