

М. А. Лялинов

О собственных функциях существенного спектра модельной задачи для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом

В работе изучаются обобщенные собственные функции непрерывного (существенного) спектра для операторе Шрёдингера с сингулярным δ -потенциалом, имеющим носитель на сторонах угла на плоскости. Задача для такого оператора возникает в квантовомеханических моделях о разрушении состояний двух квантовых частиц, связанных точечным взаимодействием, при отражении одной из них потенциальным барьером. В работе предложен подход, который позволяет строить интегральные представления для собственных функций в терминах решения функционально-разностного уравнения со спектральным параметром. Решения такого уравнения изучаются посредством редукции к интегральному и исследования спектральных свойств соответствующего интегрального оператора. Построена асимптотика собственной функции на больших расстояниях и ей придан физический смысл с точки зрения волнового рассеяния.

Предложенный подход может быть применен для изучения собственных функций в широком круге родственных задач для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: существенный спектр, собственные функции, интегральные представления, функционально-разностные уравнения, асимптотика.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9861>

§ 1. Введение

1.1. В одной из работ Р. Йоста (см. [1]) рассмотрена простейшая модель об одномерном рассеянии двух квантовых частиц, взаимодействующих посредством δ -потенциала. При рассеянии одна из частиц отражается на бесконечной стенке так, что волновая функция $\Psi(\xi, \eta)$, описывающая состояние, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \gamma [\theta(\xi)\delta(\eta) + \theta(\eta)\delta(\xi)] \Psi + E\Psi = 0, \quad (1.1)$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда, $\gamma > 0$ – константа связи, а E – спектральный параметр. Координаты частиц задаются величинами $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$, а носитель

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00070, <https://rscf.ru/project/22-11-00070/>.

потенциала в (1.1) расположен на сторонах прямого угла (рис. 1, а). Изучаются значения энергии $E \geq -\gamma^2/4$ и решения уравнения (1.1), отвечающие непрерывному (существенному) спектру. Обобщенные собственные функции должны также удовлетворять условию антисимметрии $\Psi(\xi, \eta) = -\Psi(\eta, \xi)$. Фактически речь идет о построении собственной функции непрерывного спектра данного оператора с сингулярным потенциалом специального вида и об описании соответствующего процесса квантового рассеяния. Мы назовем это задачей Йоста.

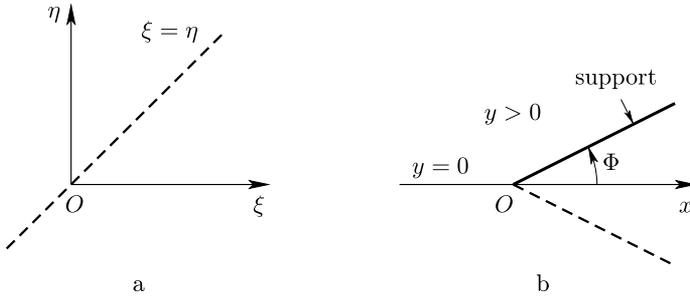


Рис. 1. Области и носитель потенциала в \mathbb{R}_+^2 .

Посредством представлений типа потенциала простого слоя и некоторого обобщения метода Винера–Хопфа (см. [1]) задача Йоста сводится к функционально-разностному (ФР) уравнению с мероморфным коэффициентом. Способ решения такого уравнения в случае носителя сингулярного потенциала на прямом угле предложен в работе [2], однако исследование собственных функций, их асимптотики в работе отсутствует. Заметим, что подход, основанный на методе Винера–Хопфа, применим, когда носитель потенциала стороны прямого угла, и не обобщается на другие родственные задачи.

В нашей работе мы изучаем собственные функции существенного спектра для похожего оператора, когда носитель потенциала находится в точках границы угла на плоскости¹ (рис. 1, b), имеющего произвольный раствор 2Φ , $0 < 2\Phi < \pi$. При этом условие антисимметрии собственной функции заменяются на эквивалентное условие нечетности относительно оси $y = 0$, т.е. с условием Дирихле на границе $y = 0$. Далее мы сформулируем задачу для соответствующего оператора, в том числе в классических терминах, включая уравнение, краевые условия и описание класса функций.

Основной целью работы является развитие метода построения собственных функций существенного спектра и изучение их асимптотического поведения по расстоянию для такого класса задач. Обобщенная задача Йоста используется в качестве содержательного примера, на котором мы демонстрируем основные “ингредиенты” нашего подхода. Фактически мы адаптируем подход, разработанный в работах [3]–[5] для класса задач с сингулярными потенциалами для описания собственных функций дискретного спектра для специ-

¹Эту задачу можно назвать обобщенной задачей Йоста.

ального класса операторов Шрёдингера с сингулярным потенциалом, на случай обобщенных собственных функций существенного (непрерывного) спектра. Хотя в целом мы следуем идеям упомянутых работ, техническая реализация и оценки существенно отличаются. Наша процедура построения собственной функции носит конструктивный формульный характер. Ключевые шаги подхода состоят в использовании подходящих интегральных представлений (типа Конторовича–Лебедева, Ватсона–Бесселя) для решения, редукции к ФР уравнению, а затем к интегральному уравнению со спектральным параметром, в исследовании спектральных свойств последнего. Оказывается, что вычисление асимптотики собственной функции по расстоянию требует перехода к альтернативному интегральному представлению (типа интеграла Зоммерфельда). Соответствующая асимптотическая интерпретация обобщенных собственных функций проясняет их “физический” смысл как уходящих и приходящих поверхностных волн, локализованных в окрестности носителя сингулярного потенциала. Отметим, что в задачах такого типа левее существенного может существовать и дискретный спектр (см. [4]).

Полезно отметить, что ФР уравнения являются полезным средством не только в приложениях в квантовой теории (см. [6], [7]), но они появляются как ключевые модели в спектральной теории (см., например, [8] и ссылки в ней), а также в акустическом и электромагнитном рассеянии (см. [9]–[11]), в теории волновых колебаний жидкости (см. [12]).

1.2. Обозначения и постановка задачи. Здесь мы введем основные объекты исследования, опишем самосопряженный оператор и отвечающую ему спектральную краевую задачу в терминах уравнения и граничных условий. Мы определим самосопряженный оператор Шрёдингера A_s , который рассматривается в работе, его полуторалинейной формой a_s в $L_2(\mathbb{R}_+^2)$, которая полуограничена, плотно определена и замыкаема². Мы рассмотрим разбиение верхней полуплоскости $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, $(x, y) \in \Omega$, на две части Ω_j , $j = 1, 2$, лучом l , см. рис. 1, b. Введем полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и $l = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi = \Phi\}$, $0 < \Phi < \pi/2$,

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < \Phi\}, \\ \Omega_2 &= \{(r, \varphi) : r > 0, \Phi < \varphi < \pi\},\end{aligned}$$

где $0 < \Phi < \pi$. Соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$a_s[U, U] = \int_{\Omega} \nabla U \cdot \overline{\nabla U} \, dx - \gamma \int_l |U|^2 \, ds,$$

где $\gamma > 0$ – параметр Робена и $\text{Dom}[a_s] = H^{1,0}(\Omega)$, $\Omega = \Omega_1 \cup l \cup \Omega_2$, (пространство Соболева для функций с условием Дирихле на границе полуплоскости).

Оператор A_s , порожденный формой a_s , самосопряжен и полуограничен. Он реализуется³ как лапласиан с сингулярным δ -потенциалом, имеющим носитель на l , т.е. $A_s = -\Delta - \gamma \delta_l(x)$.

²Отметим, при условии $\Phi = \pi/4$ этот оператор можно напрямую связать с упомянутой задачей Йоста (1.1).

³Подробности построения можно восстановить, например, с помощью результатов работы [13].

В дальнейшем мы используем лишь классическую его реализацию в терминах уравнения и краевых условий. Вопросы квантово-механической интерпретации оператора A_s при $\Phi = \pi/4$, а также краевых условий можно найти в [2; § 1]. Мы изучаем уравнение

$$A_s U = EU,$$

где E – спектральный параметр. Известно (см., например, [13]), что существенный спектр $\sigma_e(A_s)$ оператора A_s совпадает с $[-\gamma^2/4, \infty)$, причем в данной работе мы рассмотрим $E \in [-\gamma^2/4, 0)$. Построение обобщенных собственных функций для положительных значений E проводится аналогично, однако требует некоторых технических изменений.

Мы построим классическое решение $u = u_j$ в Ω_j , $j = 1, 2$, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned} -\Delta u_1(r, \varphi) - Eu_1(r, \varphi) &= 0, & (r, \varphi) \in \Omega_1, \\ -\Delta u_2(r, \varphi) - Eu_2(r, \varphi) &= 0, & (r, \varphi) \in \Omega_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

и краевым условиям⁴

$$u|_{y=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_l - \left. \frac{\partial u_2}{\partial n} \right|_l = \gamma u_1|_l, \quad u_1|_l = u_2|_l, \quad (1.4)$$

где единичная нормаль n на l направлена в Ω_2 . Из условия $u \in H^{1,0}(\Omega)$ мы ожидаем, что

$$u_j(r, \varphi) = O(r^{\delta_*}), \quad \delta_* > 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

равномерно по φ . Мы покажем, что нетривиальное решение задачи (собственная функция непрерывного спектра) (1.2)–(1.5) существует при почти всех $E \in [-\gamma^2/4, 0)$ и не является квадратично суммируемым ввиду его поведения при $r \rightarrow \infty$. Для этого мы вычислим асимптотику решения при $r \rightarrow \infty$.

1.3. Основное содержание и результаты. В § 2 мы воспользуемся интегральным представлением Ватсона–Бесселя (ВБ) с целью неполного разделения переменных⁵. Неизвестные функции в подынтегральном выражении выбираются так, чтобы удовлетворить уравнениям и краевым условиям. В частности, граничные условия непрерывности и Робэна (1.4) приводят к ФР уравнению со спектральным (характеристическим) параметром, напрямую связанным с E . Полученное однородное ФР уравнение и его мероморфные решения из специального класса играют основную роль для построения собственных функций непрерывного спектра.

Параграф 3 посвящен редукции ФР уравнения к интегральному уравнению с самосопряженным оператором $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V}$, который является компактным возмущением \mathbf{V} так называемого оператора Мёлера \mathbf{M} , спектральные свойства которого изучены (см., например, [5]: существенный (в действительности,

⁴Первое из условий в (1.4) мы называем условием типа Робэна.

⁵Возможность применения неполного разделения переменных подразумевает специальную структуру носителя сингулярного потенциала, например, система лучей с общим началом в \mathbb{R}^2 или конических поверхностей в \mathbb{R}^3 .

непрерывный и простой) спектр $\sigma_e(\mathbf{M})$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. По теореме Вейля о компактном возмущении заключаем, что спектр $\sigma_e(\mathbf{K}) = [0, 1]$. В терминах обобщенных собственных функций оператора \mathbf{K} восстанавливаются решения ФР уравнения из соответствующего класса и тем самым строится интегральное представление для обобщенной собственной функции оператора A_s .

