DOI 10.59887/2073-6673.2023.16(3)-6

УДК 551.465

© *В. Г. Гневышев*[1], *Т. В. Белоненко*[2]*, 2023
[1]Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Москва, Нахимовский проспект, д. 36.
[2]Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9.
*btvlisab@yandex.ru

ДОПЛЕРОВСКИЙ ЭФФЕКТ И ВОЛНЫ РОССБИ В ОКЕАНЕ: КРАТКИЙ ЭКСКУРС В ИСТОРИЮ И НОВЫЕ ПОДХОДЫ

Статья поступила в редакцию 23.12.2022, после доработки 28.03.2023, принята в печать 08.08.2023

Аннотация

Представленная обзорная статья посвящена волнам Россби в океане. Сегодня существует множество научных работ по этой теме, в которых авторы по-разному подходят к изложению материала. Для исследователей, которые не слишком подробно занимались представленными вопросами, анализ таких источников часто воспринимается как совокупность разрозненной и противоречивой информации, не позволяющей получить адекватное представление по предмету. В статье на основе анализа основных тематических публикаций систематизированы основные представления по различным аспектам, а также проведено сравнение различных подходов. Особое внимание уделяется обзору дисперсионных соотношений волн Россби при наличии фонового потока с акцентом на наличие либо отсутствие доплеровской добавки к частоте. Хотя рассматриваемые постановки задач и дисперсионные соотношения, как правило, являются общеизвестными, однако у многих авторов они изложены существенно по-разному, что часто приводит к непониманию и путанице. Мы обращаем внимание читателя на ключевые спорные моменты и приводим различные подходы в единую стройную систему. Если длинные волны Россби не «чувствуют» течения, то это справедливо для модели «мелкой воды» и является следствием галилеевской неинвариантности дисперсионного соотношения. Рассматривая различные подходы, мы показываем, что строгого дисперсионного соотношения для галилеево-неинвариантного дисперсионного соотношения нет. Всегда добавляются некие не совсем строгие предположения и допущения, такие как формальное существование вертикальных границ или зависимость баротропного радиуса от переменной поперечной координаты. Выводы дисперсионного соотношения с недоплеровским сдвигом содержат также некие асимптотические разложения, сопровождаемые анализом теории размерностей. Используя общую терминологию, мы соединяем основные аналитические результаты по теме и излагаем их в единой логике.

Ключевые слова: волны Россби, дисперсионное соотношение, доплеровский сдвиг, галилеевская неинвариантность

© *V. G. Gnevyshev*[1], *T. V. Belonenko*[2]*, 2023
[1]Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36 Nakhimovsky Prosp., Moscow 117997, Russia
[2]St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia
*btvlisab@yandex.ru

DOPPLER EFFECT AND ROSSBY WAVES IN THE OCEAN: A BRIEF HISTORY AND NEW APPROACHES

Received 23.12.2022, Revised 28.03.2023, Accepted 08.08.2023

Abstract

The review is devoted to Rossby waves in the ocean. Currently, there are many monographs and scientific articles on this topic, in which the authors approach the presentation of the material in different ways. For researchers who have not delved too deeply into this topic, the analysis of these sources is often perceived as a collection of disparate and often contradictory information that does not allow an adequate understanding of the subject. The review is based on the analysis of the main publications on this topic, and it systematizes the main ideas in various aspects. We also give the readers a comparison of different approaches in this area. Particular attention is paid to the review of the dispersion relations of Rossby waves in the presence of a background flow with an emphasis on the

Ссылка для цитирования: *Гневышев В.Г.*, *Белоненко Т.В.* Доплеровский эффект и волны Россби в океане: краткий экскурс в историю и новые подходы // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 3. С. 72–92. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(3)-6
For citation: *Gnevyshev V.G.*, *Belonenko T.V.* Doppler Effect and Rossby Waves in the Ocean: A Brief History and New Approaches. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 3, 72–92. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(3)-6

presence or absence of a Doppler additive to the frequency. Although the problem statements and variance ratios under consideration are generally well-known, however, they are presented in significantly different ways by many authors, which often leads to misunderstanding and confusion. We draw the reader's attention to the key controversial points and bring various approaches into a single coherent system. If long Rossby waves do not "feel" the flow, then this is true for the "shallow water" model and is a consequence of the Galilean non-invariance of the dispersion relation. Considering various approaches, we show that there is no strict dispersion relation for the Galilean-non-invariant dispersion relation. Some not quite strict assumptions and assumptions are always added, such as the formal existence of vertical boundaries or the dependence of the barotropic radius on the variable transverse coordinate. The derivation of the dispersion relation with the Doppler shift also contains some asymptotic expansions, accompanied by an analysis of the theory of dimensions. Using common terminology, we combine the main analytical results on the topic and present them in a single logic.

Keywords: Rossby waves, dispersion relation, Doppler shift, Galilean noninvariance

1. Введение

Теория низкочастотных волн в атмосфере и океане восходит к «приливным уравнениям» Лапласа. В 1890-е гг. было установлено [1–4], что уравнения Лапласа имеют решения, которые наряду с гравитационно-инерционными (колебания первого класса) содержат низкочастотные градиентно-вихревые волны (колебания второго класса), связанные с вращением и сферичностью Земли. Эта теория практически оставалась без приложения к задачам гидрометеорологии вплоть до конца 1930-х гг., когда Карл Россби [5] открыл в приближении «β-плоскости» низкочастотные волновые движения, а Б. Гаурвиц впервые отождествил волны Россби с лапласовскими колебаниями второго класса на сфере [6]. Интерес геофизиков к волнам Россби с каждым годом все возрастает. Во всех серьезных монографиях как по геофизической гидродинамике [7–13], так и по и механике сплошных сред [14–15] обязательным элементом видов волн на воде являются волны Россби. Изложение волн Россби в монографиях [7, 12, 15] идет в ключе общего подхода к волнам в океане: через классическое разделение переменных. В частности, применяется подход «лучи — в горизонтальной плоскости, мода — по вертикальной координате [16]. Общим ключевым моментом при этом является отсутствие фонового течения [7, 12, 15]. В монографии [7] есть следующее общее теоретическое утверждение, относящееся к любым видам линейных волн: для почти плоских волн, для которых можно написать лучевые уравнения Гамильтона [17], частота ω волны, двигающейся в среде со скоростью **U**, воспринимаемая неподвижным наблюдателем, равна

$$\omega = \sigma_0 + \mathbf{kU}, \tag{1}$$

где σ_0 — частота, измеренная в неподвижной среде, **k** — волновое число (вектор). Величина **kU** называется «доплеровским сдвигом». В отличие от [7], мы будем полагать для простоты изложения, что скорость фонового течения строго постоянная величина **U** — const. Для случая, когда **U** = U(**x**) можно построить ВКБ-приближение [18, 19] или ввести конвективные координаты для линейного поля скорости (для волн Россби это сделано в работах [20, 21].

Понимание физического смысла доплеровского сдвига не является тривиальным. Поэтому у исследователя, прочитавшего монографию [7], не знакомого со всеми *тонкими настройками* волн Россби [8], может сложиться впечатление, что волны Россби — это обычные диспергирующие волны, скорость фонового потока для которых, по крайней мере в линейной постановке, должна быть отражена через доплеровскую добавку к частоте. Однако, это утверждение о доплеровской добавке к частоте в целом не верно для волн Россби. Точнее говоря, доплеровская добавка к частоте ω может быть, а может и не быть, в зависимости от постановки задачи.

Принципиальным отличием волн Россби от других видов волн на воде является наличие большого количества факторов, которые определяют их динамику. Эти факторы определяют различные подходы или приближения, которые используются при исследовании волн Россби: стратифицированный или однородный по плотности океан, граничное условие — свободная поверхность или «твердая крышка», наличие топографических изменений или их отсутствие, рассматривается приближение *f*- или β-плоскости, отсутствие или наличие фонового потока, фоновый поток баротропный или бароклинный. Вывести единое дисперсионное соотношение с учетом всех перечисленных выше факторов в общем случае невозможно. В некотором смысле, волны Россби — это образ собирательный. В одних постановках для волн Россби имеется классический доплеровский сдвиг. В других постановках доплеровского сдвига, в чистом виде, нет.

Мы полагаем, что разные авторы часто говорят об одном и том же явлении, используя различную терминологию. Одни (см., например, [22]) говорят о галилеевской неинвариантности, понимая под этим нарушение соотношения (1). Другие, в более ранних работах, например [23, 24], используют термин «псевдо-бета-эффект» или говорят о «недоплеровском эффекте» [25, 26].

Отметим, что исторически, дисперсионные соотношения для волн Россби в разных постановках, которые дают доплеровский и не доплеровский сдвиг, были получены в одномерном случае еще в пионерской работе Россби 1939 г. [5]. Но никто из выше цитируемых авторов этого факта не замечает. Впоследствии, одномерные результаты галилеево-неинвариантного дисперсионного соотношения были обобщены Чарни и Обуховым [27, 28], и это уравнение иногда в литературе называется уравнением Чарни-Обухова.

Принципиально важно отметить, что геофизическая гидродинамика зародилась, как наука об атмосфере, и только потом были сделаны обобщения на случай океана. Исторически развитие шло от Бьеркнеса к Россби, Чарни, Обухову, Педлоски. Основные приближения наиболее лаконично сформулированы в работе Чарни 1948 года: «В поисках необходимого набора принципов ориентируются на опыт синоптиков-метеорологов, обнаруживших, что погода, вызывающая движения свободной атмосферы, может характеризоваться с использованием терминов: квазигидростатический, квазиадиабатический, квазигоризонтальный и квазигеострофический» [27].

Целью данной работы является обзор дисперсионных соотношений волн Россби при наличии фонового потока с акцентом на наличие, либо на отсутствие доплеровской добавки к частоте. При этом постановки и дисперсионные соотношения, излагаемые в данной статье, являются общеизвестными, но по-разному изложенные у разных авторов. Мы приводим имеющиеся в литературе различные подходы и основные аналитические результаты по дисперсионным соотношениям волн Россби в единую систему, излагая их в единой логике с использованием общей терминологии. Для лаконичности изложения мы избегаем повтора выводов хорошо известных дифференциальных уравнений, но даем соответствующие ссылки. При этом мы ограничимся случаем приближения β-плоскости. Дисперсионное соотношение для планетарных волн на сфере (случай сферических координат) в терминах присоединенных функций Лежандра можно найти в монографии [12] и соответствующей библиографии. Из западной литературы одной из важнейших можно назвать работу [29].

