Н. В. Распопова, Л. А. Свиркина, А. А. Пономарёв

Решение задач аналитической геометрии в Python. Алгебраические кривые второго порядка.

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2023

УДК 514.12; 004.421
ББК 22.15
Р24

Печатается по рекомендации
Учебно-методической комиссии по УГСН 27.00.00
Управление в технических системах Санкт-Петербургского
государственного университета

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Военно-космическая академия имени
А. Ф. Можайского,
Г. Ш. Тамасян

канд. физ.-мат. наук, доц., Санкт-Петербургский государственный
университет,
А. Ю. Антонов

Распопова Н. В., Свиркина Л. А., Пономарёв А. А.
Р24 Решение задач аналитической геометрии в Python. Алгебраические кривые второго порядка: Учеб.-метод. пособие / Распопова Н. В., Свиркина Л. А., Пономарёв А. А.— СПб.: ВВМ, 2023.— 64 с.

ISBN 978-5-9651-1535-8

Настоящее пособие относится к междисциплинарному, которое связывает такие разделы как «Аналитическая геометрия на плоскости. Алгебраические кривые второго порядка» и «Программирование на языках высокого уровня». Предназначено, в основном, для самостоятельной работы студентов на базе уже изученных дисциплин, таких как «Геометрия и алгебра», «Высшая математика», «Программирование» и других, подобных, дисциплин. Также может применяться преподавателями в качестве учебного пособия при выдаче индивидуальных заданий студентам.

Пособие предназначено для студентов начальных курсов естественно-научных, инженерных, информационных направлений подготовки. Может быть использовано в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Библиогр. 17 назв. Ил.24.

ISBN 978-5-9651-1535-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебно-методическое пособие является дополнением пособия [9].

Добавлено выполнение задач аналитической геометрии на языке высокого уровня Python. Таким образом, пособие содержит ряд решенных задач как аналитическими методами, так и с использованием интерпретатора Python. Проиллюстрировано большим количеством рисунков.

Пособие состоит из введения и трех основных параграфов — «Эллипс», «Гипербола», «Парабола». В разделе Введение авторы приводят справочные сведения о языке Python, о его модулях и библиотеках, об основных принципах построения программ на языке Python. Более подробно про написание программ на языке Python можно посмотреть здесь [6], [13]. Аналогичные или более сложные задачи по аналитической геометрии (а также теорию) можно найти здесь [2], [8], [9]. В конце пособия приведен исчерпывающий список литературы, которым при желании можно воспользоваться для более глубокого изучения учебного материала.

При описании программного кода и вывода на экран результатов работы этого кода используются следующие обозначения. Код заключен в окружение следующего вида:

```
c = math.sqrt(A2-B2)
print("c = " +  str(c))
```

Результат выполнения работы на экране представлен таким образом:

```
c = 5.656854249492381
```

В ходе работы над пособием приобретаются (усовершенствуются) не только практические навыки в решении задач на предложенные темы, но и развиваются цифровые навыки и умения совмещать аналитическое решение задачи с её цифровым предложением на языке программирования высокого уровня Python.

ВВЕДЕНИЕ

О языке Python

Язык Python или Питон в русском произношении — язык общего назначения с динамической строгой типизацией и автоматическим управлением памятью. Звучит сложно, но на практике это очень простой и гибкий язык программирования, чрезвычайно легкий в изучении с гибкими возможностями для адаптации к разным проектам. Его сильной стороной является наличие огромного количества примеров с открытым кодом в сети Интернет и еще более огромное множество настраиваемых различных библиотек различной предметной направленности.

Этот язык можно охарактеризовать как отличную платформу для прототипирования программ на других языках с более сложным процессом реализации. А это означает, что такой язык является отличным выбором для любого инженера, кибернетика, математика, занимающегося математическим моделированием. Это рабочий инструмент, похожий на всем известный швейцарский ножик с множеством лезвий, только тут много библиотек или называемых в среде студентов «фишек».

Мы будем использовать этот язык для решения практических задач математики. Вы увидите, что это просто и весело. Изучение математики превратится в интересный и увлекательный процесс и вы сможете легко и просто поэкспериментировать с различными переменными в уравнениях второго порядка, гибко изменяя настройки своих программ.

Про язык и используемые модули и библиотеки

На любом языке программы делают одно и тоже — берут одни данные и преобразуют в другие. Кроме этого, любая программа в том или ином виде выводит обработанные данные для пользователя, в этом обычно кроется полезный смысл их работы. Как правило, это графики или таблицы с данными.

На любом языке структуры программ похожи. В начале идет описание данных, описание подключаемых модулей, позволяющих работать с данными или результатами обработки этих данных, способами их вывода или решающих другие задачи. В середине программы идут операторы, отвечающие за обработку информации, ее преобразование (сложение, умножение, деление, приведение к разным типам цифр и т. д.). Python не исключение. В начале программы идет описание подключаемых модулей, которые называются библиотеками.

В нашем пособие мы будем использовать следующие библиотеки и модули:

1. Библиотека Ipython включает интересующие нас различные модули
   (a) display — модуль отображения информации,
   (b) math — набор математических функций,
   (c) Latex — модуль позволяющий отображать математические формулы.
2. Numpy (сокращенно от Numerical Python) — библиотека с открытым исходным кодом. Возможности этого модуля еще шире, чем у модуля math. Это поддержка многомерных массивов (включая матрицы), поддержка высокоуровневых математических функций, предназначенных для работы с многомерными массивами.
3. Matplotlib — библиотека на языке программирования Python для визуализации данных двумерной и трёхмерной графикой. Мы будем использовать модуль pyplot.
4. astropy.table — Модуль для работы с данными представленными в табличной форме, по функциональности напоминающий библиотеку numpy, мы будем использовать следующие модули QTable, Table, Column.

Про основные принципы составления программ на Python

Прежде чем браться за программирование всегда неплохо сделать две вещи:

- Прочитать литературу (например, [13], [6], [9]).
- Подумать и не писать лишнего кода.

Язык Python является интерпретируемым языком. Это значит, что программа написанная на Python, не обязательно должна переводиться в машинный код целиком с помощью компилятора, как это происходит, например, в C, C++, Pascal. Здесь, с помощью интерпретатора, могут выполняться отдельные команды или блоки команд.

Программы на языке Python можно выполнять как в классическом интерпретаторе языка, пользуясь в качестве интерфейса командной строкой, так и в оболочках, например, в Jupiter Notebook, который можно найти в пакете научно-прикладных инструментов, объединенных в пакет Anaconda [11], [12].

§1. Эллипс

1.1 Справочные сведения

Приведем справочные сведения об эллипсе и его основных характеристиках.

Эллипсом называют геометрическое место точек M, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых фокусами, есть постоянная величина $2a$, причем она больше чем расстояние $2c$ между фокусами (см. рис. 1.1). Таким образом, для эллипса имеем:

$$d(F_1M) + d(F_2M) = 2a, \quad d(F_1F_2) = 2c, \quad 2a > 2c. \tag{1.1}$$

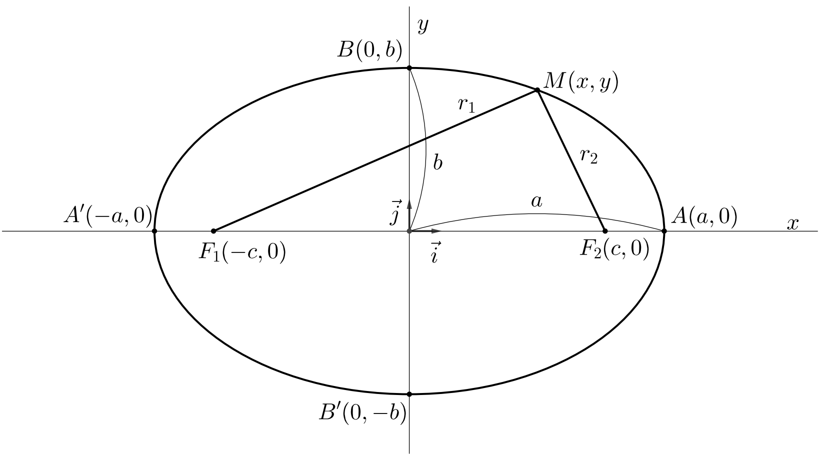

Рис. 1.1. Эллипс, вершины и фокусы эллипса, фокальные радиусы точки на эллипсе

Делая замену

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{1.2}$$

получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.3}$$

Точки A, A', B, B' называются вершинами эллипса (см. рис. 1.1), длина отрезка $|OA| = a$ — большая полуось эллипса, $|OB| = b$ — малая полуось эллипса ($2a$ и $2b$ — большая и малая оси).

Эксцентриситет эллипса ε выражает степень «внецентральности» фокусов, то есть связан с удалением фокусов от центра кривой:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1 \quad (\varepsilon = 0 \text{ — окружность}). \tag{1.4}$$

Если эллипс задан уравнением (1.3), при этом $b > a$, то $2b$ будет большой осью, на которой расположены фокусы, и $2a$ — малой осью. Тогда эксцентриситет будет вычисляться по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{b}.$$

Отрезки, соединяющие любую точку эллипса с его фокусами, называются фокальными радиусами эллипса (см. рис. 1.1). Их длины равны:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x. \end{aligned} \tag{1.5}$$

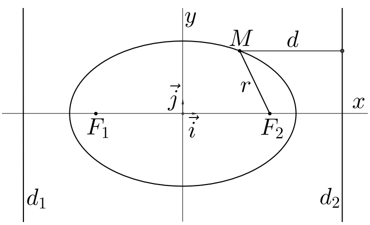

Рис. 1.2. Директрисы эллипса

Прямые, перпендикулярные прямой, проходящей через фокусы эллипса, и расположенные симметрично по отношению к центру эллипса на расстоянии a/ε, называются директрисами эллипса (см. рис. 1.2):

$$d_1 : \ x = -\frac{a}{\varepsilon}, \ d_2 : \ x = \frac{a}{\varepsilon}. \tag{1.6}$$

В случае, когда фокусы расположены на оси Oy, уравнения директрис примут вид:

$$d_1 : \ y = -\frac{b}{\varepsilon}, \ d_2 : \ y = \frac{b}{\varepsilon}. \tag{1.7}$$

Помимо стандартного эллипса, существует еще два канонических вида задания линий эллиптического типа:

- Мнимый эллипс (пустое множество точек на плоскости Oxy)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{1.8}$$

- Вырожденный эллипс (одна точка — начало канонической системы координат)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{1.9}$$

Напомним также еще один способ задания эллипса — через его параметрические уравнения (см. формулу (1.10) и рис. 1.3):

$$\begin{cases} x = a\,\cos t, \\ y = b\,\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 2\pi. \tag{1.10}$$

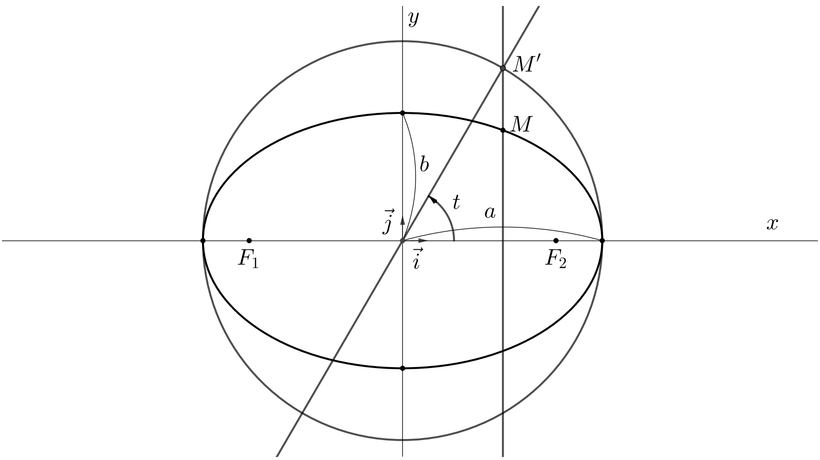

Рис. 1.3. Эллипс и вспомогательная окружность для введения параметра t для уравнений эллипса

