Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2
УДК 512.64:519.61
MSC 15A80, 15A06, 15A03, 65F10, 65H10

О решении двустороннего векторного уравнения в тропической алгебре

Н. К. Кривулин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривулин Н. К.* О решении двустороннего векторного уравнения в тропической алгебре // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 236–248.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.205

Рассматривается задача решения в контексте тропической математики векторного уравнения с двумя заданными матрицами и неизвестными векторами, каждая часть которого имеет вид произведения одной из матриц на неизвестный вектор. Такое уравнение, которое имеет неизвестные векторы по обе стороны от знака равенства, часто называют двусторонним. Предлагается новая процедура решения двустороннего уравнения на основе минимизации некоторой функции расстояния между векторами тропических векторных пространств, которые генерируются столбцами каждой из матриц. В результате получают пару векторов, которые обеспечивают минимум расстояния между пространствами и значение самого расстояния. Если уравнение имеет решения, то полученные векторы являются решением уравнения. В противном случае эти векторы определяют псевдорешение, которое минимизирует уклонение одной части уравнения от другой. Выполнение процедуры состоит в построении последовательности векторов, являющихся псевдорешениями двустороннего уравнения, в котором поочередно левая и правая части заменяются постоянными векторами. В отличие от известного алгоритма чередования (альтернирования), в котором вместо уравнений поочередно решаются соответствующие неравенства, предложенная процедура использует иное обоснование, представляется более простой и позволяет установить естественные критерии завершения расчетов. При отсутствии решений процедура также находит псевдорешение и определяет величину связанной с ним погрешности, что может оказаться полезным при решении задач аппроксимации.

Ключевые слова: идемпотентное полуполе, тропическое векторное пространство, обобщенная метрика, двустороннее векторное уравнение, итеративная вычислительная процедура, псевдорешение.

1. Введение. В работе рассматривается задача решения в контексте тропической математики векторного уравнения, которое имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ обозначают заданные матрицы, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — неизвестные векторы, а произведение матрицы на вектор определено в терминах операций некоторой тропической алгебры. Это уравнение имеет неизвестные векторы по обе стороны от знака равенства, а потому в литературе его часто называют двусторонним уравнением.

В тропической (идемпотентной) алгебре, которая изучает теорию и приложения полуколец и полуполей с идемпотентным сложением [1–6], задача решения двустороннего уравнения представляет значительный интерес. Это связано, в частности, с тем, что к такой задаче сводится решение многих других векторных уравнений, например решение уравнения вида $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ с одним неизвестным вектором $\boldsymbol{x}$.

Вопросы изучения и решения двусторонних уравнений рассматривались в целом ряде работ, включая первые публикации по этой теме П. Бутковича [7–9], а также более поздние работы [10–13]. В качестве приложений наиболее часто выступают задачи оптимального планирования производственных процессов [9, 11, 13]. Известные в литературе результаты обычно предлагают алгоритмические решения, которые при помощи итеративной вычислительной процедуры позволяют найти одно из решений, если они существуют, или заключить, что решений нет — в противном случае (см., например, обзор методов решения двустороннего уравнения в [5, гл. 7]).

Существующие методы и подходы к решению двустороннего уравнения включают: комбинаторные алгоритмы [8, 14], метод исключения [9], метод верхних ограничений [15], алгоритм на основе свойств отображений с делением на частично-упорядоченных множествах [16], алгоритм чередования (альтернирования) [10], комбинаторный алгоритм для уравнений в поле рациональных чисел [11], метод сведения к системам уравнений и неравенств двух переменных [12] и метод решения уравнений с квадратными матрицами специального типа [13]. Однако на практике указанные решения обычно недостаточно эффективны, например в связи со значительной вычислительной сложностью или дополнительными ограничениями, которые накладываются на условие и решение задачи. Поэтому разработка новых эффективных процедур решения двустороннего уравнения представляется достаточно актуальной проблемой.

В настоящей работе предлагается новая процедура решения двустороннего уравнения на основе минимизации некоторой функции расстояния между векторами тропических векторных пространств, которые генерируются столбцами каждой из матриц уравнения. В результате получают пару векторов, которые обеспечивают минимум расстояния между пространствами и значение самого расстояния. Если уравнение имеет решения, то полученные векторы являются решением уравнения. В противном случае эти векторы определяют псевдорешение, которое минимизирует уклонение одной части уравнения от другой.