2. Стратифицированный океан

2.1. Нелинейная краевая задача

Уравнение квазигеострофической потенциальной завихренности на β- плоскости для стратифицированной несжимаемой жидкости имеет вид (см., например, [8] — уравнение (6.8.11); [7] — уравнение (44.40)):

$$\frac{d_h}{dt}\left[\nabla_h^2\Psi+\left(\frac{1}{S}\Psi_z\right)_z+\beta y\right]=0, \tag{2}$$

где приняты следующие стандартные обозначения:

$$\frac{d_h}{dt}=\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right],\quad \nabla_h^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{3}$$

ψ — давление, $S = N^2/f^2$, N — частота Вяйсяля-Брента, далее считается постоянной, f — удвоенная частота вращения Земли: $f = f_0 + \beta y$, $f_0 = 2\omega\sin\varphi_0$, $\beta = 2\omega\cos\varphi_0/R$, R — радиус Земли. Система координат правая: ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вверх. Компоненты скорости находятся из соотношений $u=-\dfrac{\Psi_y}{\rho f}$, $v=\dfrac{\Psi_x}{\rho f}$, ρ — плотность воды. Уравнение (2) получается редукцией из уравнений для импульса и сохранения массы в адиабатическом приближении. В этом уравнении не учитываются молекулярная диффузия, трение, теплопроводность, источники тепла и соли. Так как жидкость считается несжимаемой, уравнение сохранение массы распадается на два уравнения — для плотности и скорости. Поле скорости является бездивергентным.

Для нахождения дисперсионного соотношения волн Россби в океане в случае стратифицированной жидкости к нелинейному уравнению завихренности необходимо добавить нелинейные граничные условия на свободной поверхности и дне (см. Приложение, формулы (А3-А5)). Для граничных условий не будут учитываться экмановские слои и ветровая накачка.

Однако, даже несмотря на сделанные предположения о граничных условиях, нелинейные граничные условия на свободной поверхности в стратифицированном океане аналитически не разрешимы. Так как само понятие «свободная поверхность» является следствием решения задачи об отражении ([7], стр. 93), то приходится делать дополнительные упрощающие предположения, такие как линеаризация уравнения завихренности и граничных условий, а также замена верхнего граничного условия на твердую поверхность (предположение о «твердой крышке»).

2.2. Линеаризация уравнения завихренности

На первом этапе предположим, что фоновое течение отсутствует. Тогда, отбрасывая квадратичные слагаемые, приводим уравнение (2) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla_h^2\Psi+\left(\frac{1}{S}\Psi_z\right)_z+\beta\Psi_x\right]=0. \tag{4}$$

Решение для возмущений ищем в виде двойного интеграла Фурье:

$$\Psi(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Psi}(k,l,z,\sigma)\exp\left[i(kx+ly-\sigma t)\right]dk\,d\sigma. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) получаем уравнение:

$$\frac{1}{S}\tilde{\Psi}_{zz}-\left(\frac{\beta k}{\sigma}+k^2+l^2\right)\tilde{\Psi}=0. \tag{6}$$

Сначала рассмотрим линейные граничные условия на свободной поверхности без учета топографии (см. Приложение, формула (A11)).

$$\begin{gathered}\tilde{\Psi}_z+\frac{N^2}{g}\tilde{\Psi}=0, \quad z=0,\\ \tilde{\Psi}_z=0, \quad z=-H,\end{gathered} \tag{7}$$

где H — глубина океана, g — ускорение свободного падения. Данная задача является задачей Штурма-Лиувилля. Будем искать решение в следующем виде:

$$\tilde{\Psi}=\cos m(z+H), \quad m^2=-S\left(\frac{\beta k}{\sigma}+k^2+l^2\right). \tag{8}$$

Оно автоматически удовлетворяет уравнению (6) и нижнему граничному условию (7). Подставляя (8) в верхнее граничное условие, получаем следующее уравнение

$$\tan mH=\frac{N^2}{gm}. \tag{9}$$

Важно отметить, что данное уравнение является трансцендентным и не имеет точных аналитических решений. Графический анализ данного уравнения дает следующие приближенные корни:

$$m_0^2\approx\frac{f^2}{gH}, \quad m_n\approx\frac{n\pi}{H}, \quad n=1,2,3,...$$

Окончательно получаем следующее приближенное решение краевой задачи:

$$\sigma_0\approx-\frac{\beta k}{k^2+l^2+F}, \quad F=\frac{f^2}{gH}, \quad \tilde{\Psi}\approx\text{const}. \tag{10}$$

$$\sigma_n\approx-\frac{\beta k}{k^2+l^2+(\pi n/L_r)^2}, \quad L_r=\frac{NH}{f}, \quad n=1,2,3,... \tag{11}$$

где k и l — зональное и меридиональное волновые числа, σ — частота. Первую моду σ_0 называют баротропной волной Россби. Бесконечный счетный набор мод σ_n принято называть бароклинными волнами Россби. Важно отметить, что знака равенства в уравнениях (10) и (11) нет, и вместо точных используются приближенные значения.

Оценки внешнего r_e и внутреннего r_i радиусов деформации: $r_e=F^{-1/2}\approx 2000$ км $r_i=L_r^{-1}\approx 100$ км. (В расчетах приняты оценки $N=2\times10^{-3}$ рад/с, $g=10$ м/с^2, $H=5\times10^3$ м). Эти оценки показывает сильную разнесенность типичных масштабов баротропных и бароклинных волн Россби, что является основанием рассчитывать на их независимое аналитическое изучение.

Собственная функция баротропной моды, принимающая значение 1 на дне, практически не изменяется, достигая поверхности океана: изменение фазы всего 10^{-2}. Поэтому собственная функция приблизительно равна константе. Горизонтальные компоненты скорости в первом порядке не зависят от вертикальной координаты, а возмущения плотности и вертикальной скорости пренебрежимо малы.

В отличие от баротропной, бароклинная мода связана с наличием в среде стратификации. Этим бароклинная мода напоминает обычные внутренние волны в океане, однако имеются и принципиальные отличия. Согласно теории, для заданной фиксированной частоты волн Россби существует конечное множество вертикальных собственных функций, в то время как в реальном бароклинном океане их может и не быть вовсе [18, 19, 30, 31–33]. Баротропный (внешний) и бароклинный (внутренний) радиусы деформации Россби — это характерные пространственные горизонтальные масштабы, которые используются при рассмотрении множества волновых процессов. Когда масштабы волн сравнимы с радиусом деформации, часто используется геострофическое приближение. Если в динамике сплошной среды движение происходит в направлении градиента давления, то во вращающейся системе координат геострофическое движение — это движение перпендикулярно градиенту давления. В этом и состоит главная особенность геострофического приближения.

Возникает вопрос: можно ли получить не приближенное, а точное дисперсионное соотношение волн Россби? Ответ на этот вопрос следующий. Одновременно заменить приближенное выражение на точное равенство в баротропном и бароклинном дисперсионных соотношениях нельзя. Однако, это можно сделать по отдельности. Сначала улучшим бароклинное дисперсионное соотношение. Для этого перейдем к более простым граничным условиям: от свободной поверхности к «твердой крышке». Одновременно добавим в задачу баротропное фоновое зональное течение. А впоследствии (см. раздел 3), наоборот, оставим нелинейную свободную поверхность и топографию, но при этом придется убрать стратификацию.

2.3. Линейное уравнения завихренности на зональном баротропном течении. «Твердая крышка»

Предположим, что на фоне баротропного зонального течения U имеются малые возмущения. Для функции тока в виде

$$\Psi(x,y,z,t) = -Uy + \varepsilon\hat{\Psi}(x,y,z,t), \tag{12}$$

где ε — малый параметр, характеризующей отношение амплитуд возмущений к фоновому течению. Подставив (12) в (2), получаем следующее уравнение в линейном приближении:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\nabla_h^2\hat{\Psi} + \left(\frac{1}{S}\hat{\Psi}_z\right)_z + \beta\hat{\Psi}_x\right] = 0. \tag{13}$$

Снова ищем решение в волновом представлении

$$\hat{\Psi}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Psi}(k,l,z,\sigma)\exp\left[i(kx + ly - \sigma t)\right]dk\,d\sigma. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получаем уравнение

$$\frac{1}{S}\tilde{\Psi}_{zz} - \left(\frac{\beta k}{\sigma - kU} + k^2 + l^2\right)\tilde{\Psi} = 0, \tag{15}$$

с граничными условиями «твердая крышка» (см. Приложение). При добавлении зонального потока линеаризованные граничные условия не изменились:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_z &= 0, \quad z = 0, \\ \tilde{\Psi}_z &= 0, \quad z = -H. \end{aligned} \tag{16}$$

Решение, автоматически удовлетворяющее уравнению (15) и нижнему граничному условию (16), имеет вид

$$\tilde{\Psi} = \cos m(z + H), \quad m^2 = -S\left(\frac{\beta k}{\sigma - kU} + k^2 + l^2\right). \tag{17}$$

Подставляя (17) в верхнее граничное условие (16), получаем следующее уравнение на собственные значения:

$$\tan mH = 0. \tag{18}$$

Это уравнение уже имеет точные решения $m_0^2 = 0$, $m_n = \dfrac{n\pi}{H}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Окончательно получаем следующее точное решение линейной краевой задачи для стратифицированного океана с верхним граничным условием «твердая крышка»:

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2} + kU, \quad \tilde{\Psi} = \text{const}, \tag{19}$$

$$\sigma_n = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \left(\frac{\pi n}{L_r}\right)^2} + kU, \quad L_r = \frac{NH}{f}, \quad n = 1,2,3,... \tag{20}$$

Первую моду σ назовем бездивергентной волной Россби. Педлоски ([8], стр. 460, формула (6.12.10a)) и Salmon ([9], уравнение (21.23)) называют эту моду баротропной. Для этой моды возмущения плотности и вертикальная скорость строго равны нулю, а горизонтальные скорости не зависят от вертикальной координаты. Моды σ_n называются бароклинными. Эти моды имеют вертикальную структуру и обладают всеми свойствами классической задачи Штурма-Лиувилля (n — количество узлов по вертикали).

Таким образом, в стратифицированном океане в линейной постановке с верхним граничным условием «твердая крышка» дисперсионные соотношения для бароклинных и бездивергентных волн Россби на зональном потоке имеют классическую Доплеровскую добавку. Остается нерешенным вопрос: «твердая крышка» отфильтровывает баротропную моду или трансформирует ее в бездивергентную?

Так как типичные размеры океанских вихрей — это ~150 км, а баротропный радиус Россби r_e ~ 2000 км, то практически отсутствует (крайне мала) разница между баротропной и безивергентной модой для океана в данной постановке.

Заметим, что непосредственной проверкой можно убедиться, что если в решении типа «плоская волна на течении» (12) не делать предположения о малости ε, а считать это неким амплитудным параметром, тогда решение (12) будет точным решением нелинейного уравнения завихренности (2) с нелинейными граничными условиями в виде «твердой крышки». Заметим, что в работе [34] показано, что вихри могут дрейфовать на запад со скоростью, аналогичной фазовой скорости линейных волн Россби.

Для анализа баротропной моды нужно отфильтровать бароклинные (внутренние) моды, источником которых является стратификация. На первом этапе мы не рассматриваем стратификацию и переходим к модели однородного по плотности океана.

3. Океан однородной плотности. «Мелкая вода»

Для однородного по плотности океана удается перейти к квазидвумерной задаче. Принципиально важным является следующий момент. Полные нелинейные граничные условия будут проинтегрированы и включены в само дифференциальное уравнение. Этот факт сильно упрощает математический анализ.

