

Эволюция углового момента в процессе коллапса магнитных вращающихся протозвездных облаков

Каргальцева Н.С.^{1,2}, Хайбрахманов С.А.^{1,2}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

В работе представляются численные магнитогазодинамические (МГД) расчеты изотермической стадии коллапса магнитных вращающихся протозвездных облаков солнечной массы при различных начальных значениях вращательной и магнитной энергий и с различной степенью неоднородности. Моделирование осуществляется с помощью двумерного МГД-кода Enlil. Расчеты показывают, что при увеличении начальной степени неоднородности облака увеличиваются размеры элементов его иерархической структуры — сплюснутой оболочки и первичного диска — и усиливается влияние магнитного торможения в центре облака. Магнитное торможение отводит в межзвездную среду от 40 до 90% полного углового момента облака в зависимости от начального отношения магнитной энергии облака к модулю гравитационной энергии, $\varepsilon_m = 0.2 - 0.6$. Эффективность переноса углового момента слабо зависит от начального отношения вращательной и гравитационной энергий. В конце изотермической стадии коллапса неоднородного протозвездного облака формируется «мертвая» зона со степенью ионизации $x \leq 10^{-12}$. Радиус «мертвой» зоны составляет 90 – 220 а. е. для облаков с $\varepsilon_m = 0.2 - 0.6$. Сравнение характерных диффузионного и динамического времен показывает, что амбиполярная диффузия приведет к ослаблению магнитного торможения внутри «мертвой» зоны в течение 1 – 10 тыс. лет после образования первого ядра.

Поступила в редакцию 02.08.2023 г. Принята в печать 29.08.2023 г.

Ключевые слова: магнитное поле, магнитная газодинамика (МГД), численное моделирование, звездообразование, межзвездная среда

Evolution of angular momentum during the collapse of magnetic rotating protostellar clouds

Kargaltseva N.S.^{1,2}, Khaibrakhmanov S.A.^{1,2}

¹ Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

² Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

We present the results of numerical magnetohydrodynamic (MHD) simulations of the isothermal stage of the collapse of magnetic rotating protostellar clouds of solar mass at various initial values of rotational and magnetic energies and with various degrees of nonuniformity. The simulations are carried out using the two-dimensional MHD code Enlil. The simulations show that an increase in the initial degree of inhomogeneity of the cloud leads to the growth of the sizes of the elements of its hierarchical structure — oblate envelope and primary disk. The influence of magnetic braking also increases in the center of the cloud. Magnetic braking transports from 40 to 90% of the total angular momentum of the cloud into the interstellar medium, depending on the initial ratio of the cloud's magnetic energy to the modulus of its gravitational energy, $\varepsilon_m = 0.2 - 0.6$. The efficiency of angular momentum transport weakly depends on the initial ratio of rotational and gravitational energies. At the end of the isothermal stage of the collapse of an inhomogeneous protostellar cloud, a “dead” zone is formed with the degree of ionization $x \leq 10^{-12}$. The “dead” zone radius is 90 – 220 au for clouds with $\varepsilon_m = 0.2 - 0.6$. A comparison of the characteristic diffusion and dynamical times shows that ambipolar diffusion will lead to weakening of magnetic braking inside the “dead” zone within 1 – 10 thousand years after the first core formation.

Received 02.08.2023. Accepted 29.08.2023.

Keywords: magnetic fields, magnetic-gas-dynamics (MHD), numerical simulation, star formation, interstellar medium