Для этого в § 4 изучается поведение обобщенной собственной функции оператора (о.с.ф.) \mathbf{K} в окрестности сингулярной точки ядра. Вычисляется главная особенность, которая такова, что о.с.ф. не является квадратично интегрируемой, что естественно. Выводится интегральное уравнение для поправки, которая квадратично суммируема. Соответствующее интегральное уравнение с аналитической зависимостью от спектрального параметра, его разрешимость исследуются с помощью аналитической альтернативы Фредгольма. Основные технические трудности здесь связаны с асимптотическими оценками поведения ядра резольвенты оператора Мёлера на непрерывном спектре (см. § 7).

В § 5 полученная информация используется для построения решения ФР уравнения из требуемого класса и для почти всех значений характеристического (спектрального) параметра в уравнении. Обсуждается поведение решения на комплексной плоскости, его асимптотика вдали от вещественной оси.

Интегральное представление Ватсона–Бесселя не подходит для вычисления асимптотики о.с.ф. оператора A_s на больших расстояниях. Для этого в § 6 мы переходим к интегральному представлению типа Зоммерфельда. Подынтегральная функция напрямую связана с построенным решением ФР уравнения посредством преобразования Фурье вдоль мнимой оси и решает систему функциональных уравнений (Малюжинца) в специальном классе мероморфных функций. Использование этих уравнений позволяет найти особенности (полюсы) подынтегральной функции в интеграле Зоммерфельда и вычислить его асимптотику с помощью метода перевала. Главный член асимптотики определяется ближайшими к мнимой оси полюсами, а поправка – другими полюсами или седловыми точками. Поправочные члены экспоненциально малы по расстоянию, тогда как старший член – экспонента – лишь ограничен. С физической точки зрения ему можно придать смысл поверхностной волны бегущей на бесконечность (или из бесконечности) вдоль луча l . О.с.ф. оператора A_s для почти всех $E \in [-\gamma^2/4, 0)$ ограничена на носителе сингулярного потенциала и экспоненциально мала для любого направления вне l при $r \rightarrow \infty$.

§ 2. Интегральные представления Ватсона–Бесселя (ВБ) для решения и неполное разделение переменных

Здесь и далее мы используем следующий стиль изложения: перед формулировками основных утверждений параграфа мы приводим их мотивировку и вычисления, приводящие к результату.

В отличие от ситуации с интегральными представлениями для с.ф. дискретного спектра (см. [4]), когда использовались интегральные представления Конторовича–Лебедева, для существенного спектра с тем, чтобы обеспечить

быструю сходимость интегралов, естественно использовать представления следующего вида⁶:

$$\begin{aligned} u_1(r, \varphi) &= i \int_{C_0^b} \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) J_\nu(i\kappa r) \frac{\sin(\nu\varphi)}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) d\nu, & \varphi \in [0, \Phi], \\ u_2(r, \varphi) &= i \int_{C_0^b} \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) J_\nu(i\kappa r) \frac{\sin(\nu\bar{\varphi})}{\sin(\nu\bar{\Phi})} H_2(\nu) d\nu, & \varphi \in [\Phi, \pi], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\bar{\Phi} = \pi - \Phi$, $\bar{\varphi} = \pi - \varphi$, $\kappa = \sqrt{-E}$, $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя, а функции $H_{1,2}(\cdot)$ требуют вычисления из краевых условий (1.4). Контур $C_0^b = (\infty - ib, -ib) \cup [-ib, ib] \cup (ib, ib + \infty)$ показан на рис. 2, $b > 0$. Представления (2.1) быстро и равномерно по (r, φ) сходятся за счет быстрого убывания функции Бесселя на контуре, что обсуждается ниже, и удовлетворяют уравнениям (1.2) в классическом смысле в силу равенства

$$\begin{aligned} (\kappa r)^2 \left\{ \frac{d^2}{d(\kappa r)^2} + \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{d\kappa r} - \left(1 + \frac{\nu^2}{(\kappa r)^2} \right) \right\} J_\nu(i\kappa r) u_\nu(\varphi) \\ + \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \nu^2 \right) u_\nu(\varphi) J_\nu(i\kappa r) = 0, \end{aligned}$$

где $u_\nu(\varphi) = \cos(\nu\varphi)$ или $u_\nu(\varphi) = \sin(\nu\varphi)$. Выбор $u_\nu(\varphi) = \sin(\nu\varphi)$ под интегралом (соответственно $\sin(\nu\bar{\varphi})$) позволяет удовлетворить условию Дирихле (1.3).

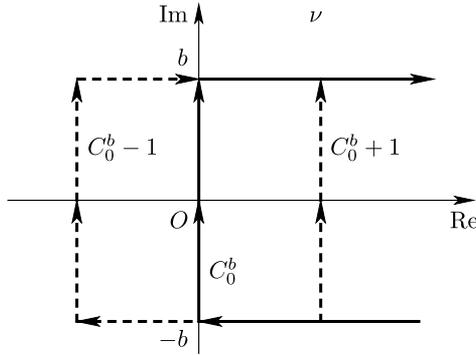


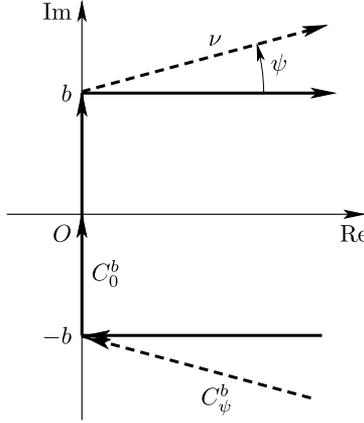
Рис. 2. Деформация контура C_0^b .

Прежде чем подставить интегралы ВБ в краевые условия (1.4) и вывести ФР уравнения для вычисления $H_{1,2}$, полезно описать класс функций, в котором эти уравнения имеют решения, а интегральные представления (2.1) в классическом смысле удовлетворяют задаче и тем самым определяют о.с.ф. существенного спектра. Используя наш опыт построения собственных функций дискретного спектра [4], [5], введем класс \mathcal{M} мероморфных функций h таких, что

- $h(\nu) = -h(-\nu)$ нечетно (либо $h(\nu) = h(-\nu)$ четно);

⁶В теории дифракции интегралы такого типа называют интегралами Ватсона–Бесселя (ВБ).

- h голоморфна в $\Pi_\delta := \Pi(-\delta, \delta) = \{\nu \in \mathbb{C} : -\delta < \operatorname{Re} \nu < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$, т.е. в некоторой окрестности мнимой оси $i\mathbb{R}$. Все полюсы h находятся в полосе $|\operatorname{Im} \nu| < b$ для некоторого положительного b ;
- $|h(\nu)| < \operatorname{Const} \exp(-|\nu| \frac{\pi}{2} \sin |\psi|)$, $|\nu| \rightarrow \infty$, (оценка верна для всех $\pm\psi \in [0, \pi/2]$ при $\nu = |\nu| \exp(i\psi)$, $|\nu| \rightarrow \infty$ вне полосы $|\operatorname{Im} \nu| < b$);
- $d(\nu + 1)$ голоморфна в полосе $\Pi(-1, 0)$ и непрерывна вплоть до границы, а $d(\nu - 1)$ голоморфна в полосе $\Pi(0, 1)$ и непрерывна вплоть до границы, где $d(\nu) = h(\nu)(\operatorname{ctg} \nu \Phi + \operatorname{ctg} \nu \bar{\Phi})$.

Рис. 3. Контур C_ψ^b .

Обсудим сходимость интегралов ВБ (2.1) для функций $H_{1,2}$ из класса \mathcal{M} , для этого воспользуемся асимптотикой функции Бесселя ($|\nu| \gg 1$, $|\arg \nu| \leq \pi/2$, $|\arg z| < \pi$)

$$J_\nu(z) \sim \frac{[z/2]^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} = \left[\frac{z}{2} \right]^\nu \frac{\exp\{-\nu[\ln \nu - 1]\}}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right)$$

на контуре $C_\psi^b = (e^{-i\psi} \infty - ib, -ib) \cup [-ib, ib] \cup (ib, ib + e^{i\psi} \infty)$, где $\psi \in [0, \pi/2]$ и $C_0^b = C_{\psi=0}^b$. В дальнейшем нам необходимо иметь возможность деформировать контур C_0^b в контур $C_{\pi/2}^b = i\mathbb{R}$, т.е. в мнимую ось. Подынтегральное выражение в (2.1) на контуре C_ψ^b при $\nu = |\nu|e^{i\psi} \rightarrow \infty$ (рис. 3) допускает оценку

$$\begin{aligned} & \left| \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) J_\nu(i\kappa r) \frac{\sin(\nu\varphi)}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) \right| \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| \frac{\exp(-i\pi\nu/2) \exp(-\nu[\ln \nu - 1]) + \nu \ln(\kappa r/2)}{\exp(|\nu|(\pi/2) \sin |\psi|)} \right| \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| \exp\left\{-|\nu| \left[\ln |\nu| - 1 - \ln \frac{\kappa r}{2} \right] \cos \psi + |\nu| \left[\psi \sin \psi - \frac{\pi}{2} \sin |\psi| \right] \right\} \right|, \quad (2.2) \end{aligned}$$

где использована формула Стирлинга для гамма-функции. Аналогичная оценка верна для второго подынтегрального выражения в (2.1). Ввиду оценки (2.2) при $\psi = 0$ справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $H_{1,2} \in \mathcal{M}$. Интегральные представления ВБ в (2.1) для $u_{1,2}$ сходятся абсолютно и равномерно по (r, φ) на любом компакте в $\Omega_{1,2}$ соответственно, дважды непрерывно дифференцируемы⁷ по (r, φ) в $\Omega_{1,2}$, удовлетворяют уравнениям (1.2) и условию (1.3), имеют непрерывные производные во всех гладких точках границы (т.е. везде, кроме, возможно, угловой точки O).

Лемма 1 позволяет подставлять интегральные представления ВБ в уравнение и краевые условия и проверять их в классическом смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оценка (2.2) и свойства функций из класса \mathcal{M} допускают возможность деформировать контур C_0^b в C_ψ^b , в частности, в мнимую ось ($\psi = \pi/2$), сохраняя сходимость интегралов (рис. 3).

