

ISSN 2313-7304

# **ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ**

**ТОМ 10 (26)**

**ТРУДЫ LIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ**

**Санкт-Петербург**

**3 – 7 апреля 2023 года**

ISSN 2313-7304

***CONTROL PROCESSES  
AND STABILITY***

**Vol. 10 (26)**

**PROCEEDINGS OF THE LIV  
INTERNATIONAL CONFERENCE**

**St. Petersburg  
April 3 – 7, 2023**

PUBLISHING HOUSE  
FEDOROVA G.V.  
2023

ББК 22.1

П84

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Петросян (отв. редактор) (СПбГУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Смирнов (зам. отв. редактора) (СПбГУ)  
д-р физ.-мат. наук, проф. О. И. Дривотин (СПбГУ)  
д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Жабко (СПбГУ)  
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. Д. Котина (СПбГУ)  
д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ю. Крылатов (СПбГУ)

**Процессы управления и устойчивость. Том 10(26). № 1 / науч.**  
П84 редакторы тома Н. В. Смирнов., А. С. Еремин, Т. Е. Смирнова.  
СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2023. 542 с.  
ISSN 2313-7304

«Процессы управления и устойчивость» – ежегодное научное издание. Издаётся на факультете прикладной математики – процессов управления СПбГУ с 1998 года. Сборник традиционно формируется по результатам работы ежегодной Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» и включает статьи студентов, аспирантов, сотрудников СПбГУ и других высших учебных заведений, в том числе зарубежных, по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, информационным и компьютерным технологиям, теории управления социально-экономическими системами.

В Том 10(26) включены статьи участников 54-й Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (3 – 7 апреля 2023 года), прошедшие рецензирование и рекомендованные к публикации. Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.1

*Сборник издается при финансовой поддержке  
факультета прикладной математики – процессов управления  
Санкт-Петербургского государственного университета*

ISSN 2313-7304

© Издательский Дом Федоровой Г. В., 2023  
© Смирнов Н. В., 2023

## Содержание

Пленарная сессия .....	9
Приглашенный лектор .....	9
<i>Кривовичев Г. В.</i> Одномерные модели течения крови в больших сосудистых системах .....	11
<b>1. Математическая теория процессов управления .....</b>	<b>35</b>
<i>Андрянова Н. Р.</i> Задача равномерного распределения на отрезке для линейных мультиагентных дискретных систем с переключениями и запаздываниями .....	35
<i>Белов А. И.</i> Критерий экспоненциальной устойчивости линейной системы с двумя кратными запаздываниями .....	41
<i>Ву И., Е П.</i> Нелинейное оптимальное управление загрязнением озера с двумя типами переключений .....	46
<i>Евтина Д. С.</i> Функционалы Ляпунова – Красовского для сложных систем с запаздыванием .....	51
<i>Живулин Е. А., Гришкин В. М.</i> Расчет траектории обхода движущегося судна с целью экономии топлива .....	56
<i>Литвинов Н. Н.</i> О вычислительной сложности одного алгоритма дискретного управления .....	65
<i>Маковеева П. Е.</i> Построение функционала с заданной производной для системы с распределенными параметрами .....	71
<i>Розенгард А. С.</i> Анализ поведения корней квазиполинома в зависимости от запаздывания .....	77
<i>Соколов В. М.</i> Обобщённая задача Мышкиса для линейных систем с одним запаздыванием .....	82
<i>Сулиман Б.</i> Математическое моделирование динамики управляемой тележки при наличии запаздывания в канале обратной связи .....	89
<i>Томилова А. С.</i> Применение метода оптимального демпфирования к синтезу закона управления колёсным роботом .....	95
<i>Тран З.</i> Программный комплекс для решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения с распределенными параметрами в сетеподобной области .....	100

**2. Математические методы в механике и физике . . . . . 105**

- Алцубеев Г. О., Бурова И. Г.* О применении сплайнов к решению интегральных уравнений со слабой особенностью . . . . . 105
- Волокитин Е. М.* Идентификация модели однозвенного маятника . . . . . 110
- Вяльцева В. В., Седова О. С.* Применение итераций обобщенного метода конечных элементов с локальным и глобальным решением к задаче Кирша . . . . . 115
- Гончарук Д. Д.* Идентификация процесса развития аварии судна в результате затопления отсеков . . . . . 120
- Муллаянов Т. О.* Метод возмущений в задаче о наноразмерном рельефе поверхности твердого тела . . . . . 127
- Обада М. Х., Шиманчук Д. В.* Использование метода отжига для решения обратной задачи о положении роботоманипулятора . . . . . 132
- Руднева Е. В.* Адаптированный алгоритм летучих мышей в задаче поиска оптимальной траектории . . . . . 140
- Рыбалкин А. А.* Управление роботом-манипулятором в режиме реального времени с внешней измерительной системой в качестве наблюдателя . . . . . 144
- Рычков А. С.* Построение оптимальной в смысле интегрального функционала стоимости дороги на рельефе местности с помощью алгоритма муравьиной колонии . . . . . 151
- Соколов И. А., Никифоров К. А.* Моделирование автоэмиссионного катодно-модуляторного узла . . . . . 156
- Хоанг В. Н.* Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе . . . . . 161
- Ягафаров А. Р., Еремин А. С.* О двухшаговом методе Рунге – Кутты для функциональных дифференциальных уравнений . . 166

**3. Математические модели медико-биологических систем . . . . . 171**

- Асатурян В. Г.* Статистический анализ данных популяционного когортного исследования старения мозга и возникновения болезни Альцгеймера . . . . . 171

<i>Беляева А. А.</i> Реализация оптимизационного алгоритма построения поля скоростей.....	174
<i>Давыденко Б. Н.</i> Исследование изменений биомеханических свойств роговицы после проведения операции по технологии ReLEx SMILE.....	180
<i>Залесов И. М., Гончарова А. Б., Козубова К. В.</i> Модель определения метастатического поражения печени по данным контрастно-усиленного ультразвукового сканирования.....	184
<i>Пономарева П. М.</i> Моделирование динамики распространения COVID-19 на примере первых волн пандемии в Германии.....	189
<i>Селиверстова К. А.</i> Применение статистических методов для оценки глобального потепления.....	195
<i>Фролова Е. А.</i> Статистический анализ клинических показателей пострадавших с тяжелой ожоговой травмой.....	200
<i>Хоменко И. Е., Легкова И. А.</i> Применение логистической регрессии для анализа необходимости подключения больного коронавирусной инфекцией к аппарату ИВЛ.....	207
<i>Шмидт Я. А.</i> Анализ саркопении методами машинного обучения.....	211
<i>Katguria F. H., Kozubova K. V.</i> Application of neural networks to recordings of ultrasound exams to identify focal forms in the liver.....	216
<b>4. Информационные и компьютерные технологии.....</b>	<b>221</b>
<i>Адамович А. О.</i> Алгоритм оценивания параметров за конечное время при настройке весов нейронной сети.....	221
<i>Алцубеев Г. О.</i> Кроссплатформенная библиотека линейной алгебры для языка C++.....	227
<i>Бабкина А. В.</i> Распознавание нот фортепианной музыки с использованием машинного обучения.....	233
<i>Береснев В. С.</i> Генерация текстов естественного и программного языка.....	240
<i>Ганаева Д. Д.</i> Прогнозирование временных рядов с использованием метода реконструкции нелинейных динамических систем.....	245

<i>Девришев Н. Э.</i> Улучшение перевода zero-shot с использованием лексического сходства языков.....	250
<i>Дмитриева К. А.</i> Применение алгоритма RRT* для поиска оптимальной по стоимости строительства дороги на рельефе местности с ограничениями.....	259
<i>Ежов Ф. В., Ларин Е. С., Блеканов И. С., Ким Г. И.</i> Нейросетевые методы сегментации аорты сердца при автоматической диагностике снимков КТ.....	263
<i>Индыков Д. А.</i> Сегментация капилляров глаза человека по снимкам с офтальмологической щелевой лампы.....	268
<i>Исаев Р. О., Куприянов И. В., Митяй Г. В., Школин А. Ю.</i> Разработка новостного агрегатора с использованием нейросетей.....	275
<i>Калинин П. Е.</i> Оптимизация роєм частиц.....	281
<i>Клименко И. С.</i> Метод матричных отображений для решения системы дифференциальных уравнений с параметрами.....	286
<i>Коваленко Л. А., Блеканов И. С., Ежов Ф. В., Разумилов Е. С.</i> Инструменты краудсорсинга для анализа и обработки медицинских изображений в виде снимков КТ.....	291
<i>Ларин Е. С., Коваленко Л. А., Блеканов И. С., Ким Г. И.</i> Методы построения 3D-модели аорты сердца и её сечения для автоматизации процесса КТ-диагностики.....	298
<i>Оленев Р. О.</i> Прогнозирование фондовых индексов с использованием моделей ARIMA и LSTM.....	304
<i>Пономарев Ю. Ю.</i> Вопросы точных оценок характеристик деревьев при моделировании термов предметных областей, нейросетей, XML данных.....	309
<i>Попов А. П., Блеканов И. С.</i> Нейросетевые методы улучшения качества изображения рентгеновских снимков семян сельскохозяйственных культур.....	318
<i>Рычагов Е. А.</i> Методы эквализации звукового сигнала.....	325
<i>Садиев С. А.</i> Анализ возможности обоснования работы алгоритмов искусственного интеллекта.....	331
<i>Скачигин А. М.</i> Автоматическое реферирование текстов с использованием алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта.....	340

<i>Chen X., Dan J., He Y., Sun M., Guo Z., Li Y.</i> Implementation of 22 categories license plate recognition and multiple license plate detection .....	346
<i>Liu J., Zhang C., Li Z.</i> Computer vision-based license plate recognition technology .....	354
<i>Liu Y., Xia Y., He J.</i> Detection of green walnuts on trees using improved deep learning model .....	362
<i>Liu Y., Xu H., Li Z., Liang Y.</i> Pedestrian detection system based on YOLOv3 .....	367
<i>Qiao T., Zhang R., Ma X.</i> Study of the optimization problem of grouping batches of square-shaped parts .....	373
<i>Ren Y., Yang Z., Zhang T., He Y.</i> The quantitative research on big data of stocks based on the BIAS .....	380
<i>Wang B., Qiao X., Su R., Zhu M.</i> Analysis and identification of unknown glass components based on data mining .....	386
<i>Zhang Y., Li Y., Li Y., Guo Z., Zhang D.</i> A review of adversarial attacks in computer vision .....	393

## **5. Управление социально-экономическими системами..429**

<i>Гордюшин Д. С.</i> Оценка состояния экономики при помощи имитационного моделирования .....	429
<i>Кареева Ю. С.</i> О зоне безразличия в игре динамики мнений Фридкина – Джонсена .....	439
<i>Король М. М.</i> Параллельные вычисления в задаче поиска равновесного распределения потоков в сетях .....	444
<i>Косьянов Н. О.</i> Применение управления с прогнозированием модели для поиска эффективных управлений задачи SIIR ...	449
<i>Кумачёва С. Ш., Новгородцев В. А., Кудин П. С.</i> Об оптимизации решений с помощью прогнозного модуля в обучении с подкреплением .....	454
<i>Лориц Е. М.</i> Эволюционная игра с учетом обратной связи с окружающей средой и мнениями игроков .....	462
<i>Немцев Д. Ю.</i> Среднее решение дерева как мера центральности вершин графа .....	467
<i>Писарева А. М.</i> Построение стратегии наказания в повторяющихся играх «дилемма заключенного» .....	472



<i>Ульянова Д. С.</i> Статистический анализ смертности от туберкулеза.....	477
<i>Хитрая В. А.</i> Ранжирование вершин графа как кооперативная игра на электрической цепи.....	482
<i>Чайкин Г. А.</i> Распределение проблемных тематик между учащимися.....	490
<i>Bai H., Li Y.</i> Spatial analysis of the birth rate in China.....	496
<i>Bai M.</i> Profit sharing licensing with many firms.....	501
<i>Gao Z., Wang Q., Liu Z., Fan X.</i> Optimization study of an ethanol preparation model for C4 olefins.....	506
<i>Lin P.</i> New energy vehicle sales forecast based on time series and neural network.....	512
<b>6. Мастер-классы.....</b>	<b>519</b>
<i>Пономарев Ю. Ю.</i> Методические основы внедрения, преподавания и работы с облачными технологиями компании «МойОфис» на примере установки продукта «МойОфис Частное облако 2». Основы языка Lua.....	519
<i>Пономарев Ю. Ю.</i> Как анализировать ноты в виде звуков и печатных образов при помощи систем с ИИ с преобразованием в MusicXML.....	525
<b>Contents.....</b>	<b>533</b>
<b>Именной указатель.....</b>	<b>539</b>

*Пленарная  
сессия*





## **Кривовичев Герасим Владимирович**

*доктор физико-математических наук, профессор,  
кафедра моделирования  
электромеханических и компьютерных систем,  
факультет прикладной математики — процессов управления,  
Санкт-Петербургский государственный университет*



### **Одномерные модели течения крови в больших сосудистых системах**

**Аннотация.** Математические модели течения крови в последние годы широко используются для анализа последствий сердечно-сосудистых операций и исследований особенностей течений в сосудах с наличием патологий. Для моделирования течений в сосудистых системах в большинстве работ используются одномерные модели, полученные осреднением уравнений гидродинамики по поперечному сечению сосуда. Доклад посвящен анализу различных одномерных моделей и особенностям их практической реализации. В частности, представлены новые модели, в рамках которых учитываются неньютоновские свойства крови. Проведено сравнение моделей на задаче о моделировании течений в артериальной системе человека. Отдельно рассматривается задача о разработке новых разностных схем на основе метода расщепления для эффективного проведения вычислительных экспериментов.

## Krivovichev Gerasim Vladimirovich

*D.Sc., Professor,  
Department of Electromechanical and Computer Systems Modeling,  
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,  
Saint Petersburg State University*

### **One-dimensional models of blood flow in large vascular systems**

**Abstract.** In the last years, mathematical models of blood flow have been widely used in the analysis of the consequences of cardiovascular surgeries and in investigations of the features of flows in vessels with pathologies. For simulation of flows in vascular systems, in most works, the one-dimensional models, obtained by averaging the equations of hydrodynamics over the vascular cross-section, are used. The talk is devoted to the analysis of various one-dimensional models and the aspects of their implementation. Some new models, where the non-Newtonian properties of blood are taken into account, are presented. The comparison of models is realized on the problem of modelling of blood flow in the human arterial system. The problem of the development of new finite-difference splitting-based schemes for efficient computational experiments is considered.

УДК 532.54, 51-76

**Кривовичев Г. В.**

## **Одномерные модели течения крови в больших сосудистых системах**

**Введение.** Математические модели течения крови в последние годы широко используются на практике для анализа последствий сердечно-сосудистых операций и изучения особенностей течений в сосудах с наличием патологий [1–5]. С использованием моделей можно проводить исследования, не предусматривающие внедрения в организм пациента, а также разрабатывать программное обеспечение для проведения численных экспериментов [6].

Настоящая работа посвящена обзору одномерных моделей течения крови в больших сосудистых системах (например, в системе кровообращения человека в целом или в сосудистых системах отдельных органов). Такие модели получаются посредством осреднения уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда. Возникающие при этом начально-краевые задачи относятся к классу нелинейных задач для уравнений в частных производных на графах. Описаны особенности постановки и численного решения таких задач. Представлены модели, в рамках которых учитываются неньютоновские свойства крови. Обсуждаются результаты сравнения разных одномерных моделей кровотока. Сформулированы актуальные задачи, связанные с построением новых моделей и развитием численных методов.

**1. Механические свойства крови.** Кровь представляет собой гетерогенную суспензию и состоит из клеток крови (эритроцитов, лейкоцитов, тромбоцитов и др.) и жидкой части, которая называется плазмой. При этом основное влияние на механические свойства крови оказывают эритроциты. Объемная доля клеток крови носит название гематокрита и в норме равна 40–45% от объема [7]. Плотность крови слабо меняется, в связи с чем она является несжимаемой жидкостью [7]. Несмотря на то, что плазма является ньютоновской жидкостью, кровь в целом представляет собой неньютоновскую среду. Вязкость крови не является постоянной, при малых скоростях

---

*Кривовичев Герасим Владимирович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.krivovichev@spbu.ru, тел.: +7(905)230-88-53

сдвига она может существенным образом меняться [8, 9]. Экспериментальные исследования показывают, что при высоких скоростях сдвига (более  $100 \text{ с}^{-1}$ ) вязкость крови человека при гематокрите, равном 45%, имеет постоянное значение, равное  $0,03\text{--}0,04 \text{ с} \cdot \text{дин}/\text{см}^2$ , что позволяет при таких скоростях сдвига считать кровь ньютоновской жидкостью [10]. При этом в артериях скорость сдвига во время сердечного цикла меняется примерно от 0 до  $1000 \text{ с}^{-1}$  [11, 12]. Таким образом, во время сердечного цикла могут наблюдаться случаи, когда скорость сдвига мала. Часто случаи низкой скорости сдвига соответствуют области рециркуляции вблизи ветвлений, стенозов, аневризм и анастомозов [12]. В дополнение к этому установлено, что неньютоновость крови проявляется при таких заболеваниях, как инфаркт миокарда и гипертония [13].