DOI: 10.51194/INASAN.2023.8.3.007

1. Введение

Звезды образуются в гравитационно связанных ядрах межзвездных молекулярных облаков — протозвездных облаках (далее ПЗО). Это холодные облака с температурой $T = 10 - 20$ К, концентрацией газа $n = 10^4 - 10^6$ см⁻³, размером $R = 0.03 - 0.3$ пк и массой $M = 0.5 - 70 M_\odot$ [1, 2, 3]. Наблюдения ПЗО в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах свидетельствуют о неоднородной структуре ПЗО и сложном характере внутренних движений. Дисперсия скорости в ПЗО составляет $\sigma_v \leq 3$ км/с [4], а угловая скорость $\Omega = 10^{-12} - 10^{-14}$ с⁻¹ [5, 6]. Наблюдаемые радиальные профили удельного углового момента ПЗО характеризуются зависимостью $j_{\text{obs}} \sim R^n$ с показателем $n = 1.6 - 2.4$, что указывает на близкое к твердотельному вращение [6]. К настоящему времени надежно установлено, что большинство ПЗО обладают крупномасштабным магнитным полем с индукцией $B = 10^{-5} - 10^{-4}$ Гс [7, 8]. В некоторых ПЗО линии магнитного поля имеют пинчевую геометрию или геометрию типа песочных часов, что свидетельствует о гравитационном сжатии таких облаков.

Предполагается, что гравитационно-неустойчивые ПЗО в процессе быстрого гравитационного сжатия (коллапса) эволюционируют в молодые звездные объекты (МЗО) класса 0, которые ассоциируют с протозвездой, окруженной протозвездным диском и сплюснутой оболочкой [9]. Размеры протозвездных дисков и оболочек оценивают в 2–300 а. е. и 500–12000 а. е. соответственно [10, 11]. Радиальные профили удельного углового момента в МЗО класса 0 описываются зависимостью $j_{\text{obs}} \sim R^n$ с показателем $n = 0.3$ в области $R < 1600$ а. е. и $n = 1.6$ в области $R > 1600$ а. е. [12]. Данная зависимость показывает, что при переходе от оболочки к протозвездному диску вращение газа меняется с твердотельного на дифференциальное.

Анализ наблюдательных данных указывает, что образование кеплеровских протозвездных дисков, вероятно, происходит на самой ранней стадии звездообразования. В дальнейшем протозвездные диски эволюционируют в аккреционные и протопланетные диски, в которых происходит образование планет. Размеры протозвездных дисков в значительной степени определяются эффективностью отвода углового момента из центральной части ПЗО на начальной стадии коллапса. Основным механизмом переноса углового момента на начальных стадиях звездообразования является магнитное торможение, обусловленное действием натяжений тороидального магнитного поля в дифференциально вращающемся облаке. Первые численные расчеты коллапса ПЗО с магнитным полем столкнулись с проблемой катастрофического магнитного торможения, которая выражается в том, что отвод углового момента происходит настолько эффективно, что образования протозвездных дисков не происходит [13]. Для решения данной проблемы необходимо проведение расчетов с учетом диффузионных эффектов (см. обзор [14]). Наиболее эффективно магнитное торможение происходит на изотермической стадии коллапса, когда облако прозрачно к собственному тепловому излучению [15]. В связи с этим, представляет интерес проведение численного МГД-моделирования изотермической стадии коллапса ПЗО с учетом основных МГД-эффектов.

Хайбрахманов и др. [16] показали, что на изотермической стадии коллапса ПЗО формируется иерархическая структура облака, состоящая из сплюснутой оболочки, внутри которой находится квазимагнито-статический первичный диск (ПД). На границе ПД происходит формирование быстрой ударной МГД-волны, распространяющейся наружу из облака. ПД являются резервуарами массы, магнитного потока и углового момента для дальнейшего формирования протозвездных дисков. Каргальцева и др. [17] определили, что фронт быстрой ударной МГД-волны ограничивает область магнитного торможения, в которой происходит перенос углового момента, накопленного вблизи поверхности ПД, к периферии облака. При увеличении начальной магнитной энергии увеличиваются размер первичного диска и эффективность магнитного торможения [18].

В данной работе исследуется эволюция углового момента в процессе коллапса неоднородных ПЗО при различных начальных параметрах. В разделе 2 описана численная модель, МГД-код и начальные параметры облака. Далее анализируется влияние начальной степени неоднородности на размеры элементов иерархической структуры облака и эволюцию углового момента (раздел 3.1.), определяется эффективность отвода углового момента в зависимости от начальных магнитной и вращательной энергий облака (раздел 3.2.) и исследуется ионизационная структура облака (раздел 3.3.). Заключение и основные выводы представлены в разделе 4.