3.1. Интегрирование по вертикали

В однородном по плотности океане уравнение гидростатики сразу интегрируется с использованием динамического граничного условия для давления на верхней свободной поверхности: $p = -\rho g\left[\eta(x,y,t) - z\right]$, откуда следует, что горизонтальные градиенты давления не зависят от вертикальной координаты z. Из уравнений для импульса также следует, что горизонтальные компоненты скорости не зависят от вертикальной переменной ζ: $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ и, следовательно, уравнение для дивергенции скорости можно проинтегрировать по вертикальной координате в явном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \leftarrow \quad \int\limits_{-H(x,y)}^{\eta(x,y,t)} dz. \tag{21}$$

В итоге получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(H + \eta\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v\left(H + \eta\right)\right] = 0, \tag{22}$$

где $H = H$ (x, y) — глубина океана, $\eta(x, y, t)$ — возмущение свободной поверхности. Таким образом, в теории «мелкой воды» производные по вертикальной переменной уходят вместе с автоматическим выполнением нелинейных граничных кинематических и динамических условий.

В стратифицированном океане граничные условия — это основная проблема, в нелинейной постановке (кроме «твердой крышки»), практически не разрешимая. В нестратифицированном океане этот вопрос снимается поразительно легко. Далее, стандартной процедурой, которая изложена во многих монографиях (см., например, [7–10]), нахождения ротора от уравнений импульса для горизонтальных координат получается нелинейное уравнение сохранения интегральной (баротропной) потенциальной завихренности

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{H+\eta}\right)=0, \quad \zeta=v_x-u_y, \quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}. \tag{23}$$

Если решение искать в виде плоских волн (аналогичный результат получается и в случае стратифицированного океана), тогда для собственных значений получается кубическое уравнение, которое всегда имеет действительные корни. Однако точных выражений для этих корней нет. Уравнение не раскладывается на множители. Ситуация напоминает баротропную и бароклинную моду. Можно снова прибегнуть к графическому анализу и получить следующий приближенный результат. Здесь бы хотелось подчеркнуть, что нет никакого четкого разделения, про которое пишет Педлоски [8]. В данном случае имеются две высокочастотные ($\sigma > f$) гравитационные волны, дисперсионное соотношение которых имеет вид $\sigma=\pm\left[f^2+\right.$ $\left.+gH\left(k^2+l^2\right)\right]^{1/2}$, их называют волнами Пуанкаре (иногда под волнами Пуанкаре понимают частный случай при наличии горизонтальных границ). И третий корень — это низкочастотная мода, с частотой меньше инерционной частоты ($\sigma < f$) — волна Россби. Поэтому, заранее зная ответ, можно изначально сделать дополнительное упрощающее предположение о том, что интересующие нас решения являются низкочастотными. Этот низкочастотный фильтр при условии «твердой крышки» позволяет ввести массовую функцию тока, которую иногда называют функцией потока. Чарни [27] называл эту процедуру «filter out the noise» (отфильтровать шум).

3.2. «Мелкая вода» в приближении «твердой крышки». Топографические волны Россби на течении в океане

Низкочастотный фильтр, предположение что $\sigma << f$, приводит к появлению термина «квазигеострофика». Следуя [7], для океана в уравнении (23) вторым из двух слагаемых в сумме ($H + \eta$) можно пренебречь и перейти к аппроксимации «твердая крышка» ($\eta = 0$). Тогда при асимптотическом построении решения для величин первого порядка предполагается выполнение геострофических соотношений

$$H(x,y)u(x,y,t)=-\Psi_y(x,y,t), \quad H(x,y)v(x,y,t)=\Psi_x(x,y,t). \tag{24}$$

Тогда для волновых возмущений вида

$$\Psi(x,y,t)=\Psi(y)\exp ik(x-ct) \tag{25}$$

уравнение баротропной потенциальной завихренности, линеаризованное на фоне зонального потока, для топографии, имеющей меридиональное направление изменчивости, в приближении «твердой крышки» имеет вид ([7], формула (45.6)):

$$(U-c)\left[\left(\frac{\Psi_y}{H}\right)_y-\frac{k^2}{H}\Psi\right]+\left(\frac{f}{H}\right)_y\Psi=0. \tag{26}$$

Второе слагаемое можно преобразовать в виде, так называемого, эффективного β:

$$\beta^*=\beta-\frac{f\,H_y}{H}. \tag{27}$$

Нетрудно заметить, что отношение четвертого слагаемого в формуле (27) к третьему есть число Кибеля-Россби Ro = U/fL [17, 35, 36]. Далее, стандартной заменой переменных $\tilde{\Psi}(y)=\sqrt{H(y)}\Psi(y)$ в уравнении (26) можно исключить первую производную. Для простоты изложения примем экспоненциальный профиль топографии. Самый удобный и наиболее часто используемый в топографических моделях океана — экспоненциальный профиль топографии шельфа-материкового склона $H(y)=H_0\exp(-\alpha y)$, тогда для $\Psi\sim\exp(ily)$ получим явное дисперсионное соотношение

$$\sigma=-\frac{(\beta+\alpha f)k}{k^2+l^2+\frac{1}{4}\alpha^2}+kU. \tag{28}$$

Отметим следующие факты: 1) топография входит как в числитель (эффективное β), так и в знаменатель; 2) «твердая крышка» снова устранила баротропный радиус Россби в знаменателе; 3) при стремлении изменения топографии к нулю ($\alpha \to 0$) дисперсионное соотношение (28) переходит в дисперсионное соотношение для бездивергентных волн Россби (19); 4) и, самое главное, скорость фонового потока входит только через Доплеровскую добавку.

Проявления топографических волн Россби крайне разнообразны, что обуславливает необходимость различных подходов при их анализе. Имеются топографические шельфовые волны, внутренние шельфовые волны, желобовые волны, волны Кельвина и двойные волны Кельвина как предельные случаи [37–39]. В эффективном бета (β^*) топография сравнивается с β-параметром при уклонах донной топографии порядка 10^{-3}. Вдоль континентальных склонов и особенно в океанских желобах превалирует топографическая составляющая β^*.

Таким образом, в модели однородного по плотности океана в приближении «твердой крышки» топография присутствует, как в числителе, так и знаменателе дисперсионного соотношения, а скорость течения учитывается через классический Доплеровский сдвиг.

3.3. «Мелкая вода» в приближении свободной поверхности. Случай атмосферы

Впервые учет отклонения свободной поверхности для атмосферы был проанализирован в работе Россби в 1939 г. [5]. В приближении свободной поверхности функция тока вводится следующим образом:

$$\Psi(x,y,t) = \frac{g\eta}{f_0}. \tag{29}$$

(сравните с (24)). При этом поле скорости: $u = -\Psi_y$, $v = \Psi_x$. Далее, предполагается, что существует некая средняя глубина H_0 и есть одновременно изменения топографии $h = H_0 - H$ и свободной поверхности η, которые много меньше средней глубины: $\eta << H_0,\ \ h << H_0$ и имеют один порядок малости. Далее, выражение для интегральной потенциальной завихренности в приближении геострофики раскладывается в ряд Тейлора с точностью до первых слагаемых:

$$\frac{\xi + f}{H+\eta} = \frac{f_0}{H_0}\frac{1+\dfrac{\beta y}{f_0}+\dfrac{\Delta\Psi}{f_0}+\dots}{1+\dfrac{f_0\Psi}{gH_0}-\dfrac{h}{H_0}+\dots} \approx \frac{f_0}{H_0}\left(1+\frac{\beta y}{f_0}+\frac{\Delta\Psi}{f_0}-\frac{f_0\Psi}{gH_0}+\frac{h}{H_0}\right). \tag{30}$$

Вопрос с последним слагаемым (с топографией) не совсем понятный, обсуждение его с применением более полного анализа методом масштабов можно найти в монографиях [8, 9]. Педлоски [8] утверждает, что топография может быть произвольная, однако Salmon [9] считает, что даже в приближении малости топографии возникают серьезные проблемы с законами сохранения. Добавим, что если дополнительно учесть и уравнение неразрывности в интегральной форме (22), то появляется еще больше вопросов, чем ответов. Мы склоняемся к точке зрения Salmon [9]. К этому вопросу мы вернемся ниже при анализе линейной постановки.

Уравнение квазигеострофической потенциальной завихренности в теории «мелкой воды» на β-плоскости в отсутствие топографии со свободной поверхностью имеет вид

$$\frac{d_h}{dt}\left[\nabla_h^2\Psi - F\Psi + \beta y\right] = 0, \tag{31}$$

где сохраняются принятые обозначения (см. (10)). Уравнение (31) также называют уравнением Обухова-Чарни.

По аналогии с стратифицированным океаном (12) будем искать решение в виде суммы фонового зонального течения и плоской волны Россби:

$$\Psi(x,y,t) = -Uy + A\hat{\Psi}(x,y,t), \quad \hat{\Psi}(x,y,t) = \cos(kx+ly-\omega t). \tag{32}$$

Предположения о малости волн нет, A — произвольный амплитудный параметр, ω — частота. Подставляя (32) в (31) после несложных вычислений ([8], п. 3.18), получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = \frac{k\left[U\left(k^2+l^2\right)-\beta\right]}{k^2+l^2+F} = -\frac{\beta k}{k^2+l^2+F} + kU - \frac{kFU}{k^2+l^2+F}. \tag{33}$$

Данное дисперсионное соотношение имеет, помимо классической Доплеровской добавки к частоте kU, еще одно слагаемое $\frac{kFU}{k^2+l^2+F}$. Нетрудно видеть, что в длинноволновом приближении $k^2 + l^2 \to 0$ два последних слагаемых в формуле (33) сокращаются, и мы получаем следующий, часто цитируемый результат: длинные волны Россби в длинноволновом пределе в модели «мелкой воды» не «чувствуют» течения. В одномерном случае данное дисперсионное соотношение впервые получил Россби в 1939 [5]. Важно отметить, что это свойство относится только к модели «мелкой воды» и неверно для случая непрерывно стратифицированного океана.

Предположение, что жидкость не является стратифицированной, дает неожиданно сильный прогресс в математическом анализе уравнений. Краевые условия на удивление легко интегрировались в дифференциальное уравнение, при этом сами уравнения вместо трехмерных стали еще и двумерными, и все проблемы с верхним граничным условием исчезли. Однако, с физической точки зрения предположение об однородности океана слишком сильно выхолащивает задачу. Поэтому в дальнейшем мы попытаемся вернуть стратификацию и введем бароклинность течения для улучшения физической адекватности постановки. Обобщение задачи на два слоя жидкости с различной однородной плотностью будет рассмотрено в следующем разделе. Отметим, что помимо многослойных моделей существуют и многоуровневые модели [9].

