Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, М. М. Степанова, Инфракрасная асимптотика фермионного пропагатора в простой неабелевой модели, *ТМФ*, 1993, том 96, номер 2, 313–320

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 96, № 2
август, 1993

Н. В. Антонов, А. Н. Васильев,
М. М. Степанова

ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ФЕРМИОННОГО ПРОПАГАТОРА В ПРОСТОЙ НЕАБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ

Исследована асимптотика больших расстояний фермионного пропагатора в простой неабелевой модели фермионов и безмассовых бозонов, обобщающей рассмотренную в [1] модель с изоспином на случай произвольной компактной полупростой группы Ли и размерности пространства $d \leq 4$. Ведущее инфракрасное приближение для асимптотики получено с помощью метода ренормализационной группы, примененного к эффективной одномерной безмассовой модели, описывающей эйкональное приближение к исходной теории поля.

В работе [1] исследовалась асимптотика больших расстояний фермионного пропагатора в простой неабелевой модели, описывающей взаимодействие массивного спинорного поля и безмассового скалярного поля с изоспином. Функционал действия имеет вид

$$S = -(\partial\varphi)^2/2 - \bar{\psi}[\gamma_\mu\partial_\mu + m + g\sigma^a\varphi^a]\psi \tag{1}$$

с подразумеваемым суммированием по лоренцевым и изотопическим индексам полей и интегрированием по евклидову пространству размерности $d = 4$. Некоммутативность матриц Паули σ^a, входящих во взаимодействие (1), сближает эту модель с неабелевыми калибровочными теориями поля, чем и объясняется интерес к ней. В главном инфракрасном (ИК) приближении асимптотика больших расстояний фермионного пропагатора $G(\mathbf{x}) = \langle\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(0)\rangle$ имеет вид [1]

$$G(\mathbf{x}) = G_0(\mathbf{x})f(r), \qquad f(r) = [1 + (2g^2/\pi^2)\ln(mr)]^{-3/8}, \tag{2}$$

где $G_0(\mathbf{x})$ – свободный пропагатор и $r = |\mathbf{x}|$. Выражение (2), учитывающее все вклады порядка единицы в предположении $g^2 \ll 1$, $g^2\ln(mr) \simeq 1$, напоминает по форме однопетлевое приближение ренормализационной группы (РГ). Однако метод РГ, примененный непосредственно к модели (1), не позволяет найти искомую асимптотику, т.к. лишь сводит задачу к исследованию особенностей на массовой поверхности не определяемой в рамках

РГ скейлинговой функции. Результат (2) был получен в [1] другим способом, существенно использующим специфические свойства модели (1).

Тем не менее, как мы покажем, искомая асимптотика может быть получена с помощью метода РГ, но примененного не к самой модели (1), а к эффективной одномерной безмассовой (в этом главное отличие) модели, описывающей эйкональное приближение для фермионного пропагатора. Ввиду универсальности метода РГ этот результат обобщается на другие неабелевы модели, рассматриваемые в приближении эйконала. Так, мы получим аналог асимптотики (2) для произвольной компактной полупростой группы Ли и размерности пространства $d \leq 4$. Кроме того, учет старших петель в методе РГ позволяет строить поправки к ведущему ИК-приближению.

Рассмотрим модель спинорного ψ, $\bar{\psi}$ и скалярного φ полей с функционалом действия

$$S = -(\partial\varphi)^2/2 - \bar{\psi}[\gamma_\mu\partial_\mu + m + gt^a\varphi^a]\psi, \tag{3}$$

в котором t^a – набор генераторов некоторого представления полупростой компактной группы Ли, подразумевается суммирование по d-мерному евклидову пространству и суммирование по лоренцевым и изотопическим индексам полей, например, $\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi \equiv \bar{\psi}_{\alpha i}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\psi_{\beta i}$, $\bar{\psi}t^a\varphi^a\psi \equiv \bar{\psi}_{\alpha i}t^a_{ik}\varphi^a\psi_{\alpha k}$.