2. Численная модель и начальные параметры

Рассматривается эволюция изначально сферического вращающегося ПЗО, пронизанного крупномасштабным магнитным полем. Облако характеризуется начальными массой $M_0 = 1 M_{\odot}$ и температурой $T_0 = 10$ К. Коллапс ПЗО исследуется в двумерной осесимметричной постановке задачи в цилиндрических координатах $\{r, \phi, z\}$. Распределение плотности задается с помощью формулы Пламмера [19],

$$\rho_0(R) = \frac{\rho_c}{1 + \left(\frac{R}{R_c}\right)^k}. \quad (1)$$

Такое распределение описывает сферическое облако с почти однородной центральной частью радиусом R_c и плотностью ρ_c и неоднородной периферией, в которой плотность уменьшается с расстоянием от центра облака R по степенному закону с показателем k . Для исследования эволюции облаков с различной степенью неоднородности расчеты проводились при различных k в диапазоне 0.5 – 2. Стандартное значение $k = 2$ соответствует автомодельному распределению плотности свободно коллапсирующего облака [20].

Начальное распределение магнитного поля в облаке также является неоднородным и вычисляется согласованно с распределением плотности из условия вмороженности в предположении сферически-симметричного сжатия среды [21].

Основными параметрами модели являются начальные отношения тепловой, магнитной и вращательной энергий к модулю гравитационной энергии облака: ε_t , ε_m и ε_w соответственно. Для исследования влияния начальной интенсивности магнитного поля на эффективность переноса углового момента в облаке в расчетах

использованы следующие значения параметров: $\varepsilon_t = 0.3$, $\varepsilon_m = [0, 0.2, 0.6]$ и $\varepsilon_w = 0-0.1$. Начальное вращение облака предполагается твердотельным.

Моделирование гравитационного коллапса протозвездного облака с магнитным полем выполняется с помощью численного двумерного МГД-кода Enlil, использующего адаптивную подвижную сетку [22, 23]. В коде реализовано решение системы уравнений гравитационной магнитной газодинамики (МГД) с учетом амбиполярной диффузии. Гиперболическая часть системы уравнений решается с помощью разностной TVD-схемы годуновского типа повышенного порядка точности. Уравнение диффузии магнитного поля решается с помощью полностью неявной абсолютно устойчивой разностной схемы.

Степень ионизации рассчитывается из уравнений ионизационно-рекомбинационного баланса следуя Дудорову и Сазонову [24]. Учитываются ионизация космическими лучами и межзвездным рентгеновским излучением, ионизация за счет распада радиоактивных элементов, лучистые рекомбинации и рекомбинации на пылинках среднего размера 0.1 мкм. Используются стандартные значения скоростей ионизации космическими лучами и радиоактивными элементами (см. [25]).

3. Результаты и обсуждение

3.1. Коллапс облаков с различной начальной степенью неоднородности

Рассмотрим четыре расчета с $\varepsilon_t = 0.3$, $\varepsilon_m = 0.2$ и $\varepsilon_w = 0.01$ с различными показателями степени начального распределения плотности $k = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. При данных параметрах ПЗО имеет начальный радиус $R_0 = 0.021$ пк, центральную плотность $\rho_0 = (3.2 - 3.5) \cdot 10^{-18}$ г см $^{-3}$, угловую скорость $\Omega_0 = 1.37 \cdot 10^{-13}$ с $^{-1}$, полный угловой момент $J_0 = 4.0 \cdot 10^{53} - 1.2 \cdot 10^{54}$ г см 2 с $^{-1}$ и магнитную индукцию в центре $B_0 = (1.59 - 1.68) \cdot 10^{-4}$ Гс. Радиус центральной однородной части облака R_c выбирался таким образом, чтобы в этой части было сосредоточено 75% массы облака.

