# Многокритериальный выбор на основе интервальной нечеткой информации

В. Д. Ногин

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

**Аннотация.** Рассматривается класс задач многокритериального выбора, в которых предпочтения лица, принимающего решение, моделируются интервальным нечетким отношением второго порядка. Формулируются базовые аксиомы «разумного» выбора, которые, в частности, позволяют обосновать принцип Эджворта-Парето в этом классе задач. Вводится понятие кванта интервальной нечеткой информации, а также непротиворечивого набора подобных квантов. Сформулирован критерий непротиворечивости набора квантов и представлена схема использования интервальной нечеткой информации для сужения множества Парето. Разобран пример, иллюстрирующий предложенный подход.

**Ключевые слова:** многокритериальный выбор, интервальное нечеткое отношение, квант интервальной нечеткой информации, непротиворечивость квантов.

**DOI** 10.14357/20718594230408 **EDN** NUAURI

## Введение

Задачи оптимального выбора с несколькими числовыми критериями образуют достаточно широкий и практически важный класс задач принятия решений. Итоговое решение задачи многокритериального выбора заключается в отыскании некоторого «наилучшего» варианта из множества допустимых вариантов или же целого их подмножества. Фундаментальным инструментом при решении задач этого класса является принцип Эджворта-Парето, согласно которому «лучшими» вариантами могут быть только оптимальные по Парето. Однако множество Парето, как правило, довольно широкое, и окончательный выбор внутри него нередко оказывается затруднительным. По этой причине возникает проблема сужения множества Парето [1], разрешить которую невозможно без привлечения дополнительной информации от лица, принимающего решение (ЛПР).

Основным источником такой информации являются сведения о предпочтениях ЛПР в форме так называемых квантов информации [1]. В простейшем случае наличие кванта позволяет удалить один из двух сравниваемых вариантов, облегчая, тем самым, процесс выбора. Приняв определенные аксиомы, регламентирующие процедуру выбора, с помощью одного кванта можно в бóльшей степени сузить множество парето-оптимальных вариантов, а при наличии набора квантов можно рассчитывать на заметное сужение и, тем самым, на существенное упрощение процедуры выбора.

Выявление квантов информации обычно происходит в диалоге с ЛПР и связано с определенными трудностями. При наличии нескольких критериев вопрос о том, какой из двух сравниваемых вариантов предпочтительнее, нередко оказывается сложным для ЛПР. С одной стороны, рассматриваемый вариант может иметь ряд преимуществ по сравнению с другим, что является веским основанием причислять его к числу «хороших», т.е. выбираемых из данной пары. С другой стороны, он может обладать недостатками, которые выбор в его пользу могут сделать сомнительным и перевести этот вариант в разряд «плохих». Иными словами, деление возможных вариантов на «хорошие» и «плохие» для данного ЛПР в подобных ситуациях оказывается чрезмерно «грубым». Более гибкий и удобный подход связан с теорией нечетких множеств, когда ЛПР предлагается паре сравниваемых вариантов поставить в соответствие определенное число из отрезка [0,1], выражающее степень уверенности ЛПР в том, что один из вариантов этой пары заведомо предпочтительнее другого.

В последнее время большую популярность в прикладных исследованиях приобрели нечеткие множества второго порядка. Исследованию таких множеств и их применению посвящено значительное число работ [2-5]. В этой связи можно отметить публикацию [6], где представлен исторический обзор различных типов нечетких множеств второго порядка и прослеживается взаимосвязь между ними.

Среди нечетких множеств второго порядка выделяют наиболее простой класс – интервальные нечеткие множества второго порядка [7-10]. Идея введения таких множеств была представлена в [7]. Они нередко используются в различных прикладных исследованиях [11, 12].

Далее считается, что отношение предпочтения ЛПР является интервальным нечетким отношением второго порядка. С помощью такого отношения можно моделировать неопределенные ситуации, когда степень уверенности ЛПР в том, что один из двух сравниваемых вариантов предпочтительнее другого из-за неточности измерений или по каким-то другим причинам «размывается» и оказывается в пределах некоторого диапазона.

В Разделе 1 представлены исходные понятия теории нечетких множеств, включая нечеткие множества и нечеткие отношения второго порядка. Задача многокритериального выбора с интервальным нечетким отношением предпочтения второго порядка формулируется в Разделе 2. Также приводятся аксиомы «разумного» выбора и принцип Эджворта-Парето для рассматриваемого класса задач. Раздел 3 содержит базовое понятие данной работы – квант интервальной нечеткой информации об отношении предпочтения ЛПР. Здесь же описана схема использования одного, а также нескольких квантов в процессе сужения множества Парето. В Разделе 4 дается определение непротиворечивого набора квантов, и формулируются необходимые и достаточные условия непротиворечивости данного набора. Статья завершается Разделом 5, где рассматривается иллюстративный пример использования квантов интервальной нечеткой информации для сужения множества Парето в соответствии с предложенной схемой. Доказательства принципа Эджворта-Парето и критерия непротиворечивости вынесены в Приложение.

## 1. Сведения о нечетких множествах

*Нечеткое множество* (первого порядка) $X$ в универсальном множестве $A$ определяется своей функцией принадлежности $\lambda_X : A \to [0,1]$. Для каждого $x \in A$ число $\lambda_X(x)$ интерпретируется как степень принадлежности элемента $x$ нечеткому множеству $X$. Нечеткое множество можно рассматривать как множество пар $(x, \lambda_X(\cdot))$, где $x \in A$ и $\lambda_X(x) \in [0,1]$. Нередко именно так его и определяют.

Если $A$ совпадает с множеством вещественных чисел, т.е. $A = \mathbf{R}$, то соответствующее нечеткое множество называют *нечеткой величиной*. Нечеткое множество именуют *нормальным*, если точная верхняя грань его функции принадлежности $\lambda_X(\cdot)$ на множестве $A$ равна 1. *Нечеткое число*, по определению, – это нормальная выпуклая нечеткая величина. В свою очередь, *выпуклая нечеткая величина* характеризуется тем, что для нее множество произвольного уровня $\alpha$, т.е. $\{x \in \mathbf{R} \mid \lambda_X(x) \geqq \alpha\}$, является ограниченным выпуклым числовым подмножеством.

Для четкого множества в отличие от нечеткого либо $x \in X$, либо $x \notin X$. Поэтому если $x \in X$, то выполнено $\lambda_X(x) = 1$, в то время как равенство $\lambda_X(x) = 0$ означает $x \notin X$. Если $X$ – нечеткое множество, то возможно и любое промежуточное значение $\lambda_X(x) \in (0,1)$. Чем больше величина степени принадлежности $\lambda_X(x)$, тем меньше неопределенности в том, что $x \in X$.