Для построения ведущего ИК-приближения [1,2] поле φ представляют в виде суммы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ жесткого и мягкого вкладов, жесткое поле $\varphi_1(\mathbf{k})$ в импульсном представлении обращается в нуль при $|\mathbf{k}| \leq k_0$, мягкое $\varphi_2(\mathbf{k})$ – при $|\mathbf{k}| > k_0$, где k_0 – некоторый фиксированный разделительный масштаб. Фермионные петли отбрасываются, а пропагатор фермиона представляется в факторизованном виде:

$$G(\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{x})G_2(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Здесь $G_1(\mathbf{x})$ – пропагатор фермиона в жестком поле φ_1, влияющий лишь на нормировку асимптотики, все ИК-особенности содержатся в "мягком" множителе $G_2(\mathbf{x})$, представляемом в эйкональном виде:

$$G_2(\mathbf{x}) = \left\langle\!\!\left\langle T\text{-}\exp g\int_0^{\mathbf{x}} t^a\varphi_2^a(\mathbf{x}_s)\,ds \right\rangle\!\!\right\rangle. \tag{5}$$

Символ T обозначает упорядочение вдоль луча $0\mathbf{x}$, по которому производится интегрирование, s – длина пути по лучу, $\mathbf{x}_s$ – соответствующая точка на луче, скобки $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$ – усреднение по распределению мягкого поля φ_2.

При отсутствии в действии (3) некоммутирующих матриц t^a в выражении типа (5) возникала бы простая экспонента, и гауссово усреднение по φ_2 выполнялось бы явно, как это имеет место в квантовой электродинамике (см., например, [2]) или в задачах о распространении волн в сильно флуктуирующих средах [3,4].

В неабелевом случае вычислить (5) явно не удается. Заметим, однако, что выражение (5) совпадает (точнее см. ниже) с пропагатором в эффективной одномерной модели с функционалом действия

$$\widetilde{S} = -\frac{1}{2}\varphi\widetilde{D}^{-1}\varphi - \bar{\psi}(\partial/\partial t + gt^a\varphi^a)\psi \tag{6}$$

с подразумеваемым суммированием по индексам полей $\psi_i, \bar{\psi}_i, \varphi^a$ и интегрированием по их одномерному аргументу, в частности,

$$\varphi\widetilde{D}^{-1}\varphi = \int dt \int dt'\, \varphi^a(t)\widetilde{D}^{-1}(t-t')\varphi^a(t').$$

Здесь $\widetilde{D}(t)$ – пропагатор поля $\varphi(t)$, совпадающий с пропагатором мягкого поля φ_2 в исходной d-мерной модели (3) в $\mathbf{x}$-представлении с заменой $r = |\mathbf{x}| \to |t|$:

$$\widetilde{D}(t) = \int\limits_{k\le k_0} d\mathbf{k}\frac{1}{k^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\bigg|_{|\mathbf{x}|\to|t|}. \tag{7а}$$

В главном ИК-приближении можно пренебречь различием мягкого φ_2 и полного φ полей, сняв ограничение $k = |\mathbf{k}| \le k_0$ на область интегрирования в (7а), тогда

$$\widetilde{D}(t) = \Gamma(d/2-1)|t|^{2-d}/4\pi^{d/2}. \tag{7б}$$

Размерность пространства исходной модели d входит в (7б) как параметр. Запаздывающий пропагатор $\widetilde{G}(t) = \langle\psi(t)\bar{\psi}(0)\rangle$ в модели (6), равный нулю при $t < 0$, совпадает при $t > 0$ с "мягким" множителем $G_2(\mathbf{x})$ в (5), с заменой $r = |\mathbf{x}| \to t$. По индексам пропагаторы $\widetilde{D}(t)$ и $\widetilde{G}(t)$ кратны соответствующим δ-символам.

