

## Программный комитет школы

Ватульян А. О., Ростов-на-Дону — председатель  
Бауэр С. М., Санкт-Петербург — заместитель председателя  
Глушков Е. В., Краснодар  
Горячева И. Г., Москва  
Гузев М. А., Владивосток  
Еремеев В. А., Гданьск  
Коссович Л. Ю., Саратов  
Кучумов А. Г., Пермь  
Лачуга Ю. Ф., Москва  
Месхи Б. Ч., Ростов-на-Дону  
Морозов Н. Ф., Санкт-Петербург  
Наседкин А. В., Ростов-на-Дону  
Рудой Д. В., Ростов-на-Дону  
Соловьев А. Н., Ростов-на-Дону  
Цатурян А. К., Москва  
Штейн А. А., Москва

## Организационный комитет школы

Карякин М. И., ЮФУ — председатель  
Матросов А. А., ДГТУ — заместитель председателя  
Глушко Н. И., ДГТУ  
Дударев В. В., ЮФУ  
Колесников А. М., ЮФУ  
Мнухин Р. М., ЮФУ  
Надолин К. А., ЮФУ  
Паринова Л. И., ДГТУ  
Попов А. В., ЮФУ  
Угрехелидзе Н. Т., ДГТУ

## Мультистабильность и динамические сценарии в системе двух хищников и жертвы

**Алмасри А., Цибулин В. Г.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается трофическая цепь, состоящая из жертвы  $x(t)$ , хищника  $y(t)$  и суперхищника  $z(t)$ , описываемая системой автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{xy}{1+b_1x} - \frac{xz}{1+b_1x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\eta_1xy}{1+b_1x} - \frac{d_1yz}{1+b_2y+b_3z} - \mu_1y, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\eta_2xz}{1+b_1x} + \frac{d_2yz}{1+b_2y+b_3z} - \mu_2z.\end{aligned}$$

Здесь  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты естественной смертности хищника  $y$  и суперхищника  $z$ ,  $\eta_1, \eta_2$  — коэффициенты пищевой ценности,  $d_1, d_2$  — коэффициенты, описывающие контакты видов.

Для  $b_i = 0 (i = 1, 2, 3)$  получается система, имеющая семейство стационарных решений при выполнении условий на параметры:

$$\mu_2 = d_2 \left(1 + \frac{\mu_1}{d_1}\right), \quad \eta_2 = d_2 \left(1 + \frac{\eta_1}{d_1}\right).$$

В этом случае имеется косимметрия  $L = [yz, c_1xz, c_2xy]^T$ .

Вычислительные эксперименты показали, что при выполнении условий косимметрии реализуется семейство стационарных решений. При нарушении условий косимметрии семейство исчезает и в зависимости от возмущения реализуются решения с сосуществованием всех трех видов, а также без хищника или без суперхищника.

Обнаружены значения параметров, при которых выбор равновесия зависит от начальных условий. При  $b_i \neq 0$  вычисляется косимметричный дефект<sup>1</sup> и в результате подстановки семейства получается селективная функция:

$$\begin{aligned}S(x) &= xyz \left( \frac{b_1x(1-2x)}{1+b_1x} - \frac{p_1(1-x)}{1-p_1} \right), \\ p_1 &= b_2 \left(1 + \frac{\mu_1}{\eta_1}\right) - \frac{b_3\mu_1}{d_1} + \left[ \frac{b_3\eta_1}{d_1} - b_2 \left(1 + \frac{\eta_1}{d_1}\right) \right] x.\end{aligned}$$

Анализ селективной функции проводится численно, найдены различные сценарии разрушения семейства. Изучено влияние параметров Холлинга на динамику системы.

Исследование выполнено за счет гранта РФФ № 23-21-00221, в Южном федеральном университете.

<sup>1</sup>Юдович В. И. О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Доклады Академии наук. 2004. Т. 398, № 1. С. 57–61.

## Структурно-временные особенности необратимого деформирования материалов

**Антонова М. Н., Петров Ю. В.**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*

В современном мире активно изучаются свойства нитевидных кристаллов и нанопроволок. Первые используются в промышленности для малогабаритных датчиков и автоэмиссионных катодов, а вторые могут быть использованы для создания различных электронных устройств, источников излучения для передачи сигналов различных оптических приборов. Важным свойством нитевидных кристаллов является их высокая прочность, близкая к теоретической и в несколько раз превосходящая прочность массивных кристаллов, что объясняется значительно меньшим количеством дефектов в структуре материала.

Пластическая деформация является релаксационным процессом, в котором упругие напряжения релаксируют с течением времени за счет перемещения дефектов кристаллической решетки. На практике считают, что релаксация напряжений происходит мгновенно, как только напряжения превышают величину предела текучести. Это плохо соотносится с моделированием процессов при высоких скоростях деформации. Оказывается, что даже при низких скоростях деформации в ряде материалов проявляются типично динамические эффекты. Одним из примеров является возникновение зуба текучести (состоит в увеличении напряжения выше предела текучести, и в последующем его падении ниже нижнего предела текучести) при квазистатической деформации образцов металлов с малым числом дефектов кристаллической решетки. Эффект аномально высокого напряжения течения при малых степенях деформации является отражением типичного релаксационного процесса, требующего определенного времени для развития. Эффект зуба текучести демонстрирует общность квазистатического и динамического режимов деформации, хотя эти два случая обычно принято разделять. Построения единой модели для описания требуют динамические эффекты, проявляющиеся во всем диапазоне скоростей деформаций. Для этого необходимо явно учесть процесс релаксации при пластической деформации, дополнив набор характеристик материала параметром характерного времени релаксации напряжений.

В работе рассматривается применение релаксационной модели пластичности на основе интегрального критерия инкубационного времени текучести к деформированию нитевидных кристаллов различных материалов с разной скоростью деформации до момента их разрушения на основе найденных экспериментальных данных, полученных с помощью методов молекулярной динамики (ММД). Особенность подхода заключается в использовании набора фиксированных параметров при построении деформационной кривой, которые не зависят от истории нагружения и скорости деформации и связаны только с развитием дефектной структуры материала. Это позволяет получать различные типы деформационных кривых, реализующихся на одном материале, что показано на примере медного нитевидного кристалла. Показано, что указанная модель на основе данных численного эксперимента, проведенного с использованием ММД, позволяет получить характеристики материала, поведение которого качественно соответствует реальному эксперименту с заданными параметрами нагружения.

## Теоретические оценки производительности вычислительной системы для решения двумерных и трехмерных задач диффузии — конвекции

**Атаян А. М.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Для получения теоретических оценок производительности многопроцессорной вычислительной системы для решения двумерных и трехмерных задач диффузии — конвекции итерационными методами на основе декомпозиции расчетной области по одному и двум пространственным направлениям получена зависимость времени передачи от объема данных для разного количества узлов вычислительной системы. На основании данных о количестве процессоров, объема передаваемых данных и размера вычисляемой подобласти, с помощью метода наименьших квадратов получены данные о латентности и времени выполнения одной арифметической операции, оптимальном объеме для передачи данных. Рассчитано время, затраченное на параллельную реализацию одной итерации методами конвейерного типа — методом Зейделя и модифицированным попеременно-треугольным методом (МПТМ) в зависимости от объема передаваемых данных, количества блоков и времени латентности. Рассчитан оптимальный объем передаваемых данных, зависящих от параметров системы.

Для областей, вытянутых вдоль горизонтальных направлений, использовался метод решения системы сеточных уравнений. Для решения такой системы, возникающей при дискретизации задачи гидродинамики мелководного водоема, применён МПТМ. Разработано программное обеспечение, позволяющее производить расчет трехмерных полей вектора скорости движения водной среды на ЭВМ, а также разработан и описан параллельный алгоритм решения сеточных задач МПТМ. Параллельные алгоритмы решения сеточных уравнений на основе алгоритмов 1 (МПТМ) и 2 (алгоритма разработанного метода с предобуславливателем трехдиагонального вида), и программное обеспечение, их реализующее, тестировались на многопроцессорной вычислительной системе К-60 на базе ИПМ им. М. В. Келдыша РАН с применением гибридной технологии MPI + OpenMP. Результаты показали преимущества гибридной технологии: ускорение для алгоритма 1 достигало 64.72 раз при разбиении расчетной области на 24 части вдоль оси  $Ox$ . Алгоритм 2, реализованный с использованием гибридной технологии MPI + OpenMP, показал наибольшее ускорение в 159.81 раз при разделении объема вычислительной работы между 24 процессорами. При реконструкции опасных гидрофизических явлений мелководных водоемов (областей с «вытянутой геометрией»), когда время построения прогноза ограничено, согласно проведенным численным экспериментам, рекомендуется использовать программное обеспечение, реализующее алгоритм 2 на основе гибридной технологии.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 21-71-20050.

## Применение векторизации при распараллеливании алгоритмов для решения задач гидродинамики

**Атаян А. М., Долгов В. В.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

В результате обширной деятельности человека загрязнение водных объектов в наши дни активно набирает обороты. Загрязнение природных вод из-за попадания в ручьи, реки, озера, моря и океаны различных химических веществ, твердых отходов сокращает запасы питьевой воды. В связи с этим возникает необходимость в прогнозировании изменений экологического состояния мелководных водоемов вследствие возникновения в них явлений природного и техногенного характера на основе методов и средств математического моделирования с различным пространственным разрешением от десятков метров — до нескольких километров. Так как время, отведенное на построение прогнозов экологического состояния водных экосистем при возникновении в них чрезвычайных событий и катастрофических явлений природного и техногенного характеров, является ограниченным, возникает необходимость построения алгоритмов численной реализации математических моделей транспорта загрязняющих веществ, попавших в прибрежную систему, ориентированных на высокопроизводительные вычислительные системы и программ, позволяющих сократить время расчетов.

Научная новизна данной работы состоит в создании и исследовании математических моделей гидрофизики прибрежных систем, разработке комплекса параллельных алгоритмов для их расчета, позволяющих быстрее и точнее по сравнению с известными моделями строить прогнозы изменения процессов распространения загрязняющих веществ в водоемах, подобных Азовскому морю. Моделирование проводится с учетом возможного наличия препятствий в виде различных гидротехнических сооружений. Проведена разработка и исследование схем дискретизации моделей на равномерной 3D-сетке, в том числе базирующихся на методах расщепления и адаптивном попеременно-треугольном методе, и параллельных алгоритмов для регуляризованных по Четверушкину Б. Н. математических моделей (для случая большого числа процессоров). Применение регуляризатора позволило упростить процесс распараллеливания задачи. Параллельная реализация основана на технологиях MPI, OpenMP и гибридной технологии, включающей в себя MPI + OpenMP распараллеливание. Выполнены работы по оптимизации программного кода разработанных алгоритмов для облегчения его векторизации. При векторизации однопоточные приложения, выполняющие одну операцию в каждый момент времени, модифицировались для выполнения нескольких однотипных операций одновременно (SIMD — Single Instruction Multiple Data).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>).

## Модель послойного исследования напряжённо-деформированного состояния трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами

**Бакулин В. Н.**<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладной механики РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*

На практике наиболее распространены трехслойные оболочки с тонкими и жесткими несущими слоями и толстым, но менее жестким слоем заполнителя. При этом нередко оболочки имеют прямоугольные в плане вырезы, ослабляющие несущую способность. Обзор работ<sup>1</sup> показал актуальность создания моделей послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек, в т.ч. ослабленных прямоугольными в плане вырезами. Из обзора работ следует, что получены точные решения задач о концентрации напряжений около кругового отверстия, либо около жесткого включения в сферической оболочке (т.е. задач, для которых переменные разделяются), а также то, что для отверстий другой формы получить точные решения в рамках теории трансверсально-изотропных оболочек не представляется возможным<sup>1</sup>. Это связано с математическими трудностями получения решений таких задач<sup>2</sup>, что приводит к необходимости применения численных методов и особенно метода конечных элементов для построения моделей расчета трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами<sup>3</sup>.

Наиболее точными, но менее распространенными, являются конечно-элементные модели (КЭМ) послойного исследования<sup>3</sup>. В таких моделях порядок систем уравнений зависит от числа слоев, что увеличивает размерность задач и затрудняет их решение.

В докладе рассмотрен подход послойного анализа, и построены КЭМ естественной кривизны на основе полученных эффективных аппроксимирующих функций перемещений, приводящих к «рациональной» размерности задач по исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных, в общем случае нерегулярных, оболочек, в т.ч. ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

При построении блочной КЭМ применяются оболочечные двумерные модели тонких моментных несущих слоев, основанные на гипотезах Кирхгофа — Лява, и трёхмерные оболочечные модели слоя заполнителя. Предложен подход, позволяющий избежать разрыва обобщенных перемещений на поверхностях стыковки моделей несущих слоев и слоя заполнителя.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) (№ госрегистрации 121112200126-5).

<sup>1</sup>*Bakulin V. N. Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Shells with Cutouts // Mechanics of Solids. 2019. V. 54, № 3. P. 448–460.*

<sup>2</sup>*Bakulin V. N. Layer-by-layer stress-strain analysis of irregular sandwich shells of revolution with non-zero gaussian curvature // Mechanics of Solids. 2021. V. 56, № 7. P. 283–294.*

<sup>3</sup>*Bakulin V. N. Model for Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Rectangular Cutouts // Mechanics of Solids. 2022. V. 57, № 1. P. 102–110.*

## Решение контактной задачи о вдавлении сферического индентора в двухслойный образец методом конечных элементов в Ansys

**Бардакова Р. А.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Результаты экспериментов по индентированию многослойных материалов служат исходной информацией для решения обратных коэффициентных задач по определению механических свойств их слоев, поэтому аналитическое и численное решение таких задач представляет интерес.

В работе рассматривается осесимметричная задача о внедрении сферического индентора в многослойный образец с упругопластическими свойствами. Трением в области контакта пренебрегается. Задача решается в нестационарной постановке, приложенная к индентору сила зависит от времени. Эта зависимость имеет несколько характерных участков, которые соответствуют нагружению и разгрузке. Первый участок соответствует линейному возрастанию силы, далее следует участок, на котором сила давления постоянна и за ним следует разгрузка, при которой сила убывает по билинейному закону.

Решение получено численно в конечно-элементном пакете Ansys. При этом на контактируемых поверхностях выбираются соответствующие конечные элементы, а их размер выбирается из условия, что его дальнейшее уменьшение не влияет на результаты расчетов. Рассчитываются характеристики напряженно-деформированного состояния образца и зависимость глубины внедрения индентора от времени. Далее на основе двух временных зависимостей для силы и глубины внедрения строится зависимость сила — глубина внедрения. Эта зависимость имеет два характерных участка, которые соответствуют нагружению и разгрузке.

Сначала решается задача для линейно-упругих материалов, для которых график нагружения совпадает с графиком разгрузки только в разных направлениях и не возникает остаточной деформации. В натурном эксперименте такое поведение соответствует достаточно малому максимальному значению силы, при котором на поверхности не возникает отпечатка. Далее рассматривается задача для однородного образца с учетом его упруго-пластических свойств, при этом график зависимости напряжение — деформация билинейный без учета упрочнения. В этом случае кривые нагружения и разгрузки не совпадают, представляя собой две кривые, имеющие положительную вторую производную, разница в значениях которых на горизонтальной оси характеризует остаточную деформацию.

В качестве третьей задачи рассматривается образец из упруго-пластического материала с тонким покрытием. Здесь также строится зависимость сила — глубина внедрения. Экспериментально проведено исследование механических свойств тонкой пленки нитрида титана (TiN), нанесенной методом магнетронного напыления на поверхность кремния. Получено качественное совпадение результатов натурального и численного экспериментов.

Автор выражает благодарность А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-49-10062, <https://rscf.ru/project/23-49-10062/>), в Донском государственном техническом университете.

## Реализация алгоритма вычисления Фурье-символа матрицы Грина упругого слоистого волновода с использованием архитектуры Nvidia CUDA

**Барейко И. А., Еремин А. А.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Одним из ключевых этапов компьютерного моделирования волновых процессов в слоистых упругих материалах с использованием полуаналитического интегрального подхода и техники интегрального преобразования Фурье является построение Фурье-символа матрицы Грина соответствующей краевой задачи. Необходимость его многократного вычисления, возникающая как при расчете волновых полей, вызванных заданной поверхностной нагрузкой, через кратные контурные интегралы или определении дисперсионных характеристик волноводной структуры, так и при решении более специфических задач, например, в рамках численной реализации метода обращения времени для локализации неоднородностей и дефектов или при определении эффективных упругих модулей анизотропных композитных материалов по данным ультразвукового волнового зондирования, требует существенных временных затрат, объем которых еще более возрастает в случае многослойных анизотропных материалов. Поскольку основные этапы построения Фурье-символа матрицы Грина таких волноводов связаны с выполнением стандартных матричных операций (поиск собственных значений и собственных векторов матриц, алгебраические действия над матрицами), то одним из возможных подходов к ускорению соответствующих вычислений является их перенос с центрального процессора на графические ускорители общего назначения, архитектура которых позволяет существенно повысить производительность матричных операций.

В данном докладе обсуждается реализация алгоритма построения Фурье-символа матрицы Грина для многослойных анизотропных материалов<sup>1</sup> на архитектуре Nvidia CUDA. В ее основе лежит модификация метода итераций Рэлея для поиска собственных векторов и чисел соответствующих матриц, возникающих в уравнении Грина — Кристоффеля для рассматриваемых волноводных структур, а также оптимизация матричных вычислений с учетом особенностей архитектуры Nvidia CUDA. Демонстрируется применимость разработанного алгоритма для случая произвольных комплексных параметров преобразования Фурье. Для различных значений входных параметров (количество и толщина слоев, различные типы анизотропии) приводятся результаты сопоставления расчетов на основе данного метода и традиционного подхода с использованием вычислений на центральном процессоре. В качестве примера применения реализованного алгоритма вычисления Фурье-символа матрицы Грина для решения практических задач рассматривается возможность его использования для ускорения поиска существенных полюсов данной матрицы.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ № FZEN-2020-0017.

<sup>1</sup> Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Кривонос А. С. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // ПММ. 2010. Т. 74, № 3. С. 419–432.



## Интравитреальные инъекции и оценка модуля упругости склеры

**Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б.**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*

В настоящее время (особенно в последнее десятилетие) интравитреальные (внутрикамерные) инъекции используются как метод лечения многих офтальмологических заболеваний. При инъекции вводится некоторый объем несжимаемой жидкости в стекловидное тело, и, естественно, сразу после этого происходит резкое увеличение внутриглазного давления (ВГД). В работе представлено несколько конечно-элементных моделей для расчета напряженно-деформированного состояния внешних оболочек глазного яблока после введения инъекций. Такие модели позволяют более точно описать строение глаза (составную внешнюю оболочку, наличие внутренних перегородок между камерами глаза), учесть анизотропию, нелинейность и неоднородность тканей глаза (роговицы и склеры). Определяется изменение внутриглазного давления после введения заданного объема несжимаемой жидкости. Результаты расчетов сравниваются с аналитическими результатами, полученными ранее по неклассическим теориям тонких оболочек.

Предполагается, что роговица и склера являются трансверсально-изотропными тканями, и модули упругости в направлении толщины полагаются в 20 раз меньшими модулей упругости на поверхности изотропии. Нелинейный анализ выполнен в пакете Ansys 18.

В первой модели не учитывается внутренняя структура глаза и рассматривается составная оболочка как замкнутая оболочка, состоящая из двух сопряженных сегментов, заполненных несжимаемой жидкостью под давлением  $P$  (внутриглазное давление — ВГД). Дальше давление увеличивается до того момента, пока внутренний объем оболочки не увеличится на объем введенной инъекции. Во второй модели добавлена тонкая гибкая безмоментная мембрана, разделяющая объем под роговицей и склеральный объем. В этом случае оценивается отдельно изменение объема стекловидного тела и объема передней камеры под роговицей. Перед введением инъекции начальное одинаковое внутриглазное давление прикладывается отдельно в стекловидном теле и в передней камере глаза. На следующем этапе прикладывается давление, которое возникает при увеличении объема стекловидного тела на объем введенной инъекции. Полагаем, что внутренний объем передней камеры остается постоянным, таким образом, в передней камере давление тоже увеличивается. Многочисленные расчеты показывают, что модуль упругости склеры существенно влияет на изменение ВГД после инъекции, а параметры роговицы и разделяющей мембраны оказывают меньшее влияние.

Кроме того, при увеличении объема инъекции, увеличивается в первый момент разница между изменением ВГД в стекловидном теле и в передней камере глаза под роговицей. Это необходимо учитывать при решении обратной задачи — оценке среднего модуля упругости склеры, так как измерение ВГД проводится, как известно, через роговицу, и, значит, соответствует давлению в передней камере глаза.

## Оценка влияния климатических изменений на экологическое состояние прибрежных систем

**Белова Ю. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В последние годы в прибрежных системах Юга России все чаще наблюдаются природные явления, имеющие негативные экономические и тяжелые экологические последствия, такие как эвтрофикация вод, обильное цветение ядовитых водорослей, заморы рыб. В значительной степени возникновение подобных явлений связано с изменением климатических условий, установлением аномально теплой погоды в период вегетации микроводорослей. На процессы их жизнедеятельности и окисление детрита тратится большая часть растворенного в воде кислорода, что вызывает заморные явления. В анаэробных условиях в присутствии серы могут возникнуть области сероводородного заражения, что также негативным образом сказывается на экологическом состоянии водоема. Чтобы иметь возможность предупредить подобные явления, необходимо строить оперативные и научно оправданные прогнозы и передавать результаты лицам, принимающим решения. Актуальным является создание математического и программного инструментария, позволяющего с заданной точностью строить как краткосрочный, так и долгосрочный прогноз развития сложных природных объектов, таких как прибрежные системы. Этот инструментарий представляет собой программный комплекс, основанный на построении современных нестационарных трехмерных математических моделей гидродинамики и гидробиологии, использовании высокоточных разностных схем и методов, разработке новых методов обработки данных дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), калибровке моделей на основе этих данных.

Научная новизна данной работы состоит в разработке нестационарной трехмерной математической модели биогеохимических циклов, описывающей динамику основных фитопланктонных популяций, превращения биогенных веществ, таких как фосфор, азот, кремний из одной формы в другую, влияние кислорода на жизнедеятельность микроводорослей, цикл потенциально загрязняющего вещества — серы. При моделировании учитывалось влияние солености и температуры (абиотических факторов) на рост и гибель клеток фитопланктона. Для данной модели проведено аналитическое исследование, поставлена начально-краевая задача и проведена ее линеаризация. Определены неравенства, гарантирующие существование, единственность и непрерывную зависимость решений цепочки линеаризованных задач от правых частей, а также сходимости ее к решению исходных нелинейных задач. Входными данными для модели выступили вектор движения водной среды, поля солености и температуры, восстановленные по картографическим данным, начальное распределение фитопланктонных популяций, полученные путем обработки данных ДЗЗ. Разработан программный модуль, встроенный в существующий программный комплекс «Azov3D», проведен численный эксперимент по прогнозному моделированию изучаемых субстанций.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>.

## Усовершенствованные математические модели распространения загрязняющих веществ

Белова Ю. В.<sup>1</sup>, Кузнецова И. Ю.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В связи с увеличением объемов производства пластика в среднем на 4–5% ежегодно, наблюдается почти экспоненциальный рост объемов отходов пластика, поступающих в водные экосистемы. Пластиковый мусор при деструкции за счет механического и биохимического воздействия превращается в частицы микропластика размером не более 5 мм, которые представляют особую опасность для живых организмов прибрежных и морских систем ввиду того, что их очень трудно изъять из водной среды, они достаточно легко попадают в желудочно-кишечные тракты (ЖКТ), а также в органы дыхания гидробионтов и приводят к их заболеваниям и даже гибели. В настоящее время отсутствуют объединенные модели гидрофизики, биогеохимических циклов и гидробиологии, учитывающие специфические особенности прибрежных систем — существенный перепад глубин, наличие зон распреснения, вихревой характер течений вблизи берега (из-за наличия кос, заливов, сложного рельефа дна и пр.) и другие факторы, которые позволяют осуществлять средне- и долгосрочные прогнозы распространения загрязняющих субстанций, содержащих частицы пластика, их трансформацию, поглощение частиц микропластика гидробионтами и оценку наносимого вреда кормовой базе и ихтиофауне в зависимости от их видового состава и демографии.

Данная работа посвящена построению, исследованию, комплексированию с моделью гидродинамики нестационарной, пространственно-неоднородной математической модели, описывающей нелинейные процессы биогеохимических циклов, распространения загрязняющих веществ, в том числе частиц микропластика, поглощение этих частиц зоопланктоном, обитающем в прибрежных системах, подобных Азовскому морю. Дискретизация задачи осуществляется с применением усовершенствованных разностных схем, обладающих лучшей точностью и большим запасом устойчивости по сравнению с известными в случае больших значений сеточного числа Пекле. Пространственное распределение изучаемых субстанций, подаваемое на вход модели биогеохимических процессов, получено с помощью программных средств обработки данных дистанционного зондирования Земли, включающих алгоритмы анализа и обработки полутонных изображений прибрежных и морских систем, полученных дистанционно для определения областей с повышенной концентрацией планктонных популяций, содержащих загрязняющие вещества, включая пластик, взвешенное вещество, поверхностные пленки, в том числе пленки нефтепродуктов и др. Разработан программный комплекс, позволяющий моделировать распространение загрязняющих веществ, включая микропластиковые частицы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00295, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>).

## Особенности использования ИОС вуза в преподавании естественнонаучных дисциплин

**Блинова Е. Е., Евланова А. Г.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Информационно-образовательная среда (ИОС) высшего учебного заведения является неотъемлемой частью образовательного процесса. Современный уровень развития информационных технологий предоставляет новые возможности в организации учебного процесса, использовании принципов виртуализации, мобильности, адаптивности и мгновенной обратной связи. Вместе с тем процесс цифровизации образования предъявляет новые требования к субъектам образовательного процесса, к содержанию информационно-образовательного пространства, к регламентации взаимодействия всех участников образовательного процесса, к методам и параметрам оценки учебно-познавательной деятельности обучающихся. Дисциплины общематематического и естественнонаучного блока являются основой, инструментом для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, хотя каждая из них по-своему решает задачу профессиональной подготовки специалиста.

Существует несколько компонентов информационно-образовательной среды: технологический, организационно-методический, системно-деятельностный и личностно-ориентированный. Содержание технологического компонента образовательной среды представлено технологиями, методами и приёмами, формами организации образовательного процесса. Образовательная среда определяется прежде всего профессионально-деятельностной или организационно-методической позицией субъектов образовательного процесса, так как специфическим свойством образовательной среды является ее насыщенность образовательными ресурсами. Формирование, обогащение и распределение таких ресурсов есть предмет именно организационно-методической деятельности. Создание образовательных ресурсов становится ключевой управленческо-педагогической задачей для всех субъектов образовательного процесса вуза. Системно-деятельностный подход в обучении студентов предполагает такую организацию процесса обучения, в котором главное место отводится активной и разносторонней, в максимальной степени самостоятельной познавательной деятельности обучающихся. Одной из важных форм организации обучения является личностно-ориентированный подход, требующий учитывать в системе образования не только обучение, но и развитие личности, знания, умения и навыки обучающегося, индивидуальные способности и личностные качества на основе компенсаторного подхода.

Современные технологии позволяют создавать и развивать информационно-образовательную среду вуза с учетом всех требований и особенностей нынешнего этапа образования.

Данное исследование согласуется с ключевыми направлениями и задачами развития российской системы образования, определенными в национальном проекте «Образование» и федеральном проекте «Цифровая образовательная среда».

## Идентификация двумерных законов распределения предварительных напряжений в сплошных и имеющих отверстия и включения неоднородных пластинах

**Богачев И. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Ввиду активного использования в современной медицине и травматологии изделий и имплантов, изготовленных из новых неоднородных материалов, важной задачей механики является создание адекватных моделей, учитывающих их сложную структуру, зависимость механических характеристик от пространственных координат и возможное наличие в них предварительных напряжений (ПН), вызванных особенностями технологий изготовления. Подобные материалы, в частности, используются при изготовлении пластин компрессионного типа для костного остеосинтеза, имеющих специальные отверстия по всей длине. Такая конструкция позволяет фиксировать головки винтов, вкручивающихся в костную ткань отломков, непосредственно в самой пластине, что обеспечивает максимальную фиксацию и компрессию. В процессе эксплуатации пластины испытывают высокие динамические нагрузки, в окрестности отверстий могут образовываться концентраторы напряжений, что в сочетании с ПН может привести к разрушениям пластин и травмам. В связи с этим задачи идентификации механических характеристик таких пластин и полей ПН в них с помощью неразрушающих акустических подходов имеют важное практическое значение.

В докладе представлена модель установившихся планарных колебаний сплошных и имеющих отверстия и включения неоднородных пластин с учетом ПН. Свойства пластин и компоненты ПН в рассматриваемой плоской постановке считались функциями двух координат. ПН в пластинах моделировались с помощью решения вспомогательных задач о статическом нагружении некоторой начальной нагрузкой. Рассматривались защемленные с одной стороны прямоугольные пластины, как сплошные, так и имеющие отверстие или жесткую вставку. Расчет колебаний и решение вспомогательных задач производились на основе разработанной конечно-элементной схемы, реализованной в пакете FreeFem++. Рассмотрена обратная задача идентификации двумерного распределения ПН по данным акустического зондирования в результате приложения нескольких наборов зондирующих нагрузок на нескольких частотах. Для ее решения был разработан итерационный подход, на каждой итерации которого поправки к искомым функциям определялись из построенного операторного уравнения специального вида. Его решение производилось с помощью проекционной методики, позволившей свести задачу к исследованию плохообусловленных СЛАУ относительно коэффициентов разложений функций-поправок по заданным системам функций на основе метода А. Н. Тихонова. Для рассмотренных пластин проведены вычислительные эксперименты по идентификации двумерных полей ПН различного вида.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>), в Южном федеральном университете.

Исследование деформирования решетчатой пластинки склеры глаза  
при наличии предварительных напряжений,  
вызванных внутриглазным давлением

**Богачев И. В., Недин Р. Д.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Важным направлением математического моделирования в биомеханике является создание моделей тканей и органов, адекватно описывающих их поведение в процессе жизнедеятельности. В первую очередь это касается органов, недоступных для непосредственного исследования, в связи с чем для диагностики их состояния требуются неинвазивные методы. Такого рода методы важны для исследования тканей глазного яблока, в частности, решетчатой пластинки склеры глаза (РПСГ), находящейся на задней его части. Она представляет собой слоистую структуру круглой формы, ослабленную множеством отверстий, занимающих более 65% ее площади, размер которых увеличивается к ее центру. Вследствие перепадов внутричерепного и внутриглазного давления в РПСГ могут возникать поля предварительных напряжений (ПН). Деформации РПСГ могут вызывать сдавливание нервных волокон зрительного нерва, проходящих сквозь ее отверстия, и их дальнейшую атрофию с последующим развитием оптической нейропатии, что является одной из наиболее распространенных причин возникновения глаукомы.

В докладе представлена модель РПСГ как упругой неоднородной пластины в рамках гипотез деформирования Тимошенко — Миндлина, позволяющая учесть в явном виде ее геометрические особенности (на основе анализа опубликованных в литературе снимков), неоднородность материальных характеристик и наличие ПН. Поля ПН рассчитываются в результате решения вспомогательных задач статики о прогибе пластины под действием распределенной нагрузки, моделирующей внутриглазное давление. Для решения основной задачи расчета колебаний пластины и вспомогательных задач разработана вычислительная схема на основе метода конечных элементов в пакете FreeFEM++. Было проанализировано влияние ПН в решетчатой пластине на ее деформационные и динамические характеристики, в частности, поля планарных и изгибных перемещений, углы поворота нормали вдоль осей в плоскости пластины, резонансные частоты, амплитудно-частотные характеристики. Также ввиду важности определения местоположения точки перегиба РПСГ, характеризующей смену участков выпуклости/вогнутости, для практической диагностики глаукомы, было проведено исследование влияния уровня ПН на координаты точки перегиба.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>), в Южном федеральном университете.

## Особенности изучения раздела «линейная алгебра» в условиях цифровой трансформации в образовании

**Бордюгова Т. Н., Игнатова А. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Работа посвящена рассмотрению вопроса интеграции раздела «Линейная алгебра» с курсом «Информационно-коммуникационные технологии и информационная безопасность» будущих учителей математики по направлению 44.03.01 «Педагогическое образование: Математика» заочной формы обучения.

В работе рассмотрены основные методические рекомендации реализации учебного процесса при изучении операций над матрицами, различных способов вычисления определителей, решении систем линейных алгебраических уравнений (метод Гаусса, метод Крамера), нахождении общего решения системы линейных алгебраических уравнений и др., согласно уровневой модели<sup>1</sup> формирования цифровой компетенции учителя-предметника.

Кроме того, представлены результаты частичной реализации использования технологии поэтапного погружения студентов (SAMR) 1 курса заочной формы обучения Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича в основные возможности использования цифровых технологий обработки больших данных в будущей профессиональной деятельности. На первом (инвариантном) уровне разработанной модели формирования цифровой компетенции учителя-предметника, студенты, не имеющие базовых навыков в области программирования, прослушав курс, успешно справлялись с написанием программного кода обработки матриц (сложение двух матриц, нахождение ранга, транспонирование матрицы и др.), используя библиотеку NumPy языка Python. Использование библиотек Python позволяет не только осуществлять реализацию готовых шаблонных решений из раздела линейной алгебры и анализа данных, но и строить графики функций, диаграммы и анимации, которые можно использовать при подготовке дидактических учебных материалов (презентация, контрольные работы и др.).

Такой подход обеспечит формирование не только цифровой компетенции учителя-предметника, но и развитие навыков решения математических задач с помощью интерпретируемого языка программирования.

---

<sup>1</sup>Бордюгова Т. Н., Беллик Е. В. Уровневая модель формирования цифровой компетенции учителя-предметника // Педагогическая информатика. 2022. № 1. С. 12 – 17.

Применение поэтапной вычислительной схемы  
для моделирования волновой динамики  
системы «пьезоактуатор — упругий волновод — пьезосенсор»

**Варелджан М. В., Еремин А. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

В докладе обсуждается методика моделирования волновой динамики системы «пьезоактуатор — упругий волновод — пьезосенсор», основанная на сочетании метода конечных элементов (МКЭ) и полуаналитического интегрального подхода. Ее реализация состоит из нескольких основных этапов. На первом из них с помощью МКЭ моделируется процесс возбуждения упругих волн произвольным поверхностным пьезопреобразователем в изотропном слое, для чего рассматривается расчетная область небольших размеров, содержащая пьезоактуатор, со специальными граничными условиями на боковых торцах, позволяющими учесть отток волновой энергии на бесконечность (идеально-согласованные слои — PML). На втором этапе из численного решения интегрального уравнения Винера — Хопфа с использованием вариационно-разностного метода определяются неизвестные напряжения в области контакта между пьезоактуатором и волноводом, позволяющие рассчитывать волновые поля, возбуждаемые преобразователем, через соответствующие явные интегральные и асимптотические представления в рамках полуаналитического интегрального подхода. При этом в качестве правой части в интегральном уравнении используются значения компонент вектора смещений в области контакта или в области той же формы, но расположенной на противоположной стороне волновода, полученные из МКЭ модели. Далее в предположении достаточно большого расстояния между актуатором и сенсором, а также малой массы последнего (например, в случае тонкого пленочного пьезоэлемента), не учитываются взаимные переотражения волн между ними, и для моделирования отклика пьезосенсора используется МКЭ. Рассматривается расчетная область в форме прямоугольного параллелепипеда, содержащая часть волновода с пьезосенсором на поверхности. В качестве граничных условий на его боковом торце, ориентированном к актуатору, задаются перемещения, соответствующие приходящему от источника колебаний волновому полю. Для его расчета используются асимптотические представления бегущих волн с учетом вектор-функции поверхностной нагрузки, построенной на предыдущем этапе. На оставшихся трех боковых гранях задаются поглощающие граничные условия в виде PML.

Возможность применения разработанной методики в случае моделирования процессов возбуждения и измерения бегущих упругих волн пленочными пьезоэлементами подтверждается сопоставлением получаемых на ее основе результатов с полными МКЭ моделями, а также с экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ № FZEN-2020-0017.



## О способах восстановления реологических свойств функционально-градиентных балок

**Варченко А. А., Юров В. О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Материалы с неоднородными механическими характеристиками широко используются в современных конструкциях. Исследование моделей неоднородных материалов, в том числе сред с затуханием, является одним из важных направлений развития механики сплошной среды.

Рассмотрена задача об определении переменных реологических свойств функционально-градиентных балок по некоторой дополнительной информации о ее решении. Колебания консольно-закрепленной неоднородной вязкоупругой балки изучены в рамках двух моделей: Эйлера — Бернулли и Тимошенко. Колебания вызываются сосредоточенным на конце моментом. При решении прямой задачи для моделирования затухания в настоящей работе используется концепция комплексных модулей, в которой при анализе установившихся колебаний однородных структур достаточно заменить в соответствующей краевой задаче теории упругости упругие характеристики на комплексные функции частоты колебаний. При этом используется модель стандартного вязкоупругого тела. Уравнение колебаний балки и граничные условия представлены в безразмерной форме и сведены к канонической системе. Для решения основной задачи использован метод пристрелки.

Исследованы обратные задачи двух типов, различающиеся способом задания дополнительной информации: задано смещение в одной точке в некотором частотном диапазоне (I); заданы смещения всюду для одной частоты (II). Решение обратной задачи I типа для модели Эйлера — Бернулли проведено для различных видов функции, описывающей изменение комплексного модуля. Для решения обратной задачи II типа на основе операторного метода Ньютона построен итерационный процесс уточнения искомых функций, причем начальные приближения выбраны в виде линейных функций. На каждом шаге решается операторное уравнение Фредгольма 1-го рода с комплексным ядром для определения поправки, сведенное к системе вещественных интегральных уравнений с непрерывными ядрами, которая решается при помощи метода регуляризации А. Н. Тихонова. Восстановлены функции, отражающие законы изменения длительного и мгновенного модулей. Численная реализация представленного подхода осуществлена в пакете Maple.

Для модели Тимошенко решена обратная задача в первой постановке по восстановлению различных (возрастающих, убывающих, немонотонных) функций, описывающих изменение вдоль осевой координаты мгновенного и длительного модулей упругости. Сформулирована обратная задача во второй постановке.

Авторы благодарят за помощь в работе научного руководителя проф. А. О. Ватульяна.

Исследование выполнено при частичной поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

## Моделирование деформирования термобарьерных покрытий

**Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается термоупругое полупространство с покрытием, свойства которого аналогичны термобарьерным покрытиям, применяемым, в частности, для защиты частей газотурбинных двигателей. Покрытие состоит из трех слоев: металлического связующего слоя, керамического слоя и слоя термически выращенного оксида, формируемого в процессе эксплуатации или термической обработки между связующим и керамическим слоем. Рассмотрен случай однородного и функционально-градиентного связующего слоя с произвольным непрерывно-неоднородным изменением свойств по глубине. На поверхности покрытия задано термомеханическое воздействие в круговой области. С использованием техники интегральных преобразований получены краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления функций податливости (трансформант ядер интегральных уравнений задач). Произведен расчет функций податливости для всех интерфейсов между слоями покрытия и подложки в случае однородного и функционально-градиентного связующего слоя. Изучено влияние толщины связующего слоя и градиента свойств на функции податливости на различных интерфейсах. Показано, что наибольшее влияние наблюдается для функций податливости, соответствующих касательной механической нагрузке.

Рассмотрен случай смешанных и несмешанных граничных условий на поверхности. В частности, рассмотрены задачи о вдавливании штампа, задача о локальном разогреве и задача о вдавливании разогретого штампа. Получены аналитические выражения в виде квадратур для вычисления радиальных и нормальных смещений, нормальных и касательных напряжений, температуры и теплового потока на поверхности покрытия и на интерфейсах между слоями. С использованием аппроксимаций Паде для функций податливости часть квадратур взята в аналитическом виде, часть сведена к конечным интервалам. Для вычисления термомеханических характеристик на интерфейсах между слоями предложена схема, позволяющая применить идею двухстороннего асимптотического метода. Контактные напряжения и тепловой поток в случае задач со смешанными граничными условиями определены в приближенном аналитическом виде из решения парных интегральных уравнений с использованием разработанных ранее методов. Результаты получены в виде, представляющем собой сумму двух слагаемых, первое из которых соответствует однородному полупространству без покрытия, второе описывает вклад, вносимый покрытием. В явном виде выделены слагаемые, соответствующие типам приложенной нагрузки.