2.1. Краевые условия на l и функционально-разностное (ФР) уравнение для $H_{1,2}$. Условие непрерывности в (1.4) подразумевает, что

$$H_1(\nu) = H_2(\nu). \quad (2.3)$$

Из условия типа Робэна в (1.4) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\Phi} - \frac{\gamma}{2\kappa} (u_1 + u_2) \Big|_{\varphi=\Phi} \\ &= i \int_{C_0^b} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) i\nu \frac{J_\nu(i\kappa r)}{i\kappa r} \{H_1(\nu) \operatorname{ctg}(\nu\Phi) + H_2(\nu) \operatorname{ctg}(\nu\bar{\varphi})\} \\ & \quad - \frac{\gamma}{2\kappa} i \int_{C_0^b} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) (H_1(\nu) + H_2(\nu)) J_\nu(i\kappa r) = 0. \end{aligned}$$

Ввиду равенства (2.3) удобно ввести новую неизвестную

$$D(\nu) = H_1(\nu) \operatorname{ctg}(\nu\Phi) + H_2(\nu) \operatorname{ctg}(\nu\bar{\varphi}) = H_1(\nu) (\operatorname{ctg}(\nu\Phi) + \operatorname{ctg}(\nu\bar{\varphi})) \quad (2.4)$$

и воспользоваться соотношением для функций Бесселя $2\nu J_\nu(z) = z(J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z))$, см. [14; 8.471], получим

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int_{C_0^b} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) iD(\nu) (J_{\nu+1}(i\kappa r) + J_{\nu-1}(i\kappa r)) \\ & \quad - \frac{2\gamma}{\kappa} \frac{i}{2} \int_{C_0^b} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) \frac{D(\nu)}{\operatorname{ctg}(\nu\Phi) + \operatorname{ctg}(\nu\bar{\varphi})} J_\nu(i\kappa r) = 0. \end{aligned}$$

Первый интеграл разобьем на два слагаемых с $J_{\nu+1}$ и $J_{\nu-1}$ и проведем замену переменной интегрирования соответственно $\nu + 1 \rightarrow \nu$ и $\nu - 1 \rightarrow \nu$. Контур интегрирования C_0^b преобразуется как показано на рис. 2 в $C_0^b + 1$ и $C_0^b - 1$

⁷В действительности бесконечно дифференцируемы.

соответственно. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int_{C_0^b+1} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi[\nu-1]}{2}\right) iD(\nu-1)J_\nu(i\kappa r) \\ & - \frac{i}{2} \int_{C_0^b-1} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi[\nu+1]}{2}\right) iD(\nu+1)J_\nu(i\kappa r) \\ & - \frac{2\gamma}{\kappa} \frac{i}{2} \int_{C_0^b} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) \frac{D(\nu)}{\operatorname{ctg}(\nu\Phi) + \operatorname{ctg}(\nu\bar{\Phi})} J_\nu(i\kappa r) = 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $H_{1,2}$ принадлежат классу \mathcal{M} , деформируем контуры $C_0^b \pm 1$ в контур C_0^b , получим

$$\frac{i}{2} \int_{C_0^b} d\nu \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2}\right) \left(D(\nu+1) - D(\nu-1) - \frac{2\gamma}{\kappa} \frac{D(\nu)}{\operatorname{ctg}(\nu\Phi) + \operatorname{ctg}(\nu\bar{\Phi})} \right) J_\nu(i\kappa r) = 0.$$

Последнее равенство, а вместе с ним и краевое условие типа Робэна, выполнено, если $D \in \mathcal{M}$ является решением ФР уравнения

$$D(\nu+1) - D(\nu-1) - 2i\Lambda W(\nu)D(\nu) = 0, \quad (2.5)$$

где $\Lambda = \gamma/(2\kappa)$, а

$$W(\nu) = \frac{-2i}{\operatorname{ctg}(\nu\Phi) + \operatorname{ctg}(\nu\bar{\Phi})}$$

называется мероморфным потенциалом. Из сказанного выше и леммы 1 мы видим, что справедливо утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для некоторого $\Lambda \geq 1$ существует нетривиальное решение D уравнения (2.5) и $H_{1,2}$ в (2.4) из класса \mathcal{M} . Тогда интегральные представления ВВ (2.1) удовлетворяют уравнениям (1.2) и краевым условиям (1.3), (1.4) в классическом смысле.

Отметим, что проверка оценки (1.5) сводится к деформации контура C_0^b вправо, так чтобы вещественная ось пересекалась в точке $\nu = \delta_* > 0$, замене функции Бесселя ее асимптотикой при $r \rightarrow 0$ под знаком интеграла, что возможно ввиду быстрой сходимости интеграла.

Очевидно, что изучение существования нетривиальных решений уравнения (2.5) в требуемом классе мероморфных функций является основной задачей. Вычисление асимптотического поведения $u_{1,2}$ при $r \rightarrow \infty$ завершит построение о.с.ф., однако для этого мы воспользуемся переходом к интегральному представлению Зоммерфельда.

§ 3. Редукция ФР уравнения (2.5) к интегральному и изучение его свойств

Применим лемму 3.1 из [5], записав уравнение (2.5) в виде $D(\nu+1) - D(\nu-1) = 2i\Lambda W(\nu)D(\nu)$, получим интегральное представление⁸

$$D(\nu) = -\frac{\Lambda}{2} \int_{-\infty}^{i\infty} d\tau \frac{W(\tau) \sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} D(\tau), \quad \nu \in \Pi_{1+\delta}. \quad (3.1)$$

⁸Мы “обратили” разностный оператор в левой части.

Отметим, что $D(\cdot)$ четная. Прокомментируем представление (3.1). Если в правой части $D(\cdot)$ известна и интегрируема на мнимой оси, то правая часть представления голоморфна в полосе Π_1 . Это следует из того, что знаменатель в подынтегральном выражении в полосе обращается в нуль в ближайших к мнимой оси точках $\nu = \pm 1$. Так как $W(\cdot)$ голоморфна в окрестности мнимой оси ширины 2δ , за счет деформации контура в этой окрестности заключаем, что левая часть голоморфна в полосе $\Pi_{1+\delta}$. Мероморфное продолжение $D(\cdot)$ на всю комплексную плоскость проводим с помощью ФР уравнения. Легко видеть, что особенности мероморфного продолжения находятся на вещественной оси, так как особенности потенциала вещественны, а сдвиги в ФР уравнении вдоль вещественной оси. Таким образом, если найти значения $D(\cdot)$ на мнимой оси с “правильным” поведением на бесконечности и $\Lambda \geq 1$, то $D(\cdot)$ продолжается мероморфно на \mathbb{C} . Мы положим $\nu \rightarrow i\mathbb{R}$, получим интегральное уравнение (3.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть интегральное уравнение (3.1) имеет решение $D(\cdot)$, интегрируемое на положительной части мнимой оси $i\mathbb{R}_+$ для $\Lambda \geq 1$, которое удовлетворяет оценке ($\nu \rightarrow \pm i\infty$)

$$|D(\nu)| < \text{Const} \left| \exp\left(-\frac{\pi|\nu|}{2}\right) \right|$$

на мнимой оси. Тогда существует нетривиальное четное мероморфное решение D уравнения (2.5) для $\Lambda \geq 1$. Решение D имеет особенности на вещественной оси и допускает указанную оценку в полосе $\Pi_{1+\delta}$.

Убедимся теперь, что решение интегрального уравнения (3.1) с требуемыми в предложении 2 свойствами действительно существует. Полезно и удобно преобразовать это уравнение (3.1) к интегральному с самосопряженным оператором. Воспользуемся четностью подынтегрального выражения, получим уравнение на полуоси. Введем новые переменные

$$x = \frac{1}{\cos \pi\nu}, \quad y = \frac{1}{\cos \pi t}, \quad \frac{dy}{\pi} = \frac{\sin \pi t}{\cos^2 \pi t} dt,$$

и неизвестную

$$h(x) = \cos \pi\nu D(\nu)|_{x=1/(\cos \pi\nu)},$$

$x, y \in [0, 1]$,

$$h(x) - \frac{\Lambda}{\pi} \int_0^1 dy \frac{w_0(y)}{x+y} h(y) = 0, \quad (3.2)$$

где

$$w_0(y) = W(t)|_{y=1/(\cos \pi t)} > 0$$

и $w_0(y) = 1 + o(1)$ при $y \rightarrow 0$. Отметим, что $W(t)$ нечетна, положительна на положительной части мнимой оси, $W(t) = 1 + O(\exp(-d_*|\nu|))$, $d_* = 2 \min(\Phi, \bar{\Phi}) = \Phi$ при $\text{Im } \nu \rightarrow \infty$, $\text{Re } \nu = 0$ и мероморфна. Из (3.2) получаем интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\rho(x) - \frac{\Lambda}{\pi} \int_0^1 dy \frac{w(x, y)}{x+y} \rho(y) = 0, \quad (3.3)$$

где $\rho(x) = \sqrt{w_0(x)}h(x)$, $w(x, y) = \sqrt{w_0(x)w_0(y)}$.

Вместе с характеристическим параметром Λ мы введем спектральный параметр $\mu = \Lambda^{-1}$ и запишем уравнение (3.3) в виде

$$(\mathbf{K}\rho)(x) = \mu\rho(x) \quad (3.4)$$

в $L_2([0, 1])$.

Изучим свойства оператора \mathbf{K} с симметричным ядром, которое может быть представлено суммой (см. [5])

$$\frac{w(x, y)}{x + y} = \frac{1}{x + y} + \frac{v(x, y)}{x + y}, \quad (3.5)$$

$v(x, y) = w(x, y) - 1 = O(x^{b_*} + y^{b_*})$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, где $b_* = d_*/\pi < 1$. Ядро $v(x, y)/(x + y)$ квадратично интегрируемо.

Это позволяет утверждать, что верна

ЛЕММА 2. *Оператор $\mathbf{K}: L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1])$ в (3.4) ограничен и самосопряжен. Он положителен и представим в виде*

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V} \quad (3.6)$$

в соответствии с представлением ядра (3.5), где \mathbf{M} так называемый оператор Мёлера, определенный в $L_2([0, 1])$ выражением

$$(\mathbf{M}r)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{x + y} r(y).$$

Интегральный оператор \mathbf{V} в (3.6) определен как

$$(\mathbf{V}\rho)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dy \frac{v(x, y)}{x + y} \rho(y)$$

в $L_2([0, 1])$, является оператором из класса Гильберта–Шмидта S_2 , что обеспечено свойствами функции $v(x, y)$.

Существенный спектр оператора $\sigma_e(\mathbf{K})$ совпадает с отрезком $\mu \in [0, 1]$ (или $\Lambda = \mu^{-1} \geq 1$).

Действительно, известно, что спектр оператора Мёлера \mathbf{M} существенный (абсолютно непрерывный и простой) и совпадает с отрезком $[0, 1]$. Его диагонализация следует из известных формул Мёлера (см. [15], а также [5; п. 4.1]). Оператор \mathbf{V} компактный, т.е. при таком возмущении по теореме Вейля сохраняется существенный спектр. В отличие от работы [5] здесь мы не обсуждаем возможность существования дискретного спектра правее $\mu = 1$ ($\mathbf{K} \geq 0$), а изучаем с.ф. существенного (непрерывного) спектра $\sigma_e(\mathbf{K})$ при $\mu \in (0, 1]$.