Кроме зависимости вязкости от скорости сдвига, кровь также демонстрирует вязкоупругие свойства [9]. Для пространственных (трехмерных) моделей вязкоупругие неньютоновские свойства крови рассматриваются в [14, 15]. При этом, как отмечено в [16], в задачах моделирования течений в крупных сосудах эти свойства можно не учитывать, поскольку они существенно не влияют на поле скоростей, и достаточно учитывать только зависимость от скорости сдвига.

**2. Пространственные модели кровотока.** Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой, состоящей из условия несжимаемости и уравнения движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{r})$  – вектор скорости,  $\mathbf{r}$  – вектор пространственных переменных,  $p = p(t, \mathbf{r})$  – давление,  $\mathbf{T}$  – тензор касательных напряжений.

В большинстве работ зависимость вязкости крови от скорости сдвига описывается с помощью обобщенных ньютоновских моделей, в рамках которых динамическая вязкость зависит только от компонент тензора скоростей деформации  $\mathbf{D}$  [17]:

$$\mathbf{T} = 2\mu(I_2)\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T),$$

где  $I_2$  – второй главный инвариант тензора  $\mathbf{D}$ ,  $\mu$  – динамическая вязкость. В случае ньютоновской жидкости  $\mu = \text{const}$ .

Типичным примером такой неньютоновской модели является степенная (*power law*) жидкость, определяемая выражением:

$$\mu = kI_2^{\frac{n-1}{2}},$$

где  $k, n$  – параметры модели. С использованием такой модели решались самые разные задачи моделирования нестационарных течений в двумерном и трехмерном случаях: в коронарных сосудах [18], аорте [19], сонной артерии [20] и сосудах со стенозом [21, 22]. В [23] эта модель применяется для описания микроциркуляции.

Другой известной моделью, часто используемой для моделирования крови, является модель Карро – Ясуды [11]:

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left(1 + (\lambda\sqrt{I_2})^a\right)^{\frac{n-1}{a}},$$

где  $\mu_0, \mu_\infty, a, n$  – параметры. Такая модель использовалась в работах [11, 16, 19, 24, 25]. Также в ряде работ используется модель Куимады [21, 26, 27]:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\left(1 - \frac{1}{2}k_Q H\right)^2}, \quad k_Q = \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\frac{\sqrt{I_2}}{\dot{\gamma}_c}}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt{I_2}}{\dot{\gamma}_c}}},$$

где  $\mu_0, k_0, k_\infty, \dot{\gamma}_c$  – параметры модели,  $H$  – гематокрит. Другие примеры обобщенных неньютоновских моделей представлены в статьях [11, 19, 26, 28].

При проведении вычислительных экспериментов по моделированию течения крови в больших сосудистых системах вполне можно использовать модели вида (1), дополненные начальными и граничными условиями. Но из-за сложной геометрической формы получающейся области (ветвящаяся в пространстве структура) требуется использовать сетки с большим числом узлов, что приводит к большим затратам вычислительных ресурсов. При этом для решения медицинских задач доскональное знание структуры течения при рассмотрении систем из многих сосудов зачастую не требуется, достаточно уметь прогнозировать изменение во времени средних по поперечному сечению гидродинамических характеристик (например, давления) [6]. В связи с этим для решения подобных задач, как правило, используются осредненные модели.



**3. Одномерные модели.** При введении предположений об осевой симметрии, наличии только радиальных смещений стенки сосуда, о несмещаемости его оси во времени, о постоянстве давления вдоль поперечного сечения и о малости изменения радиальной компоненты вектора скорости по сравнению с осевой, получим, что (1) в цилиндрических координатах сведется к системе вида

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}), \quad (2)$$

где  $(r, z)$  – цилиндрические координаты,  $U_r, U_z, T_{rz}$  – компоненты вектора  $\mathbf{U}$  и тензора  $\mathbf{T}$ ,  $P = P(t, z)$  – среднее по поперечному сечению давление.

Предполагается, что справедливо следующее представление [29]:

$$U_z(t, z) = U(t, z) s \left( \frac{r}{R(t, z)} \right),$$

здесь  $U$  – средняя по поперечному сечению скорость крови,  $R$  – радиус сосуда,  $s$  – безразмерный профиль скорости, для которого выполняется условие

$$\int_0^1 y s(y) dy = \frac{1}{2}.$$

После осреднения (2) по поперечному сечению сосуда, получается система вида [29, 30]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = f(A, Q), \quad (3)$$

где  $A = A(t, z)$  – площадь поперечного сечения,  $Q = Q(t, z)$  – объемный расход,  $\alpha$  – коэффициент Буссинеска (*shape factor*)

$$\alpha = \frac{\int U_z^2 dS}{AU^2} = \frac{\int s^2 dS}{A},$$

где  $\sigma$  – поперечное сечение сосуда и вязкий член [31]

$$f(A, Q) = \frac{2\pi R}{\rho} T_{rz}(t, R, z).$$

В случае ньютоновской модели крови

$$f(A, Q) = -K s'(1) \frac{Q}{A}, \quad (4)$$

где  $K = -\frac{2\pi\mu}{\rho}$ . В случаях, упомянутых ранее неньютоновских моделей: степенной, Карро–Ясуды и Куимады, вязкий член представляется соответственно

$$f(A, Q) = -s'(1)|s'(1)|^{n-1} K \frac{Q|Q|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}, \quad K = -\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} k}{\rho},$$

$$f(A, Q) = -s'(1)K_1 \frac{Q}{A} - s'(1)K_2 \left(1 + |s'(1)|^a K_3 \frac{|Q|^a}{A^{\frac{3a}{2}}}\right)^{\frac{n-1}{a}} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi\mu_\infty}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, \quad K_3 = \lambda^a \pi^{\frac{a}{2}},$$

$$f(A, Q) = -s'(1)K_1 \left(1 - \frac{H}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{|s'(1)|} K_2 \frac{\sqrt{|Q|}}{A^{\frac{3}{4}}}}{1 + \sqrt{|s'(1)|} K_2 \frac{\sqrt{|Q|}}{A^{\frac{3}{4}}}}\right)^{-2} \frac{Q}{A},$$

$$K_1 = -\frac{2\pi\mu_0}{\rho}, \quad K_2 = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\gamma_c}}.$$

В случае других неньютоновских моделей крови выражения для  $f(A, Q)$  представлены в работах [28, 31]. При этом в ряде работ [32, 34, 35, 58] вообще рассматривается случай  $f(A, Q) \equiv 0$ , т. е. вязкость крови не учитывается.

Система (3) замыкается уравнением состояния  $P = P(A)$ . Отметим, что в литературе рассматриваются самые разные уравнения состояния. К примеру, для артерий широко применяется уравнение вида [35]

$$P - P_{ext} = P_d + \frac{\beta}{A_d} (\sqrt{A} - \sqrt{A_d}), \quad (5)$$

где  $P_{ext}$  – внешнее давление,  $A_d$  и  $P_d$  – площадь поперечного сечения и давление при диастоле,  $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E l$ , где  $E$  – модуль Юнга,  $l$  – толщина сосудистой стенки.

Подставляя уравнение состояния (5) во второе уравнение (2) при постоянных значениях величин  $P_{ext}$  и  $P_d$  (как и рассматривается в

большинстве работ), получим уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \theta(z) \sqrt{A} \frac{\partial A}{\partial z} = f(A, Q) + \varphi(A),$$

где

$$\varphi(A) = \frac{A}{\rho} \frac{d}{dz} \left( \kappa(z) \sqrt{A_d(z)} \right) - \frac{\kappa'(z)}{\rho} A^{\frac{3}{2}}, \quad \kappa(z) = \frac{\beta(z)}{A_d(z)}, \quad \theta(z) = \frac{\kappa(z)}{2\rho}.$$

Заметим, что в случае постоянных характеристик материала стенки сосуда  $\varphi(A) = 0$ .

Для окончательного замыкания модели требуется задать выражение для профиля скорости  $s(y)$ ,  $y = r/R$ . Это выражение можно получить, решив задачу о стационарном течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе постоянного сечения. Точное решение такой задачи можно получить только в случае степенной модели (случай  $n = 1$  отвечает ньютоновской жидкости) [36]:

$$s(y) = \frac{3n+1}{n+1} \left( 1 - y^{1+\frac{1}{n}} \right).$$

В этом случае

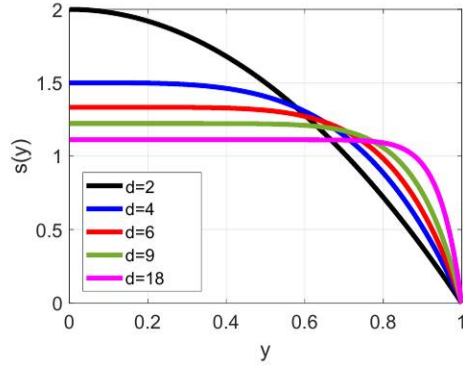
$$\alpha = \frac{3n+1}{2n+1}.$$

Для остальных неньютоновских моделей профиль скорости можно получить только численно. При этом вид  $s(y)$  может зависеть не только от самой модели, но и от условий течения [24].

Для течения крови в крупных сосудах характерен приплюснутый профиль скорости [7]. Отметим, что в работах, где рассматривались двух- и трехмерные модели с учетом неньютоновских свойств крови, были получены подобные профили скорости [11, 24, 25]. В работах по одномерным ньютоновским моделям [29, 30, 37, 38] характерный для крови профиль скорости имеет вид

$$s(y) = \frac{d+2}{d} (1 - y^d), \quad (6)$$

при соответствующем значении безразмерного параметра  $d$ . На рис. 1 представлены графики  $s$  при разных значениях  $d$ .



**Рис. 1.** Графики модельного безразмерного профиля скорости при разных  $d$

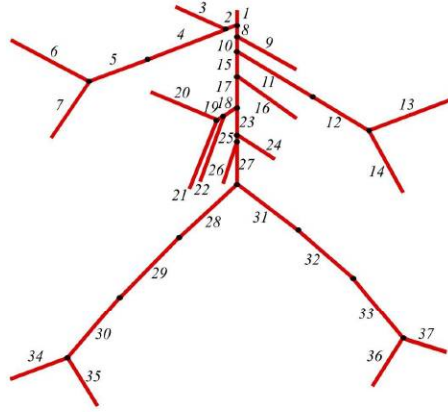
В работах по неньютоновским моделям [28, 39, 40] в качестве  $s(y)$  было предложено использовать выражение (6), но значение  $d$  варьировалось с целью исследования влияния изменения профиля скорости на решение. Отметим, что разные значения  $d$  могут отвечать разным условиям течения. Для профиля скорости (6)

$$\alpha = \frac{d + 2}{d + 1}.$$

В большинстве работ для проведения численных расчетов используется ньютоновская модель, согласно которой вязкий член представляется по формуле (4). При этом для расчетов используется и модель, в которой вообще не учитывается вязкость крови, т. е.  $f \equiv 0$  [35]. Как показано в работах [38, 39], такое приближение вполне допустимо для сосудов, находящихся в непосредственной близости от сердца. По результатам численного моделирования также установлено [28], что влияние неньютоновской вязкости в рамках одномерных моделей является существенным только для сосудов, находящихся на периферии и близких к системе микроциркуляции.

**3.1. Постановка начально-краевой задачи.** Для проведения численного моделирования кровотока в конкретных моделях сосудистых систем для системы уравнений (3) ставятся начальные и граничные условия. Пространственная область, в которой рассматривается система, представляет собой в общем случае граф, дугами которого являются модели отдельных сосудов или их частей. В качестве примера можно привести представленную на рис. 2 модель

артериальной системы большого круга кровообращения человека из 37 сегментов, предложенную в [37]. Начально-краевые задачи на графах в настоящее время представляют большой интерес в связи с широкими практическими приложениями [41–45].



**Рис. 2.** Модель артериальной части большого круга кровообращения из 37 сегментов

Переходя к постановке задачи, будем рассматривать граф, состоящий из  $M$  ребер. На каждом ребре графа рассматривается система вида (3). Выпишем эту систему в квазилинейной форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{W}(\mathbf{u}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{u} = (A, Q)^T$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2(A) - \alpha \frac{Q^2}{A^2} & 2\alpha \frac{Q}{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(A, Q) - \varphi(A) \end{pmatrix},$$

$$c(A) = \sqrt{\theta(z)} A^{\frac{1}{4}}.$$

При этом для численного решения основная система уравнений может быть выписана в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{u})}{\partial z} = \mathbf{G}(\mathbf{u}), \quad (8)$$

где

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{\kappa(z)}{3\rho} A^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(A, Q) + \frac{A}{\rho} \frac{d}{dz} \left( \kappa(z) \sqrt{A_d(z)} \right) - \frac{2\kappa'(z)}{3\rho} A^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

В начальный момент времени, как правило, предполагается, что жидкость покоится, что приводит к нулевым значениям расхода. Значения площадей поперечного сечения задаются как положительные функции  $z$ . Таким образом, начальные условия имеют следующий вид:

$$Q_i(0, z) = 0, \quad A_i(0, z) = \psi_i(z), \quad i = \overline{1, M}.$$

На входе первого сосуда значение объемного расхода задается как периодическая функция времени:  $Q_1(t, 0) = q(t)$ . Выражение для  $q(t)$  можно получить, аппроксимируя результаты экспериментов [37]. В дополнение к этому условию задают условие совместности, описывающее изменение решения вдоль характеристики, покидающей вычислительную область в точке  $z = 0$ :

$$\mathbf{l}_-(\mathbf{u}_1) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_1) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}_1) \right) = \mathbf{0},$$

где  $\lambda_-$  представляет собой отрицательное собственное значение матрицы  $\mathbf{A}$ , а  $\mathbf{l}_-$  — отвечающий ему левый собственный вектор.

На выходах из терминальных сосудов связь давления и расхода может задаваться с помощью трехэлементной RCR модели, отражающей влияние упругих свойств сосудов и способности их оказывать как сопротивление потоку, так и накопительный и пропульсивный эффекты. Эта модель основана на электромеханических аналогиях и описывается уравнением [46]

$$Q \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + CR_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{P - P_{out}}{R_2} + C \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — сопротивления,  $C$  — коэффициент емкости сосуда (*compliance*),  $P_{out}$  — давление на выходе.

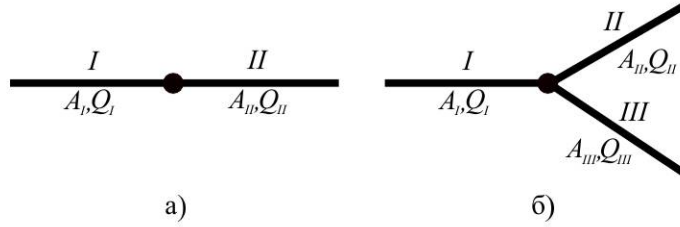
Другими условиями, задаваемыми на выходах терминальных сосудов, являются условия вида [37]

$$Q = \frac{P - P_{out}}{R_p},$$

где  $R_p$  – сопротивление.

