

УДК 539.172.17

## СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ ОПИСАНИИ СТОЛКНОВЕНИЙ И КОЛЕБАНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР

© 2023 г. А. Т. Дьяченко<sup>1, 2, \*</sup>, И. А. Митропольский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I”, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение “Петербургский институт ядерной физики имени Б.П. Константинова”, Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Гатчина, Россия

\*E-mail: dyachenko\_a@mail.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.

После доработки 24.03.2023 г.

Принята к публикации 28.04.2023 г.

С использованием гидродинамического подхода найдено аналитическое решение уравнений гидродинамики в приближении солитонов для столкновения слоев в одномерном и двумерном случаях, которое ранее не рассматривалось. Изучены стадия сжатия, стадия расширения и стадия разлета в рамках единой формулы для слоев с энергиями порядка 10 МэВ на нуклон. Обобщение на двумерный случай приводит к представлению об образовании на стадии расширения разреженной области-пузыря, а сам подход представляет самостоятельный интерес и может быть использован и в других областях физики при расчетах нелинейной динамики колебаний сложных систем.

DOI: 10.31857/S0367676523702083, EDN: ZCIDKU

### ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамику процессов взаимодействия сложных систем рассмотрим здесь на примере атомного ядра, состоящего из нуклонов. В этом случае его свойства могут быть описаны моделью жидкой капли, предложенной Бором и Уиллером для описания процесса деления [1]. В работе [2] Штокер и Грайнер применили гидродинамику к столкновениям тяжелых ионов.

Для исследования столкновений тяжелых ионов и разного рода ударов важен выбор уравнения состояния (EOS – equation of state). В гидродинамическом подходе в качестве уравнения состояния можно выбрать локально-равновесное уравнение состояния, отвечающее наступлению локального термодинамического равновесия. [2]. В наших работах [3–10] предложено неравновесное уравнение состояния

Решение этих уравнений гидродинамики в одномерном случае найдено аналитически с использованием односолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза [11, 12] как для слабой нелинейности в предыдущей работе [13], так и в случае нелинейных возмущений большой амплитуды для ударных волн. В рамках единой формулы описаны стадии сжатия, расширения и разлета вещества. Это представляет самостоятельный ин-

терес, поскольку солитоны играют большую роль в физике элементарных частиц, ядерной физике и физике вообще. Нам было важно убедиться, что дисперсионные члены, появляющиеся в уравнениях гидродинамики и в уравнении Кортевега–де Фриза не нарушают представления об образовании горячего пятна hot spot. Обобщение этого рассмотрения на двумерный случай приводит к близкой динамике колебаний сложной системы, а также к возникновению области разрежения – пузыря в центре при расширении системы. И это может быть распространено на широкую область технических приложений.

Образование и существование пузырчатых ядер относится к ядерной экзотике. Поиск и исследование пузырчатых ядер имеет долгую историю. Этим занимались, например, Сименс и Бете [14] и Вонг [15]. В работе [16] в капельной модели с оболочечными поправками было обоснована возможность образования устойчивого пузыря только для сверхтяжелых ядер с зарядовым числом  $Z > 120$ . Но вот в работе [17] было предсказано с помощью метода Хартри–Фока–Боголюбова и подтверждено экспериментально существование разрежения в центре для плотности протонов дважды магического ядра  $^{34}\text{Si}$ . В работе [18] с помощью релятивистского метода Хартри–Фока–Боголюбова показано существование пузырька в яд-

ре  $^{48}\text{Si}$  как для плотностей нейтронов, так и протонов в центре ядра. Это статические решения для пузырей. Возникающий динамический пузырь в области разрежения в наших расчетах возникает всегда на стадии расширения гидродинамической системы.

### УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Мы используем кинетическое уравнение (см. [4–8]) для нахождения нуклонной функции распределения  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  ( $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$  – пространственная координата,  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$  – импульс,  $t$  – время). Это может быть распространено и на произвольные динамические системы. Решение кинетического уравнения для функции распределения  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  ищется в виде

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = f_1 q + f_0(1 - q), \quad (1)$$

где  $f_0(\vec{r}, \vec{p}, t)$  – локально равновесная функция распределения,  $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$  – неравновесная функция распределения.