1.2 Учебные задания для аудиторной работы

Задача 1.2.1.
Дан эллипс
$$4x^2 + 36y^2 = 144.$$
Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

Аналитическое решение задачи 1.2.1.
Запишем уравнение в каноническом виде (см.(1.3)), разделив обе части заданного уравнения на 144:
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{1.11}$$
Из канонического уравнения получим большую и малую полуоси:
$$a^2 = 36,\ b^2 = 4 \ \Rightarrow \ a = 6,\ b = 2.$$
Найдем расстояние c от центра эллипса до фокусов
$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 4 = 32 \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$
и запишем координаты фокусов эллипса
$$F_1(-4\sqrt{2}, 0), \quad F_2(4\sqrt{2}, 0).$$
Эксцентриситет эллипса равен
$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
Уравнения директрис эллипса
$$d_1 :\ x = -\frac{a}{\varepsilon},\ d_2 :\ x = \frac{a}{\varepsilon}.$$
принимают вид:
$$d_1 :\ x = -\frac{6 \cdot 3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{9\sqrt{2}}{2},$$
$$d_2 :\ x = +\frac{6 \cdot 3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = +\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $a = 6$, $b = 2$, $c = 4\sqrt{2}$, $F_1(-4\sqrt{2}, 0)$, $F_2(4\sqrt{2}, 0)$, $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $d_1 : x = -\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$, $d_2 : x = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Решение задачи 1.2.1 с использованием Python. Для решения задания на компьютере следует выполнить несколько последовательных процедур и действий, которые приведут вас к решению. Обычно такой процесс называют программированием.

В рамках процесса составления программы надо решать сразу несколько задач:

- Понять, какие формулы мы будем использовать.
- Какие переменные будут входить в эти формулы.
- Какие у них значения и пределы изменения.
- Можно ли их запрограммировать с помощью языка Python?
- Какие мы будем использовать библиотеки программного кода для вычисления, отображения результатов и их сохранения.
- Как будем задавать исходные данные, будем ли мы их вводить вручную или считывать из файла.

И надо понимать, что это только часть вопросов, возникающих перед начинающим программистом, который собирается программировать решение математических (в частности геометрических) задач.

Подключим необходимые библиотеки, их названия подскажут, для чего нужна та или иная библиотека.

```
from IPython.display import display, Math, Latex
import math
```

Сформулируем задачи, которые необходимо решить для построения графика функции:

1. Привести уравнение к каноническому виду.
2. Рассчитать основные характеристики кривой второго порядка. Выделить необходимые константы, которые несут в себе свой геометрический смысл.

3. Записать уравнение эллипса в удобной форме. Например, в каноническом уравнении, то есть в уравнении кривой в неявном виде, выразить y через x.

4. Сформировать массив данных для построения графика, через задание некоторого количества опорных точек.

Решим поставленные задачи.

Каноническое уравнение эллипса было получено в аналитическом решении задачи, оно имеет вид (1.11).

Вычислим большую и малую полуоси эллипса a и b, зная из уравнения, что

$$a^2 = 36,\ b^2 = 4.$$

Введем соответствующие переменные и извлечем из них квадратные корни.

```
A2 = 36
B2 = 4
a = math.sqrt(A2)
b = math.sqrt(B2)
```

Мало вычислить значения, надо также вывести их на экран специальным образом, который называется форматированием.

```
print("Квадратный корень из числа A2 = " + str(A2) +
" это " + str(a))
print("Квадратный корень из числа B2 = " + str(B2) +
" это " + str(b))
```

После выполнения команд на экране увидем следующее:

```
Квадратный корень из числа A2 36 это 6.0
Квадратный корень из числа B2 4 это 2.0
```

Здесь мы, кроме вывода на экран, преобразовали число в символьную информацию, которую можем вывести на экран. По началу такой процесс кажется громоздким, но по мере выполнения заданий вы привыкните к этому и сможете понимать, как создаются программы.

Найдем похожим образом расстояние c от центра эллипса до фокуса через объявление переменной. Затем вычисление ее значение, используя формулу $c^2 = a^2 - b^2$ (см.(1.2)).

```
c = math.sqrt(A2-B2)
print("c= " +  str(c))
```

Получим следующий результат:

```
c = 5.656854249492381
```

Зная c, можем вывести на экран координаты фокусов заданного эллипса $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

```
f1 = -c
f2 = c
print("Фокус эллипса F1(" +   str(f1)+", 0)")
print("Фокус эллипса F2(" +   str(f2)+", 0)")
```

Результатом выполнения такого кода будет:

```
Фокус эллипса F1(-5.656854249492381, 0)
Фокус эллипса F2(5.656854249492381, 0)
```

Нам уже известны величины a и c. Далее вычислим эксцентриситет $\varepsilon = c/a$. Для этого опять введем переменную и присвоим ей вычисляемое значение.

```
e = c/a
print("Эксцентриситет e =" +str(e))
```

```
Эксцентриситет e = 0.9428090415820635
```

Запишем уравнения директрис эллипса $x = \pm a/\varepsilon$.

```
x1 = -a/e
x2 = a/e
print("Уравнение директрисы d1: x = " + str(x1))
print("Уравнение директрисы d2: x = " + str(x2))
```

Уравнение директрисы d1: x = -6.363961030678927
Уравнение директрисы d2: x = 6.363961030678927

Выведем теперь все данные в одном месте, записав следующий код:

```
print("Ответ: ")
print("a ={:9.3f}".format(a))
print("b ={:9.3f}".format(b))
print("c ={:9.3f}".format(c))
print("e ={:9.3f}".format(e))
print("F1 ({:2.3f}".format(f1)+", 0)")
print("F2 ({:2.3f}".format(f2)+", 0)")
print("d1: x = {:2.3f}".format(x1))
print("d2: x = {:2.3f}".format(x2))
```

На экране увидим:

Ответ:
a = 6.000
b = 2.000
c = 5.657
e = 0.943
F1 (-5.657, 0)
F2 (5.657, 0)
d1: x = -6.364
d2: x = 6.364

Для вычисления координат точек эллипса на плоскости выразим y через x в каноническом уравнении:

$$y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Нарисуем полученный эллипс и повторим вывод на экран всех найденных характеристик эллипса, а также выведем на экран таблицу с вычисленными координатами (x, y) точек эллипса. Результат работы программного кода приведен на рис. 1.4 и блоках ниже рисунка.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from astropy.table import QTable, Table, Column
x=np.linspace(-6,6)

#a, b - вычислили ранее
y = 2*np.sqrt(1-(x*x)/(A2))
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,-y)
plt.xlabel("x values")
plt.ylabel("y values")
plt.title("график эллипса")
plt.grid(True)

# построение фокусов
#f1, f2 -  вычислили ранее
plt.plot([f1,f2], [0,0], ’ro’)
#построение директрис
dx1 = -(9*np.sqrt(2))/2
dx2 = (9*np.sqrt(2))/2
plt.axvline(dx1, ymin=-10, ymax=10, color="b",
ls="--", lw=1.5)
plt.axvline(dx2, ymin=-10, ymax=10, color="r",
ls="--", lw=1.5)

print("Ответ: ")
print("Большая полуось a = {:9.3f}".format(a))
print("Малая полуось b = {:9.3f}".format(b))
```

```
print("Расстояние c = {:9.3f}".format(c))
print("Координата фокуса F1 = {:9.3f}".format(f1))
print("Координата фокуса F2 = {:9.3f}".format(f2))
print("Эксцентриситет E = {:9.3f}".format(e))
print("Директриса d1: x = {:9.3f}".format(x1))
print("Директриса d2: x = {:9.3f}".format(x2))

#таблица с координатами точек
plt.show()
QTable([x,y])
print("Таблица с координатами точек: ")
print(x,y)
```

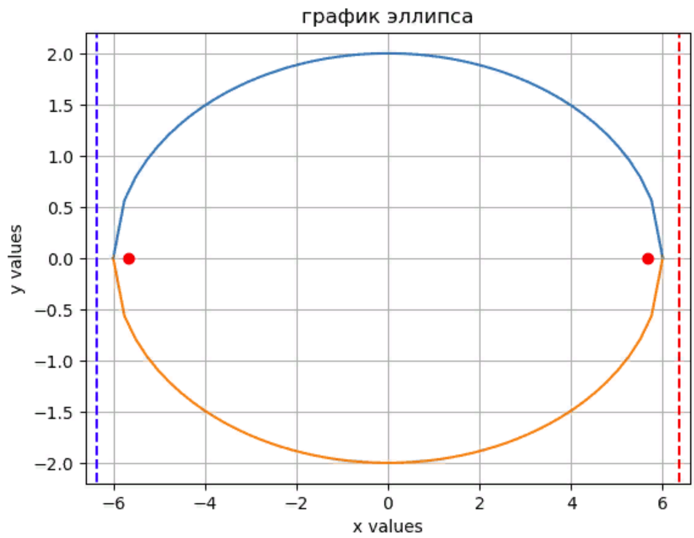

Рис. 1.4. К задаче 1.2.1. Эллипс, его фокусы и директрисы