Для замыкания системы относительно значений  $Q$  и  $A$  на концах терминальных сосудов еще задают условие совместности, отвечающее положительному собственному значению матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{l}_+(\mathbf{u}) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}) \right) = \mathbf{0}.$$



**Рис. 3.** а) Соединение двух сосудов; б) ветвление

В точках соединения двух сосудов (рис. 3а) задается система, состоящая из условия сохранения объема, непрерывности давления и двух условий совместности:

$$\begin{aligned} Q_I &= Q_{II}, \quad P_I(A_I) = P_{II}(A_{II}), \\ \mathbf{l}_-(\mathbf{u}_{II}) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_{II}) \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}_{II}) \right) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{l}_+(\mathbf{u}_I) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{u}_I) \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}_I) \right) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

В точках ветвления, образованных родительским и двумя дочерними сосудами (рис. 3б), задаются аналогичные условия:

$$\begin{aligned} Q_I &= Q_{II} + Q_{III}, \quad P_{III}(A_{III}) = P_I(A_I), \quad P_{II}(A_{II}) = P_I(A_I), \\ \mathbf{l}_+(\mathbf{u}_I) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{u}_I) \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}_I) \right) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{l}_-(\mathbf{u}_{II}) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_{II}) \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}_{II}) \right) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{l}_-(\mathbf{u}_{III}) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{III}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{u}_{III}) \frac{\partial \mathbf{u}_{III}}{\partial z} - \mathbf{W}(\mathbf{u}_{III}) \right) = \mathbf{0}.$$

**3.2. Особенности численного решения.** Отметим, что основные уравнения модели и поставленные условия являются нелинейными, в связи с чем поставленные задачи можно решить только численно. Для численного решения задачи, как правило, используются подходы, основанные на дискретизации системы (8), поскольку на ее основе можно строить консервативные вычислительные схемы. В работах по численному моделированию используются конечно-объемные [47–49], конечно-элементные [29, 51] и конечно-разностные [52, 53] схемы. Как упоминается в [50], последние можно рассматривать как наиболее удобные и простые для практической реализации. Известной конечно-разностной схемой, применяемой для численного решения задач гемодинамики, является схема Мак-Кормака:

$$\mathbf{u}_n^* = \mathbf{u}_n^k - \frac{\Delta t}{h} (\mathbf{B}(\mathbf{u}_{n+1}^k) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_n^k)) + \Delta t \mathbf{G}(\mathbf{u}_n^k), \quad n = \overline{1, N-1},$$

$$\mathbf{u}_n^{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_n^k + \mathbf{u}_n^*) - \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{B}(\mathbf{u}_n^*) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_{n-1}^*)) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}(\mathbf{u}_n^*), \quad n = \overline{2, N},$$

где  $\mathbf{u}_n^k \approx \mathbf{u}(t_k, z_n)$ ,  $\Delta t$  – шаг по времени и  $h$  – шаг по  $z$ . Эта схема является явной и имеет второй порядок аппроксимации по обоим переменным.

В условии (9) можно провести следующую аппроксимацию

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t_{k+1}, z_N) \approx \frac{P_N^{k+1} - P_N^k}{\Delta t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(t_{k+1}, z_N) \approx \frac{Q_N^{k+1} - Q_N^k}{\Delta t}.$$

Аналогичным образом можно осуществить аппроксимацию в условиях совместности. Для дальнейшей дискретизации этих условий произведем снос нелинейностей на предыдущий слой по времени:  $\mathbf{l}_\pm(\mathbf{u}_i^{k+1}) \approx \mathbf{l}_\pm(\mathbf{u}_i^k)$ ,  $\lambda_\pm(\mathbf{u}_i^{k+1}) \approx \lambda_\pm(\mathbf{u}_i^k)$ ,  $\mathbf{W}(\mathbf{u}_i^{k+1}) \approx \mathbf{W}(\mathbf{u}_i^k)$ . В работе [28] предложено аппроксимировать производную  $\mathbf{u}$  по  $z$  конечными разностями вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(t_{k+1}, z_1) &\approx \frac{1}{60h} \left( -147\mathbf{u}_1^{k+1} + 360\mathbf{u}_2^{k+1} - 450\mathbf{u}_3^{k+1} + 400\mathbf{u}_4^{k+1} - \right. \\ &\quad \left. -225\mathbf{u}_5^{k+1} + 72\mathbf{u}_6^{k+1} - 10\mathbf{u}_7^{k+1} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(t_{k+1}, z_N) &\approx \frac{1}{60h} \left( 147\mathbf{u}_N^{k+1} - 360\mathbf{u}_{N-1}^{k+1} + 450\mathbf{u}_{N-2}^{k+1} - 400\mathbf{u}_{N-3}^{k+1} + \right. \end{aligned}$$



$$+225\mathbf{u}_{N-4}^{k+1} - 72\mathbf{u}_{N-5}^{k+1} + 10\mathbf{u}_{N-6}^{k+1} \Big).$$

Такие приближения имеют шестой порядок аппроксимации по пространству.

Таким образом, после дискретизации всех производных получаются системы уравнений относительно значений  $A$  и  $Q$  в граничных узлах и точках ветвления. Заметим, что для входа первого сосуда система будет линейной, тогда как для выходов терминальных сосудов, точек соединения и ветвления она будет нелинейной, но для ее решения эффективно можно применять метод Ньютона–Рафсона. Если при расчетах в качестве начальных приближений использовать значения с предыдущего слоя по времени, то легко получить сходимость с абсолютной точностью  $10^{-8}$  не более чем за пять итераций [28].

**4. Актуальные задачи.** Задачи моделирования течения крови на основе уравнений одномерных моделей являются одними из наиболее интересных в современной биомеханике. Помимо задач, связанных с моделированием конкретных типов течений и решением задач медицины, в этой области есть ряд теоретических задач, связанных с решением уравнений и разработкой новых моделей.

Можно выделить следующие направления в области одномерных математических моделей (помимо их непосредственного применения), развитие которых в настоящее время представляет интерес для исследователей.

**4.1. Получение аналитических решений.** Несмотря на то, что уравнения системы (3) являются нелинейными, для ряда упрощенных задач можно получить аналитические решения. Такие решения используются для разных целей: для анализа качественных свойств моделей, для их сравнения и для тестирования программ, реализующих численные методы.

Для модели, в рамках которой не учитывается вязкость крови, актуальность имеет решение задачи Римана о распространении разрыва. Это решение позволяет исследовать некоторые особенности течения крови в крупных венах [35] и может использоваться в конечно-объемных схемах (например, схемах Годунова). Решения задач Римана для одномерных уравнений гемодинамики получены в работах [35, 54–56]. Решения получают для конкретной модели крови как жидкости и модели сосудистой стенки, а также зависят от начальной конфигурации разрыва. Для получения таких решений приходится привлекать численные методы решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Для получения гладких решений задач для (3) в случае течений в сосудах упрощенной конфигурации (бесконечный, полубесконечный или конечный с условиями периодичности на концах), можно применять метод малого параметра. Выписывая систему (3), замкнутую уравнением (5) для ньютоновской модели в безразмерном виде, получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{2\chi}{3} A^{\frac{3}{2}} \right) = -\varepsilon \frac{Q}{A}, \quad (10)$$

где  $\chi = \gamma \sqrt{A_C}/U_C^2$ ,  $\gamma = \beta/(2\rho A_d)$ ,  $\varepsilon = 4KT_C/A_C$ ,  $A_C$  – характерная площадь поперечного сечения,  $U_C$  – характерная скорость,  $T_C$  – характерное время. Как показано в [39], в случае крупных артерий параметр  $\varepsilon$  можно считать малым, в связи с чем для решения задач для системы (10) можно применять метод возмущений, основанный на представлении решения в виде разложения по степеням малого параметра. В работах [39, 40, 50, 57] предложены разные варианты метода возмущений для задач в случаях невязкой, ньютоновской и различных неньютоновских моделей крови. В указанных статьях решены упрощенные задачи в случае первого и второго приближений по  $\varepsilon$  и исследованы качественные свойства полученных решений.

Другим типом задач, которые могут быть решены аналитически, являются задачи о нахождении стационарных решений. Такие решения не имеют физиологического смысла, поскольку течение крови является пульсирующим и существенно нестационарным. Квазистационарные режимы течения могут проявляться разве что в случае сильно закупоренных сосудов, а также в случае течений в микрососудах, когда рассмотрение крови как жидкости вообще вызывает вопросы. Между тем, стационарные решения могут использоваться для качественного сравнения друг с другом разных моделей крови. В области разработки численных методов важны схемы с *full balanced property*, которое означает способность схемы сохранять все стационарные решения, характерные для системы (3). Стационарным решениям уравнений одномерной гемодинамики посвящено значительное число работ [48, 58–63].

Стационарные режимы течения определяются условием

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, из первого уравнения системы (3), выписанной в безразмерном виде, получим  $Q = Q_0 = \text{const}$ . Ниже будет рассмат-

риваться случай  $Q_0 \neq 0$  – так называемое *moving steady state* [60]. Случай  $Q_0 = 0$  называется *dead man steady state*. Второе уравнение сведется к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz} \left( \alpha \frac{Q_0^2}{A} + \frac{2\chi}{3} A^{\frac{3}{2}} \right) = f(A, Q_0). \quad (11)$$

После интегрирования (11) получим нелинейное уравнение для нахождения  $A(z)$ :

$$F(A(z)) - F(A_0) - Q_0(z - z_0) = 0, \quad (12)$$

где  $A_0 = A(z_0)$ . Необходимо отметить, что (11) можно точно проинтегрировать только для нескольких моделей. Так, в случае ньютоновской модели имеем

$$F(A) = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\alpha Q_0^2 \ln(A) + \frac{2\chi}{5} A^{\frac{5}{2}} \right),$$

а для степенной неньютоновской модели получим

$$F(A) = \frac{1}{\zeta Q_0^{n-1} s'(1) |s'(1)|^{n-1}} \left( -\frac{2\alpha Q_0^2 A^{\frac{3n-3}{2}}}{3(n-1)} + \frac{2\chi A^{\frac{3n+2}{2}}}{3n+2} \right),$$

где  $\zeta = -KU_C^{n-1} T_C / A_C^{\frac{n+1}{2}}$ . В общем случае, интегрирование (11) проводится численно. Уравнение (12) представляет собой нелинейное уравнение относительно  $A = A(z)$  при фиксированном  $z$ . Вопросам существования решений уравнений (11), (12) для разных моделей крови и их анализу посвящена работа [63]. Отметим, что существует большое число одномерных моделей, которые описывают в том числе и микротечения, для которых еще не получены стационарные решения.

**4.2. Построение и анализ многофазных моделей.** В моделях, представленных ранее, кровь моделировалась как однородная среда, в которой совместно учитывались и жидкая, и клеточная части. Альтернативным подходом к описанию крови является ее рассмотрение как многофазной или гетерогенной среды, в рамках которой плазма и клеточная часть рассматриваются отдельно и описываются отдельными уравнениями. Для описания пространственных течений такие модели предложены в ряде работ. В [64, 65]

представлена модель, в которой динамика клеточной части описывается неньютоновской моделью. Многофазные модели на основе гипотезы взаимопроникающих континуумов предложены в [66–69]. Актуальными можно признать задачи о построении одномерных осредненных аналогов этих моделей с использованием того же подхода, что и для однофазных моделей. Преимуществом таких моделей является то, что в них естественным образом будет вводиться учет и клеточной, и жидкой частей крови и нет необходимости в специальном задании выражения для безразмерного профиля скорости, как это было для моделей, описанных ранее.

В рамках одномерных моделей отдельный интерес представляют многослойные многофазные модели, в рамках которых клеточная и жидкая части крови локализованы в конкретных областях в пространстве. Подобные модели встречаются в задачах описания динамики волн в рамках теории мелкой воды [70–72]. Для описания крови такая двухслойная модель предложена в работе [73], где решена задача Римана. Интересными являются задачи о применении такой модели для моделирования кровотока в моделях реальных сосудистых систем.

Другим классом многофазных моделей являются модели на основе кинетических уравнений типа Больцмана, в которых в столкновительных членах описываются процессы взаимодействия клеток крови между собой. Одномерные модели на основе такого подхода предложены в [74, 75]. Кинетический подход пока не нашел широкого распространения, хотя в его рамках можно корректно учесть многие биофизические процессы на клеточном уровне.

**4.3. Разработка новых численных методов.** Как уже отмечалось выше, для численного решения задач одномерной гемодинамики разработано большое число методов, основанных на разных подходах к дискретизации по времени и пространственной переменной. При этом до сих пор остается актуальной задача о построении разностных схем решения задач на графах, с использованием которых за относительно небольшое время получались бы приемлемые по точности численные решения. Такими свойствами обладают схемы, основанные на использовании идеи расщепления по физическим процессам. В рамках такого подхода на одном шаге по времени последовательно решаются задачи, описывающие разные физические процессы [76]. Например, в случае задачи, описывающей течение жидкости в деформируемом сосуде, в качестве таких процессов можно рассматривать деформацию сосуда вследствие протекания находя-

щейся в нем жидкости с известным полем скоростей и установление течения в уже деформированном сосуде.

Для численного моделирования течений крови в одномерном приближении различные варианты схем расщепления предлагались в работах [48–50, 77]. В [48, 49] этапы метода расщепления состоят в последовательном расчете конвективного течения жидкости в рамках невязкой модели и затем в решении задачи с учетом вязкости без конвективных членов. В [50, 77] рассматривается модель сосуда со стенкой из вязкоупругого материала и при расщеплении последовательно моделируются процессы деформации с отдельными вкладками упругой и вязкоупругой компонент.

Одним из важных преимуществ методов расщепления является возможность использования на разных этапах различных схем, обладающих, к примеру, разными ограничениями на шаг по времени, обусловленными условиями устойчивости. При этом на каком-то из этапов можно вообще рассматривать неявные схемы, которые часто являются безусловно устойчивыми. Интерес представляют и задачи практической реализации подобных схем, особенно связанные с параллельной реализацией основных вычислительных алгоритмов и разработкой новых комплексов прикладных программ.

## Литература

1. Gallo D., Anayiotos A., Morbiducci U. The evolution of computational hemodynamics as a clinical tool in decision making, patient specific treatment and clinical management. Part II // *Annals of Biomedical Engineering*. 2015. Vol. 43. P. 1273–1274.
2. Василевский Ю. В., Симаков С. С., Гамилов Т. М. и др. Персонализация математических моделей в кардиологии: трудности и перспективы // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022. Т. 14. № 4. С. 911–930.
3. Tregubov V. P., Mukhtarova D. H. A model study of blood flow in branching vessels // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2017. Т. 13. № 1. С. 42–50.
4. Tregubov V. P., Rutkina S. V. Mathematical modelling of pulsatile blood flow in deformable arteries // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. № 2. С. 158–168.

5. Трегубов В. П., Егорова Н. К. Построение механической модели левого желудочка сердца человека в процессе его сокращения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 3. С. 402–409.
6. Marchandise E., Willemet M., Lacroix V. A numerical hemodynamic tool for predictive vascular surgery // Medical Engineering and Physics. 2009. Vol. 31. P. 131–144.
7. Caro C., Pedley T., Schroter R., Seed W. The Mechanics of the Circulation. Cambridge, Cambridge University Press, 2011. 525 p.
8. Charm S., Kurland G. Viscometry of human blood for shear rates of 0 - 100,000 sec<sup>-1</sup> // Nature. 1965. Vol. 206. P. 617–618.
9. Thurston G. Viscoelasticity of human blood // Biophysical Journal. 1972. Vol. 12. P. 1205–1217.
10. Pedley T. The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge, Cambridge University Press, 1980. 447 p.
11. Cho Y., Kensey K. Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. Part 1: Steady flows // Biorheology. 1991. Vol. 28. P. 241–262.
12. Yilmaz F., Gundogdu M. Y. A critical review on blood flow in large arteries; relevance to blood rheology, viscosity models, and physiological conditions // Korea Australia Rheology Journal. 2008. Vol. 20. P. 197–211.
13. Sankar D., Hemalatha K. Non-linear mathematical models for blood flow through tapered tubes // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 188. P. 567–582.
14. Bilgi C., Atalik K. Effects of blood viscoelasticity on pulsatile hemodynamics in arterial aneurysms // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2000. Vol. 279. Art. no. 104263.
15. Gudino E., Oishi C., Sequeira A. Influence of non-Newtonian blood flow models on drug deposition in the arterial wall // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2019. Vol. 274. Art. no. 104206.

