

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Г.В. Павилайнен<sup>1</sup>, Н.Ю. Кропачева<sup>2</sup> Д.В. Франус<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

<sup>3</sup>НО Фонд «УниШанс», Санкт-Петербург

g.pavilaynen@spbu.ru

**Аннотация.** Современные задачи проектирования и расчета конструкций, содержащих пластины, в частности, задачи моделирования вертолетных площадок, металлических отражающих зеркал, биомеханических проблем коррекции зрения связаны с исследованием напряженно-деформированного состояния круглых пластин из сложных по структуре материалов. Эти задачи являются существенно нелинейными по геометрии и по физическим свойствам. Необходимо моделировать, с одной стороны, большие и неупругие деформации, а с другой стороны, задавать сложные программы нагружения. Решение таких проблем аналитически невозможно, поэтому моделирование МКЭ является единственным способом исследования. Рассматриваются задачи изгиба и деформирования под действием различных нагрузок конструктивно ортотропной, существенно пластически анизотропной пластины, которая при гидростатическом нагружении моделирует изгиб сечения центрального глазного нерва при повышении внутриглазного давления.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № RFBR\_a\_2019\_1.

### Введение

Рассматривается упругопластический изгиб круглых пластин из металлических сплавов, обладающих различными прочностными свойствами при растяжении и сжатии. Такие материалы называют пластически анизотропными или материалами с SD-эффектом. Исследование их свойств является важной задачей при проектировании и создании новых строительных конструкций. Для исследования упругопластических свойств SD-материалов используются классическая теория идеальной пластичности и различные математические модели, в которых учитываются параметр трансверсальной изотропии и параметр пластической анизотропии (SD-параметр). Полученные ранее решения [1,2,3] и асимптотические формулы для напряжений в центре пластины [4], позволяют корректно использовать численное моделирование методами МКЭ с применением возможностей ППП ANSYS и COMSOL для тех задач, которые не поддаются аналитическому исследованию [5].

### Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим круглую, свободно опертую пластину, которая обладает свойством трансверсальной изотропии, а именно, свойства в плоскости пластины и в вертикальном направлении различны. Кроме этого пластина обладает различными свойствами при растяжении и сжатии в том случае, когда материал пластины переходит из упругого в пластическое состояние. Этот эффект будем называть эффектом SD (strength-different). В процессе изгиба под действием распределенной или сосредоточенной вертикальной нагрузки часть пластины переходит в пластическое состояние. Этот процесс изображен схематично на рис.1. Особенность задачи изгиба в том, что пластические области (заштрихованы) имеют разную величину и в пластине происходит смещение нейтральной срединной поверхности (пунктиром показана исходное положение).

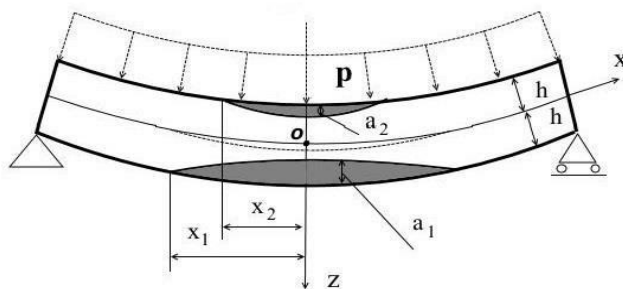


Рис. 1. Схема изгиба SD-пластины (вертикальное центральное сечение).

Классическое решение изотропной упругой задачи С. П. Тимошенко [6] позволяет верифицировать решение с помощью МКЭ в пакете COMSOL, один из вариантов решения приведен на рис.2.

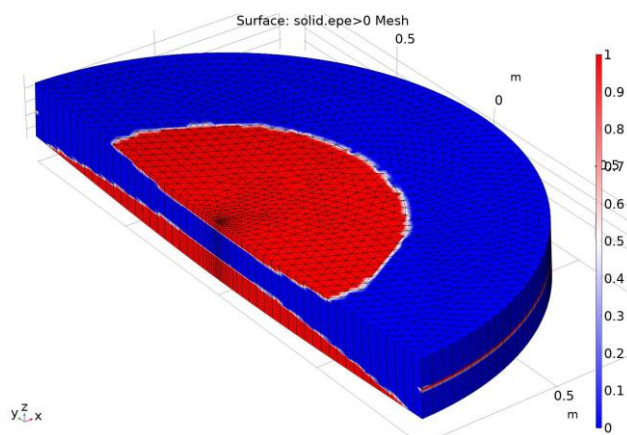


Рис.2 Пластические области в SD-пластине при гидростатическом давлении  $p=36\text{MPa}$ .