```
[-6. -5.75510204 -5.51020408 -5.26530612 -5.02040816 -4.7755102
-4.53061224 -4.28571429 -4.04081633 -3.79591837 -3.55102041 -
3.30612245
-3.06122449 -2.81632653 -2.57142857 -2.32653061 -2.08163265 -
1.83673469
-1.59183673 -1.34693878 -1.10204082 -0.85714286 -0.6122449 -
0.36734694
-0.12244898 0.12244898 0.36734694 0.6122449 0.85714286
1.10204082
1.34693878 1.59183673 1.83673469 2.08163265 2.32653061
2.57142857
2.81632653 3.06122449 3.30612245 3.55102041 3.79591837
4.04081633
4.28571429 4.53061224 4.7755102 5.02040816 5.26530612
5.51020408
5.75510204 6. ] [0. 0.56556761 0.79145794 0.95896654 1.09521697
1.21080792
1.31121456 1.39970842 1.47843023 1.54887069 1.61211573
1.66898353
1.72010674 1.7659843 1.80701581 1.84352486 1.87577556
1.90398429
1.92832846 1.94895288 1.96597463 1.97948664 1.98956043
1.99624804
1.99958346 1.99958346 1.99624804 1.98956043 1.97948664
1.96597463
1.94895288 1.92832846 1.90398429 1.87577556 1.84352486
1.80701581
1.7659843 1.72010674 1.66898353 1.61211573 1.54887069
1.47843023
1.39970842 1.31121456 1.21080792 1.09521697 0.95896654
0.79145794
0.56556761 0. ]
```

Ответ:
Большая полуось a = 6.000
Малая полуось b = 2.000
Расстояни c = 0.943
Координата фокуса эллипса F1 = -5.657
Координата фокуса эллипса F2 = 5.657
Эксцентриситет E = 0.943
Директриса d1: x = -6.364
Директриса d2: x = 6.364

Пользуясь разобранным примером можно решить (запрограммировать) аналогичные задачи, связанные с кривыми второго порядка.

Задача 1.2.2.
Написать уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках $(8, 0)$ и $(18, 0)$ и касающегося оси Oy в точке $(0, -12)$, зная, что его оси параллельны осям координат.

Аналитическое решение задачи 1.2.2.

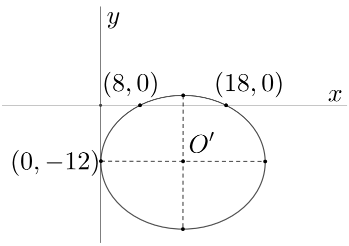

Рис. 1.5. К задаче 1.2.2

Центр эллипса находится в точке (см. рис. 1.5)

$$O' = \left(\frac{8+18}{2}, -12\right) = (13, -12).$$

Тогда уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-13)^2}{a^2} + \frac{(y+12)^2}{b^2} = 1,$$

причем $a = 13$. Точка $(8, 0)$ лежит на эллипсе, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению:

$$\frac{25}{169} + \frac{144}{b^2} = 1.$$

Отсюда получаем

$$b^2 = 169$$

и уравнение эллипса:

$$\frac{(x-13)^2}{169}+\frac{(y+12)^2}{169}=1. \tag{1.12}$$

Ответ. Окружность $(x-13)^2+(y+12)^2=169$.

Решение задачи 1.2.2 с использованием Python. В аналитическом решении была получена окружность (см. (1.12)) с центром в точке $O'(13,-12)$ и радиусом $R=13$. Приведем код программы для построения на экране этой окружности, осей координат и соответствующих точек пересечения окружности с осями координат. Краткие комментарии даны напрямую в коде. Результат работы программного кода приведен на рис. 1.6.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from math import pi
from IPython.display import display, Math, Latex
u = 13  #x - позиция центра
v = -12  #y - позиция центра
a = 13  #радиус a
b = 13  #радиус b
#параметрическое задание окружности
t = np.linspace(0, 2*pi, 100)
plt.plot( u+a*np.cos(t) , v+b*np.sin(t) )
plt.grid(color="lightgray",linestyle="--")

#построение точек пересечения кривой с осями
plt.plot([13,8,18,0], [-12,0,0,-12], "ro")
#построение осей
plt.axline((-1, 0), (5, 0), linewidth=1,
color="r",linestyle="--")
plt.axline((0, -1), (0, 1), linewidth=1,
color="r",linestyle="--")
#построение центра окружности
plt.plot([13], [-12], "ro")

plt.show()
```

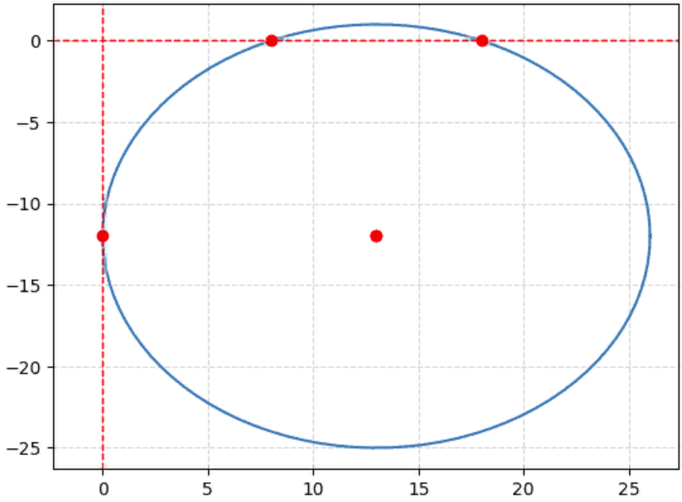

Рис. 1.6. К задаче 1.2.2. Окружность, ее центр, точки пересечения окружности с осью Ox и точка касания окружности оси Oy

Задача 1.2.3.
Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами в 5 раз меньше суммы длин полуосей.

Аналитическое решение задачи 1.2.3.
Рассмотрим каноническое уравнение эллипса, центр которого совпадает с началом координат, большая полуось эллипса равна a, малая полуось равна b, а расстояние от центра до фокуса равно c. Коэффициенты a, b, c связаны равенством $c^2 = a^2 - b^2$. Расстояние между фокусами равно $2c$, а по условию задачи расстояние в 5 раз меньше суммы длин полуосей, то есть оно равно $(a+b)/5$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} c^2 = a^2 - b^2, \\ c = \dfrac{a+b}{10}. \end{cases}$$

Подставим $a + b = 10c$ (из второго уравнения) в первое уравнение:

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 10c(a-b).$$

Тогда
$$\begin{cases} a - b = \dfrac{c}{10}, \\ a + b = 10c. \end{cases}$$
Сложив уравнения, получим $2a = 101c/10$. Тогда эксцентриситет равен
$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{20}{101}.$$

Ответ. $\varepsilon = \dfrac{20}{101}$.

Решение задачи 1.2.3 с использованием Python. Приведем код программы для построения на экране эллипса, для которого выполнены условия задачи, то есть расстояние между фокусами в 5 раз меньше суммы длин полуосей. Такое условие не позволяет найти эллипс единственным образом, но характеризует степень вытянутости этого эллипса, то есть позволяет найти однозначно его эксцентриситет, что и было сделано в аналитическом решении. Построим с помощью Phyton несколько эллипсов, с разными длинами полуосей, но одинаковым отношением расстояний между фокусами и суммой длин полуосей, то есть с одинаковым эксцентриситетом $\varepsilon = 20/101$.

Подключим необходимые библиотеки.

```
from IPython.display import display, Math, Latex
import math
```

Для построения графиков нам необходимо:

1. Привести уравнение к каноническому виду.
2. Расчитать основные характеристики уравнения эллипса, выделить необходимые константы.
3. Записать уравнение кривой в удобной форме. Например, как в предыдущих задачах, выразить из канонического уравнения y через x.
4. Сформировать массив данных для построения графика, через задание некоторого количества опорных точек

Решим поставленные задачи.

Каноническое уравнения эллипса имеет вид (1.3). Для каждого из эллипсов зададим произвольно большую полуось эллипса a и, используя найденный ранее эксцентриситет ε, вычислим расстояние c по формуле (1.4). Вычислим малую полуось b по формуле (1.2).

```
#Обращаем ваше внимание, что для переменных
#используются заглавные латинские буквы,
#использование кириллицы может привести
#к возникновению ошибки

# Эллипс №1
A1 = 10
E1 = 20/101
#Вычисляем полуфокусное расстояние c = e · a
C1 = E1*A1
# Вычисляем малую полуось
B1 = math.sqrt(A1*A1 -C1*C1 )

# Эллипс №2
A2 = 12
E2 = 20/101
#Вычисляем полуфокусное расстояние c = e · a
C2 = E2*A2
# Вычисляем малую полуось
B2 = math.sqrt(A2*A2 -C2*C2 )

# Эллипс №3
A3 = 8
E3 = 20/101
#Вычисляем полуфокусное расстояние c = e · a
C3 = E2*A2
# Вычисляем малую полуось
B3 = math.sqrt(A3*A3 -C3*C3)
```

В каноническом уравнении выразим y через x:

$$y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Сформируем массив данных для построения графика, через задание некоторого количества опорных точек и нарисуем эллипс.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from astropy.table import QTable, Table, Column
#Библиотеки мы оставляем прежние, но вычисления
#координат наших функций  проведем параллельно

#Эллипс №1
x1 = np.linspace(-10,10)
#a, b -  вычислили ранее
y1 = B1*np.sqrt(1-(x1*x1)/(A1*A1))
plt.plot(x1,y1)
plt.plot(x1,-y1)
#Эллипс №2
x2 = np.linspace(-12,12)
#a, b -  вычислили ранее
y2 = B2*np.sqrt(1-(x2*x2)/(A2*A2))
plt.plot(x2,y2)
plt.plot(x2,-y2)
#Эллипс №3
x3 = np.linspace(-8,8)
#a, b -  вычислили ранее
y3 = B3*np.sqrt(1-(x3*x3)/(A3*A3))
plt.plot(x3,y3)
plt.plot(x3,-y3)

plt.xlabel("x values")
plt.ylabel("y values")
plt.title("график эллипса")
plt.grid(True)

plt.show()
```

Результат работы программного кода приведен на рис. 1.7.

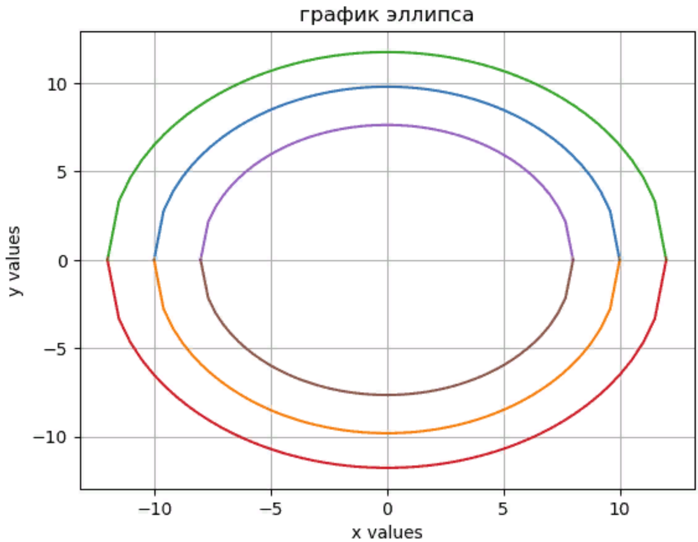

Рис. 1.7. К задаче 1.2.3. Эллипсы с заданным эксцентриситетом

Задача 1.2.4.
Составить уравнение прямой, содержащей хорду эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

которая точкой $(-1, 2)$ делится пополам.

Аналитическое решение задачи 1.2.4.
Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат эллипсу и образуют отрезок, который точкой $(-1, 2)$ делится пополам. Тогда координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ y_1 + y_2 = 4, \\ \dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{9} = 1, \\ \dfrac{x_2^2}{16} + \dfrac{y_2^2}{9} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 - x_1, \\ y_2 = 4 - y_1, \\ \dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{9} = 1, \\ \dfrac{(-2 - x_1)^2}{16} + \dfrac{(4 - y_1)^2}{9} = 1. \end{cases}$$

Раскрывая квадраты в последнем уравнении системы и подставляя третье, получим

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{9} = 1, \\ \dfrac{4 + 4x_1}{16} + \dfrac{16 - 8y_1}{9} = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение дает нам уравнение искомой прямой:

$$9x - 32y + 73 = 0.$$

Ответ. $9x - 32y + 73 = 0$.

Решение задачи 1.2.4 с использованием Python. Приведем код программы для построения на экрание эллипса, осей координат, хорды и соответсвующей точки, которая делит хорду пополам.

Подключим библиотеки.

```
from IPython.display import display, Math, Latex
import math
```

Как и ранее для решения поставленной задачи нам необходимо:

1. Рассчитать основные характеристики уравнения эллипса (его каноническое уравнение уже дано в условии задачи).
2. Записать уравнение кривой в удобном виде, выразив y через x.
3. Записать уравнение прямой, содержащей хорду, также выразив y через x. Задать координаты точки, которая делит хорду пополам.
4. Сформировать массив данных для построения графика, через задание некоторого количества опорных точек

Приступим к выполнению. Имея каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

найдем его большую и малую полуоси: $a = 4$, $b = 3$. И выразим y через x. Сформируем массив данных для построения графика, через задание некоторого количества опорных точек.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from astropy.table import QTable, Table, Column

a = 4 #большая полуось
b = 3 #малая полуось
x = np.linspace(-4,4)
y = b*np.sqrt(1-(x*x)/(a*a))

plt.plot(x,y)
plt.plot(x,-y)
plt.xlabel("x values")
plt.ylabel("y values")
plt.title("график эллипса")
plt.grid(True)
```

Нарисуем точку $(-1, 2)$ из условии задачи. Изобразим на графике найденную в аналитическом решении прямую, содержащую хорду, опять же для удобства, выразив y через x:

$$9x - 32y + 73 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{9x + 73}{32}.$$

```
#построение точки с координатами (-1, 2)
plt.plot([-1],[2], "ro")
#построение хорды
y1 = (9*x+73)/(32)
plt.plot(x,y1)
plt.show()
```

Результат работы программного кода приведен на рис. 1.8.