На рис. 1 показана двумерная структура ПЗО для расчетов с $k = 0.5$ (I, слабо неоднородное облако) и $k = 2.0$ (II, сильно неоднородное облако) в начальный момент времени и в конце изотермической стадии коллапса, когда в центре начинается формирование непрозрачного ядра.

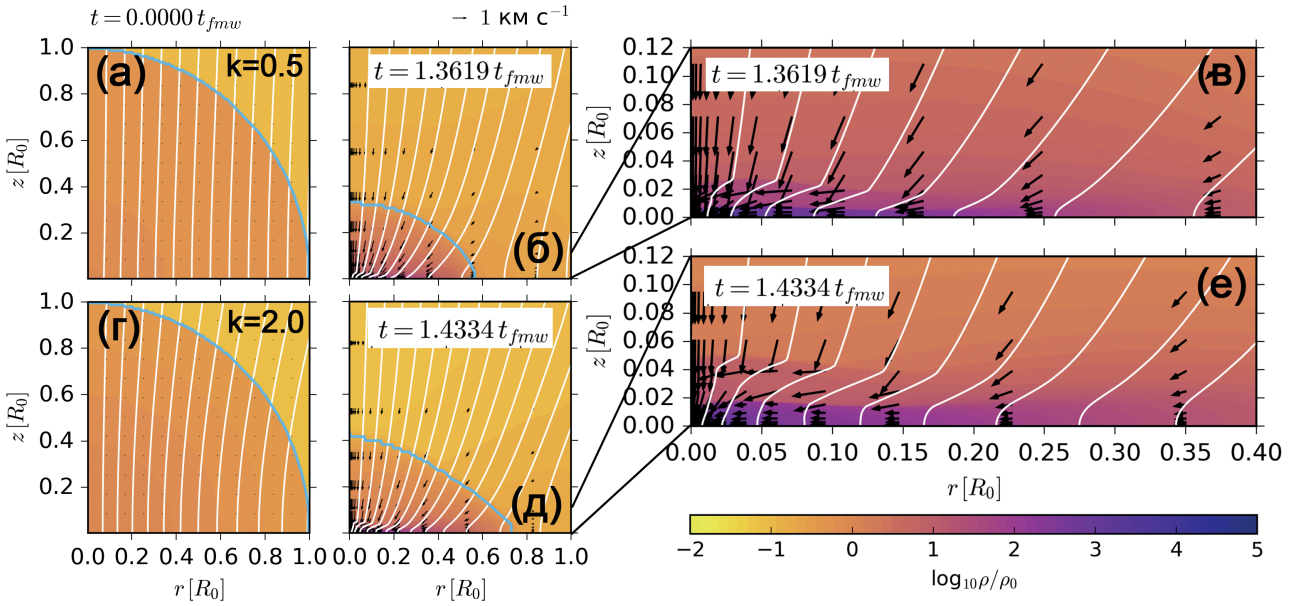


Рис. 1: Двумерное распределение плотности (цветовая заливка) для расчетов с $k = 0.5$ (панели «а», «б» и «в») и с $k = 2.0$ (панели «г», «д» и «е»). Панели «а» и «г» соответствуют начальному моменту времени. Панели «б» и «д» — окончанию изотермической стадии коллапса. Панели «в» и «е» показывают увеличенную центральную часть облака. Стрелками показано поле скорости, белыми линиями — линии полоидального магнитного поля.

В расчете I изотермическая стадия коллапса закончилась при $t_I = 1.3619 t_{fm} = 5.45 \cdot 10^4$ лет, где t_{fm} — характерное время коллапса с учетом влияния электромагнитной и центробежной сил [16]. Рис. 16 показывает, что к этому моменту времени радиус и полутолщина оболочки составляют $R_{cl} \approx 0.55 R_0$ и $Z_{cl} \approx 0.35 R_0$ соответственно. В центральной части облака (см. рис. 1в) различим первичный диск с максимальной полутолщиной $Z_{pd} \approx 0.01 R_0$.

