Алгебра и анализ
Том 35 (2023), №5

# РАЗЛИЧНЫЕ МЕТРИКИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИДЕАЛАХ АЛГЕБРЫ $H^\infty$

© С. В. КИСЛЯКОВ, А. А. СКВОРЦОВ

Начиная с 1970-х годов, заметное внимание уделялось оценкам решений уравнений, возникающих в теореме о короне и в примыкающей к ней так называемой задаче об идеалах. Естественно вставал и вопрос о метриках, в которых такие оценки следует искать. В случае теоремы о короне ответ на последний вопрос известен: практически всегда можно перейти от оценок в какой-нибудь разумной метреке к оценкам в любой другой. В этой статье нечто подобное доказывается для задачи об идеалах. Отметим, что в случае задачи об идеалах сами по себе формулировки с различными метриками бывают не очевидны.

Статья завершается несколькими приложениями к операторным задачам о короне и об идеалах.

В доказательствах основных результатов существенно используются теоремы о неподвижной точке.

## §1. Введение

**1.1. Формулировки.** Теорема Карлесона о короне утверждает, что если $f_1, \dots, f_n$ — ограниченные аналитические функции в круге $\mathbb{D}$, то для существования ограниченных в круге аналитических функций $g_1, \dots, g_n$, таких что

$$\sum_i g_i f_i = 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sum_i |f_i(z)|^2 \geqslant \delta^2 > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1}$$

Ограниченные аналитические функции составляют класс Харди $H^\infty$, являющийся алгеброй. Таким образом, теорема о короне описывает ситуацию, когда идеал этой алгебры, порожденный функциями $f_1, \dots, f_n$ —

*Ключевые слова:* теорема Карлесона о короне, классы Харди, теорема о неподвижной точке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 23-11-00171, https://rscf.ru/project/23-11-00171/.

несобственный. Задача об идеалах алгебры $H^\infty$ первоначально формулировалась так: без априорных ограничений на функции $f_1, \dots, f_n$, описать идеал $I$ в $H^\infty$, порождённый ими (разумеется, это интересно лишь если приведённое выше условие отделённости от нуля нарушено). Точное описание идеала $I$ недоступно и сейчас, известны лишь достаточные условия принадлежности ему заданной функции $g \in H^\infty$.

Аналогичная задача часто рассматривается в более общей ситуации, когда, формально говоря, термин "идеал" может и не быть применим (однако название "задача об идеалах" всё равно используется). Чтобы описать её постановку, кроме пространства $H^\infty$ нам будут нужны и другие классы Харди — разумеется, все пространства $H^p$, но также и более общие пространства $X_A$, построенные по всевозможным (квази)банаховым решеткам измеримых функций (идеальным пространствам, пространствам Кёте) на окружности. Формальное определение: $X_A$ состоит из аналитических функций в круге, лежащих в классе В. И. Смирнова и таких, что их граничные значения лежат в $X$. Еще более общим образом, нам потребуются классы векторно-значных функций $X_A(\mathbb{D}, G^*)$, где $G$ — банахово пространство. Почему рассматриваются функции со значениями в сопряжённых пространствах, станет ясно позднее.

Точное определение пространства $X_A(\mathbb{D}, G^*)$ в общем случае (когда пространство $G$ нерефлексивно или даже просто бесконечномерно) требует некоторого обсуждения, за которым мы отсылаем читателя к статье [4] и имеющимся там ссылкам. Несколько позже мы ради полноты скажем об определении чуть подробнее, а пока не будем вдаваться в детали. Стоит только отметить, что на решетку $X$ обычно накладывают некие (необременительные) условия, которые мы тоже сформулируем позже. Для таких решеток (пространств Кёте на окружности) мы будем использовать в этой статье рабочий термин "правильные".

Опишем теперь одно обобщение упомянутой выше задачи. Пусть $G_1$ и $G_2$ — банаховы пространства. Данными общей задачи об идеалах будем считать фиксированную функцию $F \in H^\infty(\mathrm{Lin}_w(G_1^*, G_2^*))$, т.е. ограниченную в круге $\mathbb{D}$ аналитическую функцию со значениями в пространстве $w^*$-непрерывных линейных операторов из $G_1^*$ в $G_2^*$. Задачу об идеалах можно ставить как задачу об описании образа $F(\,\cdot\,)X_A(G_1^*)$ или хотя бы в отыскании достаточных условий для принадлежности функций из $X_A(G_2^*)$ этому образу.

Разумеется, при таком взгляде на вещи общей задачей о короне стоит называть задачу о том, справедливо ли равенство $X_A(G_2^*) = F(\,\cdot\,)X_A(G_1^*)$. Если это равенство справедливо, говорим, что соответсвуюшая задача о короне разрешима.

В классической ситуации, описанной в начале статьи, $G_1$ — это $n$-мерное комплексное евклидово пространство, $G_2 = \mathbb{C}$, а при каждом $z$ оператор $F(z)$ действует из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$ по формуле $\{\xi_j\}_{1\leqslant j\leqslant n} \mapsto \sum_j \xi_j f_j(z)$. С начала 1970-х годов известно (см., например, [9]), что задача о короне разрешима даже для бесконечной последовательности функций $\{f_j\}$, точнее, для $G_1 = l^2$, $G_2 = \mathbb{C}$, если выполнено условие (1).

Зафиксируем пространства $G_1$ и $G_2$ (для упрощения формулировок предположим сейчас, что они сепарабельны). В статье [4] было показано, что разрешимость задачи о короне не зависит от выбора правильного пространства Кёте $X$. Более того, если при каком-то $X$ уравнение $f = Fg$ всегда допускает решение $g$ с оценкой

$$\|g\|_{X_A(G_2^*)} \leqslant C\|f\|_{X_A(G_1^*)},$$

какова бы ни была функция $f \in X_A(G_2^*)$, то при всех прочих $X$ соответствующее уравнение разрешимо с той же постоянной $C$ в оценке.

Разумеется, при любых данных $F$ самой интересной является задача о короне при $X = L^\infty$. В цитированном результате нетривиален как раз переход от $X$ к $L^\infty$. Практический его смысл состоит в том, что доказывать разрешимость задачи о короне при других $X$ (например, при $X = L^2$) может оказаться технически более простым делом. См., например, [13] (в той статье переход от $L^2$ к $L^\infty$ был совершен иначе, чем в [4]).

В случае задачи об идеалах мы хотим сформулировать нечто, аналогичное приведённому утверждению о независимости оценок в задаче о короне от пространства $X$. Однако теперь, как уже говорилось, описание образа $F(\cdot)X_A$ недоступно. По этой причине сам способ сформулировать искомый аналог не вполне очевиден. В нашей статье [5] мы решили опереться на то обстоятельство, что по самой идеологии задачи об иделах упомянутый образ должен выдерживать умножение на достаточно многие скалярные функции. В качестве аналога утверждения из работы [4], сформулированного выше, предлагается теорема, показывающая, что и здесь в каком-то смысле мало что зависит от $X$ (частный случай этой теоремы был приведён в [5]).