На практике возможны ситуации, когда из-за высокого уровня неопределенности для элемента $x$ трудно точно указать число, выражающее его степень принадлежности множеству $X$. В этом случае для задания степени принадлежности можно использовать не конкретное число, а нечеткую величину первого порядка. Если степень принадлежности элемента множеству $A$ сама является нечеткой величиной, заданной на $[0,1]$, то $X$ именуют нечетким множеством второго порядка. Согласно формальному определению, *нечеткое множество второго порядка* (*НМ2П*) $X$–это множество троек $(x,u,\lambda_X(x,u))$, где $x\in A, u\in[0,1]$ и $\lambda_X(x,u)\in[0,1]$. Число $u$ называют первичной, а $\lambda_X(x,u)$ – вторичной степенями принадлежности, связанными с элементом $x$. Согласно приведенному определению, каждому элементу $x\in A$ поставлена в соответствие функция $\lambda_X(x,\cdot)$, заданная на $[0,1]$ и принимающая значения в $[0,1]$. Эта функция служит для описания того типа неопределенности, которая связана с принадлежностью элемента $x$ данному нечеткому множеству второго порядка.

НМ2П $X$ называется *интервальным нечетким множеством второго порядка* (*ИНМ2П*), если для каждого $x\in A$ существуют такие два числа $\lambda_X^-(x),\lambda_X^+(x)\in[0,1]$, при помощи которых вторичная степень принадлежности $\lambda_X(x,\cdot)$ может быть представлена в виде:

$$\lambda_X(x,u)=\begin{cases}1, & \text{если } \lambda_X^-(x)\leqq u\leqq\lambda_X^+(x),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Другое наименование ИНМ2П – это интервально-значное нечеткое множество [8]. ИНМ2П $X$ полностью определяется *нижней* и *верхней составляющими* $\lambda_X^-(x)$ и $\lambda_X^+(x)$, которые каждому элементу $x\in A$ ставят в соответствие диапазон $[\lambda_X^-(x),\lambda_X^+(x)]\subset[0,1]$ возможных изменений степени принадлежности этого элемента множеству $X$ (Рис. 1).

Чем больше разность $\lambda_X^+(x)-\lambda_X^-(x)$, тем выше неопределенность, связанная с нечеткостью второго порядка принадлежности элемента $x$ множеству $X$. В случае нечеткого множества первого порядка имеет место тождество: $\lambda_X^-(x)\equiv\lambda_X^+(x)$.

Теоретико-множественные операции пересечения и объединения, а также отношение включения для ИНМ2П определяются следующим образом (для каждого $x\in A$):

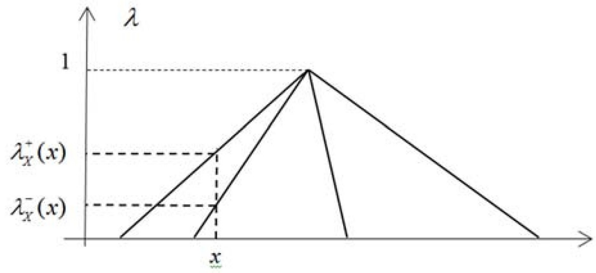


Рис. 1. Пример ИНМ2П на числовой оси

- пересечение $\lambda_{A\cap B}^-(x)=\min\{\lambda_A^-(x);\lambda_B^-(x)\}$, $\lambda_{A\cap B}^+(x)=\min\{\lambda_A^+(x);\lambda_B^+(x)\}$;
- объединение $\lambda_{A\cup B}^-(x)=\max\{\lambda_A^-(x);\lambda_B^-(x)\}$, $\lambda_{A\cup B}^+(x)=\max\{\lambda_A^+(x);\lambda_B^+(x)\}$;
- включение

$A\subset B \Leftrightarrow \lambda_A^-(x)\leqq\lambda_B^-(x),\ \lambda_A^+(x)\leqq\lambda_B^+(x).$

Нетрудно понять, что результатом применения указанных операций снова будет ИНМ2П. Иначе говоря, класс ИНМ2П замкнут относительно теоретико-множественных операций.

*Нечеткое бинарное отношение первого порядка* определяется как нечеткое подмножество первого порядка декартова произведения $A\times A$. Его функция принадлежности имеет два аргумента: $\mu_A(\cdot,\cdot):A\times A\to[0,1]$.

*Интервальное нечеткое отношение второго порядка* (*ИНО2П*) определяется двумя составляющими – верхней $\mu_A^-(x,y)$ и нижней $\mu_A^+(x,y)$, которые каждой паре $(x,y)\in A\times A$ ставят в соответствие множество $[\mu_A^-(x,y),\mu_A^+(x,y)]\subset[0,1]$ возможных значений уверенности в том, что элемент $x$ находится в данном отношении с элементом $y$. При этом считается, что $\mu_A^-(x,y)\leqq\mu_A^+(x,y)$ для всех $(x,y)\in A\times A$.

ИНО2П называют

- иррефлексивным, если не существует $x\in A$, для которого $\mu_A^+(x,x)=0$;
- асимметричным, если $\mu_A^+(x,y)=0$ для всех $x,y\in A$, таких что $\mu_A^-(y,x)>0$;
- транзитивным,

если $\mu_A^-(x,z)\geqq\min\{\mu_A^-(x,y),\mu_A^-(y,z)\}$ и

$\mu_A^+(x,z) \geqq \min\{\mu_A^+(x,y), \mu_A^+(y,z)\}$ для всех $x,y,z \in A$.

Несложно проверить, что всякое иррефлексивное и транзитивное интервальное нечеткое отношение является асимметричным (как и в четком случае).

## 2. Задача многокритериального выбора с ИНО2П

Пусть ЛПР надлежит выбрать один или несколько вариантов из четкого множества вариантов $X$ произвольной природы. Посредством $C(X)$ обозначим *множество выбираемых вариантов.* Это множество является решением задачи многокритериального выбора и подлежит нахождению.

Отличительная особенность задачи многокритериального выбора по сравнению с однокритериальной задачей состоит в том, что для нее не существует какого-то единого понятия решения. Это объясняется тем, что множество $C(X)$ обычно формируется в процессе принятия решения и зависит (помимо $X$) от целого ряда факторов, непосредственно связанных с ЛПР. Обращаем внимание на то, что мы не вводили строгого определения множества выбираемых вариантов, поскольку такого определения не существует. Тем не менее, последующее изложение является корректным с математической точки зрения.