При малой и большой относительной толщине покрытия наблюдается сходимость результатов к результатам для однородного полупространства без покрытия. Полученный приближенный аналитический вид удобен для проведения расчетов и многопараметрического анализа термомеханических характеристик термобарьерных покрытий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-49-08014, <https://rscf.ru/project/22-49-08014/>).

## О некоторых аспектах исследования обратных коэффициентных задач

**Ватульян А. О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Обратные коэффициентные задачи (ОКЗ) математической физики — это важный класс задач о восстановлении коэффициентов дифференциальных операторов, имеющих многочисленные приложения на этапе параметрической идентификации моделей в механике новых, в том числе функционально-градиентных, материалов, диагностике уровня напряжений и реологических свойств, биомеханике тканей. Задачи такого типа обычно разделяют на два больших класса. Для задач первого класса искомые параметры постоянны и приводят к конечномерным ОКЗ, где эффективны метод Прони и минимизация функционала невязки с помощью различных подходов. Для задач второго класса искомые характеристики модели зависят от координат или полевых переменных и приводят к ОКЗ в функциональных пространствах (условно бесконечномерные ОКЗ). Нахождение искомым характеристик — параметров или функций, осуществляется при задании дополнительной информации (отклике объекта при некотором воздействии). Ряд исследований показал, что некоторые воздействия приводят к весьма сильному отклику, а некоторые вообще не позволяют выявить влияние некоторой функции, фигурирующей в модели (модуль сдвига при продольных колебаниях стержня). Таким образом, понятие чувствительности объекта на некоторое воздействие по отношению к некоторому фактору (параметру или функции), давно используемое в прикладных задачах, было обобщено на понятие чувствительности входной информации по отношению к искомым функциям. Были введены функции чувствительности в функциональных пространствах, в которых отыскиваются искомые функции, на основе введения производных операторов по Фреше. С помощью таких характеристик изучено влияние способа нагружения и частотного интервала на эффективность решения ОКЗ.

В качестве наиболее распространенных методов решения нелинейных ОКЗ отметим итерационный метод Ньютона, на каждом шаге которого решается прямая задача, а для определения поправки (или нескольких поправок) решается интегральное уравнение (или система интегральных уравнений) Фредгольма с непрерывными ядрами, которые при решении требуют регуляризации в той или иной форме. Также отметим иные возможности построения последовательностей функций, сходящихся к искомым, и опирающиеся либо на принцип сжимающих отображений, достаточно апробированный в нестационарных постановках при малых временах наблюдения, либо на идеи монотонности и на итерационный процесс, использующий принцип Больцано — Вейерштрасса в соответствующем функциональном пространстве. Кроме того, в качестве перспективного способа следует отметить построение решений в конечномерном подпространстве при аппроксимации искомым функций линейными или квадратичными.

Обсуждены вычислительные аспекты ОКЗ, представлены примеры.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265>), в Южном федеральном университете.

## Математическое моделирование влияния жизнедеятельности микроорганизмов на деструкционные процессы мелководного водоема

Вела Ф. А.<sup>1</sup>, Никитина А. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Работа посвящена моделированию влияния жизнедеятельности микроорганизмов на деструкционные процессы мелководного водоема на графическом ускорителе NVIDIA Tesla K80. Деструкция фитопланктона (детрит и продукты его разложения) является первым и главным источником органических веществ в природных водах. В общем перечне подлежащих определению показателей вод важное место занимает измерение первичной продукции и деструкции, а также связанное с этим измерением определение числа клеток бактерий и фитопланктона. Если в водоем попадает слишком большое количество биогенных элементов (систематически сбрасываются стоки заводов и удобрений с полей), то происходит нарушение биохимического цикла. Начинается бурный рост водорослей, снижается поступление света в нижние слои водоема, замедляются процессы фотосинтеза. Одновременно усиливается гниение большой массы отмерших клеток. На их разложение уходит весь растворенный в воде кислород, погибают не только животные, но и разлагающие детрит бактерии.

На основании проведенных экспедиционных исследований разработана математическая модель гидробиологических процессов Азовского моря, базирующаяся на работах Матишова Г. Г., Ильичева В. Г., Четверушкина Б. Н. и Якушева Е. В. Учитывался тот факт, что при штилях и близких к ним ветровых ситуациях возникают анаэробные условия в придонных слоях Азовского моря. Предложенная пространственно-временная гидрофизическая модель описывает изменение концентрации фито-, зоопланктона и биогенных веществ (соединений азота, фосфора, кремния, серы и др.), расход кислорода на разложение детрита аэробными тионовыми бактериями *Thiobacillus*, влияние на процесс самоочищения водоема анаэробных бактерий рода *Desulfovibrio*; модель позволяет изучать процессы самоочищения мелководного водоема. Разработка программного модуля, ориентированного на графический ускоритель, позволила провести численные эксперименты для задачи биологической кинетики. Изучено влияние биогенных веществ на рост фито- и зоопланктона в реальной области сложной формы (прибрежная система — Азовское море). На основе сценарного подхода изучен механизм возникновения заморных явлений в мелководном водоеме в результате расхода кислорода на разложение детритных скоплений. Для численного решения задачи биологической кинетики на последовательности сгущающихся сеток были разработаны параллельные алгоритмы, проанализирована их эффективность в случае разного количества задействованных потоков. Разработка эффективных параллельных алгоритмов позволила изучить как внутри-, так и межвидовые коммуникации между планктонными популяциями прибрежной системы в режиме ограниченного времени, что является актуальным при возникновении опасных природных и техногенных явлений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00295, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>).

## Определение смещений поверхности полупространства с покрытием при вдавливании индентора

**Волков С. С., Литвиненко А. Н., Алексеева А. Д.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Большинство элементов конструкций и деталей машин работают в контакте друг с другом. Деформирование поверхностей контактирующих тел может привести к нарушению работы и последующему разрушению детали машины или элемента конструкции. Исследование влияния нагрузки, наличия и свойств покрытия на деформирование и изменение профилей контактирующих тел представляет большой интерес.

В настоящей работе предложена модель для изучения деформации материала, вызванной вдавливанием в его поверхность индентора. В основе модели лежит осесимметричная задача линейной теории упругости для полупространства с функционально-градиентным покрытием. Рассмотрен случай однородного покрытия и непрерывного изменения модуля Юнга по толщине покрытия. Покрытие жестко сцеплено с полупространством. В поверхность покрытия внедряется сферический индентор, форма основания которого аппроксимируется параболоидом вращения. Необходимо определить распределение контактных давлений под штампом, а также радиальные и нормальные смещения поверхности покрытия. Для решения задачи использована техника интегральных преобразований Ханкеля и двухсторонний асимптотический метод, основанный на аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения выражениями специального вида. Метод позволил получить решения рассматриваемой задачи в случае фиксированной зоны контакта (индентор имеет острый край) и нефиксированной зоны контакта (выполнено условие отсутствия контактных давлений на краю области контакта). Оба решения построены в приближенном аналитическом виде, эффективном для покрытия любой толщины. Погрешность полученных решений является величиной того же порядка малости, что и погрешность аппроксимации трансформанты ядра. Для большинства характерных законов изменения модуля Юнга по глубине может быть построена аппроксимация, погрешность которой не превышает 1%. Получены квадратуры для определения радиальных и нормальных смещений поверхности покрытия, которые сведены к конечным, используя равенство Парсеваля и табличные интегралы. Это позволило получить приближенные аналитические выражения для смещений поверхности покрытия как вне индентора, так и под ним, в удобном для вычислений виде.

Проведены численные расчеты радиальных и нормальных смещений серии покрытий на основе нитрида титана. Проанализировано влияние относительной толщины покрытия на смещения, показана сходимости результатов к классическим результатам для полупространства без покрытия для малых и больших значений относительной толщины покрытия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-49-10062, <https://rscf.ru/project/23-49-10062/>).

## Влияние нелинейности на величину критической силы при сжатии длинного кругового цилиндра

**Волокитин Г. И.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается задача устойчивости нелинейно-упругого прямого кругового цилиндра, сжимаемого с торцов абсолютно жесткими гладкими плитами. Боковая поверхность свободна от нагрузки. Упругие свойства материала определены потенциалами Мурнагана и Блейтца — Ко. Исследование устойчивости проводится с помощью уравнений нейтрального равновесия в форме А. И. Лурье.

Докритическая деформация, как и в известной задаче Сенсенига для полунелинейного материала, предполагается однородной. Физические компоненты тензора напряжений в этом случае — константы. С использованием конкретных выражений законов состояния и условия на границе получены уравнения, связывающие начальные осевые и радиальные удлинения. Вектор добавочного перемещения выбирался в виде, допускающем наиболее общие формы выпучивания. Выведена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая смежное равновесие в объеме. Из условий отсутствия на торцах осевого перемещения и напряжений на внешней боковой поверхности цилиндра записаны соотношения на границе.

Решение системы разыскивалось в виде членов разложения Фурье по окружной и осевой координатам, где параметры волнообразования выбраны в соответствии с условиями на торцах. Переменные в дифференциальных уравнениях и граничных условиях разделяются. В результате сформулирована задача на собственные значения, описываемая однородной системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений для трех неизвестных (коэффициентов в разложениях) второго порядка с шестью краевыми условиями. Модули упругости, величины, определяющие начальную деформацию, и параметры волнообразования входят нелинейно в коэффициенты уравнений. Критическое значение параметра относительного удлинения определяется собственными значениями этой задачи. Для решения задачи на собственные значения с нелинейным параметром применен численный метод нахождения бифуркационных величин.

Проведено численное исследование влияния физической и геометрической нелинейности на величину критической сжимающей силы.

Большие деформации растяжения — сжатия и кручения  
цилиндрической трубы с учетом прямолинейных винтовых дислокаций

Гайбарян С. А., Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Дислокации являются важным элементом структуры твердых тел. Они в значительной мере определяют прочностные, упругопластические, деформационные и другие свойства многих конструкционных и наноструктурных материалов.

В работе рассматривается упругое тело, имеющее в отсчетной конфигурации форму круговой цилиндрической трубы. Плотность дислокаций задается как тензор второго ранга вида  $\boldsymbol{\alpha} = \beta(r) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$ , что соответствует осесимметричному распределению прямолинейных винтовых дислокаций. К торцам цилиндра прикладываются продольная сила и крутящий момент. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии цилиндрической трубы в классе изотропных несжимаемых материалов строится в рамках нелинейной континуальной теории непрерывно распределенных дислокаций.

Система уравнений, описывающая напряжённое состояние упругого несжимаемого тела с непрерывно распределёнными дислокациями, состоит из уравнений равновесия для напряжений, уравнения несовместности относительно тензора дисторсии  $\mathbf{C}$  и условия несжимаемости  $\det \mathbf{C} = 1$ , а также определяющих соотношений:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* - p\mathbf{C}^{-T}, \mathbf{D}^* = [\tau_1(I_1, I_2) + I_1\tau_2(I_1, I_2)] \mathbf{C} - \tau_2(I_1, I_2) \mathbf{G} \cdot \mathbf{C}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  — несимметричный тензор напряжения Пиолы,  $\mathbf{G}$  — мера деформации Коши — Грина,  $\tau_1, \tau_2$  — скалярные функции отклика материала,  $p$  — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию,  $I_1, I_2$  — инварианты деформации.

Решение уравнения несовместности ищется в виде

$$\mathbf{C} = \frac{dR}{dr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + H(r) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \psi R \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \lambda \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (3)$$

Функции  $H(r)$  и  $R(r)$  находятся в квадратурах из уравнения несовместности и условия несжимаемости:

$$H(r) = \frac{1}{r} \int_{r_1}^r \beta(\rho) \rho d\rho, R^2(r) = 2 \int_{r_1}^r \frac{\rho d\rho}{\lambda - \psi \rho H(\rho)} + R_1^2. \quad (4)$$

В (4)  $R_1$  имеет смысл внутреннего радиуса трубы после деформации и определяется из граничного условия на внутренней поверхности трубы  $D_{rR}(r_1) = 0$ .

Численный анализ проводится для несжимаемого материала Муни — Ривлина. Распределение дислокаций задается функцией  $\beta(r) = \beta_0 r^{-1}$ . Исследуется влияние дислокаций на напряженное состояние цилиндрической трубы и на зависимости продольной силы и крутящего момента от параметра дислокации.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00123).

## Конечно-элементное моделирование конструкции наконечника ленсотомы

Германчук М. С.<sup>1</sup>, Егорова А. А.<sup>2</sup>, Епихин А. Н.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>3</sup>*Ростовский государственный медицинский университет, Ростов-на-Дону*

Первым в операции по имплантированию интраокулярных линз является удаление естественного хрусталика с помощью наконечника лэнсотомы. Этот наконечник представляет собой металлическую трубку диаметром до 1 мм, которая совершает возвратно поступательные движения и своим концом разрушает хрусталик, а разрушенные фрагменты удаляются по трубке за счет создания пониженного давления в ней. В известных устройствах лэнсотомы, в основном используется электромагнитный привод для движения наконечника, вместе с этим имеются патенты на использование пьезоэлектрического привода. Этот привод состоит из набора полых цилиндрических пьезоэлементов, поляризованных вдоль оси и скрепленных осевым винтом. Собственная частота осевой электросвязной моды колебаний такого устройства составляет порядка 10 кГц.

В работе построена математическая модель лэнсотомы, параметрами которой являются размеры и количество пьезоэлементов, размеры и материалы конструктивных элементов: передней и задней гаек, винта, концентратора и самого наконечника. Одной из задач работы является определение набора собственных частот всего устройства. Это связано с тем, что в области рабочей частоты присутствуют различные моды колебаний, в том числе изгибные, которые не являются электросвязными, но могут возбуждаться при контакте торца наконечника с хрусталиком. Присутствие этих колебаний негативно сказывается на качестве работы лэнсотомы, поэтому конструктивные элементы должны быть подобраны так, чтобы рабочая частота была отделена от других частот.

Второй задачей, которая решается в работе, является выбор формы торца наконечника, который контактирует и разрушает хрусталик. К параметрам этой формы относятся: угол среза конца трубки, возможная заточка ее цилиндрических поверхностей и т. п. При этом важно, чтобы процесс разрушения был эффективен, а прочность конструкции торца была такой, чтобы он сам не разрушался.

Третьей проблемой, которая связана с тем, что наконечник предполагается одноразовым, является разработка его связи с концентратором — винтовое соединение, соединение с натягом или другое. Эти соединения моделируются различным контактным взаимодействием наконечника и концентратора.

Для решения этих задач в рамках линейной теории упругости и электроупругости в пакете Ansys была разработана конечно-элементная модель устройства. Проведен модальный и гармонический анализ устройства при возбуждении колебаний с помощью разности электрических потенциалов. Проведена оценка механических напряжений в окрестности торца наконечника.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-19-00423).



## Математическое моделирование многофазных реагирующих течений термодинамическим методом

**Гидаспов В. Ю., Северина Н. С., Кули-Заде Ф. Т.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*

В настоящее время крайне важна работа над расширением возможностей применения термодинамического метода при постановке и решении научно-технических задач, в т. ч. для исследования многофазных высокотемпературных реагирующих течений, при которых без учета химически реагирующих процессов невозможно получить достоверные результаты. Развитие вычислительной техники позволяет усложнять имеющиеся модели и исследовать все более тонкие аспекты высокоэнергетических течений. Используемые алгоритмы и вычислительные модели должны обеспечивать выполнение законов сохранения и начал термодинамики, гарантировать переход изучаемой системы в состояние термодинамического равновесия при условии неубывания энтропии.

В работе описана и апробирована физико-математическая и вычислительная модели течений многокомпонентного газа с учетом протекания равновесных химических превращений и образования конденсированных компонентов, обеспечивающие непрерывный переход от модели совершенного газа к реальному.

Разработаны вычислительные модели и комплекс программ для расчета равновесного состава многокомпонентной смеси газов, описываемых термическими уравнениями состояния для смеси совершенных и «реальных» газов (с использованием вириальных коэффициентов и однофлюидной модели смешения) при заданных парах термодинамических величин, а также равновесных ударных адиабат и изоэнтропических течений, с учетом возможного образования конденсированных компонентов.

Приводятся результаты верификации и валидации моделей равновесных расчетов путем решения тестовых задач, сравнения с результатами других авторов и экспериментальными данными. Определены области применимости моделей совершенного и реального газов.

Получены количественные оценки влияния вида уравнения состояния, описывающего исходную смесь и продукты сгорания, на достигаемые термодинамически равновесные параметры при расчете детонационных адиабат, параметров детонации Чепмена—Жуге для смесей водород—кислород, метан—кислород—азот—инертный газ и изоэнтропических равновесных течений. Численно решена задача о распаде произвольного разрыва на границе инертный газ—горючая смесь. Получены характеристики реализующихся детонационных волн для газовых пар: гелий—смесь водорода с кислородом, аргон—смесь метана с воздухом, в предположении о достижении состояния термодинамического равновесия в продуктах сгорания горючей смеси.

## Влияние уровня крепления гаптики на разрушение целостности связи между роговицей и кератопротезом

Глушко Н. И., Алексеева А. Д.

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В процессе вживления и эксплуатации кератопротезы подвергаются внешним и внутренним механическим нагрузкам, которые могут привести к повреждениям тех биологических тканей, с которыми контактирует искусственный имплантат. Большие деформации, смещения и появление отслоения между кератопротезом и слоями роговицы приводят к некрозу биологических тканей и дальнейшему частичному или полному отторжению. В связи с этим, в работе было проведено исследование влияния глубины закрепления гаптики на отсутствие нарушения контакта между слоями роговицы и кератопротеза.

Построена конечно-элементная модель кератопротеза с перфорированной кольцевой опорной пластиной (гапстикой) в конечно-элементном пакете FlexPDE. Оптическая часть (оптика) представляет собой прозрачное цилиндрическое тело, жестко связанное с гапстикой. Диаметр линзы составляет 6 мм, что дает большее поле зрения в сравнении с конструкциями рассматриваемыми ранее. Опорный элемент кератопротеза перфорирован более чем на 50% и имеет диаметр 20 мм. Кератопротез выполнен из полимера (полиметилметакрилат).

Учитывалась сложная биомеханическая структура роговицы, которая состоит из пяти слоев различной толщины, обладающих разными механическими свойствами. Для кератопротезов были рассмотрены варианты геометрических моделей с тремя видами расположения опорного элемента относительно слоев роговицы: поверхностным, в середине роговичного слоя и под роговицей. Параметры кератопротеза: толщина гаптики на внутренней части —  $1/5$ , на внешнем диаметре —  $1/10$  толщины роговицы, угол раствора гаптики  $60-80$  градусов, модуль упругости гаптики в два раза меньше модуля упругости оптики.

В процессе моделирования были выявлены максимальные смещения при трех вариантах закрепления гаптики, при этом возникают неравномерные смещения оптики: при нижнем закреплении они меньше в 2–3 раза, чем при центральном и верхнем.

Зафиксированы максимальные напряжения по Мизесу в районе внешнего диаметра гаптики, которые возрастают на 50% при центральном и на 80% при поверхностном креплении гаптики по сравнению с нижним закреплением.

В рассматриваемой постановке задач между роговицей и цилиндрическим элементом гаптики имеется жесткая связь, но в реальности эти поверхности контактируют с возможностью разрыва контакта, поэтому наличие на этой интерфейсной границе растягивающих радиальных напряжений может привести к нарушению связи между роговицей и конструкцией кератопротеза. Анализ полученных напряженных состояний показал, что наиболее безопасным является вариант нижнего закрепления гаптики.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

## Алгоритмы анализа структуры течения на основе спектрально-бессеточного метода расчёта вихревой динамики

**Говорухин В. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена задача анализа двумерной динамики невязкой несжимаемой жидкости, которая математически описывается системой уравнений

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad \omega = -\Delta\psi. \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  — завихренность,  $\psi$  — функция тока,  $t$  — время, а  $x, y$  — пространственные координаты. Область течения  $D = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ . На  $\partial D$  заданы условия непротекания или протекания на ее части, а также начальное условие для  $\omega$ .

Для решения нестационарной задачи используется спектрально-бессеточный метод, в основе которого лежат следующие положения:  $\psi$  для каждого  $t$  приближается отрезком ряда Фурье, коэффициенты которого находятся методом Бубнова — Галёркина;  $\omega$  аппроксимируется значениями в маркерных частицах и кусочно-непрерывными кубическими многочленами с коэффициентами, определяемыми методом наименьших квадратов по значениям в маркерных частицах; динамика маркерных частиц рассчитывается как решение задачи Коши. Преимуществами метода является непрерывность поля скорости в  $D$  и произвол в задании начального положения маркерных частиц. Это позволяет вместе с расчётом динамики реализовать и использовать следующие алгоритмы качественного анализа течения и массопереноса:

1. Алгоритм построения «моментального» фазового портрета поля скорости течения, который включает поиск особых точек, сепаратрис седловых точек, их устойчивых и неустойчивых многообразий.
2. Анализ вихревой конфигурации и её качественных изменений с помощью эвристического метода оценки структуры течения.
3. Построение и анализ траекторий и позиций маркерных частиц в качественно различных областях течения.
4. Вычисление времени пребывания маркерных частиц в  $D$  и зависимости координаты выхода частицы из  $D$  от её координаты на входе при протекании жидкости сквозь область течения.
5. Алгоритм построения поля локальных показателей Ляпунова для исследования пассивного переноса в области течения и структуры потока.

В докладе представлены результаты численного моделирования и анализа изменения структуры вихревых течений с использованием предложенных алгоритмов в замкнутых областях и в контролируемом проточном канале с граничными условиями Юдовича. Вычисления демонстрируют эффективность предложенных алгоритмов для детального анализа структуры вихревой конфигурации во времени.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00371).

Моделирование, изготовление и экспериментальная верификация  
волновых свойств слоистых акустических метаматериалов  
с тонкими разрезами

**Голуб М. В., Фоменко С. И., Дорошенко О. В., Канищев К. К.,  
Ханазарян А. Д., Оконешникова Е. А., Мороз И. А.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

В последние полтора-два десятилетия довольно много исследователей обратили свое внимание на композиты, выделяющиеся уникальными акустическими свойствами и называемые фононными кристаллами или акустическими метаматериалами (АММ). Как правило, именно периодическое изменение свойств вместе с локальным нарушением периодичности обеспечивает особые волновые свойства акустических метаматериалов. Значительный прогресс в простоте применения современных аддитивных технологий создает дополнительные возможности по созданию новых материалов с улучшенными характеристиками и их практическому применению. Применение периодических композитных структур имеет большой потенциал при разработке датчиков и систем активного шумоподавления, адаптивной оптики, сбора энергии и т. п.

Для проектирования новых материалов с улучшенными свойствами, как правило, необходимо сочетание математического и компьютерного моделирования, современных технологий изготовления структур и проведения экспериментальной верификации. Основная цель настоящей работы — теоретическое и экспериментальное изучение распространения упругих волн в новых типах слоистых АММ с периодическими массивами разрезов. В дальнейшем разрабатываемые подходы будут использоваться для решения задачи оптимизации конфигурации с целью получения наилучших акустических свойств с точки зрения приложений. На этапе математического и компьютерного моделирования производилось проектирование и изучение свойств АММ рассматриваемого типа. Была разработана методика изготовления образцов с помощью аддитивных технологий из пластиков разных типов. Были изготовлены образцы слоистых АММ с краевыми или центральными полостями в каждой из ячеек и проведена экспериментальная верификация их акустических свойств. Колебания в изготовленных образцах АММ возбуждались и регистрировались прямоугольными пьезоэлектрическими преобразователями, приклеенными цианоакрилатом к поверхности АММ. Продемонстрирована значительная корреляция между запрещенными зонами, определенными в эксперименте и рассчитанными теоретически.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00261).

## Компьютерное моделирование принятия решения роботом при учете эмоций человека, с которым он взаимодействует

**Городецкий А. Е., Тарасова И. Л.**

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

Успехи в разработке интеллектуальных роботов (ИР) расширяют сферу их деятельности, связанную с выполнением технологических операций в коллективе с человеком. В последнее время ускоренно развивается так называемая социальная робототехника. Одной из проблем, с решением которой во многом связано развитие данного направления, является проблема психологического взаимодействия робота и человека.

В докладе рассматривается моделирование влияния эмоций человека на принятие решения ИРСам при их взаимодействии. При этом моделируется один из возможных подходов к учету эмоции «удовольствия» и «самосохранения» при принятии решения мобильным ИР о выборе оптимального маршрута движения с учетом эмоций пассажира. Поэтому задача минимизации времени дополнена условиями учета риска аварии и влияния сил эмоции «удовлетворения» и «безопасности», которые приводят к решению задачи минимизации функционала:

$$J = k_T J_T(M_v) + k_R J_R(M_v) - k_P J_P(M_v) - k_S J_S(M_v),$$

где  $k_T$ ,  $k_R$ ,  $k_P$  и  $k_S$  — весовые коэффициенты, устанавливаемые экспертами,  $M_v$  — моделируемые маршруты с параметрами дорожных и климатических условий, описываемых логико-вероятностными и логико-лингвистическими уравнениями, а также влияющими на силы эмоций изображениями на маршрутах, описываемые в виде строк значений функций принадлежности к тем или иным эталонным изображениям,  $J_T(M_v)$ ,  $J_R(M_v)$ ,  $J_P(M_v)$  и  $J_S(M_v)$  — функционалы оптимизации времени, безопасности, силы эмоции «удовольствия» и силы эмоции «самосохранения».

Силы эмоции «удовлетворения» и «безопасности» оцениваются по максимальному соответствию окружающих изображений эталонным, для которых путем анализа результатов многочисленных наблюдений введены экспертами значения указанных сил. При этом используется запатентованный авторами способ логико-вероятностной классификации изображений и зарегистрированные программы для ЭВМ.

Полученные результаты моделирования показывают, что учет эмоций изменяет решение об оптимальности маршрута, что подтверждает важность их учета при взаимодействии робота с человеком.

## О некоторых подходах к реконструкции двумерных законов неоднородности упругого тела в плоской постановке

Гукасян Л. С.

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

С развитием технологий современной медицины все большую популярность приобретают исследования в биомеханике, связанные с проблемами мониторинга состояния различных живых структур организма. К примеру, выявление нехарактерных деформаций в результате проведения инвазивных или неинвазивных процедур по оценке механических свойств позволяет судить о возможных причинах и патологиях. Особенно актуальными являются неинвазивные подходы к изучению механических свойств тканей. К таким методам можно отнести различные виды акустического и ультразвукового диагностирования, магнитно-резонансную томографию и другие. При изучении механического деформирования живых структур (включая мягкие ткани, кожный покров, костную ткань), исследователи часто ограничиваются одномерными моделями теории упругости, однако, для учета сложного напряженного состояния, включающего в себя помимо растяжения и кручения состояния сдвига или изгиба, требуются более сложные двумерные и трехмерные модели теории упругости. В настоящей работе приведены некоторые подходы к исследованию задачи об анализе переменных физико-механических свойств неоднородного тела в двумерной постановке.

В работе исследуется задача о планарных колебаниях плоской области с переменными механическими свойствами, характеризуемыми законами неоднородности для коэффициента Ламе, модуля сдвига и плотности в рамках модели плоской деформации теории упругости. Решена прямая задача об определении деформационных характеристик и полей напряжений в плоских областях различной геометрии на основе конечно-разностных аппроксимаций и метода конечных элементов (МКЭ). Проведен сравнительный анализ двух методов решения, проанализирована устойчивость и порядок метода разностных аппроксимаций. Сделаны обобщающие выводы об эффективности предложенных методик на основе проведенных вычислительных экспериментов.

Рассмотрена постановка линейной обратной задачи о реконструкции переменных свойств упругого тела в рамках неразрушающего акустического подхода на основе дополнительной информации о заданных смещениях в некотором дискретном наборе точек на одной частоте колебаний под действием некоторой зондирующей механической нагрузки. Некорректность обратной задачи связана с вычислением производных от функций, заданных в конечном наборе точек. Предложено несколько регуляризационных методик по построению решения обратной задачи о реконструкции двумерных законов неоднородности для параметра Ламе и модуля сдвига. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению искомым законов различного вида в классах гладких функций для канонической прямоугольной области. Проведен анализ численных результатов, сделаны выводы об эффективности предложенной вычислительной схемы и способах акустического зондирования.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. и Недину Р. Д. за внимание к работе.

## Схема приема экзамена по компьютерным дисциплинам в новых условиях

**Демяненко Я. М., Чердынцева М. И.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Начиная с учебного года 2020/2021, курс «Языки программирования» для бакалавров 2 курса направления 01.02.03 «Прикладная математика и информатика» проводится для потока 120 и более студентов. В связи с этим возникают некоторые особенности проведения экзаменов.

Специфика курса предполагает использование компьютеров для написания программ. Поэтому было принято решение параллельно проводить итоговый контроль знаний по курсу, используя тестирование.

Учитывая такую специфику, желательно проводить экзамены в ограниченное количество подряд идущих дней. В настоящее время сложилась следующая схема проведения экзамена.

Экзамен состоит из трех частей. Первая часть — тест, включающий теоретические и практические вопросы, требующие компактные ответы. Вопросы должны быть на понимание или на знание, на которые сложно найти ответ по запросу в интернете. Практические вопросы могут иметь вид: «что будет, если ...» или «выберите вариант ...», а варианты ответов обязательно включают потенциальные ошибки, которые сложно заметить.

Вторая часть — задачи, решаемые на компьютере. Предлагаемые задачи имеют среднюю сложность и похожи на те, что решали в семестре. Решение должно компилироваться, запускаться и содержать выполняемые тесты, охватывающие различные пограничные ситуации для входных данных алгоритма.

Третья часть — собеседование. Опрос происходит по всем темам, включённым в программу экзамена. Задача собеседования — исключить случайность и уточнить степень усвоения и понимания материала студентами.

При такой схеме проведения экзамена возникает проблема длительности экзамена как для преподавателя, так и для студента. Нехорошо, чтобы студенты целый день сдавали экзамен — они тоже люди и устают, как, впрочем, и преподаватели.

Поэтому для сокращения времени проведения экзамена привлекаются ассистенты. Тогда встаёт вопрос единообразия и объективности оценивания. Первая часть в виде теста проверяется автоматически. Задачи из второй части проверяются двумя ведущими преподавателями и ассистентами. Для единообразия сформулированы критерии оценки по каждому типу задач. В сложных или нестандартных случаях происходит коллективное обсуждение.

Собеседование проводится двумя ведущими преподавателями с ассистентами, но более узким составом. Ассистенты проходят курс молодого бойца, присутствуя вначале на экзамене как слушатели, затем как второй опрашиваемый в паре, а затем уже проводят самостоятельный опрос. В помощь ассистентам существует банк вопросов для проведения собеседования.

Такая схема привлечения ассистентов к приёму экзаменов позволяет организовать непрерывную цепочку пополнения кадров.

Численный анализ процесса перераспределения напряжений  
в аддитивно изготовленных армированных полимерных конструкциях  
для биомедицинских приложений

**Долгих Д. А., Ташкинов М. А.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь*

Аддитивное производство (АП), также известное как 3D-печать, успешно применяется как эффективный способ изготовления биомедицинских изделий со сложной трехмерной архитектурой, включая имплантаты и экзопротезы. Улучшить функциональные возможности 3D-печатных полимерных изделий можно путем добавления армирующих элементов. Использование непрерывных волокон в сочетании с полимерной матрицей является перспективным методом получения новых 3D-печатных композитных материалов с превосходными физико-механическими свойствами. В данном исследовании рассматривается подход, согласно которому полимерная матрица в процессе трехмерной печати армируется структурированным прутком (препрегом) из множества непрерывных углеродных волокон, объединённых полимерной матрицей. Важным аспектом в архитектуре таких композитов является расположение армирующих волокон в термопластичной матрице. Варьирование параметров армирования, приводит к перераспределению напряжений в полимерной конструкции. В связи с этим выбор оптимальной топологии структуры имеет решающее значение.

Сочетание методов АП с подходами численного моделирования может послужить основой новой методологии для создания биомедицинских изделий. Применение подхода численного моделирования позволяет провести оценку напряженно-деформированного состояния армированных полимерных конструкций для биомедицинских приложений на ранних стадиях проектирования, а также провести численный анализ перераспределения напряжений в полимерных структурах при различных вариантах расположения армирующих элементов.

Целью данной работы является исследование образцов цилиндрических структур, состоящих из различных типов полимерной матрицы с внедренными прутками из углеродных волокон. В ходе работы проведен процесс оптимизации размещения углеродных волокон в термопластичной матрице. Выполнено исследование оптимального сочетания матрицы с армирующими элементами. Полученные результаты позволят проектировать компоненты и конструкции, сочетающие свободную архитектуру, достигнутую благодаря возможностям 3D-печати, и улучшенные механические свойства, полученные за счет армирования волокнами.

Проектирование и моделирование прототипов экзопротезов выполнено в рамках гранта, выделяемого для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, соглашение № 075-15-2021-578 от 31.05.2021 г.

Исследование позиционирования углеродных волокон и схем армирования выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-79-10350).



## Биомеханическое моделирование грудного и грудопоясничного отделов позвоночника

**Донник А. М., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов*

Повреждения позвоночника — важная социально значимая проблема современного общества. Из них около 90 % возникают вследствие травм. На грудной отдел позвоночника приходится до 30 % травм, а на пояснично-крестцовый — до 40 %. Травмирование грудного отдела позвоночника чаще происходит на уровне 11–12 позвонков, а поясничного — на уровне 1–2. При значительных внешних нагрузках возникают многоуровневые повреждения. Планирование и проведение операций на позвоночнике осуществляется на основе личного опыта и знаний хирурга. Однако, учитывая биомеханические параметры пациента на этапе планирования операции, результативность лечения можно улучшить. В настоящее время применение биомеханики в медицине распространено для индивидуализации лечения пациентов в челюстно-лицевой, дентальной и спинальной хирургии. Данное исследование направлено на решение проблемы совершенствования методов хирургического лечения повреждений грудного и грудопоясничного отделов позвоночника.

Объектами исследования являлись отделы позвоночника, расположенные на уровне позвонков Th7-L2. Цель исследования заключалась в определении наиболее рациональной с позиций биомеханики тактики хирургического лечения травм и повреждений на уровне позвонков грудного и грудопоясничного отделов позвоночника, а также в оценке надежности металлоконструкций, используемых при хирургическом лечении травм позвоночника.

Для достижения поставленной цели был решен ряд задач по определению напряженно-деформированного состояния грудного, грудопоясничного отделов позвоночника и систем фиксации, в том числе дополненных промежуточными винтами или ламинарными крючками.

В результате выявлены условия, способствующие разрушению грудного, грудопоясничного отделов позвоночника и систем фиксации и приводящие к повторной травме. На основе анализа напряженно-деформированного состояния системы «позвоночно-двигательный сегмент — транспедикулярная система (ТПС)» выявлены биомеханические преимущества использования ТПС, дополненных промежуточными винтами. Построены биомеханические модели ТПС, дополненных ламинарными крючками, и с точки зрения биомеханики показано преимущество их использования в хирургии позвоночника.

## Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругой изотропной пластины

**Дударев В. В., Мнухин Р. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время при моделировании поведения биологических объектов необходимо учитывать их неоднородные свойства. При этом одной из базовых моделей является модель изотропного упругого материала с параметрами, изменяющимися по пространственным координатам. На основе общей постановки задачи для такого материала сформулирована задача об установившихся планарных колебаниях прямоугольной пластины. Упругие свойства описываются переменными параметрами Ламе и плотностью. Одна грань пластины жестко закреплена, на противоположной  $l_\sigma$  действует распределенная растягивающая нагрузка  $\vec{P}$ , которая вызывает колебания с частотой  $\omega$ . Уравнения колебаний, граничные условия и определяющие соотношения выписаны для случая плоского напряженного состояния. Для рассмотрения различных случаев неоднородности вдоль двух координатных осей решение задачи построено численно с помощью метода конечных элементов, реализованного в пакете FlexPDE. Построены графики компонент вектора перемещения  $\vec{u}$  и компонент тензора напряжений для различных законов изменения свойств материала. Для оценки влияния каждого из параметров Ламе и плотности на амплитудно-частотную характеристику была введена в рассмотрение функция чувствительности  $F_\gamma(\omega) = \int_{l_\sigma} \vec{P} \cdot \partial \vec{u} / \partial \gamma ds$ , где  $\gamma = \lambda, \mu, \rho$ . На основе общей постановки задачи и определения производной тензорной функции было получено представление введенной функции. С помощью построенных графиков  $F_\gamma(\omega)$  показана степень влияния каждого из параметров на амплитудно-частотную характеристику.

Важным аспектом при исследовании поведения неоднородных материалов является точность определения их переменных свойств. Одним из эффективных методов неразрушающей диагностики является акустический метод. При его реализации считается, что исследуемая характеристика влияет на акустические свойства объекта. В настоящей работе рассматривается задача об определении двумерного закона изменения плотности упругой изотропной пластины по данным об амплитудно-частотной характеристике, заданной на некотором частотном диапазоне. Решение этой задачи по аналогии с одномерной задачей для стержня предложено строить с помощью итерационного процесса. На основе общей постановки задачи ранее было получено соотношение<sup>1</sup>, с помощью которого сформулировано двумерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода для функции поправки восстанавливаемой величины.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>), в Южном федеральном университете.

<sup>1</sup> *Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnuhkhin R. M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // International journal of mechanics and materials in design. 2021. V. 17, № 2. P. 321–332.

## Об определении параметров модели Мурнагана из опытов на одноосное растяжение и кручение

**Егорова С. А., Карякин М. И.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассмотрен ряд постановок обратных коэффициентных задач определения материальных свойств нелинейно-упругих образцов на основе экспериментов по одноосному растяжению и кручению, смоделированных с использованием полуобратного метода. Для описания механических свойств сжимаемой нелинейно-упругой среды используется модель Мурнагана, функция удельной потенциальной энергии деформации которой имеет вид:

$$W = \frac{1}{4} \left[ \left( -3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2} \right) I_1 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2 + \right. \\ \left. + \left( -2\mu + 3m - \frac{n}{2} \right) I_2 - mI_1I_2 + \frac{1}{6} (l + 2m) I_1^3 + \frac{n}{2} (I_3 - 1) \right], \quad (1)$$

где  $I_k = I_k(\mathbf{G})$ ,  $k = 1, 2, 3$ , — главные инварианты меры деформации Коши — Грина,  $\lambda, \mu$  — постоянные Ляме,  $l, m, n$  — постоянные Мурнагана.

На первом этапе решается прямая задача, связанная с построением диаграммы нагружения по заданным параметрам модели — зависимости между деформационной характеристикой и силовой. Анализ задачи об одноосном растяжении выявил особенность: деформация удлинения заданной кратности может быть реализована не для всех значений параметров  $l, m, n$ , более того, при некоторых наборах этих параметров задача о растяжении вообще не имеет физически осмысленного решения. С использованием аналитических выражений зависимости приложенной нагрузки от кратности удлинения разработана программа визуализации областей допустимых значений параметров для разных значений кратности удлинения.

Трехмерная задача о кручении сводится к нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка для функции радиального смещения точек цилиндра. Получены зависимости осевого удлинения и крутящего момента от угла закручивания цилиндра. Проведен аналогичный анализ областей существования этого решения в зависимости от материальных параметров.

Информация об области значений параметров, при которых задача имеет решение, используется в следующем разделе при анализе обратных задач. Целью решения обратных задач является определение нелинейных параметров  $l, m, n$  на основе диаграмм нагружения, параметры  $\lambda$  и  $\mu$  считаются заданными. Решение обратной задачи сводится к нахождению минимума целевой функции, построенной с использованием метода наименьших квадратов. Одним из подходов к ее решению является применение эволюционных алгоритмов. В работе используется Squirrel search algorithm, реализованный на Python, а также алгоритм дифференциальной эволюции.

