Математическая физика

Научная статья
УДК 532.5: 532.591: 532.592.2
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.16408

ФУРЬЕ-АНАЛИЗ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. Г. Гневышев [1], Т. В. Белоненко [2] ✉

[1] Институт океанологии им. П. П. Ширшова, РАН, Москва, Россия;

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

✉ btvlisab@yandex.ru

Аннотация. В работе обсуждаются определение и основные свойства преобразования Фурье. На конкретных примерах показано, что с его помощью, а также через использование его свойств можно найти интегральные решения модельного неоднородного уравнения, нестационарной задачи Коши на неоднородном сдвиговом потоке и краевой задачи о трансформации внутренних волн в окрестности фокуса в неоднородной среде. Построенные интегралы Фурье опровергают широко распространенное утверждение, что Фурье-анализ непригоден для исследования неоднородных сред.

Ключевые слова: Фурье-анализ, преобразование Лапласа, задача Коши, волны, неоднородная среда

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Института океанологии РАН № FMWE-2021-0003 и при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 22-27-00004.

Для цитирования: Гневышев В. Г., Белоненко Т. В. Фурье-анализ в неоднородных средах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 4. С. 86–100. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.16408

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.16408

THE FOURIER ANALYSIS IN INHOMOGENEOUS MEDIA

V. G. Gnevyshev [1], T. V. Belonenko [2] ✉

[1] Shirshov Institute of Oceanology, RAS, Moscow, Russia;

[2] St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

✉ btvlisab@yandex.ru

Abstract. In the paper, the definition and basic properties of the Fourier transform (FT) are discussed. It has been shown with specific examples that integral solutions of the model inhomogeneous equation, the nonstationary Cauchy problem on an inhomogeneous shear flow, and the boundary value problem on the transformation of internal waves in the vicinity of the focus in the inhomogeneous medium can be found by FT and using its properties. The constructed Fourier integrals refuted the widely held claim that the Fourier analysis is unusable for the study of inhomogeneous media.

Keywords: Fourier analysis, Laplace transform, Cauchy problem, waves, inhomogeneous medium

Funding: The reported study was carried out within the framework of the of the State Assignment No. FMWE-2021-0003 of Shirshov Institute of Oceanology, RAS, and was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 22-27-00004).

For citation: Gnevyshev V. G., Belonenko T. V., The Fourier analysis in inhomogeneous media, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (4) (2023) 86–100. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.16408

Введение

Метод Фурье-преобразования дифференциального уравнения считается хотя и не единственным, но одним из наиболее эффективных методов решения краевых задач, когда в многомерной задаче происходит разделение переменных. Однако широко распространена ошибочная точка зрения о неприменимости Фурье-анализа для неоднородных сред. Например, в монографии Дж. Уизема [1, С. 365] говорится следующее (перевод с английского оригинала):

«Для неоднородной среды, или для нелинейных задач, где преобразование Фурье неприменимо...».

Аналогичное утверждение находим в книге Дж. Лайтхилла [2, С. 425] (тоже перевод):

«...необходимость использования разложения Фурье ограничивает нас *однородными* [курсив автора книги], системами, обычно описываемыми уравнениями с *постоянными* коэффициентами, так что каждая Фурье-компонента (синусоидальная волна постоянной амплитуды) по отдельности может быть решением уравнений движения».

Авторы этих и многих других монографий (см., например, работы [3, 4]) полагают, что использовать Фурье-анализ можно только в тех случаях, когда коэффициенты дифференциального уравнения постоянны и, наоборот, его нельзя применять, если эти коэффициенты не постоянны.

В данной работе мы доказываем, что Фурье-анализ можно применять в задачах, содержащих дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Более того, задача может быть двумерной и при этом с неразделяемыми переменными, однако Фурье-анализ все равно применим.

Таким образом, цель данной работы – расширить границы области применимости Фурье-анализа, распространив его подходы на задачи в неоднородных средах.

Определение и основные свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье определяется следующим образом.

Прямое:

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikx)\, \Phi(x)\, dx; \tag{1}$$

обратное:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+ikx)\, \varphi(k)\, dk. \tag{2}$$

Свойства преобразования Фурье можно найти, например, в монографии [1]. Они выводятся дифференцированием по параметру или путем интегрирования по частям (см, например, работу [5]). При этом считается, что функция $\Phi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Перечислим кратко те свойства преобразования, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Фурье-образ производной функции. Выведем это свойство путем интегрирования по частям формулы прямого преобразования Фурье (1):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikx) \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikx)\, \Phi(x)\, dx = ik\varphi(k). \tag{3}$$

Отметим, что этот же результат можно получить путем дифференцирования по x как по параметру с помощью формулы (2) обратного преобразования Фурье:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ikx)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx=\frac{(ik)^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ikx)\,\Phi(x)\,dx=-k^2\varphi(k). \quad (4)$$

Для краткости данное свойство преобразования Фурье можно записать следующим образом:

$$\Phi\to\varphi,\quad \Phi_x\to ik\varphi,\quad \Phi_{xx}\to -k^2\varphi. \quad (5)$$

Свойства (5) часто используются в задачах с постоянными коэффициентами для однородных сред.