Пусть $X$ — правильное банахово пространство Кёте и пусть $F$ — фиксированная функция из пространства $H^\infty(\mathrm{Lin}_w(G_1^*, G_2^*))$ (по-прежнему говорим о ней, как о “данных” задачи об идеалах). Далее, пусть $h \in H^\infty(G_2^*)$ — фиксированная векторно-значная функция. Рассмотрим следующее условие.

($S_X$) Для любой скалярной функции $h \in X_A(\mathbb{T})$ найдется такая функция $g \in X_A(G_1^*)$, что $f(z)h(z) = F(z)g(z)$. Условие $S_p$ есть $S_{L^p}$ по определению. Разумеется, условие $S_X$ по теореме об открытом отображении влечет существование функции $g$ как выше и такой, что $\|g\|_{X_A(G_1^*)} \leqslant C\|f\|_{X_A}$ для некой константы $C$, не зависящей от функции $h$.

**Теорема 1.** a) *Условие $S_\infty$ влечет условие $S_X$ с той же константой.*

b) *Условие $S_X$ влечет условие $S_1$ с той же константой.*

c) *Если пространство $G_1$ сепарабельно, то условие $S_1$ влечет условие $S_\infty$ с той же константой.*

Теперь обсудим еще одно утверждение такого же плана, в котором мы откажемся от того, чтобы данные $F$ задачи об идеалах лежали в классе $H^\infty$ (операторно-значных функций). В порядке мотивировки, удобно вспомнить о конкретных положительных результатах.

Картина здесь не столь ясная, как в задаче о короне. Например, в классическом случае, когда данные $F$ берутся из $l^2$ (т.е. снова $G_1 = l^2$, $G_2 = \mathbb{C}$), известно, что условие $|h(z)| \leqslant \|F(z)\|_{l^2}^{2+\varepsilon}$ ($F \in H^\infty(l^2)$ — фиксированная функция) при $\varepsilon > 0$ достаточно для существования представления $h(z) = \langle f(z), g(z)\rangle$ с $g \in H^\infty(l^2)$, но оно уже не достаточно при $\varepsilon = 0$. См. статью [14] и имеющиеся там ссылки по поводу более точных результатов. И. К. Злотников показал, что в качестве $G_1$ вместо $l^2$ можно взять пространство $l^q$ с $1 \leqslant q < \infty$ (более общим образом, $q$-вогнутое идеальное пространство последовательностей; определение термина будет воспроизведено позже). Тогда для представимости функции $h$ из $H^\infty$ в виде $h(z) = \langle f(z), g(z)\rangle$ с $g \in H^\infty(l^p)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|h(z)| \leqslant \|f(z)\|_{l^q}^{\max\{2,q\}+\varepsilon} \leqslant 1$. Вопрос о точности показателя $\max\{2, q\} + \varepsilon$ открыт.

Чтобы двигаться дальше, напомним определение двух операций над решетками измеримых функций. Определение произведения $EF$ двух пространств Кёте $E$ и $F$ ясно из формулы $\|u\|_{EF} = \inf\{\|v\|_E\|w\|_F, u = vw\}$, определение степени решетки $X$ ясно из формулы $\|f\|_{X^\alpha} = \|f^{\frac{1}{\alpha}}\|_X^\alpha$ $(\alpha > 0)$. Вообще говоря, результат этих операций — лишь квазибанаховы решетки, даже и в случае, когда исходные решетки банаховы, например $L^1 \cdot L^1 = L^{1/2}$.

В связи со сказанным, представляется естественным ввести следующее понятие. Пусть $U, V$ — банаховы пространства (будем считать их сепарабельными). Выделим число $\beta > 1$ и рассмотрим различные правильные пространства Кёте $X$ на $\mathbb{T}$. Сформулирем $(X, \beta)$-*задачу об идеалах.* Положим $Y = X^{\beta-1}$, $Z = X^\beta$. Фиксируем функцию $F \in X_A(\mathrm{Lin}_w(U^*, V^*))$ (данные будущей задачи об идеалах), на которую наложим нормирующее условие $\|F\|_{X_A(\mathrm{Lin}_w(U^*,V^*))} \leqslant 1$. Возьмём произвольную функцию $f \in Z_A(V^*)$ и, имитируя ситуацию в приведённых выше положительных результатах, подчиним её условию $\|f(z)\| \leqslant \|F(z)\|^\beta_{\mathrm{Lin}_w(U^*,V^*)}$, $z \in \mathbb{D}$. Задача состоит в поиске такой функции $g \in Y_A(U^*)$, что $\|g\|_{Y_A(U^*)} \leqslant C$ и $F(z)g(z) = f(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Термин "$(p, \beta)$-задача об идеалах" обозначает $(L^p, \beta)$-задачу об идеалах по определению, при этом примеры разрешимости $(\infty, \beta)$-задачи об идеалах как раз и были приведены выше.

Следующая теорема утверждает, что и здесь разрешимость не зависит от пространства Кёте $X$.

**Теорема 2.** *Пусть $X$ — правильное квазибанахово пространство Кёте на окружности.*

a) *Если разрешима $(\infty, \beta)$-задача об идеалах, то разрешима $(X, \beta)$-задача об идеалах с той же константой.*

b) *Если разрешима $(X, \beta)$-задача об идеалах, то разрешима с той же константой $(s, \beta)$-задача об идеалах, при условии что решетка $X^s$ банахова, а $s \geqslant \beta$.*

c) *Если $s \geqslant \beta - 1$ и разрешима $(s, \beta)$-задача об идеалах, то разрешима с той же константой $(\infty, \beta)$-задача об идеалах, если пространства $U$ и $V$ сепарабельны.*

Как и ранее, трудно здесь движение к $(\infty, \beta)$-задаче от других утверждений о разрешимости. Возможная (но пока не подкреплённая примерами) польза теоремы 2 состоит в том, что она позволяет заменить в этих вопросах метрику пространства $L^\infty$ более мягкой метрикой.

**Коммнтарий.** Объединяя пункты a) и c) (и беря $X = L^s$ в первом из них), видим, что разрешимость $(s, \beta)$-задачи об идеалах не зависит от $s$ при $\beta - 1 \leqslant s \leqslant \infty$.

План дальнейшего изложения таков. Далее во введении будет приведена необходимая предварительная информация. Доказательства теорем 1, 2 будут изложены в §2. Заключительный §3 будет посвящен некоторым замечаниям о так называемой "операторной задаче о короне".