В отличие от исходной эффективная модель (6) безмассовая, и ее ИК-асимптотика может быть найдена с помощью стандартной РГ-процедуры (см., например, [5, гл. 7]. Модель (6) логарифмична (безразмерность затравочной константы связи g) при $d = 4$, ультрафиолетовые расходимости имеют вид полюсов по $\varepsilon \equiv 2 - d/2$ – параметру отклонения от логарифмичности. Канонические размерности полей при $\varepsilon = 0$ равны 1 для φ и 0 для произведения $\psi\bar{\psi}$, поэтому для полного устранения ультрафиолетовых (УФ) расходимостей нужно бесконечное количество контрчленов типа $\bar{\psi}\partial_t\psi\cdot(\bar{\psi}\psi)^n$, $\bar{\psi}\,(t^a\varphi^a)\,\psi\cdot(\bar{\psi}\psi)^n$ с любым $n \ge 0$. Тем самым модель в целом не является ренормируемой. Нас интересуют, однако, не все функции Грина модели (6), а только пропагатор $\langle\psi\bar{\psi}\rangle$, для устранения расходимостей в котором, как ясно из анализа диаграмм теории возмущений, требуются лишь контрчлены $\bar\psi\partial_t\psi$ и $\bar\psi\,(t^a\varphi^a)\,\psi$, воспроизводимые мультипликативной ренормировкой действия вида

$$(8)\qquad \widetilde{S}_R = -\frac{1}{2}\varphi\widetilde{D}^{-1}\varphi - \bar\psi\,[Z_1\partial_t + Z_2 g_R\mu^\varepsilon t^a\varphi^a]\,\psi.$$

Здесь g_R – ренормированная константа связи, нормировочная масса μ – произвольный параметр ренормированной теории в используемой нами схеме минимальных вычитаний [5, гл. 3]. Первый член (8) не ренормируется, т.к. в функции Грина $\langle\varphi\varphi\rangle$ нет нетривиальных диаграмм.

Двухпетлевой расчет ренормировочных констант $Z_{1,2}$ в схеме минимальных вычитаний дает (подробнее см. приложение)

$$(9)\qquad \begin{aligned} Z_1 &= 1 - uC_R/2\varepsilon + u^2C_R(C_R - C_A)/8\varepsilon^2 \\ &\quad + u^2C_RC_A/8\varepsilon + O(u^3), \\ Z_2 &= 1 - u(C_R - C_A/2)2\varepsilon + u^2(C_R - C_A/2)(C_R - 3C_A/2)/8\varepsilon^2 \\ &\quad + u^2C_A(C_R - C_A/2)/8\varepsilon + O(u^3), \end{aligned}$$

где $u \equiv G_R^2/4\pi^2$ и константы C_A, C_R определяются соотношениями $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, $f^{acd}f^{bcd} = \delta^{ab}C_A$, $t^at^a - C_R\cdot\mathrm{I}$.

Ренормированный коррелятор $\widetilde{G}_R$, определяемый по действию (8), связан с исходным $\widetilde{G}$ соотношением $\widetilde{G} = Z_1\widetilde{G}_R$, дифференцирование по μ при фиксированной затравочной константе связи g приводит к стандартному уравнению РГ

$$(10)\qquad [\mathcal{D}_\mu + \beta(u)\partial_u + \gamma(u)]\,\widetilde{G}_R(t,\mu,u) = 0$$

с РГ-функциями

$$(11)\qquad \beta(u) = \widetilde{\mathcal{D}}_\mu u, \qquad \gamma(u) = \widetilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_1,$$

где $\mathcal{D}_\mu \equiv \mu\partial_\mu$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$ обозначает операцию $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$ при фиксированной g. Учитывая следующее из (8) соотношение затравочной и ренормированной констант связи $g = g_R\mu^\varepsilon Z_2Z_1^{-1}$, в приближении (9) из (11) получаем

$$(12)\qquad \begin{aligned} \beta(u) &= -2u\varepsilon + u^2C_A(1 - uC_A/2) + O(u^4), \\ \gamma(u) &= uC_R(1 - uC_A/2) + O(u^3). \end{aligned}$$

Из соображений размерности $\widetilde{G}_R(t,\mu,u) = F(t\mu,u)$. Уравнение (10) позволяет написать для $\widetilde{G}_R$ представление вида

$$(13)\qquad \widetilde{G}_R = F(1,\bar u)\exp\int_u^{\bar u}\gamma(u')\,du'/\beta(u'),$$