3.4. Приближение «мелкой воды» при наличии свободной поверхности и топографии на β-плоскости. Линейная постановка. Случай океана

Линеаризованные уравнения «мелкой воды» для вращающейся жидкости на фоне однородного течения в направлении x-координаты $\vec{U} = (U,0,0)$ и одномерной топографии, изменяющейся в y-направлении $H(y)$, имеют вид:

$$u_t + Uu_x - fv = -g\eta_x, \tag{34}$$

$$v_t + Uv_x + fu = -g\eta_y, \tag{35}$$

$$(Hu)_x + (Hv)_y + \eta_t + U\eta_x = 0. \tag{36}$$

Течение стационарно во времени и однородно в зональном (продольном) направлении. Решение можно искать в виде интеграла Фурье. Полагаем:

$$u, v, \eta \sim \exp i(kx - \omega t). \tag{37}$$

Тогда уравнения (34), (35), (36) примут вид:

$$i(kU - \omega)u - fv = -gik\eta, \tag{38}$$

$$i(kU - \omega)v + fu = -g\eta_y, \tag{39}$$

$$ikHu + (Hv)_y + i(kU - \omega)\eta = 0. \tag{40}$$

Система уравнений галилеево-инвариантна. И это крайне важный момент.

Несложными преобразованиями из (38) и (39) получаем:

$$\left[f^2 - (kU-\omega)^2\right]u = g\left[k(kU-\omega)\eta - f\eta_y\right], \tag{41}$$

$$\left[f^2 - (kU-\omega)^2\right]v = ig\left[fk\eta - (kU-\omega)\eta_y\right]. \tag{42}$$

Введем обозначение $\omega_d = kU - \omega$. Сначала проанализируем попарно влияние трех факторов: свободная поверхность, топография и β-параметр.

3.4.1. Приближение f-плоскости

Полагаем $f = \text{const}$, учитываются также изменения топографии и свободной поверхности. Подставляя (41) и (42) в (40), получаем обобщенное уравнение топографических волн Россби на «мелкой воде» (свободная поверхность, баротропный случай) при постоянном течении:

$$\left(H\eta_y\right)_y + \left(\frac{\omega_d^2 - f^2}{g} - Hk^2 + \frac{fk}{\omega_d}H_y\right)\eta = 0. \tag{43}$$

Далее заменой переменных $\eta(y) = H^{-1/2}(y)s(y)$ уравнение (43) приводится к виду [40]:

$$s_{yy} + \left(\frac{\omega_d^2 - f^2}{gH} - k^2 + \frac{kf}{\omega_d} \frac{H_y}{H} - \frac{1}{2\sqrt{H}} \left(\frac{H_y}{\sqrt{H}} \right)_y \right) s = 0. \tag{44}$$

Важно отметить, что даже в низкочастотном приближении, полагая ($\omega < f$) и принимая экспоненциальный профиль топографии $H = H_0 \exp(2by)$, получаем уравнение (44) в виде:

$$s_{yy} + \left(\frac{2kbf}{\omega_d} + \frac{\omega_d^2 - f^2}{gH(y)} - k^2 - b^2 \right) s = 0. \tag{45}$$

В приближении свободной поверхности оно не является уравнением с постоянными коэффициентами, и, как следствие, нельзя искать решение в виде $s \sim \exp(ily)$ и получить дисперсионное соотношение вида

$$\omega = \frac{2kbf}{k^2 + l^2 + b^2 + \dfrac{f^2}{gH(y)}} + kU. \tag{46}$$

Причина в наличии верхней свободной поверхности, которая в совокупности с топографией не дает возможности получить дисперсионное соотношение. Нужны или некие оправдания, почему в знаменателе стоит функция от поперечной координаты, или нужно избавиться от этой зависимости. В работе [40] вместо переменной топографии берется некая средняя глубина по склону — полусумма в верхней и нижней точке:

$$H(y) \to \frac{H_1 + H_2}{2}. \tag{47}$$

На наш взгляд — это слишком радикальное приближение. Однако данное приближение является востребованным, и активно цитируется в современных исследованиях по северным морям.

3.4.2. Приближение β-плоскости и свободной поверхности без топографии

Теперь предположим, что топография, наоборот, не изменяется ($H = H_0 = \text{const}$), однако учитывается меридиональное изменение параметра f. Примем приближение β-плоскости, полагая $f = f_0 + \beta y$; в дальнейшем опускаем нижний индекс у частоты f. Подставляя (41), (42) в (40), имеем

$$\eta_{yy} - \left(\frac{f^2}{gH_0} + k^2 + \frac{\beta k}{\omega_d} \right) \eta = 0. \tag{48}$$

В итоге получаем точное дисперсионное соотношение для баротропных волн Россби с учетом свободной поверхности на течении:

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \dfrac{f^2}{gH_0}} + kU. \tag{49}$$

3.4.3. Приближение β-плоскости с учетом изменений свободной поверхности и топографии

Совместный учет влияния β, изменений топографии и свободной поверхности приводит к следующему уравнению:

$$\left(H\eta_y\right)_y + \left(\frac{\omega_d^2 - f^2}{g} - Hk^2 + \frac{fk}{\omega_d} H_y + \frac{\beta H}{\omega_d} \left[k - \frac{2f^2 k}{f^2 - \omega_d^2} \right] \right) \eta - \frac{2f\beta H}{f^2 - \omega_d^2} \eta_y = 0. \tag{50}$$

В низкочастотном приближении на β-плоскости с учетом топографии и свободной верхней поверхности получаем:

$$\left(H\eta_y\right)_y + H\left(-\frac{f^2}{gH} - k^2 + \frac{k}{\omega_d} \left[\beta - f \frac{H_y}{H} \right] \right) \eta = 0. \tag{51}$$

Следовательно, свободная поверхность сильно затрудняет получение точного дисперсионного соотношения при наличии совместного учета сразу нескольких параметров, например, изменений топографии и β-параметра. Но отбрасывание свободной поверхности сильно усложняет вопрос с предельным переходом в длинноволновом пределе для двойных волн Кельвина. Поэтому учет свободной поверхности — это, скорее, мера вынужденная, как с практической точки зрения, так и с теоретической.

4. Двухслойная модель Филлипса

4.1. Основные уравнения

Одной из моделей, описывающей бароклинные стратифицированные стационарные течения в отсутствии трения и топографии, является двухслойная модель Филлипса, которая описывается следующими уравнениями (см. [8], п. 7.9):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Delta\Psi_n - F_n\left(-1\right)^n\left(\Psi_2-\Psi_1\right)+\beta y\right]=0, \qquad (52)$$

где $n = 1$ — верхний слой, $n = 2$ — нижний, Δ — двумерный оператор Лапласа. Двухслойная модель с учетом топографии рассмотрена в работах [9 (раздел 21), 41–43]. Результаты по нелинейной двухслойной модели можно найти в работе [44] и имеющейся там библиографии. Обозначим:

$$F_1=\frac{f^2}{g\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)D_1}, \quad F_2=\frac{f^2}{g\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)D_2}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho}, \quad \rho_2>\rho_1, \qquad (53)$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотность в верхнем и нижнем слоях, соответственно, ρ_0 — средняя плотность воды. Рассматриваются пространственные горизонтальные масштабы много меньше внешнего радиуса деформации Россби (~2000км). Поэтому не учитываются колебания свободной поверхности и, как следствие, принимается приближение верхней «твердой крышки». Тогда единственным источником бароклинных возмущений является внутренняя граница раздела между слоями. Для океана такая граница раздела принимается, как правило, за положение нижней границы термоклина.

В двухслойной модели плотность в каждом слое постоянна и присутствует постоянное зональное течение, которое также постоянно в пределах каждого слоя. Если скорости в разных слоях не совпадают, тогда имеется наклон поверхности раздела. Данный факт приводит к вынужденному предположению наличия твердых стенок по поперечной координате $y = \pm L_0$. Граничные условия непротекания приводят к квантованию поперечного волнового числа l. В результате получается $l = l_j = (j + 1/2)\,\pi/L_0$, $j = 1, 2, \dots$.

Решение линеаризованных уравнений (52) ищется в следующем виде

$$\Psi_n\left(x,y,z,t\right)=-U_n y+\varepsilon A_n\cos\left(l_j y\right)\cos\left[k\left(x-ct\right)\right]. \qquad (54)$$

Модель Филлипса — это линейная модель; здесь принимается предположение о малости волн: $\varepsilon \ll 1$. В результате получаются два собственных значения для фазовой скорости (более полные выкладки можно найти в монографии ([8], пп. 7.9–7.10):

$$c_{1,2}=U_2+\frac{U_s K^2\left(K^2+2F_2\right)-\beta\left(2K^2+F_1+F_2\right)}{2K^2\left(K^2+F_1+F_2\right)}\pm$$
$$\pm\frac{\left[\beta^2\left(F_1+F_2\right)^2+2\beta U_s K^4\left(F_1-F_2\right)-K^4U_s^2\left(4F_1F_2-K^4\right)\right]^{1/2}}{2K^2\left(K^2+F_1+F_2\right)}, \qquad (55)$$

где $K^2=k^2+l_j^2$, $U_s = U_1 - U_2$. Соотношение для амплитуд волн в разных слоях находятся из соотношений (см. [8], п. 7.11)

$$A_1\left[\left(c-U_1\right)\left(K^2+F_1\right)+\beta+F_1U_s\right]-A_2\left(c-U_1\right)F_1=0, \qquad (56)$$

$$A_2\left[\left(c-U_2\right)\left(K^2+F_2\right)+\beta-F_2U_s\right]-A_1\left(c-U_2\right)F_2=0. \qquad (57)$$

(Отметим, что в монографии [8] в формуле (7.11.23) опечатка).

В отсутствие сдвига скорости фонового течения между слоями получаем следующие дисперсионные соотношения для бездивергентной (знак «+» в формуле (55)) и бароклинной моды (знак «–» в формуле (55)):

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l_j^2} + kU, \quad A_1 = A_2, \tag{58}$$

$$\sigma_1 = -\frac{\beta k}{k^2 + l_j^2 + F_1 + F_2} + kU, \quad A_1 / A_2 = -F_1 / F_2 = -D_2 / D_1; \tag{59}$$

(58) — это дисперсионное соотношение для бездивергентной моды, что косвенно говорит о том, что для верхнего слоя используется приближение «твердой крышки»; (59) — это дисперсионное соотношение для бароклинной моды. Внутренний радиус деформации имеет вид:

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{F_1 + F_2}} = \frac{\sqrt{g\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)}}{f}\sqrt{\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}}. \tag{60}$$

Если принять следующие параметры двуслойной модели океана: $H_1 = 500$ м, $H_2 = 3000$ м, $\frac{\delta\rho}{\rho} = 2 \times 10^{-3}$, получим оценку внутреннего радиуса деформации r_i =40 км [9].

Таким образом, в отсутствии сдвига скорости по вертикали фонового потока (баротропное течение) дисперсионное соотношение в двухслойной модели Филлипса имеет классическую Доплеровскую добавку к частоте.

Изначально, модель Филлипса появилась как модель для изучения неустойчивости. Так как в выражении для фазовой скорости (55) имеется квадратный корень, то в случае отрицательного подкоренного выражения собственное значение (фазовая скорость) становится комплексным. Однако кривая нейтральной устойчивости показывает, что при небольших сдвигах скорости собственные моды остаются строго вещественны. Есть типичная для волн Россби асимметрия величины сдвига от направления сдвига скорости (восточное, западное течение). Минимальные сдвиги скорости фонового потока, когда появляются неустойчивости, определяются величинами $U_{c+} = \beta / F_2$, $U_{c-} = \beta / F_1$. (Более подробно см. [8], п. 7.11; [45]).