**1.2. Определения и обозначения.** Основные результаты о классах Харди $H^p = (L^p)_A$ есть в книге [6], про них же и про класс Смирнова (называемый там классом $D$) можно прочитать в монографии [8]. Ядро Пуассона обозначается буквой $P$, при этом записи вроде $P_r(\theta)$, $P(re^{i\theta})$ $(0 \leqslant r < 1)$ и пр., как обычно, используются без дополнительных пояснений. Как принято в этих вопросах, мы часто говорим об аналитической функции в круге и её граничных значениях как об одном и том же объекте. Если $u$ — неотрицательная функция с суммируемым логарифмом на окружности, то напомним, что соответвующая ей внешняя функция есть

$\exp(\log u + i\mathcal{H}(\log u))$, где $\mathcal{H}$ — оператор гармонического сопряжения. Внешняя функция аналитична в круге (и не имеет там нулей); строго говоря, приведённая формула описывает ее граничные значения.

Пусть $(S, \Sigma, \mu)$ — пространство с мерой. Пространство Кёте — это квазибанахово пространство $X$ измеримых функций на $S$, удовлетворяющее условию $|f| \leqslant |g|, g \in X \Rightarrow f \in X, \|f\|_X \leqslant C\|g\|_X$. В случае, когда пространство $X$ — нормированное, обычно предполагают, что $C = 1$. Если иное не следует их контекста, мы молчаливо предполагаем то же самое даже и в квазинормированном случае. Термин "(квази)банахова решетка измеримых функций" в этой статье означает то же самое, что и "пространство Кёте".

Через $X'$ обозначается пространство, порядково сопряженное с решёткой $X$, т.е. пространство Кёте функционалов из $X^*$, представимых в виде интеграла с измеримой функцией. Операции произведения и возведения в степень для пространств Кёте уже определялись, отметим только, что их результат – снова пространство Кёте.

Про (квази)банаховы решетки и вещи вокруг них можно прочитать в [3], про векторные классы Харди и векторные решеточные пространства аналитических функций написано в обзоре [1] и во вводной части статьи [4]. Здесь мы ограничимся лишь кратким изложением определений и самых базовых сведений. Правильные пространства Кёте $X$ на окружности (для которых выше мы ввели пространство $X_A$) — это пространства Кёте, удовлетворяющие следующим двум условиям.

1) Условие Фату, которое в одной из эквивалентных форм гласит, что $X'' = X$. Еще одна форма определения: единичный шар пространства $X$ замкнут относительно сходимости по мере на множествах конечной меры.

2) Если $f \in X, f \neq 0$, то найдется функция $g \in X, g \geqslant |f|$, такая что $\log(g) \in L^1(\mathbb{T})$ и $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$. В работе [4] есть ссылка на теорему, где доказывается, что постоянную $C$ можно взять произвольно близкой к 1.

Второе условие обеспечивает (через конструкцию внешних функций) нетривиальность пространства $X_A$ и другие его полезные свойства. В сумме эти два условия не очень ограничительны.

Естественные определения классов Харди векторно-значных функций требуют првлечения слабой измеримости, поэтому они не совсем просты. Если $V$ — банахово пространство, то $H^1(\mathbb{D}, V)$ состоит из аналитических в $\mathbb{D}$ $V$-значных функций $F$ с $\|F\|_{H^1(\mathbb{D},V)} = \sup\limits_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \|F(re^{i\phi})\|_V d\phi < \infty$. Можно показать, что если у $V$ есть предсопряженное $U$, то у каждой такой функции $F$ есть граничные значения на окружности в слабом снизу смысле (объяснения и ссылки можно найти в [4]). Иными словами, эти граничные значения представляют собой $V$-значную $U$-измеримую функцию. Пространство граничных значений будем иногда обозначать через $H^1(\mathbb{T}, V)$. Если теперь $X$ — правильное пространство Кёте, а $G$ — банахово пространство, определим класс $X_A(\mathbb{D}, G^*)$ как множество $G^*$-значных аналитических в круге функций $F$ таких, что $YF \in H^1(\mathbb{D}, G^*)$ для каждой скалярной функции $Y \in X'_A$. Норма в этом пространстве вводится так:

$$\|F\|_{X_A(G^*)} = \sup\{\|YF\|_{H^1(G^*)},\, Y \in X'_A,\, \|Y\|_{X'} \leqslant 1\}.$$

При $X = L^p$ получаем классы $H^p$ векторно-значных функций.

Наряду с векторно-значными мы зачастую будет использовать операторно-значные аналитические функции, к которым *мы будем относиться как к специфическим векторно-значным.* По умолчанию далее, если пишем $F \in X_A(\mathrm{Lin}(V^*, U^*))$, то $F(z)$ — $w^*$-непрерывный линейный оператор при каждом $z$. Так как $(E \otimes F)^* = B(E, F^*)$ (под $E \otimes F$ мы понимаем проективное тензорное произведение), то корректно рассматривать граничные значения у таких функций (снова в том же слабом смысле).

Нам иногда будут нужны внешние функции, построенные по норме (вычисленной поточечно) граничных значений векторно- и, тем самым, также и операторно-значных функций. При осмыслении предыдущей фразы неизбежно возникают вопросы об измеримости. Способ их разрешения схематически будет описан ниже, больше подробностей можно найти в [4].

Следуя обзору Бухвалова [1], определим пространство $s\text{-}L^p(\mathbb{T}, G^*)$ как пространство $G$-измеримых функций $f$ на окружности, для которых семейство скалярных функций $\langle x, f\rangle$, $\|x\|_G \leqslant 1$, равномерно ограничено в обычном $L^p$. Супремум этого семейства (не поточечный, а в решетке измеримых функций) мы обозначим через $\alpha(f)$. При этом $\|f\|_{s\text{-}L^p(G^*)} = \|\alpha(f)\|_{L^p}$. В упомянутой выше статье есть ссылки на теорему о том, что $L^p(X)^* = s\text{-}L^q(X^*)$ (при условии $1 \leqslant p < \infty$). Отметим, что если банахово пространство $G$ сепарабельно, то $\alpha(f)$ вычисляется как обычный поточечный супремум некоторого счетного множества измеримых функций, что несколько упрощает дело.

Легко понять, что $H^p(G^*) \subset s\text{-}L^p(G^*)$ (более того, нормы аналитических функций в этих двух пространствах совпадают). Таким образом, функция $\alpha(f)$ определена для всех функций $f \in H^p(G^*)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если теперь $X$ — правильное пространство Кёте, то для $f \in X_A(G^*)$ положим $\alpha(f) = \alpha(fv)|v|^{-1}$, где $v$ — произвольная внешняя функция из $(X')_A$. (Мы пользуемся тем, что по определению $fv \in H^1(G^*)$, так что функция $\alpha(fv)$ уже введена). Можно показать, что так построенная функция $\alpha(f)$ “практически не зависит” от $v$ (в случае сепарабельного пространства $G$ — не зависит без оговорок). См. цитированные источники.