Фурье-образ функции с линейным множителем. Для представления данного свойства сначала проинтегрируем по частям преобразование (2):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+ikx)\frac{\partial\varphi}{\partial k}dk=(-ix)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+ikx)\varphi(k)\,dk=(-ix)\Phi(x). \quad (6)$$

Идентичное выражение можно получить дифференцированием по параметру k соотношения (1). Умножим обе части выражения (6) на мнимую единицу и запишем его в следующем виде:

$$x\Phi\to i\varphi_k. \quad (7)$$

Фурье-образ второй производной с линейным множителем. Покажем это свойство, интегрируя по частям и дважды дифференцируя по параметру соотношение (2); тогда получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+ikx)\frac{\partial\left(k^2\varphi\right)}{\partial k}dk=(-ix)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(+ikx)k^2\varphi(k)\,dk=(ix)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad (8)$$

которую перепишем в виде

$$x\Phi_{xx}\to -i\left(k^2\varphi\right)_k. \quad (9)$$

Одномерные эталонные уравнения

Нахождение решения с помощью преобразования Фурье разбиваем на два этапа. На первом строим формальное решение дифференциального уравнения в Фурье-пространстве с помощью операторного анализа (см. предыдущий раздел). На втором этапе решаем вопрос об условиях, при которых сходится это формально построенное решение. Определяем контур интегрирования в комплексном пространстве и находим асимптотические выражения в каждом секторе [6, 7].

Пример 1. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение, возникающее при анализе волновых процессов в неоднородной плазме, а также при изучении неустойчивости в задаче Орра – Зоммерфельда [6], [8, уравнение (1.28), см. «Список литературы» на русском языке]:

$$\Phi_{yyyy}+\lambda^2\left(y\Phi_{yy}+\gamma\Phi\right)=0. \quad (10)$$

Построим формальное решение для этого примера. В Фурье-пространстве (будем обозначать Фурье-пространство как l) образ уравнения (10) имеет вид

$$l^4\varphi+\lambda^2\left[-i\left(l^2\varphi\right)_l+\gamma\varphi\right]=0. \quad (11)$$

Перепишем уравнение (11) в следующем виде:

$$\frac{1}{\lambda^2}l^2P-iP_l+\frac{\gamma}{l^2}P=0,\quad P=l^2\varphi. \quad (12)$$

Оно представляет собой однородное дифференциальное уравнение первого порядка (в математической литературе такие уравнения называют квадратурой (см., например, работу [9]).

Интегрируя уравнение (11), получаем следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{l^2}\exp\left(-i\frac{1}{3\lambda^2}l^3 + i\frac{\gamma}{l}\right). \tag{13}$$

Обратное преобразование Фурье дает такое решение:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{l^2}\exp\left(-i\frac{1}{3\lambda^2}l^3 + i\frac{\gamma}{l} + ily\right)dl. \tag{14}$$

Далее следует сделать замену переменой $t = il$, которая преобразует интеграл Фурье в интеграл Лапласа. Здесь важно отметить, что многие рассматривают преобразование Лапласа как частный случай преобразования Фурье (см., например, книгу [5, ф-лы (1.4.1), (1.4.2), «Список литературы» на русском языке]).

Для сходимости интегралов воспользуемся теоремой Коши об аналитической функции и заменим пределы интегрирования на некие контуры в комплексной плоскости. Возникающую при этом специфику обхождения полюса и выбор секторов, в которых проходит контур интегрирования, мы не рассматриваем в данной работе, так как эти вопросы подробно обсуждаются во многих монографиях, в частности в книге [12], где автор строит изложение, исходя из преобразования Лапласа, в отличие от соответствующего обсуждения в монографии [5].

Таким образом, мы получаем следующий интеграл, который в литературе принято называть интегралом Лапласа:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t^2}\exp\left(\frac{1}{3\lambda^2}t^3 - \frac{\gamma}{t} + ty\right)dt. \tag{15}$$

В книге [6] этот интеграл приводится без выкладок. В нашей работе мы показываем, как самостоятельно вывести это формальное решение, причем с помощью преобразования Фурье, а не Лапласа.

Пример 2. Рассмотрим уравнение, описывающее топографические волны на неоднородном континентальном шельфе на *f*-плоскости. В монографии [19] говорится, что решение данного неоднородного уравнения можно построить с помощью преобразования Лапласа, и предлагается читателю сделать это самостоятельно.

Мы же построим формальное решение при помощи преобразования Фурье и покажем тождественность подходов к преобразованиям и Фурье, и Лапласа. Рассмотрим уравнение

$$xF_{xx} + F_x + \left(\mu k - k^2 x\right)F = 0. \tag{16}$$

Введем безразмерную переменную $\chi = kx > 0$. Тогда уравнение (16) примет вид

$$\chi F_{\chi\chi} + F_\chi + \left(\mu k - \chi\right)F = 0. \tag{17}$$

В Фурье-пространстве по переменной χ (будем обозначать его как l) образ уравнения (17) имеет вид

$$-i\left(l^2\Phi\right)_l + il\Phi + \mu\Phi - i\Phi_l = 0. \tag{18}$$

Введем новую переменную $s = il$. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{\Phi_s}{\Phi} = \frac{\mu - s}{s^2 - 1} = \frac{\mu - 1}{2(s-1)} - \frac{\mu + 1}{2(s+1)}. \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (19) и выполняя обратное преобразование Фурье, получаем следующий формальный интеграл:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int_C \frac{(s-1)^{(\mu-1)/2}}{(s+1)^{(\mu+1)/2}}\exp(skx)\,ds. \tag{20}$$

Построенный здесь интеграл с точностью до множителя совпадает с формулой (25.20) в монографии [19], где также можно найти анализ интеграла (20) с выбором контуров интегрирования.

Итоги раздела «Одномерные эталонные уравнения». Следуя подходу, изложенному в монографии [5], можно сделать замену переменной, и тогда свойства преобразования Фурье перейдут в свойства преобразования Лапласа. Таким образом, согласно утверждению, сделанному в работе [5], преобразование Фурье – это некое базовое преобразование, из которого следуют остальные преобразования, например типа Лапласа и Меллина. Аналогичного подхода придерживаются авторы монографии [9], которые построили фундаментальные решения оператора теплопроводности, операторов Лапласа и Гельмгольца, а также волнового оператора через преобразование Фурье.