Двухслойную модель можно использовать, как предельный переход к другой модели. Изначально, идею такой модели, которая называется «полуторная» или «модель с редуцированной гравитацией», высказал Россби в 1938 г. [46].

4.2. Предельный переход. Бесконечно глубокий легкий верхний слой. Атмосфера

Сделаем небольшое примечание. Возможно, чтобы модель «мелкой воды» оставалась таковой, при увеличении толщины верхнего слоя нужно одновременно увеличивать и ширину канала по оси y: $L_0 \to \infty$. Тогда, возможно, $K^2 \to k^2$, а уравнение уже будет не двумерным, а одномерным, как в оригинальной работе Россби [5]. Однако, согласно [13], во вращающейся системе координат модель «мелкой воды» работает и без предположения о малости отношения вертикального масштаба к горизонтальному. В других монографиях по геофизической гидродинамике про предельный переход ничего не говорится.

Для атмосферы $D_1 \to \infty$, $\delta\rho \to \infty\ \rho$, $F_1 \to 0$ предельный переход дает следующий результат:

$$c_3 = -\frac{\beta}{K^2} + U_1 = -\frac{\beta - U_s K^2}{K^2} + U_2. \tag{61}$$

Связь амплитуд задается следующим соотношением:

$$A_1 F_2\left(U_s K^2 - \beta\right) = A_2\left(U_s K^4 - \beta F_2\right), \tag{62}$$

c_3 — это модифицированная (предельная) баротропная мода;

$$c_4 = -\frac{\beta - U_s F_2}{K^2 + F_2} + U_2 = -\frac{\beta + U_s K^2}{K^2 + F_2} + U_1, \quad \frac{A_1}{A_2} \to 0. \tag{63}$$

c_4 — это модифицированная (предельная) бароклинная мода.

Так как амплитуда в верхнем слое стремится к нулю, то из уравнения для нижнего слоя мы снова получаем уравнение (31). Верхним слоем является стратосфера, где плотность воздуха пренебрежимо мала и, как следствие, редуцированная гравитация становится просто гравитацией, $F_2 \to F$, где F — баротропный радиус Россби. Если положить скорость потока в верхнем слое равной нулю ($U_1 = 0$), тогда из (63) получим дисперсионное соотношение (33).

Двухслойная модель для атмосферы применяется для тропосферы средних широт с верхней «твердой крышкой», соответствующей тропопаузе.

4.3. Предельный переход. Бесконечно глубокий тяжелый нижний слой. Океан

Рассмотрим случай бесконечно глубокого океана: $D_2 \to \infty$. Следовательно, предельный переход при $F_1 \to 0$, $F_1 = f^2/g(\delta\rho/\rho)D_1$.

$$c_5 = -\frac{\beta - U_s K^2}{K^2 + F_1} + U_2 = -\frac{\beta + U_s F_1}{K^2 + F_1} + U_1, \quad \frac{A_2}{A_1} \to 0. \tag{64}$$

c_5 — это модифицированная (предельная) баротропная мода. Данный результат имеет и практическое применение в океане и называется «псевдо-β-эффектом» [25, 26]. В двухслойной модели возникает наклон границы раздела плотностей. В длинноволновом пределе из формулы (64) при условии равенства нулю скорости фонового потока в верхнем слое ($U_1 = 0$) получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$c_{51} = -\frac{\beta}{F_1} + U_2. \tag{65}$$

Такое аномальное дисперсионное соотношение, когда фазовая скорость в верхнем слое определяется через скорость потока в нижнем слое, используется, например, в работе [47] для объяснения аномального распространения океанических вихрей на северо-восток (в верхнем неподвижном слое волна движется не на запад, а на северо-восток, возможно, благодаря донному течению, направленному на северо-восток). Можно увидеть, что при предельном переходе для бесконечно глубокого океана с неподвижным нижним слоем снова получается уравнение (31) и дисперсионное соотношение (33), но уже с редуцированной гравитацией [22].

Отметим, что некоторые авторы, опираясь на то, что баротропный радиус Россби для океана — это тысячи километров, ставят под сомнение применимость в данном случае уравнений «мелкой воды» (Обухова-Чарни) для океана [13]. Однако за счет редукции гравитации данная модель может применяться и для океана.

Второй корень дает следующую асимптотику:

$$c_6 = -\frac{\beta}{K^2} + U_2 = -\frac{\beta + U_s K^2}{K^2} + U_1. \tag{66}$$

Отношение амплитуд

$$A_2 F_1 \left(U_s K^2 + \beta \right) = A_1 \left(U_s K^4 + \beta F_1 \right). \tag{67}$$

c_6 — это модифицированная (предельная) баротропная мода.

5. Верификация дисперсионных соотношений в океане

С развитием методов дистанционного зондирования Земли и альтиметрических наблюдений [48] появились и работы по верификации существующих теоретических результатов. Первоначально скорость волн Россби оценивалась по длинноволновому приближению с помощью спектрального или вейвлет-анализа [49]. Результаты теории и альтиметрические наблюдения высоты поверхности моря для фазовой скорости расходились иногда в два раза. Альтиметрия давала завышенные оценки. При этом линейная теория работала лучше в низких широтах и хуже в высоких широтах. В дальнейшем научным сообществом предпринимались различные попытки уменьшить это расхождение. В качестве факторов, способных сблизить результаты, принимался учет изменений топографии и бароклинности фоновых течений. Однако идея того, что волны Россби зарождаются на восточном побережье и затем, вследствие вращения Земли, двигаются на запад, пересекая океан, оказалась нерабочей. Решения уравнений Ньютона (геометрическая оптика, расчеты трассировки лучей по наблюдаемой гидрографии) не соответствовали этой гипотезе, т. е. волны не пересекают океан. Как следствие, появился новый подход, называемый «локальным приближением», смысл которого заключается в том, Мировой океан разбивается на квадраты со стороной в 1° (ячейки), и скорость волн Россби определяется в каждой локальной точке (квадрате) численно, как решение вертикальной задачи на собственные значения. При этом, естественно, предполагается плавная зависимость от горизонтальных координат. Отметим, что такой подход является новым. Его появление стало возможным благодаря развитию компьютерных технологий, способствующих развитию гидродинамических моделей океана. С другой стороны, прогресс в области дистанционного зондирования Земли, в частности, спутниковой альтиметрии, развитие новых методов исследования океана — системы дрейфующих буев и профилирующих буев Argo, применение глайдеров и т. д., позволяет сегодня не только осуществлять мониторинг океана в режиме реального времени, но и ассимилировать данные измерений в гидродинамических моделях и создавать различные продукты для исследования океана.

Но тогда возникает вопрос: если не брать за основу длинноволновое приближение, то какое волновое число брать для расчета фазовой скорости? Ответ может показаться неожиданным. Фактически решается обратная задача, которую можно сформулировать так: какое должно быть волновое число для оптимального соответствия фазовой скорости, получаемой из линейной теории для первой бароклинной моды, и оценок фазовой скорости по альтиметрии? Этот подход также является новым, получившим развитие в последние годы. Для лучшего знакомства с этим вопросом мы рекомендуем работы [50–54].

Отметим самый важный недостаток изложенной в них теории. Во всех аналитических результатах делается предположение не только о стационарности, но самое главное, о плоско-параллельности течений, в то время как в реальном океане течения — это гораздо более сложные структуры, имеющие как зональную, так и меридиональную компоненты скорости, являющиеся независимыми функциями глубины. Как правило, поверхностные течения ослабевают уже на глубине порядка километра. В этом плане теория «мелкой воды» с редуцированной гравитацией кажется выходом из положения. Однако, множество последних исследований по динамике мезомасштабных вихрей показывает, что в действительности динамический сигнал вихрей прослеживается на гораздо больших глубинах, что не соответствует идее двухслойной модели с бесконечно глубоким тяжелым нижним слоем.

6. Заключение

Основная причина галилеевской неинвариантности дисперсионного соотношения волн Россби хорошо видна в двухслойной модели, где имеется наклон пикноклина из-за вертикального сдвига скорости между верхним и нижним слоями против градиента планетарной завихренности, который часто называется псевдо-β-эффектом [25, 26]. Однако, мы обращаем внимание на тот факт, что строгого дисперсионного соотношения для галилеево-неинвариантного дисперсионного соотношения нет. Всегда добавляются некие не совсем строгие предположения и допущения, такие как формальное существование вертикальных границ или зависимость баротропного радиуса от переменной поперечной координаты. Другие выводы дисперсионного соотношения с недоплеровским сдвигом содержат также некие асимптотические разложения, сопровождаемые анализом теории размерностей.

Если переписать галилеево-неинвариантное дисперсионное соотношение (33) в следующей форме:

$$\omega = -\frac{(\beta + FU)k}{k^2 + l^2 + F} + kU, \tag{68}$$

то может возникнуть желание получить этот результат простым способом через эффективное топографическое β^*, см. формулу (27). Далее, следуя работам Незлина [55] и Хелда [23], предположим, что течение является чисто топографическим и выполняется следующее соотношение:

$$g\frac{\partial H}{\partial y} = -fU. \tag{69}$$

Подставляя (69) в (68) и, следуя Незлину [55], прибавляя доплеровскую добавку, получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\sigma = -\frac{\left(\beta + \dfrac{f^2}{gH}U\right)k}{k^2 + l^2 + \dfrac{f^2}{gH}} + kU. \tag{70}$$

В таком случае, возникает следующий вопрос: в соотношении (69) справа стоит константа, а слева — первая производная по меридиональной координате. Значит, топография должна быть линейной функцией от меридиональной координаты $H = H(y)$. А так как это H стоит в знаменателе выражения $F = \frac{f^2}{gH}$, следовательно, дисперсионное соотношение (70) не совсем «законное», так как содержит неявную функциональную зависимость от поперечной координаты. Как же выйти из положения и попробовать исправить ситуацию?

Как правило, здесь говорят о том, что в функции, описывающей топографию, есть некая большая константа и более малая переменная часть $H = H_0 + \varepsilon h(y)$. Далее, переписывая это соотношение как $H = H_0\left(1 + \varepsilon h(y) / H_0\right)$ и разлагая в ряд Тейлора, получаем, что первые слагаемые будут константы. И тогда мы имеем некое оправдание данного дисперсионного соотношения (70). Получается нечто, напоминающее приближение Буссинеска: когда видим плотность (топографию), тогда это константа. А если она дифференцируется, то это переменная. Таким образом, в соотношении (69) $H = H(y)$, а в соотношении (70) $H = \text{const}$. Этот вывод обнажает все неточности и приближенность результата, который прячется за методом масштабов и неких асимптотических разложений.

В заключении приведем следующую цитату из книги Salmon (1998): «Возможно, лучшее, что мы можем сказать о масштабном анализе, это то, что он заставляет нас последовательно навязывать свои предубеждения» [9]. Поэтому читатель должен понимать, что все эти уравнения в некотором смысле основываются *на вере* (фраза из монографии [8]).