16. Gijssen F., Allanic E., van de Vosse F., Janssen J. The influence of non-Newtonian property of blood on the flow in large arteries: unsteady flow in a 90<sup>0</sup> curved tube // *Journal of Biomechanics*. 1999. Vol. 32. P. 705–713.
17. Irgens F. *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Berlin, Springer, 2014. 190 p.
18. Johnston B., Johnston P., Corney S., Kilpatrick D. Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: steady state simulations // *Journal of Biomechanics*. 2004. Vol. 37. P. 709–720.
19. Karimi S., Dabagh M., Vasava P. et al. Effect of rheological models on the hemodynamics within human aorta: CFD study on CT image-based geometry // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2014. Vol. 207. P. 42–52.
20. Moradicheghamahi J., Sadeghiseraji J., Jahangiri M. Numerical solution of the pulsatile, non-Newtonian and turbulent blood flow in a patient specific elastic carotid artery // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 150. P. 393–403.
21. Molla M., Paul M. LES of non-Newtonian physiological blood flow in a model of arterial stenosis // *Medical Engineering and Physics*. 2012. Vol. 34. P. 1079–1087.
22. Razavi A., Shirani E., Sadeghi M. Numerical simulation of blood pulsatile flow in a stenosed carotid artery using different rheological models // *Journal of Biomechanics*. 2011. Vol. 44. P. 2021–2030.
23. Razavi M., Shirani E. Development of a general methods for designing microvascular using distribution of wall shear stress // *Journal of Biomechanics*. 2013. Vol. 46. P. 2303–2309.
24. Boyd J., Buick J., Green S. Analysis of the Casson and Carreau–Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flows using the lattice Boltzmann method // *Physics of Fluids*. 2007. Vol. 19. Art. no. 093103.
25. Elhanafy A., Guaily A., Elsaid A. Numerical simulation of blood flow in abdominal aortic aneurysms: effects of blood shear-thinning and viscoelastic properties // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2019. Vol. 160. P. 55–71.

26. Abbasian M., Shams M., Valizadeh Z. et al. Effects of different non-Newtonian models on unsteady blood flow hemodynamics in patient-specific arterial models with in-vivo validation // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020. Vol. 186. P. 105185.
27. O'Callaghan S., Walsh M., McGloughlin T. Numerical modelling of Newtonian and non-Newtonian representation of blood in a distal end-to-side vascular bypass graft anastomosis // *Medical Engineering and Physics*. 2006. Vol. 28. P. 70–74.
28. Krivovichev G. V. Computational analysis of one-dimensional models for simulation of blood flow in vascular networks // *Journal of Computational Science*. 2022. Vol. 62. Art. no. 101705.
29. Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // *Journal of Engineering Mathematics*. 2003. Vol. 47. P. 251–276.
30. Canic S., Kim E. Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model blood flow through compliant axi-symmetric vessels // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2003. Vol. 26. P. 1161–1186.
31. Ghigo A. R., Lagree P.-Y., Fullana J.-M. A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2018. Vol. 253. P. 36–49.
32. Ashmetkov I. V., Mukhin S. I., Sosnin N. V. et al. Analysis and comparison of some analytic and numerical solutions of hemodynamic problems // *Differential Equations*. 2000. Vol. 36. P. 1021–1026.
33. Britton J., Xing Y. Well-balanced discontinuous Galerkin methods for the one-dimensional blood flow through arteries model with man-at-eternal-rest and living-man equilibria // *Computers and Fluids*. 2020. Vol. 203. Art. no. 104493.
34. Ilyin O. O. Nonlinear pressure-velocity waveforms in large arteries, shock waves and wave separation // *Wave Motion*. 2019. Vol. 84. P. 56–67.
35. Toro E. F. Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling. A review // *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 272. P. 542–579.



36. Артюшков Л. С. Динамика неньютоновских жидкостей. СПб.: Изд. центр Мор. техн. ун-та, 1997. 459 с.
37. Mattys K., Alastruey J., Peiro J. et al. Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D numerical simulations against in vitro measurements // Journal of Biomechanics. 2007. Vol. 40. P. 3476–3486.
38. Puelz C., Canic S., Riviere B. et al. Comparison of reduced models for blood flow using Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // Applied Numerical Mathematics. 2017. Vol. 115. P. 114–141.
39. Krivovichev G. V. Comparison of inviscid and viscid one-dimensional models of blood flow in arteries // Applied Mathematics and Computation. 2022. Vol. 418. Art. no. 126856.
40. Krivovichev G. V. Comparison of non-Newtonian Models of one-dimensional hemodynamics // Mathematics. 2021. Vol. 9, No 19. Art. no. 2459.
41. Провоторов В. В., Ряжских В. И., Гнилицкая Ю. А. Однозначная слабая разрешимость нелинейной начально-краевой задачи с распределенными параметрами в сетеподобной области // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 3. С. 264–277.
42. Zhabko A. P., Shindyapin A. I., Provotorov V. V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 457–471.
43. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Part A. A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 1. С. 107–117.
44. Zhabko A. P., Nurtazina K. B., Provotorov V. V. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters

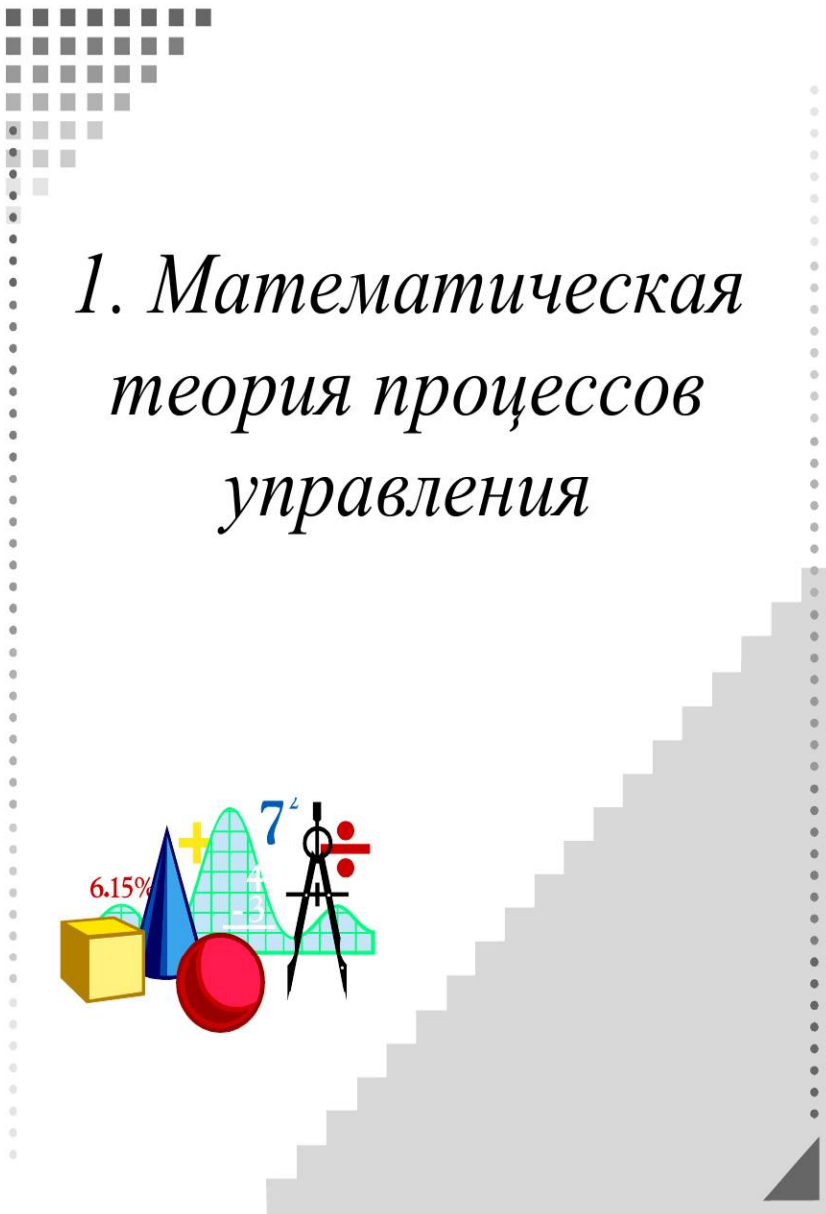
on the graph-star // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 2. С. 129–143.

45. Холодов Я. А. Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 5. С. 777–814.
46. Xiao N., Alastruey J., Figueroa C. A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2014. Vol. 30. P. 203–231.
47. Cavallini N., Caleffi V., Coscia V. Finite volume and WENO scheme in one-dimensional vascular system modelling // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. No 9. P. 2382–2397.
48. Delestre O., Lagree P.-Y. A well-balanced finite volume scheme for blood flow simulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2013. Vol. 72. No 2. P. 177–205.
49. Delestre O., Ghigo A., Fullana J.-M., Lagree P.-Y. A shallow water with variable pressure model for blood flow simulation // Networks and Heterogeneous Media. 2016. Vol. 11. No 1. P. 69–87.
50. Wang X., Fullana J.-M., Lagree P.-Y. Verification and comparison of four numerical schemes for a 1D viscoelastic blood flow model // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 2015. Vol. 18. P. 1704–1725.
51. Bessems D., Rutten M., van de Vosse F. A wave propagation model of blood flow in large vessels using an approximate velocity profile function // Journal of Fluid Mechanics. 2007. Vol. 580. P. 145–168.
52. Elad D., Katz D., Kimmel E. et al. Numerical schemes for unsteady fluid flow through collapsible tubes // Journal of Biomedical Engineering. 1991. Vol. 13. No 1. P. 10–18.
53. Olufsen M., Peskin C., Kim W. et al. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions // Annals of Biomedical Engineering. 2000. Vol. 28. P. 1281–1299.

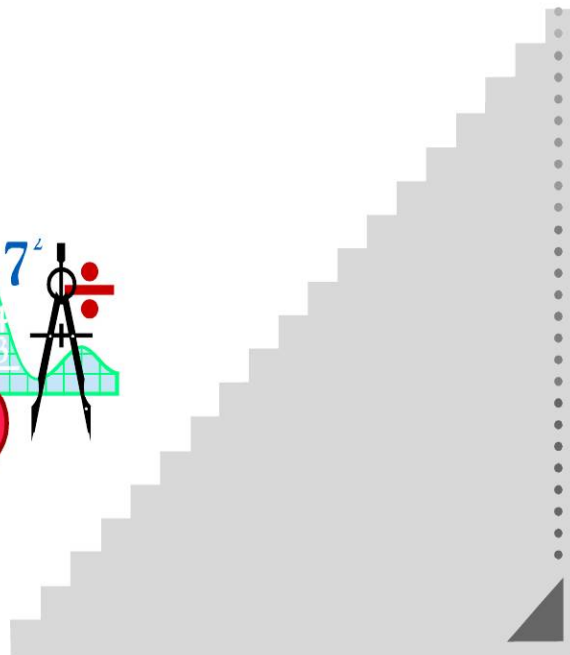
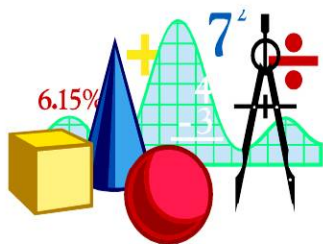
54. Sheng W., Zheng Q., Zheng Y. The Riemann problem for a blood flow model in arteries // *Communications in Computational Physics*. 2020. Vol. 27. P. 227–250.
55. Toro E. F., Siviglia A. Flow in collapsible tubes with discontinuous mechanical properties: Mathematical model and exact solutions // *Communications in Computational Physics*. 2013. Vol. 13. P. 361–385.
56. Spiller C., Toro E. F., Vazquez-Cendon M. E. et al. On the exact solution of the Riemann problem for blood flow in human veins, including collapse // *Applied Mathematics and Computation*. 2017. Vol. 303. P. 178–189.
57. Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П. Исследование влияния вязкого трения на пульсовую волну // *Дифференциальные уравнения*. 2006. Т. 42. № 7. С. 979–993.
58. Britton J., Xing Y. Well-balanced discontinuous Galerkin methods for the one-dimensional blood flow through arteries model with man-at-eternal-rest and living-man equilibria // *Computers and Fluids*. 2020. Vol. 203. Art. no. 104493.
59. Ghigo A., Delestre O., Fullana J.-M. et al. Low-Shapiro hydrostatic reconstruction technique for blood flow simulation in large arteries with varying geometrical and mechanical properties // *Journal of Computational Physics*. 2017. Vol. 331. P. 108–136.
60. Ghitti B., Berthon C., Le M. et al. A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term // *Journal of Computational Physics*. 2020. Vol. 421. Art. no. 109750.
61. Hernandez-Duenas G., Ramirez-Santiago G. A well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for one-dimensional blood flow models // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2021. Vol. 93. P. 369–395.
62. Мухин С. И., Меняйлова М. А., Соснин Н. В. и др. Аналитическое исследование стационарных гемодинамических течений в эластичной трубке с учетом трения // *Дифференциальные уравнения*. 2007. Т. 43. № 7. С. 987–991.

63. Krivovichev G. V. Steady-state solutions of one-dimensional equations of non-Newtonian hemodynamics // International Journal of Biomathematics. 2022. Vol. 15. No 6. Art. no. 2250033.
64. Wu W.-T., Yang F., Antaki J. et al. Study of blood flow in several benchmark micro-channels using a two-fluid approach // International Journal of Engineering Science. 2015. Vol. 95. P. 49–59.
65. Wu W.-T., Yang F., Aubry N. et al. Transport of platelets induced by red blood cells based on mixture theory // International Journal of Engineering Science. 2017. Vol. 118. P. 16–27.
66. Jung J., Hassanein A. Three-phase CFD analytical modeling of blood flow // Medical Engineering and Physics. 2008. Vol. 30. P. 91–103.
67. Massoudi M., Kim J., Antaki J. Modeling and numerical simulation of blood flow using the theory of interacting continua // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2012. Vol. 47. P. 506–520.
68. Kim J., Antaki J., Massoudi M. Computational study of blood flow in microchannels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 292. P. 174–187.
69. Wu W.-T., Aubry N., Antaki J. et al. A non-linear fluid suspension model for blood flow // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2019. Vol. 109. P. 32–39.
70. Aguillon N., Audusse E., Godlewski E. et al. Analysis of the Riemann problem for a shallow water model with two velocities // SIAM Journal of Mathematical Analysis. 2018. Vol. 50. P. 4861–4888.
71. Abgrall R., Karni S. Two-layer shallow water system: A relaxation approach // SIAM Journal of Scientific Computing. 2009. Vol. 31. P. 1603–1627.
72. Audusse E. A multilayer Saint–Venant model: Derivation and numerical validation // Discrete and Continuous Dynamical Systems B. 2005. Vol. 5. P. 189–214.
73. Zhang Q., Sheng W., Xiao T. Riemann problem and Godunov-type scheme for a two-layer blood flow model // Applied Mathematics Letters. 2023. Vol. 35. P. 32–39.

74. Гаврилюк К. В., Лукшин А. В. О методе точечных маркеров в задачах гемодинамики // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 7. С. 934–940.
75. Гаврилюк К. В. Кинетический подход в задачах гемодинамики // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 11. С. 115–127.
76. Toro E. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a Practical Introduction. Berlin, Springer, 2009. 738 p.
77. Malossi A., Blanco P., Deparis S. A two-level time step technique for the partitioned solution of one-dimensional arterial networks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2012. Vol. 237–240. P. 212–226.



# *1. Математическая теория процессов управления*





УДК 517.977

Андрянова Н. Р.

### Задача равномерного распределения на отрезке для линейных мультиагентных дискретных систем с переключениями и запаздываниями

*Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.*

**1. Введение.** Задача равномерного размещения конечного числа агентов, где каждый участник знает текущие расстояния до своих правого и левого соседей, решена в работах [1, 2], в которых рассмотрены как дискретные, так и непрерывные линейные системы динамики агентов. Непрерывный случай неравномерного распределения агентов с двумя частными протоколами приведен в статье [3].

Схема общения агентов может меняться со временем за счет переключений между конечным набором коммуникационных топологий. Показано [4], что сходимость к эквидистантным положениям в непрерывном случае гарантируется вне зависимости от величины запаздывания в протоколе и выбора закона переключений, когда каждый агент осведомлен о расстояниях до одного из его левых и одного из его правых соседей. Дискретный аналог системы динамики агентов привел к подобным результатам [5].

Когда каждый агент получает информацию о расстояниях между несколькими его правыми и левыми соседями, как это представлено, например, в [6, 7], сходимость к эквидистантным положениям гарантируется вне зависимости от запаздывания и переключений в непрерывном случае [7]. В статье [8] предложено управление в ситуации, когда агенты узнают расстояния до некоторых своих соседей через вспомогательных участников.

Данная работа предполагает, что динамика агентов задана линейными уравнениями и получение информации о расстоянии до информаторов происходит с уникальным для каждой связи запаздыванием. Результат работы [7] распространен на случай дискретного времени, также приведен пример, иллюстрирующий теорию.