Таким образом, в одномерных неоднородных средах не существует принципиальной разницы между Фурье-анализом и преобразованием Лапласа. Можно считать, что решение построено через преобразование Лапласа, но можно также и утверждать, что решение выводится через преобразование Фурье и теорему Коши. Следуя в дальнейшем работе [5], мы будем придерживаться второго подхода.

Нестационарная задача Коши для волн Россби на зональном течении

В качестве первого примера двумерного преобразования Фурье в неоднородных средах рассмотрим нестационарную задачу Коши для волн Россби. Эту задачу решил Т. Ямагата в 1976 году с применением конвективных координат [20]. Конвективные координаты являются распространенным способом для оператора типа $\partial t + U(y)\,\partial x$; для случая линейного профиля скорости $U(y) = U_y y$ конвективные координаты переводят неоднородное дифференциальное уравнение в однородное, а затем применяется преобразование Фурье по пространственным конвективным координатам (двумерное преобразование). Далее получается нестационарное дифференциальное уравнение по t.

Принципиально важно, что нет смысла делать и преобразование Лапласа по переменной t, как это принято в некоторых математических школах (см., например, работу [15]). Проще решить дифференциальное уравнение по t в явной форме, чем делать дополнительное преобразование. Решив дифференциальное уравнение по t и взяв обратное преобразование Фурье по конвективным координатам, можно совершить переход от конвективных переменных к обычным и получить решение в виде двумерного преобразования Фурье.

Далее мы можем найти решение неоднородного дифференциального уравнения и, повторив выкладки, получить решение Ямагаты, однако у нас другая идея. Мы не будем переходить к конвективным координатам с целью избавиться от неоднородности дифференциального уравнения, чтобы затем выполнить преобразование Фурье. Мы сразу применим преобразование Фурье для неоднородного дифференциального уравнения, используя его свойства. Таким образом, с одной стороны, мы значительно сократим количество операций, а с другой – мы придем к известному результату и подтвердим правильность математических выкладок. Продемонстрируем этот подход на решенной выше задаче, однако решим ее новым, более коротким способом, который позволяет сразу найти Фурье-образ неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 3. Линейная задача Коши для баротропных бездивергентных волн Россби на зональном сдвиговом потоке рассмотрена в работе [20], а ее обобщение на случай дивергентных волн – в работе [18]:

$$\left(\partial_t + U_y\, y\, \partial_x\right)\left(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}\right) + \beta\, \Psi_x = 0, \tag{21}$$

где Ψ – функция тока; β – классический параметр, $\beta = \dfrac{df}{dy}$ ($f = 2\Omega\sin\varphi$, Ω – угловая скорость вращения Земли, φ – широта); ось x направлена на восток, ось y – на север.

Пусть имеется неоднородное сдвиговое зональное течение $U(y) = U_y y$, где $U_y = \text{const}$. Выполним двумерное преобразование Фурье для неоднородного дифференциального уравнения (22) по двум пространственным переменным x и y (не переходя к конвективным переменным):

$$\Psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k, l, t)\exp\left[+i(kx + ly)\right] dk\, dl. \tag{22}$$

Тогда уравнение (21) в Фурье-пространстве принимает вид

$$\left[\left(-k^2-l^2\right)\varphi\right]_t - U_y k\left[\left(-k^2-l^2\right)\varphi\right]_l + i\beta k\,\varphi = 0, \tag{23}$$

где нижние индексы обозначают частные производные.

Данное уравнение однородно, содержит только первые частные производные и легко решается.

Перепишем уравнение (23) в следующем виде:

$$P_t - U_y k P_l - \frac{i\beta k}{k^2+l^2}P = 0, \quad P \equiv \left(k^2+l^2\right)\varphi. \tag{24}$$

Сделав замену переменных ($\tau = t$, $l' = l + kU_y t$), получаем следующее уравнение:

$$P_\tau - \frac{i\beta kP}{k^2+\left(l'-kU_y\tau\right)^2} = 0. \tag{25}$$

Уравнение (25) можно проинтегрировать явно (экспонента от арктангенса), и тогда окончательное решение имеет вид двойного интеграла Фурье:

$$\begin{gathered}\Psi\left(x,y,t\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1\left(k,l\right)\frac{k^2+l^2}{k^2-\left(l-kU_y t\right)^2}\times \\ \times\exp\left\{i\frac{\beta}{kU_y}\left[\arctan\left(\frac{l}{k}\right)-\arctan\left(\frac{l}{k}-U_y t\right)\right]\right\}\times \\ \times\exp\left\{+i\left[kx+\left(l-kU_y t\right)y\right]\right\}dk\,dl,\end{gathered} \tag{26}$$

где решение нормировано на начальное условие

$$g_1\left(k,l\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi\left(x,y,t=0\right)\cdot\exp\left[-i\left(kx+ly\right)\right]dx\,dy. \tag{27}$$

Анализ двойного интеграла Фурье методом стационарной фазы и построение траекторий волновых пакетов можно найти в работе [20]. Важно отметить, что эти работы свободны от предположения, что переменная времени должна быть большой.

Нестационарная задача Коши для волн Россби на меридиональном течении

В качестве четвертого примера рассмотрим нестационарную задачу Коши для волн Россби на меридиональном течении. Решение этой задачи с применением конвективных координат можно найти в работе [20].

Пример 4. Он относится к случаю линейного профиля скорости меридионального течения. Линейная задача Коши для баротропных бездивергентных волн Россби имеет следующий вид [20]:

$$\left(\partial_t + V_x x\partial_y\right)\left(\Psi_{xx}+\Psi_{yy}\right) + \beta\Psi_x = 0, \tag{28}$$

где β – классический параметр; ось x направлена на восток, ось y – на север.