Каждый возможный вариант множества $X$ будем оценивать посредством числовых критериев $f_1, f_2, ..., f_m$, заданных на этом множестве. Не уменьшая общности последующего изложения, будем считать, что каждый из указанных критериев желательно максимизировать. Очевидно, «наилучшим» с практической точки зрения является вариант, доставляющий максимум одновременно всем $m$ критериям. Однако в действительности такой вариант никогда не реализуется и от ЛПР для завершения процесса принятия решения требуется пойти на компромисс. Этот компромисс полностью зависит от данного ЛПР, его собственных предпочтений, и по этой причине, как уже было сказано выше, не существует единого понятия решения задачи многокритериального выбора для всех возможных ЛПР.

С целью выявления предпочтений ЛПР на множестве $X$ введем асимметричное бинарное отношение $\succ_X$, называемое *отношением предпочтения* ЛПР. В случае четкого отношения предпочтения запись $x' \succ_X x''$ для двух вариантов $x', x''$ означает, что ЛПР из этой пары выберет $x'$ и не выберет $x''$. В данной работе рассматривается ситуация, когда отношение предпочтения является ИНО2П. В этом случае есть возможность формализовать предпочтения ЛПР, указав границы, в которых может варьироваться величина степени уверенности в том, что один вариант предпочтительнее другого. Подобного рода ситуации нередко возникают из-за неточности или неопределенности представлений ЛПР о своих предпочтениях.

Обозначим через $\mu_{\succ_X}^-(\cdot,\cdot)$ и $\mu_{\succ_X}^+(\cdot,\cdot)$ нижнюю и верхнюю составляющие для ИНО2П $\succ_X$. Поскольку отношение предпочтения $\succ_X$, участвующее в задаче многокритериального выбора, считается ИНО2П, естественно предполагать, что множество выбираемых вариантов $C(X)$ в общем случае имеет аналогичную природу, т.е. является ИНМ2П. Его нижнюю и верхнюю составляющие обозначим $\lambda_{C(X)}^-(\cdot)$ и $\lambda_{C(X)}^+(\cdot)$, соответственно.

Следующие четыре аксиомы предписывают в определенном смысле «разумное» поведение ЛПР в процессе принятия решений.

**Аксиома 1.** *Неравенства* $\lambda_{C(X)}^-(x) \leqq 1 - \mu_{\succ_X}^-(x',x)$, $\lambda_{C(X)}^+(x) \leqq 1 - \mu_{\succ_X}^+(x',x)$ *выполняются для всех* $x, x' \in X$, $x \neq x'$.

В частном четком случае аксиома требует, чтобы не выбираемый в паре вариант (это произойдет, когда $\mu_{\succ_X}^-(x,x') = \mu_{\succ_X}^+(x,x') = 1$) не оказался выбранным и из всего множества возможных вариантов (т.е. $\lambda_{C(X)}^-(x) = \lambda_{C(X)}^+(x) = 0$). В нечетком случае подобная категоричность размывается наличием неопределенности, вытекающей из нечеткости отношения предпочтения.

Для элемента $x \in X$ его образ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in \mathbf{R}^m$ называют возможным вектором, а $Y = f[X] = \{f(x) \in \mathbf{R}^m \mid \text{при некотором } x \in X\}$ есть множество всех возможных векторов. Здесь $\mathbf{R}^m$ означает арифметическое пространство $m$-мерных векторов со стандартными операциями сложения векторов и умножения вектора на число. Его именуют *критериальным пространством*.

Отношение $\succ_X$ индуцирует на множестве $Y$ соответствующее ему отношение предпочтения $\succ_Y$ следующим образом:

$$\mu^-_{\succ_Y}(f(x), f(x')) = \mu^-_{\succ_X}(x, x'),$$

$$\mu^+_{\succ_Y}(f(x), f(x')) = \mu^+_{\succ_X}(x, x')$$

для всех $x, x' \in \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности множества $X$, порожденных отношением равенства на $\mathbf{R}^m$.

**Аксиома 2.** *На всем пространстве* $\mathbf{R}^m$ *существует иррефлексивное и транзитивное ИНО2П* $\succ$ *с составляющими* $\mu^-(\cdot), \mu^+(\cdot)$, *сужение которого на множество Y совпадает* с $\succ_Y$.

В этой аксиоме утверждается, что нечеткое иррефлексивное и транзитивное отношение $\succ_Y$ может быть продолжено на все критериальное пространство $\mathbf{R}^m$ с сохранением свойств иррефлексивности и транзитивности.

**Аксиома 3.** *Для любой пары векторов* $y, y' \in \mathbf{R}^m$ *таких, что* $y_i > y'_i$ *для некоторого* $i \in \{1, 2, ..., m\}$ *и* $y_j = y'_j$ *для всех остальных* $j \neq i$, *выполнено* $\mu^-(y, y') = \mu^+(y, y') = 1$.

Данная аксиома отражает заинтересованность ЛПР в максимизации каждого из имеющихся критериев.

**Аксиома 4**. *ИНО2П* $\succ$ *является инвариантным относительно линейного положительного преобразования, т.е.*

$$\mu^-(\alpha x + c, \alpha y + c) = \mu^-(x, y),$$

$$\mu^+(\alpha x + c, \alpha y + c) = \mu^+(x, y);$$

*для всех* $x, y, c \in \mathbf{R}^m$ *и каждого* $\alpha > 0$.

Напомним, что отношение Парето $\geq$ на пространстве $\mathbf{R}^m$ определяется эквивалентностью

$$y \geq y' \iff y_i \geqq y'_i,\ i = 1, 2, ..., m, \text{ и } y \neq y',$$

а (четкое) множество парето-оптимальных вариантов есть

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X \text{ такого, что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

**Аксиома Парето**. *Выполнение неравенства* $f(x') \geq f(x)$ *для элементов* $x, x' \in X$ *всякий раз влечет равенства* $\mu^-(x', x) = \mu^+(x', x) = 1$.

Нетрудно видеть, что из Аксиомы Парето вытекает Аксиома 3, но не наоборот.

**Принцип Эджворта-Парето**. *Принятие Аксиомы 1 и Аксиомы Парето гарантирует, что для любого ИНМ2П* $C(X)$ *имеет место включение* $C(X) \subset P_f(X)$, *которое в терминах функций принадлежности принимает вид неравенства*

$$\lambda^+_C(x) \leqq \lambda_P(x) \quad \text{для всех } x \in X, \qquad (1)$$

*где* $\lambda_P(x)$ *– характеристическая функция множества Парето*.