В неравновесном случае при  $q = 1$  получаются уравнения длиннопребойной гидродинамики [3], которые в одномерном случае имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(m\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(m\rho v^2 + P)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(e + m\rho v^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial(v(e + m\rho v^2/2 + P))}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Обычно решение этой системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных находится численно на компьютере. В настоящей работе развит подход к приближенному аналитическому решению этих уравнений, как в случае слабой нелинейности, путем сведения их к уравнениям Кортевега–де Фриза, так и в случае возмущений большой амплитуды, используя солитоноподобные решения. Проведено обобщение этого подхода на двумерный случай в случае плотности  $\rho(x, t)$ , зависящей только от координаты  $x$  и времени  $t$ . Такое рассмотрение ранее не рассматривалось и может быть распространено на произвольные сложные системы, а не только атомные ядра.

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ СОЛИТОНОВ

Уравнения гидродинамики при релаксационном факторе  $q = 1$  (неравновесный случай) в одномерном случае сводятся к системе уравнений (2)–

(4) для нахождения нуклонной плотности  $\rho(x, t)$ , скорости  $v(x, t)$ , плотности тепловой энергии  $I(x, t)$ .

Из уравнений (2) и (4) следует, что тепловой член  $I = I_1 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3$ , где  $I_1$  – не зависящий от  $\rho$  коэффициент. Совместное решение уравнений (2) и (3) ищем в виде  $v = v(\rho)$  и получаем два уравнения Кортевега–де Фриза [13].

То есть уравнения гидродинамики могут быть сведены к двум уравнениям Кортевега–де Фриза. Это позволяет перейти к представлению столкновения сложных систем (ядер) как столкновению солитонов, если простую волну уравнения Кортевега–де Фриза проинтегрировать по  $x_1$ . То есть найти

$$Z = \int_0^L \zeta \frac{dx_1}{L}, \quad (5)$$

где  $L$  – толщина слоя,  $Z$  является простой волной Кортевега–де Фриза, испущенной этим слоем  $\zeta(x - x_1, t)$  – односолитонное решение уравнения Кортевега–де Фриза. Это относится к каждому ядерному слою – источнику простых волн. Учитывая многократные отражения волн Кортевега–де Фриза от границ системы, можно рассмотреть всю динамику столкновения ядерных слоев-слэбов [13].

Рассмотрим теперь распространение возмущений произвольной амплитуды. Для плотности энергии можно использовать простое выражение

$$e = K(\rho - \rho_0)^2, \quad (6)$$

где  $\rho_0 = 0.15 \text{ фм}^{-3}$  – равновесная плотность,  $K$  – модуль сжатия. Тогда давление

$$P = -\frac{\partial(e/\rho)}{\partial(1/\rho)} = K(\rho^2 - \rho_0^2) - \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2. \quad (7)$$

Здесь мы добавили дисперсионный член с коэффициентом  $\alpha$ , где  $\frac{\alpha}{2mc_{s0}^2} \rho_0 = (\text{фм})^2$ , скорость звука  $c_{s0} \approx 1/3c \approx 10^8 \text{ м/с}$ . В случае столкновения двух ядер образуются ударные волны, распространяющиеся со скоростью  $D$ , которую можно найти из уравнений (2) и (3), полагая  $\frac{\partial}{\partial t} = -D \frac{\partial}{\partial x}$ . Тогда из этих уравнений после интегрирования по скачку плотности получаем

$$D = -\frac{\rho_0 v_0}{\rho - \rho_0}, \quad (8)$$

где  $v_0$  – начальная скорость сталкивающихся ядер. Полагая скорость  $D$ , равной скорости звука

$c_s = \sqrt{\frac{\partial P}{m \partial \rho}}$ , получаем с учетом выражения для давления (7) уравнение для плотности  $\rho$ :

$$\pm \frac{(\rho - \rho_0) d\rho}{(\rho_1 - \rho) dx} \sqrt{\alpha} = \sqrt{K(2\rho_1(\rho - \rho_0) + (\rho - \rho_0)^2)}, \quad (9)$$

где  $\rho_1$  — максимальная плотность сжатия на ударной волне

$$2K\rho_1 = \frac{(\rho_0 v_0)^2}{(\rho_1 - \rho_0)^2}. \quad (10)$$

Выражение (9) может быть проинтегрировано неявно в элементарных функциях, но ответ получается довольно громоздким. Выделяя главные члены решения, получаем выражение

$$\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_0)}{\rho_1^2} = -\exp\left(\pm \sqrt{\frac{K}{\alpha}} x\right), \quad (11)$$

где знак “+” отвечает решению вблизи  $\rho_1$ , а знак “-” — вблизи  $\rho_0$ . Решения должны быть сшиты при промежуточном значении в точке перегиба. Так получается решение “кинк” для распространяющейся волны. При отрицательных значениях  $x$  рассуждения аналогичны. Однако, поскольку нас не интересуют сейчас детали структуры фронта волны, можно аппроксимировать решение (11) солитонным решением

$$\rho = \rho_0 + 4 \frac{(\rho_1 - \rho_0)}{(\exp(-\lambda x/2) + \exp(\lambda x/2))^2}, \quad (12)$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{K}{\alpha}}$ . Выражение (12) описывает главные особенности решения (11).