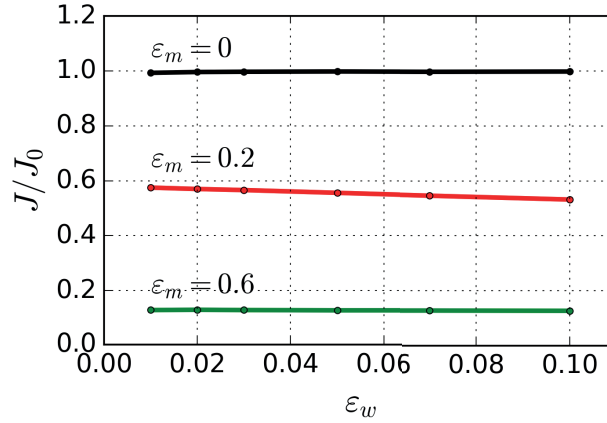


Рис. 2: Зависимость безразмерного полного углового момента облака, J/J_0 , в конце изотермической стадии от вращательного параметра ε_w при $\varepsilon_m = 0$ (черная линия), $\varepsilon_m = 0.2$ (красная линия) и $\varepsilon_m = 0.6$ (зеленая линия) при $\varepsilon_t = 0.3$. Здесь J_0 — начальный угловой момент облака.

Согласно рис. 1д и 1е, в расчете II в конце изотермического коллапса, $t_I = 1.4334t_{\text{fmw}} = 5.73 \cdot 10^4$ лет, радиус и полутолщина оболочки составляют $R_{\text{cl}} \approx 0.70R_0$ и $Z_{\text{cl}} \approx 0.40R_0$, а максимальная полутолщина ПД $\approx 0.02R_0$. Таким образом, в случае коллапса сильно неоднородного облака элементы его внутренней иерархии (оболочка и первичный диск) имеют большие размеры, чем в случае слабо неоднородного облака.

Расчеты показывают, что при выбранных параметрах к концу изотермической стадии коллапса из облака в окружающую межзвездную среду отводится 40% начального углового момента — независимо от степени начальной неоднородности. При этом распределение удельного углового момента внутри облака меняется с изменением k . Например, в момент времени t_I удельный угловой момент в центре облака с $k = 0.5$ составляет $10^{16} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$. В облаке с $k = 2.0$ эта величина на порядок меньше: $10^{15} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$. Следовательно, в изначально более неоднородном облаке перераспределение углового момента из центра облака к его периферии происходит эффективнее. Это связано с тем, что в изначально более неоднородном облаке быстрее устанавливается дифференциальное вращение, генерируется тороиадальное магнитное поле и запускается процесс магнитного торможения центральной части облака.

3.2. Зависимость от магнитного и вращательного параметров

Для исследования эволюции углового момента в процессе коллапса ПЗО с различными начальными магнитной и вращательной энергией, рассмотрим расчеты с $\varepsilon_m = 0$ (без магнитного поля), $\varepsilon_m = 0.2$ и $\varepsilon_m = 0.6$ (сильное магнитное поле) при различных вращательных параметрах $\varepsilon_w = 0.01 - 0.1$. Для всех расчетов $\varepsilon_t = 0.3$.

На рис. 2 показана зависимость безразмерного полного углового момента в конце изотермической стадии от ε_m и ε_w . Рис. 2 показывает, что полный угловой момент облака с $\varepsilon_m = 0$ сохраняется, $J/J_0 = 1$. Это связано с тем, что в облаке без магнитного поля магнитного торможения не происходит.

Угловой момент облаков с $\varepsilon_m > 0$ уменьшается по сравнению с начальным вследствие отвода углового момента магнитными натяжениями. Согласно рис. 2, эффективность магнитного торможения увеличивается с ростом ε_m . Например, при $\varepsilon_m = 0.2$ (красная линия) полный угловой момент облака уменьшается на ~40% по отношению к J_0 , при $\varepsilon_m = 0.6$ (зеленая линия) — примерно на 90%. Относительная доля отведенного углового момента практически не зависит от вращательного параметра ε_w .