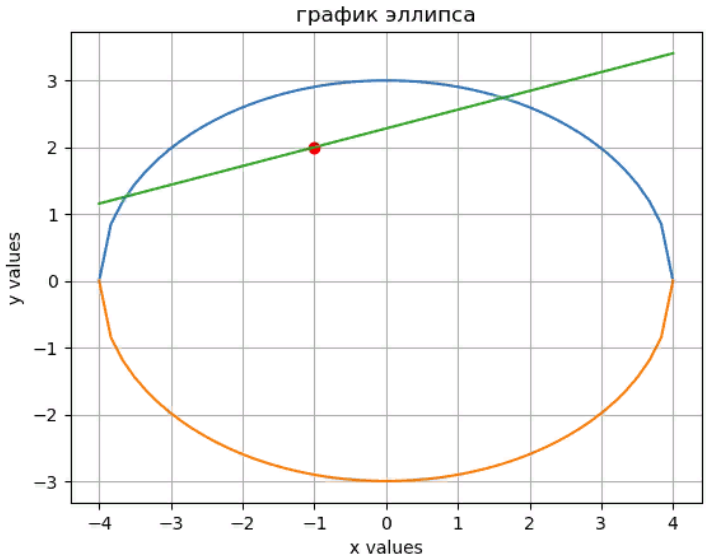

Рис. 1.8. К задаче 1.2.4. Эллипс, хорда и заданная точка

Задача 1.2.5.
Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x+y-1=0$ и $x-y+1=0$ суть соответственно большая и малая оси и длины полуосей которого $a=2$, $b=1$ (условие задачи взято из [5]).

Аналитическое решение задачи 1.2.5.
Примем оси эллипса за оси новой прямоугольной системы координат $O'x'y'$. Пусть большая полуось идет по прямой $y\,'=\ 0$, общее уравнение которой в исходной ДПСК (декартовой прямоугольной системе координат) имеет вид $x+y-1=0$. А малая — по прямой $x'=0$, общее уравнение которой в исходной ДПСК имеет вид $x-y+1=0$. Для каждой точки $M(x',y')$, принадлежащей эллипсу, ее координаты будут: x' — расстояние от точки M в системе Oxy до прямой $x-y+1=0$, y' — расстояние от точки M в системе Oxy до прямой $x+y-1=0$ (см. рис. 1.9):

$$x'=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}},\quad y'=\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}.$$

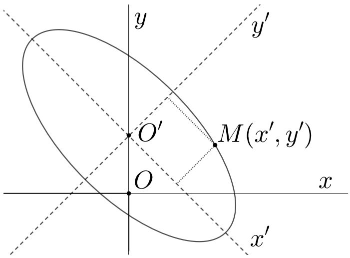

Рис. 1.9. К задаче 1.2.5

Каноническое уравнение эллипса в новых координатах:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Возвращаясь к координатам x, y, получим уравнение:

$$\frac{(x - y + 1)^2}{8} + \frac{(x + y - 1)^2}{2} = 1.$$

Раскрывая квадраты и упрощая, запишем:

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 6x - 10y - 3 = 0.$$

Ответ. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 6x - 10y - 3 = 0$.

Решение задачи 1.2.5 с использованием Python. Приведем код программы для построения на экране двух эллипсов, один из которых повернут относительно другого на 45 градусов. Обратите внимание, что в данной задаче мы не будем выражать y через x из канонического уравнения, а используем параметрическое уравнение эллипса (см.(1.10)). Все комментарии к построению даны в коде программы.

```
# В этой програме мы используем известный пакет
# pyplot url:
# https://matplotlib.org/stable/tutorials/pyplot.html
# и математические библиотеки pi, cos ,sin
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from math import pi, cos, sin
u = 0. #x - позиция центра
v = 1.0 #y - позиция центра
a = 2. #радиус по оси x
b = 1. #радиус по оси y
t_rot = -pi/4 #угол поворота
```

```
#формируем массив из 100 точек для гладкой кривой
t = np.linspace(0, 2*pi, 100)
#вычисляем координаты точек
#для сформированного массива значений
Ell = np.array([a*np.cos(t) , b*np.sin(t)])
#u,v совпадают для обоих эллипсов
R_rot = np.array([[cos(t_rot) , -sin(t_rot)],
[sin(t_rot) , cos(t_rot)]])
#формируем значения для повернутого эллипса
Ell_rot = np.zeros((2, Ell.shape[1]))
for i in range(Ell.shape[1]):
    Ell_rot[:,i] = np.dot(R_rot, Ell[:,i])
#исходный эллипс
plt.plot(u+Ell[0,:] , v+Ell[1,:] )
#эллипс повернутый на pi/4
plt.plot(u+Ell_rot[0,:] , v+Ell_rot[1,:], "darkorange")
#выводим сетку
plt.grid(color="lightgray", linestyle="--")
#построим касательные
xa = np.sqrt((a**2*np.cos(t_rot)**2)+
(b**2*np.sin(t_rot)**2))
ya = np.sqrt((a**2*np.sin(t_rot)**2)+
(b**2*np.cos(t_rot)**2))
#выведем таблицу в центре рисунка
#значения для касательных повернутого эллипса
#points
plt.scatter(u,v,s=10,color="black")
#bounding box lines
plt.axhline(y=ya+v,color="r",label=str(ya+v))
plt.axhline(y=-ya+v,color="b",label=str(-ya+v))
plt.axvline(x=xa+u, color="g",label=str(xa+u))
plt.axvline(x=-xa+u, color="y",label=str(-xa+u))
plt.legend()
plt.show() #выводим графику
```

Результат работы программного кода приведен на рис. 1.10.

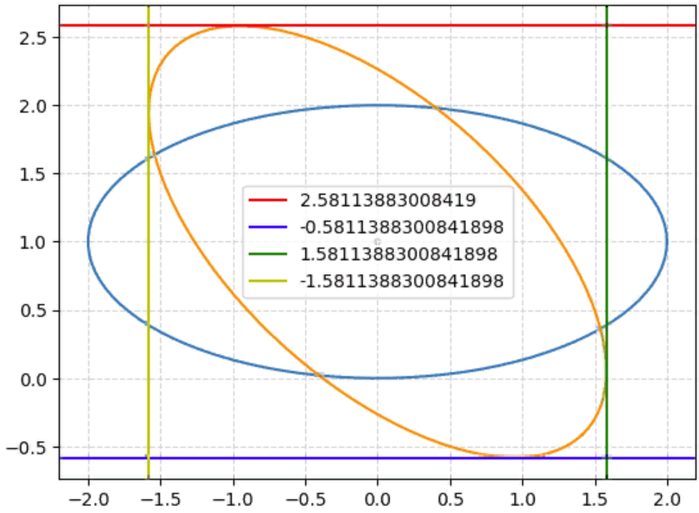

Рис. 1.10. К задаче 1.2.5. Поворот эллипса на угол $\pi/4$

1.3 Учебные задания для самостоятельной работы

Задача 1.3.1.

а) Для заданного эллипса найти фокусы F_1, F_2 и соответствующие им директрисы:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

б) Написать программу для построения графика заданного эллипса, его фокусов и директрис.

Рекомендация к решению задачи 1.3.1.

а) Обратить внимание, что $b > a$, т.е. фокусы будут лежать на оси Oy, а не на оси Ox. Тогда директрисы будут перпендикулярны оси Oy.

б) См. код к решению задачи 1.2.1.

Ответ. а) $F_1(0, -4)$, $F_2(0, 4)$, $d_1 : y = -5$, $d_2 : y = 5$.

Задача 1.3.2.

а) Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, касающегося осей Ox и Oy соответственно в точках $(7,0)$ и $(0,-2)$.

б) Написать программу для построения графика эллипса, полученного в ходе решения задачи, его центра, осей координат Ox и Oy, точек касания эллипса с осями координат.

Рекомендация к решению задачи 1.3.2.

а) Определив координаты центра эллипса, найти длины большой и малой полуосей.

б) См. код к решению задачи 1.2.2.

Ответ. а) $\dfrac{(x-7)^2}{49}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$.

Задача 1.3.3.

а) Написать уравнение эллипса, с вершинами в точках $(0,6)$ и $(0,-2)$, зная, что на оси Ox этот эллипс высекает хорду длины 6.

б) Написать программу для построения графика эллипса, его центра, вершин, осей координат Ox и Oy, точек пересечения эллипса с осями координат.

Рекомендация к решению задачи 1.3.3.

а) Решение аналогично решению задачи 1.2.2: определить координаты центра эллипса; длину его полуоси; используя точку, принадлежащую эллипсу, найти длину другой полуоси.

б) См. код к решению задачи 1.2.2.

Ответ. а) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$.

Задача 1.3.4.

а) Написать уравнение эллипса, описанного около равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $(1,0)$, $(-1,0)$ и совпадают с вершинами эллипса, принадлежащими одной оси.

б) Написать программу для построения графика эллипса и отрезков, содержащих стороны треугольника.

Рекомендация к решению задачи 1.3.4.

а) Учитывая, что треугольник равносторонний, найти координаты его третьей вершины и определить длины полуосей эллипса.

б) См. код к задаче 1.2.4.

Ответ. а) $x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Задача 1.3.5.

а) Найти эксцентриситет эллипса, зная, что стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы эллипса (условие задачи взято из [5]).

б) Задать произвольно большую полуось эллипса. Используя найденный эксцентриситет, вычислить остальные характеристики кривой. Написать программу для построения полученного эллипса и вписанного в него квадрата. Поэкспериментировать с разными значениями для большой полуоси.

Рекомендация к решению задачи 1.3.5.

а) Используя условие, выразить координаты точек, принадлежащих эллипсу, через расстояние c от центра эллипса до фокуса. Записать систему уравнений, связывающих длины полуосей a и b с расстоянием c, и решить ее относительно $\dfrac{c}{a}$, тем самым найдя эксцентриситет (см. аналогичный прием в задаче 1.2.3).

б) См. код к задаче 1.2.3.

Ответ. а) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

§2. Гипербола

2.1 Справочные сведения

Приведем справочные сведения о гиперболе и ее основных характеристиках.