Выполнение процедуры состоит в построении последовательности векторов, являющихся псевдорешениями двустороннего уравнения, в котором поочередно левая и правая части заменяются постоянными векторами. В отличие от известного алгоритма чередования (альтернирования) [10], в котором вместо уравнений поочередно решаются соответствующие неравенства, предложенная процедура использует иное обоснование, представляется более простой и позволяет установить естественные критерии завершения расчетов. При отсутствии решений процедура также находит псевдорешение и определяет величину связанной с ним погрешности, что может оказаться полезным при решении задач аппроксимации.

2. Предварительные сведения. В этом разделе приводятся основные определения, используемые обозначения и предварительные результаты тропической алгебры [17], необходимые для последующего анализа и решения двустороннего уравнения. Дальнейшие сведения по теории и приложениям тропической алгебры можно найти в целом ряде работ, опубликованных за последние 25 лет, включая [1–6].

2.1. Идемпотентное полуполе. Рассмотрим множество $\mathbb{X}$, которое замкнуто относительно операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ и содержит их нейтральные элементы — нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Операции заданы так, что $(\mathbb{X}, \oplus, \mathbb{0})$ образует идемпотентную коммутативную полугруппу с нулем, $(\mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}, \otimes, \mathbb{1})$ — коммутативную группу, а умножение дистрибутивно относительно сложения. Алгебраическую систему $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ обычно называют идемпотентным полуполем.

В рассматриваемом полуполе сложение идемпотентно: для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется равенство $x \oplus x = x$, а умножение обратимо: для любого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$. Далее знак операции умножения, как обычно, опускается: подразумевается, что $xy = x \otimes y$.

Обозначение степени с целым показателем понимается в смысле умножения $\otimes$. Дополнительно предполагается, что уравнение $x^p = a$ имеет единственное решение x при любых $a \in \mathbb{X}$ и целых $p > 0$. В этом случае степени с рациональным показателем также определены, а полуполе называют алгебраически полным.

Идемпотентное сложение индуцирует на $\mathbb{X}$ частичный порядок по правилу: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. По отношению к этому порядку сложение имеет экстремальное свойство в виде неравенств $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$, которые справедливы для любых x и y. Неравенство $x \oplus y \leq z$ равносильно системе неравенств $x \leq z$ и $y \leq z$. Операции сложения и умножения являются монотонными: из неравенства $x \leq y$ следуют неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$ при любом z. Оператор обращения является антитонным: из неравенства $x \leq y$ для $x, y \neq \mathbb{0}$ следует неравенство $x^{-1} \geq y^{-1}$. Наконец, предполагается, что указанный частичный порядок дополнен до линейного с тем, чтобы считать полуполе линейно упорядоченным.

Примеры вещественных линейно упорядоченных алгебраически полных идемпотентных полуполей включают:

$$\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +), \qquad \mathbb{R}_{\min,+} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, +\infty, 0, \min, +),$$
$$\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{+} \cup \{0\}, 0, 1, \max, \times), \qquad \mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R}_{+} \cup \{+\infty\}, +\infty, 1, \min, \times),$$

где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел; $\mathbb{R}_{+} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

В идемпотентном полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$, которое обычно называют $(\max, +)$-алгеброй, сложение $\oplus$ определено как операция max, а умножение $\otimes$ — как арифметическое сложение $+$. В роли нуля $\mathbb{0}$ выступает $-\infty$, а единицы $\mathbb{1}$ — число 0. Степень x^y соответствует арифметическому умножению xy и определена для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Обратный элемент x^{-1} для любого $x \neq \mathbb{0}$ совпадает с противоположным числом $-x$ в обычной арифметике. Отношение порядка, которое индуцировано идемпотентным сложением, соответствует естественному линейному порядку на множестве $\mathbb{R}$.

В полуполе $\mathbb{R}_{\min}$ (известном так же, как min-алгебра) заданы операции $\oplus = \min$ и $\otimes = \times$ с нейтральными элементами $\mathbb{0} = +\infty$ и $\mathbb{1} = 1$. Понятия степени и обратного элемента имеют обычный смысл. Порядок, заданный идемпотентным сложением, является противоположным стандартному линейному порядку на $\mathbb{R}$.

Все перечисленные выше идемпотентные полуполя являются изоморфными друг другу. Например, полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ связано с $\mathbb{R}_{\min}$ изоморфизмом $x \mapsto e^{-x}$.

2.2. Алгебра матриц и векторов. Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц, состоящих из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, является нулевой и обозначается $\mathbf{0}$. Матрица, которая не имеет нулевых столбцов (строк), называется регулярной по столбцам (строкам). Матрица без нулевых строк и столбцов называется регулярной. Квадратная матрица с элементами, равными $\mathbb{1}$ на диагонали и $\mathbb{0}$ вне ее, является единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$.