в котором инвариантный заряд $\bar{u}(t\mu, u)$ неявно определен соотношением

$$\ln(t\mu) = -\int_{u}^{\bar{u}} du'/\beta(u'). \tag{14}$$

Асимптотика больших расстояний выражения (13) определяется поведением инвариантного заряда $\bar{u}$ при $t\mu \to \infty$. В случае $d < 4$ $(\varepsilon > 0)$ β-функция (12) имеет ИК-устойчивую неподвижную точку $u_* = 2\varepsilon(1+\varepsilon)/C_A + O(\varepsilon^3)$, в которой $\beta(u_*) = 0$, $\beta'(u_*) > 0$, поэтому $\bar{u} \to u_*$ при $t\mu \to \infty$. Из (13) тогда находим

$$\widetilde{G}_R \simeq \mathrm{const}\cdot(t\mu)^{-\gamma_*}, \tag{15}$$

где аномальная размерность $\gamma_* = \gamma(u_*)$ в двухпетлевом приближении есть

$$\gamma(u_*) = 2\varepsilon C_R/C_A + O(\varepsilon^3). \tag{16}$$

Отсутствие вклада порядка ε^2 в (16) – следствие соотношения ренормировочных констант $Z_1 Z_2^\alpha = 1$, $\alpha = C_R/(C_A/2 - C_R)$, непосредственно проверяемого в двухпетлевом приближении (9). Если оно справедливо во всех порядках теории возмущений (чего мы, однако, не доказали), равенство $\gamma_* = 2\varepsilon C_R/C_A$ есть точный результат.

При $d = 4$ $(\varepsilon = 0)$ ИК-устойчивая неподвижная точка есть $u_* = 0$, и при $t\mu \to \infty$ в однопетлевом приближении из (13), (14) получаем

$$\widetilde{G}_R \simeq (\bar{u}u)^{C_R/C_A} = [1 + uC_A \ln(\mu t)]^{-C_R/C_A}. \tag{17}$$

Переход от $\widetilde{G}_R$ к исходному $\widetilde{G}$ и учет "жесткого" множителя G_1 в (4) не изменяют сингулярного вклада, а сводятся лишь к замене $\mu \to m$, где m – масса фермиона в (3). Окончательно получаем, что для модели (3) в асимптотике больших расстояний справедливо представление типа (2), в котором при $d < 4$: $f(r) \simeq (mr)^{-\gamma_*}$ с γ_* из (16), а при $d = 4$:

$$f(r) = [1 + (g^2 C_A/4\pi^2)\ln(mr)]^{-C_R/C_A}. \tag{18}$$

Для фундаментального представления группы SU_n имеем $C_A = n$, $C_R = (n^2 - 1)/2n$, что при $n = 2$, $d = 4$ воспроизводит результат (2), следует лишь учесть, что константы связи в (1) и (3) при $n = 2$ отличаются вдвое, поскольку в нашей нормировке $t^a = \sigma^a/2$.

Выражения (12)–(14) позволяют легко получить и двухпетлевую поправку к асимптотике (17), тогда при переходе к (18) следует с соответствующей точностью учесть первый сомножитель в (13) и жесткий вклад G_1 в представлении (4). Мы не будем приводить эти результаты, т.к. они имеют чисто методическое значение. Отметим также, что для коммутативного случая (однокомпонентные поля с взаимодействием вида $\bar{\psi}\varphi\psi$) эйкональный множитель в (5) вычисляется явно, благодаря чему ренормировочные константы и РГ-функции определяются точно: $Z_1 = Z_2 = \exp(-u/2\varepsilon)$, $\beta = -2\varepsilon u$, $\gamma = u$. Из-за отсутствия ИК-устойчивой неподвижной точки метод РГ не позволяет в этом случае найти ИК-асимптотику. Тем самым имеется своего рода дуализм: в простой скалярной модели усреднение эйкональной экспоненты в (5) дает точное решение задачи, в неабелевом случае работает метод РГ. Поэтому можно ожидать, что он окажется полезным в других моделях с некоммутативностью, рассматриваемых в приближении эйконала, например в задаче о распространении волны в сильно флуктуирующей анизотропной среде [6].

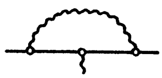
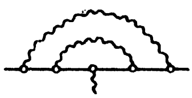
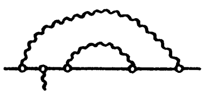
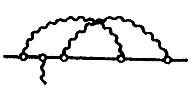
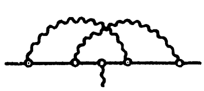
Авторы выражают благодарность Л.Ц.Аджемяну за ряд полезных обсуждений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В таблице приведены вклады в ренормировочные константы одно- и двухпетлевых диаграмм теории возмущений в модели (6).