Гиперболой называют геометрическое место точек M, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых фокусами, есть постоянная величина $2a$, причем она меньше чем расстояние $2c$ между фокусами, и она не равна нулю (см. рис. 2.1). Таким образом, для гиперболы имеем:

$$|d(F_1, M) - d(F_2, M)| = 2a, \quad d(F_1F_2) = 2c, \quad 2a < 2c. \tag{2.1}$$

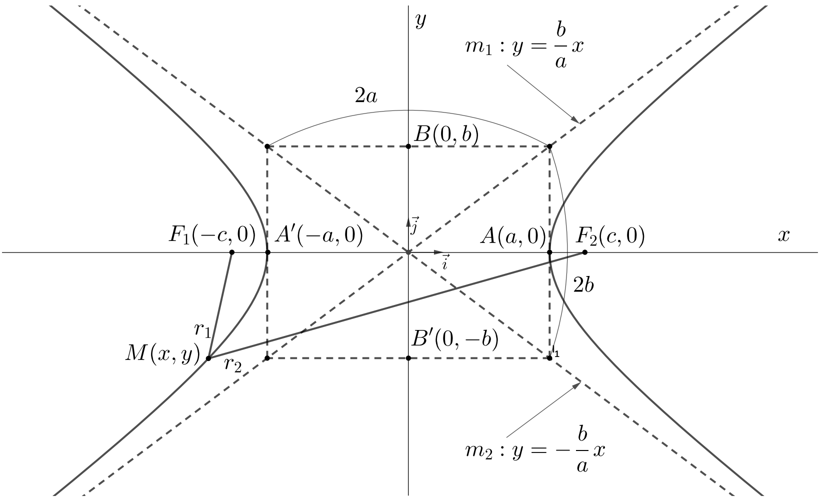

Рис. 2.1. Гипербола, вершины, фокусы и асимптоты гиперболы, фокальные радиусы точки на гиперболе

Делая замену

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{2.2}$$

получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.3}$$

Точки A и A' называются вершинами гиперболы, длина отрезка $|OA| = a$ — действительная полуось гиперболы, $|OB| = b$ — мнимая полуось гиперболы ($2a$ и $2b$ — действительная и мнимая оси). Прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы (см. рис. 2.1).

Уравнения асимптот гиперболы (прямых m_1 и m_2 на рис. 2.1) имеют вид:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \tag{2.4}$$

Эксцентриситет гиперболы характеризует форму основного прямоугольника гиперболы, и равен:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1. \tag{2.5}$$

Отрезки, соединяющие любую точку гиперболы с его фокусами, называются фокальными радиусами гиперболы (см. рис. 2.1). Их длины равны: для правой ветви

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x, \tag{2.6}$$

для левой ветви

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{2.7}$$

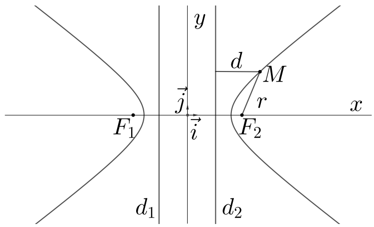

Рис. 2.2. Директрисы гиперболы

Уравнения директрис гиперболы (см. рис. 2.2):

$$d_1 : \; x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 : \; x = \frac{a}{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Помимо стандартной гиперболы, существует еще два канонических вида задания линий гиперболического типа.

- Сопряженная гипербола (рис. 2.3)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{2.9}$$

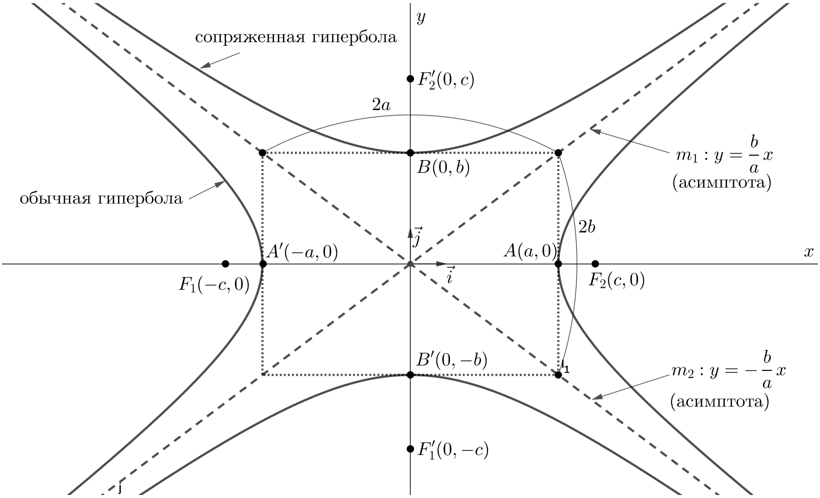

Рис. 2.3. Гипербола, сопряженная к ней гипербола и их общие асимптоты

- Вырожденная гипербола (или две пересекающиеся прямые)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{2.10}$$

Через точку плоскости проходит один и только один эллипс с заданными фокусами и одна и только одна гипербола с теми же фокусами F_1 и F_2. Такие эллипс и гипербола называются софокусными.

Параметрические уравнения гиперболы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right), \\ y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right), \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty, \quad t \neq 0. \tag{2.11}$$

2.2 Учебные задания для аудиторной работы

Задача 2.2.1.
Для заданной гиперболы найти фокусы F_1, F_2 и соответствующие им директрисы:
$$y^2 - 3x^2 - 12 = 0.$$

Аналитическое решение задачи 2.2.1.
Приведем уравнение заданной гиперболы к каноническому виду, перенеся 12 в правую часть уравнения и разделив обе части уравнения на 12:

$$y^2 - 3x^2 = 12 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = -1. \qquad (2.12)$$

Полученная гипербола является сопряженной для гиперболы

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Ее фокусы расположены на оси Oy, при этом мнимая полуось равна $a = 2$, вещественная полуось равна $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Найдем c и координаты фокусов F_1, F_2

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \;\Rightarrow\; F_1(0,-4),\; F_2(0,4).$$

Тогда эксцентриситет ε, учитывая что фокусы расположены на оси Oy, равен:
$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Директрисы перпендикулярны прямой, которая проходит через фокусы, и расположены симметрично по отношении к центру гиперболы на расстоянии b/ε, следовательно уравнения директрис имеют вид:
$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; y = \pm 3. \qquad (2.13)$$

Ответ. Фокусы: $F_1(0,4)$, $F_2(0,-4)$. Директрисы: $d_1 : y = -3$, $d_2 : y = 3$.

Решение задачи 2.2.1 с использованием Python.

Подключаем библиотеки.

```
from IPython.display import display, Math, Latex
import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from astropy.table import QTable, Table, Column
```

Рассчитаем основные характеристики кривой. Для этого запишем уравнение заданной гиперболы в каноническом виде, как это было сделано в аналитическом решении (см. (2.12)). Таким образом, получим вещественную и мнимую полуоси. Выведем эти значения на экран. Кроме того, вычислим квадрат расстояния c от центра гиперболы до фокуса, используя формулу $c^2 = a^2 + b^2$.

```
A2 = 4
B2 = 12
a = math.sqrt(A2)
b = math.sqrt(B2)
print ("a**2 =",a**2)
print ("b**2 =",12)
c2 = a**2+b**2
print(c2)
```

На экране увидим следующее:

```
a**2 = 4.0
b**2 = 12
15.999999999999998
```

Откуда появляется погрешность? Она скрыта в алгоритмах вычисления. Мы, округлив результат с точностью до десятых, сделаем присвоение, что будет соответствовать аналитическим вычислениям и не повлияет на решение задачи.

```
C2 = 16
print("Квадрат C2 = ", C2)
c = math.sqrt(C2)
print("c = ", c)
```

```
Квадрат C2 = 16
c = 4.0
```

Теперь осталось лишь записать координаты фокусов и эксцентриситет.

```
#координаты точек фокуса
F1X = 0
F1Y = -math.sqrt(C2)
print('F1Y',F1Y)
F2X = 0
F2Y = math.sqrt(C2)
print('F2Y',F2Y)
#Эксцентриситет
e = math.sqrt(C2)/b
print("Эксцентриситет {:9.3f}".format(e))
```

```
F1Y -4.0
F2Y 4.0
Эксцентриситет 1.155
```

Для расчета коэффициентов в уравнениях директрис используем формулу (2.13).

```
print("b=", math.sqrt(12))
print("e=", e)
D1Y = -b/e
print("Директриса d1: y = {:9.0f}".format(D1Y))
D2Y = b/e
print("Директриса d2: y ={:9.0f}".format(D2Y))
```

На экране увидим:

```
b = 3.4641016151377544
e = 1.1547005383792517
Директриса d1: y = -3
Директриса d2: y = 3
```

Сделаем график гиперболы. используя все описанные выше вычисления.

```
x = np.linspace(-20,20)
y = np.sqrt(3*(x)**2 +12)

plt.plot(x,y)
plt.plot(x,-y)
plt.xlabel("x values")
plt.ylabel("y values")
plt.title("График гиперболы")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Результат работы программного кода приведен на рис. 2.4. При необходимости можно вывести на экран таблицу с вычисленными координатами (x, y) точек гиперболы.

```
QTable([x,y])
print(x)
print(y)
```

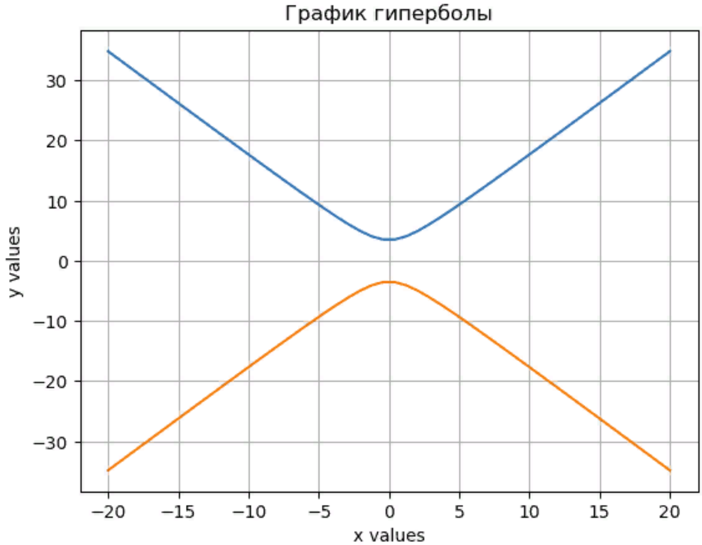

Рис. 2.4. К задаче 2.2.1. Гипербола

Задача 2.2.2.
Написать уравнение равносторонней гиперболы, одна из вершин которой находится в точке $(2,2)$, действительная ось параллельна оси Oy при условии, что на оси Ox гипербола высекает хорду длины 8 (условие задачи взято из [5]).

Аналитическое решение задачи 2.2.2.
Равносторонняя гипербола это гипербола, для которой равны действительная и мнимая полуоси $a = b$. Расстояние между вершинами гиперболы равно $2a$, одна из которых находится в точке $(2,2)$. Следовательно, центр гиперболы имеет координаты $(2, 2+a)$. Тогда, учитывая, что действительная ось параллельна оси Oy (сопряженная гипербола) уравнение будет иметь вид:

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-2-a)^2}{a^2} = -1.$$

Учтем, что гипербола высекает хорду длины 8 на оси Ox, при этом середина хорды имеет абсциссу 2. Тогда гипербола пересекает ось Ox в точках $A(-2,0)$ и $B(6,0)$. Подставив координаты одной из найденных точек (например, A) в уравнение гиперболы найдем ее полуоси:

$$-\frac{16}{a^2} + \frac{(a+2)^2}{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; -12 + 4a + a^2 = a^2 \;\Rightarrow\; a = 3.$$

Тогда уравнение гиперболы:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{9} = -1 \;\Rightarrow \tag{2.14}$$

$$x^2 - 4x - y^2 + 10y - 12 = 0.$$

Ответ. $x^2 - 4x - y^2 + 10y - 12 = 0$.

Решение задачи 2.2.2 с использованием Python. В аналитическом решении была получена равносторонняя гипербола (2.14) с центром в точке $O(2,5)$ и полуосями $a = b = 3$. Приведем код программы для построения на экране этой гиперболы, осей координат и соответствующих точек пересечения с осями координат. Краткие комментарии даны напрямую в коде. Результат работы программного кода приведен на рис. 2.5.