Для нечеткого отношения второго порядка этот принцип установлен в [13]. Здесь он сформулирован и доказан (см. Приложение) применительно к случаю ИНО2П. Этот принцип играет важную роль в задачах многокритериального выбора. В соответствии с ним для достаточно широкого класса задач многокритериального выбора (а именно, подчиняющихся требованиям Аксиомы 1 и Аксиомы Парето), любой выбор должен лежать в пределах множества Парето. Заметим, что для выполнения принципа Эджворта-Парето транзитивность отношения предпочтения не требуется.

## 3. Кванты нечеткой информации и схема их использования

Далее Аксиомы 1-4 предполагаются выполненными. В этих условиях можно ввести следующее ключевое понятие данной работы.

**Определение 1**. Пусть $A$ и $B$ – два непустых непересекающихся подмножества множества номеров критериев $I = \{1, 2, ..., m\}$. Говорят, что задан *квант ИНО2П информации* с этими группами критериев и двумя наборами положительных параметров $w_i$ для всех $i \in A$ и $w_j$ для всех $j \in B$, а также диапазоном степени уверенности $[\mu^-, \mu^+] \subset (0,1]$, $\mu^- \leqq \mu^+$, если $\mu^-(u, \mathbf{0}) = \mu^-$, $\mu^+(u, \mathbf{0}) = \mu^+$, где вектор $u \in \mathbf{R}^m$ имеет компоненты:

$$u_i = w_i,\ u_j = -w_j,\ u_s = 0 \qquad (2)$$

$$\text{для всех } i \in A,\ j \in B,\ s \notin A \cup B.$$

В условиях данного определения группу критериев $f_i, i \in A$ называют *более важной*, чем группа критериев $f_j, j \in B$.

Напоминаем, что в Определении 1 участвует ИНО2П, существование которого гарантируется Аксиомой 2. Нижняя и верхняя составляющие этого отношения обозначены $\mu^-(\cdot,\cdot)$ и $\mu^+(\cdot,\cdot)$.

Согласно Определению 1, всякий вектор

$$u \in \mathbf{N}^m =$$

$$= \{u \in \mathbf{R}^m \mid \exists u_i, u_j \text{ такие, что } u_i > 0,\, u_j < 0\}$$

с компонентами (2) может образовать квант ИНО2П информации, если равенства $\mu^-(u,\mathbf{0}) = \mu^-$, $\mu^+(u,\mathbf{0}) = \mu^+$ выполняются для некоторых $\mu^-, \mu^+ \in (0,1]$, $\mu^- \leqq \mu^+$. Например, равенства $\mu^-((2,-1),\mathbf{0}) = 0.6$ и $\mu^+((2,-1),\mathbf{0}) = 0.8$ задают простейший квант интервальной нечеткой информации о том, что первый критерий для ЛПР важнее второго с параметрами $w_1 = 2, w_2 = 1$ и диапазоном степени уверенности $[0.6, 0.8]$.

Обсудим возможность применения квантов интервальной нечеткой информации для сужения множества Парето. В случае одного кванта можно опираться на нижеследующий результат, в котором говорится об использовании нечеткой информации об отношении предпочтения первого порядка. Для его формулировки нам понадобится множество выбираемых векторов $C(Y)$ с функцией принадлежности

$$\lambda_Y^C(y) = \begin{cases} \lambda_X^C(x), & \text{если } y = f(x) \\ & \text{при некотором } x \in X, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и множество парето-оптимальных векторов $P(Y) = f(P_f(X))$ с характеристической функцией:

$$\lambda_Y^P(y) = \lambda_X^P(x) \text{ для всех } y = f(x),\ x \in \tilde{X},$$

где $\tilde{X}$ – множество классов эквивалентности, порожденных отношением равенства на $\mathbf{R}^m$.

**Теорема 1** [1]. *Пусть задан квант информации о нечетком отношении предпочтения ЛПР первого порядка с непустыми и непересекающимися группами номеров критериев* $A$, $B \subset I$, *положительными параметрами* $w_i$, $w_j$ *для всех* $i \in A,\ j \in B$ *и степенью уверенности* $\mu \in (0,1]$. *Тогда для любого нечеткого множества выбираемых векторов первого порядка с функцией принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *имеют место неравенства:*

$$\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda_M(y) \leqq \lambda_Y^P(y) \text{ для всех } y \in Y,$$

*где* $\lambda_Y^P(\cdot)$ *– характеристическая функция множества парето-оптимальных векторов, а* $\lambda_M(\cdot)$ *– функция принадлежности, определяемая равенствами:*

$$\lambda_M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \varsigma(z,y) \text{ для всех } y \in Y,$$

$$\varsigma(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in \mathbf{R}_+^m, \\ \mu, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in \mathbf{R}_+^p, \quad z - y \notin \mathbf{R}_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\text{для всех } y, z \in Y,\ y \neq z,$$

*причем* $\mathbf{R}_+^p = \{y \in \mathbf{R}^p \mid y \geq \mathbf{0}\}$, $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$ *и вектор* $\hat{y}$ *(а также* $\hat{z}$*) составлен из компонент* $y_i$, $i \in \{1,2,\ldots,m\} \setminus B$, *(соответственно,* $z_i$, $i \in \{1,2,\ldots,m\} \setminus B$*), тогда как остальные его компоненты имеют вид* $w_j y_i + w_i y_j$ *(соответственно,* $w_j z_i + w_i z_j$*) при всех* $i \in A,\ j \in B$.

Анализ формулировки Теоремы 1 показывает, что для построения нечеткого множества первого порядка с функцией принадлежности $\lambda_M(y)$, а тем самым, для сужения множества Парето на основе кванта нечеткой информации первого порядка, следует решить две (четкие) многокритериальные задачи, точнее говоря, найти множества Парето в двух многокритериальных задачах. Начать следует с построения множества Парето в многокритериальной задаче с векторной функцией $f$ и множеством возможных вариантов $X$. После чего всем векторам найденного множества Парето следует присвоить степень принадлежности, равную единице, а остальным векторам – нулевую степень принадлежности. Затем на том же самом множестве $X$ необходимо решить многокритериальную задачу с «новой» (пересчитанной) $p$-мерной векторной функцией, имеющей компоненты $f_i$ для всех $i \in I \setminus B$ и $w_j f_i + w_i f_j$ для всех $i \in A,\ j \in B$. После чего всем векторам «старого» множества Парето, которые не попали в «новое» множество, на этот раз присвоить степень принадлежности $1-\mu$. Тем самым, сужение множества

Парето, в котором находится искомое множество выбираемых векторов, будет построено.