Аналогично можно рассмотреть изгиб пластины под действием сосредоточенной нагрузки или под действием нагрузки, распределенной по окружности меньшего радиуса. Классические упругие решения также можно найти в [6] и сопоставить с решением по МКЭ.

### Заключение

Анализ результатов математического моделирования позволяет сделать выводы о влиянии трансверсальной изотропии при упругом и пластическом деформировании круглых пластин и сделать выводы об изменении зависимости нагрузка-прогиб при увеличении эффекта анизотропии. В частности, безразмерная гидростатическая критическая нагрузка, при которой пластические области в центре смыкаются, образуя «пластический шарнир», в зависимости от значений параметра трансверсальной изотропии  $A$  (ось  $0x$ ) и SD-параметра  $D$  (ось  $0y$ ) представлена в виде поверхности на 3D диаграмме на рис.3.

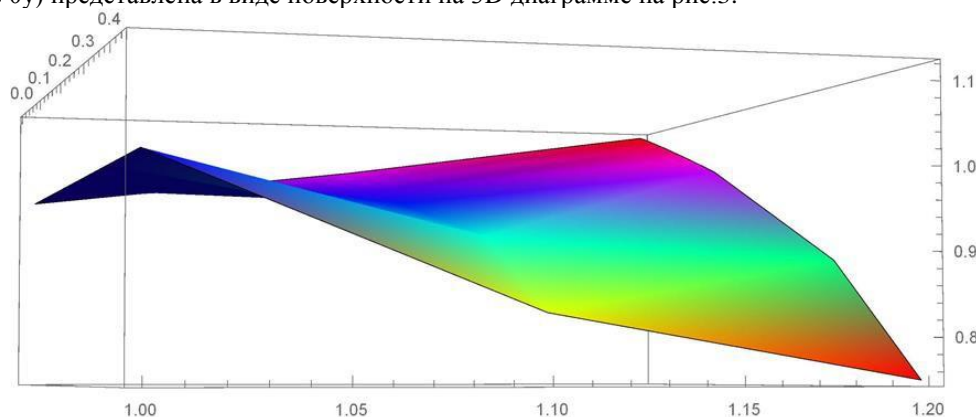


Рис.3 Зависимость критической нагрузки  $p(A,D)$  от значений исследуемых параметров.

На рис.4 можно видеть волнообразную структуру этой поверхности, что свидетельствует о том, что в разные периоды деформирования в разных состояниях параметры  $A$  и  $D$  играют разные роли и это существенно при рассмотрении конкретных вариантов расчетов конструкций.

### Литература

1. Е. В. Матвеева, Г. В. Павилайнен // Учет эффекта разнсопротивляемости материала при изгибе пластин. Вторые Поляховские чтения. Избранные труды. СПб., 2009., С. 294-304.
2. Р. Ю. Юшин // О возможности учета пластической анизотропии при изгибе круглых пластин. Вестн. С.-Петербург. ун-та., Сер.1. 2010, Вып. 1. - С.134-140.
3. Г. В. Павилайнен, Р. Ю. Юшин // Анализ учета упругой трансверсальной изотропии и пластической анизотропии при изгибе круглых пластин. Вестн. С.-Петербург. ун-та., Сер.1. 2010, Вып. 4. - С.128-137.
4. G.V. Pavilaynen, N. Yu. Kropacheva //Numerical modeling and graphical representation of the elastic-plastic bending of SD-plates. China, 2019, in Proceedings of Scientific research of the SCO countries: synergy and integration, pp. 230-239.
5. Pavilaynen G.V., Franus D.V.//SD-effect for circular plates of lamina cribrosa and optic nerve. Journal of Physics: Conference Series. "International Scientific Conference on Mechanics "The Ninth Polyakhov's Reading, 2021. С. 012035.
6. С.П. Тимошенко, С.Войновский-Кригер //Пластинки и оболочки. Москва, Наука, 1966, 635 с.