```
#подключаем библиотеки
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from astropy.table import QTable, Table, Column

#задаем константы и координаты точек для графика
a = 3 #вещественная полуось
b = 3 #мнимая полуось
x = np.linspace(-6,9)
#выражаем y через x из канонического уравнения
y1 = 5+b*np.sqrt(1+(x-2)*(x-2)/(a*a))
y2 = 5-b*np.sqrt(1+(x-2)*(x-2)/(a*a))

plt.plot(x,y2)
plt.plot(x,y1)
plt.xlabel("x values")
```

```
plt.ylabel("y values")
plt.title('график гиперболы')
plt.grid(True)

#построение точек
plt.plot([2],[2], "ro")
plt.plot([-2],[0], "ro")
plt.plot([6],[0], "ro")
#построение осей
plt.axvline(x=0, color='b',
label='axvline - full height')
plt.axhline(y=1,  color='b',
label='axvline - full height')
plt.show()
```

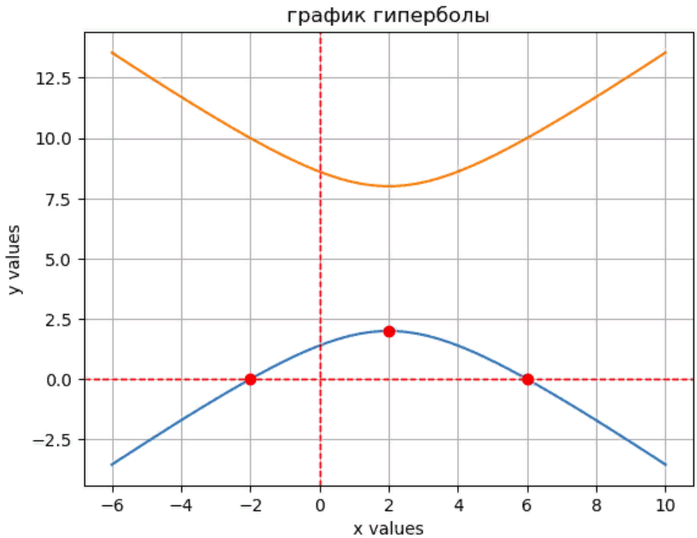

Рис. 2.5. К задаче 2.2.2. Гипербола, одна из ее вершин и точки пересечения с осью Ox

Задача 2.2.3.
Зная эксцентриситет ε эллипса, найти эксцентриситет ε' гиперболы, имеющей с этим эллипсом общие фокальные хорды, т.е. хорды, проходящие через фокусы и перпендикулярные к фокальной оси (условие задачи взято из [5]).

Аналитическое решение задачи 2.2.3.
Для эллипса запишем следующие обозначения: большая полуось a, эксцентриситет ε, расстояние от центра до фокуса c. Для гиперболы: вещественная полуось a', эксцентриситет ε', расстояние от центра до фокуса c'.

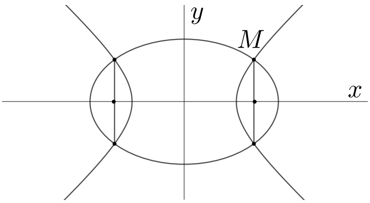

Рис. 2.6. К задаче 2.2.3

Поскольку эллипс и гипербола имеют общие фокальные хорды (см. рис. 2.6), они имеют фокусы в одних и тех же точках, а значит:

$$c = c', \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon' = \frac{c}{a'}.$$

Пусть точка M лежит на эллипсе и на гиперболе (например, в первой четверти). Расстояния от M до фокусов эллипса равны:

$$r_1 = a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Расстояния от M до фокусов гиперболы (см. (2.6)):

$$r_1' = a' + \varepsilon' x,$$
$$r_2' = -a' + \varepsilon' x.$$

Точка M лежит на фокальной хорде и эллипса, и гиперболы, поэтому

$$r_1 = r_1', \, r_2 = r_2', \, x = c.$$

Тогда

$$\begin{cases} a' + \varepsilon' c = a + \varepsilon c, \\ -a' + \varepsilon' c = a - \varepsilon c. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим $2\varepsilon' c = 2a$. Следовательно,

$$\varepsilon' = \frac{a}{c} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ответ. $\varepsilon' = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Решение задачи 2.2.3 с использованием Python. Приведем код программы для построения на экране эллипса и гиперболы, которые имеют общие фокальные хорды. Зададим произвольным образом большую и малую полуоси эллипса. Вычислим соответвующие характеристики гиперболы.

Подключим необходимые библиотеки.

```
import numpy as np
import math
from matplotlib import pyplot as plt
from astropy.table import QTable, Table, Column
```

Каноническое уравнения эллипса имеет вид (1.3). Для эллипса зададим произвольно большую полуось a и малую полуось b, вычислим расстояние c по формуле (1.2) и эксцентриситет по формуле (1.4). Выведем все на экран.

```
#Эллипс
a = 5 #большая полуось
b = 3 #малая полуось
c = math.sqrt(a*a-b*b)
e = c/a #эксцентриситет
print("Характеристики эллипса")
print("a ={:9.3f}".format(a))
print("b ={:9.3f}".format(b))
print("c ={:9.3f}".format(c))
print("e ={:9.3f}".format(e))
```

```
Характеристики эллипса
a = 5.000
b = 3.000
c = 4.000
e = 0.800
```

Вычислим эксцентриситет гиперболы, имеющей общие фокальные хорды с эллипсом: $\varepsilon' = 1/\varepsilon$ (см. аналитическое решение задачи 2.2.3). Расстояния c для гиперболы и для эллипса совпадают. Зная ε' и c, вычислим действительную и мнимую полуоси по формулам (2.5), (2.2).

```
#Гипербола
ee = 1/e #эксцентриситет гиперболы
aa = c/ee #действительная полуось
bb = math.sqrt(c*c-aa*aa) #мнимая полуось
print("Характеристики гиперболы")
print("a ={:9.3f}".format(aa))
print("b ={:9.3f}".format(bb))
print("c ={:9.3f}".format(c))
print("e ={:9.3f}".format(ee))
```

```
Характеристики гиперболы
a = 3.200
b = 2.400
c = 4.000
e = 1.250
```

В канонических уравнениях обеих кривых выразим y через x и сформируем массивы данных для построения графика. Добавим на график фокусы и фокальные хорды (общие для эллипса и гиперболы).

```
#Эллипс
x1=np.linspace(-5,5)
y1=b*np.sqrt(1-(x1*x1)/(a*a))
plt.plot(x1,y1)
plt.plot(x1,-y1)

#Гипербола
#левая ветвь
x2 = np.linspace(-6,-aa)
y2 = bb*np.sqrt((x2*x2)/(aa*aa)-1)
plt.plot(x2,y2)
plt.plot(x2,-y2)
#правая ветвь
x3 = np.linspace(aa,6)
y3 = bb*np.sqrt((x3*x3)/(aa*aa)-1)
plt.plot(x3,y3)
plt.plot(x3,-y3)

#построение фокусов
plt.plot([-c],[0], "ro")
plt.plot([c],[0], "ro")

#построение вертикальных фокальных хорд
plt.plot((c, c), (-9/5, 9/5), color='b')
plt.plot((-c, -c), (-9/5, 9/5),color='b')

plt.grid(True)
plt.show()
```

Результат работы программного кода приведен на рис. 2.7.

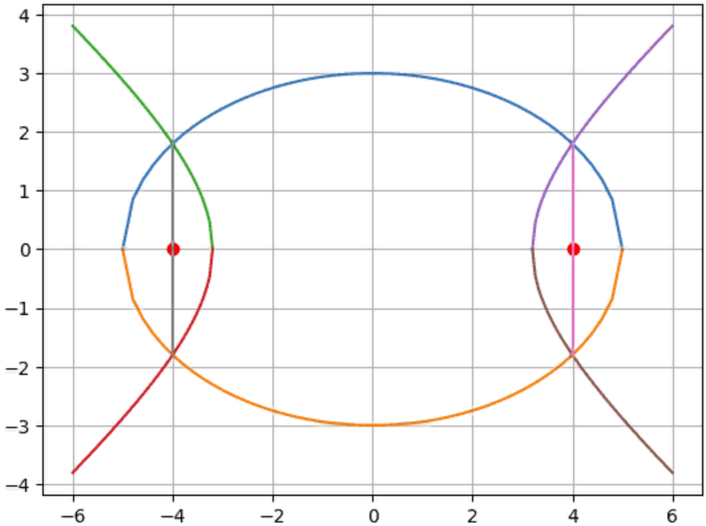

Рис. 2.7. К задаче 2.2.3. Эллипс и гипебола с общими фокальными хордами

Задача 2.2.4.
Написать уравнение гиперболы, зная ее ось $2x - y + 2 = 0$, асимптоту $y = 0$ и точку $(1, 1)$ (условие задачи взято из [5]).

Аналитическое решение задачи 2.2.4.
Найдем центр гиперболы как точку пересечения ее асимптоты и оси. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получим точку $O'(-1, 0)$.

Пусть ось x' гиперболы направлена по прямой $2x - y + 2 = 0$, тогда ось y' будет направлена по прямой, перпендикулярной x' и проходит через точку O'. Таким образом, уравнение оси y' будет иметь вид: $x + 2y + 1 = 0$ (см. задачи на прямые в [7]).

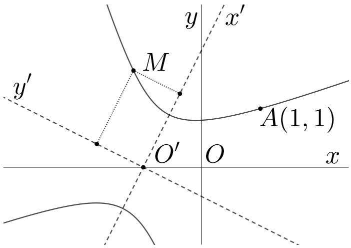

Рис. 2.8. К задаче 2.2.4

Запишем каноническое уравнение гиперболы в системе координат $O'x'y'$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Для каждой точки $M(x', y')$, принадлежащей гиперболе, ее координаты будут: x' — расстояние от точки M в системе Oxy до прямой $x + 2y + 1 = 0$, y' — расстояние от точки M в системе Oxy до прямой $2x - y + 2 = 0$ (см. рис. 2.8):

$$x' = \frac{|x + 2y + 1|}{\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{|2x - y + 2|}{\sqrt{5}}.$$

Тогда уравнение гиперболы в старых координатах примет вид:

$$\frac{(x + 2y + 1)^2}{5a^2} - \frac{(2x - y + 2)^2}{5b^2} = 1.$$

Учтем, что точка $A(1, 1)$ принадлежит гиперболе, значит, ее координаты удовлетворяют записанному уравнению:

$$\frac{(1 + 2 + 1)^2}{5a^2} - \frac{(2 - 1 + 2)^2}{5b^2} = 1.$$

Таким образом, полуоси гиперболы оказываются связаны равенством:

$$\frac{16}{5a^2} - \frac{9}{5b^2} = 1 \;\Rightarrow\; 16b^2 - 9a^2 - 5a^2b^2 = 0.$$

Уравнения асимптот в канонической системе координат имеют вид (см.(2.4)):

$$\frac{x'}{a} \pm \frac{y'}{b} = 0.$$

В нашем случае это будет асимптота с плюсом. Запишем ее уравнение в координатах x, y:

$$\frac{|x + 2y + 1|}{\sqrt{5}a} + \frac{|2x - y + 2|}{\sqrt{5}b} = 0$$

и возьмем точку, принадлежащую асимптоте, например, точку $(0,0)$ (так как асимптота это прямая $y=0$):

$$\frac{1}{\sqrt{5}a}+\frac{2}{\sqrt{5}b}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a}=-\frac{2}{b} \;\Rightarrow\; b=-2a.$$

В итоге, получим два уравнения для a и b:

$$\begin{cases} 16b^2-9a^2-5a^2b^2=0, \\ b=-2a. \end{cases} \;\Rightarrow\; b^2=4a^2=11.$$

Подставляем a^2 и b^2 в уравнение гиперболы:

$$\frac{(x+2y+1)^2}{55/4}-\frac{(2x-y+2)^2}{55}=1.$$

Упрощая и раскрывая квадраты, запишем уравнение гиперболы в виде:

$$4(x+2y+1)^2)-(2x-y+2)^2=55 \;\Rightarrow\; 3y^2+4xy+4y-11=0.$$

Ответ. $3y^2+4xy+4y-11=0$.

Решение задачи 2.2.4 с использованием Python. Приведем код программы для построения на экране двух гипербол, одна из которых повернута относительно другой на угол, полученный в аналитическом решении задачи. Из уравнений прямых, задающих оси гиперболы можно вычислить синус и косинус этого угла. Обратите внимание, что в данной задаче мы не будем выражать y через x из канонического уравнения, а используем параметрическое уравнение гиперболы (см.(2.11)). Все комментарии к построению даны в коде программы.