В случае бесконечного множества возможных векторов $Y$ построение функции $\lambda_M$ в соответствии с Теоремой 1 может оказаться сложной вычислительной задачей. Однако для конечного множества $Y$ эта задача существенно упрощается, и множество Парето может быть найдено в результате полного перебора всех пар возможных векторов и сравнения элементов каждой пары по отношению Парето.

Опираясь на формулы, определяющие функцию $\lambda_M(\cdot)$, нетрудно понять, что учет одного кванта интервальной нечеткой информации второго порядка может быть сведен к двукратному использованию Теоремы 1. А именно, сначала следует ее применить к одной составляющей интервального нечеткого отношения, например, полагая к Теореме 1 $\mu = \mu^-$, а затем к другой, т.е. при $\mu = \mu^+$. В результате каждому элементу множества возможных векторов будет сопоставлено два числа $\lambda_M^-$ и $\lambda_M^+$, одно из которых даст нижнюю границу степени принадлежности этого элемента множеству выбираемых векторов, а второе – верхнюю. Тем самым будет образована оценка сверху для множества выбираемых векторов $C(Y)$ в виде интервального нечеткого множества второго порядка с составляющими $\lambda_M^-$, $\lambda_M^+$.

Если эта оценка сверху окажется слишком «широкой» и окончательный выбор для ЛПР останется затруднительным, то полученное интервальное нечеткое множество второго порядка можно дефаззифицировать до нечеткого множества первого порядка, взяв в качестве его степени принадлежности, например, полусумму значений $\lambda_M^-$ и $\lambda_M^+$. После этого предлагается применить эвристический подход, представленный в [16], суть которого состоит в присоединении функции принадлежности получившегося нечеткого множества первого порядка к имеющемуся набору критериев и последующему использованию подходящего типа скаляризации многокритериальной задачи. Таким способом окончательный выбор будет завершен.

Когда у ЛПР в наличии имеется набор квантов интервальной нечеткой информации, приведенные выше рассуждения сохраняют свою силу, однако вместо Теоремы 1 следует воспользоваться подходящей для этого случая теоремой из [1] или общим алгоритмом, описанным в [17].

## 4. Непротиворечивость набора квантов нечеткой информации

Согласно Определению 1, каждый вектор $u \in \mathbf{R}^m$ вида (2) формирует квант интервальной нечеткой информации, если он оказывается предпочтительнее нулевого вектора с той или иной степенью уверенности. Если взять набор таких векторов, то по отдельности они очевидным образом задают соответствующие кванты. Однако рассмотрение их в совокупности может привести к несовместимости с базовой системой Аксиом 1-4. В таких случаях рассматриваемые наборы векторов невозможно использовать для сужения множества Парето, и они далее получат название противоречивых наборов.

Пусть имеется набор векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k \in \mathbf{N}^m$, $k \geq 1$, вместе с набором пар чисел $\mu_i^-, \mu_i^+ \in (0, 1]$ таких, что $\mu^-(u^i, \mathbf{0}) = \mu_i^-$, $\mu^+(u^i, \mathbf{0}) = \mu_i^+$, $i = 1, 2, \ldots, k$, причем $(\mu_1^-, \mu_2^-, \ldots, \mu_k^-) \leq (\mu_1^+, \mu_2^+, \ldots, \mu_k^+)$. Не ограничивая общности последующих рассуждений, примем $1 \geq \mu_1^+ \geq \mu_2^+ \geq \ldots \geq \mu_k^+ > 0$.

**Определение 2**. Совокупность векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k \in \mathbf{N}^m$ вместе с набором чисел $\mu_i^-, \mu_i^+ \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $(\mu_1^-, \mu_2^-, \ldots, \mu_k^-) \leq (\mu_1^+, \mu_2^+, \ldots, \mu_k^+)$, образуют *непротиворечивый набор квантов интервальной нечеткой информации*, если существует ИНО2П с составляющими $\mu^-(\cdot,\cdot)$, $\mu^+(\cdot,\cdot)$, которое удовлетворяет Аксиомам 2-4, причем $\mu^-(u^i, \mathbf{0}) = \mu_i^-$, $\mu^+(u^i, \mathbf{0}) = \mu_i^+$, $i = 1, 2, \ldots, k$. В противном случае указанную совокупность векторов будем именовать *противоречивой*.

Определение 2 является прямым обобщением определения непротиворечивого набора квантов нечеткой информации первого порядка [1].

Пусть $e^i$ – единичный вектор пространства $\mathbf{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Введем четкие многогранные конусы $C_i$, $i=1,2,...,k$, порожденные набором векторов $e^1,e^2,...,e^m$ вместе с векторами $u^j$, $j=1,2,...,i$. Очевидно, $C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_k$.

В следующей теореме формулируется критерий непротиворечивости набора квантов интервальной нечеткой информации второго порядка.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены Аксиомы 2-4 и* $1 \geqq \mu_1^- \geqq \mu_2^- \geqq ... \geqq \mu_k^- > 0$. *Набор векторов* $u^1,u^2,...,u^k \in \mathbf{N}^m$ *совместно с набором чисел* $\mu_i^-, \mu_i^+ \in (0,1]$, $i=1,2,...,k$, $(\mu_1^-,\mu_2^-,...,\mu_k^-) \leq (\mu_1^+,\mu_2^+,...,\mu_k^+)$, *являются непротиворечивыми, тогда и только тогда, когда система линейных уравнений*

$$\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_m e^m + \xi_1 u^1 + ... + \xi_k u^k = \mathbf{0} \tag{3}$$

*не имеет решения* $\lambda_1,...,\lambda_m,\xi_1,...,\xi_k \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i + \sum_{j=1}^{k}\xi_j > 0$ *и, кроме того, каждый конус* $C_l$, $l \in \{1,...,k-1\}$, *содержит только векторы* $u^i$, *для которых* $\mu_i^- \geqq \mu_l^-$ *и* $\mu_i^+ \geqq \mu_l^+$.