Ренормировочные константы вычисляются по формуле [7] $Z = 1 - \mathcal{K}\mathcal{R}'\overline{\Gamma}$, в которой $\overline{\Gamma}$ – соответствующая 1-неприводимая функция Грина, в импульсном пространстве нормированная на единицу в нулевом порядке теории возмущений, именно, $\langle\psi\bar{\psi}\rangle$ для Z_1 и $\langle\bar{\psi}\psi\varphi\rangle$ для Z_2; $\mathcal{R}'$ – неполная $\mathcal{R}$-операция, $\mathcal{K}$ – операция вычитания, в схеме минимальных вычитаний она отбирает полюсы по $\varepsilon = 2 - d/2$. Диаграммы № 1, 3, 4 дают вклад в Z_1, № 2 и 5–8 – в Z_2. Сплошная линия обозначает затравочный пропагатор $\langle\psi\bar{\psi}\rangle_0 = \theta(t)$, волнистая – $\langle\varphi\varphi\rangle_0$, определяемый выражением (7б). По индексам они кратны соответствующим δ-символам. В графе 3 приведен вклад данной диаграммы в Z в простой абелевой модели (однокомпонентные поля, взаимодействие $\bar{\psi}\varphi\psi$), для получения вклада в Z в неабелевой модели (6) его нужно умножить на симметрийный коэффициент, приведенный в графе 4. Константы C_A, C_R определяются соотношениями $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, $f^{acd}f^{bcd} = \delta^{ab}C_A$, $t^a t^a - C_R \cdot \mathrm{I}$. Обозначено $u \equiv g_R^2/4\pi^2$.

По данным таблицы находим значения $Z_{1,2}$, приведенные в (9). Для абелевой модели таблица воспроизводит в двухпетлевом приближении точный результат $Z_1 = Z_2 = \exp(-u/2\varepsilon)$.

№	Диаграмма	Вклад в Z (абелев случай)	Коэффициент
1		$-\dfrac{u}{2\varepsilon}$	C_R
2		$-\dfrac{u}{2\varepsilon}$	$C_R - C_A/2$
3		$\dfrac{u^2(-1+2\varepsilon)}{8\varepsilon^2}$	C_R^2
4		$\dfrac{u^2(1-\varepsilon)}{4\varepsilon^2}$	$C_R(C_R - C_A/2)$
5		$\dfrac{u^2(1+2\varepsilon)}{8\varepsilon^2}$	$(C_R - C_A/2)^2$
6		$-\dfrac{u^2}{4\varepsilon^2}$	$C_R(C_R - C_A/2)$
7		$\dfrac{u^2}{4\varepsilon^2}$	$(C_R - C_A/2)^2$
8		$-\dfrac{u^2}{4\varepsilon}$	$(C_R - C_A/2)(C_R - C_A)$

Список литературы

[1] *Popov V.N., Wu T.T.* // Phys. Lett. 1979. V. 85B. № 4. P. 395–398.

[2] *Попов В.Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.

[3] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М.* // ТМФ. 1986. Т. 68. № 3. С. 323–337.

[4] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Перекалин М.М., Рейтту Х.Ю.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. № 4(10). С. 1278–1285.

[5] *Коллинз Дж.* Перенормировка. М.: Мир, 1988.

[6] *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 257–310.

[7] *Владимиров А.А.* // ТМФ. 1980. Т. 43. № 2. С. 210–217.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 2.XII.1992 г.

N. V. Antonov, A. N. Vasiljev, M. M. Stepanova

INFRARED ASYMPTOTICS OF THE FERMION PROPAGATOR IN A SIMPLE NON-ABELIAN MODEL

The long-distance asymptotics of the fermion propagator is investigated in a simple non-abelian model of fermions interacting with massless bosons, that generalizes the model with isospin, considered in [1], to the case of an arbitrary compact semisimple Lie group and the spatial dimension $d \leq 4$. The asymptotics is obtained in the leading infrared approximation by means of the renormalization group method applied to an effective one-dimensional massless model describing the eikonal approximation in the original field theory.