## Разработка 3D-печатных функционально-градиентных полимерных пористых структур для приложений тканевой инженерии

**Еленская Н. В., Ташкинов М. А., Виндокуров И. В., Пирогова Ю. В.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь*

Развитие технологий аддитивного производства привело к их широкому применению в биомедицинских приложениях, в частности, для изготовления индивидуальных медицинских изделий, таких как персонализированные экзо- и эндопротезы. На сегодняшний день одним из актуальных вопросов тканевой инженерии является замещение поврежденной биологической ткани с использованием искусственных материалов. Скаффолды на основе таких материалов должны соответствовать ряду требований, среди которых биосовместимость, а также способность имитировать структуру, механические и биологические функции тканей. В представленной работе уделяется внимание исследованию механического поведения пористых 3D-печатных функционально-градиентных структур с геометрией на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП): их архитектура за счет непрерывного изменения механических свойств позволяет избежать концентрации напряжений, вызванных резкими геометрическими изменениями.

При проектировании прототипов скаффолдов использовался градиент разнородности структуры: с его применением становится возможным сочетание различных типов элементарных ячеек и плавный переход между ними, что позволяет разработать персонализированный скаффолд с параметрами, оптимальными для замещения поврежденной ткани. Исследуемые скаффолды были произведены по технологии FFF-печати из полилактида (PLA), механические свойства структур на основе ТПМП подчиняются определяющим соотношениям в виде закона Гука для квазиизотропных сред.

В полученных структурах удалось добиться контролируемого градиентного перехода от одного типа геометрии элементарной ячейки к другому с заданной объемной долей пористости. Оценивалось влияние параметров структуры и свойств градиента на механическое поведение. Прототипы скаффолдов были напечатаны в увеличенном масштабе. Деформационное поведение анализировалось с помощью бесконтактной системы измерения деформации Vic-3D Micro-DIC. Полученные результаты численного моделирования механического поведения согласуются с результатами эксперимента. Данные результаты могут быть полезны для разработки новых биомедицинских продуктов для восстановления и замены поврежденной костной ткани.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете в рамках гранта, выделяемого для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных организациях высшего образования, научных учреждениях и государственных научных центрах Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-578 от 31.05.2021 г.

Резонансный метод контроля изменения свойств костной ткани,  
связанного с развитием остеопороза

**Ермоленко О. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.**

*Институт математики, механики и информатики,*

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Оценка состояния костей человека по результатам ультразвукового (УЗ) зондирования играет важную роль в диагностике остеопороза и выявлении его признаков. Остеопороз представляет собой хроническое заболевание костей, которое характеризуется уменьшением костной массы и нарушением ее микроструктуры, что повышает риск атравматических переломов. УЗИ основано на возбуждении и регистрации бегущих волн пьезоэлектрическими датчиками на внешней поверхности мягкой ткани. Параметры распространения УЗ волн чувствительны к механическим и геометрическим свойствам кортикального слоя кости, однако выявление закономерностей их возбуждения и распространения в исследуемой костной структуре представляет собой сложную математическую задачу. Ее решение создает основу для анализа влияния на характеристики бегущих волн основных факторов, указывающих на наличие или развитие болезни (толщина и упругие свойства кортикального слоя, степень пористости внутренних слоев и др.).

Настоящая работа посвящена математическому и компьютерному моделированию волновых процессов в слоистых образцах (фантомах), имитирующих волноводные свойства трубчатых костей различной структуры. Полуаналитическое моделирование основано на явном представлении бегущих волн через контурные интегралы обратного преобразования Фурье матрицы Грина исследуемых волноводов. Асимптотика бегущих волн выводится из интегральных представлений с помощью теории вычетов.

Проведенный анализ показал, что основная трудность извлечения полезной информации о состоянии внутренних ослабленных слоев из измеряемых на поверхности нестационарных сигналов заключается в наличии покрытия слоем мягких тканей. Практически вся волновая энергия, поступающая от УЗ зонда в возбуждаемые бегущие волны, сосредотачивается в верхнем мягком слое, в то время как основной интерес представляют внутренние слои, упругие свойства которых ослабевают, а толщина пораженной зоны увеличивается. В результате, изменения волновых характеристик, связанные с ослаблением упругих свойств внутренних слоев, трудно уловить на фоне мощных волн-помех, распространяющихся в верхних слоях. Поэтому использование только нестационарных сигналов, их спектров и частотно-временных вейвлет-изображений, а также амплитудно-частотных характеристик возбуждаемых бегущих волн в качестве диагностических индикаторов заболевания выглядит недостаточно перспективным.

В качестве диагностических признаков остеопороза предлагается использовать частоты резонансного возбуждения бегущих волн, положение которых чувствительно к внутренней структуре волновода. В работе анализируется и обсуждается смещение резонансов бегущих волн, распространяющихся в слоистых образцах различной структуры.

Работа выполнена при поддержке стипендии Президента Российской Федерации для молодых ученых и аспирантов (проект № СП-971.2022.4).

## Статика гибких пористых функционально-градиентных нанобалок Тимошенко

**Жигалов М. В.<sup>1</sup>, Кречин А. Н.<sup>2</sup>, Мицкевич С. А.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов*

Потребность в новых материалах привела к созданию современных материалов сложной структуры с широким спектром применения. Одним из таких типов материалов являются функционально-градиентные материалы (ФГМ) с уникальными свойствами, такими как большая механическая прочность, коррозионная стойкость и возможность применения при высоких температурах. Кроме ФГМ большую популярность приобрели пористые материалы. Одним из типичных пористых материалов являются пенометаллы, которые продемонстрировали большой потенциал для достижения значительного улучшения поглощения энергии, теплового управления и электропроводности.

В работе построена математическая модель функционально-градиентной пористой нанобалки Тимошенко. Геометрическая нелинейность вводится по модели Т. фон Кармана. Нанозффекты учитываются на основе модифицированной моментной теории упругости. Модель позволяет учесть три типа распределения пористости по толщине балки – равномерную ( $U$ ), разреженную в середине ( $X$ ) и по краям ( $O$ ). Вариационные и дифференциальные уравнения, а также начальные и краевые условия, получены из принципа Гамильтона – Остроградского. Построены алгоритмы численного исследования статики гибких функционально-градиентных нанобалок на основе метода установления. На основе исходных уравнений в частных производных исследуется задача Коши методом конечных разностей 2-го порядка точности, методами типа Рунге – Кутты и Ньюмарка. Исследуется сходимость решения в зависимости от разбиений по пространственной координате и времени. Метод установления обладает высокой степенью точности при решении стационарных нелинейных задач по сравнению с известными методами Ньютона, Ньютона – Рафсона и др. Кроме того, с помощью этого метода можно решать не только нелинейные дифференциальные уравнения, но и находить корни нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Результаты исследования показали, что тип пористости напрямую влияет на несущую способность балки: при использовании пористости  $U$  несущая способность балки была наименьшей в сравнении с типами пористости  $X$  и  $O$ . Результаты, полученные при типах пористости  $X$  и  $O$ , являются достаточно близкими друг к другу, в некоторых случаях разница не превышает 0.7%. При увеличении параметра пористости разница между результатами статического изгиба для различных типов пористости увеличивается. При увеличении размерно-зависимого параметра, несущие способности балок увеличиваются, вне зависимости от типа пор. Несущая способность нанобалки выше, чем у полноразмерной балки на 25%.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00160, <https://rscf.ru/project/22-11-00160>).

## Компьютерное моделирование механического поведения роговицы с кератоконусом в ходе диагностики и лечения

Захаров И. Н.<sup>1</sup>, Солодкова Е. Г.<sup>2</sup>, Лэ В.<sup>1</sup>, Баринов В. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Волгоградский государственный технический университет, Волгоград

<sup>2</sup>МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова, Волгоград

На базе системы конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics разработана трехмерная компьютерная модель роговицы, включающая несколько уровней персонализации и позволяющая с высокой степенью достоверности получать расчетные результаты, соответствующие клиническим данным реальных пациентов. Это дает возможность рассматривать ее в качестве пациент-ориентированного вычислительного инструмента исследования специфики заболеваний и методик их лечения.

Указанные уровни персонализации включают прямое использование приборных клинических данных пациента, импортируемых в модель из рабочих файлов кератотопографа Pentacam AXL и бесконтактного пневмотонометра Corvis ST. Так, геометрическая 3D-модель роговицы строится путем интерполяции координат точек передней и задней поверхности, полученных из Pentacam AXL, а параметры ее нагружения — внутриглазное давление и давление в центре воздушной струи, в каждый момент времени в ходе пневмотеста задаются по данным Corvis ST.

Для определения неизвестных параметров моделей роговицы (например, геометрии ненагруженного состояния, параметров механического поведения материала и их распределения по объему роговицы, распределения давления воздушной струи по поверхности роговицы в различные моменты времени и др.) разработаны методики решения обратных задач, в которых в качестве исходных данных используется экспериментальная информация о текущем состоянии роговицы и ее поведении под нагрузками, а искомые неизвестные параметры модели устанавливаются по результатам серии вычислительных (виртуальных) экспериментов на модели и их соответствия опытным данным.

Разработана методика идентификации множества неизвестных параметров модели гиперупругого поведения материала роговицы, которые не поддаются прямому экспериментальному определению. В основу данной методики положена процедура многопараметрической оптимизации с отысканием минимума целевой функции методом наименьших квадратов на основе измеренных данных об амплитуде деформации роговицы пациента, полученных на пневмотонометре Corvis ST.

На основе выполненной серии вычислительных экспериментов на модели и их сопоставления с опытными данными получены закономерности влияния основных упругих характеристик в модели механических свойств и поведения роговицы на параметры напряженно-деформированного состояния материала с оценкой степени их взаимосвязи, в частности, возможности локализации зон повышенных интенсивностей деформаций и напряжений при изменении коэффициентов в модели материала или при изменении топографических и пахиметрических параметров роговицы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-20085, <https://rscf.ru/project/22-21-20085>).

## Нестационарная задача механодиффузии для ортотропного полого цилиндра с учетом релаксации диффузионных процессов

**Зверев Н. А., Земсков А. В.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*

К настоящему времени на основе известных уравнений механики сплошных сред и уравнений тепло- и массопереноса построены математические модели, учитывающие взаимное влияние механических и диффузионных полей. Интерес к подобному рода исследованиям возник вследствие весьма бурного развития современных технологий производства материалов, например, конструкционных, изучаемых с учетом взаимного воздействия на них полей различной физической природы. Разработка соответствующих математических моделей, как и анализ получаемых результатов, позволяют изучить значительно большее число эффектов от взаимодействия тех или иных физических полей, а в случае исследования сложных высокотехнологических процессов — еще и минимизировать финансовые затраты.

При решении возникающих при этом начально-краевых задач в различных криволинейных системах координат основной проблемой является нахождение системы собственных функций, представляющих собой решение соответствующей задачи Штурма—Лиувилля. Этому вопросу посвящено сравнительно малое количество научных публикаций.

В настоящей работе исследуется связанная полярно-симметричная задача для ортотропного многокомпонентного полого цилиндра, который находится под действием нестационарных объемных механодиффузионных возмущений. В работе учитываются релаксационные диффузионные эффекты, связанные с конечными скоростями распространения диффузионных возмущений. Математическая постановка задачи включает в себя: линеаризованное дифференциальное уравнение движения полого цилиндра, систему линеаризованных дифференциальных уравнений массопереноса, закон сохранения массы в локальной форме, а также граничные условия, выражающие отсутствие механических нагрузок на поверхностях цилиндра. Начальные условия принимаются нулевыми, поскольку изначально цилиндр находился в состоянии покоя.

Решение задачи ищется методом эквивалентных граничных условий, согласно которому вначале решается вспомогательная задача, куда входят граничные условия, позволяющие построить решение с помощью разложения в ряды Фурье по функциям Бесселя. Для нахождения функций Грина в этой задаче используется интегральное преобразование Лапласа по времени. Оригиналы вычисляются через вычеты и стандартные таблицы операционного исчисления. Далее строятся интегральные соотношения, связывающие между собой правые части граничных условий обеих задач. Они записываются в виде интегральных уравнений Вольтерры I рода и решаются численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников. Решение исходной задачи находится в виде сверток функций влияния вспомогательной задачи с функциями, полученными в ходе решения вышеуказанных интегральных уравнений.



Пространственно-временная динамика системы хищник — жертва  
с идеальным свободным распределением на двумерном ареале

Зеленчук П. А., Цибулин В. Г.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для двумерного ареала  $[0, a] \times [0, b]$  на основе системы уравнений диффузия — адвекция — реакция представлена модель «хищник — жертва» с гиперболическим законом роста жертвы и функциональным откликом Лотки — Вольтерра:

$$\dot{u} = u \left[ a_1 u \left( 1 - \frac{u}{p(x, y)} \right) - b_1 v \right] - \nabla q_1, \quad \dot{v} = v \left[ -a_2 + \frac{b_2}{p(x, y)} u \right] - \nabla q_2, \quad (1)$$

где точка означает дифференцирование по времени, а  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ . Система дополняется начальными и периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(a, y, t), \quad u(x, 0, t) = u(x, b, t), \quad q_i(0, y, t) = q_i(a, y, t), \\ v(0, y, t) = v(a, y, t), \quad v(x, 0, t) = v(x, b, t), \quad q_i(x, 0, t) = q_i(x, b, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Потоки  $q_i$  определяются выражениями:

$$q_1 = -k_1 \nabla u + \alpha_1 \frac{u}{p} \nabla p - \alpha_2 \frac{u}{v} \nabla v, \quad q_2 = -k_2 \nabla v + \beta_1 \frac{v}{u} \nabla u. \quad (3)$$

Здесь  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  — плотности популяций жертвы и хищника,  $k_1, k_2$  — коэффициенты диффузии,  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$  — коэффициенты таксиса,  $p = p(x, y)$  — неравномерно распределенный по ареалу ресурс жертвы<sup>1</sup>. В качестве двумерного ареала с периодическими граничными условиями может выступать тор. Прототипом такого рассмотрения служат исследования распределения различных видов бактерий и плесени на поверхностях кондитерских изделий типа бублик, пончик и т. п. Для получения наглядного представления между взаимодействующими видами и ресурсом на такой поверхности как тор, использовано объемное представление, сопоставляющее каждой точке поверхности сумму малого радиуса тора и величин ресурса и плотностей популяций.

При  $k_1 = \alpha_1 - \alpha_2$  и  $k_2 = \beta_1$  система, так же как и в одномерном случае<sup>2</sup>, имеет стационарное решение, обладающее свойством идеального свободного распределения (ИСР):

$$u = \frac{a_2 p}{b_2}, \quad v = \frac{a_1 a_2 p}{b_1 b_2} \left( 1 - \frac{a_2}{b_2} \right). \quad (4)$$

Представлены результаты вычислительного эксперимента на основе модифицированного метода смещенных сеток, реализованного в среде MATLAB. Изучена устойчивость решения ИСР к малым возмущениям параметров системы. Проведены исследования полученных стационарных решений. Приведена визуализация распределения плотностей популяций хищника и жертвы в сечениях тора плоскостями, позволяющая оценить влияние различных параметров модели на отклонение от ИСР.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00221), в Южном федеральном университете.

<sup>1</sup> Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Идеальное свободное распределение в модели «хищник — жертва» при многофакторном таксисе // Биофизика. 2021. Т. 66, № 3. С. 546–554.

<sup>2</sup> Зеленчук П. А. Идеальное свободное распределение в модели «хищник — жертва» с трофической функцией Холлинга второго рода // Экологический вестник ЧЭС. 2022. Т. 19, № 1. С. 6–15.

Нелокальная вязкоупругая модель термомехано-диффузионных колебаний балки Бернулли — Эйлера с учетом конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений

Земсков А. В.<sup>1</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Очень важной проблемой при расчете конструкций, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий различной физической природы, является вопрос о взаимодействии механического, температурного и диффузионного полей. Стержни, пластины и оболочки являются одними из важнейших составных элементов большого числа технических и биологических систем, поэтому моделированию напряженно-деформированного состояния этих элементов уделяется существенное внимание. Таким образом, построение математических моделей, способных адекватно описывать связанные физико-механические процессы в указанных системах, является на сегодняшний день актуальной и практически значимой научной задачей.

Работа посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния балки Бернулли — Эйлера, работающей в условиях нестационарного взаимодействия механического, диффузионного и температурного полей. Исходная математическая постановка задачи включает в себя систему уравнений термомехано-диффузии для сплошной среды. При этом учитывается, что:

1. Скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений является конечной за счет релаксации тепловых и диффузионных потоков (теория Каттанео — Вернота — Лыкова и её дальнейшее обобщение).

2. Напряжения в точке континуума зависят не только от деформации в данной точке, но и от деформаций во всех точках тела, а также от его формы и размера (теория нелокального континуума Эрингена).

3. Материал является вязкоупругим и способен восстанавливать свои свойства после снятия нагрузки (модель Кельвина — Фойгта).

Уравнения изгибных нестационарных колебаний балки Бернулли — Эйлера с учетом тепломассопереноса получаются из уравнений термомехано-диффузии для сплошной среды с помощью обобщенного принципа виртуальных перемещений. Замыкают постановку задачи начально-краевые условия, соответствующие заданным условиям закрепления концов балки и ее нагружения.

Решение поставленной задачи ищется в интегральной форме. Ядрами интегральных представлений являются функции Грина, для нахождения которых используются разложения в тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени. Обращение преобразования Лапласа осуществляется аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

## Может ли оптимальный промысел «убить» хаос в динамике численности популяций

**Ильичев В. Г.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Даже в простых моделях математической экологии обнаружены сложные динамические режимы. Поэтому возникают опасения, что дополнительный промысел природных популяций сильно «запутает» поведение их численности, и тем самым затруднит поиск оптимальной стратегии их эксплуатации. Парадоксально, но оказалось, что это не так. И это составляет суть данной работы.

Рассмотрим одномерную дискретную модель (с шагом в 1 год):

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (1)$$

Полагаем:  $f(0) = 0$ , а функция воспроизводства  $f$  является положительной и гладкой функцией. Разумно также считать, что  $f'(0) > 1$  и  $f(x)/x < 1$  при больших  $x$ . Обсудим типичные варианты поведения траекторий (1).

1. Пусть функция  $f(x)$  монотонно возрастает и строго вогнута. Например,  $f(x) = 3x/(1+x)$ . В этом случае последовательность  $\{x_t\}$  монотонно стремится к некоторому положительному равновесию.

2. Функция  $f(x)$  унимодальна, т. е. на левом участке  $[0, M]$  она возрастает, а на правом участке  $[M, \infty)$  она убывает. Так, например, в схеме Риккера  $f(x) = 23xe^{-x}$  методами символической динамики показано: в зависимости от выбора  $x_0$  могут возникать те или иные периодические режимы, вплоть до хаотических траекторий.

Теперь дополнительно введем в модель (1) ежегодный вылов  $u_t$ , тогда она модифицируется к виду:

$$x_{t+1} = f(x_t - u_t). \quad (2)$$

При ограничении на вылов:  $0 \leq u_t \leq x_t$  для всех  $t$ .

Для оценки экономической эффективности вылова зададим функцию полезности  $p$ . Считаем, что  $p(0) = 0$ ,  $p'(0) = 1$  и  $p$  является гладкой, монотонно возрастающей и вогнутой функцией. Общий доход от промысла за все время  $[0, \infty)$  зависит от начального значения численности популяции  $x_0$  и определяется супремумом бесконечного ряда

$$B(x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot p(u_t) \rightarrow \sup \text{ по всем допустимым } \{u_t\}. \quad (3)$$

Здесь через  $\beta$  обозначен коэффициент дисконтирования, который лежит в диапазоне  $(0, 1)$ . Удобно считать  $f'(0) > 1/\beta$ . Имеет место неожиданное утверждение.

**Утверждение.** Пусть на своем левом участке унимодальная функция воспроизводства вогнута, тогда траектория в модели (2) при условии (3) стремится к некоторому равновесию.

## Валидация численного моделирования пропеллерной установки посредством натурального эксперимента в аэродинамической трубе

**Казаков Е. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматривается валидация вычислительного эксперимента в среде моделирования Ansys CFX путём натурального эксперимента на эквивалентной пропеллерной установке в аэродинамической трубе.

В качестве модели выбрана система вращающихся пластин конечной толщины, имитирующая движение воздушного винта. Модель турбулентности SST, условия давления и температуры нормальные, внешние наведённые потоки воздуха отсутствуют, количество элементов сетки порядка 40 миллионов элементов.

Экспериментальная установка представляет из себя вал с закреплённым на нём тензометрическим датчиком, способным регистрировать скручивание вала относительно продольной оси, оценивая таким образом количество оборотов в минуту и крутящий момент. Вал позволяет установить втулки воздушного винта с различным количеством лопастей (от одной до четырёх) с регулируемым углом установки лопасти в диапазоне от  $-30$  до  $+30$  градусов относительно плоскости вращения. Каждая лопасть представляет из себя лишённое крутки крыло симметричного профиля с постоянной по размаху хордой, прямой передней и задней кромкой и прямыми законцовками, прямоугольное в плане.

Экспериментальная установка размещается в рабочей зоне аэродинамической трубы. С помощью державки, способной изменять угол наклона оси вращения винта относительно набегающего потока в диапазоне от  $0$  до  $90$  градусов, вал крепится к аэродинамическим весам, позволяющим, помимо прочего, получить значения возникающей подъёмной силы и силы сопротивления, а также опрокидывающий момент.

Прибор не оснащён никакими двигателями, вращение пропеллера обеспечивается естественным воздействием набегающего потока на лопасти воздушного винта.

Помимо самого факта валидации модели, результаты эксперимента могут быть полезны при разработке новых лабораторных работ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 19-29-06013.

## Анализ гибких пористых функционально-градиентных нанопластин методом вариационных итераций

**Калуцкий Л. А.**

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Построена математическая модель геометрически нелинейных функционально-градиентных пористых нанопластин Кирхгофа. Наноэффекты учитываются по модифицированной моментной теории упругости Янга (Yang), а геометрическая нелинейность учитывается по модели Т. фон Кармана. Рассматриваются пластины из функционально-градиентного материала, состоящего из керамики — диоксида циркония и металла — алюминия. Изучаются два типа пористости: увеличение пор в центре и по краям пластинки. Из принципа Гамильтона получены модифицированные уравнения Доннелла — Кармана, которые представляют из себя систему нелинейных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно функций прогиба и напряжений.

В работе дальнейшее развитие получил метод вариационных итераций, рассмотренный в публикациях Крысько В. А., Жигалова М. В. и Калуцкого Л. А. Эффективность метода вариационных итераций (расширенного метода Канторовича) демонстрируется на сопоставлении полученных решений с решениями, полученными методами Бубнова — Галеркина в высших приближениях, конечных разностей второго порядка точности и конечных элементов. Полученные решения показывают хорошее согласование, при этом при проведении численных экспериментов вариационный метод обеспечивает существенно меньшие затраты машинного времени, но одновременно обладает высокой точностью и позволяет рассматривать решения, как системы с «почти» бесконечным числом степеней свободы.

Анализируется влияние типов пористости материала, наноразмерного параметра, показателя пористости, функционально-градиентного индекса и граничных условий на напряженно-деформированное состояние нанопластин. Показано, что увеличение процентного содержания керамики в композите существенно увеличивает несущую способность пластин. Из рассматриваемых типов пористости оптимальным является материал с наибольшим распределением пор в центре пластины.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00160, <https://rscf.ru/project/22-11-00160>).

## Моделирование индентирования роговицы

**Кароткиян Р. В.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

При проведении офтальмологического исследования для разработки глазных протезов, а также для профилактики ряда заболеваний, отсутствует возможность измерения механических характеристик роговицы. Получение данных возможно экспериментально на энуклеированном глазном яблоке, ввиду чего истинные значения характеристик изменяются. Несмотря на неоднородность роговицы и разность толщин ее тканей, возможно построение аналитических и численных моделей роговицы методом конечных элементов, которые могут использоваться в качестве аналога для проведения точного анализа состояния тканей.

В предложенном исследовании<sup>1,2</sup> рассматривается напряженно-деформированное состояние роговицы с учетом внутриглазного давления в области контакта во время индентирования сферическим индентором по методу Роквелла. В работе использована модель, в которой роговица представлена как безмоментная упругая поверхность. Целью данной работы является оценка влияния различных геометрических и физических параметров (радиус кривизны роговицы, толщина оболочки, модуль упругости роговицы) на показатели деформации. Измерение нагружения моделируется контактными задачами в Ansys. До нагружения составная оболочка заполнена несжимаемой жидкостью с давлением. Неоднородность роговицы на первоначальном этапе не учитывается, а материалы задаются как изотропные. На первом шаге нагружения прикладывается внутреннее давление, а на следующих шагах прикладывается сила.

Изначально роговица рассматривается как монослой, что упрощает качественный анализ. В дальнейшем предполагается рассмотрение нагружений на роговице как на многослойной модели, что усложняет задачу, ввиду разности толщин слоев, что не позволяет рассматривать модель как тонкостенный объект. На данный момент известен подход, который изначально рассматривает роговицу как порупругую двухслойную контактную модель, включающую в себя слой Боумена и стромы.

Предложенная в работе модель деформированного состояния мягких биологических тканей позволяет дополнить клиническую картину и расширить базу для разработки кератопротезов, что в свою очередь уменьшит риск при проведении операции и увеличит точность назначенного лечения со стороны медицины.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-19-00732, <https://rscf.ru/project/22-19-00732/>) в РЦКП НОЦ «Материалы» ДГТУ (<https://nano.donstu.ru>).

---

<sup>1</sup> *Sadyrin E., Karotkiyan R., Sushentsov N., Stepanov S., Zabiayaka I., Kislyakov E., Litvinenko A.* Mechanical Properties Derived by Spherical Indentation of TiN Coating Deposited by a Method Combining Magnetron Sputtering and Arc Evaporation // Springer Proceedings in Materials. 2020. V. 6. P. 85–95.

<sup>2</sup> *Swain M. V., Schroeter N., Nohava J., Eberwein P.* Indentation of the cornea: A Bi-layer contact problem // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2020. V. 118. Article number 104463.

## Конечные деформации микрополярных оболочек с непрерывно распределенными дефектами

Карякин М. И., Зубов Л. М.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Дефекты типа дислокаций и дисклинаций играют важную роль в механическом поведении поверхностных кристаллов, нанотрубок, нанопленок и других двумерных физических систем. Если число дефектов в ограниченной части исследуемого объекта весьма велико, целесообразно перейти к их непрерывному распределению.

В работе используется нелинейная микрополярная теория, в которой оболочка трактуется как материальная поверхность, каждая точка которой имеет шесть степеней свободы абсолютно твердого тела. Модель нелинейно-упругой микрополярной оболочки с распределенными дислокациями строится путем предельного перехода от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению. Система уравнений, описывающая нелинейные деформации оболочки с распределенными дислокациями, содержит в качестве неизвестных функций тензорные поля дисторсии и вращения. Чтобы распространить нелинейную теорию оболочек на случай присутствия изолированных и распределенных дисклинаций, мы преобразуем указанную систему уравнений таким образом, что неизвестными функциями становятся тензорные поля метрических и изгибных деформаций. Плотность дисклинаций при этом вводится как векторная функция координат, заменяющая ноль в правой части нелинейных уравнений совместности изгибных деформаций.

Решена задача о непрерывно распределенных дислокациях в круговой цилиндрической оболочке, нагруженной гидростатическим давлением, продольной силой и крутящим моментом, а также в замкнутой сферической оболочке, нагруженной давлением и распределенной моментной нагрузкой. Система силовых и моментных дифференциальных уравнений равновесия сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которых позволяет получить точное решение, справедливое при больших деформациях и поворотах. Проведен численный анализ влияния поля дислокаций на напряженно-деформированное состояние оболочек при различных условиях нагружения.

Выведена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая напряженное состояние упругой оболочки с заданными внешними нагрузками и плотностями дислокаций и дисклинаций. Общая теория проиллюстрирована решением нелинейной задачи о равновесии сферической оболочки со сферически симметричным распределением дислокаций и дисклинаций.

Полученные результаты могут иметь приложения в задачах моделирования и экспериментального исследования механического поведения двумерных материалов с дефектами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00123).

## Альвеолы — многогранники: соответствие вентиляции и перфузии

**Кислухин В. В.***Москва*

В покое перфузируется порядка 10% легочных капилляров, доставляя в кровь 10–20% альвеол. Ответ на вопрос о том, почему не вентилируются неперфузируемые альвеолы, дает их форма. Поиск формы показал, что альвеолы являются многогранниками, с преобладанием додекаэдров. При дыхании объем многогранников меняется только если одновременно изменяются размеры их граней. Чтобы размеры граней менялись, необходимы два процесса: поступление крови из артериального и венозного резервуаров в капилляры, расположенные в гранях, и перемещение жидкости в капилляр — ткань при вдохе и выдохе. Цель исследования состоит в том, чтобы представить механику при самостоятельном дыхании и при искусственной вентиляции легких, а также предложить методы оценки количества воды, перемещаемой в дыхательном цикле между кровью и тканью легких.

При спонтанном дыхании вдох обеспечивается движением реберных мышц и диафрагмы, при этом падает внутриплевральное давление. Возникают силы, растягивающие альвеолы. Расстояние между любыми двумя точками внутри альвеолы возрастает. Точки внутри альвеолы «раздвигаются» воздухом, а внутри ее стенки — жидкостью. Поскольку ткань перегородки несжимаема, то изменить свой объем она может, набирая или отдавая воду. Перегородки, в которых есть кровоток, могут менять свой объем и линейные размеры. Неперфузируемые перегородки менять свой размер не могут, и, если поступление крови в альвеолы снижено, то будет снижена ее способность расширяться. При ИВЛ альвеолы расширяются входящим воздухом. При вдохе перегородки между альвеолами (границы) растягиваются и сжимаются. В результате вода выходит из ткани и капилляров при вдохе и заходит при выдохе. Нормальные давления в дыхательном аппарате обеспечат поступление воздуха только в перфузируемые альвеолы. Перемещение воды между тканью и капиллярами порождает изменение гематокрита. Поэтому оборудование, регистрирующее физические свойства крови, зависящие от гематокрита, такие как плотность (регистрация ультразвуковым флуоэтом или маятником), электрическое сопротивление (реограф) и оптическая плотность (оптическая приставка), позволяют оценить перемещение воды. В эксперименте датчики размещались на аорте или располагались на трубке, соединяющей одну из артерий с яремной веной. Кровоток по трубке 8–10 мл/мин. Введение 0.9% NaCl и 5% глюкозы, объемом 0.2–0.3 мл/кг позволяло найти СВ, дополнительное введение 40% Gl или 5% NaCl объемом 0.05 мл/кг давало определение легочной воды.

В эксперименте и клинике было найдено, что перемещение воды ткань — кровь — величина порядка 0.05–0.15 мл/кг. Величина легочной воды была порядка 0.3–0.6 мл/кг. По литературным данным легочная вода, в зависимости от состояния легких, принимает значения от 0.1 до 1.0 мл/кг, а количество воды перемещающееся в здоровых легких было до 0.1 мл/кг. Есть зависимость величины перемещения от частоты дыхания и давления конца выдоха. Рассмотрена схема упаковки легочных альвеол, позволяющая объяснить согласование вентиляции и перфузии. Показаны возможности метода разведения физических свойств крови, где индикаторами являются физраствор и 5% глюкоза.



## Устранение пилообразных осцилляций при использовании разностной схемы для моделирования массопереноса в высыхающей на подложке капле в приближении тонкого слоя

Колегов К. С.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева, Астрахань

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет, Тюмень

Испаряющиеся капли и плёнки используются в приложениях из разных областей. Особый интерес представляют различные методы испарительной самосборки. В работе<sup>1</sup> описана математическая модель массопереноса в высыхающей на подложке капле на базе приближения тонкого слоя. Модель учитывает перенос растворённого или взвешенного вещества капиллярным потоком, диффузию этого вещества, испарение жидкости, формирование твёрдого осадка, зависимость вязкости и плотности потока пара от концентрации примеси. Рассматривается случай, когда трёхфазная граница «жидкость — подложка — воздух» закреплена. Для уравнений модели разработаны явные и неявные разностные схемы. Предложена модификация численного метода, в которой комбинируется расщепление по физическим процессам, итерационный метод явной релаксации и метод прогонки. Описан практический рецепт подавления пилообразных осцилляций на примере конкретной задачи.

Разработан программный модуль на языке C++, который в дальнейшем можно будет использовать для задач испарительной литографии<sup>2</sup>. С помощью этого модуля проведены численные расчёты, результаты которых сравнивались с результатами, полученными в пакете Maple. Численное моделирование предсказало случай, когда направление капиллярного потока с течением времени меняется на противоположное из-за изменения знака градиента плотности потока пара. Это может приводить к замедлению выноса вещества на периферию, что в результате будет способствовать формированию более или менее равномерного осадка по всей площади контакта капли с подложкой. Данное наблюдение полезно для совершенствования методов подавления кольцевых осадков, связанных с эффектом кофейных колец и нежелательных для некоторых приложений, как, например, струйная печать или нанесение покрытий.

Часть работы, относящаяся к разработке математической модели, выполнена при поддержке программы развития университета «Приоритет 2030» проект № 122112500011-0 «Природовдохновленные оптические технологии» Центра природовдохновленного инжиниринга в ТюмГУ.

Исследование, связанное с разработкой численного метода и программы для ЭВМ, выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10216, <https://rscf.ru/project/22-79-10216/>, в АГУ им. В. Н. Татищева.

<sup>1</sup>*Kolegov K. S.* Suppression of sawtooth oscillations when using a finite-difference scheme for mass transfer simulation via the lubrication approximation in a droplet evaporated on a substrate // 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2301.06983.

<sup>2</sup>*Колегов К. С.* Программа для моделирования массопереноса в высыхающей на подложке капле в приближении тонкого слоя. Свидетельство о регистрации программы PR23002. Новосибирск: Фонд алгоритмов и программ СО РАН. 2023. URL: <https://fap.sbras.ru/node/5114>.

## Прогиб круговой упругой мембраны под действием сферического штампа

**Колесников А. М.<sup>1</sup>, Анесян В. М.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Контакт двух тел встречается повсеместно в природе и технике. Часто одно тело (штамп) является существенно более жёстким, чем другое, например, при контакте тела, изготовленного из металла, дерева или жёсткого пластика, с мягкими биологическими тканями, резиноподобным материалом и/или с тонкостенной конструкцией. В таких случаях деформацией штампа можно пренебречь, сосредоточившись на исследовании менее жесткого тела. Поэтому метод вдавливания рассматривается как один из способов определения механических свойств материалов, в том числе для определения высокоэластичных свойств тонких плёнок и биологических оболочек.

Действия штампа на тонкостенную конструкцию в области контакта можно описать распределёнными нормальной и касательной нагрузками. В настоящее время в большинстве исследований касательной нагрузкой пренебрегают, рассматривая только нормальную составляющую. Однако адгезия или трение в области контакта могут быть существенным фактором в контактной задаче, влияющим на напряженно-деформированное состояние исследуемой конструкции. Для их описания необходимо вводить в рассмотрение касательную составляющую реакции.

В данной работе рассматривается действие сферического штампа на круговую упругую тонкую пластинку, закреплённую по контуру. Задача рассматривается в предположении осесимметричности решения. Штамп моделируется как абсолютно твёрдое тело, а упругая пластина – как безмоментная оболочка. Для описания механических свойств высокоэластичного материала пластинки используется модель Дженга. Считается, что контакт происходит с трением, которое моделируется законом Кулона. Помимо случая сплошной пластинки, рассматривается задача о вдавливании для пластинки с центральным круглым отверстием, радиус которого меньше радиуса сферического штампа.

Целью исследования является определение влияния трения на процесс вдавливания. Исследования проведены для разных радиусов сферического штампа и коэффициентов трения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-49-10062).

## Механические свойства полимеризованной фотополимерной смолы Anycubic Basic

**Колесников А. М., Берник В. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время широкое распространение получает изготовление деталей и конструкций посредством послойного наращивания материала (аддитивные технологии). Существуют множество вариантов реализации данной технологии. Одним из таких вариантов является фотополимерная 3D-печать. В этом случае жидкая светочувствительная смола под действием специального направленного воздействия светом (обычно в ультрафиолетовом диапазоне) полимеризуется и становится твёрдым телом. Технология развивается в нескольких способах светового воздействия. Самым недорогим методом является LCD полимеризация в ванне. В этой технологии источник ультрафиолетового излучения прикрывается от области печати с помощью жидкокристаллического экрана (LCD), на котором послойно выводятся области, которые необходимо полимеризовать. Включая и выключая источник, меняя на экране область для полимеризации и постепенно отодвигая площадку печати, слой за слоем формируется трёхмерное тело.

Наряду с развитием технологий 3D-печати, параллельно развиваются технологии изготовления сырья (фотополимерных смол). Существует множество видов смол у каждого производителя. Они отличаются не только цветом, но и механическими свойствами.

Целью данной работы является исследование механических свойств фотополимерной смолы Basic Gray производителя Anycubic. Экспериментальные исследования проводились на базе лаборатории механики твёрдого тела кафедры теории упругости института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Ворovichа Южного федерального университета. Образцы для испытаний изготавливались на 3D-принтере Wanhao Duplicator 7 Plus, использующем технологию LCD. Он позволяет изготавливать детали размером  $68 \times 120 \times 180$  мм с разрешением в плоскости печати примерно 45 мкм и толщиной слоёв 35, 50 или 100 мкм. Испытания проводились на универсальной испытательной машине Shimadzu AGS-X с силовой ячейкой 5 кН. Были проведены испытания на прочность образца при растяжении и сжатии, а также испытания на релаксацию и ползучесть при растяжении. В работе исследуются основные прочностные свойства отверждённой смолы и рассматриваются её вязкоупругие свойства на основе стандартной линейной вязкоупругой модели.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-49-10062).

## Изменение некоторых параметров роговицы после проведения операций ReLEx SMILE

**Корников В. В.<sup>1</sup>, Качанов А. Б.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

<sup>2</sup>МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова, Санкт-Петербург

Рассмотрена задача сравнения изменения биомеханических свойств роговицы у пациентов с миопией до и после проведения кераторефракционных вмешательств по методике ReLEx SMILE с помощью анализатора CORVIS ST. Группы составили 23 пациента (46 глаз) со сферической рефракцией  $-3.8 \pm 1.8$  дптр.

Статистическому анализу были подвергнуты следующие показатели: ВГД и ВГД скорректированное (IOP и IOP correct, мм. рт. ст), т.е. ВГД без учета и ВГД с учетом биомеханических свойств роговицы соответственно. Амплитуда деформации (Deformation Amplitude, DA в мм.) описывает амплитуду деформации роговицы по времени и позволяет косвенно оценить «мягкость» роговицы. Коэффициент деформации (DA ratio) указывает на соотношение амплитуд смещения роговицы в центре и в 2-миллиметровой зоне от апекса, что позволяет судить о степени «жесткости» роговицы (чем меньше показатель, тем больше жесткость). Параметр жесткости SP-A1 описывается в виде формулы силы, деленной на смещение роговицы, и определяется конечным значением давления, деленным на амплитуду прогиба в точке A1. Обратное значение интегрированного радиуса ICR (Inverse Concave Radius, ICR в мм.), т.е. обратное значение вписанного радиуса кривизны роговицы. Индекс модуля жесткости SSI описывает модуль жесткости роговицы. Толщина роговицы в центре (CCT, мкм), т.е. толщина роговицы в центральной зоне.

В экспериментальных данных присутствовали пропущенные данные. Выборка являлась достаточно малой, поэтому пропуски заполнялись средними значениями анализируемой переменной.

В результате проведенного статистического анализа было показано, что по критерию Стьюдента среднее значение параметра IOP до операции значимо различается со средним значением параметра IOP после операции. Для сравнения различия значений параметра DA до и после операции был применен критерий Вилконсона. В этом случае значимого различия по этому параметру не было обнаружено. Применение установления различий параметра DA ratio дисперсионного анализа с повторными измерениями позволило установить различие в группах до и после операции. Сравнение средних значений параметра ICR с использованием критерия Стьюдента показало статистически значимое различие. Использование критерия Стьюдента для сравнения средних параметра индекса модуля жесткости SSI показало, что различия статистически не значимы. Для параметра толщины роговицы в центре CCT было показано статистически значимое различие в группах. Также значимое различие было показано для параметра жесткости SP-A1. По остальным параметрам не были получены значимые различия.