Основной момент, который мы еще раз хотим подчеркнуть: известное утверждение, что длинные волны Россби не «чувствуют» течения — это справедливо для модели «мелкой воды» и является следствием галилеевской неинвариантности дисперсионного соотношения. Галилеевская неинвариантность работы [22], по-видимому, была известна еще 50 лет назад и называлась «недоплеровский эффект» [23, 24, 56, 32, 33, 57, 58]. Данные исследования показали, что никакого взаимодействия волн Россби и крупномасштабного течения не происходит, если средний поток имеет форму первой невозмущенной моды (эффект недоплеровского сдвига).

Причина, вызывающая недоплеровский эффект, по-видимому, была первым предложена в работе [24], и она состоит в бароклинности течения — зависимости поля скорости от вертикальной координаты. Это объяснение вполне резонно и хорошо согласуется с другими известными работами ([59, 60], уравнение (3.77)), где найдены явные дисперсионные соотношения волн на сдвиговых по вертикали течениях не обладающие галилеевской инвариантностью. Важно отметить, что данный краткий обзор посвящен эволюции волн Россби на течении. Динамику локализованных вихрей на течении можно найти в замечательном обзоре [61].

ПРИЛОЖЕНИЕ. Граничные условия

П1. *Нелинейные граничные условия в общей постановке*

На верхней границе, в отсутствие экмановских слоев и касательного напряжения ветра, принимается непрерывность давления и смещений. Центральным моментом при постановке верхнего граничного условия в океане является постулирование существования некой *возмущенной* поверхности моря, которая описывается функциональной зависимостью $z = \eta(x, y, t)$ и является достаточно гладкой (т. е. существуют хотя бы первые производные).

Динамическое граничное условие имеет следующий вид

$$p_0 = p_a,\ z = \eta, \tag{A1}$$

где p_a — атмосферное давление, которое считается постоянным, p_0 — давление в океане. Соотношение (A1) можно переписать в следующем виде:

$$p_s + p(x, y, \eta, t) = p_a, \tag{A2}$$

где p_s — гидростатическое давление, $p(x, y, \eta, t)$ — возмущение давления.

Кинематическое условие имеет следующий вид:

$$\frac{D}{Dt}\left(z - \eta\right) = 0, \quad z = \eta. \tag{A3}$$

Отметим, что условие непрерывности смещений (A3) является нелинейным. Далее, принимая во внимание что $\frac{Dz}{Dt} = w$ (кинематическое соотношение), где w — вертикальная компонента скорости, перепишем (A3) в развернутом виде:

$$w\left(x, y, \eta, t\right) = \eta_t + u\eta_x + v\eta_y. \tag{A4}$$

Нижнее граничное условие имеет вид

$$w = uh_x + vh_y, \quad z = -H + h(x, y), \tag{A5}$$

где H — средняя глубина океана, $h(x, y)$ — донная топография, неровности дна. Фактически (А5) — это то же самое соотношение (А4) при условии неподвижности нижней границы

$$h_t = 0.$$

Для динамического условия на верхней границе океана используется приближение гидростатики: поля плотности ρ и давления p записываются в следующем виде:

$$\rho = \rho_s + \rho', \quad p = p_a + \int_{-H}^{0} g\rho_s(z)dz + \rho', \quad \rho' / \rho_s << 1, \tag{A6}$$

где ρ_s — равновесная гидростатическое поле плотности, ρ' — возмущение поля плотности. В дальнейшем верхние штрихи у возмущений плотности и давления опускаем.

Уравнение для непрерывности плотности (которое, вообще говоря, не является граничным условием, но необходимо для замыкания граничных условий в стратифицированной жидкости) имеет вид:

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y - \frac{\rho_s}{g}N^2 w = 0, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_s}\frac{d\rho_s}{dz}, \tag{A7}$$

где N — частота Вяйсяля-Брента в приближении несжимаемости, которая считается в данной работе постоянной, g — ускорение свободного падения.

Отметим, уравнение (А7) является приближенным, так как в нем, в силу малости по сравнению с другими слагаемыми, отсутствует слагаемое с вертикальной скоростью $w(\partial\rho/\partial z)$.

Принципиально важно, что уравнение для плотности (А7), играющее ключевую роль при постановке граничных условий для стратифицированной жидкости, полностью утрачивает свою роль в задаче с постоянной плотностью. При этом никаких предельных переходов не имеется в принципе. Задача для нестратифицированной жидкости решается принципиально другим способом. Казалось бы, так как возмущения плотности для океана невелики, примерно две сотых процента, можно взять предельный переход и получить решение для однородной жидкости. Однако это не так. В этом и есть одна из специфических особенностей физики океана.

П2. ***Линейные граничные условия***

Линеаризация граничных условий происходит при классическом предположении малости фазовой скорости по отношению к скорости частиц. На этом основании отбрасываются нелинейные слагаемые в уравнениях. Однако также делается и дополнительное предположение о малости отклонений свободной поверхности от общей глубины океана. Оно служит основанием для сноса граничных условий на горизонтальную поверхность: вместо $z = \eta$ берется $z = 0$. При этом вместо переменной η появляется новая переменная ξ — малое отклонение от горизонтальной равновесной поверхности.

В отсутствии фонового течения линеаризованное динамическое уравнение с учетом гидростатики имеет вид:

$$p = \rho_s g\xi. \tag{A8}$$

Кинематическое линеаризованное граничное условие:

$$w = \xi t. \tag{A9}$$

Линеаризованное уравнение для плотности:

$$w = -\frac{p_{zt}}{\rho_s N^2}. \tag{A10}$$

Из уравнений (А8), (А9) и (А10) получаем линейные граничные условия для возмущения давления в отсутствии фонового течения и топографии для стратифицированной жидкости:

– для свободной поверхности:

$$\begin{aligned} &p_z + \frac{N^2}{g}p = 0, \quad z = 0, \\ &p_z = 0, \quad z = -H; \end{aligned} \tag{A11}$$

– в приближении «твердой крышки»:

$$\begin{aligned} p_z &= 0, \quad z = 0, \\ p_z &= 0, \quad z = -H. \end{aligned} \tag{A12}$$

Для «твердой крышки» уравнения (A8), (A9) не нужны, и работает только уравнение для плотности (A10) и гидростатика. При наличии фонового течения линеаризация уравнения (A7) приводит к следующему соотношению:

$$w = -\left(\partial_t + U\partial_x\right)\frac{p_z}{\rho_s N^2}, \tag{A13}$$

где U — зональное фоновое течение. И мы снова получаем условие (A12). Таким образом, уравнение «твердой крышки» не изменяется при добавлении стационарного фонового потока для стратифицированной жидкости.

Финансирование

Работа выполнена по теме государственного задания 0128-2021-0003, а также при финансовой поддержке гранта СПбГУ № 94033410 и гранта РНФ 22-27-00004.

Funding

The publication was made with the financial support of State assignment theme No. 0128-2021-0003, the St Petersburg State University Grant No. 94033410, and RSF Grant No. 22-27-00004.

Литература

1. *Margules M.* Luftbewegungen in einer rotierenden Splї aroidschale // Sitzungsberichte der Kaiserliche Akad. Wiss. Wien, IIA. 1893. Vol. 102. P. 11–56.
2. *Hough S.S.* On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. Part 11. On the general integration of Laplace's dynamical equations // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1898. Vol. 191. P. 139–185.
3. *Lamb H.* Hydrodynamics, 2nd edition. Cambridge, University Press. Dynamics of rotating fluids: a survey // Journal of Fluid Mechanics. 1895. Vol. 26. P. 411–431.
4. *Platzman G.W.* Waves of Rossby // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1968. Vol. 94. No. 401. doi:10.1002/qj.49709440102
5. *Rossby C.G.,* et al. Relation between variations in the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action // Journal of Marine Research. 1939. Vol. 2. P. 38–55.
6. *Haurwitz B.* The motion of atmospheric disturbances // Journal of Marine Research. 1940. Vol. 3. P. 35–50.
7. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане, в 2-х частях / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 846 с.
8. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. В 2-х томах. М.: Мир, 1984. Том 1–398 с., Том 2–416 с.
9. *Salmon R.* Lectures on Geophysical Fluid Dynamics. NY, Oxford: Oxford University Press, 1998, 400 p.
10. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. В 2-х томах / Пер. с англ. В.Э. Рябинина, А.Н. Филатова / Под ред. Г.П. Курбаткина. Москва: Мир, 1986. Том 1–396 с., Том 2–415 с.
11. *Гринспен Х.П.* Теория вращающихся жидкостей. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.
12. Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана / Ред. Каменкович В.М., Монин А.С. М.: Наука, 1978. 435 с.
13. *Должанский Ф.В.* Лекции по геофизической гидродинамике. Москва: Изд-во ИВМ РАН, 2006, 378 с.
14. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973, 343 с.
15. *Бреховских Л.М.*, *Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 337 с.
16. *Булатов В.В.* Новые задачи математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред. М.: Издательство «ОнтоПринт», 2021. 277 с.
17. *Гневышев В.Г.*, *Белоненко Т.В.* Аналитическое решение лучевых уравнений Гамильтона для волн Россби на стационарных сдвиговых потоках // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2022. Т. 15, № 2. С. 8–18. doi:10.59887/fpg/4eh4-83zr-r1fm
18. *Gnevyshev V.G.*, *Badulin S.I.*, *Belonenko T.V.* Rossby waves on non-zonal currents: structural stability of critical layer effects // Pure and Applied Geophysics. 2020. Vol. 177. No. 11, 5585–5598. doi:10.1007/s00024-020-02567-0
19. *Gnevyshev V.G.*, *Badulin S.I.*, *Koldunov A.V.*, *Belonenko T.V.* Rossby waves on non-zonal flows: vertical focusing and effect of the current stratification // Pure and Applied Geophysics. 2020. Vol. 178, No. 8. P. 3247–3261. doi:10.1007/s00024-021-02799-8