Имеется неоднородное меридиональное сдвиговое течение $V(x) = V_x x$, где $V_x = \text{const}$. Как и ранее (см. Пример 3), выполним двумерное преобразование Фурье для неоднородного дифференциального уравнения (28) по двум пространственным переменным x и y. Тогда уравнение (28) в Фурье-пространстве принимает вид

$$\left[\left(-k^2-l^2\right)\varphi\right]_t - U_x l\left[\left(-k^2-l^2\right)\varphi\right]_k + i\beta k\,\varphi = 0. \tag{29}$$

Это уравнение однородно, содержит только первые частные производные и легко решается. Перепишем его в следующем виде:

$$P_t - U_x l P_k - \frac{i\beta k}{k^2+l^2}P = 0, \quad P \equiv \left(k^2+l^2\right)\varphi. \tag{30}$$

Сделав замену переменных ($\tau = t$, $k' = k + lU_x t$), получаем следующее уравнение:

$$P_\tau - \frac{i\beta\left(k' - lU_x\tau\right)P}{\left(k' - lU_x\tau\right)^2 + l^2} = 0. \tag{31}$$

Уравнение (31) можно проинтегрировать явно (экспонента от логарифма), и тогда окончательное решение имеет вид двойного интеграла Фурье:

$$\Psi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(k,l)\frac{k^2+l^2}{\left(k-lU_x t\right)^2+l^2}\exp\left\{i\frac{\beta}{2lU_x}\ln\left[\frac{\left(k-lU_x t\right)^2+l^2}{k^2+l^2}\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{+i\left[\left(k-lU_x t\right)x+ly\right]\right\}dk\,dl, \tag{32}$$

где решение нормировано на начальное условие

$$g_2(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,y,t=0)\exp\left[-i(kx+ly)\right]dx\,dy. \tag{33}$$

Анализ двойного интеграла Фурье методом стационарной фазы и построение траекторий волновых пакетов можно найти в работе [20].

Рассмотренные примеры являются простыми в том смысле, что полученные двойные интегралы уже известны. Новизна нашего решения состоит в том, что решение формально построено прямым Фурье-преобразованием неоднородного дифференциального уравнения без привлечения конвективных координат.

Перейдем теперь к более сложной задаче, где решение в виде интеграла Фурье краевой задачи ранее не было известно, но оно рассматривалось в терминах специальных функций от комплексных переменных. Сама процедура построения некой комплексной переменной для специальной гипергеометрической функции и интегрирование по некой окружности в комплексном пространстве подсказывает, что должен быть способ получить данное решение через прямое преобразование Фурье исходного неоднородного дифференциального уравнения с неразделяемыми переменными.

Эталонное уравнение для двухмерной неоднородной среды. Аномальная фокусировка внутренних волн

В рассмотренных выше примерах решение искалось в виде двумерного интеграла Фурье, при этом неоднородность внешнего поля (поле скорости фонового течения, или топография), носили одномерный характер.

Теперь рассмотрим более сложный пример задачи с двумерной неоднородностью внешнего поля.

Пример 5. В теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости эталонное уравнение эллиптико-гиперболического типа для вертикального смещения в окрестности фокуса имеет следующий вид [13, уравнение (2.5)]:

$$\Psi_{zz} + \left(\frac{y}{L_y} + \frac{z^2}{L_z^2}\right)\Psi_{yy} + \frac{2}{L_y}\Psi_y = 0, \tag{34}$$

где Ψ – функция тока; (x, y, z) – прямоугольная система координат; L_y, L_z – величины длины неоднородностей по осям y и z.

Будем искать решения, локализованные в малой окрестности некоторого уровня по вертикальной координате и экспоненциально затухающие вне этого уровня; здесь для случая внутренних волн введены следующие обозначения [13]:

$$\frac{1}{L_y} = 2\nabla_y \ln\Omega, \quad \frac{1}{L_z^2} = \frac{\nabla_z^2\Omega}{\Omega} - \frac{\nabla_z^2 N}{N}, \tag{35}$$

где $\Omega = \omega - kU$ (ω – частота, k – зональное волновое число, $U(z, y)$ – неоднородное горизонтальное фоновое течение со сдвигом); $N^2(z) = -g\dfrac{d}{dz}\ln\rho_0(z)$ ($\rho_0(z)$ – плотность).

Значение всех производных берется в фокусной точке. Поскольку уравнение (34) инвариантно относительно масштабного преобразования $z = az'$, $y = a^2y'$, вводится некая автомодельная переменная. Решение строится как суммирование всех частных решений по гипергеометрическим функциям от комплексного аргумента. При этом сама процедура построения этой комплексной переменной не совсем понятна. Не совсем также понятно, что это за функции, которые рассматривают авторы работы [13], откуда эти функции появляются, какова их физическая природа и что означают первичное и вторичное квантование при построении асимптотик решения. Отметим при этом, что асимптотики двумерной функции строятся одномерными только на оси волновода.

Для того чтобы, с одной стороны, осмыслить эти решения в специальных функциях от комплексных аргументов, а с другой представить данные классы решений с помощью классического преобразования Фурье и его свойств (представлены выше), мы самостоятельно построим решение в интегральной форме, найдем его двумерные асимптотики и покажем, что означают первичные и вторичные квантования в терминах классической задачи Штурма – Лиувилля. Для этого можно взять за основу известные интегральные представления гипергеометрической функции, и тогда идея нахождения решения станет более прозрачной. В некотором смысле мы идем от интегрального представления, но поиск решения лучше изложить в обратном направлении.

Решение уравнения (34) ищем в виде интеграла Фурье. Сначала ограничимся верхней половиной интеграла:

$$\Psi(k, y, z, \omega) = \int_0^\infty G(k, l, z, \omega)\exp(ily)\,dl. \tag{36}$$

На самом деле возникает резонный вопрос, брать ли весь интеграл или только верхнюю (или нижнюю) его часть. Обсуждение этой проблемы мы дадим далее, в заключительной части работы.