```
import math

import numpy as np

from matplotlib import pyplot as plt
from math import pi, cos, sin
```

```
u = -1.0 #x - позиция центра
v = 0 #y - позиция центра
a = math.sqrt(11)/2 #действительная полуось
b = math.sqrt(11) #мнимая полуось

#формируем массив из 100 точек для гладкой кривой
#правая ветвь гиперболы, t не равен 0
t = np.linspace(0.1, 10, 100)
Hyper = np.array([a*(t+1/t)/2, b*(t-1/t)/2])
#косинус и синус угла поворота
cos_t_rot = 1/math.sqrt(5)
sin_t_rot = 2/math.sqrt(5)
R_rot = np.array([[cos_t_rot, -sin_t_rot],
[sin_t_rot , cos_t_rot]])
#формируем значения для повернутой гиперболы
Hyper_rot = np.zeros((2, Hyper.shape[1]))
for i in range(Hyper.shape[1]):
    Hyper_rot[:,i] = np.dot(R_rot, Hyper[:,i])
#исходная гипербола
plt.plot(u+Hyper[0,:] , v+Hyper[1,:], "blue")
#гипербола после поворота на угол rot
plt.plot(u+Hyper_rot[0,:] , v+Hyper_rot[1,:], "orange")

#формируем массив из 100 точек для гладкой кривой
#левая ветвь гиперболы, t не равен 0
t = np.linspace(-10, -0.1, 100)
#вычисляем координаты точек
#для сформированного массива значений
Hyper = np.array([a*(t+1/t)/2, b*(t-1/t)/2])
#u,v совпадают для обеих гипербол
cos_t_rot = 1/math.sqrt(5)
sin_t_rot = 2/math.sqrt(5)
R_rot = np.array([[cos_t_rot, -sin_t_rot],
[sin_t_rot , cos_t_rot]])
#формируем значения для повернутой гиперболы
Hyper_rot = np.zeros((2, Hyper.shape[1]))
for i in range(Hyper.shape[1]):
    Hyper_rot[:,i] = np.dot(R_rot, Hyper[:,i])
```

```
#исходная гипербола
plt.plot(u+Hyper[0,:] , v+Hyper[1,:], "blue")
#гипербола после поворота на угол rot
plt.plot(u+Hyper_rot[0,:] , v+Hyper_rot[1,:], "orange")

#выводим сетку
plt.grid(color="lightgray", linestyle="--")
#Оси Ox и Oy
plt.axvline(x=0, color='g',
label='axvline - full height')
plt.axhline(y=0, color='g',
label='axvline - full height')

#выводим графику
plt.show()
```

Результат работы программного кода приведен на рис. 2.9.

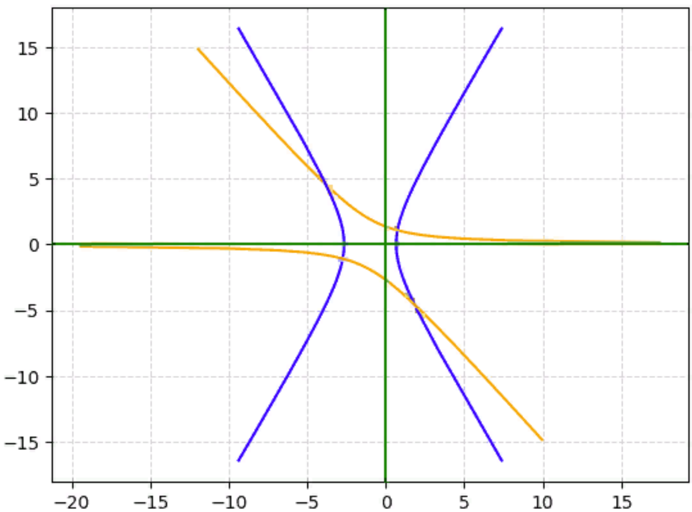

Рис. 2.9. К задаче 2.2.4. Поворот гиперболы на заданный угол

2.3 Учебные задания для самостоятельной работы

Задача 2.3.1.

а) Для заданной гиперболы найти фокусы F_1, F_2 и соответствующие им директрисы:

$$7x^2 - 9y^2 - 63 = 0.$$

б) Написать программу для построения графика заданной гиперболы, ее фокусов и директрис.

Рекомендация к решению задачи 2.3.1.

а) Привести уравнение гиперболы к каноническому виду (см. решение задачи 2.2.2), найдя действительную и мнимую полуоси. Записать координаты фокусов и уравнения директрис.

б) См. коды к решению задач 1.2.1, 2.2.1.

Ответ. а) $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$; $d_1 : x = \dfrac{9}{4}$, $d_2 := -\dfrac{9}{4}$.

Задача 2.3.2.

а) Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы (условие задачи взято из [5]).

б) Задать произвольно действительную полуось a равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$. Используя найденный эксцентриситет, вычислить остальные характеристики кривой. Написать программу для построения полученной гиперболы. Поэкспериментировать с разными значениями для действительной полуоси.

Рекомендация к решению задачи 2.3.2.

а) Учесть, что у равносторонней гиперболы длины действительной и мнимой полуосей равны, то есть $a = b$.

б) См. коды к решению задач 1.2.3, 2.2.1, 2.2.2.

Ответ. а) $\sqrt{2}$.

Задача 2.3.3.

а) Дан эллипс

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Написать уравнение гиперболы, имеющей с этим эллипсом общие фокальные хорды.

б) Написать программу для построения на одном графике — эллипса, гиперболы, общих фокусов и фокальных хорд заданных кривых.

Рекомендация к решению задачи 2.3.3.

а) Использовать решение задачи 2.2.3. Найти параметры заданного эллипса a, b, c. Вычислить его эксцентриситет ε и найти эксцентриситет искомой гиперболы ε'. Зная c для эллипса, совпадающее с c' для гиперболы (по условию $c{=}c'$), найти параметры a', b' гиперболы и записать ее уравнение.

б) См. код к решению задачи 2.2.3.

Ответ. а) $\dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{27} = 1$.

Задача 2.3.4.

а) Написать уравнения гиперболы и эллипса с фокусами $(7, 0)$ и $(-7, 0)$, проходящих через точку $(-2, 12)$.

б) Написать программу для построения графиков эллипса, гиперболы и их общих фокусов.

Рекомендация к решению задачи 2.3.4.

а) Обратить внимание, что в данной задаче гипербола и эллипс не имеют общих фокальных хорд, только общие фокусы.

б) См. код к решению задачи 2.2.3.

Ответ. $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{48} = 1$, $\dfrac{x^2}{196} + \dfrac{y^2}{147} = 1$.

Задача 2.3.5.

а) Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1, 0)$, асимптотами которой являются прямые $x = 0$ и $y = 1$ (условие задачи взято из [5]).

б) Написать программу для построения на одном графике двух гипербол, одна из которых получена из другой поворотом на угол, соответствующий условию задачи.

Рекомендация к решению задачи 2.3.5.

а) См. решение задачи 2.2.5.

б) См. коды к решению задачи 1.2.5, 2.2.4.

Ответ. а) $xy - x + 1 = 0$.

§3. Парабола

3.1 Справочные сведения

Приведем справочные сведения о параболе и ее основных характеристиках.

Параболой называют геометрическое место точек M, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки F, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой $\mathbf{d}$, называемой директрисой. Таким образом, для параболы имеем:

$$d(F, M) = d(\mathbf{d}, M). \tag{3.1}$$

Расстояние от точки F до директрисы $\mathbf{d}$ равно p (фокальный параметр). Тогда каноническое уравнение параболы записывается в виде:

$$y^2 = 2px. \tag{3.2}$$

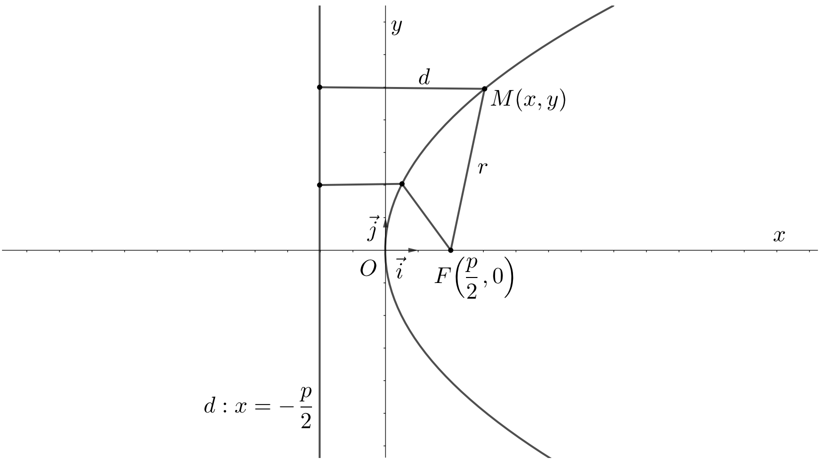

Рис. 3.1. Парабола, фокус и директриса параболы

Уравнение директрисы параболы (см. рис. 3.1):

$$d: \ x = -\frac{p}{2}. \tag{3.3}$$

Помимо уравнения параболы, приведенной в формуле (3.2), существует еще три канонических задания параболы (см. рис. 3.2).

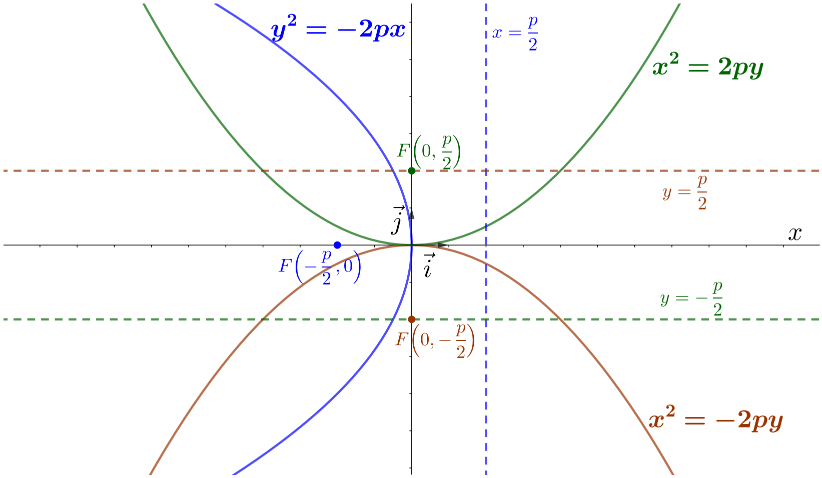

Рис. 3.2. Три дополнительных варианта задания параболы

- Парабола расположена в левой полуплоскости ДПСК

$$y^2 = -2px. \tag{3.4}$$

- Парабола расположена в верхней полуплоскости ДПСК

$$x^2 = 2py. \tag{3.5}$$

- Парабола расположена в нижней полуплоскости ДПСК

$$x^2 = -2py. \tag{3.6}$$

Обратите внимание, что во всех уравнениях (3.2), (3.4), (3.5), (3.6)

$$p > 0.$$

3.2 Учебные задания для аудиторной работы

Задача 3.2.1.
Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(4, -2)$, а ось параллельна оси Ox, зная, что на оси Oy эта парабола отсекает хорду длины 2.

Аналитическое решение задачи 3.2.1.
Запишем каноническое уравнение параболы с учетом заданных условий (см. рис. 3.3):

$$(y+2)^2 = -2p(x-4), \quad p > 0.$$

Длина хорды на оси Ox равна 2, а вершина параболы имеет ординату $y_0 = -2$. Следовательно, парабола пересекает ось Oy в точках $A(0, -1)$, $B(0, -3)$ (длина отрезка равна 2, а середина отрезка находится в точке с ординатой $y = -2$). Подставим в уравнение координаты одной из точек, например, точки A:

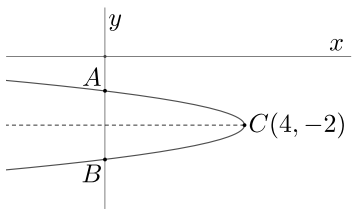

Рис. 3.3. К задаче 3.2.1

$$(-1+2)^2 = -2p(0-4),$$

получим значение параметра $p = 1/8$, тогда уравнение параболы имеет вид:

$$(y+2)^2 = -\frac{1}{4}(x-4) \;\Rightarrow 4y^2 + 16y + x + 12 = 0.$$

Ответ. $4y^2 + 16y + x + 12 = 0$.

Решение задачи 3.2.1 с использованием Python.
В аналитическом решении была получена парабола с вершиной в точке $C(4, -2)$ и осью, параллельной оси Ox. Выразим в уравнении x через y. И приведем код программы для построения на экране этой параболы и ее оси. Краткие комментарии даны напрямую в коде. Результат работы программного кода приведен на рис. 3.4.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

#генерируем массив чисел для координаты y
y = np.linspace(-6,2)
#рассчитываем координату x
x = -4*(y+2)**2+4
plt.plot(x,y) #строим график
plt.xlabel('x values')
plt.ylabel('y values')
plt.title('парабола')

#ось параболы y=-2
plt.axhline(y=-2, xmin=-50, xmax=2, color='b', ls='--')

#оси Ox и Oy
plt.axvline(x=0, color='g',
label='axvline - full height')
plt.axhline(y=0,  color='g',
label='axvline - full height')

plt.grid(True)
plt.show()
```