---

*Андрянова Наталья Романовна* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st040174@student.spbu.ru, тел.: +7(981)940-80-79



**2. Постановка задачи.** Имеется  $n$  агентов на прямой. Каждый из них обладает информацией об относительном положении нескольких других агентов. Считаем, что есть  $S$  коммуникационных топологий (структур связей) и задан закон переключений  $\sigma$  между ними. Множество  $N_i^{(\sigma(k))}$  представляет собой множество номеров соседей (информаторов)  $i$ -го агента на момент отсчета  $k$ . В  $N_i^{(\sigma)}$  могут входить номера 0 и  $n + 1$ , обозначающие границы отрезка  $[a, b]$  равномерного распределения агентов. Обозначаем  $N_{il}^{(\sigma)}$  и  $N_{ir}^{(\sigma)}$  непустые множества номеров левых и правых соседей  $i$ -го агента. Желаемым состоянием будут точки

$$\tilde{x}_i = a + \frac{i}{n+1}(b-a), \quad i = 1, \dots, n.$$

При  $i = 0$  и  $i = n + 1$  получим границы отрезка. Далее под  $\text{card}(A)$  будем понимать количество элементов множества  $A$ . Имеем дискретную систему уравнений динамики  $n$  агентов

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Выбран линейный протокол с некоторыми постоянными целыми неотрицательными запаздываниями  $r_{ij}$ :

$$u_i(k) = \sum_{j \in N_i^{(\sigma)}} a_{ij}^{(\sigma)} (x_j(k - r_{ij}) - x_i(k)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Коэффициенты  $a_{ij}^{(\sigma)}$  задаются по формулам из работы [7], где был построен протокол для непрерывного случая:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(\sigma)} &= \frac{\omega_i^{(\sigma)}}{(i-j)q_{il}^{(\sigma)}}, \quad j \in N_{il}^{(\sigma)}, \quad q_{il}^{(\sigma)} = \text{card}(N_{il}^{(\sigma)}), \\ a_{ij}^{(\sigma)} &= \frac{\omega_i^{(\sigma)}}{(j-i)q_{ir}^{(\sigma)}}, \quad j \in N_{ir}^{(\sigma)}, \quad q_{ir}^{(\sigma)} = \text{card}(N_{ir}^{(\sigma)}), \\ a_{ij}^{(\sigma)} &= 0 \quad \text{в остальных случаях,} \\ \omega_i^{(\sigma)} &\left( \sum_{j \in N_{il}^{(\sigma)}} \frac{1}{(i-j)q_{il}^{(\sigma)}} + \sum_{j \in N_{ir}^{(\sigma)}} \frac{1}{(j-i)q_{ir}^{(\sigma)}} \right) = 1. \end{aligned}$$

Задача заключается в том, чтобы определить, будет ли дискретная система, соответствующая динамике агентов (1) с линейным протоколом (2), асимптотически устойчивой.

**3. Анализ устойчивости.** Выпишем систему (1), замкнутую управлением (2), в виде

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\sigma)} x_j(k - r_{ij}) + a_{i0}^{(\sigma)} a + a_{i,n+1}^{(\sigma)} b, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

**Теорема.** Предполагается, что агентам известны порядковые номера информаторов и пусть  $N_{il}^{(\sigma)} \neq \emptyset$  и  $N_{ir}^{(\sigma)} \neq \emptyset$ . Тогда решение  $\tilde{x}$  разностной системы (3) асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** С помощью замены  $y(k) = x(k) - \tilde{x}$  перейдем к системе в отклонениях:

$$y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\sigma)} y_j(k - r_{ij}) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\sigma)} \tilde{x}_j + a_{i0}^{(\sigma)} a + a_{i,n+1}^{(\sigma)} b - \tilde{x}_i.$$

Можно убедиться, что  $\sum_{j \in N_i^{(\sigma)}} a_{ij}^{(\sigma)} \tilde{x}_j = \tilde{x}_i$ , если  $\tilde{x}_0 = a$  и  $\tilde{x}_{n+1} = b$ , и неоднородность пропадет. Очередной заменой [5]

$$z(k) = (y(k), y(k-1), \dots, y(k - r_{max}))^T, \quad r_{max} = \max_{i,j=1,\dots,n} r_{ij}$$

приходим к расширенному виду системы  $z(k+1) = C^{(\sigma)} z(k)$  с неотрицательной матрицей

$$C^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{A}_1^{(\sigma)} & \dots & \mathbb{A}_{r_{max}-1}^{(\sigma)} & \mathbb{A}_{r_{max}}^{(\sigma)} \\ E_n & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & E_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}_{n(r_{max}+1) \times n(r_{max}+1)}$$

Блоки  $\mathbb{A}_l^{(\sigma)}$  составляются из элементов  $a_{ij}^{(\sigma)}$  следующим образом. У блока  $\mathbb{A}_l^{(\sigma)}$  компонента  $(i, j)$  равна  $a_{ij}^{(\sigma)}$ , если  $r_{ij} = l$ , иначе говоря, если индекс  $l$  совпал с какими-либо запаздываниями  $r_{ij}$ , соответствующими  $j$ -м компонентам вектора состояния  $y$ . В остальных случаях элементы  $\mathbb{A}_l^{(\sigma)}$  равны 0.

Для позитивных систем

$$z(k+1) = C^{(s)}z(k), \quad s \in \{1, \dots, S\}$$

известно [9], что условие асимптотической устойчивости эквивалентно существованию покомпонентно положительного вектора  $\xi$ , такого что  $C^{(s)}\xi < \xi$ . Покажем, что для вектора

$$\zeta = \left( \xi - r_{max}\delta\nu, \dots, \xi - \delta\nu, \xi \right)^T,$$

где  $\nu$  — единичный столбец размерности  $n$ ,  $\delta > 0$  — достаточно малая, чтобы компоненты вектора  $\zeta$  оставались положительными и  $\xi_i = 1 - \frac{1}{2^i}$ , будет выполнено условие  $C^{(s)}\zeta < \zeta$  для всех  $s = \overline{1, n}$ . Проверим первые  $n$  неравенств этой системы условий:

$$\sum_{i=1}^{r_{max}} \mathbb{A}_i^{(s)}(\xi - (r_{max} - i)\delta\nu) < \xi - r_{max}\delta\nu. \quad (4)$$

За счет позитивности матрицы  $A$  при  $\delta = 0$  получим

$$\sum_{i=1}^{r_{max}} \mathbb{A}_i^{(s)}\xi = \{a_{ij}^{(s)}\}_{i,j=1,\dots,n}\xi < \xi,$$

как показано в работах [5, 7]. Значит, неравенство (4) выполнено и при малых  $\delta > 0$ .

Следующие наборы по  $n$  неравенств из условия  $C^{(s)}\zeta < \zeta$  имеют вид:

$$\xi - (r_{max} - j + 1)\delta\nu < \xi - (r_{max} - j)\delta\nu, \quad j = 1, \dots, r_{max}$$

и всегда справедливы ввиду положительности  $\delta$ .

Найденный вектор  $\zeta$  будет общим для всех подсистем, что означает асимптотическую устойчивость для системы при любых переключениях и конечных неотрицательных запаздываниях.

**4. Численное моделирование.** Выбрана система из четырех агентов и две топологии, описание которых представлено в таблице. Распределение выполнено на промежутке  $[0, 1]$ . Топология меняется в каждый пятый отсчет, начиная с  $\sigma(1) = 1$ , т.е. в моменты  $k = 1, 6, 11, \dots$ . Начальные значения  $x(k_0 - r_{max})$ , где  $k_0 = 0, \dots, r_{max}$ , считаем постоянными, равными начальной позиции из таблицы.

Таблица. Коммуникация агентов

№ агента	Начальная позиция	Информаторы	
		$\sigma = 1$	$\sigma = 2$
1	0,6	0, 2	0, 2, 4
2	-0,1	1, 3	0, 5
3	1,1	2, 4	1, 4
4	0,2	3, 5	2, 3, 5

Запаздывания заданы матрицей

$$\{r_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результат моделирования показан на рис. 1.

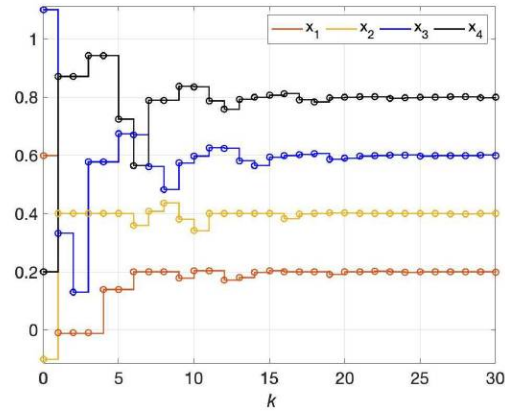


Рис. 1. Динамика агентов из примера

**5. Заключение.** Построен протокол, обеспечивающий равномерное распределение конечного числа агентов на заданном отрезке в дискретном времени. Учтена возможность наличия различных целых неотрицательных запаздываний при получении каждым агентом информации о расстоянии от себя до некоторых соседних участников. Сходимость траекторий агентов к эквидистантному состоянию не зависит от величин запаздываний и выбора закона переключений, как это было выяснено в непрерывном случае [7]. Результат продемонстрирован на примере.

## Литература

1. Wagner I. A., Bruckstein A. M. Row straightening via local interactions // *Circuits, Systems and Signal Processing*. 1997. Vol. 16. P. 287–305.
2. Shcherbakov P. S. Formation control: the van Loan setup and other algorithms // *Upravlenie Bol'shimi Sistemami*. 2010. Vol. 30. No 1. P. 681–696.
3. Воробьёва А. А. Управление мультиагентными системами с запаздыванием // *Процессы управления и устойчивость*. 2019. Т. 6. № 1. С. 31–35.
4. Aleksandrov A., Fradkov A., Semenov A. Delayed and switched control of formations on a line segment: Delays and switches do not matter // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2019. Vol. 65. No 2. P. 794–800.
5. Александров А. Ю., Семенов А. Д., Фрадков А. Л. Запаздывания и переключения не мешают размещать агентов на отрезке: дискретное время // *Автоматика и телемеханика*. 2020. № 4. С. 79–93.
6. Olfati-Saber R., Murray R. M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // *IEEE Transactions on automatic control*. 2004. Vol. 49. No 9. P. 1520–1533.
7. Aleksandrov A. Yu., Andriyanova N. R. Distributed algorithms for mobile agent deployment on a line segment under switching topology and communication delays // *IEEE Control Systems Letters*. 2022. Vol. 6. P. 3218–3223.
8. Aleksandrov A. Yu., Arakelov A. I. A problem of the equidistant deployment for discrete-time multiagent systems // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2022. Vol. 18. No 1. P. 171–178.
9. Александров А. Ю., Жабко А. П., Платонов А. В. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Изд. Дом Федоровой Г. В., 2015. 154 с.

УДК 517.929.4

Белов А. И.

## Критерий экспоненциальной устойчивости линейной системы с двумя кратными запаздываниями

*Рекомендовано к публикации доцентом Александровой И. В.*

**1. Введение.** Устойчивость дифференциальных систем с запаздыванием можно исследовать путем построения вспомогательных функционалов, называемых функционалами Ляпунова–Красовского [1] и исследовании их на положительную определенность [2]. В работах [3, 4] для определения положительной определенности успешно использовалась процедура дискретизации исходного функционала. В данной работе получен критерий экспоненциальной устойчивости системы при помощи процедуры кусочно-постоянной дискретизации.

Введем обозначения. Пусть  $H := 2h$ , а  $\varphi \in \mathcal{H}$  – кусочно-непрерывная функция, действующая из отрезка  $[-H, 0]$  в  $\mathbb{R}^n$ . Нотация  $\|\varphi\|_H$  означает  $\sup \|\varphi(\theta)\|$ ,  $\theta \in [-H, 0]$ , где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора. Нотация  $\|U\|$  означает  $\max_{\theta \in [0, H]} \|U(\theta)\|$ , где  $\|U(\theta)\|$  – евклидова норма матрицы. Нотация  $E$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица.

**2. Основные понятия.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_2x(t-2h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $h \geq 0$  – запаздывание,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_0, A_1, A_2$  – вещественные матрицы. Обозначим через  $x(t, \varphi)$  решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию  $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-H, 0]$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

**Определение 1** [1]. Система (1) экспоненциально устойчива, если существуют числа  $\gamma \geq 1, \sigma > 0$  такие, что любое решение системы  $x(t, \varphi)$  удовлетворяет неравенству  $\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_H$ ,  $t \geq 0$ .

**Определение 2** [1]. Число  $s \in \mathbb{C}$  называется собственным числом системы (1), если  $\det(sE - A_0 - A_1e^{-sh} - A_2e^{-2sh}) = 0$ .

---

*Белов Александр Иванович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: famesyasd@gmail.com, тел.: +7(911)704-23-97

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых, проект МК-2301.2022.1.1

**Определение 3** [1]. Матрица  $U(\tau)$  называется матрицей Ляпунова системы (1), если она непрерывна и удовлетворяет свойствам:

1.  $U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1 + U(\tau - 2h)A_2, \quad \tau > 0,$
2.  $U(-\tau) = U^T(\tau),$
3.  $U(0)A_0 + A_0^T U(0) + \sum_{i=1}^2 (U(-ih)A_i + A_i^T U(ih)) = -W,$

где  $W$  – симметричная матрица.

**Определение 4** [1]. Система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если не существует числа  $s \in \mathbb{C}$  такого, что  $s$  и  $-s$  – собственные числа системы.

Пусть  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Определим функционал  $v_0$

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) := & \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-H}^0 Q(\theta)\varphi(\theta)d\theta + \quad (2) \\ & + \int_{-H}^0 \int_{-H}^0 \varphi^T(\theta_1)R(\theta_1, \theta_2)\varphi(\theta_2)d\theta_1d\theta_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q(\theta) := & \sum_{i=1}^2 \chi_i(\theta)U(-ih - \theta)A_i, \\ R(\theta_1, \theta_2) := & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \chi_i(s_1)\chi_j(s_2)A_i^T U((i-j)h + \theta_1 - \theta_2)A_j, \\ \chi_i(\theta) = & \begin{cases} 1, & \theta \in [-ih, 0] \\ 0, & \theta \in [-2h, -ih). \end{cases} \end{aligned}$$

**3. Процедура кусочно-постоянной дискретизации квадратичного функционала.** Опишем процедуру, аналогичную процедуре кусочно-линейной дискретизации из работы [4]. Разобьем отрезок  $[-h, 0]$  на  $N$  отрезков длины  $\frac{h}{N}$ . Весь отрезок  $[-H, 0]$  разобьется на  $2N$  отрезков. Точки разбиения описываются как  $\theta_i := -ih/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N$ .

Введем дискретизированный функционал  $v_0^N$ , который задается выражением (2), где ядра  $Q, R$  заменены на  $Q^N, R^N$ :

$$\begin{aligned} Q^N(\theta) = & Q(\theta_i), \quad \theta \in [\theta_i, \theta_{i-1}], \quad i = 1, \dots, 2N, \\ R^N(\tau_1, \tau_2) = & R(\theta_i, \theta_j), \quad \tau_1 \in [\theta_i, \theta_{i-1}], \quad \tau_2 \in [\theta_j, \theta_{j-1}], \quad i, j = 1, \dots, 2N. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
& Q^{(1)}, Q^{(2)}, R^{(1,1)}, R^{(1,2)}, R^{(2,2)} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}, \\
& Q_i^{(1)} := U(-h + \frac{ih}{N})A_1 + U(-2h + \frac{ih}{N})A_2, \quad Q_i^{(2)} := U(-h + \frac{ih}{N})A_2, \\
& R_{i,j}^{(1,1)} := A_1^T U((j-i)\frac{h}{N})A_1 + A_1^T U(-h + (j-i)\frac{h}{N})A_2 + \\
& \quad + A_2^T U(h + (j-i)\frac{h}{N})A_1 + A_2^T U((j-i)\frac{h}{N})A_2, \\
& R_{i,j}^{(1,2)} := A_1^T U((j-i)\frac{h}{N})A_2 + A_2^T U(h + (j-i)\frac{h}{N})A_2, \\
& R_{i,j}^{(2,2)} := A_2^T U((j-i)\frac{h}{N})A_2, \quad i, j = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{H}$  дискретизированный функционал можно представить в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
v_0^N(\varphi) &= \Psi^T(\varphi)A_N\Psi(\varphi), \quad A_{N^*} := \begin{pmatrix} U(0) & Q^{(1)} & Q^{(2)} \\ Q^{(1)T} & R^{(1,1)} & R^{(1,2)} \\ Q^{(2)T} & R^{(1,2)T} & R^{(2,2)} \end{pmatrix}, \\
\Psi^T(\varphi) &= [\varphi^T(0) \quad (r^1)^T \quad \dots \quad (r^{2N})^T], \\
r^i &= \frac{h}{N} \int_0^1 \varphi(\theta_i + \alpha \frac{h}{N})d\alpha, \quad i = 1, \dots, 2N.
\end{aligned}$$

Дословно повторяя доказательство теоремы 6 [4], получим следующую теорему.