Используем снова свойства преобразования Фурье:

$$\Psi \to G, \quad \Psi_y \to i\,l\,G, \quad \Psi_{yy} \to -l^2\,G, \quad y\Psi_{yy} \to -i\left(l^2\,G\right)_l. \tag{37}$$

Первые три формулы в этой записи – это свойства преобразования Фурье производной, которые широко известны. Последняя же формула – это частный случай равенства (21) в монографии [9]. Несмотря на известность этой формулы, ее практическое применение в прикладных задачах отсутствует. В нашей работе делается акцент именно на практическом применении этой последней формулы из записи (37).

Подставим интеграл (36) в уравнение (34) и, принимая во внимание (37), для Фурье-образа G получаем следующее уравнение:

$$G_{zz} - \frac{l^2 z^2}{L_z^2}G - i\frac{l^2}{L_y}G_l = 0. \tag{38}$$

Равенство (38) не является уравнением с разделяющимися переменными. Чтобы оно стало таковым, выполним следующую замену переменных

$$(z, l) \to (\eta, \varphi),$$

где

$$\eta = \frac{z\,l^{1/2}}{L_z^{1/2}}, \quad \varphi = l. \tag{39}$$

Якобиан такой замены имеет вид

$$\frac{\partial(\eta, \varphi)}{\partial(z, l)} = l^{1/2}. \tag{40}$$

Следует отметить, что в уравнениях (39) и (40) фигурирует $l^{1/2}$. Технически именно этот факт и позволяет рассматривать только одну из частей интеграла Фурье. Для простоты мы выбрали сначала верхнюю, положительную часть интегрирования, с тем чтобы снять вопрос, относящийся к квадратному корню.

Здесь возникает вопрос, почему следует выбрать именно такую замену переменных. Ответ содержится в работе [17], где построено решение в ВКБ-приближении. Фактически оказываются лишними какие-либо рассуждения об автомодельности, так как в определенном смысле вся автомодельность решения сводится к простой замене переменных вида (39).

В новых переменных (η, φ) равенство (38) принимает вид уравнения с разделяющимися переменными:

$$G_{\eta\eta} - \eta^2 G - i\frac{\eta L_z}{2L_y} G_\eta - i\frac{\varphi L_z}{L_y} G_\varphi = 0. \tag{41}$$

И в таком случае ищем решение с разделяющимися переменными:

$$G(\eta,\varphi) = H(\eta) F(\varphi). \tag{42}$$

Для функции $H(\eta)$ получаем следующее уравнение:

$$H_{\eta\eta} - i\frac{\eta L_z}{2L_y} H_\eta - \left(\eta^2 + \mu_0\right) H = 0, \tag{43}$$

где μ_0 – постоянная разделения.

Далее слагаемое с первой производной в уравнении (43) убираем следующей заменой:

$$H(\eta) = P(\eta)\exp\left(i\frac{L_z}{8L_y}\eta^2\right). \tag{44}$$

Для функции $P(\eta)$ получаем следующее уравнение:

$$P_{\eta\eta} + \left[-\eta^2\left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right) - \mu_0 + i\frac{L_z}{4L_y}\right] P = 0. \tag{45}$$

Напомним, что мы ищем решения, локализованные в окрестности уровня $z = 0$. Анализ уравнения (45) позволяет заключить, что коэффициент при η^2 должен быть положительным, поэтому мы получаем следующее условие существования локализованных решений:

$$\left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < \left|L_z\right| < 4\left|L_y\right|. \tag{46}$$

Условие (46) означает, что ветви параболы, которая ограничивает внутреннюю область прозрачности от внешней области тени, должны быть практически параллельны друг другу. В противном случае вертикальная мода не сформируется и волна не будет приближаться к критической точке бесконечно долго. Важно отметить, что если условие (46) не выполняется, то формально возможны и другие режимы трансформации решения. Ни о какой единственности решения здесь речи не идет.

Оценка параметров для внутренних волн показывает, что если принять масштабы, которые использовали авторы работы [13], то получается очень хорошая разница данных величин ($L_z < 4L_y$), а это свидетельствует об оправданности концепции параболической ловушки с физической точки зрения.

Определим квантовые значения переменной разделения μ_0 [10, 16]:

$$-(2m+1) = \left(\mu_0 - i\frac{L_z}{4L_y}\right) \Big/ \left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{47}$$

Отсюда можно найти собственные значения

$$\mu_0 = \frac{L_z}{L_y}\left[\frac{1}{4}i - \frac{\delta}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]; \quad \delta \equiv \left(\frac{16L_y^2}{L_z^2}-1\right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{48}$$

и собственные функции

$$P(\eta) = \left\{\sum_{m=0}^{\infty} H_m\left[\eta\left(1-\frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/4}\right]\right\}\exp\left[-\frac{\eta^2}{2}\left(1-\frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/2}\right], \quad m = 0,\ 1,\ 2, ..., \tag{49}$$

где H_m – полиномы Эрмита.

Перейдем теперь к определению второго множителя $F(\varphi)$ в решении (42). Из формулы (41) получаем следующее уравнение:

$$-i\frac{\varphi L_z}{L_y}F_\varphi + \mu_0 F = 0. \tag{50}$$

Решение уравнения (50) имеет следующий вид:

$$F(\varphi) = \varphi^\mu, \ \ \mu \equiv -i\mu_0\frac{L_y}{L_z}. \tag{51}$$

Окончательно получаем следующие собственные значения:

$$\mu = \frac{1}{4} + i\frac{\delta}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right). \tag{52}$$

Подставляя все найденные составные решения в исходный интеграл (36), находим собственные функции:

$$\begin{gathered}\Psi(k,y,z,\omega) = A(k,\omega)\ \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} l^\mu\ \left\{H_m\left[\frac{z\,l^{1/2}}{L_z^{1/2}}\left(1-\frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/4}\right]\right\}\times \\ \times\exp\left[-\frac{z^2 l}{2L_z}\left(1-\frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/2}\right]\cdot\exp\left[i\,l\left(y+\frac{z^2}{8L_y}\right)\right]dl,\end{gathered} \tag{53}$$

где $A(k,\ \omega)$ – некоторая константа, определяющая спектральную плотность начального состояния.