Под “нормой граничных значений, вычисленной поточечно”, мы как раз и будем понимать функцию $\alpha(f)$, и именно по ней мы будем строить внешнюю функцию, связанную с $f$. Заметим, что такая внешняя функция — всегда скалярная.

Наконец, дадим (опять не вдаваясь в детали) определение еще одного понятия, использованного в первом разделе введения. Банахово пространство Кёте $X$ зовется $p$-выпуклым, если пространство $X^p$ тоже банахово. Оно называется $q$-вогнутым, если пространство $X'$ $p$-выпукло, где показатели $p$ и $q$ сопряжены.

**1.3. Немного истории.** Около 1970 г. Т. Вольф нашел новый (и, в сравнении с оригинальным доказательством Карлесона, довольно простой) подход к теореме о короне, он приведен, например, в книге [6]. Как вскоре вслед за этим выяснили (независимо) Учияма, М. Розенблюм и В. А. Толоконников (мы цитируем только работу [9] последнего из названных авторов, поскольку все три доказательства практически идентичны, а на [9] нам придется ссылаться и по другим поводам), этот подход позволяет рассматривать бесконечные последовательности “данных” $f_i$: если $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ есть функция из $H^\infty(l^2)$ и при этом $0 < \delta^2 \leqslant \sum_i |f_i(z)|^2 \leqslant 1$ в круге (оценка единицей сверху — просто нормировачное условие), то найдутся аналитические в круге функции $g_i$, удовлетворяющие условиям $\sum_i |g_i(z)|^2 \leqslant C(\delta)^2$ и такие, что $\sum_i f_i(z) g_i(z) = 1$.

Вопрос об “оценках в разных метриках”, как он был сформулирован в пункте 1.1, в конечном итоге вырос из этого утверждения. Напомним, что там фигурировали банаховы пространства $G_1$ и $G_2$, “данные” $F \in H^\infty(\mathrm{Lin}_w(G_1^*, G_2^*))$ и правильное банахово пространство Кёте $X$ измеримых функций на окружности. Мы уже сообщили, что от $X$ разрешимость общей задачи о короне практически не зависит, см. [4]. Про зависимость от $G_1$ и $G_2$ довольно многое известно (Учияма, Руцкий) в так называемом “скалярном” случае $G_2 = \mathbb{C}$, если $G_1$ — пространство Кёте последовательностей, удовлетворяющее условию Фату. А именно, такая задача разрешима практически всегда, см. [15].

Как уже говорилось, для задачи об идеалах похожие результаты были доказаны в [2].

В этой проблематике неожиданно полезными оказываются теоремы о неподвижных точках многозначных отображений. Так будет и в настоящей работе, причем нам хватит известной теоремы Фан Цзы–Какутани (см. [11]) о существовании неподвижной точки у отображения $\Phi$ выпуклого компакта в локально-выпуклом прстранстве в множество его подмножеств при следующих условиях: образы точек непусты, выпуклы и компактны, а график $\{(x, y)\colon y \in \Phi(x)\}$ замкнут. Напомним, что точка $x$ называется неподвижной, если $x \in \Phi(x)$. Смотри обзорную статью [5] про применения этой теоремы и её обобщений в разных вопросах теории классов Харди. В той статье можно найти и доказательство одного из таких обобщений, а также литературные ссылки.

## §2. Доказательства теорем 1 и 2

Оба доказательства проводятся по одной схеме и в какой-то мере аналогичны доказательству теоремы 1 в статье [4]. Сильно ослабленный вариант теоремы 1 был опубликован в [5]. Там, однако, пространства $G_1$ и $G_2$ предполагались конечномерными для простоты, что позволило исключить из рассуждений некоторые нетривиальные детали. Поэтому здесь мы подробно изложим доказательство теоремы 1 и более конспективно — доказательство теоремы 2.

Нам понадобятся несколько стандартных утверждений, которые использовались и в [4]. Первое — следствие векторной теоремы братьев Риссов, см. подробные ссылки и элементы доказательства в упомянутой работе.

**Факт 1.** *Пусть $G$ — банахово пространство. Тогда $H^1(\mathbb{T}, G^*)$ есть $w^*$-замкнутое подпространство в $M(T, G^*) = C(T, G)^*$. Следовательно, единичный шар этого пространства $w^*$-компактен. Далее, $w^*$-сходимость обобщенных последовательностей в этом шаре эквивалента поточечной $w^*$-сходимости в круге соотвествующих аналитических функций. Если пространство $G$ сепарабельно, то его шар с такой топологией метризуем. При этом $f_n \to f$ тогда и только тогда, когда $\langle x, F_n\rangle \to \langle x, F\rangle$ при $x \in G$ равномерно на компактах внутри круга $\mathbb{D}$ для соответствующих аналитических функций $F_n, F$.*

Векторные классы $H^p$ с $p > 1$ ведут себя похожим образом.

**Факт 2.** *$H^p(G^*)$ — $w^*$-замкнутое подпространство в пространстве $s$-$L^p(G^*)$, $1 < p \leqslant \infty$. Поэтому единичный шар пространства $H^p(G^*)$ $w^*$-компактен. Далее, $w^*$-сходимость обобщенных последовательностей в этом шаре эквивалента поточечной $w^*$ сходимости в круге соответствующих аналитических функций. Если пространство $G$ сепарабельно, то шар этого пространства с такой топологией метризуем. При этом соотношение $f_n \xrightarrow{w^*} f$ эквивалентно тому, что $\langle x, F_n\rangle \to \langle x, F\rangle$ при $x \in G$ равномерно на компактах внутри круга $\mathbb{D}$ для соответствующих аналитических функций $F_n, F$.*

Следующее утверждение — теорема Лозановского о факторизации, см. [7]. Мы приводим её в несколько упрощенном виде.