## Экспериментальное исследование течения жидкости через фантом аортального клапана

**Кочергин М. В.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь*

Патологии в работе аортального клапана напрямую влияют на гемодинамику системы кровообращения в целом, что влечет за собой как нарушения в работе отдельных органов тела, так и ухудшение самочувствия человека. Детальный анализ гемодинамики аортального клапана приведет к лучшему пониманию возникновения его основных заболеваний, а также влияния этих болезней на всю систему кровообращения.

Заболевание аортального клапана является одним из наиболее распространенных сердечно-сосудистых заболеваний, имеющееся у 25% населения старше 65 лет. Нарушения клапанов могут быть врожденными, как в случае формирования двустворчатого клапана, или могут развиться позже в течение жизни в виде кальцификации створок. Решение проблем с аортальным клапаном требует операционного вмешательства по его замене. Для оценки протезирования клапанов необходимо математическое и биомеханическое моделирование его работоспособности, в свою очередь результаты моделирования необходимо верифицировать. Для этих целей используются экспериментальные методы оценки гемодинамики, например, Particle Image Velocimetry (PIV).

В данной работе представлена методика экспериментального исследования динамики вязкой жидкости, протекающей через фантом аортального клапана. Методика заключается в создании прототипа рассматриваемого участка аорты, с включенным в него трехстворчатым аортальным клапаном. После создания прототипа собирается замкнутый контур с включенным в него насосом для имитации работы сердца. Первый этап создания прототипа заключается в создании трехмерной цифровой модели на основе снимков компьютерной томографии. Далее, после цифровой обработки модель подается на печать. При исследовании использовался 3D-принтер Formlabs 3 (тип печати — SLA) с использованием смол с твердостью по Шору 80А. При использовании данной технологии можно создавать очень тонкие объекты с разрешением вплоть до 25 мкм. При имитации поведения крови использовалась вода с добавлением веществ, способствующих совпадению вязкости жидкости и крови. Параметры жидкости проанализированы с помощью метода ротационной вискозиметрии на реометре MCR 702 Anton Paar. Регистрация результатов эксперимента проводилась с помощью метода PIV с использованием лазера, подсвечивающего частицы, и записью их движения на специальную камеру замедленной съемки.

По окончании эксперимента появляется возможность сравнить такие важные параметры как распределение скоростей и перемещения створок с результатами математического моделирования. Преимуществами эксперимента может выступать скорость, возможность менять входные данные непосредственно во время эксперимента и оценить поведение объекта при циклической нагрузке.

Автор выражает благодарность А. Г. Кучумову за полезные рекомендации и детальное обсуждение работы.

## Конечно-элементное моделирование интраокулярных линз с возможностью аккомодации

**Краснов Д. В.<sup>1</sup>, Епихин А. Н.<sup>2</sup>, Напрасников В. В.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Ростовский государственный медицинский университет, Ростов-на-Дону*

<sup>3</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Катаракта привела к слепоте около 20 млн людей, что составляет приблизительно 5% от числа слепых в мире. В развивающихся странах незрячесть из-за катаракты встречается у 10–40 детей на 100,000; в развитых странах — у 1–4 детей. С возрастом катаракта становится все более распространенной, и в мире она наблюдается у 68% людей старше 80 лет. Хирургические операции по имплантированию интраокулярных линз являются одним из методов лечения катаракты; однако, необходимо предварительно решить две важные задачи: разработка оптических и гаптических элементов имплантов, а также расчет взаимодействия имплантов с биологическими тканями глаза, с учетом того, что модули упругости тканей глаза обычно значительно меньше, чем модули упругости имплантов. В данной работе проводится математическое и конечно-элементное моделирование глазных протезов, с использованием искусственного хрусталика, состоящего из двух интраокулярных линз, что позволяет осуществлять аккомодацию.

Самая распространенная линза при катаракте — монофокальная линза. Это искусственный хрусталик глаза, который имеет одну фокусную точку и позволяет хорошо видеть на одном расстоянии. Обычно монофокальные линзы ставят для коррекции дальнозоркости или близорукости. Однако, чтобы видеть на других расстояниях, пациентам нужны очки или контактные линзы. Линзы обычно состоят из небольшой пластиковой пластины с боковыми стойками, называемыми гаптиками, которые удерживают линзу на месте в капсульном мешке глаза. В прошлом линзы производились из негибких материалов; в настоящее время многие производители используют различные виды силикона и акрилового стекла.

Цель данной работы — разработать проект биооптического комплекса, который будет имитировать естественные аккомодационные свойства хрусталика глаза с помощью компьютерного моделирования. Для компьютерного моделирования был использован программный комплекс Ansys, модели создавались с помощью CAD SpaceClaim. В качестве материала был выбран полиметилметакрилат, так как он реже мутнеет в оптической зоне линзы, в отличие от силиконовых линз, которые чаще мутнеют именно в центре. Математическое моделирование было выполнено с помощью метода конечных элементов, основанного на двух главных идеях: дискретизации исследуемого объекта на конечное множество элементов и кусочно-элементной аппроксимации исследуемых функций.

Одной из важных задач является выполнение конечно-элементного моделирования интраокулярных линз и исследование взаимодействия их гаптических частей с капсулярным мешком хрусталика, на который воздействуют мышцы окулярного мешка. Сокращение мышц окулярного мешка приводит к осевому движению линзы, что позволяет осуществить аккомодацию искусственного хрусталика. Разработанная модель линз позволяет оптимизировать ее гаптические элементы.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

## Развитие информационной системы «Градиентные покрытия»

**Крнев Л. И.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

С. М. Айзиковичем с сотрудниками разработан и развит метод решения плоских и осесимметричных контактных задач или задач о росте дисковой трещины отрыва в непрерывно-неоднородном пространстве. Он сводится к решению систем парных интегральных уравнений, трансформанты ядер которых аппроксимируются рациональными функциями. Парное интегральное уравнение с таким ядром имеет точное аналитическое решение. При построении трансформант ядер интегральных уравнений используется преобразование Ханкеля, а система обыкновенных дифференциальных уравнений с функциональными коэффициентами решается численно.

Информационная система «Градиентные покрытия» была создана с целью практического применения разработанных методов численно-аналитического решения широкого круга смешанных и несмешанных граничных задач осесимметричной статической теории термоупругости с учетом произвольного сочетания законов изменения термомеханических свойств. Ее расчетный модуль реализован на языке Fortran. Для формирования исходных данных, сохранения результатов расчетов и проведения в дальнейшем их многопараметрического анализа, разработана база данных, поддерживаемая СУБД PostgreSQL.

Подготовка исходных данных, запуск расчетов и анализ данных организован с помощью web-интерфейса информационной системы «Градиентные покрытия», разработанного на языке Python (фреймворк Django). При регистрации пользователь получает набор описаний законов изменения свойств, покрытий, воздействий и дополнительных параметров расчета, что позволяет ему быстрее освоиться в работе.

Функциональность информационной системы расширена режимом обработки результатов наноиндентирования. Пользователь имеет возможность передать на обработку заархивированные каталоги с текстовыми файлами «сила — смещение» (возможна также обработка файлов в формате .idr). В результате можно получить достоверную оценку модуля Юнга тонкого покрытия.

Ведется работа по созданию англоязычной версии сайта системы, а также подробного описания системы и решаемых задач. Разрабатывается режим взаимодействия с Ansys. Пользователь подробно описывает исследуемый материал и индентор в информационной системе «Градиентные покрытия», анализирует полученный результат, а также получает пакетный файл APDL для работы в системе Ansys.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-49-08014, <https://rscf.ru/project/22-49-08014/>).

## Моделирование поведения графенового нанорезонатора

**Крылова Е. Ю.**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов*

Технический прогресс приводит к необходимости проектирования и использования наноэлектромеханических систем (НЭМС) во многих отраслях современной техники. Из-за уменьшения размеров до наноуровня НЭМС приобретают гораздо более высокую чувствительность по сравнению с микроэлектромеханическими системами. НЭМС могут работать в гигагерцевом и даже в терагерцевом диапазоне частот, что позволяет им обнаруживать объекты на субатомном уровне, измерять массу и силу на уровне аттоньютоннов. С открытием графена большинство НЭМС проектируются на основе его структур: однослойных и многослойных лент, пластин, оболочек (углеродных нанотрубок).

В работе построена математическая модель поведения сетчатой прямоугольной нанопластины с электрическим приводом. Уравнения движения элемента геометрически нелинейной пластины, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского — Гамильтона на основании гипотез Кирхгофа. Рассматривается изотропный однородный материал. Масштабные эффекты учтены посредством микрополярной теории со стесненным вращением частиц в предположении, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. Рассматривается геометрическая нелинейность по теории Т. фон Кармана. Сетчатая структура пластины учитывается на основании континуальной теории Г. И. Пшеничнова. Сила электрического поля, действующая на пластину, рассматривается как поверхностная сила, приложенная по нормали к срединной плоскости пластины — сила Кулона.

Методом Бубнова — Галеркина в высших приближениях решена задача о собственных нелинейных колебаниях графеновой пластины, что позволяет изучать не только основной тон собственных колебаний системы. Проведен анализ влияния геометрии сетки пластины на частоту собственных линейных колебаний. Показано, что увеличение расстояния между ребрами в сетчатой структуре приводит к снижению значения собственной линейной частоты. Наличие в структуре сетки ребер с углом наклона  $0^\circ$  и  $90^\circ$  приводит к увеличению частоты собственных линейных колебаний. Установлено, что посредством изучения зависимости

$$\mu(H) = \frac{\omega_{nm}^2}{\omega_{0nm}^2},$$

где  $\omega_{nm}$  и  $\omega_{0nm}$  — нелинейная и линейная частоты собственных колебаний,  $H$  — амплитуда колебаний, можно прогнозировать эффект втягивания, который может наступать уже при прогибе, близком к четверти зазора между пластиной и электродом. Подтверждено, что более высокие моды собственных линейных и нелинейных колебаний менее чувствительны к изменению значения постоянного напряжения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00331).



## Моделирование транспорта взвеси в русловых потоках на основе модифицированной схемы «кабаре»

Кузнецова И. Ю.<sup>1</sup>, Чистяков А. Е.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

При моделировании процесса транспорта взвешенных частиц в мелководных водоемах и русловых потоках на основе центрально-разностных схем возникает проблема, связанная с падением точности для больших значений сеточного числа Пекле. Существует несколько подходов к решению данной проблемы. Один из них связан с измельчением размера шага по пространственной расчетной сетке, что влечет за собой увеличение трудоемкости вычислений. Например, при решении трехмерной задачи диффузии — конвекции для уменьшения числа Пекле в два раза необходимо уменьшить шаги по пространству в два раза, а по времени — в четыре. Таким образом, трудоемкость возрастает в 32 раза. Другим подходом к решению данного класса задач является применение других разностных схем, например, схемы «кабаре». Разностные схемы «кабаре» и «крест» обладают достаточно близкими свойствами: являются бездиссипативными и обладают вторым порядком точности относительно шагов по пространственному и временному координатным направлениям. Несмотря на данные свойства схемы обладают низкой точностью. При линейной комбинации двух схем с близкими свойствами часто происходит взаимная компенсация ошибок аппроксимации, и, при этом, полученная в результате схема обладает лучшими свойствами по сравнению с исходными схемами.

В работе рассмотрено применение второго подхода при моделировании задачи транспорта взвешенных частиц в русловых потоках. Для решения трехмерного уравнения диффузии — конвекции, описывающего процесс транспорта многокомпонентной взвеси, разработана и исследована модифицированная схема «кабаре», представляющая собой линейную комбинацию схем «кабаре» и «крест» с коэффициентами, равными  $2/3$  и  $1/3$ , соответственно, и полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации.

Применение предложенной модифицированной схемы «кабаре» позволяет избежать увеличения трудоемкости при увеличении скорости движения водного потока. Предложенная модификация схемы «кабаре» для численного решения задачи транспорта взвешенных частиц на основе уравнения диффузии — конвекции обладает большей точностью по сравнению с центрально-разностной схемой, двухпараметрической разностной схемой, схемой, представляющей собой линейную комбинацию центрально-разностной схемы со схемой «кабаре» для значений сеточного числа Пекле в диапазоне  $2 \leq Pe \leq 20$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00295).

## Исследование бифуркаций в окрестности косимметричного равновесия динамической системы с обратимой косимметрией

Курдоглян А. В.<sup>2</sup>, Куракин Л. Г.<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт водных проблем РАН, Москва

<sup>2</sup>Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ

<sup>3</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Термин «косимметрия» был введен Юдовичем В. И.<sup>1</sup> в связи с объяснением необычного эффекта, обнаруженного Любимовым Д. В.<sup>2</sup> в одной из задач фильтрационной конвекции. Согласно определению, косимметрией векторного поля в гильбертовом пространстве называется векторное поле, ортогональное данному в каждой точке. Равновесие динамической системы называется косимметричным, если оно является нулем косимметрии.

Динамическая система с нетривиальной косимметрией обладает бесконечной коразмерностью вырождения. Однако, начиная с 1991 года, нетривиальные косимметрии были обнаружены в ряде физических задач. При этом, например, в основополагающей работе<sup>1</sup> предполагалась либо некосимметричность рассматриваемого равновесия, либо его косимметричность одновременно с необратимостью косимметрии. Так, не сразу был рассмотрен промежуточный случай, когда равновесие косимметрично, а косимметрия является обратимым оператором. Этот случай изучен в работе<sup>3</sup>, где исследованы бифуркации в окрестности косимметричного равновесия в предположении, что динамическая система обладает малым параметром. Предварительный анализ выполнен методом Ляпунова — Шмидта. Установлено, что косимметричное равновесие является частью непрерывного семейства, если исходное уравнение нечетномерно и нет дополнительных вырождений. Это равновесие изолировано в аналогичном случае четномерной системы. Получен ряд сценариев ветвления семейств некосимметричных равновесий.

Наименее вырожденной содержательной задачей оказался случай, когда линейная часть исходного уравнения обладает одновременно двумерным ядром, нейтральным спектром устойчивости, состоящим из двукратного нулевого собственного значения, и не содержит собственных значений в правой комплексной полуплоскости. Этот случай подробно изучен методом центрального многообразия. Построена классификация таких систем для всех случаев, чья коразмерность вырождения не превышает двух.

Работа Л. Г. Куракина выполнена в рамках темы № FMWZ-2022-0001 Государственного задания ИВП РАН (регистрационный номер 122041100222-7).

<sup>1</sup>Yudovich V. I. Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection // *Mathematical Notes*. 1991. V. 49, № 5. P. 540–545.

<sup>2</sup>Любимов Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // *ПМТФ*. 1975. Т. 16, № 2. С. 131–137.

<sup>3</sup>Kurakin L. G., Kurdoglyan A. V. On the Isolation/Nonisolation of a Cosymmetric Equilibrium and Bifurcations in its Neighborhood // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2021. V. 26. P. 258–270.

## Численные и аналитические модели течения химуса в кишечнике

Кучумов А. Г.<sup>1</sup>, Камалтдинов М. Р.<sup>2</sup>, Лукин П. С.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь

<sup>2</sup>ФНЦ медико-профилактических технологий управления рисками здоровью  
населения, Пермь

<sup>3</sup>Пермский государственный медицинский университет им. акад. Е. А. Вагнера,  
Пермь

Хронические воспалительные заболевания кишечника (ВЗК) возникают чаще всего в возрасте 20–40 лет, и у 1/4 пациентов диагностируются в возрасте до 20 лет. В РФ может насчитываться более 500 тысяч пациентов с ВЗК. Диагностика осложняется тем, что симптомы этих заболеваний неспецифичны. К сожалению, врачи общей практики не всегда могут дать пациенту своевременную рекомендацию. Также следует отметить, что наблюдается рост числа пациентов, страдающих от колоректального рака (КР) (около 10 млн. смертей ежегодно).

Однако, в настоящее время все больше усилий прилагается для ранней диагностики ВЗК и КР путём совместной работы специалистов (гастроэнтерологов, колопроктологов, хирургов-эндоскопистов) в рамках мультидисциплинарной команды. Следует отметить, что междисциплинарный подход в решении данной проблемы предполагает участие не только представителей медицинского сообщества, но и представителей технических и физико-математических наук. Применение методов математического моделирования и биомеханики позволит создать модель кишечника для анализа патологического состояния конкретного пациента и разработать рекомендации по индивидуальному лечению.

Толстый кишечник представляет собой длинную полую мышечную трубку сложной формы, которая переваривает и поглощает питательные вещества и воду из пищи (которую в медицине принято называть химусом). Кишечник также играет ключевую роль в переработке вредных веществ и защите от инфекции. Для скоординированного выполнения всех этих функций необходима перистальтика (волнообразное сокращение полого органа для продвижения содержимого), которая обусловлена гормональными, нервными, электрофизиологическими и другими факторами.

В данном докладе представлены результаты разработки численных и аналитических моделей течения химуса и каловых масс в кишечнике с учётом перистальтики. Клинические применения данной модели могут выражаться в описании и понимании причин патофизиологии нарушений моторики, диагностики ВЗК и КР, а также визуализации дисфункции толстой кишки, что позволит значительно снизить число пациентов с данным заболеванием.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ-Иран № 20-58-56014.

## Зависимость характеристик от стехиометрического состава покрытий AlN

Лапицкая В. А.<sup>1</sup>, Николаев А. Л.<sup>2</sup>, Харчевников И. О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Нитрид алюминия (AlN) — керамический материал, который находит разнообразное применение в современной медицине, науке и промышленности. Одним из инновационных способов использования AlN является разработка биосенсоров. Такие устройства используются в приложениях, где требуется точное и селективное обнаружение молекул-мишеней. Детекцию обычно проводят в вязких средах с помощью настраиваемых биомолекул, например, антител. Такие датчики также являются важными инструментами для аналитических исследований биомолекулярных взаимодействий с твердыми поверхностями. Например, такие биосенсоры могут быть интегрированы на внепросветную поверхность имплантатов для непрерывного мониторинга сосудистого протеза, предоставляя жизненно важную информацию о гемодинамике кровотока в искусственном сосуде пациента. Одним из возможных путей улучшения свойств покрытия AlN является управление его стехиометрическим составом в процессе напыления путем изменения объема азота в вакуумной камере.

Для нанесения покрытий AlN был использован метод реактивного магнетронного напыления. В процессе напыления все параметры фиксировались, и изменялся только поток подаваемого в вакуумную камеру азота. Были получены четыре образца покрытий AlN, напыленные при потоках  $N_2 = 1, 2, 3$  и  $4 \text{ см}^3/\text{мин}$ . Толщина, скорость роста и микроструктура были изучены с помощью сканирующей электронной микроскопии. Стехиометрический состав покрытий был исследован с помощью энергодисперсионного рентгеновского анализа. Стехиометрический состав образцов измеряли для каждого образца по трем прямоугольным областям размером  $150 \times 300 \text{ мкм}$ , затем результаты усредняли по площадям. Микрогеометрия поверхности покрытий изучалась с помощью атомно-силовой микроскопии. Средняя шероховатость  $R_a$  и средняя максимальная высота шероховатости  $R_z$  были получены для каждого образца по 20 профилям: 5 по горизонтали, 5 по вертикали, 10 по диагонали.

Была обнаружена зависимость между стехиометрией и микроструктурой полученных покрытий, тогда как скорость роста и толщина полученных покрытий заметно не зависели от концентрации азота в вакуумной камере в процессе напыления. Была обнаружена интересная полностью линейная зависимость стехиометрического состава напыляемых покрытий от потока  $N_2$ , что нехарактерно для реактивного магнетронного напыления.

Исследование выполнено Лапицкой В. А. за счет гранта БРФФИ (проект № Т2ЗРНФ-132), Николаевым А. Л. и Харчевниковым И. О. за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-49-08014, <https://rscf.ru/project/22-49-08014/>).

## Конечно-элементный расчёт внедрения штампа в пороупругую водонасыщенную среду

**Леднов А. С.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

При разработке протезов биологических тканей на основе предварительного математического моделирования необходимо знание их механических свойств, одним из способов определения которых является индентирование. Индентирование — это испытание материала, которое проводится посредством вдавливания в образец с заранее заданным усилием специального наконечника — индентора, с известными механическими свойствами (формой, модулем упругости и т. д.). В результате этого процесса может быть установлена зависимость между силой и глубиной внедрения, определена форма деформированной поверхности, а в случае неупругой деформации — размер отпечатка после снятия нагрузки. Эти данные могут служить дополнительной информацией для решения обратной коэффициентной задачи, к которой сводится описанная проблема.

В качестве модели мягких биологических материалов, являющихся прототипом роговицы глаза, здесь рассматривается пороупругая водонасыщенная среда, известная в литературе как модель консолидации или Био. Для моделирования внедрения в роговицу плоского штампа была спроектирована пороупругая проницаемая модель роговицы человеческого глаза и рассчитано её индентирование, посредством вдавливания в неё цилиндрического индентора.

В работе исследуется математическая модель индентирования роговицы человеческого глаза плоским штампом, построенная в программном комплексе Ansys. Были рассмотрены две различные модели: слоистая модель, учитывающая разные для слоёв модуль Юнга и коэффициент Пуассона, и модель однородной водонасыщенной среды.

Получены графики распределения порового давления в слоях при индентировании и зависимость сила — глубина внедрения штампа, определена форма деформированной поверхности. Полученные данные о механических свойствах роговицы могут быть использованы для осуществления адекватной математической постановки прямой задачи. Это может помочь при разработке и усовершенствовании современных кератопротезов для людей, страдающих от механических повреждений и бельма глаза.

Автор выражает благодарность научному руководителю А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-19-00732, <https://rscf.ru/project/22-19-00732/>).

## Разработка метода на основе сверточной нейронной сети для автоматической оценки тяжести остеоартрита коленного сустава

**Манна А. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время методы машинного обучения стали широко использоваться для улучшения качества медицинских изображений и их анализа с целью более точной медицинской диагностики.

Остеоартрит (ОА) является одним из наиболее распространенных заболеваний костей и может иметь много негативных последствий, если не выявить его на ранней стадии. Ранняя диагностика заболевания ОА может быть проведена с помощью дорогостоящего аппарата МРТ. Отсюда вытекает важность разработки метода, использующего нейронные сети для анализа рентгенографических изображений и диагностики заболеваний, поскольку устройства для рентгенографической визуализации доступны и недороги.

В этой статье предлагается метод автоматической оценки тяжести остеоартрита коленного сустава. Эффективная нейронная архитектура разрабатывается и обучается для изучения особенностей заболевания и демонстрации эффективных результатов при таком заболевании. Была использована сеть RESNET-34, состоящая из двух ветвей, каждая из которых содержит спиральную линейную канавку и четыре скрытые сети, для идентификации области колена, настройки функции ошибок в соответствии с потребностями при различных заболеваниях и устранения проблемы классового дисбаланса. Нейронная сеть была обучена на двух наборах данных для женщин и мужчин, с улучшением рентгенографических изображений и устранением шума, возникающего в результате радиальных изображений. Затем изображение коленного сустава было уточнено с использованием техники `imagepixelspacing` с размером  $256 \times 256$ .

Нейронная сеть была обучена, а для подтверждения определения базовой линии был использован тест Каппа. Средняя точность мультиклассового Т-теста, достигнутая разработанной моделью, составила 68.45%, а коэффициент AUC оказался на 0.94 выше, чем у любых ранее проведенных исследований.

## Математическое и компьютерное моделирование фазового перехода в процессе криоконсервации биологического материала

Матросов А. А.<sup>1</sup>, Нижник Д. А.<sup>1</sup>, Пустовалова О. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматриваются вопросы разработки новой технологии низкотемпературного консервирования репродуктивных клеток рыб. В частности, такая технология может быть использована для осетровых рыб. На этапе эквilibрации, для лучшего проникновения криопротектора внутрь клетки, специальным пьезоактуатором в суспензии (смесь половых клеток рыб с криоконсервантом) создаются акустические волны. На следующем этапе происходит диффузия криопротектора через мембрану клетки. Учитывая современное разнообразие моделей внутриклеточного переноса веществ, принято, что соответствующие коэффициенты диффузии предварительно определены из биологических экспериментов.

В работе строится математическая модель замораживания суспензии с учетом температурного скачка на границе твердой и жидкой фаз. Вид этой границы определяется температурой кристаллизации. Учитывается разница теплофизических свойств жидкой и твердой фаз в областях, в которых температура выше и ниже температуры фазового перехода. Математическая модель представляет собой начально-краевую задачу теплопроводности, в которой теплоемкость и теплопроводность меняются скачком на границе фаз. Кроме того, на этой границе учитываются поверхностные источники тепла, характеризующие его выделение при кристаллизации. Для трехмерной задачи такой источник тепла может быть задан в виде дельта-функции Дирака.

Для численного анализа разработана программа в конечно-элементном пакете FlexPDE. В программе поверхностный источник тепла заменяется узким объемным гауссовским распределением, с помощью которого можно моделировать размытость поверхности фазового перехода.

В численном эксперименте моделируется ситуация, в которой цилиндрический сосуд с тонкими стенками с суспензией комнатной температуры помещается в жидкий азот. Верхняя крышка сосуда выполнена из теплоизоляционного материала. Таким образом, рассматривается нестационарная осесимметричная задача для кругового цилиндра, на нижнем торце и боковой границе которого задана постоянная температура (температура глубокого замораживания в жидком азоте  $-195.75^{\circ}\text{C}$ ), верхняя крышка теплоизолирована. С течением времени весь объем суспензии переходит в твердую фазу. Межфазная граница начинает двигаться от границ, на которых задана постоянная температура. Исследуется распределение температуры от стенок к точке на оси цилиндра для различных моментов времени. Анализ этих распределений показывает, что в области границы фаз имеются некоторые особенности, которые возникают из-за температурного скачка. В некоторых точках этот температурный скачок ярко выражен. Данные такого поведения температуры могут быть использованы при оценке качества замораживания биологических клеток.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 21-16-00118.

## Об устойчивости стационарного вращения правильного многоугольника из вихревых зарядов вокруг круговой области

Мелехов А. П., Островская И. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается модель  $N$  точечных вихревых зарядов на плоскости вне круговой области радиуса  $R$  с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{j < k} \frac{\gamma_j \gamma_k}{|z_k - z_j|} - \frac{1}{8\pi} \sum_{j, k=1}^N \left( \frac{\gamma_j \gamma_k}{|z_k - \hat{z}_j|} - \frac{\gamma_j \gamma_k}{|z_k|} \right).$$

Здесь  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  — комплексные переменные,  $x_k, y_k$  — декартовы координаты  $k$ -го вихревого заряда,  $\gamma_k$  — его интенсивность (будем считать, что все вихри имеют одинаковую интенсивность  $\gamma$ ),  $\hat{z}_k = R^2/\bar{z}_k$  — отражение  $k$ -го заряда границей круга. Сила взаимодействия между  $j$ -м и  $k$ -м вихревыми зарядами потенциальна с потенциалом  $1/r_{jk}$ , где  $r_{jk}$  — расстояние между этими зарядами. Влияние границы учтено с помощью метода отражений. Предполагается бесциркуляционное обтекание границы. Потенциал  $1/r_{jk}$  ранее встречался, например, в работе<sup>1</sup>. Из современных работ отметим работы<sup>2,3</sup>.

Доклад посвящен задаче устойчивости системы точечных вихревых зарядов, расположенных в вершинах правильного  $N$ -угольника ( $N = 2, \dots, 8$ ) вне круговой области. Аналитически исследованы квадратичная часть гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Получены условия устойчивости по Раусу и экспоненциальной неустойчивости. Указаны области параметров, требующие дополнительного нелинейного анализа. Перечислены все резонансы до четвертого порядка включительно. Обнаружен эффект стабилизации стационарного вращения системы вихревых зарядов границей области для  $N = 6, 7, 8$ .

Прямым численным счетом исследуется устойчивость стационарного вращения для  $N = 2, \dots, 8$  при всех резонансных значениях параметра  $q$ , возникающих в этой задаче. Обнаружена неустойчивость только в случае  $N = 3$  в двух резонансных точках, соответствующих двукратному нулевому собственному значению матрицы линеаризации. Численно проверены также все аналитические результаты об устойчивости и неустойчивости системы точечных вихревых зарядов. Основные результаты опубликованы в работе<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Thomson J. J. On the Structure of the Atom: An Investigation of the Stability and Periods of Oscillation of a Number of Corpuscles Arranged at Equal Intervals around the Circumference of a Circle; with Application of the Results to the Theory of Atomic Structure // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904. V. 7, № 39. P. 237–265.

<sup>2</sup> Куракин Л. Г., Мелехов А. П., Островская И. В. Об устойчивости правильной системы вихревых зарядов вне круговой области // Изв. вузов. Сев-Кавк. регион. Естественные науки. 2017. № 4-1. С. 24–30.

<sup>3</sup> Jean N. Renaud Circular Vortex Arrays in Generalised Euler's and Quasi-geostrophic Dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. V. 27, № 3. P. 352–368.



Шестифакторная модель радиальной неоднородности для случая  
изгибных нормальных упругих волн в протяженных  
функционально-градиентных трансверсально-изотропных цилиндрах

Мельничук Н. Ю., Моисеенко И. А.

*Донецкий национальный университет, Донецк*

Исследования эффектов влияния функциональной радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей бегущих волн, кинематические и силовые характеристики волнового процесса в телах цилиндрической геометрии с привлечением точных аналитических решений полной системы уравнений линейной динамической теории упругости на данный момент представлены лишь случаями наложения ограничений системного характера на вид функциональных законов радиальной неоднородности физико-механических характеристик изотропного, трансверсально-изотропного и цилиндрически ортотропного материала волновода. Подход основан на задании с точностью до константного сомножителя единого для всех характеристик экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности.

В данном исследовании представлены три альтернативных варианта шестифакторной модели радиальной функциональной неоднородности физико-механических характеристик трансверсально-изотропного материала сплошного единичного радиуса цилиндрического волновода для случая распространяющихся неосесимметричных нормальных волн

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}(r) = e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{12}(r) = (1 - 2\psi_1(r))e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{13}(r) = \psi_2(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{44}(r) = \psi_3(r)e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{c}_{33}(r) = \psi_3(r)\psi_4(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{66}(r) = \psi_1(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{\rho}(r) = \psi_5(r)e^{\varphi(r)} (r \in [0, \delta)). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}(r) = \psi_1(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{12}(r) = (\psi_1(r) - 2)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{13}(r) = \psi_2(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{44}(r) = \psi_3(r)e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{c}_{33}(r) = \psi_3(r)\psi_4(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{66}(r) = e^{\varphi(r)}, \tilde{\rho}(r) = \psi_5(r)e^{\varphi(r)} (r \in [0, \delta)). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}(r) = \psi_3(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{12}(r) = (\psi_3(r) - 2\psi_1(r))e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{13}(r) = \psi_2(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{44}(r) = e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{c}_{33}(r) = \psi_4(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{c}_{66}(r) = \psi_1(r)e^{\varphi(r)}, \tilde{\rho}(r) = \psi_5(r)e^{\varphi(r)} (r \in [0, \delta)). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) — произвольные, аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции,  $\delta > 1$  — параметр, определяемый из достаточного условия несильной радиальной неоднородности материала. Для каждой из представленных моделей неоднородности (1)–(3) предложены два подхода к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  по заданным из класса  $C^1[0, \delta]$  функциональным законам  $\tilde{c}_s^{(*)}(r) > 0$  ( $s = 11, 13, 33, 44, 66$ ) и  $\tilde{\rho}^{(*)}(r) > 0$   $r \in [0, \delta)$  — аналитический и приближенный, реализуемый любым численным методом, обеспечивающий аппроксимацию указанных функциональных законов полиномами на отрезке  $r \in [0, 1]$ . Сформулировано достаточное условие несильной радиальной неоднородности, обеспечивающее построение базисного матричного решения уравнений математической модели волнового деформирования протяженных цилиндров с усложненными физико-механическими свойствами. Элементы базисного решения выражены через аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции, представленные своими разложениями с определяемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами. Представлен анализ результатов численного эксперимента для случаев однородных и функционально-неоднородных трансверсально-изотропных волноводов.

## Об идентификации двумерного закона изменения плотности в цилиндре по данным о поле перемещения

**Мнухин Р. М., Дударев В. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время все большее внимание уделяется современным функционально-градиентным материалам, свойства которых изменяются по пространственным координатам. Их использование позволяет существенно снизить риски возникновения трещин и отслоений. Поскольку производство таких материалов является сложным, то важным вопросом является реализация неразрушающего контроля соответствия реальных свойств материала проектным.

В настоящей работе на основе линейной модели теории упругости для изотропного тела сформулирована задача об установившихся радиальных колебаниях полого цилиндра. Объект изготовлен из функционально-градиентного материала, свойства которого изменяются по двум пространственным координатам. Колебания цилиндра возбуждаются распределенной нагрузкой, приложенной к внешней боковой поверхности. Торцы находятся в условиях скользящей заделки. Свойства материала цилиндра задаются переменными параметрами Ламе и плотностью, изменяющимися по радиальной и продольной координатам. Численное решение прямой задачи об определении поля перемещения построено с помощью метода конечных элементов в пакете FlexPDE. Для анализа влияния свойств материала на значения резонансных частот колебаний и компонент поля перемещений рассмотрены законы изменения свойств функционально-градиентных материалов, используемые в литературе. Анализ проведенной серии численных расчетов выявил степень влияния амплитудных значений каждого из параметров материала и плотности на первую резонансную частоту и значения поля смещения. Представлены графики, показывающие влияние закона изменения плотности на значения компонент поля перемещений.

Сформулированы новые коэффициентные обратные задачи об определении функции изменения плотности в упругой неоднородной стенке цилиндра по данным о поле перемещений, измеренном в конечном наборе точек внутри области при фиксированной частоте<sup>1</sup>. Выявлены основные технические трудности при реализации схемы реконструкции на практике. Для улучшения точности процедуры дифференцирования таблично заданных двумерных функций предложен подход, который основан на алгоритме локально взвешенной регрессии. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению различных по типу двумерных законов изменения плотности в цилиндре. Анализ результатов позволил сформулировать практические рекомендации по реализации наиболее эффективной процедуры реконструкции.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>), в Южном федеральном университете.

---

<sup>1</sup>Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.

## Математические модели активности мозга

Муратова Г. В., Бавин В. В., Литвиненко М. М.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В связи с развитием методологии математического моделирования и прогрессом в экспериментальных исследованиях электрофизиологических характеристик было разработано множество моделей, описывающих электрическую активность мозга. Среди них есть относительно простые, например «Integrate and Fire», в которой нейрон представляется в виде параллельно подключенного конденсатора, отвечающего за емкостной ток мембраны, и резистора, имитирующего утечку ионов через ионные каналы. Созданы и более сложные, биологически правдоподобные модели, например, модель Ходжкина — Хаксли, которая сложнее в вычислительном плане, но гораздо точнее описывает динамику мембранного потенциала нейрона.

Более подробное исследование активности мозга приводит к значительному увеличению вычислительных затрат при моделировании. Полноатомное моделирование нейронной активности мозга — это пока недоступный путь при существующих вычислительных возможностях. Правильно выбранный баланс между сложностью модели и ограничениями на допустимую продолжительность времени расчетов позволит максимально эффективно использовать имеющиеся возможности и ресурсы.

В работе была исследована модель Ижикевича, которая является определенным компромиссом между вычислительной сложностью и биофизической правдоподобностью. Для реализации построенной модели нейронной электрической активности предложен алгоритм на основе технологий GPGPU, что позволило максимально использовать вычислительную мощность компьютера за счет разделения исходного потока данных нейросетевой модели на множество параллельных потоков обработки в GPU.

Была рассмотрена модель Морриса — Лекара, опирающаяся на формализм Ходжкина — Хаксли, для описания различных режимов осцилляторной активности. На основе экспериментальных данных была построена трехмерная динамическая модель, учитывающая наличие двух потенциал-зависимых ионных каналов: кальциевого и калиевого. В работе представлен анализ возможных режимов, предсказываемых теоретической моделью, и их сопоставление с данными, полученными экспериментально.

В работе было рассмотрено кабельное уравнение. Кабельная теория моделирует распространение импульса по нервным волокнам, состоящим из эквивалентных электрических цепей, используя параболическое дифференциальное уравнение в частных производных. Для реализации построенной модели используется алгебраический многосеточный метод.

Алгебраические многосеточные методы используют многоуровневые стратегии релаксации и грубо-сеточной коррекции, но, в отличие от геометрических методов, работают только с матрицей коэффициентов линейных уравнений. В данной работе исследованы специальные алгоритмы построения сеток.

Представлены некоторые численные результаты, приведены выводы и даны рекомендации.

Англоязычная магистерская программа мехмата ЮФУ «Computational Modeling in Technology and Finance»

**Надолин К. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В докладе представлена англоязычная магистерская программа «Computational Modeling in Technology and Finance». Образовательная программа создана на основе двух магистерских программ «Mathematical Modeling and Information Technologies» и «Financial Mathematics». Основной целью внедрения новой магистерской программы является адаптация к новым условиям международного академического сотрудничества и сохранение учебно-методического и кадрового потенциала мехмата ЮФУ в области преподавания на английском языке.

Исторически важную роль в развитии процесса интернационализации обучения на мехмате ЮФУ сыграл международный проект «Интернационализация учебных планов на уровне магистра в российских вузах в Южном регионе» (ICARUS), который выполнялся в 2011–2014 гг. по программе ЕС Tempus-IV<sup>1</sup>. В этом проекте, объединившем 4 российских и 4 европейских университета, мехмат ЮФУ выступал головным участником от российских вузов. Разработанная в рамках проекта ICARUS англоязычная магистерская программа, сочетающая прикладную математику и механику с современными информационными технологиями, стала естественным продолжением предыдущей деятельности коллектива мехмата ЮФУ по практическому развитию интернационализации обучения и соответствовала приоритетам Программы развития Южного федерального университета.

Проект ICARUS способствовал развитию академического сотрудничества мехмата ЮФУ с Техническим университетом г. Лаппеенранта (Финляндия) и внедрению совместной магистерской программы двух дипломов<sup>2</sup>. К сожалению, в 2022 году по решению финской стороны договор о сотрудничестве с ЛУТ и программа двух дипломов, просуществовав около десяти лет, были приостановлены на неопределенный срок.

В новых условиях руководством мехмата ЮФУ было принято решение разработать новую англоязычную магистерскую образовательную программу «Computational Modeling in Technology and Finance» на основе двух, существовавших ранее, магистерских программ «Mathematical Modeling and Information Technologies» и «Financial Mathematics».

---

<sup>1</sup>Карякин М. И., Надолин К. А., Наседкин А. В. Реализация в рамках проекта ICARUS магистерских программ «IT in Engineering» с перспективой присуждения двух дипломов // Материалы XIII Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». 2013. Т. 4. С. 154–157.

<sup>2</sup>Надолин К. А., Карякин М. И., Наседкин А. В. Мехмат ЮФУ: путь в европейское образовательное пространство // «Русский язык в парадигме современного образования: Россия и Иbero-Американский мир». Материалы Международного форума. Ростов-на-Дону, Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2018. С. 186–188.

## Формула скорости естественного водотока для инженерных приложений

**Надолин К. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Изучение водотоков естественного (реки, ручьи) или искусственного (орошительные и водоотводящие каналы) происхождения весьма актуально для решения задач природопользования и гидростроительства. Поэтому математическое моделирование гидродинамики русловых потоков имеет большое практическое значение и представляет значительный интерес, как с теоретической, так и с методологической точки зрения. С одной стороны, задачи гидрологии и водопользования требуют решений, удовлетворяющих инженерные потребности, с другой стороны, современный уровень развития прикладной математики и вычислительной техники позволяет перейти от простых гидравлических подходов к более сложным (и потенциально более точным) гидромеханическим. При этом сложность гидродинамических моделей должна быть оправдана в том смысле, что результаты моделирования должны не только воспроизводить наблюдаемые особенности рассматриваемых природных объектов, но и быть более точными по сравнению с гидравлическими формулами.

В докладе представлены результаты моделирования турбулентного течения в безнапорном открытом потоке вязкой жидкости, в том числе при ветровых воздействиях, вызывающих нагон — противотечение в приповерхностных слоях потока.

Используется предложенная ранее редуцированная трехмерная математическая модель мелкого протяженного и слабо искривленного руслового течения<sup>1</sup>. Особое внимание уделено учету турбулентности потока, для чего вводится функциональный параметр турбулентной вязкости. Отмечается зависимость этого параметра от локальных характеристик течения и предлагается формула, связывающая параметр турбулентной вязкости и живое сечение потока.