3.3. Степень ионизации и амбиполярная диффузия

Ранее Каргальцева и др. [18] исследовали ионизационное состояние изначально однородных ПЗО. Расчеты показали, что к окончанию изотермической стадии коллапса облака степень ионизации в центре не опускается ниже 10^{-11} , то есть в облаке не формируется область низкой степени ионизации и эффективной диффузии магнитного поля — так называемая «мертвая» зона (пр., [26]).

Проанализируем ионизационное состояние неоднородных ПЗО. На рис. 3 представлены профили степени ионизации вдоль осей r и z в конце изотермической стадии коллапса ПЗО с $\varepsilon_m = 0.2$ и 0.6 , $\varepsilon_t = 0.3$, $\varepsilon_w = 0.01$. Рис. 3 показывает, что неоднородное ПЗО характеризуется более низкими значениями степени ионизации в центре облака в конце изотермической стадии коллапса. В центральной части облака образуется «мертвая» зона, которая характеризуется степенью ионизации $x \leq 10^{-12}$. Внутри «мертвой» зоны степень ионизации

опускается до 10^{-13} . В случае $\varepsilon_m = 0.2$ «мертвая» зона характеризуется радиальной протяженностью $L \approx 90$ а. е., центральной плотностью $\rho_c = 3.4 \cdot 10^{-14}$ г см $^{-3}$ и индукцией магнитного поля $B_c = 1.9 \cdot 10^{-2}$ Гс. В случае облака с сильным магнитным полем, $\varepsilon_m = 0.6$: $L \approx 220$ а. е., $\rho_c = 7.0 \cdot 10^{-14}$ г см $^{-3}$ и $B_c = 2.9 \cdot 10^{-2}$ Гс. Таким образом, в ПЗО с более сильным магнитным полем образуется «мертвая» зона большего размера.

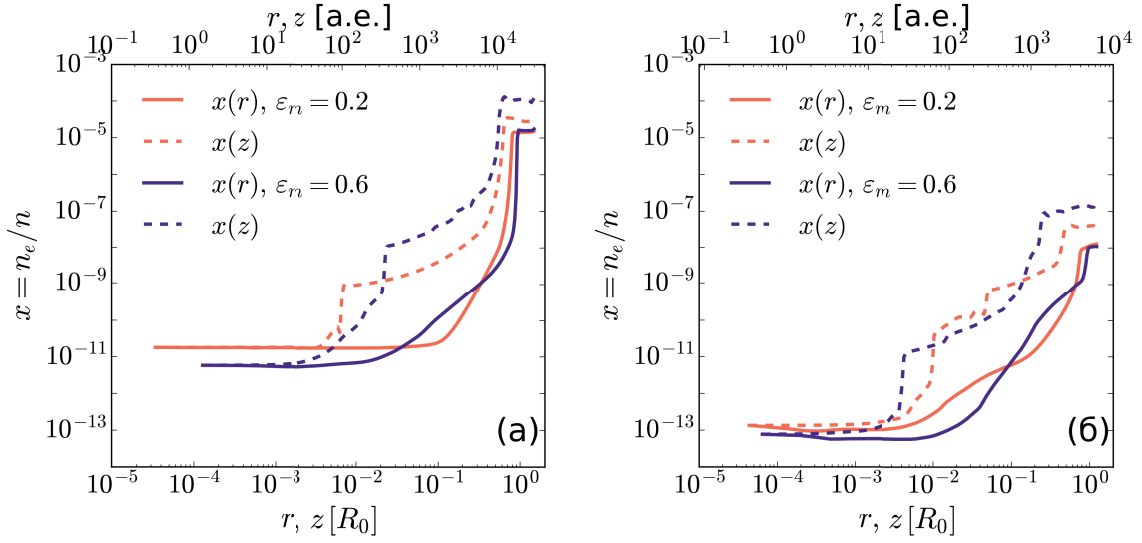


Рис. 3: Степень ионизации вдоль осей r и z в расчетах с однородным (а) и неоднородным (б) начальным распределением плотности при $\varepsilon_m = 0.2$ (оранжевые линии) и $\varepsilon_m = 0.6$ (фиолетовые линии).