**Теорема 1** [4]. *Если система (1) удовлетворяет условию Ляпунова и матрица  $A_{N^*}$  неотрицательно определена с числом*

$$N^* := \left\lceil \frac{4K^2 \|U\| Ah^2(1 + \frac{1}{3}Ah)}{\lambda_{\min}(W)} \right\rceil,$$

то система экспоненциально устойчива. Здесь  $K := \sum_{i=0}^3 \|A_i\|$ ,  $A := \|A_1\| + 2\|A_2\|$ .

Далее дословно повторяя доказательство леммы 5 [4], заменив матрицу  $\mathcal{K}_N$  на  $\{U((j-i)\frac{h}{N})\}_{i,j=1}^N$ , получим следующую лемму.

**Лемма 1** [4]. *Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Тогда для любого  $N \in \mathbb{N}$  матрица*

$$B_{2N} := \begin{pmatrix} U(0) & \mathcal{B}_N \\ \mathcal{B}_N^T & \mathcal{K}_N \end{pmatrix}$$



неотрицательно определена. Здесь

$$\mathcal{B}_N := \left\{ U \left( -2h + \frac{ih}{N} \right) \right\}_{i=1}^{2N}, \quad \mathcal{K}_N := \left\{ U \left( (j-i) \frac{h}{N} \right) \right\}_{i,j=1}^{2N}.$$

#### 4. Необходимое условие экспоненциальной устойчивости.

В данном разделе покажем неотрицательную определенность матрицы дискретизированного функционала в случае экспоненциальной устойчивости системы.

**Теорема 2.** Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Тогда для любого  $N \in \mathbf{N}$  матрица  $A_N$  неотрицательно определена.

**Доказательство.** Покажем, что выражение  $\Psi^T A_N \Psi \geq 0$ , где

$$\Psi := (\psi^T, \psi^{(1)T}, \psi^{(2)T})^T = (\psi^T, \psi_1^{(1)T}, \dots, \psi_N^{(1)T}, \psi_1^{(2)T}, \dots, \psi_N^{(2)T})^T$$

– произвольный вектор. По определению  $A_N$  имеем

$$\begin{aligned} \Psi^T A_N \Psi &= \psi^T U(0)\psi + 2\psi^T Q^{(1)}\psi^{(1)} + 2\psi^T Q^{(2)}\psi^{(2)} + \\ &+ \psi^{(1)T} R^{(1,1)}\psi^{(1)} + 2\psi^{(1)T} R^{(1,2)}\psi^{(2)} + \psi^{(2)T} R^{(2,2)}\psi^{(2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые с матрицами  $Q^{(1)}$  и  $Q^{(2)}$

$$\begin{aligned} 2\psi^T Q^{(1)}\psi^{(1)} + 2\psi^T Q^{(2)}\psi^{(2)} &= 2\psi^T \sum_{i=1}^N U \left( -2h + \frac{ih}{N} \right) \zeta_i + \\ + 2\psi^T \sum_{i=1}^N U \left( -h + \frac{ih}{N} \right) (A_1\psi_i^{(1)} + A_2\psi_i^{(2)}) &= 2\psi^T \sum_{i=1}^{2N} U \left( -2h + \frac{ih}{N} \right) \zeta_i, \end{aligned}$$

где  $\zeta_i := A_2\psi_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\zeta_{N+i} := A_1\psi_i^{(1)} + A_2\psi_i^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Аналогично можно проверить, что

$$\begin{aligned} \psi^{(1)T} R^{(1,1)}\psi^{(1)} + 2\psi^{(1)T} R^{(1,2)}\psi^{(2)} + \psi^{(2)T} R^{(2,2)}\psi^{(2)} &= \\ = \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \zeta_i^T U \left( (j-i) \frac{h}{N} \right) \zeta_j. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что  $\Psi^T A_N \Psi = \zeta^T B_{2N} \zeta$ , где вектор  $\zeta := (\psi^T, \zeta_1^T, \dots, \zeta_{2N}^T)^T$ . По лемме 1 матрица  $B_{2N}$  неотрицательно определена, поэтому и матрица  $A_N$  неотрицательно определена.

**5. Критерий экспоненциальной устойчивости.** Из теорем 1 и 2 следует следующий критерий.

**Теорема 3.** Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и матрица  $A_{N^*}$  неотрицательно определена.

**6. Заключение.** В данной работе получен критерий экспоненциальной устойчивости для линейной стационарной системы с двумя кратными запаздываниями. Условие критерия заключается в проверке неотрицательной определенности матрицы, найденной с помощью процедуры кусочно-постоянной дискретизации квадратичного функционала с заданной производной.

## Литература

1. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 1-2. С. 110–117.
2. Егоров А. В. Новые условия экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием: дис. ... канд. физ.-мат. наук 05.13.01 / Егоров А. В. СПб., 2013 г. 135 с.
3. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time Delay Systems. Boston: Birkhauser, 2003. 353 p.
4. Belov A. I., Alexandrova I. V. Discretization of the functionals with prescribed derivative // IFAC-PapersOnLine, 2022. Vol. 55. Iss. 36. P. 169–174.

УДК 519.7

Ву И., Е П.

## Нелинейное оптимальное управление загрязнением озера с двумя типами переключений

*Рекомендовано к публикации профессором Сотниковой М. В.*

**1. Введение.** Проблема управления степенью загрязнения водоемов для промышленного предприятия всегда находится в центре внимания [1, 2]. Оптимальное управление выбросами загрязняющих веществ для линейной модели с переключениями исследовано в работе [3]. Здесь переключения описывали изменение скорости самоочищения озера в зависимости от сезона. В целях повышения точности математической модели выбросов загрязняющих веществ и получаемых результатов, в данной работе рассматривается расширенная нелинейная модель, включающая описание процесса инвестиций предприятия в чистые технологии [4] и два типа переключений. Для синтеза алгоритма управления применяется метод управления с прогнозирующими моделями. Полученные результаты иллюстрируются примером моделирования.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим модель управления выбросами загрязняющих веществ [4].

Для простоты зададим только один источник загрязнения (завод), в процессе работы которого происходит сброс загрязняющих веществ в близлежащие озера. Динамика потока загрязнения в близлежащее озеро и инвестиций завода в чистые технологии определяются нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \alpha(k(t))Y(t) - \delta s(t), & s(0) &= 0, \\ \dot{k}(t) &= I(t) - \mu k(t), & k(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $s$  – уровень загрязнения в стационарном природном водоеме

---

*Ву Ийлунь* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет;  
e-mail: wuyilun310@gmail.com, тел.: +7(812)428-44-76

*Е Пэйчэнь* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет;  
e-mail: st091519@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-44-76

(например, озере),  $k$  – уровень инвестиций в чистые технологии,  $Y \in [0, Y_{\max}]$  – скорость выброса потока загрязнения,  $\alpha(k(t)) = \rho e^{-\beta k(t)}$  – доля выбрасываемого загрязняющего вещества, которая накапливается в водоеме и уменьшается с увеличением уровня чистых технологий,  $\delta > 0$  – скорость самоочищения озера,  $I \in [0, I_{\max}]$  – инвестиции предприятия в чистые технологии,  $\mu > 0$  – постоянная амортизации. Таким образом, уравнение (1) показывает, что уровень загрязнения озера увеличивается из-за выброса загрязняющих веществ и, в то же время, уменьшается благодаря самоочищению озера и инвестициям завода.

Функционал выигрыша, определяющий чистую прибыль завода, задается в виде

$$J(Y, I) = \max_{Y(\cdot), I(\cdot)} \int_0^{\infty} e^{-rt} \left[ aY(t) \left( b - \frac{Y(t)}{2} \right) - \varphi s(t) - \frac{1}{2} cI^2 \right] dt, \quad (2)$$

где  $\varphi, a, b, c$  – положительные константы,  $b = Y_{\max}$  – максимальная допустимая скорость выбросов. С учетом изменения скорости самоочищения озера  $\delta$ , определяемого сменой сезонов года, и предела возможностей фильтрующего оборудования  $\alpha(k)$ , будем предполагать, что в модели (1) существуют два типа переключений. Одно из них зависит от времени, а другое – от состояния. Доля выбрасываемого загрязняющего вещества  $\alpha(k)$  зависит от состояния  $k(t)$  и  $\alpha(k) \in [\alpha_{\min}, \rho]$ ,  $\alpha_{\min} \in (0, 1)$ .

Скорость самоочищения озера зависит от времени  $t$ . Разобьем бесконечный горизонт на бесконечное число равных интервалов длины  $T = 1$  (год), причем каждый из этих интервалов делится на две части  $[n, n + \tau)$  и  $[n + \tau, n + 1]$ , где  $\tau \in (0, 1)$ ,  $n \in N_0$ . Первый временной подынтервал соответствует нахождению системы в первом режиме  $\delta = \delta_1 \geq 0$ , а второй временной подынтервал – нахождению системы во втором режиме  $\delta = \delta_2 \geq 0$ ,  $\delta_1 \neq \delta_2$ , что математически выражается следующим образом:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_1 \geq 0, & t \in [n, n + \tau), \\ \delta_2 \geq 0, & t \in [n + \tau, n + 1]. \end{cases}$$

**3. Управление с прогнозирующей моделью.** Управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control, MPC) является одним из современных методов теории управления [5]. MPC использует дискретную модель для прогнозирования будущих состояний системы  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$  и формирует программное управление  $u^*(x(k)) := (u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(k+N-1))$  на горизонте прогнозирования  $N$ , которое максимизирует определенную функцию стоимости на указанном горизонте при наличии ограничений. Первый элемент вычисленного вектора управления  $u^*(k)$  подается на вход системы, а остальные векторы отбрасываются. На следующем такте все действия повторяются, но относительно нового, достигнутого в текущий момент состояния объекта. Таким образом, на каждом такте процесса управления решается задача оптимизации следующего вида:

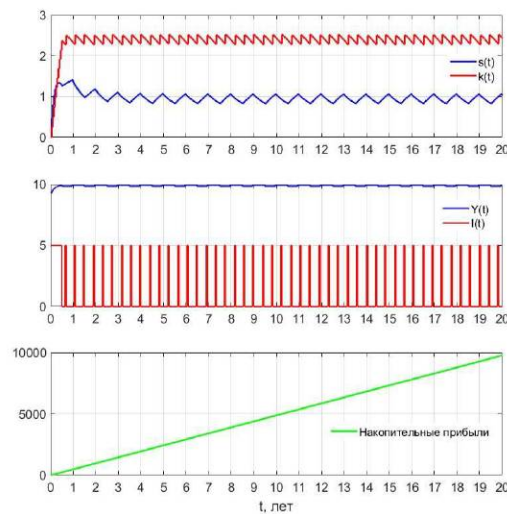
$$\begin{aligned} \max_u J_N &= \sum_{k=1}^{N-1} L(x(k), u(k)), \\ x(k+1) &= f(x(k), u(k)), \quad x(0) = x_0, \\ u(k) &\in U, \quad \forall k \in [0, N-1], \\ x(k) &\in X, \quad \forall k \in [0, N]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $X$  и  $U$  – допустимые множества состояний и управлений,  $L$  – функционал, минимизируемый на горизонте прогноза.

Для задач оптимального управления одним из классических методов решения является принцип максимума Понтрягина. Однако для рассматриваемой нелинейной модели (1), с учетом двух типов переключений, нахождение оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина является достаточно сложным. В связи с этим, в работе для решения поставленной задачи применяется метод MPC, который является удобным инструментом для решения задачи оптимального управления нелинейной системой с изменяющимися параметрами, а также может применяться к нелинейным системам с несколькими входами и несколькими выходами с учетом ограничений на состояние и управление.

**4. Применение метода МРС для решения задачи управления загрязнением озера.** Выполняя дискретизацию модели (1) и функционала (2), преобразуем исходную задачу оптимального управления в задачу нелинейного программирования вида (3).

Для моделирования, с учетом работ [6, 7], примем следующие параметры модели (1) и функционала (2):  $\rho = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0,25$ ,  $\delta_1 = 1,5$ ,  $\delta_2 = 0,5$ ,  $I_{\max} = 5$ ,  $Y_{\max} = 10$ ,  $\varphi = 10$ ,  $c = 0,3$ ,  $a = 10$ ,  $\alpha_{\min} = 0,1$ ,  $\tau = 0,5$ . Результаты моделирования показаны на рис. 1. Видно, что уровень загрязнения  $s(t)$  после первоначального роста стремится к устойчивому циклу и стабилизируется на низком уровне. Запас инвестиций  $k(t)$  также сходится к некоторому фиксированному интервалу. Накопительные прибыли показывают устойчивую тенденцию роста. Стоит отметить, что управляющие переменные изменяются в пределах допустимого диапазона и при этом они не принимают граничные значения, кроме как в изолированные периоды времени, что соответствует концепции *природоустойчивого* управления [3].



**Рис. 1.** Решение методом МРС

**5. Заключение.** В работе рассмотрена задача оптимального управления загрязнением водоема промышленным предприятием с учетом процесса инвестиций. Используя метод МРС, решена задача управления с нелинейной моделью, включающей два типа переключений. Сравнивая с предыдущими результатами, можно сделать вывод, что накопительные прибыли завода значительно увеличиваются за счет введения инвестиционного процесса. Это связано с тем, что инвестиционный план, рассчитанный методом МРС, не только удерживает загрязнение озера на низком уровне, но и поддерживает скорость производства завода близкой к максимальной, в связи с чем прибыль завода увеличивается.

### Литература

1. Jorgensen S., Martin-Herran G., Zaccour G. Dynamic games in the economics and management of pollution // *Environ Model Assess.* 2010. No 15. P. 433–467.
2. Xiao L., Liu J., Ge J. Dynamic game in agriculture and industry cross-sectoral water pollution governance in developing countries // *Agricultural Water Management.* 2021. No 243. Art. no. 106417.
3. Ийлунь В. Синтез оптимального управления в задаче регулирования степени загрязнения озера // *Современные информационные технологии и ИТ-образование.* 2022. Т. 18. № 2. С. 279–286.
4. Jorgensen S., Zaccour G. Incentive equilibrium strategies and welfare allocation in a dynamic game of pollution control // *Automatica.* 2001. Vol. 37. No 1. P. 29–36.
5. Afram A., Janabi-Sharifi F. Theory and applications of HVAC control systems – A review of model predictive control (MPC) // *Building and Environment.* 2014. No 72. P. 343–355.
6. Heutel G. How should environmental policy respond to business cycles? Optimal policy under persistent productivity shocks // *Review of Economic Dynamics.* 2012. Vol. 15. No 2. P. 244–264.
7. Arguedas C., Cabo F., Martin-Herran G. Enforcing regulatory standards in stock pollution problems // *Journal of Environmental Economics and Management.* 2020. No 100. Art. no. 102297.

УДК 517.929.4

Евтина Д. С.

## Функционалы Ляпунова – Красовского для сложных систем с запаздыванием

*Рекомендовано к публикации доцентом Александровой И. В.*

**1. Введение.** Метод функционалов Ляпунова – Красовского [1] применим в различных разделах теории управления, в частности, для анализа устойчивости систем с запаздыванием. Конструкции функционалов для линейных систем представлены в монографии [1]. Функционалы Ляпунова – Красовского для однородных систем впервые предложены в работе [2]. В статьях [3, 4] методом функций Ляпунова – Разумихина получены новые условия локальной асимптотической устойчивости сложных систем, описывающих взаимодействие нескольких однородных и линейных подсистем, при этом последние не содержат запаздываний. Целью данной работы является построение функционалов Ляпунова – Красовского для исследования устойчивости решений сложной системы, состоящей из однородной и линейной подсистем с сосредоточенным и распределённым запаздыванием.

**2. Предварительные сведения.** Рассмотрим сложную систему дифференциальных уравнений с запаздываниями  $\tau > 0$  и  $h > 0$  вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t) + R_1(t, y_t), \\ \dot{y}(t) = g(y_t) + R_2(t, x_t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь

$$f(x_t) = F_0(x(t)) + F_1(x(t-h)) + \int_{-h}^0 G(x(t+\theta))d\theta,$$

$$g(y_t) = Ay(t) + By(t-\tau) + \int_{-\tau}^0 C(\theta)y(t+\theta)d\theta,$$

функции  $F_0(x), F_1(x), G(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ , – непрерывные, однородные, липшицевые, порядка однородности  $\mu > 1$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  – постоянные матрицы, а  $C(\theta) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  – непрерывная на  $\theta \in [-\tau, 0]$  матрица.