Например, для твердого неразмываемого русла, форма которого задана функцией  $z = h(x, y)$ , выражение для продольной скорости в безразмерной форме имеет вид

$$u = \frac{h}{h^2 - \mu_h} \left( GI(h - z) + \left( F - GI \frac{h^3 + (h^2 - \mu_h)\xi}{h^2 - \mu_h} \right) \ln \frac{h^3 - (h^2 - \mu_h)z}{h\mu_h} \right).$$

Здесь параметр  $GI$  определяет уклон потока, параметр  $F$  отвечает за воздействие ветра на поверхность потока, а параметр  $\mu_h$  задает вязкое сопротивление в придонном пограничном слое в зависимости от шероховатости. Функция  $\xi$  задает форму свободной поверхности потока и определяется из двумерной начально-краевой задачи. Полагая  $\xi = 0$ , приходим к формуле, которую рекомендуется использовать в инженерных приложениях.

<sup>1</sup>Надолин К. А. Упрощенные трехмерные математические модели гидродинамики и пассивного массопереноса в спокойных русловых потоках // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 196. С. 66–89. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-196-66-89.

Об определении эффективных температурных коэффициентов  
связанности наноструктурированных термоэластичных композитов  
по методам эффективных модулей и конечных элементов

**Наседкин А. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Для определения эффективных модулей наноструктурированных термоэластичных композитов рассматриваются краевые статические задачи, в которых масштабный фактор учитывается по обобщенной теории Гуртина — Мурдоха введением поверхностных термоэластичных полей на интерфейсных границах. В этой модели поверхностные модули существенно влияют на макрохарактеристики, если только включения или поры имеют наноразмеры.

Как известно, эффективные модули пьезоэлектрических наноструктурированных композитов без температурных полей могут быть найдены из решений задач гомогенизации, когда на внешней границе представительного объема композита принимаются линейные главные или постоянные естественные граничные условия. Тогда из условий энергетического баланса между композитом и средой сравнения эффективные модули выражаются через осредненные поля напряжений или деформаций и электрической индукции или напряженности электрического поля. При этом при учете поверхностных эффектов осреднение проводится как интегрированием по представительному объему, так и интегрированием по интерфейсным границам.

Здесь для нахождения полного набора эффективных модулей надо решить в общем случае девять краевых задач гомогенизации, когда отдельные механические или электрические внешние воздействия не равны нулю. Для решения этих задач удобно использовать метод конечных элементов и алгоритмы формирования представительных объемов, отражающие основные особенности внутренней структуры композита.

В работе показывается, что подобным образом можно определить и эффективные температурные коэффициенты связанности, если предварительно известны эффективные материальные модули композита без температурных полей. Так, эффективные модули температурных напряжений находятся из решений краевых задач при определенных ненулевых механических внешних воздействиях на внешней границе представительного объема и при постоянном ненулевом температурном поле внутри объема, а эффективные пьезоэлектрические константы вычисляются из решений краевых задач при заданных ненулевых электрических внешних воздействиях на внешней границе и снова при постоянном ненулевом температурном поле в объеме. Соответствующие формулы для эффективных температурных модулей связанности здесь также получаются из уравнений энергетического баланса.

Результаты численных экспериментов позволили провести анализ зависимостей эффективных модулей от выбора главных или естественных граничных условий, от процентного содержания и наноразмеров включений или пор и относительных площадей интерфейсных границ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00302).

Конечно-элементный анализ пьезокерамических метаматериалов  
с ячейкой периодичности Гибсона — Эшби при упрощенном  
способе учета неоднородности поля поляризации

**Наседкин А. В., Волков А. И., Корниевский А. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Под метаматериалами обычно понимаются структуры, состоящие из повторяющихся элементов или ячеек. Интерес к таким материалам в последнее время возрос в связи с развитием технологий 3D-печати и обнаруженными новыми применениями. В настоящей работе исследуются эффективные свойства пьезокерамического метаматериала с элементом периодичности в виде несимметричной ячейки Гибсона — Эшби. Данная ячейка является наиболее известной моделью, описывающей механические свойства высокопористых материалов с открытой пористостью. Здесь рассматривается пьезокерамический материал каркаса ячейки при изменяемых толщинах ребер ячейки и, соответственно, при различной итоговой пористости, причем не обязательно высокой.

Для определения набора эффективных модулей используется метод эффективных модулей и конечно-элементный программный комплекс Ansys. Для этого пакета были разработаны программы на языке APDL, позволяющие строить твердотельные модели ячеек Гибсона — Эшби с заданными геометрическими параметрами и регулярные решетки из этих ячеек, получать из них соответствующие конечно-элементные модели, решать набор задач гомогенизации и в результате определять полный набор эффективных модулей.

Поскольку ячейка Гибсона — Эшби имеет ребра, параллельные трем осям декартовой системы координат, то можно ожидать, что при поляризации пьезокерамического материала вдоль одной оси ребра ячейки, ребра, направленные вдоль других двух осей, будут менее поляризованными. В связи с этим представляет интерес исследование эффективных модулей при различных типах поляризации ячейки. Для этого было проведено сравнение результатов для однородно поляризованного материала, неоднородно поляризованного материала с неоднородностью только по модулю вектора поляризации и с неоднородностью по модулю и по направлению вектора поляризации. В этих моделях направления и модули векторов поляризации находились из предварительного решения задачи электростатики, моделирующей процесс поляризации в упрощенной линейной постановке. Был дан также анализ зависимостей эффективных модулей жесткости, пьезомодулей и модулей диэлектрических проницаемостей при трех указанных выше типах поляризации для одной ячейки и для решетки из ячеек Гибсона — Эшби.

Полученные в результате расчетов зависимости эффективных модулей от пористости в целом коррелируют с известными, найденными для других моделей высокопористых материалов 3-3 связности (т. е. композитов с открытой пористостью). Между тем, особенности конструкции ячейки Гибсона — Эшби приводят к большей деградации поперечных пьезомодулей при учете неоднородности поля поляризации как по направлению, так и по модулю.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00302).

## Анализ тарелкообразных излучателей из пористой пьезокерамики в режимах приема и излучения

Наседкина А. А.<sup>1</sup>, Нассар М. Э.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Menoufia University, Shibin El Kom*

В настоящей работе представлены некоторые результаты статьи<sup>1</sup>, полученные совместно с А. В. Наседкиным и М. Э. Нассаром. Рассматривался пьезоэлектрический излучатель в форме диска с двумя металлическими тарельчатыми накладками, который обычно называется Сymbal-преобразователем. Исследования других авторов показали, что эффективность работы этого устройства определяется как его геометрией, так и величинами пьезоэлектрических коэффициентов заряда материала диска. В связи с этим, в качестве активного материала преобразователя были использованы различные типы пористых пьезокерамик, имеющих необычные зависимости эффективных пьезомодулей от пористости. Рассматривались сплошная пьезокерамика, обычная пористая пьезокерамика, пористая пьезокерамика с очень тонким металлическим покрытием пор и пористая пьезокерамика с относительно толстым слоем металлизации на поверхности пор при различной пористости. Исследования в конечно-элементном пакете Ansys проводились в режиме установившихся колебаний для двух видов Сymbal-преобразователей. Первый преобразователь рассматривался как пьезогенератор возобновляемой энергии и при низкочастотных механических воздействиях генерировал электрические поля в пьезокерамическом диске. Использование пористой керамики для этого преобразователя показало меньшие коэффициенты электромеханического преобразования по сравнению с плотной, но в случаях пористой керамики с металлизацией поверхностей пор были получены лучшие результаты, особенно при достаточно большой пористости и при тонком покрытии пор металлом. Вторым типом Сymbal-преобразователя рассматривался в качестве излучателя акустических волн. Он имел более податливые накладки и генерировал механические колебания при электрических воздействиях вблизи первых резонансных частот. В этом случае при возбуждении преобразователя разностью потенциалов на первых частотах электрических резонансов были получены качественно аналогичные результаты по применению пористых пьезокерамик, что и для Сymbal-пьезогенератора. Однако, при возбуждении преобразователя электрическим током на первых частотах электрических антирезонансов наилучшие результаты были получены для обычной пористой пьезокерамики.

В развитии исследований были рассмотрены эти же преобразователи, работающие во внешних упругих и акустических средах. Анализ показал эффективность использования исследованных пористых пьезокерамических материалов как для преобразователей «зеленой энергии», так и для пьезоэлектрических излучателей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00302).

---

<sup>1</sup>*Наседкин А. В., Наседкина А. А., Нассар М. Э. Конечно-элементный расчет дискового преобразователя с тарелкообразными накладками и активным элементом из пористой пьезокерамики с экстремальной проводимостью поверхностей пор // Проблемы прочности и пластичности. 2023. Т. 85, № 1.*



## Математическая модель трех конкурирующих популяций с мультистабильностью стационарных решений и периодических режимов

**Нгуен Б. Х.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих конкуренцию трех неантагонистических видов на пространственно-однородном ареале

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= r_1 u_1 (1 - u_1 - \alpha_1 u_2 - \beta_1 u_3), \\ \dot{u}_2 &= r_2 u_2 (1 - \beta_2 u_1 - u_2 - \alpha_2 u_3), \\ \dot{u}_3 &= r_3 u_3 (1 - \alpha_3 u_1 - \beta_3 u_2 - u_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Исследуются колебательные сценарии взаимодействия видов и возникновения семейств предельных циклов. С использованием теории косимметрии установлена связь между разрушением двухпараметрического семейства стационарных решений (равновесий) и возникновением непрерывного семейства стационарных решений, а также семейства периодических режимов.

Получены различные варианты однопараметрических семейств и показано, что они могут состоять как из устойчивых, так и неустойчивых равновесий<sup>1</sup>. Для различных коэффициентов численно найдены значения параметров роста, при которых реализуются периодические режимы. Принадлежность их континуальному семейству предельных циклов подтверждена расчетом мультипликаторов.

$r_2, r_3$	Период	$\rho_1$	$\rho_2, \rho_3$
1, 1	58.84	$-9.1 \times 10^{-17}$	$1.0 \pm i2.4 \times 10^{-5}$
	74.77	$6.6 \times 10^{-16}$	$1.0 \pm i0.0002$
1, 0.5	75.11	$9.2 \times 10^{-18}$	$1.0 \pm i0.0004$
	95.4	$-1.4 \times 10^{-16}$	$1.0 \pm i0.0001$
0.9834636477, 0.8335	59.35	$-8.6 \times 10^{-17}$	$1.0 \pm i0.0003$
	77.31	$1.1 \times 10^{-16}$	$1.0 \pm i6.6 \times 10^{-5}$

Приведены примеры, когда фиксированному значению одного параметра роста отвечают значения другого параметра, соответствующие бистабильности в виде сосуществования гетероклинического цикла и изолированного устойчивого предельного цикла, а также равновесия и изолированного устойчивого предельного цикла.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00221), в Южном федеральном университете.

<sup>1</sup>Нгуен Б. Х., Ха Т. Д., Цибулин В. Г. Мультистабильность для системы трех конкурирующих видов // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14, № 6. С. 1325–1342.

## О моделировании и идентификации полей предварительных напряжений в упругих телах

Недин Р. Д.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

На сегодняшний день технологии изготовления неоднородных материалов сложной структуры позволяют создавать объекты сложной геометрии без использования классических производственных процессов, таких как литье, требующее дополнительного производства пресс-форм. Например, для изготовления элементов конструкций, выполненных из функционально-градиентных композитов, часто используются высокотемпературные технологии, в результате чего после остывания в образцах часто образуются поля предварительных напряжений (ПН), оказывающих значительное влияние на динамические характеристики конструкций и критерии разрушения. В связи с этим, исследование проблем мониторинга и идентификации ПН в элементах конструкций в рамках методов неразрушающего контроля представляет большую практическую значимость.

Работа посвящена вопросам моделирования и идентификации неоднородных полей ПН в упругих телах при установившихся колебаниях. На основе линеаризованной модели представлена общая постановка краевой задачи и ее вариационная формулировка. Рассмотрены постановки обратных коэффициентных задач об идентификации полей ПН при наличии дополнительной информации двух типов: 1) задается поле перемещений всюду в области для одной частоты колебаний; 2) задается поле перемещений на части границы области в некотором частотном диапазоне. В первой постановке задача линейна, во второй — нелинейна и требует специальных подходов к исследованию. Для предварительного анализа введено понятие чувствительности с использованием производной по Фреше, произведена оценка влияния искомым характеристик ПН на динамический отклик. Предложена методика определения характеристик чувствительности задаваемых граничных функций по отношению к ПН, позволившая выявить наиболее эффективные способы приложения динамической нагрузки и частотные диапазоны зондирования. Для исследования обратных задач идентификации ПН во второй постановке предложены итерационно-регуляризационные подходы, основанные на линеаризованном соотношении взаимности и позволившие сформировать итерационный процесс определения поправок для компонент тензора ПН по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию. Изучены некоторые обратные задачи о реконструкции начального напряженно-деформированного состояния различных типов в пластинах и цилиндрах, проведены вычислительные эксперименты, сформулированы рекомендации по выбору наиболее эффективных режимов акустического зондирования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>), в Южном федеральном университете.

## Анализ интенсивности пластических деформаций в области контакта колеса и рельса

**Неклюдова Г. А., Евтух Е. С., Евтух Г. Е.**

*Брянский государственный технический университет, Брянск*

По результатам решения контактных задач с использованием теории течения определены размеры областей, охваченных пластическими деформациями. Для случая, когда контакт расположен вдали от рельсового стыка, особый интерес представляет распространение пластических деформаций по нормали к поверхности рельса. При нагрузке 125 кН в материале рельса не возникает пластических деформаций. При нагрузке 220 кН они охватывают подповерхностный слой, расположенный на глубине от 3 до 6 мм, при нагрузке 300 кН его размеры увеличиваются до 8 мм. Область пластических деформаций в материале колеса значительно больше; при нагрузке 125 кН она располагается на участке от 1 до 10 мм, а с увеличением нагрузки до 300 кН распространяется вглубь на 18 мм. В случае расположения колеса на рельсовом стыке в колесе и рельсе возникают практически одинаковые по размерам области, охватываемые пластическими деформациями. Они прилегают к поверхностям контакта и при увеличении нагрузки от 62.5 до 150 кН охватывают слой толщиной от 6 до 11 мм.

Анализ распределения интенсивности деформаций по глубине контактирующих тел показывает: в случае контакта, расположенного на удалении от стыка, наибольшая интенсивность деформаций подконтактного слоя и колеса, и рельса возникает в точках, расположенных на вертикальной оси. Наибольшая интенсивность деформаций достигается на глубине 4, 5 и 5.5 мм при нагрузках 125, 220 и 300 кН соответственно. При нагрузке 300 кН наибольшая интенсивность деформаций в колесе составляет 0.00651, в рельсе она равна 0.00325 и достигается на глубине 4–5 мм. В случае контакта на стыке в материале колеса наибольшая интенсивность незначительно превышает рассмотренные значения для предыдущего случая. Интенсивность деформаций в материале рельса значительно возрастает на стыке, причем наибольшие наблюдаются в точках, расположенных на поверхности катания рельса. При нагрузке 150 кН она достигает 0.0128, тогда как при расположении контакта вдали от стыка пластические деформации не возникали.

В результате изучения полученных данных можно сделать вывод, что уровень пластических деформаций в материале рельса сильнее зависит от его положения относительно стыка, чем в материале колеса. В случае удаленного от стыка контакта максимальная интенсивность деформаций в колесе наблюдается на глубине 4–5 мм под поверхностью контакта и составляет 0.00439–0.00651, при нагрузках 125–300 кН соответственно. Если колесо располагается над кромкой стыка, максимальные деформации наблюдаются на глубине 2 мм, и они на 35% выше, чем в первом случае. При расположении колеса над кромкой стыка в рельсе возникают значительно большие деформации, чем в случае контакта, удаленного от стыка. В случае удаленного контакта незначительные пластические деформации возникают лишь при нагрузке, достигающей 300 кН. При расположении контакта над стыком наибольшие деформации наблюдаются у самой поверхности контакта и уже при нагрузке 62.5 кН. Вследствие этого, у кромки стыка возникают большие остаточные деформации.

Моделирование движения жидкости  
во время ларингофарингеального рефлюкса

Неплюева А. А.<sup>1</sup>, Селянинов А. А.<sup>1</sup>, Еловигов А. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,*

*Пермь*

<sup>2</sup>*Пермский государственный медицинский университет им. акад. Е. А. Вагнера,*

*Пермь*

Гастроэзофагеальная рефлюксная болезнь (ГЭРБ) — состояние, развивающееся при ретроградном забросе содержимого желудка обратно в пищевод. В основе ГЭР лежит нарушение перистальтики органов эзофагогастродуоденальной зоны с часто повторяющимися забросами в пищевод желудочного или дуоденального содержимого, с удлинением времени экспозиции рефлюктата в пищеводе, приводящим к повреждению пищевода и других органов. ГЭРБ чаще всего сопровождается пищеводными проявлениями в виде изжоги и регургитации, но может также сопровождаться и внепищеводными проявлениями, таким как ларингит, астма, кашель, боль в груди и эрозия зубов. Верхний и нижний пищеводные сфинктеры служат барьерами, выполняющими защитную функцию. Они предотвращают попадание дуоденального содержимого в пищевод и слизистую гортани.

Ларингофарингеальный рефлюкс (ЛФР) возникает, когда жидкое или газообразное содержимое желудка просачивается обратно через пищевод в голосовой аппарат или заднюю стенку глотки. Когда это происходит часто, ткани глотки и голосового аппарата могут быть раздражены или повреждены. Многие люди с ЛФР могут испытывать изжогу, а могут и не испытывать, поскольку пищевод имеет естественную защиту от небольшого количества кислотного рефлюкса. Однако, гортань и глотка не имеют такой защиты. На основании анализа клинических проявлений ЛФР и ассоциированной с ним патологии органов уха, горла и носа выдвигаются следующие допущения развития данного процесса: 1) Поступление желудочного содержимого в полость глотки происходит из пищевода при открытии верхнего пищеводного сфинктера (входа в пищевод) под воздействием избыточного давления выше 25–30 мм. рт. ст.; 2) На изменение давления в пищеводе большое влияние оказывают многие положения тела в пространстве; 3) Разнообразие клинических симптомов внепищеводных проявлений ГЭР дает возможность предположить наличие различных механизмов поступления пищеводного субстрата в глотку в разных состояниях (жидком, аэрозольном).

Цель исследования состоит в изучении биомеханического поведения внепищеводных проявлений ГЭР, построении их математической модели в соответствии с различными клиническими проявлениями и определении ведущих и вспомогательных анатомических и механических факторов, определяющих вид и особенности клинических проявлений ЛФР. Принято, что дуоденальное содержимое желудка является ньютоновской несжимаемой жидкостью и ее движение происходит в трубах, стенки которых считаются однородными и изотропными. Жидкость движется под действием давления, создаваемого транс-сфинктерным градиентом давления и не зависящего от угловой координаты. В таком случае деформация стенок и течение жидкости будут осесимметричными. Течение вязкой жидкости описывается уравнением Навье — Стокса.

## Идентификация неоднородных свойств термоэластопластического слоя

Нестеров С. А.

*Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

Пироматериалы находят широкое применение при создании различных диагностических приборов. В настоящее время все чаще для улучшения работы устройств на основе пирозффекта вместо однородных и слоистых материалов используются функционально-градиентные пироматериалы (ФГПМ) — пьезокомпозиты, обладающие переменными физическими свойствами. Для правильного расчета напряженно-деформированного состояния устройств, в которых используются ФГПМ, необходимо знание законов распределения неоднородности. Задача идентификации законов неоднородности по некоторой дополнительной информации о граничных физических полях относится к коэффициентным обратным задачам термоэластопластичности, которые в достаточной мере исследованы только для стержня.

Рассмотрены неустановившиеся колебания неоднородного по толщине, поперечно поляризованного слоя из пьезокерамики класса 6mm. Нижняя грань слоя жестко закреплена, заземлена и поддерживается при заданной температуре. На верхней заземленной грани слоя действуют нестационарный тепловой поток и компоненты механической нагрузки. Поставлена обратная задача о реконструкции термомеханических характеристик слоя по полям смещений и температуры, измеренным на верхней грани слоя. Рассмотрены два режима нагружения, соответствующие плоским и антиплоским колебаниям. К двум поставленным задачам применяется преобразование Фурье по продольной координате. Трансформанты Фурье от перемещений, электрического потенциала, температуры и нагрузки представлены в виде разложения по степеням параметра преобразования Фурье. После несложных преобразований с учетом дополнительной информации исходные задачи разделяются на более простые одномерные задачи относительно восстанавливаемых функций и осредненных физических полей и их моментов. Прямые задачи после преобразования Лапласа решаются методом пристрелки, а обращение трансформант осуществляется методом разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра. Проведен анализ влияния термомеханических характеристик и параметров связанности на снимаемую дополнительную информацию. Описанные обратные задачи представляют собой нелинейные некорректные задачи, решение которых построено на основе итерационного процесса. Начальные приближения определяются в классе линейных функций путем минимизации функционала невязки. Для нахождения поправок восстанавливаемых характеристик методом линеаризации получены операторные уравнения 1-го рода с гладким ядром. Регуляризация интегральных уравнений осуществляется на основе метода А. Н. Тихонова. Выход из итерационного процесса — по достижению функционалом невязки предельного значения. В ходе вычислительных экспериментов выявлено возрастание погрешности реконструкции с каждым этапом, что связано с накоплением погрешности на предыдущих этапах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>), в Южном федеральном университете.

## Математическое моделирование хеморецепции планктона на вычислительной системе с распределенной памятью

**Никитина А. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Работа посвящена суперкомпьютерному моделированию динамики планктонных популяций, включая фито- и зоопланктон, в прибрежных системах. Фито- и зоопланктон является основой питания бентоса и рыб. Хеморецепция представляет собой способность организмов воспринимать химические стимулы в окружающей среде или во внутренней среде организма и реагировать на них. Согласно современным исследованиям, хеморецепция влияет на развитие фито- и зоопланктона. Математическая модель динамики планктонных популяций включает систему уравнений конвекции — диффузии — реакции с нелинейными членами и позволяет изучать механизм наружно-гормонального регулирования на основе сценарного подхода.

Предложенная математическая 3D-модель линеаризована, проведена ее дискретизация и на основе расщепления по координатам получена цепочка, состоящая из двумерной и одномерной задач. Для численной реализации предложенной математической модели гидробиологии прибрежной системы в виде программного модуля использовался суперкомпьютер, рассчитанный на массивно параллельные вычисления. Его использование позволило значительно сократить время работы программного модуля. Изучено влияние механизма эктокринного регулирования и режима поступления биогенных веществ на продукционно-деструкционные процессы планктона.

В математическую модель включена нелинейная зависимость, используемая для описания скорости роста клеток водорослей от концентрации метаболита, что позволило описать способность продуктов выделений водорослей контролировать их рост даже в условиях массового поступления загрязняющих веществ. Используемый подход отвечает современным представлениям о функционировании гидробиоценоза. На основе разработанного программного инструментария, ориентированного на систему с распределенной памятью, изучены не только прямые трофические взаимодействия, но и действия продуктов жизнедеятельности особей, представляющие собой опосредованные химические взаимодействия.

Разработка эффективных параллельных алгоритмов численной реализации поставленной задачи биологической кинетики, ориентированных на многопроцессорные вычислительные системы, позволила изучить как внутри-, так и межвидовые химические коммуникации между планктонными популяциями прибрежной системы — Азовское море — в режиме ограниченного времени, что является актуальным при возникновении явлений катастрофического характера.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00295, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>).

## Экспериментальное определение ширины области контакта сферического индентора с поверхностью однородного материала

Николаев А. Л.<sup>1</sup>, Садырин Е. В.<sup>1</sup>, Лапицкая В. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск

Разработано оборудование для проведения процесса *in situ* микроиндентирования в микротомографе Zeiss Xradia 520 Versa. Оборудование содержит точечный источник рентгеновского излучения, вращающийся гониометрический столик с блоком крепления образцов и механический блок силового нагружения исследуемого материала, детектор рентгеновского излучения, компьютерный блок обработки и управления, микроиндентор, изготовленный из сапфировых сфер диаметром 200 мкм и 500 мкм.

Образец устанавливается жестко на держатель образца устройства (патент № 2714515), индентор устанавливается в специализированный держатель, далее с помощью механического блока силового нагружения происходит внедрение индентора в тестируемый материал на определенную глубину и фиксация индентора неподвижно во внедренном состоянии. После этого устройство помещается в рентгеновский микротомограф. Затем происходит съемка 2201 изображения (для радиуса индентора 250 мкм) области контакта индентора с поверхностью образца под разными углами с одинаковым шагом при вращении устройства вокруг оси, совпадающей с центральной осью симметрии индентора перпендикулярно оси между центром источника и детектора. Для измерения области контакта индентора с поверхностью образца по полученной 3D-модели используется программное обеспечение VGSTUDIO MAX 3.4 (Volume Graphics GmbH, Германия), позволяющее разбить реконструированную 3D-модель на набор необходимых для анализа виртуальных сечений (патент № 2771063С1).

Экспериментально определены величины области контакта и глубины индентирования на примере внедрения сапфировой сферы диаметром 500 мкм в кристаллический кварц и чистый алюминий вакуумной плавки. Полная ширина области контакта для случая внедрения в алюминий составила 121.776 мкм при глубине индентирования 14.2 мкм. Стандартное отклонение измерений глубины индентирования составило 110 нм. Полная ширина области контакта для случая внедрения в алюминий составила 83.7 мкм при глубине индентирования 6.33 мкм. Стандартное отклонение измерений глубины индентирования составило 70 нм. Были проведены эксперименты по определению силы, необходимой для внедрения сапфировой сферы диаметром 500 нм в кристаллический кварц и алюминий на 6.33 мкм и 14.2 мкм соответственно. Для этого был использован микроиндентометр Nanotest 600 Platform 3. Выявлено, что при приложении медленно возрастающей силы 8 Н сфера внедряется в алюминий на 11656 нм, при приложении медленно возрастающей силы 10 Н сфера внедряется в кристаллический кварц на 6330 нм. Проведенные испытания эталонных материалов помогут уточнить методику определения упругих модулей посредством индентирования.

Исследование выполнено Лапицкой В. А. за счет гранта БРФФИ (проект № Т23РНФ-132), Николаевым А. Л. за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-49-10062, <https://rscf.ru/project/23-49-10062/>).

## Распространение упругих волн в акустическом метаматериале с дважды периодическими массивами отслоений

**Оконешникова Е. А., Кожевников В. В.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Исследована задача о распространении упругих плоских волн в многослойном акустическом метаматериале (АММ), состоящем из чередующихся слоев двух изотропных материалов, контрастных по своим упругим свойствам. На  $M$  межслойных интерфейсах располагаются массивы отслоений, образуя дважды периодическую решетку. Предполагается, что пакет слоев окружен двумя упругими полупространствами, и из нижнего полупространства под некоторым углом к границам раздела сред падает плоская волна.

Установившееся гармоническое колебание многослойной упругой конструкции описывается уравнением Ламе — Навье в перемещениях. Напряжения и перемещения связаны законом Гука. В качестве граничных условий используются условие непрерывности перемещений и напряжений на интерфейсе вне зоны отслоений и граничные условия пружинного типа в области отслоений. Полное волновое поле представляет собой сумму волнового поля, распространяющегося в слоистой структуре без повреждений, и волновых полей, рассеянных каждым отслоением во всех дважды периодических массивах. Учесть взаимное влияние отслоений друг на друга позволяет применение теоремы Флоке, которая связывает волновые поля во всех ячейках периодического массива. Таким образом, полное смещение в композите можно представить как сумму всех смещений в каждом массиве отслоений и выразить через смещения в референтных ячейках на эталонных отслоениях.

Граничное интегральное уравнение для эталонного отслоения каждого из рассматриваемых массивов получается путём подстановки двумерного преобразования Фурье функции скачка перемещений на отслоении в граничные условия пружинного типа. Для решения уравнения применяется метод Бубнова — Галёркина, в соответствии с которым функция раскрытия на эталонном отслоении раскладывается по определенной полной системе базисных функций. В зависимости от формы отслоений применяется спектральный или бессеточный метод интегральных уравнений (МГИУ). Для случая отслоений прямоугольной формы и спектрального МГИУ методами теории функции комплексного переменного была получена аналитическая оценка и доказана сходимость двойных рядов, возникающих в левой части интегрального уравнения.

Анализ сходимости двойных рядов показал, что наибольший вклад несут члены от расположенных близко к осям плоскости параметров двумерного преобразования Фурье. С учетом полученных аналитических оценок был разработан эффективный алгоритм вычисления рядов. Для последующей экспериментальной верификации численных расчетов по технологии FDM-печати были изготовлены первые образцы АММ с разрезами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00261).



## Линейная устойчивость системы подвижного цилиндра и двух/трех параллельных вихревых нитей

**Островская И. В.<sup>3</sup>, Куракин Л. Г.<sup>1,2,3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт водных проблем РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ*

<sup>3</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается взаимодействие подвижного кругового цилиндра радиуса  $R$  с произвольной циркуляцией  $\gamma$  и конфигурации  $n$  параллельных вихревых нитей одинаковой интенсивности  $\gamma_0$ . Плоскопараллельные движения этой системы описываются гамильтоновыми уравнениями<sup>1</sup>. В случае  $n \geq 2$  система уравнений имеет решение, соответствующее стационарному вращению конфигурации вихревых нитей, расположенных равномерно на окружности радиуса  $R_0$ , с постоянной угловой скоростью вокруг оси цилиндра.

Задача устойчивости режима стационарного вращения зависит от трех параметров: отношения радиусов  $q = R^2/R_0^2$ ,  $0 < q < 1$ , коэффициента  $a > 0$ , включающего в себя присоединенную массу цилиндра, и отношения  $\gamma/\gamma_0 \neq 0$ .

Исследованы собственные значения матрицы линеаризации при всех значениях параметров задачи  $(q, a, \gamma)$  в случае  $n = 2, 3$ .

При фиксированных значениях  $\gamma$  плоскость параметров  $(q, a)$  разбивается на области двух типов: область неустойчивости, когда матрица линеаризации имеет хотя бы одно собственное значение в правой полуплоскости, и область линейной устойчивости — все собственные значения матрицы линеаризации лежат на мнимой оси и для решения задачи устойчивости требуется дополнительный анализ с привлечением нелинейных слагаемых.

Случай  $\gamma = n$  был исследован ранее<sup>2</sup> для произвольного числа  $n \geq 2$  при всех значениях  $0 < q < 1$  и  $a > 0$ . Новые результаты связаны с исследованием влияния циркуляции  $\gamma$  на устойчивость.

Результаты исследования согласуются с предельным случаем неподвижного цилиндра (при  $a \rightarrow \infty$ ) в случае нулевой<sup>3</sup> и произвольной<sup>4</sup> циркуляции вокруг цилиндра.

Работа Л. Г. Куракина выполнена в рамках темы № FMWZ-2022-0001 Государственного задания ИВП РАН (регистрационный номер 122041100222-7).

<sup>1</sup>*Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М.* Динамика кругового цилиндра, взаимодействующего с точечными вихрями // Математические методы динамики вихревых структур. Ижевск, 2005. С. 286–307.

<sup>2</sup>*Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* On the Stability of the System of Thomson's Vortex  $n$ -Gon and a Moving Circular Cylinder // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. V. 18, № 5. P. 915–926.

<sup>3</sup>*Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1931. V. 11, № 70. P. 617–633.

<sup>4</sup>*Kurakin L., Ostrovskaya I.* On the Effects of Circulation around a Circle on the Stability of a Thomson Vortex  $N$ -gon // Mathematics. 2020. V. 8, № 6. DOI: 10.3390/math8061033.

## Численное моделирование распространения вирусных частиц в салоне автомобиля

**Панфилов И. А., Лесняк О. Н.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Эпидемия, вызванная коронавирусной инфекцией SARS-CoV-2, на начало 2022 года затронула около 500 миллионов человек во всех странах. Источником инфекции являются частицы вируса, которые при дыхании, разговоре и кашле выделяются с дыхательными каплями и аэрозольной пылью инфицированного человека. Меры, направленные на борьбу и минимизацию последствий коронавирусной инфекции, привели к необходимости проведения ряда научных исследований с целью изучения процессов распространения вирусных частиц в воздухе, в системах вентиляции и кондиционирования помещений и транспорта, фильтрации через маски, действие перегородок, лицевых щитков и др.

В работе представлена математическая модель распространения вирусных частиц в автомобиле. Источниками вируса являются дефлекторы воздухозаборников, а также дыхательные пути оператора. Для моделирования капель жидкости в потоке используется подход Эйлера — Лагранжа. Жидкая фаза рассматривается как сплошная среда с использованием уравнений Навье — Стокса, неразрывности, энергии и диффузии. Учет диффузии позволяет явно моделировать влажность воздуха и необходим, в том числе, для учета испарения капель (изменения массы и размера частиц, содержащих вирус). Жидкие капли моделируются с использованием дискретно-фазовой модели DPM (Discrete Phase Model), в которой каждая частица отслеживается в лагранжевой системе координат. Метод DPM достаточно эффективен, так как объемная доля частиц мала по отношению к общему объему среды, и взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь для ускорения скорости расчета. В этом случае дискретная и непрерывная фазы связаны между собой через источниковые члены в уравнениях. Усредненные уравнения RANS решаются численно с использованием модели турбулентности  $k-\omega$  в пакете Ansys Fluent.

Задача решалась в статической форме и во временной области. Для нестационарной задачи находится время стабилизации переменных. Результаты моделирования получаются в виде полей давлений, скоростей, температур и плотностей воздуха, поля распространения частиц, содержащих вирус. В зависимости от размера капель и учета испаряемости получены следующие результаты:

1. «Крупные» капли диаметром более 400 мкм попадают на стены кабины и удаляются из расчета в соответствии с условием прилипания к стенкам кабины.
2. «Мелкие» капли диаметром менее 400 мкм в случае учета испарения капель испаряются практически мгновенно.
3. «Мелкие» капли диаметром менее 400 мкм в случае неиспаряемости капель распространяются по кабине по линиям тока скоростей воздуха.

Таким образом, значение испаряемости капель, а следовательно и влажность воздуха, оказывают значительный эффект на распространение аэрозольных капель с вирусами и требуют дальнейшего изучения.

## Об установившихся колебаниях ортотропных топографических волноводов

**Паринова Л. И.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Изучение закономерностей формирования и распространения волновых процессов, возникающих в топографических волноводах, актуально для дефектоскопии, сейсмологии и акустоэлектроники. Результаты исследований установившихся колебаний могут использоваться для усовершенствования методов неразрушающего контроля, позволяющего выявить скрытые дефекты в сварочных и спаечных структурах, а также для создания эффективных линий задержки и фильтров для подавления ложных сигналов.

Первые исследования особенностей распространения волн, бегущих по свободной поверхности упругого изотропного тела, проводились Рэлеем в последнем десятилетии XIX века. В первой научной работе, опубликованной в ноябре 1885 года, было получено, что в изотропном случае волновое поле является бездисперсионным. Также было выявлено, что амплитуда волны при удалении от свободной поверхности экспоненциально убывает.

Изучение закономерностей распространения упругих волн продолжается и в настоящее время. На данный момент достаточно много исследований посвящено изучению волновых процессов, возникающих в изотропных волноводах. В слоистых и цилиндрических структурах проанализированы зависимости скорости распространения волнового поля от частоты колебаний. Однако, в литературе в недостаточной степени представлены работы, посвященные изучению установившихся колебаний ортотропных топографических волноводов.

Цель настоящей работы — с использованием FlexPDE изучить установившиеся колебания упругого топографического волновода из ортотропного материала.

В предыдущих исследованиях на основе слабой постановки задачи с учетом моделей пластин переменной жесткости типа Кирхгофа и Тимошенко и с применением метода Ритца был разработан полуаналитический метод построения дисперсионных зависимостей. В ходе вычислительных экспериментов было проведено сравнение результатов для моделей типа Кирхгофа и Тимошенко, а также получены значения частот запираания для первых 4 мод для трапециевидного, треугольного и прямоугольного сечений.

В представленной работе для ортотропных топографических волноводов с трапециевидным, треугольным и прямоугольным поперечным сечением проведено сравнение критических значений, полученных разработанным ранее полуаналитическим методом, с аналогичными результатами, полученными при помощи КЭ-пакета FlexPDE. Также для изучаемых протяженных структур построены моды колебаний.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. и Юрову В. О. за внимание к работе.

## Методика определения механических напряжений и электрической проводимости в запястном канале

Пешин С. Е.<sup>1</sup>, Каракулова Ю. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь*

<sup>2</sup>*Пермский государственный медицинский университет им. акад. Е. А. Вагнера,  
Пермь*

Карпальный туннельный синдром или синдром запястного канала является наиболее распространенной патологией среди расстройств периферической нервной системы и встречается в 23–40% случаев. На ранних стадиях заболевания пациенты испытывают парестезию (покалывание) в кончиках пальцев, на поздних стадиях — кисть пациента полностью теряет сенсорные и моторные функции в результате компрессии (пережатии) срединного нерва, что ухудшает качество жизни таких людей, а также часто влияет на их профессиональную деятельность.

Актуальными методами диагностики являются: визуализация срединного нерва с помощью МРТ, КТ и УЗИ, измерение скорости проводимости нервного импульса с помощью ЭНГ, а также выполнение клинических тестов, не требующих никакого оборудования (тест Тинеля, Фалена, Дуркана и др.). Ни один из представленных методов диагностики не позволяет на ранней стадии определить предрасположенность человека к синдрому запястного канала. Персональное математическое моделирование движений кисти человека позволяет получить численные значения механического, а также электрического напряжений в тканях запястного канала. Такие результаты помогут выявить повышенное напряжение в срединном нерве, которое ещё не ощущается человеком, но в дальнейшем может повредить нервное волокно и привести к карпальному туннельному синдрому.

Методика состоит из шести этапов. На первом этапе проводится МРТ и КТ кисти. Построение персональной трёхмерной геометрии сухожилий, фаланг пальцев, поперечной и кольцевидных связок, срединного нерва, карпальных костей и соединительной ткани является вторым этапом методики. Учёт индивидуального движения кисти при сгибании и разгибании пальцев производится на третьем этапе с помощью специально разработанного ПО. С использованием камеры и ПК программа позволяет захватить движение каждой отдельной фаланги пальца в реальном времени. Четвёртый этап заключается в объединении всех полученных ранее данных и постановке расчётной математической модели. Мягкие ткани рассматриваются как гиперупругие (модель Огдена), твёрдые ткани рассматриваются как упругие (закон Гука). На пятом этапе производится расчёт напряжённо-деформированного состояния срединного нерва при различных движениях кисти. На финальном этапе деформации и напряжения в срединном нерве используются для определения его электрической проводимости с помощью объединения модели Ходжкина — Хаксли и уравнения кабеля. Описанная методика позволит определить ухудшение проводимости в срединном нерве, вызванное механическими напряжениями, вследствие персональных движений человека на ранней стадии.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Пермского края № 22-21-20067, <https://rscf.ru/project/22-21-20067>.

Авторы благодарят А. Г. Кучумова за внимание к работе.

## Влияние турбулентности на гемодинамику аортального клапана

Пиль Н. Е.<sup>1</sup>, Кучумов А. Г.<sup>1</sup>, Кадыралиев Б. К.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь

<sup>2</sup>Федеральный центр сердечно-сосудистой хирургии им. С. Г. Суханова, Пермь

Ежегодно в мире проводится более 275000 хирургических операций по замене аортального клапана, причиной служит аортальный стеноз — одна из самых распространенных и дегенеративных патологий аортального клапана сердца. В результате него происходит сужение клапанного отверстия и/или деформация створок клапана. Тяжелая форма аортального стеноза является одной из основных причин заболеваемости и смертности среди пожилых людей. Более 15% людей старше 70 лет подвержены этому заболеванию. В связи с увеличением продолжительности жизни прогнозируется рост к 2050 году до 850000 операций в год.