§ 4. Интегральное уравнение и оценка для решения при $\mu \in (0, 1]$

Договоримся параметризовать точки μ отрезка $[0, 1]$ параметром $p \in [0, \infty)$ в соответствии с равенством $\mu(p) = 1/\operatorname{ch}(\pi p)$, $p(\mu) = (1/\pi) \ln(1/\mu + \sqrt{1/\mu^2 - 1})$. Ветвь $p(\cdot)$ в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$ фиксирована так, как

указано в [5; п. 4.2]. Рассмотрим $\sqrt{\mu^2 - 1}$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль $[-1, 1]$, ветвь фиксируем условием $\sqrt{\mu^2 - 1} > 0$ при $\mu > 1$. Воспользуемся тем, что функция $(1 - i\sqrt{\mu^2 - 1})/\mu$ не принимает положительных значений. Тогда мы можем считать, что $\arg((1 - i\sqrt{\mu^2 - 1})/\mu) \in (0, 2\pi)$. В итоге, функция

$$p(\mu) := \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1 - i\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu} \right)$$

голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Введем известные с.ф. непрерывного спектра оператора \mathbf{M} (см., например, [5; п. 4.1], причем результаты следуют из формул Мёлера, см. [15],

$$\mathcal{P}_p(x) := \frac{\sqrt{p \operatorname{th}(\pi p)}}{x} P_{ip-1/2} \left(\frac{1}{x} \right),$$

$P_{ip-1/2}(\cdot)$ – функции Лежандра (см. [14; 8.715(1)] и § 7), имеющие интегральное представление

$$P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\cos(\tau t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} t}}.$$

Асимптотика собственных функций следует из формулы 8.772(1) в [14],

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p(x) = & \frac{\sqrt{p \operatorname{th}(\pi p)}}{x} \left(\frac{\Gamma(-ip)}{\Gamma(-ip + 1/2)} \left[\frac{x}{2} \right]^{1/2+ip} \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip + 1/2)} \left[\frac{x}{2} \right]^{1/2-ip} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(x^2) \right), \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0+$, $p > 0$ и $\mathcal{P}_p(x) = O(1)$ при $p \rightarrow \infty$, $1 \geq x > 0$. Функции $\mathcal{P}_p(x)$ вещественны при $p \geq 0$. Как и должно быть, о.с.ф. $\mathcal{P}_p(\cdot)$ является решением уравнения

$$(\mathbf{M}\mathcal{P}_p)(x) = \mu(p)\mathcal{P}_p(x) \quad (4.1)$$

и не принадлежит $L_2([0, 1])$ ввиду ее поведения в окрестности точки $x = 0$.

Представляется естественным предположить, что о.с.ф. оператора \mathbf{K} имеет похожее асимптотическое поведение в окрестности точки $x = 0$, так как операторы \mathbf{K} и \mathbf{M} отличаются на компактный оператор. Наша цель в этом параграфе – показать, что о.с.ф. $\rho(\cdot)$ оператора \mathbf{K} отличается от $\mathcal{P}_p(\cdot)$ на функцию из $L_2([0, 1])$, т.е.

$$\rho(x) - \mathcal{P}_p(x) =: g_p(x), \quad p \geq 0, \quad g_p \in L_2([0, 1]). \quad (4.2)$$

Для того чтобы это доказать, получим уравнение, которому удовлетворяет $g_p \in L_2([0, 1])$, вычтем из уравнения (3.4) уравнение (4.1), имеем

$$[\mathbf{M} - \mu(p)\mathbf{I}]g_p + \mathbf{V}g_p = -\mathbf{V}\mathcal{P}_p, \quad p \geq 0. \quad (4.3)$$

Напомним некоторые свойства резольвенты $[\mathbf{M} - \mu(p)\mathbf{I}]^{-1}$ оператора \mathbf{M} , см., например, [5; п. 4.2]. Резольвента голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$, имеет представление

$$u(x) = [\mathbf{M} - \mu\mathbf{I}]^{-1}f(x) = -\frac{1}{\mu} \{ \mathbf{I} + \mathbf{A}_\mu \} f(x), \quad (4.4)$$

где

$$[\mathbf{A}_\mu f](x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 a(x, y; \mu) f(y) dy \quad (4.5)$$

– интегральный оператор с ядром

$$a(x, y; \mu) = \pi \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}_p(x) \mathcal{P}_p(y)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} dp. \quad (4.6)$$

Ядро резольвенты имеет предельные значения на берегах разреза вдоль спектра $[0, 1]$,

$$a_\pm(x, y; s) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a(x, y; s \pm i\epsilon), \quad s \in (0, 1),$$

и на краю $\mu = 1$, которые описаны в [5; п. 4.2]. Рассмотрим круг \mathcal{B}_1 с центром в $\mu = 1$ радиуса 1, который имеет разрез вдоль спектра, тогда для любого μ из \mathcal{B}_1 , включая края разреза и точку $\mu = 1$, имеет место оценка

$$|a(x, y; \mu)| \leq C \frac{|\ln(2/x) \ln(2/y)|}{\sqrt{xy}}, \quad (x, y) \in (0, 1] \times (0, 1].$$

Эта оценка следует из (4.6), однако для дальнейшего нам потребуется и асимптотика ядра при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, вблизи и на берегах разреза $[0, 1]$.

Оператор резольвенты (4.4), (4.5) задает изоморфизм пространства $L_2([0, 1])$ для всех μ вне спектра. Рассмотрим открытый прямоугольник ω_+ малой высоты ϵ_0 в верхней полуплоскости ($\mu \in \mathbb{C}_+$) с основанием Q_+ , совпадающим с верхним берегом разреза вдоль $(0, 1)$. Применим слева оператор резольвенты к (4.3), для таких $\mu \in \omega_+$ получим

$$g_p + [\mathbf{M} - \mu \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{V} g_p = -[\mathbf{M} - \mu \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{V} \mathcal{P}_p. \quad (4.7)$$

Несложно показать, что $\mathbf{V} \mathcal{P}_p \in L_2(0, 1)$, что следует из оценки $v(x, y) = O(x^{b_*} + y^{b_*})$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Так как $\mu, \mu \in \omega_+$, и входит аналитически в оператор $\mathbf{B}(\mu) := [\mathbf{M} - \mu \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{V}$ используем аналитической альтернативой Фредгольма, см., например, [16; гл. 1, § 8, теорема 2]. Оператор $\mathbf{B}(\mu)$ компактен для всех $\mu \in \omega_+$ и для некоторого $\mu_1 \in \omega_+$ (например, достаточно большого по модулю) существует ограниченный обратный $[\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mu)]^{-1}$. Вследствие этого в ω_+ существует мероморфная оператор функция $[\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mu)]^{-1}$. Тогда для всех $\mu \in \omega_+$ возможно за исключением дискретного множества \mathcal{N} полюсов оператор $\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mu)$ ограниченно обратим. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 3. Уравнение (4.7) имеет единственное решение g_p из $L_2([0, 1])$ для $\mu(p) \in \omega_+ \setminus \mathcal{N}$.

Нас интересует, однако, разрешимость (4.7) на нижней границе Q_+ прямоугольника ω_+ , т.е. на границе области аналитичности, на спектре. Мы воспользуемся теоремой 3 в [16; гл. 1, § 8], которая описывает свойства аналитической оператор-функции на границе множества ее аналитичности. Ввиду сказанного выше, чтобы перенести результат леммы 3 на значения $\mu \in \omega_+ \cup Q_+ \setminus \mathcal{N}_+$, где \mathcal{N}_+ – некоторое множество лебеговой меры нуль, мы должны проверить, что оператор-функция $\mathbf{B}(\cdot)$ непрерывна по норме вплоть до Q_+ , т.е.

$$\|\mathbf{B}(\mu + i\epsilon) - \mathbf{B}(\mu)\| \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

и $\mu \in Q_+ = (0, 1)$. Для этого оценим величину $\|\mathbf{B}(\mu + i\epsilon) - \mathbf{B}(\mu)\|$ с помощью цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{B}(\mu + i\epsilon) - \mathbf{B}(\mu))\rho\|^2 &= \int_0^1 \left| (\mathbf{B}(\mu + i\epsilon) - \mathbf{B}(\mu))\rho(x) \right|^2 dx \\ &\leq \mu^{-1} \int_0^1 dx \left| \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz |a(x, z; \mu + i\epsilon) - a(x, z; \mu)| \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 dy \frac{|v(z, y)|}{z+y} \rho(y) \right) \right|^2 \\ &\leq \mu^{-1} \int_0^1 dx \left| \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 dz |a(x, z; \mu + i\epsilon) - a(x, z; \mu)| \left[\int_0^1 dy \frac{|v(z, y)|^2}{(z+y)^2} \right]^{1/2} \right|^2 \|\rho\|^2 \\ &\leq \mu^{-1} \int_0^1 dx \left| \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 dz |a(x, z; \mu + i\epsilon) - a(x, z; \mu)| C_0 \left[\int_0^1 dy \frac{(z^{b_*} + y^{b_*})^2}{(z+y)^2} \right]^{1/2} \right|^2 \|\rho\|^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой

$$\left[\int_0^1 dy \frac{(z^{b_*} + y^{b_*})^2}{(z+y)^2} \right]^{1/2} \leq \begin{cases} C \frac{z^{b_*}}{\sqrt{z}}, & b_* < \frac{1}{2}, \\ |\ln z|, & b_* = \frac{1}{2}, \\ \text{Const}, & 1 > b_* > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

получаем

$$\|(\mathbf{B}(\mu + i\epsilon) - \mathbf{B}(\mu))\|^2 \leq \frac{C}{\mu} \int_0^1 dx G_\epsilon(x; \mu), \quad (4.9)$$

где (для случая $b_* < 1/2$, остальные аналогично)

$$G_\epsilon(x; \mu) = \left[\int_0^1 dz |a(x, z; \mu + i\epsilon) - a(x, z; \mu)| \frac{z^{b_*}}{\sqrt{z}} \right]^2.$$

Для того чтобы перейти к пределу в правой части (4.9) и тем самым проверить предельное соотношение в (4.8), воспользуемся асимптотикой ядра резольвенты (см. лемму 7) при $\mu \in \omega_+ \cup Q_+$

$$a(x, y; \mu) = \frac{\text{sh}(\arccos(1/\mu) \ln[x/y]/\pi)}{\text{sh}(\ln[x/y]/2)} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}(x+y)} + B_\mu(x, y) O\left(\frac{\ln^{-m}(xy)}{\sqrt{xy}}\right),$$

m – любое натуральное число, ветвь $\sqrt{\mu^2 - 1}$ определена выше, $B_\mu(x, y)$ непрерывно по μ на любом компакте в $\omega_+ \cup Q_+$ и ограничено по (x, y) , а $\arccos(1/\mu) = -i \text{arch}(1/\mu)$ ограничен и мнимый, $\text{arch}(1/\mu) > 0$, $0 < \mu < 1$. Ветвь $\arccos(z)$ фиксирована условием $\arccos(z) > 0$ при $-1 < z < 1$ на верхнем берегу разреза, а разрез проведен вдоль отрезка $[-1, 1]$. Для $\mu \in \omega_+$ первое слагаемое в асимптотике такое же, а второе имеет порядок $B_\mu(x, y) O((xy)^{\delta-1/2})$, $\delta > 0$.