Также, как мы делали раньше с солитонами Кортевега—де Фриза, можно проинтегрировать выражение (12) по длине слоя и рассматривать распространение фронта ударной волны и его отражение от границ. В результате интегрирования получаем

$$\rho = \frac{1}{L} \int_{l_1}^{l_2} \rho' dx = \rho_0 + 4 \frac{(\rho_1 - \rho_0)}{\lambda L} \times \left[ \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x - l_2 - Dt))} - \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x - l_1 - Dt))} \right], \quad (13)$$

где  $\rho'$  — формула (12),  $l_1$  и  $l_2$  — границы ядра, а  $L = l_2 - l_1$  — его размер. Поскольку на максимуме ударной волны скорость  $v = 0$ , для максимума из уравнений (2) и (3) получается волновое уравнение, допускающее решение Даламбера. Что мы и использовали. При этом скорость  $v$  можно найти из уравнения (2), используя для плотности выражение (13) с учетом возможных отражений ударных волн от границ системы и движения границ.

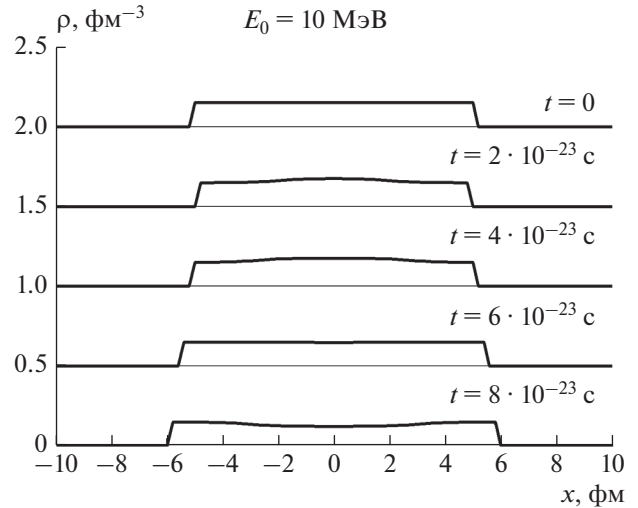


Рис. 1. Мгновенные профили столкновения ядерных слоев-слобдов при энергии  $E_0 = 10$  МэВ на нуклон в различные моменты времени при  $t = 0; 2; 4; 6; 8$  в единицах времени  $10^{-23}$  с.

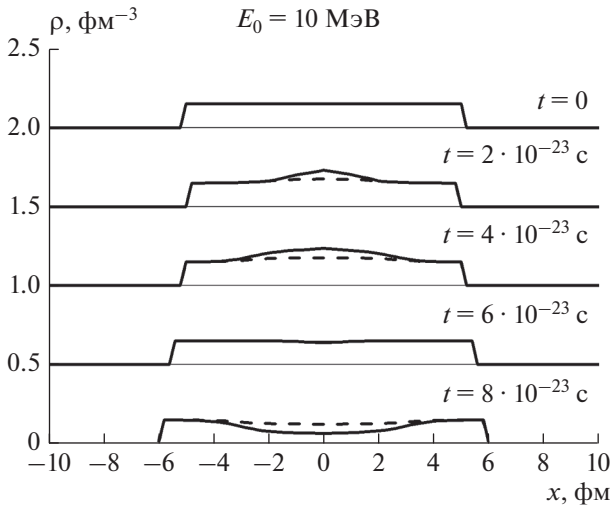
Таким образом, с помощью солитонных решений (12) и (13) можно исследовать всю динамику столкновений ядер в одномерном случае.

Так на рис. 1 представлены профили плотности для столкновения одинаковых ядер размером  $L = 5$  фм с энергией  $E_0 = 10$  МэВ на нуклон в моменты времени  $t = 2; 4; 6; 8$  в единицах времени  $10^{-23}$  с. Можно видеть первоначальное сжатие, образование hot spot и последующее расширение ядер с образованием разрежения в центральной области.