**Факт 3.** *Если $X$ — пространство Кёте, удовлетворяющее условию Фату, то $L^1 = XX'$ с равенством норм.*

Наметим доказательство факта 2. По теореме Крейна–Шмульяна, достаточно доказать $w^*$-замкнутость шара пространства $H^p(G^*)$. Пусть $f_\alpha \to f$. Рассмотрим функции вида $\langle f_\alpha, P_z \cdot x\rangle, x \in G$. (Напомним, что $P_z$ — ядро Пуассона.) Так как $P_z \cdot x \in L^q(G)$, то эти функции сходятся при каждом $x$ равномерно на компактах в круге, причем к функции $\langle f, P_z \cdot x\rangle$. Получается, что гармоническое продолжение функции $f$ в круг аналитично. Чтобы показать, что оно принадлежит нужному классу Харди, возьмем любую скалярную функцию $g \in H^q$ и получим поточечно сходящуюся в круге обобщенную последовательность функций $f_\alpha g$ из $H^1(G^*)$ с равномерно ограниченной $H^1$-нормой. Её поточечный предел в круге равен $g \cdot f$ и принадлежит классу $H^1$ (функции $f_\alpha g$ принадлежат шару пространства $H^1$ и равномерно на компактах сходятся, поэтому предельная функция также принадлежит классу $H^1$, смотри факт 1). Замкнутость и компактность доказана. То, что равномерная сходимость на компактах влечет слабую сходимость, следует из того, что в обеих топологиях шар компактен. Наконец, метризуемость следует из сепарабельности предсопряженного пространства. Это завершает доказательство.

**2.1. Доказательство теоремы 1.** Пусть $F$ — данные задачи об идеалах (операторно-значная функция), $f$ — фиксированная функция из $H^\infty(G_2^*)$ (см. определение условий $(S_X)$ в п. 1.1).

а) Выводим условие $(S_X)$ из $S_\infty$. Нам нужно решить уравнение

$$F(z)g(z) = h(z)f(z)$$

для произвольной функции $h \in X_A$. Для этого возьмем внешнюю функцию для $h$, котрую мы обозначим через $\psi_h$. После этого решим уравнение $F(z)g(z) = f(z)\frac{h(z)}{\psi_h(z)}$: пользуясь условием $S_\infty$, мы можем найти решение $g \in H^\infty(G_1^*))$. После этого возьмем в качестве ответа функцию $g\psi_h$.

b) Выводим условие $S_1$ из $(S_X)$. На этот раз функция $h$ пробегает пространство $H^1(\mathbb{T})$. Если $h \neq 0$, то по теореме Лозановского $|h| = uv_0$, где $u, v_0 \geqslant 0$, $u \in X$, $v_0 \in X'$ и

$$\|f\|_{L^1} \leqslant (1+\varepsilon)\|u\|_X \|v_0\|_{X'}.$$

Известно, что если решетка $X$ правильная, то и $X'$ тоже, поэтому возьмем внешнюю функцию $v \in X'_A$ такую, что $|v| \geqslant v_0$ и $\|v\|_{X'} \leqslant (1+\varepsilon)\|v_0\|_{X'}$. Взяв уравнение $Fg = f\frac{h}{v}$ и решив его, мы получим желаемое умножением на $v$. От $\varepsilon$ можно избавиться за счет предельного перехода и слабой компактности множества решений.

c) Теперь нам нужно проверить условие $S_\infty$, зная, что выполнено условие $S_1$. Именно эта импликация составляет основное содержание теоремы. Напомним, что предполагается еще сепарабельность пространства $G_1$. Иными словами, надо решить уравнение $F(z)g(z) = f(z)h(z)$ для произвольной фиксированной функции $h$ из единичного шара пространства $H^\infty$, получив ограниченное решение $g$. Известно нам только, что такое решение существует в множестве $C \cdot B$, где $B$ — единичный шар пространства $H^1(G_1^*)$.

Наделим шар $B = B_{H^1(G_1^*)}$ $w^*$-топологией. Получим метризуемый компакт, где сходимость эквивалентна равномерной $w^*$-сходимости на компактах в открытом круге. Пусть $e$ — конечное подножество единичной сферы пространства $G_1$. Пункт c) легко сводится к следующему утверждению: для каждого числа $\delta > 0$ найдется функция $g \in C(\delta)B$ такая, что

$$Fg = hf, \quad \max_{x\in e}|\langle g(z), x\rangle| \leqslant (1+\delta)C, \tag{2}$$

где константа $C(\delta)$ зависит только от $\delta$, но никак иначе не контролируется.

Действительно, зафиксировав $\delta$, обозначим через $K_e$ множество всех функций $g$, удовлентворяющих условию (2) при данном $e$. Семейство множеств $K_e$ центрировано, а функция $g$, лежащая в пересечении всех этих множеств, принадлежит шару $(1+\delta)C \cdot B$. От числа $\delta$ можно избавиться, еще раз взяв предельную точку.

Чтобы найти решение, удовлетворяющее неравенству (2), берем произвольную функцию $g \in B$ (это не та же $g$, что в уравнении) и будем делать с ней ряд манипуляций. Пусть $P_r$, $0 \leqslant r < 1$ — ядро Пуассона. Мы обозначим оператор свертки с этим ядром тем же символом (так что записи $P_r * w$ и $P_r[w]$ равноправны). Пусть $u(\zeta) = u_g(\zeta) = \max_{x\in e}|\langle x, P_r * g(\zeta)\rangle|$, далее введем внешние функции

$$h_{r,g} = \frac{\exp(\log(u+\delta) + i\mathcal{H}\log(u+\delta))}{C(1+\delta)}.$$

Отметим, что $|h_{r,g}| \geqslant \frac{\delta}{C(1+\delta)}$, $\|h_{r,g}\|_1 \leqslant \frac{1}{C}$ во всём единичном круге.

Определим отображение $B \xrightarrow{T} 2^B$ формулой $T(g) = \{k \in B : Fk = h_{r,g}fh\}$. Образ каждой точки при этом отображении непустой (по предположению) и выпуклый, замкнутость графика следует из равномерной сходимости на компактах. Действительно, пусть функции $\beta_n$ сходятся к функции $\beta$, тогда соответствующие им функции $u_n$ будут сходиться равномерно. Не умаляя общности, можно считать, что функции $\log(u_n + \delta)$ сходятся слабо в $L^2$, тогда функции $h_{r,g}$ сойдутся равномерно на компактах в круге, и дальнейшее понятно. Замкнутость образов всех точек — следствие замкнутости графика.

Теперь по теореме Фан Цзы–Какутани у отображения $T$ есть неподвижная точка $g_r$, то есть $Fg_r = h_{r,g}fh$. Возьмем $r_n \to 1$, причём мы можем считать, что $g_{r_n} \xrightarrow{w*} g$. Положим $u_n = u_{g_{r_n}}$, $a_n = \log(u_n + \delta)$. Опять-таки не умаляя общности (снова из ограниченности в $L^2$ логарифмов модулей граничных значений) можем считать, что функции $h_{r_n,g_n}$ равномерно на компактах сходятся к некоторой функции $\Phi$. При этом $Fg = \Phi hf$ и $|\Phi| \geqslant \frac{\delta}{C(1+\delta)}$ во всём круге.