Этот результат, доказательство которого можно найти в Приложении, представляет собой обобщение полученного автором ранее [1] условия непротиворечивости для нечеткого отношения первого порядка. Для его проверки, как и в случае четкого отношения, можно использовать стандартные алгоритмы линейного программирования (см. Теорему 4.3 [1]). Второе условие непротиворечивости в Теореме 2, связанное с конусом $C_l$, также легко свести к решению определенной задачи линейного программирования, поскольку выполнение этого условия означает возможность представления заданного вектора в виде линейной неотрицательной комбинации набора векторов, образующих конус $C_l$.

Для задач небольшой размерности проверку непротиворечивости заданного набора векторов можно выполнить без использования средств линейного программирования.

Следует отметить, что в [14] для общего случая НО2П было введено понятие непротиворечивого набора квантов информации и в общих чертах намечены пути его использования для сужения множества Парето [15]. Введенное здесь Определение 2 не совпадает с аналогичным определением из [14]. Оно учитывает специфику интервального нечеткого отношения, и потому, на взгляд автора, в бо́льшей степени подходит для рассматриваемых задач с ИНО2П.

## 5. Иллюстративный пример

Разберем пример учета набора квантов интервальной нечеткой информации, предполагая, что Аксиомы 1-4 выполнены. Пусть $Y=\{y^1,y^2,...,y^5\} \subset \mathbf{R}^3$, причем

$$y^1=(6,3,5.5),\ y^2=(5,2,3),\ y^3=(4,3,3),$$
$$y^4=(5,2,6),\ y^5=(2,5,5).$$

В данном случае множество парето-оптимальных векторов состоит из трех элементов, т.е. его характеристическая функция есть $\lambda_Y^P(y^1)=\lambda_Y^P(y^4)=\lambda_Y^P(y^5)=1$, $\lambda_Y^P(y^2)=\lambda_Y^P(y^3)=0.$ Из дальнейшего рассмотрения векторы, которые не являются парето-оптимальными, можно исключить. Они согласно принципу Эджворта-Парето не должны оказаться выбранными.

Предположим, что от ЛПР получена информация о том, что первый критерий важнее второго с параметрами $w_1'=0.4$, $w_2'=0.6$ и степенью уверенности в пределах [0.6, 0.8], а также, что первый критерий важнее третьего с параметрами $w_1''=0.5$, $w_3''=0.5$ и диапазоном степени уверенности [0.4, 0.7].

Сначала убедимся, что имеющаяся информация непротиворечива. В данном случае $u^1=(0.4,-0.6,0)$, $u^2=(0.5,0,-0.5)$ и система линейных уравнений (3) принимает вид:

$$\lambda_1 + 0.4\xi_1 + 0.5\xi_2 = 0;$$
$$\lambda_2 - 0.6\xi_1 = 0;$$
$$\lambda_3 - 0.5\xi_2 = 0.$$

Если предположить, что эта система совместна, то с учетом неотрицательности всех переменных из первого уравнения вытекает $\lambda_1=\xi_1=\xi_2=0$. Тогда из двух других уравнений получаем равенство нулю и остальных переменных: $\lambda_2=\lambda_3=0$. Следовательно, в данном случае система (3) не имеет ненулевых неотрицательных решений.

Проверим выполнение второго условия Теоремы 2. Имеем $1>0.8>0.6$ и $1>0.7>0.4$, причем $(1,0.7,0.4) \leq (1,0.8,0.6)$. В данном случае конус $C_1$ порождается векторами $e^1,e^2,e^3,u^1$. Он не содержит вектор $u^2$, поскольку система линейных уравнений

$$\lambda_1 + 0.4\xi_1 = 0.5;$$
$$\lambda_2 - 0.6\xi_1 = 0;$$
$$\lambda_3 = -0.5;$$

не имеет неотрицательных решений.

Для учета заданной нечеткой информации Теорема 2 не подходит, поскольку здесь имеются два кванта. Вместо нее аналогичным образом будем использовать Теорему 7. 6 [1], так как в ней идет речь как раз о подобных двух квантах. В соответствии с этой теоремой и ее обозначениями для «нового» второго критерия получаем следующее выражение $\overline{y}_2 = 0.6y_1 + 0.4y_2$. Поэтому представители «нового» множества парето-оптимальных векторов приобретают вид:

$$\overline{y}^1 = (6, 4.8, 5.5),\ \overline{y}^4 = (5, 3.8, 6),\ \overline{y}^5 = (2, 3.2, 5).$$

Здесь множество Парето состоит из двух векторов – первого и четвертого. Поэтому в соответствии с рекомендацией Теоремы 7.6 [1] полагаем:

$$\lambda^M\left(y^1\right) = \lambda^M\left(y^4\right) = 1,\ \lambda^M\left(y^5\right) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Далее, согласно той же теореме, вводим следующую пару новых (второго и третьего) критериев $\hat{y}_2 = 0.6y_1 + 0.4y_2$, $\hat{y}_3 = 0.5y_1 + 0.5y_2$, а также формируем дополнительный четвертый критерий $\hat{y}_4 = 0.3y_1 + 0.2y_2 + 0.3y_3$. Находим соответствующий новый образ (без учета $\hat{y}^5$):

$$\hat{y}^1 = (6, 4.8, 4.5, 4),\ \hat{y}^4 = (5, 3.8, 3.5, 3.7).$$

Здесь парето-оптимальным является вектор $\hat{y}^4$. В итоге приходим к следующей оценке сверху для нижней составляющей неизвестного нечеткого множества выбираемых векторов:

$$\lambda_C^-\left(y^4\right) = 1 - 0.6 = 0.4,\quad \lambda_C^-\left(y^1\right) = 1,\ \lambda_C^-\left(y^5\right) = 0.2,$$
$$\lambda_C^-\left(y^2\right) = \lambda_C^-\left(y^3\right) = 0.$$

Аналогично для верхней составляющей получим:

$$\lambda_C^+\left(y^4\right) = 1 - 0.4 = 0.6,\ \lambda_C^+\left(y^1\right) = 1,$$
$$\lambda_C^+\left(y^5\right) = 1 - 0.7 = 0.3,\ \lambda_C^+\left(y^2\right) = \lambda_C^+\left(y^3\right) = 0.$$

Найденное ИПМ2П $C(X)$ является сужением исходного множества Парето за счет использования указанных двух квантов интервальной нечеткой информации. Как видим, наилучшим кандидатом в число выбираемых векторов является первый вектор, поскольку его степень принадлежности в точности равна 1. После него следует четвертый вектор, затем – пятый. Остальные векторы ни при каких обстоятельствах не должны входить в множество выбираемых векторов, поскольку они не являются парето-оптимальными.