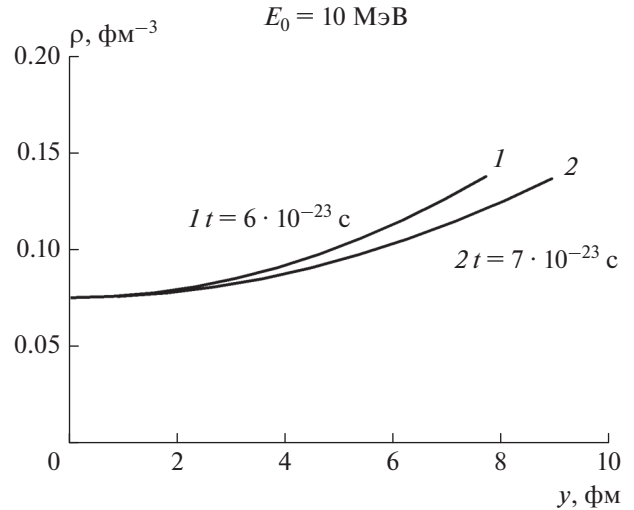
Мы также нашли упрощенное решение задачи в двумерном случае. Уравнения получаются из уравнений гидродинамики при интегрировании уравнений гидродинамики по поперечной координате, считая, что плотность  $\rho(x, t)$  не зависит от координаты  $y$ . Решение дается формулой (12) с заменой  $\rho_1 \rightarrow \rho_1 S(x, y, t)$  и последующим делением возмущения на  $S$ , где  $S(x, y, t) = (y_0(x) + v_y t)^2 / y_0^2$ , а  $v_y$  совпадает со скоростью звука.

Так на рис. 2 представлены профили плотности для столкновения одинаковых ядер с продольным размером  $L = 5$  фм с энергией  $E_0 = 10$  МэВ на нуклон в моменты времени  $t = 2; 4; 6; 8$  в единицах времени  $10^{-23}$  с. В этом случае результаты отмечены сплошными линиями. Штриховые линии соответствуют одномерному случаю. Можно видеть, что в двумерном случае колебания сжатия и разрежения получаются более сильными.

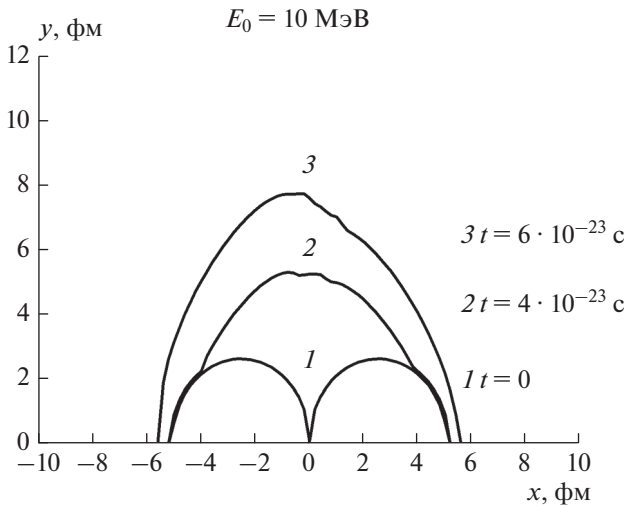
На рис. 3 представлены зависимости поперечного размера  $y = y_0(x) + v_y t$  от координаты  $x$  в



**Рис. 2.** Мгновенные профили столкновения одинаковых ядер (сплошные линии) при энергии  $E_0 = 10$  МэВ на нуклон в различные моменты времени при  $t = 0; 2; 4; 6; 8$  в единицах времени  $10^{-23}$  с для двумерного случая, штриховые линии – профили плотности для одномерных слоев, как на рис. 1.



**Рис. 4.** Зависимость плотности  $\rho(y,t)$  от  $t$  поперечной координаты  $y$  для  $x = 0$  при энергии  $E_0 = 10$  МэВ на нуклон в различные моменты времени при  $t = 6; 7$  в единицах времени  $10^{-23}$  с.



**Рис. 3.** Профили максимального поперечного размера ядер при энергии  $E_0 = 10$  МэВ на нуклон в различные моменты времени при  $t = 0; 4; 6$  в единицах времени  $10^{-23}$  с.

моменты времени  $t = 0; 4; 6$  в единицах времени  $10^{-23}$ с. Эти результаты получены для плотности, не зависящей от координаты  $y$ . Из рис. 2 видно, что в конце столкновения образуется в центре разреженная область, а на концах нормальная плотность. То есть можно ожидать образование пузыря в центре ядра.