Снова из соображений компактности можем считать, что

$$k_n = P_{r_n}[g_{r_n}] \xrightarrow{w*} k \in B.$$

Взяв $x \in G_1$, можно написать:

$$\begin{aligned} \langle x, P_r[k(\,\cdot\,)]\rangle &= \lim_{n\to\infty} P_{r_n}[\langle x, k_n(\,\cdot\,)\rangle] \\ &= \lim_{n\to\infty} P_r[\langle x, g_{r_n}(\,\cdot\,)\rangle] + \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Id} - P_{r_n}) P_r[\langle x, g_{r_n}(\,\cdot\,)\rangle]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа равномерно сходится к $\langle x, P_r[g]\rangle$, по этой причине второе слагаемое равно нулю и $g = k$ (по крайней мере, они граничные значения одинаковых функций). То есть $Fk = \Phi hf$. Еще для них выполняется предельное неравенство для $x \in e, \Phi$ (с учетом совпадения $k = g$), а именно $|\langle x, g(z)\rangle| = |\langle x, k(z)\rangle| \leqslant (1+\delta)\Phi(z)$ при $x \in e$. В качестве решения можно взять $\frac{k}{\Phi}$. Получается, все доказано.

**Комментарий.** Можно заметить, что если описанная перед теоремой форма задачи об идеалах разрешима для всех $h \in X_A$, то $\frac{f}{\psi_F} \in H^\infty(G_2^*)$, где $\psi_F$ — внешняя функция для $F$. Действительно, рассмотрим (выбирая по каждой функции $h \in H^1$ функцию $g \in H^1(G_1^*)$) соотношения $\|\frac{F}{g_F} g\| = |f| \|\frac{h}{g_F}\| \leqslant C\|f\| \Rightarrow \|\frac{h}{g_F}\|_\infty \leqslant C$ (чтобы получить следствие, достаточно аппаратом внешней функции заставить $|h|$ пробежать плотное в положительной части единичного шара $L^1$ множество, состоящее из функций, суммируемых вместе с логарифмом). Получили даже более сильное утверждение.

**2.2. Доказательство теоремы 2.** Прежде всего заметим, что в формулировке $(X,\beta)$-задачи об идеалах выбор $Y = X^{\beta-1}$ и $Z = X^\beta$ практически принудительный, другие решетки $Y$ и $Z$ рассматривать особого смысла не имеет. Действительно, предположим для простоты, что пространство $X^\beta$ банахово. По условию $F \in X_A(\mathrm{Lin}_w(G_1^*, G_2^*))$, а функция $f$ должна быть более или менее произвольной функцией из $Z_A(G_2^*)$ такой, что $\|F(z)\|^\beta \geqslant \|f(z)\|$ при $z \in \mathbb{D}$. Это, в общем, не оставляет вариантов кроме как взять $Z = X^\beta$ (учтём, что среди данных $F$ есть и функции вида

$uT$, где $T$ — $w^*$-непрерывный оператор из $G_1^*$ в $G_2^*$, $u \in X_A$, а среди функций $f$ тоже есть функции, значения которых лежат в одномерном подпространстве). Далее, мы хотим обеспечить равенство $Fg = f$ с $g \in Y_A(G_1^*)$, поэтому разумно потребовать, чтобы произведение $XY$ равнялось $Z$. Однако $X \cdot X^{\beta-1} = Z$. Воспользуемся теперь следующим давно известным фактом.

Если $Q, E, F$ — банаховы пространства Кёте со свойством Фату и $QE = QF$, то $E = F$. Действительно, если $QE = QF$, то, умножив это равенство на $Q'$, по теореме Лозановского о факторизации получаем, что $L^1E = L^1F$, откуда $(L^1)^{1/2}(E)^{1/2} = (L^1)^{1/2}(F)^{1/2}$. Беря порядковые сопряженные правой и левой частей, получаем $(E')^{1/2} = (L^\infty)^{1/2}(E')^{1/2} = (L^\infty)^{1/2}(F')^{1/2} = (F')^{1/2}$, откуда $E' = F'$ и $E = E'' = F'' = F$. Свойство Фату существенно, например $l^q = l^q l^\infty = l^q c_0$.

Как уже отмечадлось, доказательство теоремы 2 похоже на доказательство предыдущей теоремы, поэтому мы лишь наметим его канву.

**Доказательство.** В доказательстве мы часто пишем $\|\rho\|_E$ и тому подобное вместо правильного $\|\alpha_\rho\|_E$ для граничных значений векторно-значных функций $\rho$ (см. обсуждение этого момента в п. 1.2).

В каждом из пунктов a), b) и c) теоремы 2 мы имеем дело с уравнением $Fg = f$, где $F$ и $g$ — известные, а $g$ — неизвестная аналитические функции со значениями, соответственно, в $\mathrm{Lin}(G_1^*, G_2^*)$, $G_2^*$ и $G_1^*$. При этом всегда выполнены неравенства $\|f(z)\| \leqslant \|F(z)^\beta \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{D}$.

a) Решаем уравнение $Fg = f$ с $F \in X_A(\mathrm{Lin}(G_1^*, G_2^*))$ и $f \in Z_A(G_2^*)$. Построим по $F$ внешнюю функцию $\psi_F = \psi$ и решим уравнение $\frac{F}{\psi_F} g = \frac{f}{\psi_F^\beta}$ (по условию, это возможно). Функция $g\psi^{\beta-1}$ нам подойдет.

b) На этот раз $F \in H^s(\mathrm{Lin}(G_1^*, G_2^*))$ — соответственно, $f \in H^{s/\beta}(G_1^*)$. Ищем решение $g$ основного уравнения в пространстве $H^{\frac{s}{\delta-1}}(G_1^*)$. Положим $\Delta(z) = \|F(z)\|_{\mathrm{Lin}(G_1^*, G_2^*)}$. Так как $\Delta^s \in L_1$, то по теореме Лозановского $\Delta^s = uv_0$, где $u \in X^s$ и $v_0 \in (X^s)'$. Тогда $u^{\frac{1}{s}} \in X$, $v_0^{\frac{1}{s}} \in ((X^s)')^{\frac{1}{s}} = W$. Можно считать, что

$$\|u^{\frac{1}{s}}\|_X \|v_0^{\frac{1}{s}}\|_W \leqslant (1+\varepsilon)\|\Delta\|_{L^s}, \quad \|u^{\frac{1}{s}}\|_X \leqslant 1.$$

Поскольку пространство $W$ тоже правильное, возьмем внешнюю функцию $v \in W_A$, для которой $|v| \geqslant |v_0^{\frac{1}{s}}|$, $\|v\|_W \leqslant (1+\varepsilon)\|v_0^{\frac{1}{s}}\|_W$. Решаем, опираясь на условие этого пункта, уравнение $\frac{F}{v} g = \frac{f}{v^\beta}$. Легко понять, что тогда функция $gv^{\beta-1}$ представляет собой решение из пространства $H^{\frac{s}{\beta-1}(G_1^*)}$. От

