

## Одномерный и многомерный маятник Капицы

*Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Кулижников Д.А., Товстик П.Е.,  
Товстик Т.М., Товстик Т.П.*

*morozov@nm1016.spb.edu, l3augen@mail.ru, dima.kulizhnikov@mail.ru,*

*peter.tovstik@mail.ru, tmtovstik@mail.ru, tovstik\_t@mail.ru*

<sup>1,3,4,5</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

<sup>2,6</sup> Институт Проблем Машинovedения РАН

*Ключевые слова:* полигармоническое и случайное возбуждение, области устойчивости и притяжения, асимптотическое интегрирование.

Классическая задача Капицы [1,2] заключается в исследовании динамики невесомого вертикального стержня с точечной массой на конце под действием вертикальных вибраций основания. Различные обобщения задачи Капицы содержатся в монографии [3], в работах авторов [4-6] и др.

Первую группу работ образуют системы с одной степенью свободы, в которых маятник колеблется в одной вертикальной плоскости. Рассматривается гармоническое, полигармоническое и случайное возбуждение. Также рассмотрен маятник с упруго закрепленным нижним концом [4]. Последняя задача моделирует задачи об устойчивости упругого вертикального стержня со свободным верхним концом под действием вибраций основания [5,6].

Используется метод асимптотического интегрирования [7], согласно которому неизвестные функции представляются в виде суммы  $y(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) + \varepsilon V(t, \tau, \varepsilon)$ ,  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , медленно меняющихся функций  $U$  и малых быстро колеблющихся функций  $\varepsilon V$  с нулевым средним по  $t$  значением. Уравнение нулевого приближения для медленно меняющихся функций  $L(U_0) = 0$  позволяет найти область параметров, при которых нулевое решение устойчиво, а также найти область притяжения вертикального положения. При ее построении находим область начального отклонения  $G$ , считая начальную скорость в исходной постановке нулевой ( $\dot{y}(0, \varepsilon) = 0$ ). Оказывается, что  $U'_0(0) = v_0 \neq 0$ , причем величина  $v_0$  зависит от начальной фазы  $\beta$  возмущения  $f(t) = a \sin(\omega t + \beta)$ . В результате область притяжения оказалась состоящей из двух частей  $G = G_a + G_p$ : в области  $G_a$  сходимось  $U_0(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  имеет место при всех  $\beta$ , а в области  $G_p$  — лишь при некоторых. Эта же особенность области притяжения проявляется и во всех рассматриваемых ниже задачах. При случайном возбуждении функция  $f(t)$  предполагается случайным стационарным процессом, роль начальной фазы играет случайность величины  $f(0)$ , а области устойчивости и притяжения могут быть построены лишь с определенной вероятностью.

Во вторую группу входят системы с двумя и тремя степенями свободы. В общем случае сферического маятника при гармонических вибрациях опоры [8] приводят к достаточно сложному неперидическому движению. Нами рассмот-

рена более простая задача об устойчивости вертикального положения маятника с учетом сил трения и об области притяжения этого положения. При этом предположение об отсутствии начальной скорости сводит сферическое движение к плоскому. Поэтому предполагается наличие исчезающе малой начальной скорости.

Движение в поле силы тяжести твердого тела с неподвижной точкой, которая, в свою очередь, совершает малые высокочастотные гармонические колебания, изучается в достаточно общей постановке. Начальная скорость считается нулевой, учитываются малые силы трения. Приводится система уравнений Эйлера и выведена система уравнений, описывающих медленные движения тела. Точки покоя этой системы, описывают (в случае их устойчивости) предельные положения, вблизи которых тело совершает малые колебания. Рассмотрен простейший частный случай осесимметричного тела (случай Лагранжа). В общем случае анализ не завершен. Численное интегрирование уравнений Эйлера показало, что во всех рассмотренных случаях с течением времени тело стремится к некоторому предельному положению, вблизи которого оно совершает малые колебания.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 19.01.00280-а, 20-51-S52001 МНТ-а.

## Литература

- [1] Stephenson A. On an induced stability. *Phil. Mag.* 1908. V. 15. 233–236.
- [2] Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физических наук.* 1951. Т. 44. № 1. 7–20.
- [3] Блехман И. И. *Вибрационная механика.* М. : Наука. 1994.
- [4] Kulizhnikov D. B., Tovstik P. E., Tovstik T. P. The Basin of Attraction in the Generalized Kapitza Problem // *Vestnik St.Petersburg University, Mathematics.* 52(3). N. 3. 309–316. © Pleiades Publishing, Ltd., 2019.
- [5] Tovstik T. M., Belyaev A. K., Kulizhnikov D. B., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. On an attraction basin of the generalized Kapitza's problem // 7th ECCOMAS. Greece. 2019. URL: <https://2019.compdyn.org/proceedings/> (дата обращения: 06.12.2020).
- [6] Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. М., Товстик Т. Р. Области притяжения в обобщенной задаче Капицы // *Доклады РАН.* 2019. Т. 487. № 5. С. 25–29.
- [7] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М. : Наука. 1969.
- [8] Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // *ПММ.* 1999. Т. 63. № 2. 213–219.