Для долгосрочного прогнозирования исходов оперативных вмешательств необходимо биомеханическое моделирование гемодинамики аортального клапана. На текущий момент не предложено комплексной модели ввиду множества нерешенных вопросов. Один из них заключается в учете влияния эффектов турбулентности на гемодинамические процессы. Турбулентный поток увеличивает риск гемолиза, а при больших значениях касательных напряжений Рейнольдса происходит разрушение тромбоцитов.

Задача решалась в рамках FSI подхода с использованием метода крупных вихрей для моделирования турбулентных эффектов при помощи программного пакета COMSOL Multiphysics. Трехмерная геометрия аортального клапана построена на основе данных снимков УЗИ и литературного обзора. Поток крови моделируется несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянной плотностью и вязкостью.

Для моделирования биомеханического поведения створок аортального клапана в норме применяется модель анизотропной гиперупругости Хольцапфеля — Гассера — Огдена, позволяющая явным образом учесть распределение свойств по коллагеновым волокнам. В качестве патологии рассматривается кальцификация створок аортального клапана, в результате чего резко повышается их жесткость. Для описания их механического поведения используется линейно-упругая модель.

Математическая постановка включает уравнение Навье — Стокса с условием несжимаемости, уравнения для описания модели турбулентности. Также записывается уравнение движения для твердого тела. Система замыкается начальными и граничными условиями, а также условиями сопряжения жидкости и твердого тела. На входе в расчетную область задается профиль скорости. Для определения давления на выходе из расчетной области используется двухэлементная модель Виндекесселя, в которую в качестве входных данных принимается профиль скорости.

Полученные результаты описывают изменения основных гемодинамических показателей: скорости, давления, пристеночных касательных напряжений и индекса колебаний касательных напряжений. Также проведено сравнение результатов для значений кинетической и турбулентной кинетической энергии между двумя моделями турбулентности и состоянием в норме и при патологии.

## Сравнительный анализ механического поведения пористых решетчатых структур костных имплантатов на основе скаффолдов

**Пирогова Ю. В., Виндокуров И. В., Еленская Н. В., Тарасова А. С., Шалимов А. С.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь*

Для успешной разработки и применения скаффолдов для замещения костной ткани искусственные трехмерные структуры должны отвечать не только требованиям биосовместимости, но и обладать схожим механическим откликом. Костные скаффолды могут быть построены на основе повторения как элементарных ячеек, так и цельных конструкций. Материалы для изготовления также должны быть тщательно отобраны по критериям биосовместимости, биоактивности и механической прочности. Выделяют три основные наиболее изученные в данном направлении классификации, а именно — металлы, керамика и полимеры. Несмотря на большое количество исследований трехмерных структур, производимых разными способами, до сих пор не существует единого общепринятого решения для оптимальной замены и восстановления костной структуры.

В данной работе была рассмотрена трехмерная геометрия микроструктуры трабекулярной кости, которая обладает случайной пористой структурой. В качестве искусственных заменителей рассмотрены трехмерные структуры, спроектированные на основе различных подходов: периодические структуры с повторяемой в пространстве элементарной ячейкой, основанные на аналитическом определении трехмерных поверхностей, а также случайные структуры, построенные на основе диаграммы Вороного и алгоритма разделения фаз с использованием случайных Гауссовских полей. Образцы моделей структур были изготовлены из полилактида (PLA) с помощью моделирования методом послойного наплавления. Проведены механические испытания для оценки деформационного поведения и свойств образцов, в частности, с использованием метода цифровой корреляции изображений, при сжимающей нагрузке. Выполнены экспериментальные и численные исследования для определения особенностей деформационного поведения и упругих свойств локальных составных элементов неоднородной структуры биомиметических материалов.

Сопоставление механического поведения и характеристик образцов, полученных на основе различных подходов к проектированию скаффолдов, с поведением представительного объема трабекулярной кости позволяет сделать выводы о наиболее оптимальном морфологическом строении. Полученные результаты могут быть полезны при проектировании скаффолдов с заданными требованиями к механическому отклику и пределу прочности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-48-596011.

## Численная верификация асимптотической модели течения между ребристыми плоскостями жидкости с переменной вязкостью

Полякова Н. М., Цветкова В. И.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

На основе уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, вязкость которой зависит от координат, построено численное решение в случае симметричного двухмерного нестационарного течения между ребристыми плоскостями. Расчеты позволяют убедиться в возникновении вихрей в окрестности точек границы с отрицательной кривизной («ямках»), существование которых предсказано в работе<sup>1</sup> для случая цилиндрического канала с неровными стенками.

Для области  $D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq z \leq h(x)\}$  неровности плоской границы заданы функцией  $h(x) = h_0 + a(\tanh(\beta \cos(m(x - X_L))) - \tanh \beta)$ ,  $X_L \leq x \leq L - X_R = \pi(4p + 1)/(2m)$ , где  $L$  — длина области,  $X_L, X_R$  — размеры плоских участков границы,  $h_0$  — ширина области,  $a$  — амплитуда неровностей границы, параметры  $m, p$  и  $\beta$  задают количество неровностей и их сглаживание. Переменная кинематическая вязкость жидкости выбрана в виде  $\mu = \mu_0(\eta^2(x) - z^2)$ ,  $\eta(x) = h(x) + \delta$ , где  $\mu_0$  — характерная вязкость,  $\delta$  — шероховатость. Такая вязкость типична для турбулентных течений в области с реальной границей  $z = \eta(x)$ , имеющей постоянную шероховатость  $\delta$  ( $0 < \delta \ll h_0$ )<sup>1</sup>. Область  $D$  фактически является «полуобластью» для реального симметричного относительно  $z = 0$  течения в области  $-\eta(x) \leq z \leq \eta(x)$  и, в некотором смысле, имитирует цилиндрическую область, рассмотренную в работе<sup>1</sup>. Способом, описанным в работе<sup>1</sup>, построена асимптотическая модель квазистационарного течения, которая, также как и для цилиндрической области, предсказывает существование вихрей в окрестности точек границы с отрицательной кривизной. Построено асимптотическое решение (при  $L, X_L, X_R \rightarrow \infty, \mu_0 \ll 1$ ), которое выбрано в качестве начального условия при проведении расчетов для полной (не асимптотической, с конечными  $L, X_L, X_R$ ) нестационарной модели.

Основной отличительной чертой исследуемой модели является постановка граничных условий: на границе  $x = 0$  выбраны условия, соответствующие решению для асимптотической модели, на границе  $x = L$  — условия протекания, на границе  $z = 0$  — условия симметрии, но на границе  $z = h(x)$  заданы лишь условия непроницаемости жидкости (нет прилипания). Иными словами, на неподвижной твердой границе  $z = h(x)$  выбраны условия, типичные для свободной границы. При этом для выбранной вязкости  $\mu(x, z)$  на плоских участках границы прилипание сохранилось, а на шероховатой неподвижной ребристой части прилипание жидкости отсутствует. Расчеты выполнены при помощи пакета конечных элементов FreeFem++. Для решения уравнения Навье—Стокса использован модифицированный алгоритм метода штрафов. Вычисления для различных наборов параметров  $\mu_0, h_0, L, X_L, X_R, a, m, p, \delta, \beta$  полностью подтвердили выводы асимптотической модели — возникновение системы вихрей в окрестности «ямок» границы  $z = h(x)$ .

<sup>1</sup> Жуков М. Ю., Полякова Н. М., Ширяева Е. В. Квазистационарное турбулентное течение в цилиндрическом канале с неровными стенками // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2020. № 1. С. 4–10.

## Виртуальная модель покрывного протеза «сэндвич»: применение пакета Blender

**Полякова Т. В.<sup>1,3</sup>, Гаврюшин С. С.<sup>1,2</sup>, Щурко К. И.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет), Москва*

<sup>2</sup>*Институт машиноведения им. А. А. Благодирова РАН, Москва*

<sup>3</sup>*Институт космических исследований РАН, Москва*

«Сэндвич» — это протез нового поколения без нёба. Он сделан из специального пластика, к которому прикрепляются зубные коронки. Для его изготовления используются полимерные материалы нового поколения. В отличие от бюгельных зубных протезов он не имеет крючков, травмирующих ткани, удобен в эксплуатации, требует всего несколько дней, чтобы привыкнуть к устройству протеза и восстановить функцию речи. Раздел работы был посвящён подготовке геометрии протезов и макетов зубочелюстной системы пациентов при протяжённых дефектах зубных рядов с сохранением всего нескольких опорных зубов для фиксации частично съёмного покрывного протеза «сэндвич». В последние годы был достигнут значительный прогресс в разработке и применении виртуальных трёхмерных веб-приложений для космической тематики (инфографика МКС, виртуальные глобусы и пр.), а также в области биомеханики. Майкл Холм совместно с Эриком Гасаделеном и Полом Алаиццо из университета Миннесоты разработали программу для идентификации костей в скелете человека. Используя сканы компьютерной томографии, они сгенерировали 3D-модели, кости были сегментированы и созданы отдельные 3D-объекты для каждой из костей. Целью работы было сделать демонстрацию анатомии через онлайн-сервер, который находится в открытом доступе.

Для разработки виртуальной модели покрывного протеза был применен пакет Blender — бесплатное программное обеспечение с открытым исходным кодом. Для размещения модели на сайте и интеграции с пакетом Blender использовалась библиотека Blend4Web. Целью работы является создание программы для отображения данных по биомеханике на сайте. Данное приложение будет позволять пользователям просматривать 3D-модели с возможностью детального ознакомления с ними. Было применено два подхода — написание программы для простейших моделей однородных многосвязных областей, которая после чтения и анализа файлов OBJ и MTL записывает данные в буферные объекты WebGL и размещает данные в браузере, и более расширенной по функционалу программы для визуализации фасетных моделей с большим числом степеней свободы с режимом отображения в виде плеера или размещением модели в контейнер div (с использованием библиотеки Blend4Web). Была проведена подготовка моделей в Geomagic, добавление цвета в Blender и при импорте. Для придания реалистичности реализована настройка теней, эффектов светового освещения, написаны функции выведения интерактивных подсказок на трёхмерной модели. Таким образом, решение с использованием библиотеки Blend4Web показало более функциональные результаты: покрывной протез был отображён на сайте с реализацией механизма поворота и масштабирования и просмотра интерактивной информации по отдельным блокам модели.



## Экспериментальное определение параметров параллельно-конвейерного вычислительного процесса при решении сеточных уравнений

**Поркшеян М. В., Литвинов В. Н.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

В основе данного исследования лежит определение параметров параллельно-конвейерного вычислительного процесса при решении сеточных уравнений на основе модифицированного попеременно-треугольного метода (МПТМ) вариационного типа. Такое решение предполагает использование трехмерной равномерной расчетной сетки:

$$\begin{aligned} \bar{w}_h &= \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z, \\ n &= \overline{0, n_t - 1}, i = \overline{0, n_1 - 1}, j = \overline{0, n_2 - 1}, k = \overline{0, n_3 - 1}, \\ n_t\tau &= T, n_1h_x = l_x, n_2h_y = l_y, n_3h_z = l_z\}, \end{aligned}$$

где  $\tau$  — шаг по времени,  $h_x, h_y, h_z$  — шаги по пространству,  $n_t$  — количество временных слоёв,  $T$  — верхняя граница по времени,  $n_1, n_2, n_3$  — номера узлов по пространственным координатам;  $l_x, l_y, l_z$  — границы параллелепипеда, в который вписана вычислительная область.

Наиболее трудоемкой частью алгоритма является вычисление вектора коррекции из уравнения:

$$(D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2)w^m = r^m,$$

где  $r^m$  — вектор невязки,  $w^m$  — вектор коррекции.

Решение этой задачи сводится к решению двух СЛАУ с нижнетреугольной и верхнетреугольной матрицами:

$$(D + \omega R_1)y^m = r^m, (D + \omega R_2)w^m = Dy^m.$$

Для сокращения времени вычислений на многопроцессорной вычислительной системе разработан параллельный алгоритм решения СЛАУ высокой размерности методом МПТМ, использующий декомпозицию трехмерной вычислительной области на параллелепипеды, количество которых вдоль оси равно количеству доступных ядер процессора. Параллельный алгоритм включает метод декомпозиции трехмерной расчетной сетки.

Вычисления проводились на кластере К-60 ИПМ РАН. Использовалась вторая секция, состоящая из 10 вычислительных узлов GPU с оперативной памятью 768 Гб. Эксперименты показали, что при расчёте фрагмента расчётной сетки на ЦП с использованием разработанного параллельно-конвейерного алгоритма, расчёт на 32 параллельных потоках позволяет получить равномерную по времени загруженность программных потоков и минимальное время ожидания последнего задействованного потока, т. е. более эффективное время загрузки каждого задействованного вычислительного узла.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-20050, <https://rscf.ru/project/21-71-20050/>).

Программная реализация восстановления рельефа  
мелководного водоёма на основе схем повышенного порядка точности  
на вычислительной системе с распределенной памятью

**Поркшеян М. В., Сидорякина В. В.**

*Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского  
государственного экономического университета (РИНХ), Таганрог*

Использование карт глубин, составленных по точечным экспериментальным данным, при построении расчетных сеток может вызывать появление нежелательных погрешностей вычисления. Это связано с тем, что геометрия расчетной области часто задаётся довольно приближённо. Для повышения точности расчетов гидродинамических процессов необходимо приблизить функцию двух переменных, описывающую рельеф дна водоема, более гладкими функциями.

Используем уравнение Лапласа для определения функции рельефа дна  $\Delta H = 0$ , где  $H$  — глубина водоема. Отсутствие гладкости в точках определения значений поля глубин является недостатком, для устранения которого будем использовать решения уравнения  $\Delta^2 H = 0$ . Данный подход также имеет свои недостатки в виде значительных выбросов, таких как отклонение от линейной функции.

Несмотря на то, что каждый из этих подходов сам по себе не идеален, одновременное их использование позволяет получать функции, не обладающие выделенностью направлений. В качестве механизма сглаживания функции рельефа может быть выбрано решение уравнения, применяемого для получения схем повышенного порядка точности для уравнения Лапласа:

$$\Delta H - \frac{h^2}{12} \Delta^2 H = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что данный оператор строится с помощью линейной комбинации двух предыдущих.

Фундаментальной системой решений уравнения (1) являются следующие функции:

$$H_1(x) = 1, H_2(x) = x, H_3(x) = \cosh(kx), H_4(x) = \sinh(kx), k = \frac{\sqrt{12}}{h}. \quad (2)$$

При таком подходе интерполяция осуществляется на основе сплайн-функций.

Результат работы предложенного алгоритма показал, что интерполяция имеет меньшее отклонение от линейной по сравнению с кубическим сплайном и обладает достаточной степенью гладкости в точках склейки функций.

На основе экспериментальных данных построена карта точек глубин Цимлянского водохранилища. На базе этой карты, а также с использованием выражений (1), (2), планируется создание параллельного алгоритма восстановления донной поверхности Цимлянского водохранилища, ориентированного на вычислительную систему с распределенной памятью. Ведется разработка программного модуля для реализации алгоритма и построения карты рельефа исследуемого мелководного водоёма.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509/>).

## Математическое и компьютерное моделирование процесса высыхания упругого тела с учетом теплообмена

**Пустовалова О. Г., Егорова А. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается задача высыхания линейно-упругого пористого тела. Согласно экспериментальным данным при сушке упругих тел наблюдаются следующие закономерности — первоначальные размеры тела уменьшаются. Также, как правило, при уменьшении влажности происходит уменьшение модуля Юнга. Из экспериментов известно, что процесс высыхания существенно зависит от внешней температуры. В работе авторов<sup>1</sup> приведена феноменологическая модель высыхания упругого тела. Формулируется начально-краевая задача, в которой в связи с малой скоростью процесса высыхания инерциальными членами пренебрегается. В модель в качестве дифференциальных уравнений, описывающих процесс, входят уравнения диффузии, уравнения равновесия твердого тела, соотношения Коши и определяющие уравнения, содержащие линейную зависимость напряжений от относительной влажности. Для модуля Юнга выбрана гладкая убывающая функция с тремя параметрами. Первоначально считается, что коэффициент удельной влагонасыщенности тела, плотность и коэффициент диффузии являются постоянными и не зависят от относительной влажности.

Численное решение строится методом конечных элементов в пакете FlexPDE. Задача решалась для однослойных и двухслойных прямоугольных и круглых пластин со свойствами резины. Численный эксперимент, проведенный для нескольких расчётных схем, показал, что форма тела после высыхания качественно совпадает с результатами натуральных экспериментов. Проведена оценка напряженно-деформированного состояния и относительной влажности для двухслойных пластин, слои которых отличались наполненностью влагой. На основании полученных результатов сделаны некоторые выводы о пригодности данной модели.

Далее предлагается учитывать распределение температуры в теле и теплообмен с окружающей средой. Таким образом, к описанной выше модели добавляется нестационарное уравнение теплопроводности, в котором теплофизические характеристики зависят от относительной влажности. В свою очередь, поверхностные характеристики процесса высыхания также зависят от температуры. Кроме этого, активный процесс сушки проходит при вентиляции воздуха. Для учета этого обстоятельства внешняя задача аэродинамики может решаться совместно, или же скорость воздушных потоков может быть учтена в коэффициентах влаго- и теплопередачи.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-19-00423).

---

<sup>1</sup>*Pustovalova O. G., Soloviev A. N., Egorova A. A. The Incoherent Drying Problem Of An Elastic Body With A Variable Young's Modulus // International Online Conference «One-Parameter Semigroups of Operators». Book of abstracts. Nizhny Novgorod. 2022. P. 102 – 105.*

## Использование методов машинного обучения для прогнозирования гемодинамики в аортах детей с врожденными пороками сердца

Ракишева И. О.<sup>1</sup>, Голуб М. В.<sup>2</sup>, Дорошенко О. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь*

<sup>2</sup>*Институт математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет, Краснодар*

Половина пациентов с врожденными пороками сердца нуждается в хирургическом лечении на первом году жизни. 20–30% врожденных аномалий сердца составляют обструктивные поражения выводного тракта правого желудочка, изолированные или сочетающиеся с другими врожденными пороками сердца. Одним из способов лечения является установка межсистемного модифицированного шунта Блэлок—Тауссиг. Однако, общая смертность составляет от 2.3 до 16%, а основные осложнения связаны с выбором диаметра шунта. При малом диаметре развивается тромбоз, при большом — гиперволемиа малого круга. Так как на настоящий момент подбор диаметра и места установки шунта осуществляется эмпирически, то выбор оптимального диаметра остается актуальной задачей, решение которой необходимо в повседневной работе хирурга. Одним из подходов к решению этой задачи может стать создание персонализированных моделей кровотока и анализ эффективности шунтирования. Современные методы вычислительной гидродинамики позволяют создавать такие модели и проводить комплексную неинвазивную оценку лечения с учетом особенностей каждого пациента. Однако, такое моделирование является трудоемким и времязатратным (от нескольких часов до нескольких дней на пациента), что является критичным фактором.

Потенциальным решением этих проблем является применение алгоритмов машинного обучения. В работе предлагается алгоритм построения метамоделей, т. е. модели, построенной на ограниченном числе симуляций с помощью сложной гидродинамической модели, на основе данных из персонализированных моделей, для описания гемодинамики в аортах детей с врожденными пороками сердца. На первом этапе на основе мультиспиральной компьютерной томографии были собраны данные о геометрии аорт. Это позволило провести МКЭ моделирование в Ansys CFX для нахождения основных гемодинамических параметров. С каждой моделью сопоставлены данные о диагнозе и основные геометрические характеристики аорт, которые в дальнейшем необходимы для настройки метамоделей и обучения нейронных сетей. На данный момент база данных состоит более чем из 500 3D-моделей, что позволяет решать задачу классификации аорт по геометрическим и гемодинамическим характеристикам. Обученные нейронные сети, принимающие на входе геометрию аорты, смогут выводить требуемые распределения в разы быстрее чем классическая CFD-симуляция. В дальнейшем планируется тестирование различных алгоритмов, включая свёрточные нейронные сети, а также проанализировать и классифицировать более 1000 геометрий и результатов моделирования.

Авторы благодарят А. Г. Кучумова за внимание к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научного проекта № 20.1/12.

## Математическая модель процесса осаждения многокомпонентной взвеси на дно водоёма

**Рахимбаева Е. О., Долгов В. В.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Для построения прогнозов, обладающих предсказательной ценностью, необходимо создать относительно недорогой, точный и быстро работающий инструментарий, учитывающий информацию, поступающую от административно и технически различных систем мониторинга. Инструментарием, оптимальным по сравнению с натурными исследованиями, является математическое моделирование гидродинамических и гидробиологических процессов.

Разработан комплекс объединенных математических моделей, которые описывают пространственно-трехмерные процессы переноса многокомпонентных взвешенных частиц и двумерные процессы транспорта донных материалов. Предложенные модели гидрофизики учитывают следующие факторы: движение водной среды, переменную плотность, зависящую от концентрации взвеси, многокомпонентность взвеси, изменение геометрии дна в результате осаждения взвеси.

В работе предложен алгоритм расчета изменения состава донных материалов в случае многокомпонентной взвеси. Применены дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переносов в случае частичной заполненности ячеек. Геометрия расчетной области описывается на основе функции заполненности. При этом использована схема, представляющая собой линейную комбинацию разностных схем «крест» и «кабаре» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации. Данная схема предназначена для решения задачи переноса примеси при больших сеточных числах Пекле.

В рамках данной работы построен параллельный алгоритм, реализующий поставленную трехмерную задачу переноса веществ на многопроцессорной вычислительной системе ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Разработанный на основе технологии MPI параллельный алгоритм, используемый для решения трехмерных задач диффузии — конвекции и реализованный на больших расчетных сетках (размером от  $1000 \times 1000 \times 100$  расчетных узлов), показал высокую эффективность, составившую более 75%.

Проведение численных экспериментов позволило сделать выводы о преимуществе 3D-модели транспорта многокомпонентной взвеси по сравнению с 2D-моделью. Разработанный программно-аналитический инструментарий позволяет проанализировать процесс движения наносов в случае взмучивания многокомпонентных донных отложений водоема, вызывающий вторичное загрязнение водоема, ухудшение его экологического состояния. Проведены численные эксперименты по моделированию процесса осаждения многокомпонентной взвеси, а также по изучению его влияния на рельеф дна и изменение его состава.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-20050, <https://rscf.ru/project/21-71-20050/>).

Решение задачи транспорта тепла и солей  
на основе гранично-адаптивных сеток  
с использованием суперкомпьютерных технологий

**Рахимбаева Е. О., Развеева И. Ф.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

На сегодняшний день технологии адаптации расчетных сеток могут существенно увеличивать точность и экономичность вычислительных алгоритмов.

Исходными уравнениями гидродинамики мелководных водоемов для решения поставленной задачи являются:

1. Уравнения движения (Навье — Стокса)

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\nu u'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \vartheta - w \cos \vartheta),$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \vartheta,$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\nu w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \vartheta + g.$$

2. Уравнение неразрывности в случае переменной плотности

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0.$$

3. Уравнения транспорта тепла и солей

$$T'_t + uT'_x + vT'_y + wT'_z = (\mu T'_x)'_x + (\mu T'_y)'_y + (\nu T'_z)'_z + f_T,$$

$$S'_t + uS'_x + vS'_y + wS'_z = (\mu S'_x)'_x + (\mu S'_y)'_y + (\nu S'_z)'_z + f_S,$$

где  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости,  $P$  — полное гидродинамическое давление,  $\rho$  — плотность водной среды,  $\mu, \nu$  — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена,  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\vartheta$  — широта места,  $g$  — ускорение свободного падения,  $f_T, f_S$  — источники тепла и соли (находятся на границе области).

Разработан программный модуль для решения задачи переноса тепла и солей на основе четырехугольной оптимальной гранично-адаптивной сетки, построенной на базе метода динамики частиц. Преимуществом программной реализации, ориентированной на суперкомпьютер, является возможность автоматически расставлять узлы на границе расчетной области и получать выпуклые ячейки. Задачу транспорта тепла и солей предполагается решить на основе схем повышенного порядка аппроксимации с применением параллельного алгоритма модифицированного попеременно-треугольного метода (МПТМ). В дальнейшем разработанный программный модуль будет применён для построения четырехугольной оптимальной гранично-адаптивной расчетной сетки для трёхмерных областей сложной формы — мелководных водоёмов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>).

## Диффузионная неустойчивость в однопараметрической системе Гирера — Мейнхардта

**Ревина С. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматривается одна из классических систем уравнений реакции — диффузии: система Гирера — Мейнхардта. Одна из возможных модификаций данной системы имеет следующий вид:

$$u_t = u_{xx} - u + \frac{u^2}{v}, \quad \tau v_t = dv_{xx} - v + u^2,$$

где  $d > 0$  — коэффициент диффузии и  $\tau$  — параметр релаксации считаются заданными. Неизвестными функциями являются  $u = u(x, t)$  — активатор и  $v = v(x, t)$  — ингибитор.

Предполагается, что пространственная переменная  $x$  меняется на отрезке  $[0, \ell]$ ,  $t > 0$  — время. На концах отрезка заданы однородные краевые условия Неймана

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\ell, t) = 0.$$

Будем интересоваться условиями, при которых имеет место диффузионная неустойчивость (неустойчивость по Тьюрингу) стационарного равновесия этой системы  $u_0 = 1, v_0 = 1$ .

Стационарное состояние системы называется «неустойчивым по Тьюрингу», если оно устойчиво в бездиффузионном приближении, но теряет устойчивость при наличии диффузии в системе.

Если имеет место диффузионная неустойчивость, то происходит бифуркация Тьюринга, в результате которой рождаются пространственно-неоднородные структуры. При этом роль бифуркационного параметра играет коэффициент диффузии  $d$ .

Критическим называется такое значение коэффициента диффузии, при котором все собственные значения соответствующей линеаризованной системы лежат в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, за исключением одного собственного значения, которое равно нулю.

Необходимые условия диффузионной неустойчивости для однопараметрической системы Гирера — Мейнхардта хорошо известны. Они имеют вид

$$0 < \tau < 1, \quad \sqrt{d} \geq 1 + \sqrt{2}.$$

Настоящая работа посвящена нахождению достаточных условий диффузионной неустойчивости. Как правило, достаточные условия неустойчивости Тьюринга находятся численно. В данной работе они найдены аналитически.

Исследована зависимость критического коэффициента диффузии от длины интервала  $\ell$ . Найдены вторичные стационарные пространственно-неоднородные режимы, которые возникают в результате неустойчивости Тьюринга. Получены условия мягкой и жесткой потери устойчивости. Для нахождения вторичных решений применяется метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем. Полученные результаты обобщаются на другие системы реакции — диффузии.

## Деформации и нарушения локальной симметрии в вирусных оболочках

Рошаль Д. С., Федоренко К. К., Серегина К. Ю., Коневцова О. В.,  
Рошаль С. Б.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Понимание принципов структурной организации и самосборки вирусных белковых оболочек (капсидов) не только играет ключевую роль в современной наномедицине, но и актуально для создания интеллектуальных наноматериалов на протеиновой основе. Обычный вирусный капсид состоит из небольшого числа асимметричных белков, образующих замкнутую оболочку с икосаэдрической симметрией. В середине XX века Каспар и Клуг предложили интерпретировать положение белков в вирусной оболочке на основе икосаэдра, декорированного гексагональной упаковкой белков. Однако, из-за того, что не все белки в капсиде являются одинаковыми, и в силу порождаемых кривизной оболочки напряжений и деформаций, происходит нарушение локальной гексагональной симметрии в упаковке белков на гранях икосаэдрической оболочки.

В работе рассматриваются закономерности расположения белков на поверхности вирусного капсида. Цель работы — вычислить изменения положения центров белков и центров их зарядов в реальных капсидах относительно модели Каспара и Клуга, а также вычислить деформации Каспар — Клуговского разбиения.

В ходе исследования анализировались икосаэдрические оболочки 10 представителей различных вирусных семейств, находящихся на разных стадиях созревания. Написана программа на языке Python, позволяющая на основе данных с сайта «Банк данных о протеинах», где приведены координаты всех аминокислот в вирусной оболочке, определить центры масс и центры зарядов отдельных белков. Центры зарядов рассчитывались на основе зарядов, которые имеют аминокислоты при  $\text{pH} = 7$ , с помощью уравнения Хендерсона — Хассельбаха. Построена триангуляция Делоне, соединяющая между собой центры белков вирусного капсида. Посчитаны длины сторон и площади треугольников триангуляции, а также углы между треугольными гранями. Показано, что экстремальные значения таких углов наблюдаются вблизи осей симметрии пятого порядка и ребер икосаэдра.

Проведено сравнение с моделью Каспара и Клуга. Посчитаны деформации реальной вирусной структуры относительно идеальной с помощью сравнения треугольников триангуляции Делоне вирусной оболочки с треугольниками гексагональной решетки разбиения Каспара — Клуга. Максимальные деформации наблюдаются вблизи осей пятого порядка.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-12-00105, <https://rscf.ru/project/22-12-00105/>).



## Механические свойства стоматологических материалов и окружающих их тканей при лечении кариеса в стадии белого пятна

Садырин Е. В.<sup>1</sup>, Ёгина Д. В.<sup>2</sup>, Евсюков А. П.<sup>1</sup>, Забияка И. Ю.<sup>1</sup>,  
Свэйи М. В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Ростовский государственный медицинский университет, Ростов-на-Дону

<sup>3</sup>Сиднейский университет, Сидней

Практикующий стоматолог планирует лечение кариеса в стадии белого пятна в зависимости от ряда факторов. При ранних проявлениях кариеса лечение может быть ограничено методами неинвазивной стоматологии. В случае невозможности применения неинвазивных методов лечения врач может либо использовать более традиционные методы препарирования и пломбирования (в частности, с использованием композитных материалов или стеклоиономерного цемента), либо прибегнуть к малоинвазивному лечению (полимерная инфильтрация). Каждая методология имеет свои преимущества и недостатки.

В настоящей работе для оценки эффективности таких материалов проведено *ex vivo* исследование механических свойств пломб из композитного материала и стеклоиономерного цемента, а также инфильтрированной эмали и тканей в их окрестностях с последующим сравнением результатов со свойствами здоровых тканей с использованием наноиндентирования на установке Nanotest Platform 3 (Micro Materials, Великобритания). Для более тщательной интерпретации полученных экспериментальных данных были получены оптические и сканирующие электронные микроскопические изображения исследуемых областей с использованием микроскопов StereoDiscovery V.20 и Crossbeam 340 (Carl Zeiss Microscopy, Германия). Четыре человеческих зуба (моляра) были удалены у пациентов по ортодонтическим показаниям в стоматологическом отделении клиники Ростовского государственного медицинского университета (Ростов-на-Дону, Россия). Локальный независимый этический комитет Ростовского государственного медицинского университета одобрил проведение исследования (выписка 14/21 от 23 сентября 2021 г.), пациенты дали информированное согласие.

Было показано, что композитные пломбы имеют большее сходство по механическим свойствам со здоровой эмалью, демонстрируют меньшую вероятность потери адгезии на границе пломба — эмаль, а также в них содержится меньшее количество артефактов внутренней структуры. Показана возможность возникновения полимеризационного напряжения в дентине, прилегающем к пломбе. Патологически измененная эмаль, обработанная полимерным инфильтрантом, несмотря на некоторое снижение значений свойств по сравнению со здоровой тканью, оказалась в целом близкой к ней как по механическим, так и по микрогеометрическим свойствам.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-19-00732, <https://rscf.ru/project/22-19-00732/>).

Наноиндентирование и СЭМ выполнены в РЦКП НОЦ «Материалы» Донского государственного технического университета (<https://nano.donstu.ru/>).

## Предсказание поведения системы мониторинга для пластины с прямоугольной выемкой с помощью метамоделей

**Сверкунова Д. А., Шпак А. Н.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Постоянное воздействие внешних нагрузок на объекты инфраструктуры, здания и сооружения в течение жизненного цикла, а также ошибки в процессе производства и строительства приводят к деформациям и повреждениям различного рода. Поэтому последние десятилетия развиваются встроенные системы мониторинга, основанные на сети датчиков, которые имеют преимущество перед системами неразрушающего контроля, прежде всего в силу автоматизированности, оперативности и непрерывности получения данных мониторинга. В таких системах весьма активно используются пьезоэлектрические преобразователи, установленные на поверхности или встроенные в структуру, одновременно выполняющие роль излучателя и сенсора. Суть подхода заключается в том, что упругие волны, генерируемые одним или несколькими пьезоэлектрическими преобразователями, распространяются на большие расстояния в тестируемом элементе конструкции, взаимодействуют с дефектами разной природы и предоставляют информацию о состоянии структуры в онлайн-режиме.

Принимая во внимание, что каждый конкретный экспериментальный образец имеет свои собственные особенности из-за специфики его изготовления, использование метамоделей становится необходимым условием успешного применения физических моделей в реальных задачах. В данной работе представляется пилотная метамодел для оценки результатов экспериментальных измерений на основе результатов математического моделирования. Было изготовлено несколько образцов в виде стальных пластин с дефектом и без дефекта. Дефект представляет собой выемку с шириной 10 мм и глубиной 1 мм, расположенную по центру пластины. Колебания в пластине генерируются пьезоэлектрическим преобразователем прямоугольной формы, который наклеивается на поверхность пластины на расстоянии 110 мм от центра пластины, параллельно её краям. Были произведены измерения экспериментальных сигналов, полученных для частот в диапазоне от 20 до 250 кГц. Настройка метамодел производилась в частотной области, нестационарные сигналы рассчитывались с помощью обратного преобразования Фурье. С помощью преобразования Фурье были получены спектры сигналов, после чего функция ошибки была интерполирована с помощью значений расхождения на частотах из заданного диапазона. Использовалась двумерная полуаналитическая модель для получения имитационных данных пластины: нетронутой и с искусственным повреждением (выемкой). Полученная функция использовалась далее для настройки метамодел и оценки экспериментальных измерений конкретных образцов на тестовых центральных частотах. Сравняются влияние количества частот и параметров метамодел на точность предсказаний.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ № FZEN-2020-0017.

## Механические свойства алюмоматричного композита, армированного карбидными наноструктурами

**Семенов Б. Н., Земцова Е. Г., Смирнов В. М., Смирнов И. В.**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*

Металломатричные композиты с алюминиевой матрицей находят широкое применение благодаря их высоким эксплуатационным свойствам. При переходе к армированию металлической матрицы от керамических микрочастиц к наночастицам наблюдается значительное улучшение механических свойств. Это, прежде всего, связано с тем, что по сравнению с микрочастицами наночастицы обладают большей способностью препятствовать движению дислокаций в металлической матрице, инициации и распространению трещин внутри наночастиц или на границах раздела частица — матрица, поэтому, более эффективно повышать как прочность композитов, так и улучшать их пластичность.

Одним из важных факторов, влияющих на прочностные свойства металломатричного нанокompозита, является сложность введения однородной дисперсии наночастиц с высоким содержанием, так как наночастицы более склонны к агрегации в металлических матрицах чем микрочастицы из-за их большей площади поверхности относительно объема, что становится существенной причиной, когда объемная доля армирующих наночастиц высока. Агрегация наночастиц может привести к недостаточному упрочняющему эффекту и даже к снижению прочности композитов. Поэтому достижение наноразмерной однородной дисперсии армирующих наночастиц имеет ключевое значение. Одним из способов достижения однородной дисперсии наночастиц является применение методов интенсивной пластической деформации, в частности, равноканального углового прессования, накопительной прокатки, кручения под давлением, которые приводят как к уменьшению пористости, так и повышению прочностных свойств.

Авторами была предложена оригинальная методика изготовления металломатричных нанокompозитов, заключающаяся в нанесении методом молекулярного наслаивания на поверхность частиц алюминиевого порошка карбидных структур толщиной 10–45 нм, перемешивании полученных дисперсных частиц с частицами металла, прессовании и спекании полученной смеси. После прессования и спекания полученные образцы подвергались интенсивной пластической деформации методом кручения под давлением, в результате которой не только снижалась пористость и обеспечивалось однородное распределение армирующих частиц по объему, но и происходило разрушение карбидных оболочек на поверхности и измельчение металлических частиц.

Проведенные экспериментальные исследования показали, что при сравнительно малом объемном содержании в полученных нанокompозитах армирующих частиц (менее 1%), прочность при сохранении пластичности возросла почти в 4 раза.

На основании анализа экспериментальных результатов разработана модель упрочнения нанокompозита, синтезированного по предложенной методике.

Работа выполнена при поддержке гранта № 075-15-2022-1114 Министерства науки и высшего образования РФ.

## Полуаналитический гибридный метод для описания взаимодействия пьезоэлектрического преобразователя с загнутым электродом

**Сиухина С. А., Шпак А. Н.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Одним из важнейших направлений развития технологий производства является создание и внедрение систем мониторинга состояния конструкции в режиме онлайн. Основное отличие такой системы от неразрушающего контроля заключается в непрерывном мониторинге. Такой подход позволяет своевременно обнаруживать дефекты, отслеживать их развитие и проводить оценку оставшегося времени до наступления невозможности эксплуатации объекта.

На практике для возбуждения и измерения бегущих волн используется сеть пьезоэлектрических преобразователей, каждый из которых может работать как актуатор и сенсор. Целостность этих устройств, как и контакта между ними и структурой, является необходимым условием достоверной работы системы мониторинга. При этом контакт между пьезоэлектрическим преобразователем и поверхностью структуры может быть нарушен ввиду влияния нагрузок и условий использования, дефектов контактного слоя, усталостью материала и т. д. Для развития алгоритмов диагностики пьезоэлектрических преобразователей, а также для детального понимания возбуждения и измерения бегущих волн поврежденными преобразователями необходима надежная и достоверная трехмерная математическая модель.

В данной работе для сочетания преимуществ полуаналитических и численных методов математическая модель для описания возбуждения волн Лэмба пьезоэлектрическим преобразователем в упругом слое разрабатывается на основе гибридного подхода. Результаты моделирования сравниваются с расчётами в коммерческой среде COMSOL Multiphysics. При этом пьезоэлектрический преобразователь моделируется методом спектральных элементов в частотной области, а волновые поля в слое рассчитываются с помощью метода граничных интегральных уравнений. Метод спектральных элементов получил своё распространение за счет использования полиномов высоких степеней в качестве базисных функций. Такой метод имеет лучшую сходимость в сравнении с методом конечных элементов. При моделировании волновых процессов метод спектральных элементов позволяет уменьшить время счета и необходимую память более чем в 10 раз по сравнению с методом спектральных элементов. Математическая модель распространения упругих волн в многослойных композитах строится на основе полуаналитического метода граничных интегральных уравнений. В рамках этого подхода волновые характеристики вычисляются в виде контурных интегралов от преобразований Фурье матрицы Грина по всей многослойной структуре с заданным для источника или неизвестным для дефекта распределением напряжений или перемещений. Использование данного метода позволяет моделировать не только однородную структуру, но и многослойный композитный волновод при известных константах материала.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00261).

## Акустический волновод с неоднородно поляризованным источником и приемником колебаний

Скалиух А. С., Браулио Д.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Волновые процессы для разнородных физических элементов с учетом источников и приемников колебаний и механизмов затухания представляют собой актуальную задачу. Элементы затухания волноводных процессов приводят к ослаблению сигналов и вносят паразитные шумы, что сказывается на приеме сигнала. Конечные размеры акустического волновода и преобразователей приводят к отражению сигналов, что проявляется на амплитудно-частотных характеристиках. Если рассматривать диапазон частот, в котором наблюдается только один всплеск (возникновение первой моды), то возникает оптимизационная задача изменения характеристик передающего и приемного преобразователей с целью усиления принимаемого сигнала. С этой целью предлагается рассматривать пьезокерамические преобразователи с неоднородной поляризацией, а характер неоднородности поляризации выбирать таким образом, чтобы усилить амплитуду сигнала в определенном диапазоне частот. Для включения в круг рассматриваемых вопросов процесс затухания было предложено использовать модель, учитывающую утечку энергии через ограничивающую волновод упругую поверхность. В дополнение учитывалась вязкость жидкости, заполняющей акустический волновод. И хотя этот фактор почти не сказывается на затухании принимаемого сигнала, все же он не вносит никаких усложнений с математической точки зрения, поэтому и был включен в предлагаемую модель.