20. *Yamagata T.* On the propagation of Rossby waves in a weak shear flow // Journal of the Meteorological Society of Japan. 1976. Vol. 54, No. 2. P. 126–127. doi:10.2151/jmsj1965.54.2_126
21. *Yamagata T.* On trajectories of Rossby wave-packets released in a lateral shear flow // Journal of the Oceanographic. Society of Japan. 1976. Vol. 32. P. 162–168. doi:10.1007/BF02107270
22. *Kravtsov S.*, *Reznik G.* Monopoles in a uniform zonal flow on a quasi-geostrophic -plane: effects of the Galilean non-invariance of the rotating shallow-water equations // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 909, A23. doi:10.1017/jfm.2020.906
23. *Held I.M.* Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: Theory. // Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, B.J. Hoskins, and R.P. Pearce, Eds. Academic Press, 1983. P. 127–168.
24. *Killworth P.D.*, *Chelton D.B.*, *Szoeke R.A.* The speed of observed and theoretical long extra-tropical planetary waves // Journal of Physical Oceanography. 1997. Vol. 27. P. 1946–1966. doi:10.1175/1520-0485(1997)027<1946: TSOOAT>2.0.CO;2
25. *Morel Y.G.* The influence of an upper thermocline current on intrathermocline eddies // Journal of Physical Oceanography. 1995. Vol. 25. P. 3247–3252. doi:10.1175/1520-0485(1995)025<3247: TIOAUT>2.0.CO;2
26. *Morel Y.G.*, *J. McWilliams.* Evolution of isolated interior vortices in the ocean // Journal of Physical Oceanography. 1997. Vol. 27. P. 727–748. doi:10.1175/1520-0485(1997)027<0727: EOIIVI>2.0.CO;2
27. *Charney J.G.* On the scale of atmospheric motion // Geofysiske publikasjoner. 1948. Vol. 17, No. 2.
28. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 414 с.
29. *Longuet-Higgins M.S.* Planetary Waves on a Rotating Sphere // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1964. Vol. 279, No. 1379. P. 446–473. doi:10.1098/rspa.1964.0116
30. *Гневышев В.Г.*, *Белоненко Т.В.* Вихревой слой на β-плоскости в формулировке Майлса–Рибнера. Полюс на действительной оси // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 5. Р. 525–537. doi:10.22449/0233-7584-2021-5-525-537
31. *Гневышев В.Г.*, *Белоненко Т.В.* Аномальное поведение вертикальной структуры волн Россби на незональных сдвиговых течениях в окрестности фокуса // Морской гидрофизический журнал. 2022. Т. 38, № 6. С. 585–604. EDN FTWOAV. doi:10.22449/0233-7584-2022-6-585-604
32. *Killworth P.D.*, *Blundell J.R.* Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. Part I: The local problem // Journal of Physical Oceanography. 2003. Vol. 33, No. 4. P. 784–801. doi:10.1175/1520-0485(2003)33<784: LEPWPI>2.0.CO;2
33. *Killworth P.D.*, *Blundell J.R.* The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. Part II: Two-dimensional examples and global results // Journal of Physical Oceanography. 2005. Vol. 35. P. 2110–2133. doi:10.1175/JPO2817.1
34. *McWilliams J.C.*, *Flierl G.R.* On evolution of isolated non-linear vortices // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1979. Vol. 5. P. 43–66.
35. *Гневышев В.Г.*, *Фролова А.В.*, *Колдунов А.В.*, *Белоненко Т.В.* Топографический эффект для волн Россби на зональном сдвиговом потоке // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14, № 1. С. 4–14. doi:10.7868/S2073667321010019
36. *Гневышев В.Г.*, *Фролова А.В.*, *Кубряков А.А.*, *Собко Ю.В.*, *Белоненко Т.В.* Взаимодействие волн Россби со струйным потоком: основные уравнения и их верификация для Антарктического циркумполярного течения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55, № 5. С. 39–50. doi:10.31857/S0002-351555539-50
37. *Травкин В.С.*, *Белоненко Т.В.*, *Кочнев А.В.* Топографические волны в Курильском районе // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2022. Т. 19, № 5. С. 222–234. doi:10.21046/2070-7401-2022-19-5-222-234
38. *Гневышев В.Г.*, *Травкин В.С.*, *Белоненко Т.В.* Топографический фактор и предельные переходы в уравнениях для субинерционных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 1. С. 8–23. doi:10.48612/fpg/92rg-6t7h-m4a2
39. *Гневышев В.Г.*, *Травкин В.С.*, *Белоненко Т.В.* Групповая скорость и дисперсия шельфовых волн Бухвальда и Адамса. Новый аналитический подход // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 2. С. 8–20. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-1
40. *Drivdal M.*, *Weber J.E.H.*, *Debernard J.B.* Dispersion Relation for Continental Shelf Waves When the Shallow Shelf Part Has an Arbitrary Width: Application to the Shelf West of Norway // Journal of Physical Oceanography. 2016. Vol. 46, No. 2. P. 537–549. doi:10.1175/jpo-d-15-0023.1
41. *Chen C.*, *Kamenkovich I.* Effects of Topography on Baroclinic Instability // Journal of Physical Oceanography. 2013. Vol. 43, No. 4. P. 790–804. doi:10.1175/jpo-d-12-0145.1
42. *Benilov E.S.* Baroclinic instability of two-layer flows over one-dimensional bottom topography // Journal of Physical Oceanography. 2001. Vol. 31. P. 2019–2025. doi:10.1175/1520-0485(2001)031<2019: BIOTLF>2.0.CO;2
43. *Leng H.*, *Bai X.* Baroclinic Instability of Nonzonal Flows and Bottom Slope Effects on Propagation of the Most Unstable Wave // Journal of Physical Oceanography. 2018. Vol. 48. P. 2923–2936. doi:10.1175/JPO-D-18-0087.1
44. *Sutyrin G.G.*, *Radko T.*, *McWilliams J.C.* Contrasting eddy-driven transport in baroclinically unstable eastward currents and subtropical return flows // Physics of Fluids. 2022. Vol. 34. 126605. doi:10.1063/5.0130044

45. *Анненков С.Ю., Шрира В.И.* О зональных волноводах для волн Россби в Мировом океане // Океанология. 1992. Т. 32, № 1. С. 5–12.
46. *Rossby C.G.* On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. II // Journal of Marine Research. 1938. Vol. 2. P. 239–263.
47. *Yasuda I., Ito S.-I., Shimizu Y.*, et al. Cold-core anticyclonic eddies south of the Bussol' Strait in the northwestern subarctic Pacific // Journal of Physical Oceanography. 2000. Vol. 30. P. 1137–1157. doi:10.1175/1520-0485(2000)030<1137: CCAESO>2.0.CO;2
48. *Altimetry for the future: Building on 25 years of progress*. International Altimetry Team // Advances in Space Research. 2021. Vol. 68. P. 319–363. doi:10.1016/j.asr.2021.01.022
49. *Белоненко Т.В., Кубряков А.А., Станичный С.В.* Спектральные характеристики волн Россби Северо-западной части Тихого океана // Исследование Земли из космоса. 2016. № 1–2. С. 43–52. doi:10.7868/S0205961416010036
50. *LaCasce J.H.* The prevalence of oceanic surface modes // Geophysical Research Letters. 2017. Vol. 44. P. 11,097–11,105. doi:10.1002/2017GL075430
51. *Tulloch R., Marshall J., Smith K.S.* Interpretation of the propagation of surface altimetric observations in terms of planetary waves and geostrophic turbulence // Journal of Geophysical Research. 2009. Vol. 114. C02005. doi:10.1029/2008JC005055
52. *Wunsch C.* Modern observational physical oceanography: Understanding the global ocean Princeton, NJ: Princeton University Press. 2015, 493 pp.
53. *Tailleux R., McWilliams J.C.* The effect of bottom pressure decoupling on the speed of extratropical, baroclinic Rossby waves // Journal of Physical Oceanography. 2001. Vol. 31. P. 1461–1476. doi:10.1175/1520–0485(2001)031<1461: TEOBPD>2.0.CO;2
54. *Schlax M.G., Chelton D.B.* The influence of mesoscale eddies on the detection of quasi-zonal jets in the ocean // Geophysical Research Letters. 2008. Vol. 35. L24602. doi:10.1029/2008GL035998
55. *Незлин М.В.* Солитоны Россби // УФН. 1986. Т. 150, № 1. С. 3–60.
56. *Colin de Verdière A., Tailleux R.* The interaction of a baroclinic mean flow with long Rossby waves // Journal of Physical Oceanography. 2005. Vol. 35. P. 865–879. doi:10.1175/JPO2712.1
57. *Killworth P.D., Blundell J.R.* Planetary wave response to surface forcing and instability in the presence of mean flow and topography // Journal of Physical Oceanography. 2007. Vol. 35. P. 1297–1320. doi:10.1175/JPO3055.1
58. *Samelson R.M.* An effective-b vector for linear planetary waves on a weak mean flow // Ocean Modelling. 2010. Vol. 32. P. 170–174. doi:10.1016/j.ocemod.2010.01.006
59. *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л.* Распространение волн в сдвиговых потоках. Москва: Наука, Изд. фирма «Физ.-мат. лит.», 1996. 240 с.
60. *Gnevyshev V.V., Frolova A.V., Belonenko T.V.* Topographic effect for Rossby waves on non-zonal shear flow // Water Resources. 2022. Vol. 49, No. 2. P. 240–248. doi:10.1134/S0097807822020063
61. *Резник Г.М.* Динамика локализованных вихрей на бета-плоскости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 6. С. 846–860.

References

1. *Margules M.* Luftbewegungen in einer rotierenden Sph¨aroidschale. *Sitzungsberichte der Kaiserliche Akad. Wiss. Wien*, IIA, 1893,102, 11–56.
2. *Hough S.S.* On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. Part 11. On the general integration of Laplace's dynamical equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 1898, 191, 139–185.
3. *Lamb H.* Hydrodynamics, 2nd edition. Cambridge, University Press. Dynamics of rotating fluids: a survey. *Journal of Fluid Mechanics*. 1895, 26, 411–431.
4. *Platzman G.W.* Waves of Rossby. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 1968, 94, N 401. doi:10.1002/qj.49709440102
5. *Rossby C.G.,* et al. Relation between variations in the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *Journal of Marine Research*. 1939, 2, 38–55.
6. *Haurwitz B.* The motion of atmospheric disturbances. *Journal of Marine Research*. 1940, 3, 35–50.
7. *LeBlond P.H., Mysak L.A.* Waves in the Ocean. *Elsevier Oceanography Series*, Vol. 20. 1981, 602 p.
8. *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. *Berlin*, *Springer*, 1979. 624 p.
9. *Salmon R.* Lectures on Geophysical Fluid Dynamics, *NY*, *Oxford*, *Oxford University Press,* 1998, 400 p.
10. *Gill A.* Atmosphere-Ocean Dynamics. *Academic Press*, 1st edition. 1982, 680 pp.
11. *Greenspan H.P.* The Theory of Rotating Fluids. *Cambridge University Press*. 1968, 327 p.
12. *Physics of the ocean*. Vol. 2. Ocean hydrodynamics. Ed. Kamenkovich V.M., Monin A.S. *M.*, *Nauka*, 1978, 455 p.
13. *Dolzhansky F.V.* Lectures on geophysical hydrodynamics. *Moscow*, *Publishing House of the IVM RAS*, 2006, 378 p. (in Russian).