Из асимптотики следует, что $G_\epsilon(x; \mu)$ при $\mu \in \omega_+ \cup Q_+$ имеет суммируемую мажоранту

$$|G_\epsilon(x; \mu)| \leq C_\mu x^{2b_*-1}, \quad b_* > 0,$$

причем C_μ ограничена по μ на любом компакте в $\omega_+ \cup Q_+$. Переходя к пределу в правой и левой частях (4.9) при $\epsilon \rightarrow 0$ (теорема Лебега о предельном переходе

под знаком интеграла), приходим к справедливости соотношения (4.8), учитывая непрерывность $a(x, y; \mu)$ по μ при $\mu \in \omega_+ \cup Q_+$. Используя сказанное выше, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4. Пусть $\mu \in \omega_+ \cup Q_+ \setminus \mathcal{N}_+$, где \mathcal{N}_+ – множество лебеговой меры нуль. Тогда оператор $\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mu)$ ограниченно обратим, а уравнение (4.7) имеет единственное решение g_p из $L_2([0, 1])$ при любой правой части из $L_2([0, 1])$.

Напомним, что множество⁹ $\mathcal{N}_+ = \{\mu \in \omega_+ \cup \overline{Q}_+ : -1 \in \sigma(\mathbf{B}(\mu))\}$.

Из лемм 3, 4 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для всех $\mu = \mu(p) \in \sigma_e(\mathbf{K})$, за исключением, возможно, множества лебеговой меры нуль, о.с.ф. оператора \mathbf{K} имеют представление

$$\rho_p(x) = \mathcal{P}_p(x) + g_p(x), \quad g_p \in L_2(0, 1), \quad p \in [0, \infty).$$

Из предложения 3 и асимптотики функций Лежандра следует асимптотическая оценка о.с.ф.

$$\rho_p(x) \sim \left(C(p) \left[\frac{x}{2} \right]^{-1/2-ip} + C(-p) \left[\frac{x}{2} \right]^{-1/2+ip} \right) (1 + o(1))$$

при $x \rightarrow 0$ и $p \geq 0$, $C(\cdot)$ выписывается явно. Стоит ожидать, что особое множество \mathcal{N}_+ является пустым в нашем случае, что, однако, не следует из нашего подхода к доказательству предложения 3.

§ 5. Решения ФР уравнения, $\Lambda \geq 1$

Используя результаты предыдущего параграфа, мы опишем асимптотику решений ФР уравнения при $|\nu| \rightarrow \infty$, $\nu = |\nu|e^{i\psi}$, $\psi \in (0, \pi/2]$ для $\Lambda \geq 1$. Формула

$$\rho_p(x) = \cos \pi \nu D(\nu) \Big|_{x=1/\cos \pi \nu} \sqrt{w_0(x)}$$

связывает $\rho_p(x)$ и $D(\nu)$ для всех $\Lambda^{-1} = \mu(p) = 1/\cos \pi p \in (0, 1]$, $p \in [0, \infty)$, и позволяет утверждать, что $D(\nu)$ является искомым мероморфным решением и удовлетворяет оценке

$$|D(\nu)| < \text{Const} \left| \exp \left(-\frac{\pi |\nu|}{2} \right) \right|, \quad |\nu| \rightarrow \infty,$$

на мнимой оси и в полосе $\Pi_{1+\delta}$. Для дальнейшего нам недостаточно такой оценки, мы получим асимптотику D .

Назовем множество $C_e = \{\Lambda : \Lambda \geq 1\}$ существенным характеристическим, а соответствующие им решения ФР уравнения (2.5) (обобщенными) собственными функциями существенного характеристического множества C_e . Удобно ввести параметр τ и параметризовать $\Lambda \geq 1$ с помощью соотношения

$$\Lambda =: \sin \left(\frac{\pi}{2} + i\tau \right) = \text{ch } \tau, \quad \tau \geq 0.$$

(Заметим, что можно аналогично выбрать значения параметра $\tau \leq 0$.)

⁹Это множество может оказаться пустым при достаточно малой высоте прямоугольника $\omega_+ \cup \overline{Q}_+$.

Асимптотика мероморфной функции тесно связана с особенностями ее преобразования Фурье, в данном случае по мнимой оси. Воспользуемся преобразованием Фурье вдоль мнимой оси

$$\chi(\zeta) = \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)h(\nu) d\nu, \quad h(\nu) = -\frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} \exp(-i\zeta\nu)\chi(\zeta) d\zeta$$

и применим к уравнению (2.5). Простые вычисления приводят к соотношению

$$\left[\sin \zeta - \sin \left(\frac{\pi}{2} + i\tau \right) \right] F(\zeta) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + i\tau \right) \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)[W(\nu) + 1]D(\nu) d\nu = 0,$$

$$F(\zeta) = \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)D(\nu) d\nu,$$

которое перепишем в виде

$$F(\zeta) = -\frac{\sin(\pi/2 + i\tau)}{[\sin \zeta - \sin(\pi/2 + i\tau)]} \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)[W(\nu) + 1]D(\nu) d\nu.$$

Убедимся, что интеграл в правой части голоморфен в некоторой полосе $\zeta \in \Pi_{\pi/2+q_*} = \{\zeta \in \mathbb{C} : -(\pi/2+q_*) < \text{Re } \zeta < \pi/2+q_*\}$, $q_* > 0$, тем самым ближайшиe к мнимой оси особенности – полюсы F – рас~~по~~ложены в точках $\zeta = \pm(\pi/2 + i\tau)$ (F четная функция). Будем считать $\text{Re } \zeta > 0$ и запишем интеграл в виде

$$\int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)[W(\nu) + 1]D(\nu) d\nu = \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)[W(\nu) + i \text{tg}(b\nu)]D(\nu) d\nu$$

$$+ \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)[-i \text{tg}(b\nu) + \text{sign}(i\nu)]D(\nu) d\nu$$

$$+ \int_{i\mathbb{R}} \exp(i\zeta\nu)[- \text{sign}(i\nu) + 1]D(\nu) d\nu.$$

В последнем слагаемом интегрирование идет вдоль $i\mathbb{R}_+$, так как множитель $[- \text{sign}(i\nu) + 1] = 0$ на отрицательной части мнимой оси, поэтому интеграл голоморфен при $\text{Re}(\zeta) > 0$. Вспоминая, что верна асимптотика $W(\nu) = 1 + O(\exp\{\pm iq_*\nu\}) = \Phi$ (в нашем случае $q_* = 2 \min\{\Phi, \bar{\Phi}\} > 0$) при $\nu \rightarrow i\infty$ вдоль мнимой оси, находим, что первый интеграл регулярен $\Pi(-\pi/2 - q_*, \pi/2 + q_*)$, полагая, что $b > q_*$. Если взять $b > 0$ достаточно большим, находим, что второй интеграл голоморфен в $\Pi(-[2b + \pi/2], 2b + \pi/2)$. Мы видим, что функция $F(\cdot)$ голоморфна в $\Pi(-\pi/2 - q_*, \pi/2 + q_*)$ за исключением полюсов в точках $\zeta = \pm(\pi/2 + i\tau)$, ближайших к мнимой оси. Используем обратное преобразование Фурье,

$$D(\nu) = -\frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} \exp(-i\zeta\nu)F(\zeta) d\zeta,$$

сдвигая контур интегрирования (F быстро убывает в полосе вдоль мнимой оси), вычисляем вклад вычетов от ближайших к мнимой оси полюсов. Приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 5. *Справедлива асимптотика*

$$D(\nu) = \frac{C_D}{\cos[\nu(\pi/2 + i\tau)]} (1 + O(\exp(-\delta_0|\nu|))) \quad (5.1)$$

при $|\nu| \rightarrow \infty$ и некотором $\delta_0 > 0$ в произвольной полосе $\nu \in \Pi_q$ конечной ширины $2q$, C_D – константа.

Поправка к старшему члену асимптотики в (5.1) определяется вкладом следующих за ближайшими к мнимой оси полюсов функции F . Заметим, что $D(\cdot)$ голоморфна вне полосы $|\operatorname{Im} \nu| < b$ для некоторого положительного b . С другой стороны, асимптотика (5.1) верна в полосе Π_q произвольной, но фиксированной ширины $2q$. Это наблюдение позволяет утверждать, что справедлива оценка $|D(\nu)| < \operatorname{Const} |\exp(-|\nu|(\pi/2) \sin |\psi|)|$, $|\nu| \rightarrow \infty$, для всех $\pm\psi \in [0, \pi/2]$ при $\nu = |\nu| \exp(i\psi)$, $|\nu| \rightarrow \infty$, вне полосы $|\operatorname{Im} \nu| < b$, в том числе на контуре C_ψ^b . Отсюда и с учетом установленного ранее (лемма 2, предложение 3), следует

ЛЕММА 6. Для любого значения Λ из существенного характеристического множества $C_e = [1, \infty)$ существует $D(\cdot)$ четное решение ФР уравнения (2.5) (обобщенная собственная функция существенного характеристического множества), принадлежащее классу \mathcal{M} и имеющее асимптотику (5.1).

Лемма 6 и свойства решений ФР уравнения (2.5) позволяют получить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для о.с.ф. существенного спектра ($E = -\gamma^2/(4\Lambda) \in [-\gamma^2/4, 0)$) оператора A_s справедливо интегральное представление Ватсона–Бесселя (2.1) в терминах о.с.ф. $D \in \mathcal{M}$ существенного характеристического множества ФР уравнения (2.5), $\Lambda \in [1, \infty)$.

Отметим, что каждой точке $E = -\gamma^2/(4\Lambda) \in [-\gamma^2/4, 0) \subset \sigma_e(A_s)$ однозначно отвечает точка существенного характеристического множества $\Lambda \in [1, \infty)$ ФР уравнения (2.5).

Обратимся к асимптотике о.с.ф. по расстоянию и ее физической интерпретации с точки зрения волнового рассеяния.

§ 6. Редукция к интегралу Зоммерфельда и асимптотика о.с.ф. оператора A_s

Для того чтобы вычислить асимптотическое поведение о.с.ф., описываемой формулами (2.1), не удастся воспользоваться асимптотикой при $r \rightarrow \infty$ функции Бесселя под интегралом, так как это приводит к расходимости интеграла. Оказывается, что полезно использовать интегральное представление Зоммерфельда для функции Бесселя в виде¹⁰

$$J_\nu(ikr) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0^-} \mathrm{d}\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) \exp\left(\frac{i\nu\pi}{2} - i\alpha\nu\right),$$

где контур γ_0^- показан на рис. 4.