Для поперечной координаты  $y$  можно видеть аналогичную ситуацию. На рис. 4 представлено изменение плотности  $\rho(y) = \rho'_0 \left( 1 + \frac{(y - y_0)^2}{4t^2 c_s^2} \right)$  при  $x = 0$  в различные моменты времени. Эта зависимость получена из решения гидродинамического уравнения Эйлера для скорости  $v_y = \frac{y - y_0}{t}$  с учетом поправки на изменение плотности с координатой  $y$ . Таким образом, оценка для двумерного случая подтверждает образование пузыря в центре ядра, где образуется разреженная область с плотностью  $\rho'_0$ . При низких энергиях сталкивающихся систем в результате колебаний плотности для чередующихся разрежений и сжатий может сформироваться устойчивый пузырь в центре.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Таким образом, развит неравновесный гидродинамический подход для описания сложных систем на примере столкновения атомных ядер. Неравновесный подход к гидродинамическим уравнениям, позволяет описывать экспериментальные данные лучше, чем уравнение состояния, соответствующее традиционной гидродинамике, предполагающей установление локального термодинамического равновесия. При этом описании существенным было выделение горячего пятна hot spot. Показано, что введение дисперсионных членов не нарушает это представление. На стадии расширения образуется разреженная область в центре системы – динамический пузырь. Это рас-

смотрение проведено как в одномерном, так и в двумерном случаях.

Используемые уравнения гидродинамики и уравнение Кортевега—де Фриза имеют общий характер, а найденные солитоноподобные решения применимы к любым сложным системам. Сведение уравнений гидродинамики к решению двух уравнений Кортевега—де Фриза в виде солитонов позволяет найти аналитическое решение задачи. Обобщение результатов солитонного подхода в случае возмущений большой амплитуды и дополнительных измерений представляет самостоятельный фундаментальный интерес для физики вообще и может быть использовано в различных областях техники.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bohr N., Wheeler J.A.* // Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 426.
2. *Stöcker H., Greiner W.* // Phys. Reports. 1986. V. 137. No. 5–6. P. 277.
3. *D'yachenko A.T., Gridnev K.A., Greiner W.* // J. Physics G. 2013. V. 40. No. 3. Art. No. 085101.
4. *Дьяченко А.Т., Митропольский И.А.* // ЯФ. 2020. Т. 83. С. 317; *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Phys. Atom. Nucl. 2020. V. 83. P. 558.
5. *Дьяченко А.Т., Митропольский И.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 5. С. 508; *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 5. P. 391.
6. *Дьяченко А.Т., Митропольский И.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 5. С. 716; *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 5. P. 554.
7. *Дьяченко А.Т., Гриднев К.А., Митропольский И.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 7. С. 952; *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 79. No. 7. P. 858.
8. *Дьяченко А.Т., Митропольский И.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. № 12. С. 1720; *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 81. No. 12. P. 1521.
9. *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // EPJ Web Conf. 2019. V. 204. Art. No. 03018.
10. *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Phys. Atom. Nucl. 2019. V. 82. P. 1641.
11. *Korteweg D.J., Vries G.* // Phil. Mag. 1895. V. 39. P. 422.
12. *D'yachenko A.T.* // Proc. Int. Conf. Nucl. Phys. “Nuclear Shells—50 Years” (Dubna, 1999). P. 492.
13. *Дьяченко А.Т., Митропольский И.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 8. С. 1162; *D'yachenko A.T., Mitropolsky I.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 8. P. 962.
14. *Siemens P.J., Bethe H.A.* // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 18. P. 704.
15. *Wong C.Y.* // Ann. Phys. 1973. V. 77. P. 279.
16. *Decharge J., Beger J.-F., Dietrich K., Weiss M.S.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 451. P. 275.
17. *Mutschler A. et al.* // Nature Phys. 2017. V. 13. P. 152.
18. *Fam X.H., Yong D.C., Zuo W.* // Phys. Rev. C. 2019. V. 99. No. 4. Art. No. 041601.

## Soliton solutions of the equations of hydrodynamics in describing collisions and oscillations of atomic nuclei

A. T. D'yachenko<sup>a, b, \*</sup>, I. A. Mitropolsky<sup>b</sup>

<sup>a</sup> St. Petersburg State Transport University, St. Petersburg, 190031 Russia

<sup>b</sup> Konstantinov Petersburg Nuclear Physics Institute, National Research Centre “Kurchatov Institute”, Gatchina, 188300 Russia

\*e-mail: dyachenko\_a@mail.ru

The hydrodynamic approach was used to find an analytical solution of the hydrodynamic equations in the soliton approximation for layer collisions in the one- and two-dimensional cases. The compression stage, the decompression stage, and the expansion stage are considered within the framework of a single formula for layers with energies on the order of ten MeV per nucleon. Our generalization to the two-dimensional case leads to the idea of the formation of a rarefied bubble region at the stage of expansion. The approach can be used in other fields for calculations of the nonlinear dynamics of oscillations of complex systems.