## Заключение

Сведения об интервальном нечетком отношении предпочтения ЛПР второго порядка в виде соответствующих квантов можно использовать при решении задачи многокритериального выбора. Для этого ЛПР должно принять четыре аксиомы «разумного» выбора, в рамках которых справедлив соответствующий нечеткий вариант принципа Эджворта-Парето. Дальнейшее сужение множества Парето предложено осуществлять с помощью квантов интервальной нечеткой информации второго порядка в соответствии с описанной схемой, которая допускает использование полученных автором ранее результатов, основанных на нечетких квантах первого порядка.

Установлен критерий непротиворечивости конечного набора интервальных нечетких квантов, проверка которого в общем случае может быть осуществлена средствами линейного программирования. Разобранный иллюстративный пример задачи многокритериального выбора невысокой размерности демонстрирует возможность учета нескольких квантов интервальной нечеткой информации, не прибегая к сложным расчетам, без привлечения средств линейного программирования.

## Приложение

### Доказательство принципа Эджворта-Парето

Предположим, что неравенство (1) при некотором $x \in X$ нарушается, т.е. $\mu_C^+(x) > \lambda_P(x)$. В правой части неравенства записана характеристическая функция множества Парето. Она может принимать только два значения – 0 или 1. Второе значение в данном случае невозможно, поэтому приходим к равенству $\lambda_P(x) = 0$, которое означает, что элемент $x$ не является парето-оптимальным. Следовательно, $\mu_C^+(x) > 0$ и для $x$ существует такой элемент $x' \in X$, что $f(x') \geq f(x)$. Отсюда, согласно Аксиоме Парето, получаем $\mu_{\succ}(x', x) = 1$, а последующее применение

Аксиомы 1 немедленно влечет равенство $\mu_C^+(x)=0$, противоречащее полученному выше неравенству $\mu_C^+(x)>0$. Полученное противоречие устанавливает справедливость неравенства (1).

## Доказательство Теоремы 2

***Необходимость.*** Пусть набор векторов $u^1,u^2,...,u^k \in \mathbf{N}^m$ совместно с набором чисел $\mu_i^- \in (0,1]$, $i=1,2,...,k$, образуют непротиворечивый набор квантов интервальной нечеткой информации в смысле Определения 2. Рассмотрим нечеткое отношение первого порядка с функцией принадлежности $\mu^+(\cdot,\cdot)$. Это отношение удовлетворяет Аксиомам F2 – F4 [1] и вместе с числами $\mu_1^+,\mu_2^+,...,\mu_k^+$ задает непротиворечивый набор в смысле Определения 7.2 [1]. Принимая во внимание неравенства $1\geqq\mu_1^+\geqq\mu_2^+\geqq...\geqq\mu_k^+>0$, применяем Теорему 7.2 [1]. В соответствии с этой теоремой система линейных уравнений (3) не имеет решения $\lambda_1,...,\lambda_m,\xi_1,...,\xi_k\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i+\sum_{j=1}^{k}\xi_j>0.$ Более того, каждый конус $C_l$, $l\in\{1,...,k-1\}$ не содержит векторов $u^i$, для которых $\mu_i^+<\mu_l^+$. Это означает, что каждый такой конус содержит только векторы $u^i$, для которых $\mu_i^+\geqq\mu_l^+$.

Рассмотрим нечеткое отношение первого порядка с функцией принадлежности $\mu^-(\cdot,\cdot)$. Благодаря $1\geqq\mu_1^-\geqq\mu_2^-\geqq...\geqq\mu_k^->0$, каждый конус $C_l$ содержит только те векторы $u^i$, для которых $\mu_i^-\geqq\mu_l^-$, $l\in\{1,...,k-1\}$.

***Достаточность.*** Пусть система линейных уравнений (3) не имеет решения $\lambda_1,...,\lambda_m,\xi_1,...,\xi_k\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i+\sum_{j=1}^{k}\xi_j>0,$ и каждый конус $C_l$, $l\in\{1,...,k-1\}$ содержит только те векторы $u^i$, для которых выполнено $\mu_i^-\geqq\mu_l^-$ и $\mu_i^+\geqq\mu_l^+$.

Рассмотрим нечеткое отношение первого порядка с функцией принадлежности $\mu^+(\cdot,\cdot)$. Согласно Теореме 7.2 [1], принимая во внимание неравенства $1\geqq\mu_1^+\geqq\mu_2^+\geqq...\geqq\mu_k^+>0$, набор векторов $u^1,u^2,...,u^k$ совместно с набором чисел $\mu_i^+\in(0,1]$, $i=1,2,...,k$, образуют непротиворечивый набор квантов нечеткой информации первого порядка в смысле Определения 7.2 [1].

Аналогично можно рассмотреть нечеткое отношение первого порядка с функцией принадлежности $\mu^-(\cdot,\cdot)$ и прийти к выводу, что набор векторов $u^1,u^2,...,u^k$ совместно с набором чисел $\mu_i^-\in(0,1]$, $i=1,2,...,k$, также образуют непротиворечивый набор квантов в смысле Определения 7.2 [1].

Так как оба нечетких отношения первого порядка удовлетворяют Аксиомам F2 – F4 [1], ИНО2П с образующими $\mu^-(\cdot,\cdot)$, $\mu^+(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет Аксиомам 2 - 4, причем $\mu^-(u^i,\mathbf{0})=\mu_i^-$, $\mu^+(u^i,\mathbf{0})=\mu_i^+$, $i=1,2,...,k$. Следовательно, набор векторов $u^1,u^2,...,u^k$ совместно с набором чисел $\mu_i^-,\mu_i^+\in(0,1]$, $i=1,2,...,k$, образуют непротиворечивый набор квантов в смысле Определения 2.

## Литература


1. Noghin V.D. Reduction of the Pareto set. An axiomatic approach. Springer AG. 2018.
2. Karnik N.N., Mendel J.M. and Liang Q. Type-2 fuzzy logic systems // IEEE Transaction Fuzzy Systems. 1999. V. 7. No 6. P. 643–658.
3. Mendel J.M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems // Information Sciences. 2007. V. 177. P. 84–110.
4. Mendel J.M., Liu X. Type-2 fuzzy sets and systems: a retrospective // IEEE Transaction Fuzzy Systems. 2015. V. 1. No 6. P. 1056–1069.
5. Baskov O.V., Noghin V.D. Type-2 fuzzy sets and their application in decision-making: general concepts // Scientific and Technical Information Processing. 2022. V. 49. P. 283–291.
6. Bustince H. et al. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2016. V. 24, No 1. P. 179–194.
7. Liang Q., Mendel J.M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design // IEEE Transaction Fuzzy Systems. 2000. V. 8. No 5. P. 535–550.
8. Bustince H. et al. A survey of interval-valued fuzzy sets. 2008. Handbook of Granular Computing. P. 489-515.