Далее полученные собственные функции (53) можно с помощью несложных преобразований свести к вырожденной гипергеометрической функции от некоторого комплексного аргумента. Отметим, что именно интегральная запись (53) является предпочтительной для нахождения асимптотик собственных функций. Несмотря на то, что построенные собственные функции (53) выражают зависимость от двух физических переменных (z и y), интеграл для собственных функций является одномерным, что позволяет воспользоваться методом стационарной фазы [16].

Запишем мнимую часть интеграла (53) в следующем виде:

$$\exp\left[i\,l\left(y+\frac{z^2}{8L_y}\right)+i\frac{\delta}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln l\right]. \tag{54}$$

Если продифференцировать это выражение по переменной l и приравнять нулю выражение в квадратных скобках, то получим уравнение для точки l_c:

$$y+\frac{z^2}{8L_y} = -\frac{\delta}{2l_c}\left(m+\frac{1}{2}\right). \tag{55}$$

Перепишем это соотношение в следующем виде:

$$l_c = -\frac{\delta\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\left(y+\frac{z^2}{8L_y}\right)}. \tag{56}$$

Полученное выражение (56) – это некое обобщение коротковолновой ВКБ-асимптотики дисперсионного соотношения $l_c = y^{-1}$. Тогда вторая производная фазы по волновому числу пропорциональна l_c^{-2}, и, следовательно, корень в минус первой степени из этой производной пропорционален l_c^1.

Асимптотика собственных функций в окрестности критической точки принимает следующий вид:

$$\Psi_1(k,y,z,\omega) = A(k,\omega)\sum_{m=0}^{\infty} l_c^{\mu+1}\left\{H_m\left[\frac{z\,l_c^{1/2}}{L_z^{1/2}}\left(1-\frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/4}\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{z^2 l_c}{2L_z}\left(1-\frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/2}\right]\cdot\exp\left[i\,\frac{\delta}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{57}$$

Анализ этого равенства позволяет заключить, что асимптотика решения эталонного уравнения в точности совпадает с ВКБ-решением [17], выраженным вертикальной модой в виде полиномов Эрмита, мажорированных гауссовской функцией, и дает классическую степень 5/4 для амплитуды вертикальной скорости. Если авторы работы [13] и имеют в виду некую моду, то мы с уверенностью утверждаем, что это не их вертикальная мода в виде ВКБ-решения по вертикальной координате, а совсем другая, которая построена в работе [17].

Построенные нами решения представляют собой функции не от переменных z, y, а от некоторых криволинейных переменных, имеющих следующий вид:

$$(y,z)\to\left(y+\frac{z^2}{8L_y},\quad \frac{z}{\left(y+\frac{z^2}{8L_y}\right)^{1/2}}\right). \tag{58}$$

Таким образом, происходит в некотором смысле искривление пространства в окрестности фокальной точки. Но вся эта «криволинейность» просматривалась и при решении задачи в ВКБ-приближении, где формально происходила следующая замена переменных:

$$(y,z)\to\left(y,\frac{z}{\sqrt{y}}\right).$$

Поэтому, по большому счету, асимптотики одномерных интегралов не дают каких-либо качественно новых результатов, отличных от ВКБ-решений, за исключением условия (47), которое выполняется с большим запасом.

Приведение интеграла Фурье к гипергеометрической функции от комплексного переменного. Для сравнения нашего решения с решением Н. С. Ерохина и Р. З. Сагдеева [13] перепишем собственные функции (54) в следующем виде:

$$\Psi_m(k,y,z,\omega) = \int_0^{\infty} l^{\mu} H_m\left(\frac{z\,l^{1/2}}{2L_y^{1/2}}\delta^{1/2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{z^2 l}{8L_y}\delta\right)\cdot\exp\left[il\left(y+\frac{z^2}{8L_y}\right)\right]dl. \tag{59}$$

Затем сделаем замену переменных ($l \to x$), а аргумент

$$\left(\frac{z\, l^{1/2}}{2L_y^{1/2}}\delta^{1/2}\right)$$

полинома Эрмита примем за новую переменную

$$x = \frac{z l^{1/2}\delta^{1/2}}{2L_y^{1/2}}. \tag{60}$$

Из этого следует, что

$$\Psi_m \propto \int_0^\infty \exp\left(-2ax^2\right)\frac{x^{2\mu+1}}{z^{2\mu+2}}H_m(x)\,dx. \tag{61}$$

В формуле (60) появилась комплексная переменная $2a$, зависящая от двух пространственных физических переменных – z и y:

$$2a = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\delta z^2}\left(z^2 + 8\,y\,L_y\right). \tag{62}$$

Двумерную задачу мы решили через одномерный интеграл, но только от комплексного аргумента. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2a} = \frac{2\delta z^2}{\delta z^2 - i\left(z^2 + 8\,y\,L_y\right)} \equiv \tau^*, \tag{63}$$

где τ – комплексная переменная Н. С. Ерохина и Р. З. Сагдеева [13] (звездочка означает комплексное сопряжение).

Интегральное представление гипергеометрической функции через полиномы Эрмита имеет следующий вид [11, формулы 7.37, 7.38, см. «Список литературы» на русском языке]:

$$F\left(-n; \frac{\nu+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2a}\right) \sim \int_0^\infty \exp\left(-2ax^2\right) x^\nu H_{2n}(x)\,dx, \tag{64}$$

где Re $a > 0$, Re $\nu > -1$;
кроме того [11, ф-ла 7.376.3]:

$$F\left(-n; \frac{\nu}{2}+1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2a}\right) \sim \int_0^\infty \exp\left(-2ax^2\right) x^\nu H_{2n+1}(x)\,dx, \tag{65}$$

где Re $a > 0$, Re $\nu > -2$.