---

*Евтина Диана Сергеевна* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: diana.evtina@mail.ru, тел.: +7(981)883-27-89



Пусть непрерывные функции  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют ограничениям

$$\|R_1(t, y_t)\| \leq \beta \left( \|y(t)\|^{\sigma_1} + \|y(t-\tau)\|^{\sigma_1} + \int_{-\tau}^0 \|y(t+\theta)\|^{\sigma_1} d\theta \right),$$

$$\|R_2(t, x_t)\| \leq \alpha \left( \|x(t)\|^{\sigma_2} + \|x(t-h)\|^{\sigma_2} + \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^{\sigma_2} d\theta \right),$$

где  $\alpha, \beta > 0, \sigma_1, \sigma_2 \geq 1$ .

В качестве пространства начальных функций рассмотрим пространство непрерывных функций  $C([-r, 0], \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ ,  $r = \max\{h, \tau\}$ .

Наряду с системой (1) рассмотрим следующие системы:

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad (2)$$

$$\dot{\xi}(t) = F_0(\xi(t)) + F_1(\xi(t)) + hG(\xi(t)), \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = g(y_t). \quad (4)$$

**Предположение 1.** Пусть  $w(x)$ ,  $\|x\| < H$ , – заданная положительно определённая однородная функция порядка  $\gamma + \mu - 1$ ,  $\gamma \geq 2$ . Существует дважды непрерывно дифференцируемая однородная порядка  $\gamma$  функция  $V(x)$ , удовлетворяющая следующему уравнению:

$$\left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \left( F_0(x(t)) + F_1(x(t)) + hG(x(t)) \right) = -w(x).$$

Функция  $V(x)$  является функцией Ляпунова системы без запаздывания (3), соответствующей однородной подсистеме (2).

**Предположение 2.** Для линейной подсистемы (4) выполнено условие Ляпунова [1].

**Замечание 1.** Известно, что если системы (3) и (4) асимптотически устойчивы, то предположения 1 и 2 заведомо выполнены.

**3. Основной результат.** Методом функционалов Ляпунова – Красовского получен следующий результат.

**Теорема.** Если системы (3) и (4) асимптотически устойчивы (неустойчивы, но выполнены предположения 1 и 2) и

$$\sigma_1 \sigma_2 > \mu > 1, \quad \sigma_2 > \frac{\mu + 1}{2}, \quad \sigma_1 \geq 1, \quad (5)$$

то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво (неустойчиво) при любом  $h \geq 0$ .

**4. Конструкция функционала.** Для доказательства теоремы построим для системы (1) функционал Ляпунова – Красовского

$$v(x_t, y_t) = v_1(x_t) + v_2(y_t). \quad (6)$$

Здесь  $v_1(\phi)$  – функционал для однородной подсистемы (2), построенный как обобщение конструкций функционалов из работ [2, 5]:

$$v_1(\phi) = V(\phi(0)) + \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=\phi(0)} \int_{-h}^0 \left( F_1(\phi(\theta)) + (\theta + h) \times \right. \\ \left. \times G(\phi(\theta)) \right) d\theta + \int_{-h}^0 \left( w_1 + (h + \theta)w_2 \right) \|\phi(\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta, \quad w_1, w_2 > 0.$$

А  $v_2(\psi)$  – функционал полного типа [1, с. 164], производная которого вдоль решений системы (4) имеет вид

$$\frac{d}{dt}v_2(y_t) = -y^T(t)W_0y(t) - y^T(t - \tau)W_1y(t - \tau) - \\ - \int_{-\tau}^0 y^T(t + \theta)W_2y(t + \theta)d\theta,$$

где постоянные матрицы  $W_0, W_1, W_2$  положительно определены. Функционал  $v_2(\psi)$  полностью определяется матрицей Ляпунова  $U(\zeta)$ ,  $\zeta \geq 0$ , системы (4) [1], ассоциированной с матрицей  $W_0 + W_1 + \tau W_2$ .

Также известно [6], что для однородных функций справедливы неравенства:

$$\|F_j(x)\| \leq f_j \|x\|^\mu, \quad \|G(x)\| \leq g \|x\|^\mu, \quad f_j, g > 0, \quad j = 0, 1, \\ w(x) \geq w \|x\|^{\gamma+\mu-1}, \quad w > 0, \quad a_1 \|x\|^\gamma \leq V(x) \leq a_2 \|x\|^\gamma, \quad a_2 > 0, \\ \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq b_1 \|x\|^{\gamma-1}, \quad \left\| \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right\| \leq b_2 \|x\|^{\gamma-2}, \quad b_1, b_2 > 0. \quad (7)$$

Зададим  $w_1, w_2$  следующим образом:  $w_0 = w - w_1 - hw_2 > 0$ .

**5. Схема доказательства теоремы. Оценки функционала и его производной.** Сначала предположим, что системы (3) и (4) асимптотически устойчивы. Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) применим теорему Красовского [1]. Для этого оценим функционал (6) и его производную вдоль решений системы (1).

**Лемма 1.** Если выполнены предположение 1 и условия (5), то существуют константы  $N_i > 0$ ,  $i = \bar{1}, \bar{6}$ , и  $H_1, H_2 > 0$  такие, что

производная функционала (6) вдоль решений системы (1) допускает оценку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(x_t, y_t) &\leq -N_1\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1} - N_2\|x(t-h)\|^{\gamma+\mu-1} - \\ &- N_3 \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta - N_4\|y(t)\|^2 - N_5\|y(t-\tau)\|^2 - \\ &- N_6 \int_{-\tau}^0 \|y(t+\theta)\|^2 d\theta, \quad \|x_t\|_h < H_1, \quad \|y_t\|_\tau < H_2. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Если системы (3) и (4) асимптотически устойчивы, то найдутся константы  $\lambda_i > 0, i = \overline{1, 4}$ , и  $H_1, H_2 > 0$  такие, что функционалы  $v_1(\phi), v_2(\psi)$  допускают оценки снизу вида

$$\begin{aligned} v_1(\phi) &\geq \lambda_1\|\phi(0)\|^\gamma + \lambda_3 \int_{-h}^0 \|\phi(\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta, \quad \|\phi\|_h \leq H_1, \\ v_2(\psi) &\geq \lambda_2\|\psi(0)\|^2 + \lambda_4 \int_{-\tau}^0 \|\psi(\theta)\|^2 d\theta, \quad \|\psi\|_\tau \leq H_2. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Оценка функционала  $v_2(\psi)$  взята из монографии [1, с. 165]. Оценка функционала  $v_1(\phi)$  получена с помощью неравенств (7). Условия (5) возникают из оценок перекрёстных слагаемых вида  $\|x(t)\|^{\gamma-1}\|y(t)\|^{\sigma_1}, \|y(t-\tau)\|^{\sigma_1}\|x(t)\|^{\gamma-2} \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^\mu d\theta, \|y(t)\|\|x(t)\|^{\sigma_2}$  и других в производной функционала.

Пусть теперь системы (3) и (4) неустойчивы, но выполнены предположения 1 и 2. В этом случае лемма 1 остаётся верной, а функция Ляпунова  $V(x)$  принимает отрицательные значения. Следовательно, существует такая константа  $a > 0$ :  $\min_{\|x\|=1} V(x) = -a$ .

**Лемма 3.** Пусть выполнено предположение 1. Если система (3) неустойчива, то  $\exists \bar{H} > 0 : \forall H \in (0, \bar{H}] \exists \bar{\phi} : \|\bar{\phi}\|_h = \|\bar{\phi}(0)\| \leq H$  такая, что  $v_1(\bar{\phi}) \leq -\beta_1\|\bar{\phi}(0)\|^\gamma, \beta_1 > 0$ .

Доказательство повторяет доказательство первой части теоремы 11 из работы [5].

**Лемма 4.** Пусть выполнено предположение 2. Если система (4) неустойчива, то существует функция  $\bar{\psi} : \|\bar{\psi}\|_\tau = \|\bar{\psi}(0)\|$  такая, что  $v_2(\bar{\psi}) \leq -\beta_2\|\bar{\psi}(0)\|^2, \beta_2 > 0$ .

Доказательство схоже с доказательством теоремы 2 из [7].

Применение подхода, разработанного в статье [5], завершает доказательство неустойчивости во второй части теоремы.

**6. Заключение.** В работе доказаны новые условия асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения сложной системы, описывающей взаимодействие линейной и однородной (порядка однородности строго больше единицы) подсистем с распределённым запаздыванием. Построенный для доказательства функционал Ляпунова–Красовского может быть применён для оценки области притяжения нулевого решения системы, оценки решений и других практических задач.

## Литература

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.
2. Александров А. Ю., Жабко А. П., Печерский В. С. Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Труды 8-й Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». Воронеж: Научная книга, 2015. С. 5–8.
3. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 3. С. 393–403.
4. Aleksandrov A. Yu., Hu G.-D., Zhabko A. P. Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems // IEEE Transactions on automatic control. 2014. Vol. 59. No 8. P. 2209–2214.
5. Zhabko A. P., Alexandrova I. V. Complete type functionals for homogeneous time delay systems // Automatica. 2021. Vol. 125. Art. no 109456.
6. Зубов В. И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). 2-е изд. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.
7. Egorov A. V., Cuvaz C., Mondie S. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica. 2017. Vol. 80. P. 218–224.

УДК 62-52

Живулин Е. А., Гришкин В. М.

### Расчет траектории обхода движущегося судна с целью экономии топлива

**1. Введение.** Обслуживание морских судов требует больших финансовых затрат, до 70% которых могут составлять расходы на топливо. Также в зависимости от того, где происходит закупка топлива, его цена может различаться. Поэтому важно не расходовать на участок маршрута больше топлива, чем было запланировано. Для построения оптимального маршрута на больших расстояниях был применен метод изохрон [1].

Однако, если на пути будет встречено другое судно, для избежания столкновения с которым будет необходимо маневрировать, это может привести к существенному росту расхода на топливо в связи с тем, что при необходимости маневрирования будет увеличена длина маршрута и с большой вероятностью потребуются увеличить скорость судна, чтобы прийти в пункт назначения вовремя. При этом, при отклонении скорости судна от оптимального значения, растёт расход топлива на единицу пути. Поэтому для избежания увеличения затрат топлива по таким причинам, как увеличение длины маршрута и увеличение скорости, а также риска возникновения необходимости закупать топливо по более высоким тарифам (в том случае, если потребуются дозаправка, если будет недостаточно топлива для достижения следующей запланированной заправки), необходимо решать задачу избежания столкновений наиболее оптимальным способом.

Для задачи обхода препятствий существует множество алгоритмов и их модификаций [2]. Для построения пути обхода препятствий судном могут быть использованы рекуррентные алгоритмы, например модифицированный алгоритм поиска оптимального пути на графе JPS+. Но он и другие подобные алгоритмы будут эффективны для поиска наиболее короткого пути в случае со статичны-

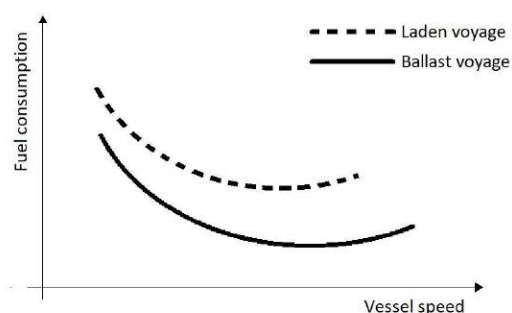
---

*Живулин Евгений Алексеевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st078725@student.spbu.ru, тел.: +7(981)876-34-42

*Гришкин Валерий Михайлович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: v.grishkin@spbu.ru, тел.: +7(921)790-86-59

ми препятствиями. В задаче обхода движущихся препятствий с возможностью изменять скорость управляемого объекта вычислительная сложность для подобных алгоритмов резко возрастает даже для одного движущегося препятствия, так как помимо различных направлений движения возникает необходимость выбирать оптимальное значение скорости. Поэтому есть потребность в разработке алгоритмов для таких задач. В данной статье решена задача для случая с одним движущимся объектом и рассмотрена возможность ее применения для нескольких движущихся объектов.

Расход топлива судна на единицу пути зависит от его скорости. На рис. 1 показаны эмпирические данные о расходе топлива на единицу пути в зависимости от скорости судна для рейса с грузом (laden) и балластного рейса (без груза – ballast) [3].



**Рис. 1.** Зависимость расхода топлива на единицу пути от скорости

Показанная на рис. 1 зависимость расхода топлива на единицу пути от скорости обусловлена нелинейностью пропульсивного коэффициента, который представляет собой отношение валовой мощности к мощности на гребном валу. Пропульсивный коэффициент зависит от формы кормы, местоположения гребного винта и ряда других факторов [4].

По причине нелинейности пропульсивного коэффициента возможен маршрут с большей длиной пути, но меньшими затратами топлива, так как движение по нему предполагает более близкую к оптимальной скорость движения. В связи с этим требуется не только построить маршрут, но и найти оптимальное распределение скоростей на различных участках этого маршрута.

**2. Обоснование выбранного алгоритма построения маршрута для избежания столкновения с экономным расходом топлива.** Для решения задачи поиска оптимального маршрута и распределения скоростей на нем потребуются минимизировать расход топлива, который можно представить в виде функции от длины участков пути и скоростей на этих участках. Таким образом, приходим к задаче минимизации данной функции.

По морским правилам есть несколько типов ситуаций риска столкновения с движущимися объектами:

- когда судно должно уступить дорогу движущемуся объекту;
- когда объект должен уступить дорогу судну;
- когда и объект и судно совершают маневр, чтобы избежать столкновения.

Рассмотрим случай, когда объект движется по правому борту судна и, в соответствии с морскими правилами при угрозе столкновения, судно должно уступить путь движущемуся объекту. Для решения данной задачи возможны два различных типа маршрутов.

1. Изменить скорость, не меняя курса. В таком случае скорость может быть скорректирована одним из следующих способов:
  - а) увеличение скорости, чтобы пройти перед объектом, после чего подбор скорости для оставшегося участка с минимально возможным расходом топлива;
  - б) замедление или остановка, чтобы объект прошел вперед, после чего движение с оптимальной или минимально необходимой скоростью для того, чтобы успеть прийти в указанную маршрутом точку вовремя.

2. Изменить маршрут, чтобы обойти объект.

Рассмотрим второй вариант подробнее. Для поиска оптимального маршрута расхождения с одним судном используется траектория, показанная на рис. 2.

Точка  $A$  – исходное положение судна,  $C$  – пункт назначения и  $B$  – поворота судна при обходе объекта. Прямые  $L_1$  и  $L_2$  являются касательными к окружности объекта, демонстрирующей минимальное расстояние сближения между судном и объектом, параллельными

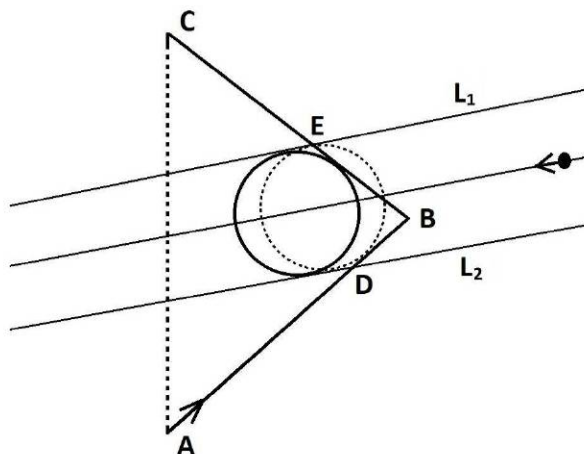


Рис. 2. Движение судна при обходе движущегося объекта

вектору скорости объекта. Окружность, изображенная пунктиром, представляет собой множество точек, которые расположены на минимально допустимом для сближения судна с объектом расстоянии в момент времени, когда судно в первый раз проходит на таком расстоянии от объекта. Вторая окружность аналогична для момента времени второго прохода судна на таком же расстоянии от объекта. Выбор данной траектории обусловлен следующими причинами.