14. *Brekhovskikh L.* Waves in Layered Media. 2^{nd} Edition — May 28. 1976, 520 p.
15. *Brekhovskikh L.*, *Goncharov V.* Mechanics of continued and wave dynamics. *Springer-Verlag*, 1994, 342 p.
16. *Bulatov V.V.* New problems of mathematical modeling of wave dynamics of stratified media. *Moscow*, *Publishing house "OntoPrint"*. 2021, 277 p. (in Russian).
17. *Gnevyshev V.G.*, *Belonenko T.V.* Analytical Solution of the Ray Equations of Hamilton for Rossby Waves on Stationary Shear Flows. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2022, 15, 2, 8–18. doi:10.48612/fpg/4eh4-83zr-r1fm
18. *Gnevyshev V.G.*, *Badulin S.I.*, *Belonenko T.V.* Rossby waves on non-zonal currents: structural stability of critical layer effects. *Pure and Applied Geophysics*. 2020, 177(11), 5585–5598. doi:10.1007/s00024-020-02567-0
19. *Gnevyshev V.G.*, *Badulin S.I.*, *Koldunov A.V.*, *Belonenko T.V.* Rossby waves on non-zonal flows: vertical focusing and effect of the current stratification. *Pure and Applied Geophysics*. 2020, 178(8), 3247–3261. doi:10.1007/s00024-021-02799-8
20. *Yamagata T.* On the propagation of Rossby waves in a weak shear flow. *Journal of the Meteorological Society of Japan*. 1976, 54, 2, 126–127. doi:10.2151/jmsj1965.54.2_126
21. *Yamagata T.* On trajectories of Rossby wave-packets released in a lateral shear flow. *Journal of the Oceanographic*. *Society of Japan*. 1976, 32, 162–168. doi:10.1007/BF02107270
22. *Kravtsov S., Reznik G.* Monopoles in a uniform zonal flow on a quasi-geostrophic -plane: effects of the Galilean non-invariance of the rotating shallow-water equations. *Journal of Fluid Mechanics*. 2020, 909. A23. doi:10.1017/jfm.2020.906
23. *Held I.M.* Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: Theory. *Large-scale Dynamical Processes in the Atmosphere*. Edited by Brian Hoskins and Robert Pearce. *Academic Press*, *New York*, 1983, 127 p.
24. *Killworth P.D.*, *Chelton D.B.*, *de Szoeke R.A.* The speed of observed and theoretical long extra-tropical planetary waves. *Journal of Physical Oceanography*. 1997, 27, 1946–1966. doi:10.1175/1520-0485(1997)027<1946: TSOOAT>2.0.CO;2
25. *Morel Y.G. T*he influence of an upper thermocline current on intrathermocline eddies. *Journal of Physical Oceanography*. 1995, 25, 3247–3252. doi:10.1175/1520-0485(1995)025<3247: TIOAUT>2.0.CO;2
26. *Morel Y.G.*, *J. McWilliams.* Evolution of isolated interior vortices in the ocean. *Journal of Physical Oceanography*. 1997, 27, 727–748. doi:10.1175/1520-0485(1997)027<0727: EOIIVI>2.0.CO;2
27. *Charney J.G.* On the scale of atmospheric motion. *Geofysiske publikasjoner*. 1948, 17, 2.
28. *Obukhov A.M.* Turbulence and dynamics of the atmosphere. *Leningrad*, *Hydrometeoizdat*, 1988, 414 p. (in Russian).
29. *Longuet-Higgins M.S.* Planetary Waves on a Rotating Sphere. *Proceedings of the Royal Society A*: *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1964, 279(1379), 446–473. doi:10.1098/rspa.1964.0116
30. *Gnevyshev V.G.*, *Belonenko T.V.* Vortex Layer on the β-Plane in the Miles–Ribner Formulation. Pole on the Real Axis. *Physical Oceanography*. 2021, 28(5), 486–498. doi:10.22449/1573-160X-2021-5-486-498
31. *Gnevyshev V.G.*, *Belonenko T.V.* Anomalous Behavior of the Vertical Structure Rossby Waves on Non-Zonal Shear Flow in the Vicinity of the Focus. *Physical Oceanography*. 2022, 29(6), 567–586. doi:10.22449/1573-160X-2022-6-567-586
32. *Killworth P.D., Blundell J.R.* Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. Part I: The local problem. *Journal of Physical Oceanography*. 2003, 33(4), 784–801. doi:10.1175/1520-0485(2003)33<784: LEPWPI>2.0.CO;2
33. *Killworth P.D.*, *Blundell J.R.* The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. Part II: Two-dimensional examples and global results. *Journal of Physical Oceanography*. 2005, 35, 2110–2133. doi:10.1175/JPO2817.1
34. *McWilliams J.C.*, *Flierl G.R.* On evolution of isolated non-linear vortices. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1979, 5, 43–66.
35. *Gnevyshev V.G.*, *Frolova A.V.*, *Koldunov A.V.*, *Belonenko T.V.* Topographic effect for Rossby waves on a zonal shear flow. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2021, 14, 1, 4–14. doi:10.7868/S2073667321010019
36. *Gnevyshev V.G.*, *Frolova A.V.*, *Kubryakov A.A.*, *Sobko Yu.V.*, *Belonenko T.V.* Interaction between Rossby waves and a jet flow: Basic equations and verification for the Antarctic Circumpolar Current. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019, 55(5), 412–422. doi:10.1134/S0001433819050074
37. *Travkin V.S.*, *Belonenko T.V.*, *Kochnev A.V.* Topographic waves in the Kuril region. *Modern Problems of Remote Sensing of the Earth from Space*. 2022, 19(5), 222–234. doi:10.21046/2070-7401-2022-19-5-222-234 (in Russian).
38. *Gnevyshev V.G.*, *Travkin V.S.*, *Belonenko T.V.* Topographic factor and limit transitions in the equations for subinertial waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 1, 8–23. doi:10.48612/fpg/92rg-6t7h-m4a2
39. *Gnevyshev V.G.*, *Travkin V.S.*, *Belonenko T.V.* Group velocity and dispertion of Buchwald and Adams shelf waves. A new analytical approach. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 2, 8–20. doi:10.59887/2073–6673.2023.16(2)-1 (in Russian)
40. *Drivdal M.*, *Weber J.E.H.*, *Debernard J.B.* Dispersion relation for continental shelf waves when the shallow shelf part has an arbitrary width: Application to the shelf west of Norway. *Journal of Physical Oceanography*. 2016, 46(2), 537–549. doi:10.1175/jpo-d-15-0023.1

41. *Chen C.*, *Kamenkovich I.* Effects of Topography on Baroclinic Instability. *Journal of Physical Oceanography*. 2013, 43(4), 790–804. doi:10.1175/jpo-d-12–0145.1
42. *Benilov E.S.* Baroclinic instability of two-layer flows over one-dimensional bottom topography. *Journal of Physical Oceanography*. 2001, 31, 2019–2025. doi:10.1175/1520-0485(2001)031<2019: BIOTLF>2.0.CO;2
43. *Leng H., Bai X.* Baroclinic Instability of Nonzonal Flows and Bottom Slope Effects on Propagation of the Most Unstable Wave. *Journal of Physical Oceanography*. 2018, 48, 2923–2936. doi:10.1175/JPO-D-18-0087.1
44. *Sutyrin G.G.*, *Radko T.*, *McWilliams J.C.* Contrasting eddy-driven transport in baroclinically unstable eastward currents and subtropical return flows. *Physics of Fluids*. 2022, 34, 126605. doi:10.1063/5.0130044
45. *Annenkov S.Y., Shrira V.I.* On zonal waveguides for Rossby waves in the World Ocean. *Okeanologiya*. 1992, 32(1), 5–12. (in Russian).
46. *Rossby C.G.* On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. II. *Journal of Marine Research*. 1938, 2, 239–263.
47. *Yasuda I., Ito S.-I., Shimizu Y., Ichikawa K.* et al. Cold-core anticyclonic eddies south of the Bussol' Strait in the northwestern subarctic Pacific. *Journal of Physical Oceanography*. 2000, 30, 1137–1157. doi:10.1175/1520-0485(2000)030<1137: CCAESO>2.0.CO;2
48. *Altimetry for the future: Building on 25 years of progress*. International Altimetry Team. *Advances in Space Research*. 2021, 68, 319–363. doi:10.1016/j.asr.2021.01.022
49. *Belonenko T.V.*, *Kubrjakov A.A.*, *Stanichny S.V.* Spectral characteristics of Rossby waves in the Northwestern Pacific based on satellite altimetry. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2016, 52(9), 920–928. doi:10.1134/S0001433816090073
50. *LaCasce J.H.* The prevalence of oceanic surface modes. *Geophysical Research Letters*. 2017, 44, 11,097–11,105. doi:10.1002/2017GL075430
51. *Tulloch R.*, *Marshall J.*, *Smith K.S.* Interpretation of the propagation of surface altimetric observations in terms of planetary waves and geostrophic turbulence. *Journal of Geophysical Research*. 2009, 114, C02005. doi:10.1029/2008JC005055
52. *Wunsch C.* Modern observational physical oceanography: Understanding the global ocean. *Princeton*, *NJ.*, *Princeton University Press*, 2015, 493 p.
53. *Tailleux R.*, *McWilliams J.C.* The effect of bottom pressure decoupling on the speed of extratropical, baroclinic Rossby waves. *Journal of Physical Oceanography*. 2001, 31, 1461–1476. doi:10.1175/1520–0485(2001)031<1461: TEOBPD>2.0.CO;2
54. *Schlax M.G.*, *Chelton D.B.* The influence of mesoscale eddies on the detection of quasi-zonal jets in the ocean. *Geophysical Research Letters*. 2008, 35, L24602. doi:10.1029/2008GL035998
55. *Nezlin M.V.* Rossby solitons (Experimental investigations and laboratory model of natural vortices of the Jovian Great Red Spot type). *Soviet Physics Uspekhi*. 1986, 29807–842.
56. *Colin de Verdière A.*, *Tailleux R.* The interaction of a baroclinic mean flow with long Rossby waves. *Journal of Physical Oceanography*. 2005, 35, 865–879. doi:10.1175/JPO2712.1
57. *Killworth P.D.*, *Blundell J.R.* Planetary wave response to surface forcing and instability in the presence of mean flow and topography. *Journal of Physical Oceanography*. 2007, 35, 1297–1320. doi:10.1175/JPO3055.1
58. *Samelson R.M.* An effective-b vector for linear planetary waves on a weak mean flow. *Ocean Modelling*. 2010, 32, 170–174. doi:10.1016/j.ocemod.2010.01.006
59. *Stepanyants Yu.A.*, *Fabricant A.L.* Propagation of waves in shear flows. *Moscow*, *Nauka*, *Phys. & Math. Literature Publ. Company*, 1996, 240 p.
60. *Gnevyshev V.V., Frolova A.V., Belonenko T.V.* Topographic effect for Rossby waves on non-zonal shear flow. *Water Resources*. 2022, 49, 2, 240–248. doi:10.1134/S0097807822020063
61. *Reznik G.M.* Dynamics of localized vortices on the beta plane. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2010, 46, 6, 784–797.

Об авторах

ГНЕВЫШЕВ Владимир Григорьевич, РИНЦ Author ID: 298530, ORCID ID: 0000-0001-6654-5570, Scopus Author ID: AAZ-6352–2021, WoS ResearcherID: 6507346231, avi9783608@gmail.com

БЕЛОНЕНКО Татьяна Васильевна, РИНЦ Author ID: 66026, ORCID ID: 0000-0003-4608-7781, Scopus Author ID: 6507005889, WoS ResearcherID: K-2162–2013, btvlisab@yandex.ru