Гармонический режим колебаний в волноводе осуществляется посредством генерации колебаний в источнике, который представляет собой круглый короткий пьезокерамический преобразователь с продольной неоднородной поляризацией, на электроды которого подается разность потенциалов по гармоническому закону. Сигнал проходит по акустической части и снимается пьезокерамическим приемником такой же структуры, как и источник. Источник и приемник работают на толщинных модах колебаний. Система уравнений для всей цепочки входящих в систему сред включает в себя уравнения электроупругости и акустической среды. Для электроупругих сред использован МКЭ. Для учета импедансного затухания решается осесимметричная задача для акустической жидкости. Использование импедансных граничных условий на боковой поверхности порождает спектральную задачу, в которой приходится находить комплексные корни. Одним из способов их нахождения является генетический алгоритм для векторных популяций. Условия сопряжения решений на границах раздела удовлетворяются в интегральном смысле. Граничные условия для приемника дополняются уравнением протекания тока через внешнюю цепь, включающую в себя заданную комплексную проводимость. На правом конце используются граничные условия сопряжения со средой Фойгта. Численные эксперименты сравнивались с решением упрощенных задач для однородной поляризации и отсутствия затухания. Результаты могут быть использованы для исследования кровеносных сосудов с жесткими стенками и при моделировании нестационарного решения задачи.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 21-19-00423.

## Использование пористой пьезокерамики для многослойного сдвигового пьезоэлемента

Соловьев А. Н.<sup>1,2</sup>, Оганесян П. А.<sup>2</sup>, Фоменко Е. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Применение композитных материалов при изготовлении пьезоэлектрических устройств позволяет создавать более эффективные преобразователи. Одним из частных случаев композитных материалов является пористая пьезокерамика. Изменение пористости влияет на пьезоэлектрические свойства материалов по-разному. В зависимости от природы пористости, выражающейся в законе распределения пор, их размере и взаимном расположении, могут возникать такие пористые структуры, которые характеризуются небольшим изменением пьезомодулей  $d_{33}$  и  $d_{15}$  по сравнению с упругими модулями и пьезомодулем  $d_{31}$ , которые убывают с возрастанием процента пористости. Такая керамика была смоделирована в пакете ACELAN COMPOS на основе материала PZT-4 с пористостью типа 3-0 (изолированные отдельные поры). Эффективные свойства пористой керамики были получены с помощью метода осреднения. В данной работе рассматривается модель слоистого преобразователя, работающего на сдвиговых модах колебаний. Преобразователь представляет собой слоистую кольцевую пластину, консольно-закрепленную по внутреннему радиусу к инерционному элементу и, аналогично, по внешнему радиусу к корпусу устройства. Пьезоэлектрические слои поляризованы по толщине и электродированы на боковых поверхностях. Между пьезоактивными слоями находятся пассивные пластины, обеспечивающие прочность конструкции особенно в случае высокопористой керамики.

При оценке эффективности преобразователя использовались два набора переменных дизайна: материальные свойства керамики, рассчитанные в диапазоне от 0 до 80 % пористости, и геометрические параметры: характерный линейный размер и толщина слоя. В качестве целевой функции рассматривались две величины: коэффициент электромеханической связи (КЭМС) и потенциал, возникающий при вынужденных колебаниях на свободном электроде. Рассматривались режимы колебаний на одной частоте для всех образцов и для различных диапазонов частот, расположенных около рабочей частоты. Для второго случая вычислялись коэффициенты демпфирования образца. Таким образом, численный эксперимент проводился в два этапа: сначала осуществлялось решение задачи на собственные значения для определения рабочих частот и КЭМС, а затем — задача на установившиеся колебания для анализа выходного потенциала. Расчеты производились в пакете COMSOL на основе параметризованной геометрии, что позволило автоматизировать серию численных экспериментов.

На основании результатов расчетов были сделаны выводы об оптимальных комбинациях геометрических параметров и материальных свойств преобразователя. Отметим, что в работе не рассматривались вопросы потери прочности материала с ростом пористости, актуальные для высокопористых керамик.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00302), в Южном федеральном университете.

Локализованные волны  
в полубесконечных ортотропных функционально-градиентных телах  
с приграничными зонами неоднородности,  
описываемой двойными экспоненциальными функциями

**Сторожев В. И., Глухов А. А., Пачева М. Н.**

*Донецкий национальный университет, Донецк*

Характерной особенностью структурного строения большинства реальных объектов в виде конструкций из непрерывно-неоднородных функционально-градиентных конструкционных материалов и массивов горных пород является приграничная (приповерхностная, приконтурная) локализация зон интенсивного изменения параметров физико-механических свойств и асимптотическая стабилизация значений этих параметров при удалении от граничных поверхностей вглубь рассматриваемых тел. В этой связи, дальнейшая разработка численно-аналитических методик изучения моделей деформирования анизотропных функционально-градиентных тел с приграничными зонами выраженной неоднородности представляет важность с точки зрения фундаментальной науки и для совершенствования прикладных расчетных методик при конструировании, связанном с применением аддитивных технологий, конструировании компонентов акустоэлектронных устройств, в ультразвуковой диагностике, геоакустических и сейсמודинамических исследованиях.

Выполненное в данной работе исследование посвящено анализу закономерностей распространения локализованных упругих волн в полубесконечных анизотропных телах с учетом эффектов приграничной неоднородности физико-механических свойств, описываемой двойными экспоненциальными функциями вида  $\exp(a \exp(bx))$ . При рассмотрении полубесконечных областей вида  $x > 0$  или  $x < 0$  соответствующий выбор параметров  $a$  и  $b$  позволяет формировать двухпараметрические законы приповерхностной локализации зон выраженной неоднородности с асимптотическим стремлением координатных зависимостей для физико-механических характеристик ортотропных функционально-градиентных материалов в глубине полупространств к постоянным значениям.

Для описанных законов неоднородности на основе применения метода последовательных приближений в форме экспоненциальных скалярных и векторно-матричных сходящихся рядов построены аналитические представления базисных решений уравнений распространения стационарных сдвиговых SH-волн, двухпарциальных волн P-SV типа, а также трехпарциальных волн с произвольно-ориентированным в граничной плоскости ортотропного полупространства направлением распространения.

С использованием решений данных типов получены и исследованы дисперсионные соотношения для обобщенных поверхностных волн Лява, Релея и Стоунли в структурах, включающих ортотропные функционально-градиентные полупространства с приграничными локализованными зонами неоднородности. Реализован параметрический анализ зависимостей фазовых скоростей рассматриваемых поверхностных волн от характеристик анизотропии и неоднородности материалов.

## Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в моделях термоупругого деформирования

Сторожев С. В., Номбре С. Б., Полянский Д. Д.

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка*

Разработка и применение новых усовершенствованных методов численно-аналитического исследования моделей термоупругого деформирования материалов и конструкций является одной из актуальных задач фундаментальных исследований по проблемам математического моделирования в механике с широким кругом важных приложений в современных высокотехнологичных научно-промышленных отраслях — высокопотенциальной энергетике, электронике, аэрокосмической индустрии. При этом эффективность применения создаваемых методов в проектных расчетах параметров конструкций, сооружений и технологических процессов в самой высокой мере связана с возможностями учета в рассматриваемых моделях термоупругости факторов выраженной параметрической неопределенности, в том числе данных о разбросах экспериментальных замеров и технологических допусках для значений исходных физико-механических и геометрических параметров моделирования. С учетом необходимости использования в соответствующих расчетных алгоритмах неконтрастной информации, во многих случаях не имеющей строгой статистической природы, включая данные субъективных экспертных оценок, одним из подходов к учету параметрической неопределенности в моделях термоупругого деформирования, наряду с методами вероятностно-стохастического анализа, является применение методов теории нечетких множеств.

Представленное исследование посвящено разработке алгоритмизированных специализированных методик нечетко-множественного расчетного анализа для нескольких моделей термомеханики деформируемых сред с неконтрастными параметрами, включая модель определения усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика, модель осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра и модель анализа фазовых скоростей распространения объемных термоупругих волн без учета релаксации теплового потока. Характеризуемыми этапами реализации данного подхода являются альтернативные приемы фаззификации неконтрастной исходной информации с переходом к описанию обладающих разбросами параметров в виде нормальных нечетких чисел треугольного или гауссова типа, а также трапецеидальных нечетких интервалов, и последующий переход к нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях детерминистических вариантов соответствующих моделей. Получение нечетко-множественных расчетных соотношений для анализируемых характеристик деформационных процессов осуществляется путем поэтапного фрагментированного применения аппарата арифметики нечетких чисел и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа расширения.

Представлен ряд результатов численных исследований для рассматриваемых моделей статического и динамического термоупругого деформирования.



## Учет работ изменения объема и деформаций сдвига в анализе энергетического баланса при испытании материалов на растяжение

Судьенков Ю. В.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*

В исследованиях поведения твердых тел при действии внешних нагрузок существенный интерес представляет анализ характера изменений энергетического баланса в результате структурных перестроек на разных стадиях процесса деформирования. Энергетический баланс обычно определяется равенством работы деформации  $W$  сумме выделяющегося тепла  $Q$  и скрытой, латентной  $L$  энергии  $W = Q + L$ . Однако, при традиционном анализе энергетического баланса не обсуждается вклад работы напряжений, определяющих изменение объема и работы, затраченной на деформации сдвига. При этом известно, что накопление и диссипация энергии при деформировании твердых тел является следствием сложного процесса эволюции дефектной структуры на различных масштабных уровнях под действием микронапряжений сдвига. В этой связи необходим учет вклада работ, затраченных на изменение объема и сдвиговых деформаций при анализе энергетического баланса деформирования твердых тел.

Этап перехода от упругой реакции металлов к пластическому течению обычно занимает достаточно незначительное время процесса деформирования, но при этом процессы, происходящие на атомных и микромасштабах, определяют изменение внутренней энергии материала, начало перестройки его структуры и характер процесса развитого пластического течения. При этом влияние ангармонизма потенциала межатомного взаимодействия сказывается уже на упругом этапе деформирования материалов и наглядно проявляется в изменении их температуры вследствие термоупругого эффекта.

В механике деформируемого твердого тела аналогом ангармонической характеристики  $\gamma$  является коэффициент поперечных деформаций  $\nu_{td}$ . Взаимосвязь этих параметров с учетом выражения для  $\gamma$  имеет вид  $\nu_{td} = \frac{4}{3} \frac{\beta B^T - 0.75 \rho c}{2\beta B^T + \rho c}$ . Т. е.  $\nu_{td}$  определяется совокупностью термодинамических и механических характеристик состояния материала, и его значение должно учитываться в определяющих соотношениях. Тот факт, что  $\nu_{td}$  определяется деформациями, происходящими одновременно в направлениях, ортогональных направлению действия внешней силы, т. е. определяется действиями внутренних сил, выражает его потенциальную чувствительность к структурным перестройкам.

Для анализа энергетического баланса при деформировании предлагается использовать модель процесса деформирования В. А. Кузьменко, которая позволяет разделить работу внешних сил на работу изменения объема и работу сдвиговых деформаций  $W = W_V + W_S = (Q_V + Q_S) + (L_V + L_S)$ ,  $W_V/W = \nu(1 + 3\nu + 3\nu^2)/(1 + \nu)$ ,  $W_S/W = (1 - 3\nu^2 + 3\nu^3)/(1 + \nu)$ , где  $W$  — работа внешних сил,  $W_V$  — работа на изменение объема,  $W_S$  — работа на деформации сдвига,  $Q_V = Q \frac{W_V}{W}$  —  $Q_S = Q \frac{W_S}{W}$  — тепловыделение при изменении объема и вследствие сдвиговых деформаций. Таким образом, одновременная регистрация тепловыделения и поведения коэффициента поперечных деформаций дает возможность анализа энергетического баланса с учетом вклада работ изменения объема и сдвиговых деформаций.

## Моделирование отраженного и прошедшего поля в двуслойном изотропном полупространстве

**Татаркин А. А., Ермоленко О. А.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Детали из высокоэффективных сплавов (суперсплавов), которые отливаются в виде монокристаллов, активно применяются в современной промышленности, в частности, при производстве лопаток аэрокосмических и судовых турбинных двигателей и т. п. Преимущество суперсплавов заключается в их отличных прочностных свойствах, сохраняющихся при повышенных температурах. Однако, появление скрытых дефектов может привести к выходу из строя ответственных деталей и, как следствие, к потере двигателя. Для предотвращения такого развития событий проводится регулярная диагностика изделий, в том числе и методами ультразвукового (УЗ) неразрушающего контроля, позволяющими получать дополнительную информацию об изменениях механических свойств составных материалов.

Ультразвуковой неразрушающий контроль деталей из составных суперсплавов предполагает исследование закономерностей распространения, отражения и преломления упругих волн. Конечно-элементное моделирование требует больших вычислительных затрат и дополнительной постобработки результатов для получения физически наглядного представления отдельных составляющих суммарного волнового поля.

Настоящая работа посвящена выводу явных асимптотических представлений для отраженных и прошедших волн в двуслойном упругом изотропном полупространстве. Данные представления позволяют выделить отраженные и прошедшие волны из общего волнового поля без постобработки и значительных вычислительных затрат. Для верификации асимптотики проводится сопоставление с результатами полуаналитического и конечно-элементного моделирования. Полуаналитическое моделирование базируется на интегральном подходе, который позволяет получить явное представление возбуждаемых источником волновых полей через матрицу Грина рассматриваемой волноводной структуры в виде контурных интегралов обратного преобразования Фурье. Для построения Фурье-символа матрицы Грина используются специально разработанные быстрые численно-устойчивые алгоритмы. На основе полученных интегральных представлений выводятся асимптотические формулы для волнового поля в средней и дальней от источника зоне. Асимптотические представления для возбуждаемых источником бегущих волн получаются как вклад вычетов в полюсах Фурье-символа матрицы Грина, а объемных волн — методом перевала и стационарной фазы. Обсуждается возможность обобщения данного подхода на случай анизотропных упругих сред. Анализируются и обсуждаются диаграммы направленности отраженных и прошедших волн.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ № FZEN-2020-0017.

## О решении системы интегральных уравнений с гладким ядром

Углич П. С.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

При решении обратных коэффициентных задач теории упругости часто возникают уравнения Фредгольма первого рода с гладкими ядрами. При необходимости одновременного определения нескольких параметров формируются системы уравнений с гладкими ядрами. Существующие алгоритмы решения некорректных задач обычно предназначены для решения одного интегрального уравнения с гладким ядром с одной неизвестной функцией. Также существуют специальные численные методы решения плохо обусловленных систем линейных уравнений, но при их использовании невозможен учёт краевых условий для неизвестных функций.

Предлагается модификация метода регуляризации А. Н. Тихонова для системы интегральных уравнений с гладкими ядрами. Построен сглаживающий функционал, включающий в себя соболевские нормы для всех неизвестных функций, входящих в систему, и содержащий несколько параметров регуляризации, по одному на каждую неизвестную функцию. Произведена минимизация функционала с построением системы интегро-дифференциальных уравнений Эйлера. Для одновременного отыскания нескольких параметров линеаризации использован метод Бройдена, предназначенный для решения системы нелинейных уравнений и являющийся аналогией метода секущих. Такая схема решения системы уравнений позволяет учесть краевые условия для всех неизвестных функций. Также при отыскании нескольких параметров регуляризации возможно использование различных методов минимизации функционала нескольких переменных, например, метода координатного спуска.

При использовании метода регуляризации А. Н. Тихонова возможно построение сглаживающего функционала, содержащего соболевские нормы всех неизвестных функций, но с одним параметром регуляризации. При использовании такого сглаживающего функционала возможно использование метода Воеводина со сведением матрицы дискретизирующей системы линейных уравнений к трёхдиагональному виду и решением полученной преобразованной системы методом прогонки. Параметр регуляризации при этом подбирается с помощью критерия обобщённой невязки.

Произведён ряд численных экспериментов по использованию предложенных алгоритмов для решения обратной задачи об определении неоднородных механических параметров стержня. Также рассмотрена задача об определении неоднородных механических параметров поперечно-неоднородного слоя. Произведено сравнение результатов работы предложенных алгоритмов с результатами, полученными при помощи алгоритма Пейджа — Саундерса. Произведено сравнение производительности и точности предложенных методов. Приведены результаты численных экспериментов для различных частот и законов распределения механических параметров.

## Исследование волн в пористоупругом полупространстве с неоднородной по глубине флюидонасыщенностью

Фоменко С. И.<sup>1</sup>, Джана Р.<sup>2</sup>, Ромашин А. К.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

<sup>2</sup>*Сколковский институт науки и технологий, Москва*

Изучение свойств и восстановление физико-механических параметров пористых насыщенных жидкостью или газом материалов (почвы, горные породы) по измеренным данным отклика среды на специальное воздействие представляет интерес в различных науках о Земле (геология, сейсмология, экология, сельское хозяйство). Так, оценка пористости и уровня влаги в почве важна для прогноза и, соответственно, улучшения показателей урожайности сельскохозяйственных культур. Целью данного исследования является разработка методов оценки эффективных параметров среды, пористости и влагонасыщенности грунтов с помощью возбуждаемых поверхностными источниками колебаний волн и решение обратных параметрических задач. На основе полученных результатов могут быть затем определены гидравлические параметры инфильтрации в почвах. Полученные результаты исследования распространения волн в пористых материалах могут найти приложение в задачах диагностики (сонометрия) многих биологически тканей, являющихся пористыми и флюидонасыщенными, такими, например, как кости, ткани легкого и т. д.

В результате процесса естественной инфильтрации воды в порах грунта профиль водонасыщенности зависит от глубины, а также времени инфильтрации. Профиль содержания жидкости в порах для различных грунтов и начальных условий был получен численно в результате решения нелинейного уравнения Ричардса методом конечных элементов. Таким образом, при распространении волн в водонасыщенном грунте важно учитывать неоднородный по глубине состав флюида в порах за счет изменения концентрации поровой жидкости и замещения ее воздухом. Рассматривается задача распространения упругих волн в пористо-упругом неоднородном (функционально-градиентном) полупространстве, возбуждаемых поверхностными нагрузками. Упругие колебания подчиняются уравнениям Био — Френкеля. Решение краевой задачи ищется в форме контурных интегралов обратного преобразования Фурье относительно Фурье-символа матрицы Грина для функционально-градиентного полупространства. Асимптотика поверхностных волн в дальней зоне строится с помощью теории вычетов в полюсах матрицы Грина.

Обсуждается алгоритм построения матрицы Грина функционально-градиентного пористого полупространства, а также результаты численного параметрического анализа фазовых скоростей и амплитудно-частотных характеристик поверхностных волн в рассматриваемых средах для характерных профилей водонасыщенности, полученных в результате численного решения уравнения Ричардса.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Кубанского научного фонда № 22-21-20053.

## Влияние формы армирования на динамическую прочность фибробетонов

**Хайретдинова Д. Д., Селютина Н. С.**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*

Армированный бетон находит широкое применение в производстве, поскольку добавление волокон улучшает механические свойства бетона и повышает его прочность. Параметрами, оказывающими влияние на свойства армированного бетона, являются материал, размер, геометрическая форма и объемная доля волокна. Эксперименты показывают, что прочность различается при медленных статических нагрузках и быстрых динамических воздействиях. Это говорит о необходимости изучения предела прочности при высокоскоростных нагрузках и рассмотрения влияния армирования на динамическую прочность. В настоящей работе для описания хрупкого разрушения предложен критерий инкубационного времени, описанный в работах Ю. В. Петрова и Н. Ф. Морозова. Он позволяет ввести инкубационное время как независимую характеристику материала, описывающую его скоростную чувствительность. Это дает возможность оценивать динамическую прочность в широком диапазоне статических и динамических скоростей деформации с помощью критерия

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\sigma(t')}{\sigma_c} \right)^\alpha dt' \leq 1,$$

где  $\tau$  — инкубационное время,  $\sigma_c$  — статический предел прочности,  $\alpha$  — чувствительность материала к уровню напряженности силового поля, вызывающего разрушение. Предполагается, что изменение напряжений происходит по закону Гука, а деформации описывает линейная функция времени  $\sigma(t) = E\varepsilon(t) = E\dot{\varepsilon}tH(t)$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $\dot{\varepsilon}$  — скорость деформации,  $H(t)$  — функция Хевисайда. Момент разрушения определяется из условия, когда неравенство становится равенством. Ему соответствует время разрушения  $t = t^*$  и предельное напряжение  $\sigma_d = \sigma(t^*)$ .

На основе экспериментальных данных исследования динамической и статической прочностей на сжатие рассмотрено армирование бетона с различными объемными долями волокна  $V_f = \{0\%; 0.5\%; 1\%; 1.5\%\}$  (для спирального волокна) и  $V_f = \{0\%; 1\%; 2\%\}$  (для прямого волокна). После экспериментального определения механических параметров использовался критерий инкубационного времени и вычислялся параметр  $\tau$  для каждого эксперимента. Построена теоретическая зависимость динамической прочности от скорости деформации  $\sigma_d(\dot{\varepsilon})$ . Показано, что для спирального волокна статический предел прочности растет с добавлением армирующего волокна, и, аналогично, при динамическом нагружении. Для прямого волокна при статическом нагружении добавление армирования увеличивает предел прочности, а при высоких скоростях деформации наблюдается обратная тенденция. Обнаружено, что для спирального волокна  $\tau$  растет с повышением доли армирующего волокна, а для прямого понижается, что говорит об уменьшении скоростной чувствительности материала. Такое поведение может быть связано с тем, что спиральная форма обеспечивает лучшее сцепление с бетонной матрицей. Связь распространяется во всех трех направлениях, в отличие от прямых волокон, что и показывает лучшую прочность при динамических нагрузках.

Оценка влияния механических параметров системы  
«артерия — бляшка — стент» на прогнозирование эффективности  
стентирования с учетом взаимодействия «жидкость — твердое тело»

Хайрулин А. Р.<sup>1</sup>, Кучумов А. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь

<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
Пермь

Стент — имплантируемая сетчатая цилиндрическая структура, которая поддерживает оптимальный просвет кровеносного сосуда. Стентирование коронарных артерий является одним из самых распространенных методов лечения коронарного стеноза, который является причиной развития ишемической болезни сердца (ИБС), которая занимает лидирующую позицию по уровню смертности в мире. Основной причиной развития данной патологии является атеросклероз, который развивается из-за скопления холестерина, кальция и других элементов на стенках коронарных артерий, в конечном итоге образуя бляшки, сужая проточную часть и частично или полностью блокируя приток крови к сердцу. Однако, после имплантации стента происходит рестеноз коронарных артерий и стента, что значительно осложняет прогноз заболевания. Существует огромное количество разновидностей стентов, используемых при чрескожных коронарных вмешательствах. В настоящее время известно порядка 400 типов сосудистых стентов (саморасширяющихся и баллонорасширяемых). Различные конструкции каркасов стентов (дизайн) оказывают различное влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) артериальной бляшки, слоев артерии и самого стента, а также на гемодинамические параметры (WSS, TAWSS, OSI и т. д.), в той или иной мере прогнозирующие образования атеросклеротических бляшек. Известно, что участки, имеющие низкое напряжение сдвига (WSS) и высокий индекс колебаний сдвиговых напряжений (OSI), особенно подвержены развитию атеросклероза. На сегодняшний день до сих пор в полной мере не решена проблема, связанная с осложнениями после стентирования, поэтому постоянно ведутся работы по улучшению конструкции каркаса и особенностей материала стента.

Целью данной работы является оценка влияния механических параметров артерии, бляшки и стента на эффективность стентирования при помощи анализа параметров НДС и гемодинамики. Произведено численное сравнение двух моделей материалов слоев артерии и бляшки (упругих и гиперупругих) при имплантации стента с упругими характеристиками в обе модели. Помимо этого, сравнивалось и влияние одностороннего и двухстороннего сопряженных методов решения задачи взаимодействия «жидкость — твердое тело» на результаты.

Результаты показали, что в период систолы на поверхности стента, бляшки и в межкаркасном пространстве стента на бляшке возникают высокие значения гемодинамических параметров, которые свидетельствуют о возможном развитии нового атеросклеротического образования на поверхности стента — рестеноз стента. При анализе НДС стента были выявлены зоны повышенного напряженного состояния в области коронок и вблизи соединения звеньев стента. Данные области подвержены высокому риску разрушения.

## Гибридный метод для моделирования распространения упругих волн в слоистых волноводах с присоединенными элементами

**Ханазарян А. Д.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

В последние десятилетия доля композитных материалов в различных областях промышленности заметно выросла. Такого рода изделиям присущи зоны, в которых соединяется (стыкуется) несколько материалов. Эти зоны являются наиболее вероятным местом формирования отслоений и других дефектов. Для безопасной эксплуатации слоистых (составных) структур требуется постоянный контроль зон соединения на протяжении всего жизненного цикла конструкции и, при необходимости, возможность вмешательства, чтобы не допустить ее разрушения.

При разработке надежных методов обнаружения дефектов с помощью упругих волн возникает потребность в эффективных математических моделях и алгоритмах. Так, использование сеточных методов для моделирования протяженных слоистых структур с неоднородностями приводит к увеличению вычислительных затрат при дискретизации части, имеющей наибольшие линейные размеры, тогда как полуаналитические численные методы не позволяют напрямую описывать структуры с локальными неоднородностями произвольной формы. Для сложных структур, включающих области простых форм, комбинация различных по своей природе подходов, например, полуаналитических и прямых численных методов, позволяет значительно экономить вычислительные ресурсы.

В настоящей работе предложен гибридный подход на основе метода спектральных элементов (МСЭ) и полуаналитического метода конечных элементов (ПАМКЭ) для исследования динамического поведения структуры, состоящей из протяженного слоистого волновода конечной длины и прилегающей к нему области прямоугольной формы. В протяженном волноводе такой подход дает возможность с помощью ПАМКЭ представить решение в виде суперпозиции нормальных мод, а смежные области дискретизировать с помощью МСЭ. На общей для двух областей границе задаются условия непрерывности перемещений и напряжений. Для сопряжения решений вводится вспомогательная функция перемещений, которая раскладывается по тем же базисным функциям, что фигурируют в МСЭ и ПАМКЭ (рассматриваются интерполяционные полиномы Лагранжа на узлах Гаусса — Лежандра — Лобатто). Неизвестные коэффициенты разложения вспомогательной функции определяются методом Галеркина и методом коллокаций. Установлено, что оба проекционных метода обеспечивают одинаковую точность, если выбрать в качестве точек коллокации узлы Гаусса — Лежандра — Лобатто. Результаты моделирования сравниваются с расчетами в конечно-элементном пакете COMSOL Multyphysics и демонстрируется хорошее согласование результатов.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ № FZEN-2020-0017.

## Испытание зондов для атомно-силового микроскопа NanoEducator, испытание нового метода заточки вольфрамовых зондов

**Харчевников И. О.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Одним из наиболее совершенных методов получения данных о морфологии и локальных свойствах поверхности твердых тел с высоким пространственным разрешением является сканирующая зондовая микроскопия (СЗМ). Наиболее распространенные методы СЗМ включают сканирующую туннельную микроскопию (СТМ) и атомно-силовую микроскопию (АСМ). Принцип работы АСМ основан на действии атомных сил между атомами вещества. Такие силы действуют между любыми телами, находящимися на малых расстояниях друг от друга (поверхность образца и сканирующий зонд).

При сканировании зонд под действием атомных сил скользит по поверхности, огибая ее рельеф. Следовательно, система регистрации отслеживает изгибы кантилевера. Альтернативой кремниевому кантилеверу является пьезорезонансный датчик силового взаимодействия, представляющий собой, например, пьезокерамическую трубку с вольфрамовым заостренным зондом, закрепленным на ее конце.

Для получения качественных изображений поверхности, а также для получения атомарного разрешения, необходимо обеспечить высокое разрешение АСМ. Разрешение определяется поперечным размером области взаимодействия между зондом и образцом. Поэтому для достижения максимального разрешения кончик зонда создается с минимальным радиусом вплоть до моноатомного.

В прошлом исследовании на эту тему использовался вес 36, 16, 8, 6, 3 и 1 мг. Величина напряжения на столике для электрохимического травления составляла 3 В. В настоящем проекте были использованы следующие веса — 0.2, 0.15, 0.1 г, а величина напряжения составляла 1.5, 3, 4.5 В. На каждое напряжение приходится три зонда с одним весом.

В нашем исследовании была предпринята попытка создать новый метод заточки вольфрамовых зондов для атомно-силового микроскопа. Исследование основано на методе электрохимического травления вольфрамовых зондов. Мотивацией для разработки этого метода является потребность в доступной, быстрой и недорогой технологии, позволяющей значительно повысить эффективность работы лаборатории. Также проводится сравнение с существующими методами травления.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-49-08014, <https://rscf.ru/project/22-49-08014/>). Исследования проводились в НОЦ «Материалы» Донского государственного технического университета (<http://nano.donstu.ru>).



## Биомеханическое моделирование поясничного фасеточного сустава

Хорошев Д. В.<sup>1</sup>, Ильялов О. Р.<sup>1</sup>, Устюжанцев Н. Е.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь*

<sup>2</sup>*Пермский государственный медицинский университет им. акад. Е. А. Вагнера,  
Пермь*

Боль в пояснице оказывает существенное влияние на качество жизни и работоспособность населения планеты, эта проблема до сих пор тревожит более половины жителей мира.

В позвоночнике выделяют прямой и косвенный вид боли. К прямому относятся спазмы мышц, остеопороз и переломы позвонков, где причиной боли является позвоночник. Косвенная боль в позвоночнике возникает от заболеваний почек, желчного пузыря и других органов. Далее вместо слова «боль» будет использован термин «гиперрецепция», так как слово «боль» имеет широкое значение. Гиперрецепция — это повышенная возбудимость рецепторов и проводников. Врачебная практика показывает, что источником гиперрецепции может являться не только грыжа межпозвоночного диска, но и наличие подвывиха фасеточного сустава на уровне поясничного отдела.

Цель исследования — используя методы биомеханического моделирования, показать на математической модели, что при появлении дегенеративных изменений в позвоночно-двигательном сегменте и подвывихе фасеточных суставов источником гиперрецепции является чрезмерное воздействие на нерв Люшка. Анализ литературы по моделированию позвоночно-двигательного сегмента, который был выполнен в последней статье, показал, что для всех работ характерно упрощенное моделирование фасеточных суставов. В текущем исследовании представлено построение тестовой биомеханической модели фасеточного сустава, учитывающей наличие синовиальной жидкости.

Исследуется напряженно-деформированное состояние объемной модели фасеточного сустава в смешанной постановке. Геометрия модели фасеточного сустава в первом приближении и расчетная схема подробнее представлены в раннем исследовании. Модель включает в себя отростки позвонков L4 и L5 (упругие тела), хрящи на концах отростков позвонков (пороупругие тела), синовиальную жидкость (идеальную жидкость), капсулу фасеточного сустава (упругое тело). Твердые тела приняты изотропными. Значения физических характеристик тестовой модели представлены в раннем исследовании. На верхнюю часть отростка позвонка L4 на поверхности действует давление величиной 780 кПа, что соответствует нагрузке в 15 кг, а нижняя часть отростка позвонка L5 закреплена. Все твердые тела склеены между собой. Коэффициент трения между хрящами равен 0.01.

Поставленная задача решена при помощи Ansys Workbench. Идеальная жидкость задана благодаря расширению Hydrostatic Fluid. Получены распределения перемещений, напряжений и деформаций. Решение тестовой конечно-элементной модели фасеточного сустава поможет продолжить развитие модели поведения поясничного позвоночно-двигательного сегмента.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90055.

## Монотонная и колебательная неустойчивость в задаче изотахофореза в специальных условиях

**Цывенкова О. А., Жуков М. Ю.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Метод изотахофореза — разделение смеси на отдельные компоненты при помощи электрического поля. Данный подход является высокоточным методом идентификации компонент смеси и во многих случаях превосходит хроматографические методы разделения. Одним из факторов, препятствующих увеличению точности метода, является концентрационная и тепловая гравитационная конвекция. Для борьбы с тепловой конвекцией можно эффективно использовать охлаждение капилляров, в которых проводится процесс изотахофореза, однако способов предотвращения концентрационной конвекции практически не имеется. Дело в том, что по самой сути метода процесс разделения (и идентификации) приводит к возникновению резких границ между зонами отдельных компонент. Изменение концентрации в окрестности границ (большие градиенты концентраций) при неудачном выборе параметров, в частности, разности потенциалов, ориентации капилляров и т. п., может ввиду конвекции приводить к разрушению границ между зонами и перемешиванию смеси.

Для нахождения оптимальных параметров процесса построена математическая модель и на ее основе — асимптотическая модель, которая позволяет исследовать процесс в наиболее опасной для возникновения неустойчивости области — окрестности границ между зонами, где имеются большие градиенты концентраций. Система уравнений, описывающая процесс, в движущейся системе координат  $(x_1, x_2, z)$  для концентраций компонент  $u^1, u^2$ , скорости  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, w)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_0 \mathbf{v} + w_z &= 0, \quad \rho = \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2, \\ \mathbf{v}_t - V \mathbf{v}_z + \mathbf{v} \cdot \nabla_0 \mathbf{v} + w v_z &= -\nabla_0 p + \mu \Delta \mathbf{v}, \\ w_t - V w_z + \mathbf{v} \cdot \nabla_0 w + w w_z &= -p_z + \mu \Delta w - \rho, \\ u_t^i + \mathbf{v} \cdot \nabla_0 u^i + w u_z^i &= \varepsilon \mu^i \Delta u^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla_0 &= (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}), \quad \operatorname{div}_0 \mathbf{v} = \nabla_0 \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Здесь  $p$  — давление,  $\mu$  — кинематическая вязкость,  $\beta^i$  — коэффициенты концентрационного сжатия,  $\mu^i$  — подвижности компонент в электрическом поле,  $\mu$  — кинематическая вязкость,  $\varepsilon \mu^i$  — коэффициент диффузии,  $V$  — скорость движения границы между зонами.

Методами теории гидродинамической устойчивости численно построено решение спектральной задачи, возникающей при линеаризации исходной задачи в окрестности механического равновесия, определены нейтральные кривые колебательной и монотонной неустойчивости, что позволяет указать критические значения параметров, при которых возможно возникновение концентрационной гравитационной конвекции.

## Контактная задача для пороупругой полосы, лежащей на винклеровском основании

**Чебаков М. И., Колосова Е. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Грунтовое основание обычно представляется некоторой механической моделью. Одной из таких моделей является модель Винклера. Основное допущение этой модели составляет прямо пропорциональная зависимость между реакцией основания и вертикальным перемещением его поверхности. Модель Винклера может быть интерпретирована как непрерывный набор пружин, на которые опирается конструкция. В качестве другой модели грунтового основания могут рассматриваться различные упругие и пороупругие модели. Пороупругие материалы обладают уникальными физическими и механическими свойствами. Данный тип материалов нашел широкое применение в различных сферах деятельности человека благодаря оптимальному соотношению массы и прочности. Один из подходов моделирования пористых материалов был развит в работах Ковина — Нунзиато. Данная теория, называемая теорией микродилатации, была применена для исследования пористых материалов с пустыми порами.

Практический интерес представляет расчет взаимодействия конструкций с такого типа основаниями или их сочетаниями.

Рассматривается плоская контактная задача о взаимодействии жесткого штампа с пороупругой полосой, лежащей на винклеровском основании. Деформация полосы моделируется на основе уравнений теории пороупругих тел Ковина — Нунзиато. Предполагается, что основание штампа имеет плоскую или параболическую форму, в зоне контакта отсутствует трение, штамп перемещается поступательно.

С помощью интегрального преобразования Фурье поставленная задача сводится к интегральному уравнению относительно неизвестного контактного напряжения. Для решения интегрального уравнения используется метод коллокаций и асимптотический метод большого параметра, равного отношению толщины слоя к полуширине области контакта. Найдены значения контактных напряжений, величины области контакта в случае параболического штампа и относительная деформация поверхности вне штампа. Проведен сравнительный анализ исследуемых величин для некоторых значений параметров пороупругого слоя и коэффициента постели винклеровского основания. Численные результаты представлены в виде таблиц и графиков.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Государственное задание в области научной деятельности, научный проект № FENW-2023-0012.

## Оптимизация выходного электрического потенциала для функционально-градиентного пьезоактивного бимфора

**Чебаненко В. А.<sup>1,2</sup>, Соловьев А. Н.<sup>2,3</sup>, Напрасников В. В.<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>3</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

<sup>4</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Устройства сбора и накопления «зеленой» энергии широко используются в настоящее время в качестве автономных источников электрической энергии в различных сферах. В качестве такой энергии может выступать ветровая, солнечная энергия, энергия волн, рассеянная механическая энергия и т. п. Зачастую, рабочим элементом этих устройств является пьезоэлектрический генератор (ПЭГ). В случае использования энергии механических колебаний эффективные ПЭГ представляют собой слоистые пластины с пьезоэлектрическими слоями. Для их расчета и оптимизации могут быть построены прикладные теории, сводящие задачу, в случае установившихся колебаний, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Основой построения этих теорий является принятие гипотез о распределении механических и электрических полей. Использование нелинейного представления электрического потенциала может быть необходимо в задачах моделирования колебаний функционально-градиентных (ФГ) пластин и многослойных пьезоэлектрических преобразователей. В связи с этим авторами ранее была получена прикладная теория, описывающая изгибные колебания ФГ биморфной пластины, у которой материальные свойства распределены по степенному квадратичному закону. Она показала хорошую сходимость с результатами конечно-элементного расчета.

В данной работе на основе разработанной прикладной теории рассматривается возможность оптимизации выходного электрического потенциала для фиксированных геометрических параметров конструкции ФГ биморфа. С этой целью на первом этапе было изучено влияние изменения степени пористости внутри пластины при её фиксированном значении у поверхности пластины на значение потенциала, а также на первую резонансную частоту. Оказалось, что при увеличении степени пористости первая резонансная частота возрастает, а электрический потенциал падает. Также был рассмотрен обратный случай.

На втором этапе были получены зависимости для первой резонансной частоты и выходного потенциала от двух параметров. На основе этих зависимостей были построены поверхности, при сечении которых плоскостью, соответствующей определенным значениям частоты или потенциала, были получены кривые. С помощью этих кривых были построены диаграммы, позволяющие сделать оптимальный выбор параметров пористости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>), в Южном федеральном университете.

## Прикладная теория изгибных колебаний флексоэлектрической балки

Чебаненко В. А.<sup>1,3</sup>, Юдин А. В.<sup>2</sup>, Паринов И. А.<sup>3</sup><sup>1</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону<sup>2</sup>Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск<sup>3</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Флексоэлектрическим эффектом называют возникновение электрической поляризации в телах при их изгибе или любом другом виде неоднородной деформации. В отличие от пьезоэлектричества, которое возникает в материале с определённой симметрией, флексоэлектрический эффект проявляется во всех диэлектриках. Однако, величины флексоэлектрических потенциалов значительно ниже пьезоэлектрических, тем не менее данный эффект представляет исследовательский интерес за счет того, что он наблюдается не только в твердых телах, но и в полимерах, жидких кристаллах и биологических тканях. Флексоэлектрический эффект обычно моделируют путем добавления произведения тензора флексоконстант четвертого ранга на тензор градиента деформации в определяющее соотношение для вектора поляризации. Также вводится в рассмотрение несимметричный тензор напряжений высокого порядка, описывающий вклад флексоэффекта в механическое поле.

Балки или пластины, обладающие подобным эффектом, могут быть использованы как сенсоры или флексоэлектрические генераторы в средах, где присутствуют механические колебания. Для расчета характеристик подобных устройств, таких как перемещение, выходной электрический потенциал и резонансные частоты, необходимо построение численно-аналитических расчётных моделей, поскольку в существующих коммерческих конечно-элементных пакетах на данный момент отсутствует возможность учета флексоэлектрического эффекта.

В данной работе на основе вариационного принципа построена прикладная теория, описывающая изгиб пластины и учитывающая влияние флексоэлектрического эффекта. В основе теории лежат гипотезы Кирхгофа — Лява. Также было использовано нелинейное представление электрического потенциала, хорошо зарекомендовавшее себя ранее при построении прикладных теорий в различных задачах механики связанных полей. В рамках теории была рассмотрена задача об установившихся изгибных колебаниях кантилевера, состоящего из одного слоя диэлектрика, обладающего флексоэлектрическими свойствами. Большие поверхности униморфа были электродированы, а на концах были заданы граничные условия типа шарнирной опоры. На пластину воздействовала распределённая механическая нагрузка. Электрический потенциал равнялся нулю на нижнем электроде, а на верхнем был неизвестен. В рамках данной работы был проведен сравнительный анализ результатов, полученных на основе выведенной системы уравнений, с расчетными данными других авторов.