Сложение и умножение двух матриц, а также умножение матрицы на скаляр выполняется по обычным правилам с заменой арифметических сложения и умножения на операции $\oplus$ и $\otimes$. Монотонность и другие свойства скалярных операций $\oplus$ и $\otimes$, связанные с отношением порядка на $\mathbb{X}$, обобщаются на операции над матрицами, для которых неравенства понимаются покомпонентно.

Как обычно, матрица, состоящая из одного столбца (строки), образует вектор-столбец (вектор-строку). Все векторы в дальнейшем считаются векторами-столбцами, если не указано иное. Множество векторов-столбцов из n элементов обозначается через $\mathbb{X}^n$. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, является нулевым и обозначается $\mathbf{0}$. Вектор называется регулярным, если он не имеет нулевых элементов.

Для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Нетрудно проверить, что для регулярного вектора $\boldsymbol{x}$ справедливы соотношения

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1},$$

причем для выполнения последнего равенства достаточно условия $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Для регулярных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из неравенства $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{y}^-$.

Если матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^m$ являются регулярными, то произведения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}^-\boldsymbol{A}$ представляют собой регулярные векторы.

2.3. Векторное пространство. Пусть имеется некоторая система векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{X}^m$. Вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ является линейной комбинацией векторов системы, если выполняется равенство $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$ для некоторых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$. Множество всех линейных комбинаций системы векторов образует их линейную оболочку

$$\mathcal{A} = \{x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n |\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}\}.$$

Нетрудно видеть, что множество векторов $\mathcal{A}$ замкнуто относительно сложения векторов и умножения вектора на скаляр. Множество $\mathcal{A}$ называется тропическим векторным пространством над полуполем $\mathbb{X}$, порожденным системой векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$.

2.4. Метрика. Введем функцию расстояния на множестве векторов $\mathbb{X}^m$. Для всякого вектора $\boldsymbol{a} = (a_i)$ рассмотрим носитель $\operatorname{supp}(\boldsymbol{a}) = \{i |\ a_i \neq \mathbb{0},\ 1 \leq i \leq m\}$ — множество индексов его ненулевых элементов.

Для любых ненулевых векторов $\boldsymbol{a} = (a_i)$ и $\boldsymbol{b} = (b_i)$, для которых выполняется условие $\operatorname{supp}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{supp}(\boldsymbol{b})$, определим расстояние

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \bigoplus_{i \in \operatorname{supp}(\boldsymbol{a})} \left(b_i^{-1}a_i \oplus a_i^{-1}b_i\right) = \boldsymbol{b}^-\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a}^-\boldsymbol{b}.$$

В случае, когда $\operatorname{supp}(\boldsymbol{a}) \neq \operatorname{supp}(\boldsymbol{b})$, будем считать, что значение функции больше любого значения из $\mathbb{X}$, и писать $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \infty$. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, то положим $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$.

В контексте полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, где $\mathbb{1} = 0$, функция d для всех $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ совпадает с обычной метрикой Чебышёва:

$$d_\infty(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \max_{1 \leq i \leq m} \max(a_i - b_i, b_i - a_i) = \max_{1 \leq i \leq m} |b_i - a_i|.$$

Для других полуполей, изоморфных $\mathbb{R}_{\max,+}$, функция расстояния d становится метрикой после применения соответствующего отображения изоморфизма. Например, в случае полуполя $\mathbb{R}_{\min}$ метрикой является функция $d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\ln d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Функцию d, заданную в терминах любого из указанных полуполей, можно рассматривать как обобщенную метрику со значениями на множестве $[\mathbb{1}, \infty)$. Ниже при измерении расстояний будет использоваться обобщенная метрика d.

3. Измерение расстояний и решение уравнений. Рассмотрим расстояние от вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ до множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}^m$, которое определяется следующим образом:

$$d(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \inf_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Пусть $\mathcal{A}$ — тропическое векторное пространство, порожденное системой ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{X}^m$. Любой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ можно представить в форме линейной комбинации $\boldsymbol{a} = x_1 \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$, а также с помощью матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, составленной из векторов системы, взятых в качестве столбцов, и вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ в форме равенства $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Расстояние от вектора $\boldsymbol{b}$ до векторного пространства $\mathcal{A}$ принимает вид

$$d(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n} d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n} (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^- \boldsymbol{b}).$$

Можно показать (см., например, [17, 18]), что для регулярного вектора $\boldsymbol{b}$ достаточно найти минимум справа только по регулярным векторам $\boldsymbol{x}$, т. е. выполняется равенство

$$d(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}} d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}).$$

Ясно, что равенство $d(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$ соответствует выполнению условия $\boldsymbol{b} \in \mathcal{A}$, в то время как неравенство $d(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) \neq \mathbb{1}$ означает, что $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{A}$.