«Мертвая» зона характеризуется эффективными омической и амбиполярной диффузиями. В рассматриваемом диапазоне плотностей основным эффектом является амбиполярная диффузия. Для оценки ее роли в области «мертвой» зоны сравним характерное время амбиполярной диффузии, t_{AD} , и время свободного падения, $t_{ff} = \sqrt{3\pi/(32G\rho)}$, где G — гравитационная постоянная. Время амбиполярной диффузии можно определить по формуле (пр., [26]):

$$t_{AD} = \frac{L^2}{\eta_{AD}} = \frac{4\pi x \rho^2 \eta_{in} L^2}{B^2}, \quad (2)$$

где η_{AD} — лианеризованный коэффициент амбиполярной диффузии, $\eta_{in} = m_i \langle \sigma V \rangle_{in} / (m_n (m_i + m_n))$ — коэффициент, определяющий эффективность переноса импульса во взаимных столкновениях ионов и нейтралов в плазме, $m_i = 30m_H$ — средняя масса иона, $m_n = 2.3m_H$ — масса нейтральной частицы, m_H — масса атома водорода и $\langle \sigma V \rangle_{in} = 2.0 \cdot 10^{-9}$ см 3 с $^{-1}$ — коэффициент столкновений ионов с нейтральными частицами. Для оценок характерных времен будем использовать значения B , ρ и x в центре облака. В качестве характерного размера «мертвой» зоны выберем цилиндрический радиус области $x < 10^{-12}$. Запишем времена амбиполярной диффузии и свободного падения в безразмерном виде при типичных характеристиках газа внутри «мертвой» зоны:

$$t_{AD} = 1.08 \cdot 10^3 \left(\frac{x}{10^{-13}} \right) \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ г см}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{L}{500 \text{ а. е.}} \right)^2 \left(\frac{B}{10^{-2} \text{ Гс}} \right)^{-2} \text{ лет}, \quad (3)$$

$$t_{ff} = 6.6 \cdot 10^2 \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ г см}^{-3}} \right)^{-1/2} \text{ лет}. \quad (4)$$

При параметрах «мертвой» зоны, приведенных выше, формулы (3) и (4) показывают, что $t_{AD} \gtrsim t_{ff}$. Необходимо учесть, что динамическое время в рассматриваемом случае превышает t_{ff} из влияния центробежной и электромагнитной сил внутри «мертвой» зоны первичного диска. Следовательно, в конце изотермической стадии коллапса неоднородных ПЗО в течение $t_{AD} \sim 1 - 10$ тыс. лет амбиполярная диффузия приведет к отводу части магнитного потока из образовавшейся мертвой зоны.

4. Заключение и выводы

В работе выполнено численное МГД-моделирование коллапса ПЗО с начальной массой $1 M_\odot$ и температурой 10 К при различных начальных значениях вращательной и магнитной энергий облаков с различной степенью неоднородности.

Расчеты показывают, что степень неоднородности облака слабо влияет на количество полного углового момента, отведенного из облака в межзвездную среду. Однако в более неоднородных облаках перенос углового момента из центра облака к его периферии происходит эффективнее. Облака с большей степенью неоднородности характеризуются большими размерами оболочки ПЗО и полутолщины первичного диска.

Анализ расчетов подтверждает предыдущие выводы о том, что эффективность переноса углового момента увеличивается при росте начального магнитного параметра, ε_m . При этом относительная доля отведенного полного углового момента слабо зависит от вращательного параметра.

Сравнение результатов расчетов коллапса однородных и неоднородных ПЗО показывает, что «мертвая» зона (область низкой степени ионизации) в конце изотермической стадии образуется только в последнем случае. Согласно оценкам характерных диффузионного и динамического времен, в течение 1 – 10 тыс. лет амбиполярная диффузия внутри «мертвой» зоны первичного диска приведет к отводу части магнитного потока на периферию облака и ослаблению магнитного торможения. Результаты работы указывают на то, что «мертвые» зоны могут образовываться на самых ранних стадиях звездообразования, еще до образования первого гидростатического ядра.