Задача 3.2.2.

Найти фокус и директрису кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{9}t^2 - 2, \\ y = t + 3, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Аналитическое решение задачи 3.2.2.

Исключим параметр t из системы уравнений, задающих данную кривую. Для этого, например, выразим t из второго уравнения и подставим в первое:

$$\begin{cases} x + 2 = \dfrac{2}{9}t^2, \\ t = y - 3. \end{cases} \Rightarrow \ (y-3)^2 = \frac{9}{2}(x+2).$$

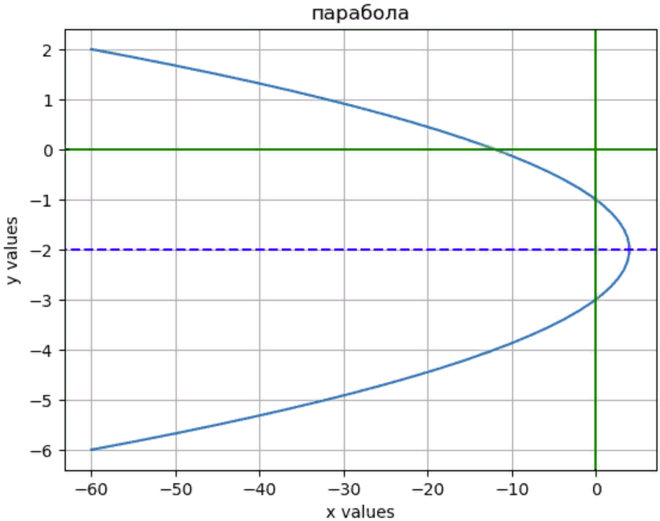

Рис. 3.4. К задаче 3.2.1. Оси коориат, парабола и ось параболы

Получим каноническое уравнение параболы (см. (3.2)), вершина которой находится в точке $(-2, 3)$. Тогда параметр p найдем из условия:

$$2p = \frac{9}{2} \;\Rightarrow\; p = \frac{9}{4}.$$

Следовательно (см. рис. 3.1), фокус имеет координаты $F\left(-2+\frac{9}{8}, 3\right)$ и директриса задается уравнением $x = -2 - \frac{9}{8}$.

Ответ. $(y-3)^2 = \frac{9}{2}(x+2)$, $F\left(-\frac{7}{8}, 3\right)$, $x = -\frac{25}{8}$.

Решение задачи 3.2.2 с использованием Python. Рассмотрим построение графика параболы с использованием ее параметрического уравнения (см. условие задачи). Краткие комментарии даны напрямую в коде. Результат работы программного кода приведен на рис. 3.5.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

#задаем параметр t от -6 до 6 , что может быть проще?
t = np.linspace(-6,6)
#рассчитываем координаты x и y
x = 2/9*t*t-2
y = t+3
#строим график
plt.plot(x,y)
plt.xlabel('x values')
plt.ylabel('y values')
plt.title('парабола')
plt.grid(True)
plt.show()
```

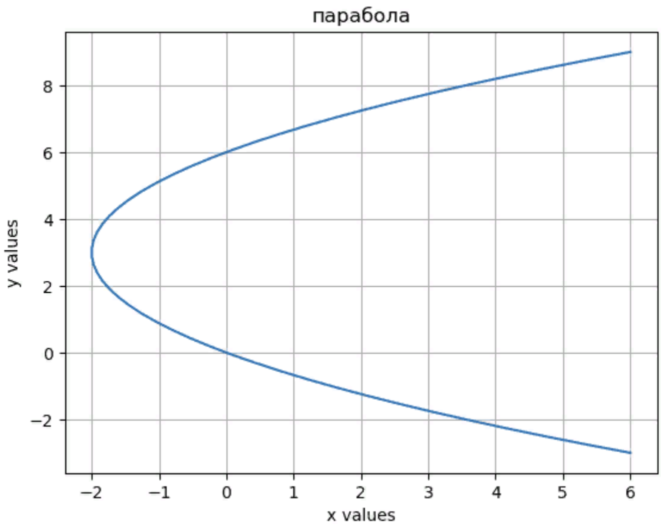

Рис. 3.5. К задаче 3.2.2. Парабола

3.3 Учебные задания для самостоятельной работы

Задача 3.3.1.
а) Найти фокус и директрису параболы

$$x^2 = -\frac{7}{3}y.$$

б) Написать программу для построения графика параболы, ее фокуса и директрисы.

Рекомендация к решению задачи 3.3.1.
а) Определить, какое из четырех канонических уравнений представляет данная парабола и какие координаты имеет ее вершина. Взять соответствующие координаты фокуса и уравнение директрисы (см. рис. 3.1 и рис. 3.2).
б) См. коды к решению задач 3.2.1, 1.2.1.

Ответ. а) Фокус $F\left(0, -\dfrac{7}{12}\right)$, директриса $y = \dfrac{7}{12}$.

Задача 3.3.2.
а) Написать уравнение параболы, фокус которой находится в точке $(0, 0)$, директриса имеет уравнение $x = -4$, зная, что парабола проходит через точку $(2, 4)$.
б) Написать программу для построения графика параболы. Изобразить на графике оси координат, фокус и директрису параболы, точку $(2, 4)$.

Рекомендация к решению задачи 3.3.2.
а) Зная координаты фокуса и уравнение директрисы, определить, как направлены ветви параболы и найти значение параметра p. Зная, что парабола проходит через точку $(2, 4)$, найти координаты вершины.
б) См. коды к решению задач 3.2.1, 3.2.2, 1.2.1.

Ответ. а) $x^2 = 4(y + 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Володина, Е.В.* Алгебра и геометрия: учеб. пособие / Е.В. Володина, И.И. Ильина. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. — 232 с.
2. *Давыденко, А.А.* Типы контрольных заданий для включения в контрольно-измерительные материалы: методические рекомендации для преподавателей. / А.А. Давыденко, Н.В. Распопова, Л.А. Свиркина — Санкт-Петербург: Изд-во ВВМ, 2019. — 28 с.
3. *Кузютин, В.Ф.* Геометрия: учебник для вузов / В.Ф. Кузютин, Н.А. Зенкевич, В.В. Еремеев — Санкт-Петебруг: Изд-во Лань, 2003. — 416 с.
4. *Моденов, П.С.* Аналитическая геометрия: учебник / П.С. Моденов — Москва: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1969. —384 с.
5. *Моденов, П.С.* Сборник задач по аналитической геометрии: сборник задач / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко — Москва: Изд-во Наука, 1976. — 348 с.
6. *Мэтиз, Э.* Изучаем Python: программирование игр, визуализация данных, веб-приложения: руководство по языку Python. / Эрик Метиз — Санкт-Петербург: Изд-во Питер, 2022. — 512 с.
7. *Распопова, Н.В.* Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат. Учебные материалы для практических занятий, самостоятельной работы, текущего контроля и промежуточной аттестации: учебно-методическое пособие / Н.В. Распопова, Л.А. Свиркина — Санкт-Петербург, Изд-во ВВМ, 2018. — 57 с.
8. *Свиркина, Л.А.* Приведение к каноническому виду линий и поверхностей второго порядка, заданных своими общими уравнениями относительно ДПСК (декартовой прямоугольной системы координат). Учебное пособие / Л.А. Свиркина — Санкт-Петербург: Изд-во Соло, 2013. — 65 с.
9. *Свиркина, Л.А.* Алгебраические кривые второго порядка. Учебные материалы для практических

занятий, самостоятельной работы, текущего контроля и промежуточной аттестации: учебно-методическое пособие / Л.А. Свиркина, Н.В. Распопова — Санкт-Петербург: Изд-во ВВМ, 2021. — 60 с.

10. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии: сборник задач / О.Н. Цубербиллер — Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2003. — 336 с.
11. Free Download Anaconda / anaconda.com: информационный портал [электронный ресурс] — режим доступа. — URL: `https://www.anaconda.com/download` (дата обращения: 15.12.2023)
12. JupyterLite / jupyter.org: информационный портал [электронный ресурс] — режим доступа. — URL: `https://jupyter.org/try-jupyter/lab/` (дата обращения: 15.12.2023)
13. Python для начинающих / pythonworld.ru: информационный портал [электронный ресурс] — режим доступа. — URL: `https://pythonworld.ru/samouchitel-python` (дата обращения: 15.12.2023)

Учебое издание

Распопова Наталья Викторовна
Свиркина Лариса Анатольевна
Пономарёв Алексей Александрович

Решение задач аналитической геометрии в Python. Алгебраические кривые второго порядка

ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО ВВМ»
VVM PUBLISHING LLC
+7–901–306–62–54
vvmpub@yandex.ru
vvmpub.ru

Подписано к печати 24.12.2023 Формат $60\times84\,{}^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитуры Century Schoolbook.
Печ. л. 3,72. Тираж 50 экз. Заказ 2199.

Отпечатано в Издательстве ВВМ
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41