Авторы благодарят Соловьева А. Н. за внимание к работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-19-00423, <https://rscf.ru/project/21-19-00423/>), в Южном федеральном университете.

Решение задач гидродинамики в областях,  
«вытянутых» вдоль горизонтальных направлений

**Чистяков А. Е.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Для численной реализации пространственно-трехмерной математической модели гидродинамики мелководных водоемов, включающей уравнения движения (Навье — Стокса) и уравнение неразрывности, регуляризованное по Б. Н. Четверушкину, в случае переменной плотности, предложен метод решения сеточных уравнений. Согласно методу определения поправки к давлению, исходная модель гидродинамики была разделена на три подзадачи. Подзадача I строилась на основе уравнения диффузии—конвекции, при помощи которого вычислялись компоненты поля скорости водного потока на промежуточном временном слое. Подзадача II, базирующаяся на волновом уравнении, решалась с целью расчета распределения давления в узлах расчетной сетки. Подзадача III заключалась в определении скоростей водного потока на следующем временном слое по явным формулам.

При решении трехмерных задач диффузии — конвекции для областей, которые по своей протяженности вдоль одного из направлений существенно меньше, чем по остальным двум пространственным направлениям (мелководные водоемы), используются схемы последовательного разбиения на двумерную задачу по горизонтали и одномерную задачу по вертикали. Расчет двумерной задачи осуществляется по явной схеме, одномерной — на основе схемы с весами. Применение данной схемы позволяет отойти от основного недостатка явной схемы — жесткого ограничения на шаг по времени. Заданная погрешность достигается при временных шагах, в 10–30 раз превосходящих шаг явной схемы.

Предложен метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида. Данный метод интегрирован в разработанный ранее программный комплекс для моделирования трехмерных гидрофизических процессов в мелководных водоемах и носит название «AZOV3D». Разработанный программный модуль используется для решения сеточных уравнений, полученных в результате аппроксимации трехмерной задачи расчета давления на основе волнового уравнения. Предложенный метод решения сеточных уравнений с предобуславливателем трехдиагонального вида сходится за 10–15 итераций. Согласно специфике разработанного метода, он является эффективным при решении задач водной экологии в случае расчетной области с «вытянутой геометрией».

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-20050).

## Потеря устойчивости составной прямоугольной плиты с пористой основой и преднапряженными однородными покрытиями

**Шейдаков Д. Н., Михайлова И. Б.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

В современной автопромышленности и авиастроении достаточно часто используются различные высокопористые материалы, в частности, металлические и полимерные пены. Конструкции из этих материалов обладают рядом преимуществ: малый вес, высокая удельная прочность, возможность поглощать энергию и т. д. Как правило, они имеют составную структуру — пористая основа покрыта прочной и жесткой оболочкой. Покрытие необходимо для защиты от коррозии и воздействия высоких температур, а также оптимизации механических свойств при нагружении. При этом оно зачастую содержит внутренние напряжения, что может являться как побочным эффектом технологического процесса нанесения покрытия, так и требуемым функциональным свойством. Широкое применение обуславливает актуальность исследований такого рода составных конструкций на предмет прочности и устойчивости.

В данной работе проведен анализ бифуркации равновесия трехслойной нелинейно-упругой прямоугольной плиты при двухосном сжатии и растяжении. При этом предполагалось, что средний слой плиты (основа) выполнен из высокопористого материала, а верхний и нижний слои (покрытия) однородны, предварительно деформированы и содержат внутренние напряжения. Следует отметить, что поведение пористых материалов часто не может быть адекватно описано в рамках классической модели сплошной среды вследствие влияния микроструктуры. Одним из эффективных способов ее учета является использование континуума Коссера, т. е. среды с моментными напряжениями и вращательным взаимодействием частиц. В связи с этим при моделировании составной прямоугольной плиты в ходе настоящего исследования применялся оригинальный подход: для описания поведения высокопористой основы использовались определяющие уравнения нелинейного микрополярного тела, а поведение покрытий изучалось в рамках классической теории упругости. Кроме того, особенностью составных тел с внутренними напряжениями является отсутствие единой естественной отсчетной конфигурации. Поэтому при выводе линеаризованных уравнений равновесия для основы и покрытий плиты использовалась запись определяющих соотношений материала относительно разных отсчетных конфигураций. Путем численного решения этих уравнений найдены критические кривые и соответствующие им моды выпучивания, а также построены области устойчивости в плоскости параметров нагружения. При этом подробно проанализировано влияние внутренних напряжений в покрытиях, а также их толщины и упругих свойств на бифуркации равновесия составной прямоугольной плиты с высокопористой основой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00462, <https://rscf.ru/project/23-21-00462/>).

## Контактная мезомеханика пар трения из композиционных материалов

**Шилько С. В.**

*ГНУ Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого  
НАН Беларуси, Гомель*

Структурно-функциональный анализ материалов методами механики деформируемого твердого тела и трибологии позволяет выявить обусловленную единой физической природой тесную взаимосвязь процессов деформирования, разрушения, трения и изнашивания. Например, пластическое течение приповерхностных слоев контактирующих тел способствует приработке поверхности и стабилизации параметров трения, аномалия упругости в виде отрицательного коэффициента Пуассона в условиях стесненного деформирования порождает эффект самостопорения условно-неподвижных фрикционных соединений.

С другой стороны, контактное взаимодействие с трением на границах раздела «наполнитель — матрица» в структурно-неоднородном композите оказывает определяющее влияние на его интегральные фрикционно-механические характеристики, выступая в качестве эффективного средства управления таковыми. В докладе показана важность механико-математического моделирования вышеуказанных процессов, включая явление локализации внешних и внутренних границ. Так, в работе 1939 года И. В. Крагельский показал, что взаимодействие при трении локализуется в некотором объеме материала, который может рассматриваться как «третье тело». Новые результаты, полученные в области теории трения и изнашивания антифрикционных композитов, не только подтверждают данное наблюдение, но и позволяют проанализировать его на мезомеханическом уровне, открывая широкие возможности создания узлов трения с заданными триботехническими характеристиками. В этой связи заметим, что целесообразные приспособительные реакции на изменение внешних условий ярко проявляются в биоматериалах, например, костных и мышечных тканях, и биосопряжениях (суставах, зубах и т. д.). Органы опорно-двигательной, сердечно-сосудистой и зубочелюстной систем благодаря указанным адаптивным реакциям демонстрируют особые, исключительно ценные, фрикционно-механические свойства (безызносность, аномально низкое трение, оптимальную гемодинамику, самозалечивание дефектов), что делает их привлекательными аналогами перспективных технических устройств.

Таким образом, актуальна разработка принципов компьютерного дизайна антифрикционных материалов и пар трения с элементами авторегулирования и адаптивности к условиям функционирования, как в макроскопическом (на уровне трибосопряжения), так и мезоскопическом масштабе (на уровне структурных единиц материала). В докладе показаны примеры решения рассматриваемых задач с использованием микромеханических моделей различных неоднородных материалов (пористых, гранулированных, дисперсно-наполненных и направленно-армированных композитов), физических аналогий и разработанного трехуровневого мезомеханического метода.

Исследование финансировалось по плану НИР 2 «Разработка методов прочностного анализа и компьютерного дизайна структуры полимерных и эластомерных композитов для элементов конструкций и контактных сопряжений», задание 4.2.3 ГПНИ «Материаловедение, новые материалы и технологии».



## Механизм теплопередачи и анализ термонапряженного состояния металлоалмазных композитов с модифицированным межфазным слоем

Шилько С. В.<sup>1</sup>, Черноус Д. А.<sup>1</sup>, Столяров А. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ГНУ Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого  
НАН Беларуси, Гомель

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,  
Гомель

Трудности обеспечения надежности силовой электроники, микропроцессоров и средств мобильной радиосвязи обусловлены уменьшением размеров и повышением удельной мощности приборов, ростом их тепловыделения. Анализ литературы показал перспективы разработки высокотеплопроводных и прочных материалов в виде металлоалмазных композитов для эффективного охлаждения устройств. Определенные проблемы по достижению этих термомеханических показателей обусловлены снижением теплопроводности вследствие нежелательного формирования барьерных слоев карбида алюминия  $Al_4C_3$  на стадии изготовления и термоусталостью вследствие деградации микроструктуры композита при циклическом изменении температуры при включении и выключении приборов.

Ранее было сделано предположение о возможности снижения теплового сопротивления с упрочнением границы раздела наполнителя и металлической матрицы путем создания композитного градиентного межфазного слоя модифицированием наполнителя нанопокрытиями вольфрама, что было подтверждено экспериментально. В настоящее время структурная оптимизация неоднородных материалов затруднена из-за отсутствия прогнозирующих моделей теплопроводности и весьма малой толщины межфазного слоя (50–100 нм) в сравнении с характерным размером алмазных частиц (50–100 мкм). С этой целью в докладе обсуждаются возможности математического описания процесса распространения тепла на границе раздела разнородных компонентов, а также оценки термочечности металлоалмазных композитов в условиях циклического нагрева и охлаждения.

Показано, что конечно-элементная дискретизация позволяет воспроизвести процесс теплопередачи, термонапряженное состояние и кинетику разрушения при термоциклировании в масштабе представительного объема композита, содержащего группу алмазных частиц в виде сфер или правильных многогранников при наличии тонкого модифицирующего покрытия. Сопоставление результатов МКЭ с аналитическими зависимостями, полученными в рамках модели Такаянаги, гипотезы составного включения и эквивалентной матрицы, а также экспериментальными данными о коэффициенте теплопроводности, показало их удовлетворительную сходимость. Результаты моделирования в комплексе Ansys позволили оценить оптимальные параметры алюминиево-алмазного композита по критерию максимальной теплопроводности и прочности.

Исследование поддержано БРФФИ (проекты № Т22КИ-032 «Эволюция микроструктуры и стабильность термических свойств композитов алмаз/алюминий при термоциклировании» и № Т22КИТГ-003 «Высокопроизводительная технология модифицирования алюминиево-алмазных композиционных материалов для терморегулирования»).

## О восстановлении электроупругих свойств неоднородного стержня

Юров В. О.<sup>1,2</sup>, Ватульян А. О.<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ<sup>2</sup> Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В процессе производства и эксплуатации изделия из электроупругих материалов могут подвергаться процессу частичной располяризации (например, вследствие нагрева до температур, превышающих точку Кюри), что делает актуальной задачу о восстановлении пьезомодуля, как функции координат. Изучение деформирования даже самых простых стержневых структур с учетом неоднородности (переменность модуля упругости, плотности и пьезомодулей) требует применения численных подходов. Рассмотрены установившиеся колебания неоднородного в осевом направлении стержня при неоднородной продольной и поперечной поляризации. В случае продольной поляризации торцы стержня свободны от напряжений и электродированы, на электродах задается фиксированная разность потенциалов. В случае поперечной поляризации электроды нанесены на части границы, торцы также являются свободными от напряжений. В обеих задачах в рамках концепции комплексных модулей и модели стандартного вязкоупругого тела учтено затухание. Поставленные задачи сведены к неоднородным каноническим системам дифференциальных уравнений, которые решены при помощи метода пристрелки. Для вычисления тока использованы квадратурные формулы второго порядка точности.

При решении прямых задач проанализирована амплитудно-частотная характеристика тока и относительное смещение торцов в зависимости от законов изменения упругой податливости и пьезомодуля. Для этого рассмотрен набор законов неоднородности, в который входят возрастающие и убывающие функции с одинаковым среднеинтегральным значением (рассмотрены линейные, квадратичные и экспоненциальные зависимости). Вычислены частоты резонанса и антирезонанса для всех функций неоднородности из набора. Выявлены закономерности строения амплитудно-частотной характеристики в зависимости от сочетания типов монотонности упругой податливости и пьезомодуля. Основное внимание уделено второму резонансу, обладающему низкой добротностью.

Рассмотрена обратная задача по восстановлению закона изменения пьезомодуля по данным об амплитуде электрического тока в широком частотном диапазоне. С помощью производной по Фреше проанализирована чувствительность тока по отношению к изменению пьезомодуля. Выявлены частотные диапазоны, оптимальные для выполнения реконструкции. На основе операторного метода Ньютона реализован итерационный процесс по восстановлению пьезомодуля, где для нахождения поправок решены интегральные уравнения Фредгольма первого рода с гладкими ядрами, для чего был применен метод регуляризации А. Н. Тихонова. Проведена серия вычислительных экспериментов по последовательному восстановлению двух функций. С приемлемой погрешностью восстановлены возрастающие, убывающие и немонотонные законы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>), в Южном федеральном университете.

## Особенности исследования задачи для функционально-градиентной полосы с отслоением в рамках градиентной теории упругости

**Явруян О. В.**

*Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

Исследование прямых задач для неоднородных плоских волноводов с дефектами представляет собой актуальную задачу механики. Неоднородность среды может быть смоделирована функциями, характеризующими механические свойства среды. Неоднородная изотропная полоса характеризуется двумя модулями упругости Ламе, являющимися гладкими функциями, свойства которых изменяются по толщине. Задача для полосы с отслоением в рамках классической линейной теории упругости может быть исследована инструментариумом математического аппарата интегральных уравнений, при этом соответствующие ядра могут быть найдены в явном виде, в отличие от случая неоднородной полосы, когда ядра могут быть определены лишь численно.

Вместе с тем, особый интерес представляет исследование задач с дефектами с позиций градиентной теории упругости, например, на основе упрощенной модели Айфантиса с одним масштабным параметром. В случае задач с дефектами градиентные эффекты могут проявляться в зависимости от соотношения градиентного параметра и относительного размера дефекта. Подобные задачи были исследованы для изотропной и трансверсально-изотропной полосы. Результаты были получены на основе интегрального подхода и метода Ру — Айфантиса. Были построены интегральные уравнения относительно функции раскрытия и проведен анализ решения интегральных уравнений, а также проведена оценка напряженно-деформированного состояния в окрестности вершин отслоения. Метод Ру — Айфантиса позволил упростить исходную задачу четвертого порядка и построить градиентное решение поэтапно, разбив ее на подзадачи: первая задача сводится к решению классической задачи теории упругости, вторая задача представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка и использует классическое решение первой задачи. В отличие от классического решения, полученные двумя способами градиентные решения носят регулярный характер в окрестности концентраторов напряжений.

Разработанные численные схемы исследования задачи для однородной полосы были использованы при решении задачи для неоднородной полосы с отслоением. Получены упрощенные задачи для метода Ру — Айфантиса. Также, для решения поставленной задачи был использован интегральный подход на базе исследования вспомогательной задачи. Решение построено в виде суммы решения классической задачи и решений методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна, полученных на основе градиентного подхода для однородной полосы.

Проведены вычислительные эксперименты, позволяющие определить работоспособность предлагаемых численных схем для исследования плоских волноводов с отслоением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>), в Южном федеральном университете.

## Методы нелинейной динамики и нейронные сети для исследования временных рядов на основе сигналов ЭЭГ

**Яковлева Т. В.**

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

С помощью временных рядов описываются различные явления, как в живой природе, так и в социальных, исторических и механических процессах. Автор статьи является специалистом по нелинейной динамике физических и биомедицинских процессов и обобщает их, расширяя методы нелинейной динамики на анализ электрической активности головного мозга пациентов с алкогольной зависимостью.

В работе разработана комплексная методология анализа сигналов ЭЭГ. Для этих целей использованы алгоритмы машинного обучения, модели глубокого обучения с использованием Google Colab и библиотек Python, а также методы нелинейной динамики.

Важной проблемой является выделение характерных особенностей работы головного мозга, которые сопутствуют заболеванию. Записи ЭЭГ производились в НИИ психического здоровья Томского НИМЦ РАН по 16 каналам схемы расположения «10–20». В рассматриваемом наборе данных представлено 30 записей из контрольной группы и 66 записей из группы пациентов с алкогольной зависимостью.

В работе разработаны нейронные сети для изучения ЭЭГ-сигналов пациентов с алкогольной зависимостью с использованием сложных сверток оконного преобразования Фурье и вейвлет-преобразования с целью выявления характерных паттернов патологической активности мозга. Дополнительно поиск характерных паттернов на фрагментах ЭЭГ проводится на базе вычисления нескольких типов энтропии. Предлагаемая методология включает в себя исследование степени хаотизации сигналов с помощью вычисления спектра показателей Ляпунова. Применение сразу нескольких методов для вычисления каждой характеристики позволяет обеспечить достоверность результатов. Полученные характеристики передаются на вход искусственной нейронной сети (ANN) с применением генетического алгоритма и сверточной нейронной сети (CNN) с применением метода опорных векторов (SVM) для классификации больных с алкогольной зависимостью и контрольной группы. В этом исследовании мы применяем кодирование сигнала в виде 16-канального изображения, которое подается на обучение в модель ResNet20 и GoogLeNet. Машинное обучение проводилось в общей сложности за 20 эпох.

Проведенные исследования показали, что использование вейвлет-преобразования по сравнению с преобразованием Фурье для диагностики пациентов с алкогольной зависимостью дает более высокую точность. На основе проведенных исследований выявлено, что модель GoogLeNet более эффективна по сравнению с моделью ResNet20.

Созданная методология и полученные на ее основе результаты хорошо согласуются с медицинским заключением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00160).

## Математическое моделирование нелинейной динамики пористых цилиндрических нано/микро/макромасштабных панелей

**Яковлева Т. В., Калуцкий Л. А.**

*Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина,  
Саратов*

В работе построена математическая модель цилиндрической нано/микро/макромасштабной панели с учетом функционально-градиентного пористого материала. В основу математической модели положены кинематические гипотезы Кирхгофа — Лява. Нелинейные зависимости между деформациями и перемещениями учтены в форме Т. фон Кармана. Наномасштабные эффекты учтены по модифицированной моментной теории упругости. Материал цилиндрической панели является неоднородным, при этом изучены три типа пористости: равномерная (U-PFGM), уменьшенная пористость от верхней и нижней поверхностей к центру (X-PFGM) и повышенная пористость от верхней и нижней поверхностей к центру (O-PFGM). Уравнения движения, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. К цилиндрической панели приложена внешняя поперечная нагрузка произвольного типа (знакопеременная или статическая).

Цилиндрическая панель рассматривается как система с «почти» бесконечным числом степеней свободы. Важным является вопрос о достоверности получаемых результатов и об исключении накопления численной погрешности. Полученные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных методом Бубнова — Галеркина в высших приближениях сводятся к задаче Коши, которая решается методами типа Рунге — Кутты и Ньюмарка. Исследована сходимость решения вышеуказанных алгоритмов, которая достигается при совпадении не только основных функций, но и их производных до второго порядка включительно по пространственным координатам на всём рассматриваемом временном интервале. Это позволяет говорить о достоверности получаемых решений.

В работе проведен анализ пространственно-временного хаоса цилиндрической нано/микро/макромасштабной панели в зависимости от типа пористости и от величины наномасштабного параметра. Для этого применяются методы нелинейной динамики, анализируются 2D и 3D вейвлет-спектры на базе различных материнских вейвлетов, фазовые портреты, спектры мощности Фурье, вычисляются значения спектра показателей Ляпунова согласно определению хаоса, предложенному Гуликом. Старший показатель Ляпунова вычислен методами Канца, Вольфа, Розенштейна, Сано — Савады. Сравнение результатов, получаемых различными методами на каждом этапе моделирования, позволяет сделать вывод об истинности получаемых хаотических решений. Тип пористости существенно влияет на характер изгибания цилиндрической панели. Функционально-градиентная теория позволяет серьезно повысить несущую способность панели. Результаты исследования показали, что цилиндрическая панель из X-PFGM материала обладает наилучшей несущей способностью по сравнению с остальными типами пористого материала.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-10083).

Пульсирующие течения жидкости в криволинейной трубе.  
Модель течения крови в венах и артериях

**Ялыч Е. С., Зимин Б. А.**

*Балтийский государственный университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова,  
Санкт-Петербург*

Течение жидкостей сквозь криволинейные узкие упругие сосуды обусловлено достаточно сложной системой уравнений в частных производных, изучение которых представляет технический интерес.

Томсон (1877) первый экспериментально рассматривал течение жидкости в криволинейных каналах. Далее, течение в криволинейных каналах изучали Гриндли и Гибсон (1908), Уайт (1929) и Тейлор (1929). Теоретическое рассмотрение Сиггера и Уотерса (2008) позволило получить решения при малых значениях Уомерсли.

Максимум скорости сдвигается по направлению к внешним границам криволинейной трубки благодаря возникающему обратному течению. В этом случае возникает обусловленная кривизной трубки центробежная сила, которая должна уравниваться дополнительным градиентом давления, направленным к центру кривизны.

В работе рассматривается пульсирующее течение ньютоновской жидкости в криволинейной трубке. Приводятся описывающие трёхмерное течение уравнения, которые состоят из уравнений непрерывности и уравнений для закона сохранения импульса. Представляющие такую систему уравнения являются связанными и нелинейными. Обезразмеривание системы проводится с помощью параметров Рейнольдса ( $Re$ ), Уомерсли ( $Wo$ ) и геометрического параметра кривизны.

Приближённые решения строятся в виде рядов по малому параметру — кривизне трубки. Решения рассмотрены для больших и малых параметров Уомерсли и Рейнольдса.

Показано, что увеличение числа Рейнольдса эквивалентно увеличению кривизны трубки. Если кривизна трубки увеличивается, то начинает появляться вторичное течение, которое вызывает вихри и поворот направления скорости на противоположный. Малые числа Уомерсли слабо влияют на профиль скорости, так как соответствуют малым пульсациям давления. Высокие числа Уомерсли ( $> 10$ ) увеличивают воздействие на осевую скорость течения. В этом случае осевая скорость течения в центре трубки превышает скорость вблизи границы трубки.

Необходимо отметить, что, как известно (Назаров, 1990), даже большие скорости течения жидкости в очень тонких трубках, к которым следует отнести кровеносные сосуды, порождают малые числа Рейнольдса, что позволяет отбросить в уравнениях Навье — Стокса конвективные члены и перейти к уравнениям Стокса.

## Содержание

Алмасри А., Цибулин В. Г. Мультистабильность и динамические сценарии в системе двух хищников и жертвы . . . . .	4
Антонова М. Н., Петров Ю. В. Структурно-временные особенности необратимого деформирования материалов . . . . .	5
Атаян А. М. Теоретические оценки производительности вычислительной системы для решения двумерных и трехмерных задач диффузии — конвекции . . . . .	6
Атаян А. М., Долгов В. В. Применение векторизации при распараллеливании алгоритмов для решения задач гидродинамики . . . . .	7
Бакулин В. Н. Модель послойного исследования напряжённо-деформированного состояния трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами . . . . .	8
Бардакова Р. А. Решение контактной задачи о вдавливании сферического индентора в двухслойный образец методом конечных элементов в Ansys . . . . .	9
Барейко И. А., Еремин А. А. Реализация алгоритма вычисления Фурье-символа матрицы Грина упругого слоистого волновода с использованием архитектуры Nvidia CUDA . . . . .	10
Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б. Интравитреальные инъекции и оценка модуля упругости склеры . . . . .	11
Белова Ю. В. Оценка влияния климатических изменений на экологическое состояние прибрежных систем . . . . .	12
Белова Ю. В., Кузнецова И. Ю. Усовершенствованные математические модели распространения загрязняющих веществ . . . . .	13
Блинова Е. Е., Евланова А. Г. Особенности использования ИОС вуза в преподавании естественнонаучных дисциплин . . . . .	14
Богачев И. В. Идентификация двумерных законов распределения предварительных напряжений в сплошных и имеющих отверстия и включения неоднородных пластинах . . . . .	15
Богачев И. В., Недин Р. Д. Исследование деформирования решетчатой пластинки склеры глаза при наличии предварительных напряжений, вызванных внутриглазным давлением . . . . .	16
Бордюгова Т. Н., Игнатова А. В. Особенности изучения раздела «линейная алгебра» в условиях цифровой трансформации в образовании . . . . .	17
Варелджан М. В., Еремин А. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Применение поэтапной вычислительной схемы для моделирования волновой динамики системы «пьезоактуатор — упругий волновод — пьезосенсор» . . . . .	18

Варченко А. А., Юров В. О. О способах восстановления реологических свойств функционально-градиентных балок . . . . .	19
Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Моделирование деформирования термобарьерных покрытий . . . . .	20
Ватульян А. О. О некоторых аспектах исследования обратных коэффициентных задач . . . . .	21
Вела Ф. А., Никитина А. В. Математическое моделирование влияния жизнедеятельности микроорганизмов на деструкционные процессы мелководного водоема . . . . .	22
Волков С. С., Литвиненко А. Н., Алексеева А. Д. Определение смещений поверхности полупространства с покрытием при вдавливании индентора . . . . .	23
Волокитин Г. И. Влияние нелинейности на величину критической силы при сжатии длинного кругового цилиндра . . . . .	24
Гайбарян С. А., Зубов Л. М. Большие деформации растяжения — сжатия и кручения цилиндрической трубы с учетом прямолинейных винтовых дислокаций . . . . .	25
Германчук М. С., Егорова А. А., Епихин А. Н. Конечно-элементное моделирование конструкции наконечника лэнсотомы . . . . .	26
Гидаспов В. Ю., Северина Н. С., Кули-Заде Ф. Т. Математическое моделирование многофазных реагирующих течений термодинамическим методом . . . . .	27
Глушко Н. И., Алексеева А. Д. Влияние уровня крепления гаптики на разрушение целостности связи между роговицей и кератопротезом . . . . .	28
Говорухин В. Н. Алгоритмы анализа структуры течения на основе спектрально-бессеточного метода расчёта вихревой динамики . . . . .	29
Голуб М. В., Фоменко С. И., Дорошенко О. В., Канищев К. К., Ханазарян А. Д., Оконешникова Е. А., Мороз И. А. Моделирование, изготовление и экспериментальная верификация волновых свойств слоистых акустических метаматериалов с тонкими разрезами . . . . .	30
Городецкий А. Е., Тарасова И. Л. Компьютерное моделирование принятия решения роботом при учете эмоций человека, с которым он взаимодействует . . . . .	31
Гукасян Л. С. О некоторых подходах к реконструкции двумерных законов неоднородности упругого тела в плоской постановке . . . . .	32
Демяненко Я. М., Чердынцева М. И. Схема приема экзамена по компьютерным дисциплинам в новых условиях . . . . .	33
Долгих Д. А., Ташкинов М. А. Численный анализ процесса перераспределения напряжений в аддитивно изготовленных армированных полимерных конструкциях для биомедицинских приложений . . . . .	34



Донник А. М., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Биомеханическое моделирование грудного и грудопоясничного отделов позвоночника . . .	35
Дударев В. В., Мнухин Р. М. Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругой изотропной пластины . . . . .	36
Егорова С. А., Карякин М. И. Об определении параметров модели Мурнагана из опытов на одноосное растяжение и кручение . . . . .	37
Еленская Н. В., Ташкинов М. А., Виндокуров И. В., Пирогова Ю. В. Разработка 3D-печатных функционально-градиентных полимерных пористых структур для приложений тканевой инженерии . . . . .	38
Ермоленко О. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Резонансный метод контроля изменения свойств костной ткани, связанного с развитием остеопороза . . . . .	39
Жигалов М. В., Кречин А. Н., Мицкевич С. А. Статика гибких пористых функционально-градиентных нанобалок Тимошенко . . . . .	40
Захаров И. Н., Солодкова Е. Г., Лэ В., Баринов В. В. Компьютерное моделирование механического поведения роговицы с кератоконусом в ходе диагностики и лечения . . . . .	41
Зверев Н. А., Земсков А. В. Нестационарная задача механодиффузии для ортотропного полого цилиндра с учетом релаксации диффузионных процессов . . . . .	42
Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Пространственно-временная динамика системы хищник — жертва с идеальным свободным распределением на двумерном ареале . . . . .	43
Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Нелокальная вязкоупругая модель термомеханодиффузионных колебаний балки Бернулли — Эйлера с учетом конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений . . . . .	44
Ильичев В. Г. Может ли оптимальный промысел «убить» хаос в динамике численности популяций . . . . .	45
Казаков Е. А. Валидация численного моделирования пропеллерной установки посредством натурального эксперимента в аэродинамической трубе . . . . .	46
Калуцкий Л. А. Анализ гибких пористых функционально-градиентных наноластин методом вариационных итераций . . . . .	47
Кароткян Р. В. Моделирование индентирования роговицы . . . . .	48
Карякин М. И., Зубов Л. М. Конечные деформации микрополярных оболочек с непрерывно распределенными дефектами . . . . .	49
Кислухин В. В. Альвеолы — многогранники: соответствие вентиляции и перфузии . . . . .	50

Колегов К. С. Устранение пилообразных осцилляций при использовании разностной схемы для моделирования массопереноса в высыхающей на подложке капле в приближении тонкого слоя . . . . .	51
Колесников А. М., Анесян В. М. Прогиб круговой упругой мембраны под действием сферического штампа . . . . .	52
Колесников А. М., Берник В. С. Механические свойства полимеризованной фотополимерной смолы Anycubic Basic . . . . .	53
Корников В. В., Качанов А. Б. Изменение некоторых параметров роговицы после проведения операций ReLEx SMILE . . . . .	54
Кочергин М. В. Экспериментальное исследование течения жидкости через фантом аортального клапана . . . . .	55
Краснов Д. В., Епихин А. Н., Напрасников В. В. Конечно-элементное моделирование интраокулярных линз с возможностью аккомодации	56
Кренин Л. И. Развитие информационной системы «Градиентные покрытия» . . . . .	57
Крылова Е. Ю. Моделирование поведения графенового нанорезонатора .	58
Кузнецова И. Ю., Чистяков А. Е. Моделирование транспорта взвеси в русловых потоках на основе модифицированной схемы «кабаре» .	59
Курдоглыан А. В., Куракин Л. Г. Исследование бифуркаций в окрестности косимметричного равновесия динамической системы с обратимой косимметрией . . . . .	60
Кучумов А. Г., Камалтдинов М. Р., Лукин П. С. Численные и аналитические модели течения химуса в кишечнике . . . . .	61
Лапицкая В. А., Николаев А. Л., Харчевников И. О. Зависимость характеристик от стехиометрического состава покрытий AlN . . . . .	62
Леднов А. С. Конечно-элементный расчёт внедрения штампа в пороупругую водонасыщенную среду . . . . .	63
Маннаа А. С. Разработка метода на основе сверточной нейронной сети для автоматической оценки тяжести остеоартрита коленного сустава . .	64
Матросов А. А., Нижник Д. А., Пустовалова О. Г. Математическое и компьютерное моделирование фазового перехода в процессе криоконсервации биологического материала . . . . .	65
Мелехов А. П., Островская И. В. Об устойчивости стационарного вращения правильного многоугольника из вихревых зарядов вокруг круговой области . . . . .	66
Мельничук Н. Ю., Моисеенко И. А. Шестифакторная модель радиальной неоднородности для случая изгибных нормальных упругих волн в протяженных функционально-градиентных трансверсально-изотропных цилиндрах . . . . .	67

Мнухин Р. М., Дударев В. В. Об идентификации двумерного закона изменения плотности в цилиндре по данным о поле перемещения . . . . .	68
Муратова Г. В., Бавин В. В., Литвиненко М. М. Математические модели активности мозга . . . . .	69
Надолин К. А. Англоязычная магистерская программа мехмата ЮФУ «Computational Modeling in Technology and Finance» . . . . .	70
Надолин К. А. Формула скорости естественного водотока для инженерных приложений . . . . .	71
Наседкин А. В. Об определении эффективных температурных коэффициентов связанности наноструктурированных термоэлектроупругих композитов по методам эффективных модулей и конечных элементов . . . . .	72
Наседкин А. В., Волков А. И., Корниевский А. С. Конечно-элементный анализ пьезокерамических метаматериалов с ячейкой периодичности Гибсона — Эшби при упрощенном способе учета неоднородности поля поляризации . . . . .	73
Наседкина А. А., Нассар М. Э. Анализ тарелкообразных излучателей из пористой пьезокерамики в режимах приема и излучения . . . . .	74
Нгуен Б. Х. Математическая модель трех конкурирующих популяций с мультистабильностью стационарных решений и периодических режимов . . . . .	75
Недин Р. Д. О моделировании и идентификации полей предварительных напряжений в упругих телах . . . . .	76
Неклюдова Г. А., Евтух Е. С., Евтух Г. Е. Анализ интенсивности пластических деформаций в области контакта колеса и рельса . . . . .	77
Неплюева А. А., Селянинов А. А., Еловиков А. М. Моделирование движения жидкости во время ларингофарингеального рефлюкса . . . . .	78
Нестеров С. А. Идентификация неоднородных свойств термоэлектроупругого слоя . . . . .	79
Никитина А. В. Математическое моделирование хеморецепции планктона на вычислительной системе с распределенной памятью . . . . .	80
Николаев А. Л., Садырин Е. В., Лапицкая В. А. Экспериментальное определение ширины области контакта сферического индентора с поверхностью однородного материала . . . . .	81
Оконешникова Е. А., Кожевников В. В. Распространение упругих волн в акустическом метаматериале с дважды периодическими массивами отслоений . . . . .	82
Островская И. В., Куракин Л. Г. Линейная устойчивость системы подвижного цилиндра и двух/трех параллельных вихревых нитей . . . . .	83

Панфилов И. А., Лесняк О. Н. Численное моделирование распространения вирусных частиц в салоне автомобиля . . . . .	84
Паринова Л. И. Об установившихся колебаниях ортотропных топографических волноводов . . . . .	85
Пешин С. Е., Каракулова Ю. В. Методика определения механических напряжений и электрической проводимости в запястном канале . .	86
Пиль Н. Е., Кучумов А. Г., Кадыралиев Б. К. Влияние турбулентности на гемодинамику аортального клапана . . . . .	87
Пирогова Ю. В., Виндокуров И. В., Еленская Н. В., Тарасова А. С., Шалимов А. С. Сравнительный анализ механического поведения пористых решетчатых структур костных имплантатов на основе скаффолдов . . . . .	88
Полякова Н. М., Цветкова В. И. Численная верификация асимптотической модели течения между ребристыми плоскостями жидкости с переменной вязкостью . . . . .	89
Полякова Т. В., Гаврюшин С. С., Щурко К. И. Виртуальная модель покрывного протеза «сэндвич»: применение пакета Blender . . . . .	90
Поркшеян М. В., Литвинов В. Н. Экспериментальное определение параметров параллельно-конвейерного вычислительного процесса при решении сеточных уравнений . . . . .	91
Поркшеян М. В., Сидорякина В. В. Программная реализация восстановления рельефа мелководного водоёма на основе схем повышенного порядка точности на вычислительной системе с распределенной памятью . . . . .	92
Пустовалова О. Г., Егорова А. А. Математическое и компьютерное моделирование процесса высыхания упругого тела с учетом теплообмена	93
Ракишева И. О., Голуб М. В., Дорошенко О. В. Использование методов машинного обучения для прогнозирования гемодинамики в аортах детей с врожденными пороками сердца . . . . .	94
Рахимбаева Е. О., Долгов В. В. Математическая модель процесса осаждения многокомпонентной взвеси на дно водоёма . . . . .	95
Рахимбаева Е. О., Развеева И. Ф. Решение задачи транспорта тепла и солей на основе гранично-адаптивных сеток с использованием суперкомпьютерных технологий . . . . .	96
Ревина С. В. Диффузионная неустойчивость в однопараметрической системе Гирера—Мейнхардта . . . . .	97
Рошаль Д. С., Федоренко К. К., Серегина К. Ю., Коневцова О. В., Рошаль С. Б. Деформации и нарушения локальной симметрии в вирусных оболочках . . . . .	98

Садырин Е. В., Ёгина Д. В., Евсюков А. П., Забияка И. Ю., Свэйи М. В. Механические свойства стоматологических материалов и окружающих их тканей при лечении кариеса в стадии белого пятна . . . . .	99
Сверкунова Д. А., Шпак А. Н. Предсказание поведения системы мониторинга для пластины с прямоугольной выемкой с помощью мета-модели . . . . .	100
Семенов Б. Н., Земцова Е. Г., Смирнов В. М., Смирнов И. В. Механические свойства алюмоматричного композита, армированного карбидными наноструктурами . . . . .	101
Сиухина С. А., Шпак А. Н. Полуаналитический гибридный метод для описания взаимодействия пьезоэлектрического преобразователя с загнутым электродом . . . . .	102
Скалиух А. С., Браулио Д. Акустический волновод с неоднородно поляризованными источником и приемником колебаний . . . . .	103
Соловьев А. Н., Оганесян П. А., Фоменко Е. И. Использование пористой пьезокерамики для многослойного сдвигового пьезоэлемента . . . . .	104
Сторожев В. И., Глухов А. А., Пачева М. Н. Локализованные волны в полубесконечных ортотропных функционально-градиентных телах с приграничными зонами неоднородности, описываемой двойными экспоненциальными функциями . . . . .	105
Сторожев С. В., Номбре С. Б., Полянский Д. Д. Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в моделях термоупругого деформирования . . . . .	106
Судьенков Ю. В. Учет работ изменения объема и деформаций сдвига в анализе энергетического баланса при испытании материалов на растяжение . . . . .	107
Татаркин А. А., Ермоленко О. А. Моделирование отраженного и прошедшего поля в двуслойном изотропном полупространстве . . . . .	108
Углич П. С. О решении системы интегральных уравнений с гладким ядром	109
Фоменко С. И., Джана Р., Ромашин А. К. Исследование волн в пористоупругом полупространстве с неоднородной по глубине флюидонасыщенностью . . . . .	110
Хайретдинова Д. Д., Селютина Н. С. Влияние формы армирования на динамическую прочность фибробетонов . . . . .	111
Хайрулин А. Р., Кучумов А. Г. Оценка влияния механических параметров системы «артерия — бляшка — стент» на прогнозирование эффективности стентирования с учетом взаимодействия «жидкость — твердое тело» . . . . .	112
Ханазарян А. Д. Гибридный метод для моделирования распространения упругих волн в слоистых волноводах с присоединенными элементами	113

Харчевников И. О. Испытание зондов для атомно-силового микроскопа NanoEducator, испытание нового метода заточки вольфрамовых зондов . . . . .	114
Хорошев Д. В., Ильялов О. Р., Устюжанцев Н. Е. Биомеханическое моделирование поясничного фасеточного сустава . . . . .	115
Цывенкова О. А., Жуков М. Ю. Монотонная и колебательная неустойчивость в задаче изотахофореза в специальных условиях . . . . .	116
Чебаков М. И., Колосова Е. М. Контактная задача для пороупругой полосы, лежащей на винклеровском основании . . . . .	117
Чебаненко В. А., Соловьев А. Н., Напрасников В. В. Оптимизация выходного электрического потенциала для функционально-градиентного пьезоактивного бимфора . . . . .	118
Чебаненко В. А., Юдин А. В., Паринов И. А. Прикладная теория изгибных колебаний флексоэлектрической балки . . . . .	119
Чистяков А. Е. Решение задач гидродинамики в областях, «вытянутых» вдоль горизонтальных направлений . . . . .	120
Шейдаков Д. Н., Михайлова И. Б. Потеря устойчивости составной прямоугольной плиты с пористой основой и преднапряженными однородными покрытиями . . . . .	121
Шилько С. В. Контактная мезомеханика пар трения из композиционных материалов . . . . .	122
Шилько С. В., Черноус Д. А., Столяров А. И. Механизм теплопередачи и анализ термонапряженного состояния металлоалмазных композитов с модифицированным межфазным слоем . . . . .	123
Юров В. О., Ватульян А. О. О восстановлении электроупругих свойств неоднородного стержня . . . . .	124
Явруян О. В. Особенности исследования задачи для функционально-градиентной полосы с отслоением в рамках градиентной теории упругости . . . . .	125
Яковлева Т. В. Методы нелинейной динамики и нейронные сети для исследования временных рядов на основе сигналов ЭЭГ . . . . .	126
Яковлева Т. В., Калущкий Л. А. Математическое моделирование нелинейной динамики пористых цилиндрических нано/микро/макро-масштабных панелей . . . . .	127
Ялыч Е. С., Зимин Б. А. Пульсирующие течения жидкости в криволинейной трубе. Модель течения крови в венах и артериях . . . . .	128