$\varepsilon$ можно избавиться за счет предельного перехода и слабой компактности множества решений.

c) На это раз в основном уравнении $F$ и $f$ — ограниченные аналитические функции (операторно-значная и $G_2^*$-значная), мы ищем решения $g$ из $H^\infty(G_1^*)$. Пусть $B$ есть замкнутый единичный шар пространства $H^{\frac{s}{\beta-1}}(G_2^*)$ с $w^*$-топологией, $e$ — конечное подмножество единичной сферы $U$ пространства $G_2$. Ищем примерно то же, что и в теореме 1 — хотим для каждого числа $\delta > 0$ построить функцию $g \in C(\delta)B$ такую, что $Fg = f$ и при этом $\max\limits_{x\in e}|\langle g(z), x\rangle| \leqslant (1+\delta)C$, где постоянная $C$ не зависит от $\delta$ (и как и в теореме 1, этого будет достаточно из соображений компактности). Далее, определим внешнюю функцию $h_{r,g}$ как и в прошлой теореме (снова нам, начиная с этого места, удобно считать $g$ произвольным элементом единичного шара просранства $H^{\frac{s}{\beta-1}}(G_2)$). Для этой внешней функции имеются те же границы ($|h_{r,g}| \geqslant \frac{\delta}{C(1+\delta)}, \|h_{r,g}\|_{\frac{s}{\beta-1}} \leqslant \frac{1}{C}$). Пусть отображение $T$ задано формулой $g \xrightarrow{T} \{k\colon F(z)h_{r,g}^{\frac{1}{\beta-1}}k(z) = f(z)h_{r,g}^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$. Аналогично теореме 2, к этому отображению применима теорема Фан Цзы–Какутани. Действительно, непустота образов точек следует из условия пункта c), выпуклость этих образов очевидна, замкнутость графика обусловлена тем, что $w^*$-топология на шаре пространства $H^{\frac{s}{\beta-1}}(G_2^*)$ эквивалентна равномерной слабой снизу сходимости на компактах в круге. Обозначим неподвижную точку этого отображения символом $g_r$, т.е. верно равенство $F(z)f_{r,g}^{\frac{1}{\beta-1}}g_r = f(z)f_{r,g}^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$). Далее действуем, как в прошлой теореме, с теми же обозначениями и рассуждениями — снова берем сходящуюся к единице последовательность $r_n$, снова $g$ считаем пределом соответствующей последовательности функций $g_n$, а пределом последовательности функций $h_{r_n,g_n}$ считаем функцию $\phi$, снова вводим с помощью ядра Пуассона функции $k_n$ и $k$ и с помощью него же точно так же устанавливаем, что $g = k$.

В итоге получаем соотношение $F(z)\phi^{\frac{1}{\beta-1}}g(z) = h(z)\phi^{\frac{\beta}{\beta-1}}$. Опять в качестве решения исходного уравнения берем функцию $\frac{k}{\phi}$, которая снова нам годится. $\square$

## §3. Несколько комментариев к операторной задаче о короне

Рассмотрим несколько примеров приложений теорем 1 и 2. Известна так называемая операторная задача о короне или задача Сёкефальви-Надя. Она заключается в следующем: пусть $F \in H^\infty(\mathrm{Lin}(H_1, H_2))$, где

$H_1, H_2$ — гильбертовы пространства (для простоты, сепарабельные), причем $|a| \geqslant |F(z)a| \geqslant \delta |a|$ для $a \in H_1$. Тогда требуется найти операторную функцию $G$ из $H^\infty(\mathrm{Lin}(H_2, H_1))$ так, чтобы $GF = \mathrm{Id}_{H_1}$. Это равносильно тому, что все уравнения вида $GF = K$ с $K \in H^\infty(\mathrm{End}(H_1))$ разрешимы в $H^\infty(\mathrm{Lin}(H_2, H_1))$.

Операторные функции $F(z)$ со свойством $\|a\| \geqslant \|F(z)a\| \geqslant \delta\|a\|$ для всех векторов $a$ и некого $\delta > 0$ будем звать допустимыми. В. И. Васюнин, основываясь на работе [12], доказал разрешимость задачи в случае $\dim H_1 < \infty$ и оценил норму решения, С. Р. Трейль построил в [10] пример допустимой функции, для которой операторная задача о короне не разрешима (естественно, в его работе $\dim H_1 = \infty$).

Обсудим несколько обобщений этой задачи.

Рассмотрим разрешимость уравнений такого же вида, но с

$$F \in H^\infty(\mathrm{Lin}(H_1, H_2)), \quad G \in X_A(\mathrm{Lin}(H_2, H_1)), \quad K \in X_A(\mathrm{End}(H_1)),$$

где, как и прежде, $X$ — правильное пространства Кёте на окружности.

Сравнительно несложно изучить разрешимость в случае $\dim H_1 < \infty$.

**Предложение 1.** *Разрешимость таких уравнений не зависит от решетки $X$ и возможна только для допустимых функций $F$. В частности, если $\dim H_1 = n < \infty$, то уравнение выше разрешимо, причем $C \leqslant \sqrt{n} C_{\mathrm{corona}}(\delta^n)$ (где $C_{\mathrm{corona}}(\delta)$ — наилучшая оценка решения в классической задаче о короне с данными в $l_2$).*

Опишем кратко доказательства этого и других родственных утверждений (опуская детали, аналогичные уже изложенным).

**Доказательство.** То, что от решетки ничего не зависит, следует из теоремы об открытом отображении и эквивалентности задач о короне для разных $X$, что обосновано в [4]. При этом $G$ рассматривается именно как векторно-значная функция, у которой существуют граничные значения в слабом смысле (в силу наличия у пространства операторов между гильбертовыми пространствами предсопряженного), а умножение справа на $F$ — как действие на этот вектор линейного оператора. Случай $n < \infty$ следует из рассуждения Васюнина, описанного в [9]. Допустимость операторной функции $F$ необходима в случае пространства $X = L^\infty$, а потому необходима при любом $X$. □

Оказывается, что если нет условия $\dim H_1 < \infty$, то даже для допустимых данных уравнения $GF = K$ могут быть неразрешимы.