Предположим, что $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ — регулярная матрица, а $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ — регулярный вектор. Определим функцию

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A})^-)^- \boldsymbol{b}.$$

Следующее утверждение было доказано в [19] (см. также [17, 18]).

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная матрица, а $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор. Тогда выполняется равенство*

$$\min_{\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}} d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b})},$$

причем минимум достигается при $\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b})} (\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A})^-$.

Если $\mathcal{A}$ — тропическое векторное пространство, порожденное столбцами матрицы $\boldsymbol{A}$, то расстояние от вектора $\boldsymbol{b}$ до $\mathcal{A}$ определено как $d(\mathcal{A}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b})}$, а ближайший к $\boldsymbol{b}$ вектор пространства $\mathcal{A}$ имеет вид $\boldsymbol{y} = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b})} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A})^-$.

Заметим, что условию $\boldsymbol{b} \in \mathcal{A}$ будет отвечать равенство $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$, а условию $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{A}$ — неравенство $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b}) > \mathbb{1}$.

Результаты анализа расстояний в тропическом векторном пространстве можно применить для решения относительно вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ уравнения в форме

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Это уравнение имеет неизвестный вектор с одной стороны от знака равенства и часто называется односторонним уравнением.

Исследование уравнения проведено в [17–19], где получен такой результат.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная матрица, а $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$, то уравнение (1) *имеет решение, причем вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^-\boldsymbol{A})^-$ является максимальным решением.*

2. Если $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b}) > \mathbb{1}$, то уравнение решений не имеет. Наилучшим приближением к решению в смысле функции расстояния d является вектор $\boldsymbol{x} = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{b}^-\boldsymbol{A})^-$.

Заметим, что величина $\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{b})}$ имеет смысл минимальной достижимой невязки (уклонения, расхождения) между левой и правой частями уравнения (1), измеренной в соответствии со шкалой функции расстояния d.

Предположим, что $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{m\times k}$ — заданные регулярные матрицы, а $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^k$ — неизвестные регулярные векторы. Исследуем следующее двустороннее уравнение, в котором неизвестные векторы появляются в обеих частях:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}. \tag{2}$$

Как и в случае уравнения (1), задачу анализа уравнения (2) можно свести к определению расстояний между тропическими векторными пространствами. Рассмотрим столбцы матриц: $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ и $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$. Обозначим через $\mathcal{A}$ тропическое пространство, порожденное системой векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, а через $\mathcal{B}$ пространство, порожденное $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$. Определим расстояние между пространствами:

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}, \boldsymbol{b}\in\mathcal{B}} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}} \min_{\boldsymbol{y}} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}} \min_{\boldsymbol{x}} d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}>\boldsymbol{0}} d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}).$$

Выполнение условия $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbb{1}$ означает, что пространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют непустое пересечение, а тогда уравнение (2) будет иметь решение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Значение расстояния $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > \mathbb{1}$ соответствует отсутствию общих точек пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (а значит, отсутствию решений уравнения), в то время как его величина показывает минимальное расстояние между векторами этих пространств (минимальную возможную невязку между обеими частями уравнения).

Зафиксируем некоторый регулярный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$. Ему будет соответствовать вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ пространства $\mathcal{A}$. По лемме 1 минимальное расстояние между вектором $\boldsymbol{a}$ и векторами пространства $\mathcal{B}$ равно квадратному корню величины

$$\Delta_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{a}) = \Delta_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{B})^-)^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Ближайший к вектору $\boldsymbol{a}$ вектор пространства $\mathcal{B}$ записывается в виде

$$\boldsymbol{b} = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^-\boldsymbol{B})^-.$$

Аналогично для фиксированного $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^k$ квадрат расстояния от вектора $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ до пространства $\mathcal{A}$ и ближайший к $\boldsymbol{b}$ вектор $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ определяются формулами

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^- \boldsymbol{A})^-)^- \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{a} = \sqrt{\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})}\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^- \boldsymbol{A})^-.$$

Предположим, что для векторов $\boldsymbol{x}_* \in \mathbb{X}^n$ и $\boldsymbol{y}_* \in \mathbb{X}^k$ выполняется равенство

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min_{\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}} d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_*).$$

Ясно, что в этом случае имеют место равенства

$$\Delta_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_*) = d^2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_*) = \Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_*).$$

Введем обозначение $\Delta_* = \Delta_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_*) = \Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_*)$ и заметим, что в соответствии с теоремой 2 равенство $\Delta_* = \mathbb{1}$ означает, что уравнение (2) имеет регулярные решения. Значение Δ_*, которое не равно (больше, чем) $\mathbb{1}$, показывает, что равенство в (2) не выполняется ни при каких регулярных векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а величина этого значения определяет минимально возможное расхождение между обеими частями уравнения, которое достигается при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_*$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_*$.