9. Bustince H. Interval-valued fuzzy sets in soft computing // International Journal of Computational Intelligence Systems. 2010. V. 3. No 2. P. 215–222.
10. Huidobro P., Alonso P., Janiš V. et al. Convexity and level sets for interval-valued fuzzy sets // Fuzzy Optimization and Decision Making. 2022. P. 553–580.
11. Runkler T., Coupland S., John R. Interval type-2 fuzzy decision making // International Journal of Approximate Reasoning, 2017. V. 80. P. 217-224.
12. Bustince H. et al. A Survey of applications of the extensions of fuzzy sets to image processing. In: Melin, P., Kacprzyk, J., Pedrycz, W. (eds) Bio-inspired Hybrid Intelligent Systems for Image Analysis and Pattern Recognition. Studies in Computational Intelligence. 2009. V. 256. Springer.
13. Baskov O.V., Noghin V.D. The Edgeworth-Pareto principle in the case of IT2F preference relation // Journal of Physics Conference Series. 2021.
14. Baskov O.V. Consistency of information about type-2 fuzzy preference relation // International Journal of Information Technology and Decision Making. 2022. P. 1–15.
15. Басков О.В. Сужение множества Парето на основе информации о нечетком отношении предпочтения второго порядка. Описание алгоритма // Искусственный интеллект и принятие решений. 2022. № 3. С. 63–71.
16. Noghin V.D. Multicriteria choice on a fuzzy set as a problem of searching for compromise // Scientific and Technical Information Processing. 2019. V. 46. P. 397–403.
17. Ногин В.Д. Алгоритм сужения множества Парето при помощи набора квантов нечеткой информации // Искусственный интеллект и принятие решений. 2022. № 4. С. 95–104.

**Ногин Владимир Дмитриевич.** Доктор физико-математических наук, профессор. Действительный член Международной академии наук высшей школы. Профессор кафедры теории управления. Санкт-Петербургский государственный университет. Области исследований: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация. E-mail: noghin@gmail.com

# Multicriteria Choice Based on Interval Fuzzy Information

V. D. Noghin

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

**Abstract**. We consider a class of multicriteria choice problems in which the preferences of the decision maker are modeled by an interval type-2 fuzzy relation. The basic axioms of 'reasonable' choice are formulated. They, in particular, allow us to establish the Edgeworth-Pareto principle for this class of problems. The concept of a quantum of interval fuzzy information is introduced, as well as a consistent set of similar quanta. A criterion for the consistency of a set of quanta is formulated and a scheme for using quanta of interval fuzzy information to reduce the Pareto set is presented. An example is given to illustrate the proposed approach.
**Keywords:** multicriteria choice, interval fuzzy relation, quantum of interval fuzzy information, consistency of quanta.

**DOI** 10.14357/20718594230408 **EDN** NUAURI

## References

1. Noghin V.D. Reduction of the Pareto set. An axiomatic approach. Springer AG. 2018.
2. Karnik N.N., Mendel J.M. and Liang Q. Type-2 fuzzy logic systems // IEEE Transaction Fuzzy Systems. 1999. V. 7. No 6. P. 643–658.
3. Mendel J.M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems // Information Sciences. 2007. V. 177. P. 84–110.
4. Mendel J.M., Liu X. Type-2 fuzzy sets and systems: a retrospective // IEEE Transaction Fuzzy Systems. 2015. V. 1. No 6. P. 1056–1069.
5. Baskov O.V., Noghin V.D. Type-2 fuzzy sets and their application in decision-making: general concepts // Scientific and Technical Information Processing. 2022. V. 49. P. 283–291.
6. Bustince H. et al. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2016. V. 24, No 1. P. 179–194.
7. Liang Q., Mendel J.M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design // IEEE Transaction Fuzzy Systems. 2000. V. 8. No 5. P. 535–550.
8. Bustince H. et al. A survey of interval-valued fuzzy sets. 2008. Handbook of Granular Computing. P. 489-515.
9. Bustince H. Interval-valued fuzzy sets in soft computing // International Journal of Computational Intelligence Systems. 2010. V. 3. No 2. P. 215–222.
10. Huidobro P., Alonso P., Janiš V. et al. Convexity and level sets for interval-valued fuzzy sets // Fuzzy Optimization and Decision Making. 2022. P. 553–580.
11. Runkler T., Coupland S., John R. Interval type-2 fuzzy decision making // International Journal of Approximate Reasoning, 2017. V. 80. P. 217-224.
12. Bustince H. et al. A Survey of applications of the extensions of fuzzy sets to image processing. In: Melin, P., Kacprzyk, J., Pedrycz, W. (eds) Bio-inspired Hybrid Intelligent Systems for Image Analysis and Pattern Recognition. Studies in Computational Intelligence. 2009. V. 256. Springer.

13. Baskov O.V., Noghin V.D. The Edgeworth-Pareto principle in the case of IT2F preference relation // Journal of Physics Conference Series. 2021.
14. Baskov O.V. Consistency of information about type-2 fuzzy preference relation // International Journal of Information Technology and Decision Making. 2022. P. 1–15.
15. Baskov O.V. Suzhenie mnozhestva Pareto na osnove informacii o nechetkom otnoshenii predpochteniya vtorogo poryadka. Opisanie algoritma [Reduction of the Pareto set based on information about the type-2 fuzzy preference relation. Description of the algorithm] // Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij [Artificial Intelligence and Decision Making]. 2022. No 3. P. 63–71.
16. Noghin V.D. Multicriteria choice on a fuzzy set as a problem of searching for compromise // Scientific and Technical Information Processing. 2019. V. 46. P. 397–403.
17. Noghin V.D. Algoritm suzheniya mnozhestva Pareto pri pomoshchi nabora kvantov nechetkoj informacii [Algorithm for Reduction of the Pareto Set Using a Collection of Fuzzy Information Quanta] // Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij. [Artificial Intelligence and Decision Making]. 2022. No 4. C. 95–104.

**Noghin Vladimir D.** Doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the International Academy of Sciences of Higher Education. Professor of the Department of Control Theory of St. Petersburg State University. Research areas: multi-criteria decision making, multi-criteria optimization. E-mail: noghin@gmail.com