¹⁰Мы использовали модификацию формулы 8.412(6) в [14] и ее аналитическое продолжение по аргументу.

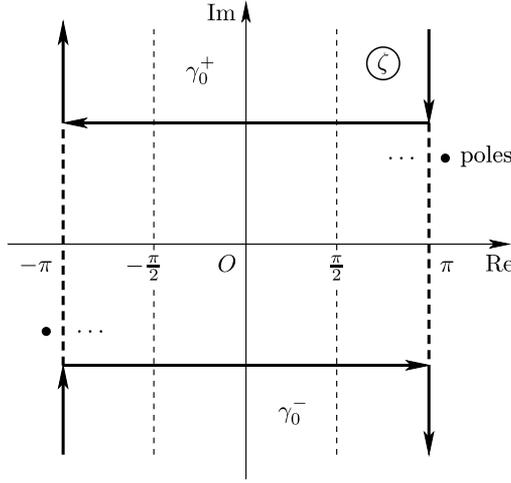


Рис. 4. Контур интегрирования $\gamma_0 = \gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ и полюсы.

Подставим представление Зоммерфельда для функций Бесселя в (2.1), поменяем порядки интегрирования, что оправдано. Имеем

$$\begin{aligned}
 u_1(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^-} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) 2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{C_0^b} \exp(-i\alpha\nu) \frac{\sin(\nu\varphi)}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) d\nu \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^-} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) 2F_1(\alpha, \varphi), \quad \varphi \in [0, \Phi], \\
 u_2(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^-} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) 2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{C_0^b} \exp(-i\alpha\nu) \frac{\sin(\nu\bar{\varphi})}{\sin(\nu\bar{\Phi})} H_2(\nu) d\nu \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^-} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) 2F_2(\alpha, \bar{\varphi}), \quad \varphi \in [\Phi, \pi],
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\text{Im } \alpha < 0$, $|\text{Re } \alpha| < \pi + \delta_0$, $\delta_0 > 0$ и

$$F_1(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{C_0^b} \exp(-i\alpha\nu) \frac{\sin(\nu\varphi)}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) d\nu, \tag{6.2}$$

$$F_2(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{C_0^b} \exp(-i\alpha\nu) \frac{\sin(\nu\bar{\varphi})}{\sin(\nu\bar{\Phi})} H_2(\nu) d\nu. \tag{6.3}$$

В представлениях Зоммерфельда (6.1) функции $F_1(\cdot, \varphi)$, $F_2(\cdot, \bar{\varphi})$ продолжены в полуполосу $\alpha \in \Pi_\pi$, $\text{Im } \alpha < 0$. Используем принадлежность $H_{1,2}$ классу \mathcal{M} , в частности, оценку $|H_{1,2}(\nu)| < \text{Const} |\exp(-|\nu|(\pi/2) \sin |\psi|)|$, $|\nu| \rightarrow \infty$ (для всех $\pm\psi \in [0, \pi/2]$ при $\nu = |\nu| \exp(i\psi)$), т.е. на контуре C_ψ^b . Деформируем контур интегрирования в (6.2) и (6.3), а именно, $C_0^b \rightarrow C_\psi^b \rightarrow C_{\pi/2}^b = (-i\infty, i\infty)$. В итоге

имеем

$$F_1(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2i} \int_{C_{\pi/2}^b} \sin(\alpha\nu) \frac{\sin(\nu\varphi)}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) d\nu, \quad (6.4)$$

$$F_2(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2i} \int_{C_{\pi/2}^b} \sin(\alpha\nu) \frac{\sin(\nu\bar{\varphi})}{\sin(\nu\bar{\Phi})} H_2(\nu) d\nu, \quad (6.5)$$

где интегрирование в (6.4) и (6.5) проводится вдоль мнимой оси, а экспонента заменена на синус ввиду нечетности подынтегрального выражения. В силу оценок для $H_{1,2}$ мы заключаем, что $F_1(\cdot, \varphi)$, $F_2(\cdot, \varphi)$ голоморфны в полосах $\Pi_{\pi/2+[\Phi-\varphi]}$ и $\Pi_{\pi/2+[\bar{\Phi}-\bar{\varphi}]}$ соответственно. Они продолжаются мероморфно на комплексную плоскость, что обсуждается ниже. Перепишем соотношения (6.4) и (6.5)

$$F_1(\alpha, \varphi) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(\nu[\alpha - \varphi]) - \cos(\nu[\alpha + \varphi])}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) d\nu = f_1(\alpha + \varphi) - f_1(\alpha - \varphi), \quad (6.6)$$

$$F_2(\alpha, \varphi) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(\nu[\alpha - \varphi]) - \cos(\nu[\alpha + \varphi])}{\sin(\nu\bar{\Phi})} H_2(\nu) d\nu = f_2(\alpha + \bar{\varphi}) - f_2(\alpha - \bar{\varphi}), \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(\nu\alpha)}{\sin(\nu\Phi)} H_1(\nu) d\nu, & \alpha \in \Pi_{\pi/2+\Phi} \\ f_2(\alpha) &= \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos(\nu\alpha)}{\sin(\nu\bar{\Phi})} H_2(\nu) d\nu, & \alpha \in \Pi_{\pi/2+\bar{\Phi}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В результате из представлений (6.1) и (6.6)–(6.8) интегральные представления Зоммерфельда принимают вид

$$\begin{aligned} u_1(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) [f_1(\alpha + \varphi) - f_1(\alpha - \varphi)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) 2f_1(\alpha + \varphi), & \varphi \in [0, \Phi], \\ u_2(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) [f_2(\alpha + \bar{\varphi}) - f_2(\alpha - \bar{\varphi})] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} d\alpha \exp(\kappa r \cos \alpha) 2f_2(\alpha + \bar{\varphi}), & \varphi \in [\Phi, \pi], \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $\gamma_0 = \gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ показан на рис. 4, а трансформанты Зоммерфельда f_1 и f_2 четные и голоморфны в полосах $\Pi_{\pi/2+\Phi}$ и $\Pi_{\pi/2+\bar{\Phi}}$ соответственно.

6.1. Мероморфное продолжение f_1 и f_2 и функциональные уравнения Малюжинца. Интегральные представления (6.9) удовлетворяют уравнениям по построению, что также легко проверяется непосредственной подстановкой, так как интегралы быстро (и равномерно по r , φ) сходятся. Краевое

условие Дирихле на границе полуплоскости выполнено. Подстановкой интегралов Зоммерфельда в краевое условие непрерывности на l оно трансформируется в функциональное уравнение Малюжинца (см. [11; п. 3.4], теорема Малюжинца)

$$f_1(\alpha + \Phi) - f_1(\alpha - \Phi) = f_2(\alpha + \bar{\Phi}) - f_2(\alpha - \bar{\Phi}). \quad (6.10)$$

Подставим представления Зоммерфельда в краевое условие типа Робена (1.4)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\Phi} - \frac{\gamma}{\kappa} u_1(r, \Phi) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta \frac{\exp(\kappa r \cos \zeta)}{\kappa r} 2 \left(-\sin \alpha [f_1(\zeta + \Phi) + f_2(\zeta - \Phi)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\gamma_1}{2\kappa} [f_1(\zeta - \Phi) + f_2(\zeta - \bar{\Phi})] \right) = 0, \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям. Положим $\Lambda := \gamma_1/(2\kappa) = \sin \vartheta_\tau$, $\vartheta_\tau = \pi/2 + i\tau$. По теореме об обращении интеграла Зоммерфельда (см. [11; п. 3.4]) имеем

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha - \sin \vartheta_\tau) f_1(\alpha + \Phi) + (\sin \alpha - \sin \vartheta_\tau) f_2(\alpha + \bar{\Phi}) \\ &= (\sin \alpha + \sin \vartheta_\tau) f_1(-\alpha + \Phi) - (\sin \alpha + \sin \vartheta_\tau) f_2(-\alpha + \bar{\Phi}), \end{aligned} \quad (6.11)$$

где мы использовали четность $f_{1,2}$. Перепишем уравнения Малюжинца (6.10), (6.11) в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} f_1(\alpha + \Phi) \\ f_2(\alpha + \bar{\Phi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin \vartheta_\tau}{\sin \alpha - \sin \vartheta_\tau} & \frac{-\sin \vartheta_\tau}{\sin \alpha - \sin \vartheta_\tau} \\ \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha - \sin \vartheta_\tau} & \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha - \sin \vartheta_\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(-\alpha + \Phi) \\ f_2(-\alpha + \bar{\Phi}) \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Четные функции $f_{1,2}$ голоморфны в полосах $\Pi_{\pi/2+\Phi}$ и $\Pi_{\pi/2+\bar{\Phi}}$ соответственно, они продолжаются как мероморфные функции в правую полуплоскость (а по четности и в левую) с помощью функциональных уравнений Малюжинца (6.12). Действительно, если аргументы $f_{1,2}$ в правой части уравнений (6.12) меняются в полосе голоморфности, в левой части аргумент меняется в сдвинутой направо полосе. Например, для первого уравнения

$$f_1(\alpha + 2\Phi) = \frac{-\sin \vartheta_\tau}{\sin(\alpha + \Phi) - \sin \vartheta_\tau} (f_1(-\alpha) + f_2(-\alpha + \bar{\Phi} - \Phi)),$$

если справа в аргументе $f_1(-\alpha)$ считаем $-\alpha \in \Pi_{\pi/2+\Phi}$, а тогда аргумент f_2 принадлежит полосе $-(\pi/2 + \bar{\Phi}) < \operatorname{Re}[\alpha - \bar{\Phi} + \Phi] < \pi/2 + \bar{\Phi}$ (или $-(\pi/2 + \Phi) < \operatorname{Re} \alpha < \pi/2 + 2\bar{\Phi} - \Phi$). При этом аргумент $f_1(\zeta)$, где $\zeta = \alpha + 2\Phi$, изменяется в полосе $-\pi/2 + \Phi < \operatorname{Re} \zeta < \pi/2 + 3\Phi$. Тем самым мы получаем мероморфное продолжение $f_1(\cdot)$ в полосу $-\pi/2 + \Phi < \operatorname{Re} \zeta < \pi/2 + 3\Phi$. Аналогично дело обстоит со вторым уравнением и с продолжением f_2 вправо от полосы голоморфности $\Pi_{\pi/2+\bar{\Phi}}$. Анализируя особенности множителя в правой части, находим, что $f_1(\cdot)$ имеет ближайший к мнимой оси полюс при $\alpha = \Phi + \vartheta_\tau$,

$\vartheta_\tau = \pi/2 + i\tau$, на границе полосы голоморфности и, кроме того, в окрестности полюса

$$f_1(\alpha) = \frac{A_1}{\alpha - [\Phi + \pi/2 + i\tau]} + \dots$$

Из второго уравнения (6.12) имеем

$$f_2(\alpha) = \frac{A_2}{\alpha - [\bar{\Phi} + \pi/2 + i\tau]} + \dots$$

в окрестности ближайшего к мнимой оси полюса $\alpha = \bar{\Phi} + \vartheta_\tau$. Так как сдвиги в уравнениях Малюжинца параллельны вещественной оси, полюсы мероморфных функций, следующие по удаленности от мнимой оси полюсы, расположены справа от полос голоморфности на линии $\text{Im } \alpha = \tau$, а с учетом четности слева от полосы голоморфности полюсы расположены симметрично относительно начала координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из интегральных выражений (6.8) для $f_{1,2}$ следует, что в полосах голоморфности

$$f_{1,2}(\alpha) \rightarrow C_{1,2}, \quad \text{Im } \alpha \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

Отметим также, что $u_{1,2}(0, \varphi) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для о.с. функции $u = u_j$ в Ω_j , $j = 1, 2$, существенного спектра $E = -\gamma^2/(4\Lambda) \in [-\gamma^2/4, 0)$ оператора A_s справедливо интегральное представление Зоммерфельда (6.9), где трансформанты Зоммерфельда $f_{1,2}$ – мероморфные четные функции, голоморфные в полосах $\Pi_{\pi/2+\Phi}$ и $\Pi_{\pi/2+\bar{\Phi}}$ соответственно. Они связаны преобразованием (6.8) с о.с.ф. $H_{1,2} \in \mathcal{M}$ существенного характеристического множества ΦR ($\Lambda \geq 1$) уравнения (2.5).