4. Процедура решения двустороннего уравнения. Проведенный выше анализ двустороннего уравнения (2) создает предпосылки для разработки следующей процедуры решения. Процедура опирается на построение последовательности векторов в пространствах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, которые генерируются столбцами матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Изучаются векторы, взятые попеременно из каждого пространства так, чтобы после выбора очередного вектора из одного пространства на следующем векторе достигался минимум расстояния от другого пространства до предыдущего вектора. В контексте решения уравнения (2) наряду с указанными векторами рассматриваются векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ коэффициентов их разложения по столбцам соответствующих матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Предположим, что выбран произвольный регулярный вектор $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{X}^n$. Этому вектору соответствует вектор $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{A}$. Применяя теорему 2, найдем наименьшее расстояние от вектора $\boldsymbol{a}_0$ до векторов пространства $\mathcal{B}$ по формулам

$$d(\boldsymbol{a}_0, \mathcal{B}) = \sqrt{\Delta_0}, \qquad \Delta_0 = \Delta_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^- \boldsymbol{B})^-)^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0.$$

Это значение достигается на векторе $\boldsymbol{b}_1 \in \mathcal{B}$, который имеет вид

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1, \qquad \boldsymbol{y}_1 = \sqrt{\Delta_0}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^- \boldsymbol{B})^-.$$

Наименьшее расстояние от вектора $\boldsymbol{b}_1$ до векторов пространства $\mathcal{A}$ равно

$$d(\boldsymbol{b}_1, \mathcal{A}) = \sqrt{\Delta_1}, \qquad \Delta_1 = \Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1) = (\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^- \boldsymbol{A})^-)^- \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1,$$

и достигается на векторе $\boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{A}$ таком, что

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\Delta_1}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^- \boldsymbol{A})^-.$$

Аналогично определяется расстояние $d(\boldsymbol{a}_2, \mathcal{B})$ на основе величины Δ_2, которое затем используется для нахождения векторов $\boldsymbol{y}_3$ и $\boldsymbol{b}_3$. Далее вычисляется значение Δ_3, чтобы определить расстояние $d(\boldsymbol{b}_3, \mathcal{A})$, и находятся векторы $\boldsymbol{x}_4$ и $\boldsymbol{a}_4$.

В результате повторения указанных вычислений строится последовательность векторов $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_4, \ldots$, которые поочередно выбираются из пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ так, чтобы минимизировать расстояние между следующими друг за другом векторами. Вместе с этим порождается последовательность пар векторов $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_1), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_3), \ldots$, которые представляют собой некоторые приближения для решения уравнения (2).

Исследуем последовательность $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ и заметим, что $\Delta_i \geq \mathbb{1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots$, т. е. последовательность ограничена снизу. Теперь проверим, что эта последовательность не возрастает.

Покажем, что $\Delta_1 \leq \Delta_0$, и рассмотрим величину $\Delta_1 = (\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A})^{-})^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1$.

В силу регулярности вектора $\boldsymbol{y}_1$ и регулярности (по строкам) матрицы $\boldsymbol{B}$ и (по столбцам) матрицы $\boldsymbol{A}$ вектор-строка $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}$ является регулярным. Учитывая регулярность вектора $\boldsymbol{x}_0$, имеем неравенство $\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{-} \geq \boldsymbol{I}$. Умножая это неравенство слева на $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}$, приходим к неравенству $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A} \leq (\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{-}$, у которого обе части являются регулярными. После мультипликативно сопряженного транспонирования обеих частей последнего неравенства получим

$$((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A})^{-} \geq ((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{-})^{-} = ((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0.$$

Наконец, умножение обеих частей неравенства на $\boldsymbol{A}$ слева, повторный переход к сопряженным векторам и умножение справа на $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1$ дает

$$(\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A})^{-})^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1 \leq ((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1.$$

Применяя полученное неравенство вместе с равенством $\boldsymbol{y}_1 = \sqrt{\Delta_0}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B})^{-}$, из которого следует, что $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1 = \sqrt{\Delta_0}\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B})^{-}$, а затем используя очевидное равенство $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B})^{-} = \mathbb{1}$, получим

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = (\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A})^{-})^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1 \leq ((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1)^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1 = \\
&= ((\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B})^{-})^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B})^{-} = (\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{B})^{-})^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \Delta_0.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно проверить выполнение неравенства $\Delta_2 \leq \Delta_1$, а значит, и неравенства $\Delta_{i+1} \leq \Delta_i$ для всех i. Следовательно, последовательность $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ не возрастает. Поскольку эта последовательность ограничена снизу, она сходится к некоторому пределу $\Delta_* \geq \mathbb{1}$.