Работа Каргальцевой Н.С. выполнена в рамках Программы «Инженер-исследователь УрФУ, Приоритет 2030» и при поддержке Фонда поддержки молодых ученых ЧелГУ.

Список литературы

1. E. A. Bergin and M. Tafalla, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, **45**, 339, 2007.
2. Y. Shimajiri, P. André, E. Ntormousi, A. Men'shchikov, D. Arzoumanian, and P. Palmeirim, *Astron. and Astrophys.*, **632**, A83, 2019.
3. K. Morii, P. Sanhueza, F. Nakamura, J. M. Jackson, et al., *Astrophys. J.*, **923**, 147, 2021.
4. A. E. Dudorov and S. A. Khaibrakhmanov, *Open Astronomy*, **26**, 285, 2017.
5. P. Caselli, P. J. Benson, P. C. Myers, and M. Tafalla, *Astrophys. J.*, **572**, 238, 2002.
6. A. Punanova, P. Caselli, J. E. Pineda, A. Pon, M. Tafalla, A. Hacar, and L. Bizzocchi, *Astron. and Astrophys.*, **617**, A27, 2018.
7. R. M. Crutcher, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, **50**, 29, 2012.
8. H.-B. Li, *Galaxies*, **9**, 41, 2021.
9. P. Andre, D. Ward-Thompson, and M. Barsony, *Astrophys. J.*, **406**, 122, 1993.
10. C.-F. Lee, N. Hirano, Q. Zhang, H. Shang, P. T. P. Ho, and R. Krasnopolsky, *Astrophys. J.*, **786**, 114, 2014.
11. J. J. Tobin, P. D. Sheehan, S. T. Megeath, A. K. Díaz-Rodríguez, et al., *Astrophys. J.*, **890**, 130, 2020.
12. M. Gaudel, A. J. Maury, A. Belloche, S. Maret, et al., *Astron. and Astrophys.*, **637**, A92, 2020.
13. D. Galli, S. Lizano, F. H. Shu, and A. Allen, *Astrophys. J.*, **647**, 374, 2006.
14. B. Zhao, K. Tomida, P. Hennebelle, J. J. Tobin, et al., *Space Science Reviews*, **216**, 43, 2020.
15. Y. Tsukamoto, S. Okuzumi, K. Iwasaki, M. N. Machida, and S.-i. Inutsuka, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **69**, 95, 2017.
16. S. A. Khaibrakhmanov, A. E. Dudorov, N. S. Kargaltseva, and A. G. Zhilkin, *Astronomy Reports*, **65**, 693, 2021.
17. N. S. Kargaltseva, S. A. Khaibrakhmanov, A. E. Dudorov, and A. G. Zhilkin, *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, **48**, 268, 2021.
18. N. S. Kargaltseva, S. A. Khaibrakhmanov, A. E. Dudorov, S. N. Zamozdra, and A. G. Zhilkin, *Open Astronomy*, **31**, 172, 2022.
19. H. C. Plummer, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **71**, 460, 1911.
20. A. Whitworth and D. Summers, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **214**, 1, 1985.
21. S. Khaibrakhmanov, S. Zamozdra, N. Kargaltseva, A. Zhilkin, and A. Dudorov, *IAU Symposium*, **362**, 273, 2023.
22. A. E. Dudorov, A. G. Zhilkin, and O. A. Kuznetsov, in S. M. Miyama, K. Tomisaka, and T. Hanawa, eds., *Numerical Astrophysics*, **240**, 389 (1999).
23. A. G. Zhilkin, Y. N. Pavlyuchenkov, and S. N. Zamozdra, *Astronomy Reports*, **53**, 590, 2009.
24. A. E. Dudorov and Y. V. Sazonov, *Nauchnye Informatsii*, **63**, 68, 1987.
25. T. Umebayashi and T. Nakano, *Astrophys. J.*, **690**, 69, 2009.
26. A. E. Dudorov and S. A. Khaibrakhmanov, *Astrophys. and Space Sci.*, **352**, 103, 2014.