С учетом собственных значений (48) находим:

$$\nu = 2\mu + 1 = \frac{3}{2} + i\delta\left(m + \frac{1}{2}\right). \tag{66}$$

Следовательно, построенные решения регулярны, а интегралы сходятся. Сходство с решением Ерохина и Сагдеева [13] достигнуто по трем из четырех параметров. Определяем последний параметр гипергеометрической функции:

$$\frac{\nu}{2} + 1 = \frac{7}{4} + i\frac{\delta}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \equiv \gamma^*, \tag{67}$$

где γ – квантовый параметр из этой работы [1, формула (2.7)].

Аналогично находим, что

$$\frac{\nu+1}{2} = \frac{5}{4} + i\frac{\delta}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right). \tag{68}$$

Таким образом мы получили полное соответствие наших результатов с работой [13]. Если учесть вторую часть интеграла Фурье, для отрицательных волновых чисел, то через замену переменной его можно свести к интегралу по положительным волновым числам. Но тогда в исследуемом интеграле произойдет замена у мнимой единицы ($i \to -i1$), а это приведет к появлению второй части решения, где вместо τ и γ будут фигурировать комплексно-сопряженные τ^* и γ^*.

Тем самым общее решение задачи есть сумма решений от τ и τ^*, что физически равносильно сумме падающей и отраженной волн. Это означает, что математически нет запрета на отражение и версия о бесконечной фокусировке сильно преувеличена.

Обсуждение и выводы

В данном исследовании изложены основные сведения по операторному методу преобразования Фурье, которые необходимы для практического решения конкретных физических задач в неоднородных средах. Основные свойства выводятся двумя способами:

интегрированием по частям, что предполагает затухание функций на бесконечности;

дифференцированием по параметру прямого или обратного преобразования Фурье.

На пяти конкретных примерах мы показали, как работает Фурье-анализ в неоднородных средах. В первых четырех примерах построены формальные интегральные решения, так как их дальнейший анализ хорошо известен и читатель с этим может самостоятельно ознакомиться, используя указанные ссылки. Отметим, что обычно эти интегралы (см. Примеры 1 и 2) приводятся без вывода и читателю предлагается самостоятельно получить этот вывод с помощью преобразования Лапласа. В нашей работе мы построили интегральные решения с помощью преобразования Фурье и теоремы Коши, показав их равнозначность с преобразованием Лапласа в одномерных неоднородных задачах.

В Примерах 2, 3 и 4 рассматривается двумерная задача, в которой неоднородность среды носит одномерный линейный характер. В Примере 2 решение можно получить двумя способами: через преобразование Фурье и через преобразование Лапласа. В Примере 5 мы выполнили полный анализ краевой задачи. Мы построили интеграл Фурье, нашли его двумерные асимптотики с помощью метода стационарной фазы и свойств параболического квантового осциллятора и также провели идентификацию найденного интеграла Фурье, сведя его к известной вырожденной гипергеометрической функции от комплексного аргумента. Тем самым мы показали, что утверждение о неработоспособности Фурье-анализа в неоднородных средах является ошибочным.

Таким образом, в терминах интеграла Фурье мы аналитически доказали идентичность решения эталонного уравнения для вертикальной фокусировки монохроматической волны в окрестности фокуса с решением эталонного уравнения в терминах вырожденной гипергеометрической функции от комплексного переменного, полученного в предыдущих исследованиях. Данное математическое решение успешно применяется также в задачах магнитогидродинамической неустойчивости и при описании внутренних гравитационных волн в двумерно-неоднородной жидкости [7, 13].

Показано, что вопрос о поглощении волн в фокальной зоне носит неоднозначный характер и поэтому может наблюдаться как прохождение, так и отражение от особенности. Конкретные оценки для типичных параметров океанических градиентов гидрофизических полей плотности и скорости показывают, что локализация, и, как правило, усиление волновых движений вполне реализуемы и будут проявляться в виде сильно локализованных пространственных вихревых образований.

Указанные особенности следует учитывать при исследовании геофизических полей, в частности при анализе мезомасштабной вихревой динамики в океане.

Аналитический метод, изложенный в данных пяти примерах, может быть использован при решении и других задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 606 с.

2. **Лайтхилл Д.** Волны в жидкостях. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 598 с.

3. **Педлоски Дж.** Геофизическая гидродинамика. В 2 тт. М.: Мир, 1984. 398 с. (том 1), 416 с. (том 2).

4. **Wirth V., Riemer M., Chang E. K., Martius O.** Rossby wave packets on the midlatitude waveguide. A review // Monthly Weather Review. 2018. Vol. 146. No. 7. Pp. 1965–2001.