Заметим, что каждый элемент рассматриваемой последовательности имеет смысл квадрата расстояния от некоторого вектора одного из пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ до ближайшего к нему вектора другого пространства. Поэтому выполнение равенства $\Delta_i = \mathbb{1}$ для некоторого i означает, что пространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют непустое пересечение, а уравнение (2) разрешимо. При этом, если i четное, то на указанном пересечении лежит вектор $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$, а пара векторов $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{i+1})$ является решением уравнения. Если i нечетное, то пересечение содержит $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_i$, а решением является пара $(\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{y}_i)$.

Достижение равенства $\Delta_i = \mathbb{1}$ указывает на нахождение предела $\Delta_* = \Delta_i$ последовательности $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ и может быть использовано для определения условий завершения вычислительной процедуры при практических расчетах.

Если пространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не пересекаются, то значение предела удовлетворяет неравенству $\Delta_* > \mathbb{1}$, а уравнение (2) не имеет решений. В этом случае процедуру следует прекратить, как только в любой из последовательностей $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ или $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_3, \ldots$ появится повторяющийся элемент.

Из описанной процедуры вытекает следующий алгоритм анализа уравнения (2).

Алгоритм 1.
1. Положить $i = 0$*; выбрать регулярный вектор* $\boldsymbol{x}_0$*.*
2. Вычислить:

$$\Delta_i = (\boldsymbol{B}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i)^-\boldsymbol{B})^-)^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \qquad \boldsymbol{y}_{i+1} = \sqrt{\Delta_i}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i)^-\boldsymbol{B})^-.$$

3. Если $\Delta_i = \mathbb{1}$ *или* $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_j$ *для некоторого* $j < i$*, то положить*

$$\Delta_* = \Delta_i, \qquad \boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_i, \qquad \boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{y}_{i+1}$$

и закончить; иначе положить $i = i + 1$*.*
4. Вычислить:

$$\Delta_i = (\boldsymbol{A}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_i)^-\boldsymbol{A})^-)^-\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_i, \qquad \boldsymbol{x}_{i+1} = \sqrt{\Delta_i}((\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_i)^-\boldsymbol{A})^-.$$

5. Если $\Delta_i = \mathbb{1}$ *или* $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_j$ *для некоторого* $j < i$*, то положить*

$$\Delta_* = \Delta_i, \qquad \boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_{i+1}, \qquad \boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{y}_i$$

и закончить; иначе положить $i = i + 1$*.*
6. Перейти к шагу 2.

Если в результате работы алгоритма получено $\Delta_* = \mathbb{1}$, то уравнение (2) имеет решения, включая найденную пару векторов $(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{y}_*)$. В случае, когда $\Delta_* > \mathbb{1}$, уравнение решений не имеет, а величина Δ_* указывает минимально возможную невязку между обеими частями уравнения, которая достигается на векторах $(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{y}_*)$.

5. Примеры решения двустороннего уравнения. Сначала представим пример решения уравнения из работы [10], заданного в контексте $(\max, +)$-алгебры (полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$). Матрицы уравнения и начальное приближение определены (с использованием обозначения $\mathbb{0} = -\infty$) следующим образом:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & \mathbb{0} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mathbb{0} & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для решения уравнения применим алгоритм 1. Учитывая, что операция извлечения квадратного корня в $(\max, +)$-алгебре соответствует делению пополам в обычной арифметике, для каждого шага вычислений получим такие результаты:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_0 = 2, \qquad \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = 1, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 9/2 \\ 7/2 \end{pmatrix};$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 11/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_2 = 1, \qquad \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_3 = 0, \qquad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.
$$

Полученная величина $\Delta_* = \Delta_3 = 0 = \mathbb{1}$ показывает, что уравнение разрешимо. Кроме того, найдено решение:

$$
\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.
$$

Рассмотрим уравнение с матрицами из предыдущего примера, в каждой из которых заменено по одному элементу в последней строке так:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & \mathbb{0} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mathbb{0} & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

При условии, что вектор начального приближения $\boldsymbol{x}_0$ не меняется, алгоритм 1 дает следующие результаты:

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_0 = 2, \qquad \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = 2, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_2 = 1, \qquad \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/2 \end{pmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 13/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_3 = 1, \qquad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.
$$

Учитывая, что выполняется равенство $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_2$ при условии, что $\Delta_3 = 1 > \mathbb{1}$, уравнение решений не имеет. Величина $\Delta_* = \Delta_3 = 1$ показывает минимальную невязку между обеими частями уравнения, которая достигается на векторах

$$
\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}.
$$

6. Заключение. В работе представлена новая вычислительная процедура решения двустороннего векторного уравнения в идемпотентной алгебре, которая опирается на анализ расстояний между тропическими векторными пространствами. Процедура реализована в виде итерационного вычислительного алгоритма, описанного в терминах произвольного линейно упорядоченного алгебраически полного идемпотентного полуполя. Если уравнение не имеет решений, процедура находит псевдорешение, которое обеспечивает минимальное уклонение одной части уравнения от другой и определяет величину этого уклонения.

Для дальнейшего изучения особый интерес представляют анализ и оценка вычислительной сложности предложенного алгоритма.

Автор благодарит рецензентов за ряд важных замечаний и предложений, которые были учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Its Applications. In: *Mathematics and Its Applications*, vol. 401. Dordrecht, Springer (1997). https://doi.org/10.1007/978-94-015-8901-7

2. Golan J. S. Semirings and Affine Equations Over Them. In: *Mathematics and Its Applications*, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

3. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max Plus at Work. In: *Princeton Series in Applied Mathematics*. Princeton, Princeton University Press (2006).

4. Gondran M., Minoux M. Graphs, Dioids and Semirings. In: *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, vol. 41. New York, Springer (2008). https://doi.org/10.1007/978-0-387-75450-5

5. Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. In: *Springer Monographs in Mathematics*. London, Springer (2010). https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

6. Maclagan D., Sturmfels B. Introduction to Tropical Geometry. In: *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 161. Providence, AMS (2015). https://doi.org/10.1090/gsm/161

7. Butkovič P. On certain properties of the systems of linear extremal equations. *Ekonom.-Mat. Obzor* **14** (1), 72–78 (1978).

8. Butkovič P. Solution of systems of linear extremal equations. *Ekonom.-Mat. Obzor* **17** (4), 402–416 (1981).

9. Butkovič P., Hegedüs G. An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra. *Ekonom.-Mat. Obzor* **20** (2), 203–215 (1984).

10. Cuninghame-Green R. A., Butkovič P. The equation $A \otimes x = B \otimes y$ over $(\max, +)$. *Theoret. Comput. Sci.* **293** (1), 3–12 (2003). https://doi.org/10.1016/S0304-3975(02)00228-1

11. Butkovič P., Zimmermann K. A strongly polynomial algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra. *Discrete Appl. Math.* **154** (3), 437–446 (2006). https://doi.org/10.1016/j.dam.2005.09.008

12. Lorenzo E., de la Puente M. J. An algorithm to describe the solution set of any tropical linear system $A \odot x = B \odot x$. *Linear Algebra Appl.* **435** (4), 884–901 (2011). https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.02.014

13. Jones D. On two-sided max-linear equations. *Discrete Appl. Math.* **254** (3), 146–160 (2019). https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.06.011

14. Butkovič P. On properties of solution sets of extremal linear programs. Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research. In: *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 95, 41–54. Amsterdam, North-Holland (1984). https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)72952-9

15. Walkup E. A., Borriello G., Taylor J. M., Atiyah M. A. General linear max-plus solution technique. Idempotency. In: *Publications of the Newton Institute*, 406–415. Cambridge, Cambridge University Press (1998). https://doi.org/10.1017/CBO9780511662508.024

16. Cuninghame-Green R. A., Zimmermann K. Equation with residuated functions. *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42** (4), 729–740 (2001).

17. Кривулин Н. К. *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2009).

18. Кривулин Н. К. О решении одного класса линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **5** (3), 63–76 (2009).

19. Кривулин Н. К. О решении линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре. *Математические модели. Теория и приложения* **5**, 105–113. Санкт-Петербург, Изд-во ВВМ (2004).