**Предложение 2.** *Существует такая допустимая операторная функция $F \in H^\infty$, что для любой решетки $X$ найдется функция $K \in X_A(\mathrm{End}\, H_1)$*

*такая, что уравнение $GF = K$ не разрешимо в $X_A(\mathrm{Lin}(H_2, H_1))$. Более того, такую операторную функцию $K$ можно выбрать в виде $h(z)\,\mathrm{Id}_{H_1}$.*

**Доказательство.** Возьмем построенный Трейлем в [10] пример допустимой операторно-значной функции $F(z)$, для которой уравнение $G(z)F(z) = \mathrm{Id}_{H_1}$ неразрешимо в $H^\infty(\mathrm{Lin}(H_1, H_2))$. Далее применим теорему 1. □

**Гипотеза.** Можно взять $h \in H^\infty$ (вместо $h \in X_A$).

Рассмотрим теперь уравнение вида $GF = fK$ относительно $G$ с заданными заранее функцией $F \in (\mathrm{Lin}(H_1, H_2))$ и скалярной функцией $f$, где в роли $K$ теперь выступает оператор в пространстве $H_1$ (вместо скалярной функции в теореме 1). Заметим, что рассуждения теоремы 1 буквально переносятся на эту ситуацию. Заключаем, что разрешимость данного уравнения при всех $K$ не зависит от пространства Кёте (присутствие которого в этой постановке, разумеется, предполагается), а только от пары $F, f$. Уже знаем случай, когда такой разрешимости нет, приведем пример, когда она есть.

**Предложение 3.** *Если для всех векторов $a$ выполнено условие $|a| \geqslant |F(z)a| \geqslant |f(z)|^{\frac{1}{p}}|a|, \dim H_1 = n, p > 2n$, то уравнение $GF = f(z)\,\mathrm{Id}_{H_1}$ разрешимо в $H^\infty(\mathrm{Lin}(H_1, H_2))$, поэтому разрешимы уравнения $GF = hK$, если теперь $G, K$ — функции, соответственно, из $X_A(\mathrm{Lin}(H_2, H_1))$ и из $X_A(\mathrm{End}\, H_1)$, где $X$ — правильное пространство Кёте (причем разрешимость имеет место с той же константой).*

Для доказательства заметим, что все собственные числа самосопряженной $(\mathrm{End}\, E_1)$-значной функции $F^*(z)F(z)$ по модулю не меньше, чем $|f(z)|^{\frac{2}{p}}$, так что $\det F^*F \geqslant |f(z)|^{\frac{2n}{p}}$, но по формуле Бине–Коши определитель в левой части есть$\sum_{A\subset\mathbb{N},|A|=n} |\det F_A|^2$, где $F_A = \{F_{ij}\}_{i\in A, 1\leqslant j\leqslant n}$. Используя разрешимость задачи об идеалах, можем найти функции $\{g_A\}$, для которых $\sum \det F_A g_A = f$. Здесь функция $F_A^{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $F_{ij}$ в $F_A$, если $j \in A$, иначе 0. Определим $G_{ij} = \sum_A g_A F_A^{ij}$, тогда $G_{ij}F = \delta_{ij} f$. Оценка величины $\|G\|$ производится абсолютно так же, как в [9], откуда и взята идея рассуждения. Предложение доказано.

А что, если брать $F, f$ не из $H^\infty$, а из $X_A, X_A^p$? (Для краткости мы опускаем здесь указание тех векторных пространств, в которых принимают значения наши аналитические функции: всё как раньше.) Для удобства при этом $K \in H^\infty, G \in X_A^{p-1}$ (иными словами, есть ли операторный аналог теоремы 2)? Оказывается, есть. Если $p > 1$, то аналогично теореме 2 можно определить $(X, p)$-операторную задачу об идеалах: найти операторную функцию $G$ со свойством $GF = fK$, если $\|F\|_X \leqslant 1$, $|f(z)|^{\frac{1}{p}}|a| \leqslant |F(z)a|$, при этом $\|G\|_{X^{p-1}} \leqslant C$.

**Предложение 4.** a) $(L^\infty, p) \Rightarrow (X, p)$ *с той же константой (то есть из разрешимости одной задачи следует разрешимость другой, далее смысл знака* $\Rightarrow$ *такой же).*

b) $(L^s, p) \Rightarrow (X, p)$, *если* $s \geqslant p$ *и решетка* $X^s$ *банахова (то есть пространство Кёте* $X$ $s$*-выпукло).*

c) $(L^s, p) \Rightarrow (L^\infty, p)$, *если пространства* $H_1, H_2$ *сепарабельны.*

Доказательство по существу такое же, как в теореме 2. С помощью внешних функций мы можем получить решение для задачи $(X, p)$ из случая $(L^\infty, p)$, и с их же помощью (а также за счет теоремы Лозановского) мы можем свести любую задачу к случаю $(L^s, p)$, откуда выводим разрешимость задачи $(L^\infty, p)$ с помощью внешних функций и теоремы Фан Цзы–Какутани. Сепарабельность гильбертовых пространств $H_1$ и $H_2$ гарантирует сепарабельность пространства ядерных операторов, предсопряженного к пространству ограниченных операторов.

## Список литературы


[1] Бухвалов А.В., *Пространства Харди векто рнозначных функций*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **65** (1976), 5–16.

[2] Злотников И. К., *Задача об идеалах алгебры* $H^\infty$ *в случае некоторых пространств последовательностей*, Алгебра и анализ **29** (2017), №5, 51–67.

[3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, 3-е изд., Наука, М., 1984.

[4] Кисляков С. В., Руцкий Д. В., *Несколько замечаний к теореме о короне*, Алгебра и анализ **24** (2012), №2, 171–191.

[5] Кисляков С. В., Скворцов А. С., *Теоремы о неподвижной точке и классы Харди*, Зап. науч. семин. ПОМИ **512** (2022), 95-115.

[6] Кусис П., *Введение в теорию пространств Харди с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984.

[7] Лозановский Г. Я., *О некоторых банаховых структурах*, Сиб. мат. ж. **10** (1969), №3, 584–599.

[8] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ М.-Л., 1950.

[9] Толоконников В. А., *Оценки в теореме Карлесона о короне, идеалы алгебры* $H^\infty$, *задача Секефальви-Надя*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **113** (1981), 178–198.

[10] Треиль С. Р., *Углы между коинвариантными подпространствами и операторная проблема короны. Задача Сёкефальви-Надя*, Докл. АН СССР **302** (1988), №5, 1063–1068.

[11] Fan Ky, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **38** (1952), no. 1, 121–126.

[12] Fuhrmann P., *On the corona theorem and its application to spectral problems in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 55–66.

[13] Treil S., Wick B. D., *The matrix-valued corona problem in the disk and polydisk*, J. Funct. Anal. **226** (2005), no. 1, 138–172.

[14] Treil S., *The problem of ideals of $H^\infty$: beyond the exponent* 3/2, J. Funct. Anal. **253** (2007), no. 1, 220–240.

[15] Rutsky d. V., *Corona problem with data in ideal space of sequence*, Arch. Math. (Basel) **108** (2017), no. 6, 609–619.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, 191023,
наб. р. Фонтанки, д. 27
*E-mail:* skis@pdmi.ras.ru
*E-mail:* st076169@student.spbu.ru

Поступило 25 июля 2023 г.