5. **Титчмарш Э. Ч.** Введение в теорию интегралов Фурье. Пер. с англ. Москва, Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 419 с.
6. Вопросы теории плазмы. Сб. статей. Выпуск 7. Под ред. акад. М. А. Леонтовича, М.: Атомиздат, 1973. 304 с.
7. **Ерохин Н. С., Моисеев С. С.** Вопросы теории линейной и нелинейной трансформации волн в неоднородных средах // Успехи физических наук. 1973. Т. 109. № 2. С. 225—258.
8. **Wasow W.** A study of the solutions of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2 (xy'' + y) = 0$ for large values of λ // The Annals of Mathematics. 1950. Vol. 52. No. 2. Pp. 350—361.
9. **Владимиров В. С., Жаринов В. В.** Уравнения математической физики. 2-е изд. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
10. **Гневышев В. Г., Белоненко Т. В.** Парадокс Россби и его решение // Гидрометеорология и экология (Ученые записки РГГМУ). 2020. № 61. С. 480—493.
11. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 7-е изд. СПб: БХВ-Петербург, 2011, 1232 с.
12. **Евграфов М. А.** Аналитические функции. 4-е изд. СПб.: Изд-во «Лань», 2008. 448 с.
13. **Ерохин Н. С., Сагдеев Р. З.** К теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости. Часть 1. Стационарная задача // Морской гидрофизический журнал. 1985. № 2. С. 15—27.
14. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. 6-е изд. М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 2003. 576 с.
15. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981. 301 с.
16. **Badulin S. I., Shrira V. I.** On the irreversibility of internal-wave dynamics due to wave trapping by mean flow inhomogeneities. Part 1. Local analysis // Journal of Fluid Mechanics. 1993. Vol. 251. June. Pp. 21—53.
17. **Badulin S. I., Shrira V. I., Tsimring L. Sh.** The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents // Journal of Fluid Mechanics. 1985. Vol. 158. September. Pp. 199—218.
18. **Gnevyshev V. G., Badulin S. I., Belonenko T. V.** Rossby waves on non-zonal currents: Structural stability of critical layer effects // Pure and Applied Geophysics. 2020. Vol. 177. No. 11. Pp. 5585—5598.
19. **LeBlond P. H., Mysak L. A.** Waves in the ocean. Elsevier oceanography series. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1981. 602 p.
20. **Yamagata T.** On trajectories of Rossby wave-packets released in a lateral shear flow // Journal of the Oceanographic Society of Japan. 1976. Vol. 32. No. 4. Pp. 162—168.

REFERENCES

1. **Witham G. B.,** Linear and nonlinear waves (Series: Pure and Applied Mathematics), Willey, New York, 1974.
2. **Lighthill J.,** Waves in fluids, 2-nd Ed., Cambridge University Press, New York, 1978.
3. **Pedlosky J.,** Geophysical fluid dynamics, Springer Verlag, New York, 1978.
4. **Wirth V., Riemer M., Chang E. K., Martius O.,** Rossby wave packets on the midlatitude waveguide. A review, Mon. Weather Rev. 146 (7) (2018) 1965—2001.
5. **Titmarsh E. C.,** Introduction to the theory of Fourier integrals, 3d Ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1986.
6. Reviews of plasma physics, Vol. 7, Ed. by M. A. Leontovich, Consulting Bureau, USA, 1979.
7. **Erokhin N. S., Moiseev S. S.,** Problems of the theory of linear and nonlinear transformation of waves in inhomogeneous media, Soviet Physics Uspekhi. 16 (1) (1973) 64—81.
8. **Wasow W.,** A study of the solutions of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2 (xy'' + y) = 0$ for large values of λ, Ann. Math. 52 (2) (1950) 350—361.
9. **Vladimirov V. S., Zharinov V. V.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [The equations of mathematical physics], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2004 (in Russian).
10. **Gnevyshev V. G., Belonenko T. V.,** The Rossby paradox and its solution, Hydrometeorology and Ecology (Proceedings of the Russian State Hydrometeorological University). (61) (2020) 480—493 (in Russian).

11. **Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.,** Table of integrals, series, and products, Ed. by A. Jeffrey, D. Zwillinger, Academic Press, Cambridge, USA, 2015.
12. **Evgrafov M. A.,** Analytical functions, Dover Publications, New York, 1978.
13. **Erokhin N. S., Sagdeev R. Z.,** To the theory of anomalous focusing of internal waves in a two-dimensional nonuniform fluid. Part I: A stationary problem, Morskoy Gidrofizicheskiy Zhurnal (Soviet J. Phys. Oceanography). (2) (1985) 15–27 (in Russian).
14. **Kamke E.,** Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. Ed. by A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, CRC Press, Boca Raton, New York, London, 1995.
15. **Miropol'sky Yu. Z.,** Dynamics of internal gravity waves in the ocean (Book Series "Atmospheric and Oceanographic Sciences Library"), Springer, New York, 2001.
16. **Badulin S. I., Shrira V. I.,** On the irreversibility of internal-wave dynamics due to wave trapping by mean flow inhomogeneities. P. 1. Local analysis, J. Fluid Mech. 251 (June) (1993) 21–53.
17. **Badulin S. I., Shrira V. I., Tsimring L. Sh.,** The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents, J. Fluid Mech. 158 (Sept.) (1985) 199–218.
18. **Gnevyshev V. G., Badulin S. I., Belonenko T. V.,** Rossby waves on non-zonal currents: Structural stability of critical layer effects, Pure Appl. Geophys. 177 (11) (2020) 5585–5598.
19. **LeBlond P. H., Mysak L. A.,** Waves in the ocean, Elsevier Oceanography Ser. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1981.
20. **Yamagata T.,** On trajectories of Rossby wave-packets released in a lateral shear flow, J. Oceanogr. Soc. Japan. 32 (4) (1976) 162–168.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГНЕВЫШЕВ Владимир Григорьевич – *кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института океанологии имени П. П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия.*
117997, Россия, г. Москва, Нахимовский пр., 36
avi9783608@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4608-7781

БЕЛОНЕНКО Татьяна Васильевна – *доктор географических наук, профессор кафедры океанологии Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Россия.*
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
btvlisab@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4608-7781

THE AUTHORS

GNEVYSHEV Vladimir G.
Shirshov Institute of Oceanology, RAS
36 Nakhimovskiy Ave., Moscow, 117997, Russia
avi9783608@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4608-7781

BELONENKO Tatyana V.
St. Petersburg State University
7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia
btvlisab@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4608-7781

Статья поступила в редакцию 30.03.2023. Одобрена после рецензирования 02.08.2023. Принята 02.08.2023.
Received 30.03.2023. Approved after reviewing 02.08.2023. Accepted 02.08.2023.