Статья поступила в редакцию 7 октября 2022 г.;
доработана 21 октября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Кривулин Николай Кимович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nkk@math.spbu.ru

On solution of two-sided vector equation in tropical algebra

N. K. Krivulin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivulin N. K. On solution of two-sided vector equation in tropical algebra. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 236–248. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.205 (In Russian)

The problem of solving, in the context of tropical mathematics, a vector equation with two given matrices and unknown vectors, each part of which has the form of a product of one of the matrices and an unknown vector, is considered. Such an equation, which has unknown vectors on either side of the equal sign, is often called a two-sided equation. A new procedure for solving the two-sided equation is proposed based on minimizing a certain distance function between vectors of tropical vector spaces that are generated by the columns of each of the matrices. As a result of the procedure, a pair of vectors is obtained, which provides a minimum distance between spaces and the value of the distance itself. If the equation has solutions, then the resulting vectors are the solution to the equation. Otherwise, these vectors define a pseudo-solution that minimizes the deviation of one side of the equation from the other. The execution of the procedure consists in constructing a sequence of vectors that are pseudo-solutions of the two-sided equation in which the left and right sides are alternately replaced by constant vectors. Unlike the well-known alternating algorithm, in which the corresponding inequalities are solved one by one instead of equations, the proposed procedure uses a different argument, looks simpler, and allows one to establish natural criteria for completing calculations. If the equation has no solutions, the procedure also finds a pseudo-solution and determines the value of the error associated with it, which can be useful in solving approximation problems.

Keywords: idempotent semifield, tropical vector space, generalized metric, two-sided vector equation, iterative computational procedure, pseudo-solution.

References

1. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Its Applications. In: *Mathematics and Its Applications*, vol. 401. Dordrecht, Springer (1997). https://doi.org/10.1007/978-94-015-8901-7

2. Golan J. S. Semirings and Affine Equations Over Them. In: *Mathematics and Its Applications*, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

3. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max Plus at Work. In: *Princeton Series in Applied Mathematics*. Princeton, Princeton University Press (2006).

4. Gondran M., Minoux M. Graphs, Dioids and Semirings. In: *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, vol. 41. New York, Springer (2008). https://doi.org/10.1007/978-0-387-75450-5

5. Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. In: *Springer Monographs in Mathematics*. London, Springer (2010). https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

6. Maclagan D., Sturmfels B. Introduction to Tropical Geometry. In: *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 161. Providence, AMS (2015). https://doi.org/10.1090/gsm/161

7. Butkovič P. On certain properties of the systems of linear extremal equations. *Ekonom.-Mat. Obzor* **14** (1), 72–78 (1978).

8. Butkovič P. Solution of systems of linear extremal equations. *Ekonom.-Mat. Obzor* **17** (4), 402–416 (1981).

9. Butkovič P., Hegedüs G. An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra. *Ekonom.-Mat. Obzor* **20** (2), 203–215 (1984).

10. Cuninghame-Green R. A., Butkovič P. The equation $A \otimes x = B \otimes y$ over $(\max, +)$. *Theoret. Comput. Sci.* **293** (1), 3–12 (2003). https://doi.org/10.1016/S0304-3975(02)00228-1

11. Butkovič P., Zimmermann K. A strongly polynomial algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra. *Discrete Appl. Math.* **154** (3), 437–446 (2006). https://doi.org/10.1016/j.dam.2005.09.008

12. Lorenzo E., de la Puente M. J. An algorithm to describe the solution set of any tropical linear system $A \odot x = B \odot x$. *Linear Algebra Appl.* **435** (4), 884–901 (2011). https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.02.014

13. Jones D. On two-sided max-linear equations. *Discrete Appl. Math.* **254** (3), 146–160 (2019). https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.06.011

14. Butkovič P. On properties of solution sets of extremal linear programs. Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research. In: *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 95, 41–54. Amsterdam, North-Holland (1984). https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)72952-9

15. Walkup E. A., Borriello G., Taylor J. M., Atiyah M. A general linear max-plus solution technique. Idempotency. In: *Publications of the Newton Institute*, 406–415. Cambridge, Cambridge University Press (1998). https://doi.org/10.1017/CBO9780511662508.024

16. Cuninghame-Green R. A., Zimmermann K. Equation with residuated functions. *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42** (4), 729–740 (2001).

17. Krivulin N. K. *Methods of Idempotent Algebra for Problems in Modeling and Analysis of Complex Systems.* St Petersburg, St Petersburg University Press (2009). (In Russian)

18. Krivulin N. K. On solution of a class of linear vector equations in idempotent algebra. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes* **5** (3), 63–76 (2009). (In Russian)

19. On solution of linear vector equations in idempotent algebra. *Mathematical Models. Theory and Applications* **5**, 105–113. St Petersburg, VVM Publ. (2004). (In Russian)

Received: October 7, 2022
Revised: October 21, 2022
Accepted: November 17, 2022

Author's information:

Nikolai K. Krivulin — nkk@math.spbu.ru