6.2. Асимптотика собственных функций и физическая интерпретация. Обратимся к вычислению асимптотики (при $r \rightarrow \infty$) о.с.ф. u , задаваемой интегралом Зоммерфельда (6.9). В отличие от интегрального представления ВБ, интегралы Зоммерфельда хорошо приспособлены к вычислению асимптотики по расстоянию. Действительно, применим метод перевала к интегралам (6.9). В показателе экспоненты $\cos \alpha$ имеет стационарные точки $\pm\pi$ – корни уравнения $\sin \alpha = 0$. Для асимптотической оценки интеграла продеформируем контуры интегрирования $\gamma_0 = \gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ в перевальные $\gamma_0^\pi \cup \gamma_0^{-\pi}$, рис. 4. Перевальные контуры проходят соответственно через точки $\pm\pi$ параллельно мнимой оси. В процессе такой деформации пересекаются полюсы подынтегрального выражения, в частности для f_1 полюсы $\alpha + \varphi = \pm[\Phi + \pi/2 + i\tau]$, $\tau > 0$, ближайšie к мнимой оси, дают основной вклад. Отметим, что с изменением $\varphi \in [0, \Phi]$ эти полюсы мигрируют. При $\varphi = \Phi$ полюс $\alpha = \pi/2 + i\tau$ оказывается ближе всего к мнимой оси и дает главный вклад в асимптотику, тогда как вклад остальных полюсов имеет меньший порядок и тем более вклад

точек перевала $I_{\pm\pi} = O(e^{-\kappa r}/\sqrt{\kappa r})$. Получаем

$$\begin{aligned}
 u_1(r, \varphi) &= 2A_1 \exp\left(\kappa r \cos\left[\Phi - \varphi + \frac{\pi}{2} + i\tau\right]\right) \\
 &+ \sum_{|\operatorname{Re} \alpha_p^1| < \pi} \exp(\kappa r \cos[\alpha_p^1 - \varphi]) 2 \operatorname{res}_{\alpha_p^1} f_1(\alpha + \varphi) + O\left(\frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{\kappa r}}\right), \quad \varphi \in [0, \Phi], \\
 u_2(r, \varphi) &= 2A_2 \exp\left(\kappa r \cos\left[\bar{\Phi} - \bar{\varphi} + \frac{\pi}{2} + i\tau\right]\right) \\
 &+ \sum_{|\operatorname{Re} \alpha_p^2| < \pi} \exp(\kappa r \cos[\alpha_p^2 - \bar{\varphi}]) 2 \operatorname{res}_{\alpha_p^2} f_2(\alpha + \bar{\varphi}) + O\left(\frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{\kappa r}}\right), \quad \varphi \in [\Phi, \pi],
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

где вклад полюсов, следующих за старшими (т.е. дающими основной вклад) представлен в виде сумм по вычетам в полюсах, которые, наряду со старшими, захвачены при деформации контуров в перевальные.

Простой анализ старших членов асимптотики (6.14) показывает, что выражение ($\tau > 0$)

$$\begin{aligned}
 u_1 \sim u_1^{\text{out}} &:= 2A_1 \exp\left(\kappa r \cos\left[\Phi - \varphi + \frac{\pi}{2} + i\tau\right]\right) \\
 &= 2A_1 \exp(-\kappa r \{\sin[\Phi - \varphi] \operatorname{ch}(\tau) - i \cos[\Phi - \varphi] \operatorname{sh} \tau\})
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

ограничено на l , т.е. на носителе потенциала, и экспоненциально убывает в остальных направлениях в Ω_1 при $\kappa r \rightarrow \infty$. Аналогично асимптотическое поведение u_2 в Ω_2 ,

$$\begin{aligned}
 u_2 \sim u_2^{\text{out}} &:= 2A_2 \exp\left(\kappa r \cos\left[\bar{\Phi} - \bar{\varphi} + \frac{\pi}{2} + i\tau\right]\right) \\
 &= 2A_2 \exp(-\kappa r \{\sin[\bar{\Phi} - \bar{\varphi}] \operatorname{ch}(\tau) - i \cos[\bar{\Phi} - \bar{\varphi}] \operatorname{sh} \tau\}).
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Выражения (6.15), (6.16) в теории дифракции интерпретируются как поверхностная волна, бегущая от начала координат вдоль луча l на бесконечность, ограниченная на l и экспоненциально убывающая при $\kappa r \rightarrow \infty$ в остальных направлениях, см. подробности в [11; п 6.4.1]. Тем самым при $\tau > 0$ построенная обобщенная собственная функция u интерпретируется как уходящая на бесконечность поверхностная волна u^{out} .

До сих пор мы рассматривали случай $\tau > 0$. Случай $\tau < 0$ исследуется совершенно аналогично, $\Lambda = \sin \vartheta_\tau = \sin(\pi/2 + i\tau) \geq 1$. Выражения (6.14) для о.с.ф. сохраняют вид и в этом случае. Однако асимптотическая и тем самым физическая интерпретация о.с.ф. меняются. При $\tau < 0$ построенная обобщенная собственная функция u интерпретируется как приходящая из бесконечности поверхностная волна u^{in} . Таким образом, существуют два типа о.с.ф., соответствующих уходящим ($\tau > 0$) и приходящим ($\tau < 0$) поверхностным волнам, экспоненциально локализованным в окрестности носителя l сингулярного потенциала.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для почти всех $E \in [-\gamma^2/4, 0)$ существуют обобщенные собственные функции $u = u_j$ в Ω_j , $j = 1, 2$, двух типов, соответствующих уходящим ($\tau > 0$, $u \sim u^{\text{out}}$) и приходящим ($\tau < 0$, $u \sim u^{\text{in}}$) поверхностным волнам. О.с.ф. имеют интегральное представление Зоммерфельда (6.9) и отвечают существенному спектру оператора A_s , для них справедливо асимптотическое представление (6.14).

В работе [17] изучается задача рассеяния поверхностной волны, бегущей из бесконечности вдоль стороны бесконечного многоугольника с условиями типа Робена на границе. Основным результатом в [17] является вычисление асимптотики рассеянных волн. Аналогичная постановка задачи рассеяния и результаты могут быть получены и для рассматриваемой нами обобщенной задачи Йоста, рис. 1. Ответы могут быть получены в терминах “уходящих и приходящих” собственных функций, построенных выше.

§ 7. Приложение. Асимптотика $a(x, y; \mu)$ при $(x, y) \rightarrow 0$

Воспользуемся выражением (4.6) ядра резольвенты и представлением для функций Лежандра [14; 8.772(1)]

$$P_{ip-1/2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Gamma(ip)}{\sqrt{\pi} \Gamma(ip+1/2)} \left[\frac{x}{2}\right]^{-ip+1/2} F\left(\frac{3/2-ip}{2}, \frac{1/2-ip}{2}, 1-ip; x^2\right) + \frac{\Gamma(-ip)}{\sqrt{\pi} \Gamma(-ip+1/2)} \left[\frac{x}{2}\right]^{ip+1/2} F\left(\frac{3/2+ip}{2}, \frac{1/2+ip}{2}, 1+ip; x^2\right),$$

где $0 < x < 1$, $p \geq 0$, F – гипергеометрическая функция,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 1.$$

Для дальнейших преобразований и вычисления асимптотики удобно ввести обозначения

$$P(x, p) := \frac{\Gamma(ip)}{\sqrt{\pi} \Gamma(ip+1/2)} \left[\frac{x}{2}\right]^{-ip+1/2}, \\ D(x, p) := F\left(\frac{3/2-ip}{2}, \frac{1/2-ip}{2}, 1-ip; x^2\right),$$

заметив, что $D(x, p) = 1 + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$. Воспользуемся этими обозначениями и запишем $a(x, y; \mu)$ в виде

$$a(x, y; \mu) = \frac{1}{2xy} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\pi p \operatorname{th}(\pi p)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \{ (P(x, -p) + P(x, p))(P(y, p) + P(y, -p)) + (P(x, -p) + P(x, p))(P(y, p)[D(y, p) - 1] + P(y, -p)[D(y, -p) - 1]) + (P(y, -p) + P(y, p))(P(x, p)[D(x, p) - 1] + P(x, -p)[D(x, -p) - 1]) \}. \quad (7.1)$$

В первой строке (7.1) раскроем скобки и сделаем замену $-p \rightarrow p$ в интеграле, содержащем $P(x, -p)P(y, p)$, получим в сумме интеграл, содержащий

$2P(x, p)P(y, -p)$. Аналогично поступим для произведения $P(x, -p)P(y, -p)$, приходим к выражению¹¹

$$\begin{aligned} a(x, y; \mu) &= \frac{1}{2xy} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\pi p \operatorname{th}(\pi p)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \{ 2P(x, p)P(y, -p) + 2P(x, p)P(y, p) \\ &\quad + (P(x, -p) + P(x, p))(P(y, p)[D(y, p) - 1] + P(y, -p)[D(y, -p) - 1]) \\ &\quad + (P(y, -p) + P(y, p))(P(x, p)[D(x, p) - 1] + P(x, -p)[D(x, -p) - 1]) \}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Две последние строки в (7.2) содержат множители в квадратных скобках $[D(x, \pm p) - 1] = O(x^2)$, $[D(y, \pm p) - 1] = O(y^2)$, так что естественно ожидать после интегрирования их малость по сравнению с интегралом в первой строке. Введем обозначения

$$\begin{aligned} R_+(x, y; \mu) &:= \frac{1}{2xy} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\pi p \operatorname{th}(\pi p)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} P(x, p)P(y, -p) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{xy}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p \operatorname{th}(\pi p)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \frac{\Gamma(ip)\Gamma(-ip)}{\Gamma(ip + 1/2)\Gamma(-ip + 1/2)} \exp\left(-ip \ln \frac{x}{y}\right), \\ R_-(x, y; \mu) &:= \frac{1}{2xy} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\pi p \operatorname{th}(\pi p)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} P(x, p)P(y, p) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{xy}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p \operatorname{th}(\pi p)}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \frac{\Gamma^2(ip)}{\Gamma^2(ip + 1/2)} \exp\left(-ip \ln \frac{xy}{4}\right) \end{aligned}$$

и, наконец, определим $R(x, y; \mu)$ в соответствии с равенством, следующим из (7.2),

$$a(x, y; \mu) = 2R_+(x, y; \mu) + 2R_-(x, y; \mu) + R(x, y; \mu).$$

Обратимся к асимптотической оценке $R_+(x, y; \mu)$. Для этого, упростим подынтегральное выражение, воспользовавшись соотношениями

$$\Gamma(ip)\Gamma(-ip) = \frac{\pi}{p \operatorname{sh} \pi p}, \quad \Gamma\left(ip + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-ip + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi p}.$$

Используя четность подынтегрального выражения, получим

$$R_+(x, y; \mu) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \int_0^{\infty} dp \frac{\cos(p \ln(x/y))}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1}.$$

Замечательно, что интеграл в правой части может быть вычислен явно, если воспользоваться формулой 3.983(1) из [14] и аналитическим продолжением по параметрам, считая $\mu > 1$ и $x/y > 0$,

$$\begin{aligned} R_+(x, y; \mu) &= \frac{1}{2\sqrt{xy}} \frac{\operatorname{sh}(\pi^{-1} \arccos(\mu^{-1}) \ln(x/y))}{\sqrt{\mu^2 - 1} \operatorname{sh} \ln(x/y)} \\ &= \frac{1}{(x+y)} \frac{\operatorname{sh}(\pi^{-1} \arccos(\mu^{-1}) \ln(x/y))}{2\sqrt{\mu^2 - 1} \operatorname{sh}(\ln(x/y)/2)}. \end{aligned}$$

¹¹Похожие преобразования и оценки имеются в [9; приложение L].

Мы фиксируем ветви многозначных функций следующим образом. Для $\arccos(\cdot)$ разрез проводим вдоль $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ и считаем $\arccos(z)$ положительным, если $z \in (0, 1)$. Заметим, что продолжение для значений аргумента $z = 1/\mu > 1$, а также для значений $\mu \in \omega_+ \cup Q_+$ (т.е. в прямоугольнике), находится однозначно. Аналогично определим ветвь $\sqrt{\mu^2 - 1}$, разрез проводится вдоль отрезка $[-1, 1]$, полагая $\sqrt{\mu^2 - 1} > 0$ при $\mu > 1$. Заметим, что при $\mu \rightarrow 1$ существует предел $R_+(x, y; 1)$ (см. также [5; п. 4.1]). Кроме того, $R_+(x, y; \mu)$ непрерывно зависит от $\mu \in \omega_+ \cup Q_+$.

Оценим $R_-(x, y; \mu)$. Используем выражение ($\mu \in \omega_+$)

$$R_-(x, y; \mu) := \frac{1}{4\sqrt{xy}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip + 1/2)} \frac{\Gamma(-ip + 1/2)}{\Gamma(-ip)} \exp\left(-ip \ln \frac{xy}{4}\right).$$

Используем очевидное наблюдение $\operatorname{Re}(ip \ln(xy/4)) > 0$ при $\operatorname{Im} p > 0$ и деформируем контур интегрирования вдоль \mathbb{R} в контур $\mathbb{R} + ih$, $h > 0$. При этом пересекаются полюсы подынтегрального выражения в нулях $\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1$ и полюсы $\Gamma(ip)\Gamma(-ip + 1/2)$. Если $\operatorname{Im}(\frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \mu^{-1}) < h < 1$, то по теореме о вычетах старший вклад дается полюсом

$$p(\mu) := \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1 - i\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu}\right),$$

где ветвь описана ранее. Остальные корни уравнения $\operatorname{ch}(\pi p) - 1/\mu = 0$ в верхней полуплоскости имеют вид $p(\mu) + 2im$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Получаем

$$R_-(x, y; \mu) := O([xy]^{\delta_*(\mu) - 1/2}),$$

где $\delta_*(\mu) := \operatorname{Im} p(\mu) > 0$, $\mu \in \omega_+$. Однако, если $\mu \in Q_+$, т.е. положительно, уравнение имеет два корня $\pm p(\mu)$, лежащих на вещественной оси. При этом контур интегрирования деформируется в \mathcal{L} , который в выражении для R_- обходит полюсы $p(\mu)$ снизу, а $-p(\mu)$ — сверху,

$$R_-(x, y; \mu) := \frac{1}{4\sqrt{xy}} \int_{\mathcal{L}_\mu} \frac{dp}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip + 1/2)} \frac{\Gamma(-ip + 1/2)}{\Gamma(-ip)} \exp\left(-ip \ln \frac{xy}{4}\right).$$

Интегрированием по частям в последнем интеграле приходим к оценке

$$R_-(x, y; \mu) = \frac{(-1)^m}{4\sqrt{xy}} \frac{1}{(-i \ln(xy/4))^m} \times \int_{\mathcal{L}_\mu} dp \exp\left(-ip \ln \frac{xy}{4}\right) \frac{d^m}{dp^m} \left\{ \frac{1}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip + 1/2)} \frac{\Gamma(-ip + 1/2)}{\Gamma(-ip)} \right\}.$$

при любом $m = 1, 2, \dots$, $\mu \in Q_+$. Наконец, $R(x, y; \mu)$ оценивается величинами $x^2 R_-(x, y; \mu)$ или $y^2 R_-(x, y; \mu)$ при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ и $\mu \in \omega_+ \cup Q_+$.

ЛЕММА 7. *Справедлива асимптотика*

$$a(x, y; \mu) = \frac{1}{(x + y)} \frac{\operatorname{sh}(\pi^{-1} \arccos(\mu^{-1}) \ln(xy))}{\sqrt{\mu^2 - 1} \operatorname{sh}(\ln(xy)/2)} + \tilde{R}_-(x, y; \mu),$$

где

$$\tilde{R}_-(x, y; \mu) = B_\mu(x, y) O\left(\frac{|\ln^{-m}(xy)|}{\sqrt{xy}}\right), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

$m = 1, 2, \dots$ любое,

$$B_\mu(x, y) = \int_{\mathcal{L}_\mu} dp \exp\left(-ip \ln \frac{xy}{4}\right) \frac{d^m}{dp^m} \left\{ \frac{1}{\mu \operatorname{ch}(\pi p) - 1} \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip + 1/2)} \frac{\Gamma(-ip + 1/2)}{\Gamma(-ip)} \right\}$$

ограничена по (x, y) , оценка равномерна по параметру μ , принадлежащему произвольному компактному в $\omega_+ \cup Q_+$.

Список литературы

- [1] R. Jost, “Mathematical analysis of a simple model for the stripping reaction”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **6** (1955), 316–326.
- [2] S. Albeverio, “Analytische Lösung eines idealisierten Stripping- oder Beugungsproblems”, *Helv. Phys. Acta*, **40** (1967), 135–184.
- [3] М. А. Лялинов, “Functional difference equations and eigenfunctions of a Schrödinger operator with δ' -interaction on a circular conical surface”, *Proc. A*, **476**:2241 (2020), 20200179, 23 pp.
- [4] М. А. Лялинов, “Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations”, *European J. Appl. Math.*, **33**:3 (2022), 538–559.
- [5] М. А. Лялинов, “Functional-difference equations and their link with perturbations of the Mehler operator”, *Russ. J. Math. Phys.*, **29**:3 (2022), 378–396.
- [6] M. Gaudin, B. Derrida, “Solution exacte d’un problème modèle à trois corps. Etat lié”, *J. Physique*, **36**:12 (1975), 1183–1197.
- [7] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Yu. Volkov, “Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I. Algebraic approach and duality”, *Comm. Math. Phys.*, **219**:1 (2001), 199–219.
- [8] A. Fedotov, F. Sandomirskiy, “An exact renormalization formula for the Maryland model”, *Comm. Math. Phys.*, **334**:2 (2015), 1083–1099.
- [9] J. M. L. Bernard, *Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d’ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d’impédance constante*, Rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay, 1997; *Advanced theory of diffraction by a semi-infinite impedance cone*, Alpha Science Ser. Wave Phenom., Alpha Science, Oxford, 2014, 170 pp.
- [10] М. А. Лялинов, Ning Yan Zhu, “Acoustic scattering by a circular semi-transparent conical surface”, *J. Engng. Math.*, **59**:4 (2007), 385–398.
- [11] В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда–Малюжинца в теории дифракции*, СПбГУ, СПб., 2003, 104 с.; англ. пер.: V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Griukurov, *Diffraction theory. The Sommerfeld–Malyuzhinets technique*, Alpha Science Ser. Wave Phenom., Alpha Science, Oxford, 2008, 224 pp.
- [12] J. B. Lawrie, A. C. King, “Exact solution to a class of functional difference equations with application to a moving contact line flow”, *European J. Appl. Math.*, **5**:2 (1994), 141–157.
- [13] J. Behrndt, P. Exner, V. Lotoreichik, “Schrödinger operators with δ - and δ' -interactions on Lipschitz surfaces and chromatic numbers of associated partitions”, *Rev. Math. Phys.*, **26**:8 (2014), 1450015, 43 pp.

- [14] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 4-е изд., Физматгиз, М., 1963, 1100 с.; англ. пер.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 4th ed., corr. and enl., Academic Press, New York–London–Toronto, 1980, xv+1160 pp.
- [15] F. G. Mehler, “Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsvertheilung”, *Math. Ann.*, **18**:2 (1881), 161–194.
- [16] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния. Общая теория*, Изд-во С.-Петербургского ун-та, СПб., 1994, 423 с.; англ. пер.: D. R. Yafaev, *Mathematical scattering theory. General theory*, Transl. Math. Monogr., **105**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+341 pp.
- [17] M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, “Scattering of a surface wave in a polygonal domain with impedance boundary”, *Алгебра и анализ*, **33**:2 (2021), 98–135; *St. Petersburg Math. J.*, **33**:2 (2022), 255–282.

Михаил Анатольевич Лялинов
(Mikhail A. Lyalinov)

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: lyalinov@yandex.ru, m.lyalinov@spbu.ru

Поступила в редакцию
25.11.2022