Прямые  $L_1$  и  $L_2$  ограничивают множество точек, которые в некоторый момент времени будут нежелательны для нахождения в них судна по причине того, что в этом случае расстояние между судном и объектом будет меньше допустимого. Таким образом, эта область требует построения маршрута обхода другого судна с учетом его движения. Остальное пространство исключает возможность нахождения судна на расстоянии к объекту ближе допустимого. Поэтому участок траектории в этом пространстве, соединяющий две точки, будет оптимальным, если он будет отрезком, так как он имеет минимальную длину из всех возможных траекторий.

Отсюда следует, что траектория судна состоит из обхода объекта в области между прямыми  $L_1$  и  $L_2$  и двух отрезков: первый соединяет точки  $A$  и  $D$  на прямой  $L_2$ , второй – точки  $E$  на прямой  $L_1$  и  $C$ .

В связи с тем, что судно должно прийти из точки  $A$  в точку  $C$



с минимально возможными затратами по топливу за ограниченное время, прямые  $AD$  и  $EC$  должны быть построены так, чтобы проходя по ним, судно в определенный момент времени находилось от объекта на минимально допустимом расстоянии. В противном случае судно будет обходить объект на большем расстоянии, чем возможно и, следовательно, проходить дополнительный путь. Пренебрегая поворотами и движением судна в области, ограниченной прямыми  $L_1$  и  $L_2$ , как много меньшими, чем остальной маршрут, приходим к указанной траектории.

Точка  $B$  определяется значением скорости на прямой  $AB$ , ее направлением и временем движения по ней. Зная вектор скорости и условие того, что при движении по прямой  $BC$  судно в один из моментов времени должно находиться на минимально допустимом расстоянии от объекта, рассчитывая минимальное расстояние от объекта при движении из точки  $B$  в точку  $C$ , можно определить положение точки  $B$  при заданном векторе скорости судна, так как скорость судна на отрезке  $BC$  будет определяться, исходя из положения точки  $B$ :

- в том случае, если времени достаточно – оптимальная скорость судна;
- отношение длины отрезка  $BC$  к оставшемуся времени в том случае, если для движения с оптимальной скоростью времени на достижение точки  $C$  недостаточно.

Таким образом, имея возможность определить скорость судна на участке  $BC$  в зависимости от вектора скорости на участке  $AB$ , можно получить функцию расхода топлива в зависимости от вектора скорости на участке  $AB$ .

Минимизируя функцию расхода топлива от двух переменных, находим оптимальный маршрут для обхода одного объекта при условии пренебрежения поворотами судна в точках  $A$  и  $C$  и обходом объекта в области между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ .

**3. Расчет маршрута для избежания столкновения с движущимся объектом.** Для расчета минимального расстояния между объектом и судном перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью объекта. Тогда скорость судна

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{ship1}} - \vec{V}_{\text{obj}},$$

где  $\vec{V}_{\text{ship1}}$  — скорость судна на первом участке пути,  $\vec{V}_{\text{obj}}$  — скорость объекта.

В таком случае, объект будет неподвижен относительно введенной системы координат, а судно будет двигаться по прямой

$$y = k_1 x + (y_{\text{ship1}} - k_1 x_{\text{ship1}}), \quad (1)$$

где

$$k_1 = \frac{V_{\text{ship1}y} - V_{\text{obj}y}}{V_{\text{ship1}x} - V_{\text{obj}x}}. \quad (2)$$

Определим, проходит судно за объектом или перед ним, построив прямую, проходящую через точки исходных позиций судна и объекта, и сравнивая коэффициент, стоящий перед переменной  $x$ . В том случае, если коэффициент данной прямой меньше, чем у прямой (1), судно проходит за объектом, в противном случае — перед объектом. Затем находим расстояние от прямой до точки.

Так как минимальное желаемое расстояние между судами задается исходя из характеристик судов и известно для конкретного случая, получаем уравнение

$$D_{\min} = \frac{|k_1 x_{\text{obj1}} - y_{\text{obj1}} + y_{\text{ship1}} - k_1 x_{\text{ship1}}|}{\sqrt{k_1^2 + 1}}. \quad (3)$$

Домножая обе части равенства (3) на  $\sqrt{k_1^2 + 1}$  и возводя их в квадрат, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left( D_{\min}^2 - (x_{\text{ship1}} - x_{\text{obj1}})^2 \right) k_1^2 + 2 \left( x_{\text{ship1}} + x_{\text{obj1}} \right) \times \\ & \times \left( y_{\text{obj1}} - y_{\text{ship1}} \right) k_1 + \left( D_{\min}^2 - (y_{\text{ship1}} + y_{\text{obj1}})^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

решая которое, учитывая условие, что  $k_1$  должно быть меньше коэффициента перед  $x$  прямой, проходящей через точки  $(x_{\text{ship1}}, y_{\text{ship1}})$  и  $(x_{\text{obj1}}, y_{\text{obj1}})$ , получаем единственное значение для  $k$  при заданных параметрах.

Тогда из формулы (2)

$$V_{\text{ship1}y} = V_{\text{obj}y} + k_1 \left( V_{\text{ship1}x} - V_{\text{obj}x} \right).$$

После нахождения прямой, отрезок которой является первым участком пути при заданном значении  $V_{\text{ship}x}$ , требуется определить время движения судна по данной прямой перед поворотом. После поворота движение по второму участку пути также будет представлять собой движение по отрезку, который в один из моментов времени находится от движущегося объекта на минимально возможном расстоянии. Расчет расстояния производится по формуле

$$D_{\min} = \frac{|k_2 x_{\text{obj}2} - y_{\text{obj}2} + y_{\text{ship}2} - k_2 x_{\text{ship}2}|}{\sqrt{k_2^2 + 1}}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} x_{\text{ship}2} &= x_{\text{ship}1} + V_{\text{ship}1x} t_1, & y_{\text{ship}2} &= y_{\text{ship}1} + V_{\text{ship}1y} t_1, \\ x_{\text{obj}2} &= x_{\text{obj}1} + V_{\text{obj}x}, & y_{\text{obj}2} &= y_{\text{obj}1} + V_{\text{obj}y}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$k_2 = \frac{V_{\text{ship}2y} - V_{\text{obj}y}}{V_{\text{ship}2x} - V_{\text{obj}x}}.$$

Вектор  $\vec{V}_{\text{ship}2}$  направлен из точки  $B$  в точку  $C$ . Значение скорости  $V_{\text{ship}2}$  равно оптимальному значению скорости, если с этой скоростью судно успевает прийти вовремя в точку  $C$ , в противном случае это минимально возможная скорость для того, чтобы прийти вовремя. Уравнения (4), (5) образуют систему уравнений, решая которую относительно  $t_1$ , найдем точку поворота и значение скорости на втором участке маршрута.

Таким образом, получаем алгоритм построения оптимального маршрута при заданном параметре  $V_{\text{ship}1x}$ . Благодаря этому задача поиска оптимального пути сводится к задаче минимизации функции расхода топлива от одной переменной.

После нахождения оптимального маршрута при обходе движущегося объекта позади него, требуется рассмотреть варианты движения судна без изменения курса, но с изменением скорости:

- судно может пройти перед движущимся объектом, увеличив скорость таким образом, чтобы в определенный момент оно находилось на минимально допустимом расстоянии от движущегося объекта, после чего, когда объект останется позади, судно изменит скорость или на оптимальную, или на минимально возможную для того, чтобы прийти в точку  $C$  вовремя;

- судно проходит за движущимся объектом и в определенный момент времени находится на минимально допустимом расстоянии от объекта, после чего движется с оптимальной или достаточной для того, чтобы прийти в точку  $C$  вовремя, скоростью.

**4. Развитие метода для нескольких движущихся объектов.** Идея представленного алгоритма может быть применена и для нескольких движущихся объектов. В таком случае потребуется учитывать несколько участков, ограниченных прямыми, в пространстве между которыми есть риск сближения судна с объектом на дистанции меньшей, чем это допустимо. Движение между этими участками по-прежнему будет представлять собой отрезки, а траектория в этих областях – или отрезок, или два отрезка по аналогии с методом, приведенным в пункте 3.

При маневрировании в случае с несколькими объектами есть разные возможные варианты движения. Судно может пройти либо перед объектом, либо позади него. Таким образом есть  $2^n$  возможных типов траекторий относительно объектов, где  $n$  – число движущихся объектов. Кроме того, наиболее оптимальная траектория может быть такой, что она будет проходить не вблизи всех движущихся объектов. Есть вероятность, что прохождение вблизи нескольких объектов и игнорирование остальных объектов при расчете приведет к оптимальной траектории с точки зрения расхода топлива, при движении по которой не будет происходить столкновений ни с одним из объектов.

Поэтому при решении задачи для случая нескольких объектов потребуется производить расчет для каждого подмножества объектов и проверять на сохранение дистанции со всеми объектами данного маршрута. В каждом таком подмножестве будет  $2^i$  возможных типов маршрута, с точки зрения положения друг относительно друга судна и объектов, где  $i$  – количество рассматриваемых объектов.

Исходя из этого, имеем, что для случая  $n$  движущихся объектов потребуется произвести

$$\sum_{i=1}^n 2^i C_n^i$$

расчетов траекторий разных типов маршрута.

Кроме того, с каждым новым движущимся объектом увеличивается число переменных, по которым требуется минимизировать

функцию, что повышает сложность расчетов. Данный метод может применяться для расчета траектории в случае нескольких движущихся объектов. Однако для его адаптации для большого числа движущихся объектов потребуются дальнейшие исследования.

**5. Заключение.** Разработан метод расчета маршрута для избежания столкновения с одним или несколькими движущимися объектами, которым судно должно уступить путь (в соответствии с морскими правилами) с экономным расходом топлива. В том случае, если движущихся объектов становится много, для работы метода потребуется слишком много ресурсов, чтобы произвести расчет вовремя, так как число операций для расчета с ростом числа объектов увеличивается нелинейно.

Шанс встречи танкеров, сухогрузов и других крупногабаритных судов, для которых критически важно экономить топливо, с большим числом движущихся объектов в океане мал. При этом большая часть их маршрута пролегает именно там. Поэтому применение данного метода для крупногабаритных судов в океане актуально.

## Литература

1. Ван Х., Ли П., Сюэ Ю., Коровкин М. В. Построение маршрута с помощью улучшенного метода изохрон при минимизации времени плавания и с учетом прогноза погоды // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 13. № 1. С. 286–299.
2. Тазиева Л. М. Программная реализация и модификация алгоритма поиска оптимального пути на графе JPS+ // Процессы управления и устойчивость. 2018. Т. 5. № 1. С. 357–364.
3. Kee K. K., Simon B. L., Renco K. Y. Prediction of ship fuel consumption and speed curve by using statistical method // Journal of Computer Science and Computational Mathematics. 2018. Vol. 8. Iss. 2. P. 19–25.
4. Сидоренко Ю. З. Теория и устройство судна. Раздел 2. Теория судна. Керчь: ФГБОУ ВО Керченский государственный морской технологический университет, 2020. 85 с.

УДК 517.977.1

Литвинов Н. Н.

## О вычислительной сложности одного алгоритма дискретного управления

Рекомендовано к публикации профессором Квитко А. Н.

**1. Введение.** Для оценки вычислительных мощностей, необходимых для реализации алгоритмов различного назначения полезно определить их вычислительную сложность. При разработке алгоритмов управления указанному аспекту часто не уделяется достаточно внимания. Однако, в научных базах данных можно встретить работы по данному направлению, например [1].

Целью настоящей работы является определение и анализ вычислительной сложности алгоритма дискретного управления для нелинейных нестационарных систем, предложенного в [2].

**2. Предварительные сведения.** В статье [2] разработан алгоритм дискретного управления для нижеприведенной задачи.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $u = (u_1, \dots, u_r)^T$ ,  $r \leq n$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $f \in C^{(n)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\| \leq N, \quad N > 0, \quad N = \text{const.}$$

При этом правая часть (1) удовлетворяет условиям

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1), \quad B_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 1), \quad S_0 = (B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0),$$

$$\text{rank } S_0 = n, \quad f(0, 0, t) \equiv 0.$$

**Задача 1 [2].** Найти дискретное управление  $u(t)$ , определенное на бесконечном разбиении интервала  $[0, 1]$  и абсолютно непрерывную

---

*Литвинов Николай Николаевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st080999@student.spbu.ru, тел.: +7(921)932-90-79

функцию  $x(t)$ , которые почти всюду удовлетворяют системе (1) и условиям

$$x(0) = (x_0^1, \dots, x_0^n)^T, \quad x(1) = 0.$$

**Задача 2 [2].** Найти дискретное управление  $u(t)$ , определённое на конечном разбиении  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < 1$  интервала  $[0, 1]$ ,  $t \in [0, t_m]$  и абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , почти всюду удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad \|x(t_m)\| \leq \varepsilon_1, \quad |t_m - 1| < \varepsilon_2,$$

где  $t_m$  – неизвестное значение времени,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  – фиксированные числа.

**3. Описание алгоритма.** Будем следовать работе [2].

**3.1. Построение вспомогательной системы.**

1. Разложение системы (1) по формуле Тейлора.
2. Замена исходной независимой переменной  $t$  на вспомогательную независимую переменную  $\tau$  по формуле

$$t(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, \infty), \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

В итоге получается система:

$$\frac{dc}{d\tau} = P c + Q d + \sum_{i=1}^3 R_i(c, d, \tau), \quad R_i = (R_i^1 \dots R_i^n)^T.$$

3. Введение вспомогательного управления, удовлетворяющего системе

$$\frac{d}{d\tau} d(\tau) = v(\tau), \quad v = (v_1, \dots, v_r)^T, \quad d(0) = 0,$$

и построение вспомогательной системы

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P} \bar{c} + \bar{Q} v, \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{(n+r) \times (n+r)}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{(n+r) \times r},$$

где  $O_1, O_2, O_3$  – матрицы соответствующих размерностей, состоящие из нулевых элементов,  $E$  – единичная матрица.

**3.2. Решение задачи стабилизации вспомогательной системы.**

4. Построение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & L_1 & \dots & L_n \\ E_{r \times r} & O_{r \times r} & \dots & O_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $O_{r \times r}$  – матрица размера  $r \times r$ , состоящая из нулевых элементов,  $L_1 = Q$ ,  $L_i = PL_i - \frac{dL_i}{d\tau}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

5. Вычисление матрицы  $\bar{S} = S^{-1} \left( \bar{P}S - \frac{dS}{d\tau} \right)$ .
6. Определение коэффициентов полинома, корни которого находятся в левой полуплоскости и удовлетворяют условиям (см. формулы (40)–(42) в [2])  $\lambda_{k_i}^i \neq \lambda_{k_i}^j$ ,  $i \neq j$ ;  $\lambda_{k_i}^j < -(2n+1)\alpha - 1$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .
7. Вычисление вспомогательной управляющей функции  $v(\tau) = M(\tau)\bar{c}$ ,  $M(\tau) = \delta T^{-1}S^{-1}$ ,  $\bar{c} = (c, d)$ , где  $T$  – верхняя треугольная матрица, построенная на основе элементов матрицы  $\bar{S}$ ;  $\delta$  – вектор-строка, полученная на основе  $\bar{S}$  и коэффициентов полинома из п. 6.
8. Решение задачи Коши для вспомогательной системы с начальными условиями  $c(0) = x_0$ , замкнутой управлением  $v(\tau)$ . Результатом являются функции  $\bar{c}(\tau) = (c(\tau), d(\tau))$  и  $v(\tau)$ .

**3.3. Решение задачи управления исходной системой.**

9. Нахождение точек переключения по формуле

$$t_k = 1 - e^{-\alpha k h}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где  $h$  – шаг дискретизации.

10. Переход в функции  $v(\tau)$  к исходной независимой переменной  $t$  по формуле (2), дающий  $\bar{v}(t) = v(\tau(t))$ .
11. Решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \bar{u}(t), t), & x(0) &= 0, \\ \dot{u} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\bar{v}(t), & u(0) &= 0, \\ \bar{u}(t) &= u(t_k), & t &\in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5)$$



На восьмом и одиннадцатом этапах алгоритма решается задача Коши при помощи какого-нибудь численного метода [3]. Остальные этапы реализуются аналитически средствами символьной алгебры, например [4].

#### 4. Основной результат.

**Теорема.** *Вычислительная сложность алгоритма дискретного управления, построенного в [2] составляет*

$$O(n^4) + O(K \cdot C(n)), \quad (6)$$

где  $O(n^4)$  – сложность символьных вычислений;  $O(K \cdot C(n))$  – вычислительная сложность решения задачи Коши методом Рунге–Кутты;  $K = \left\lceil \frac{\ln((1-t_m)^{-1})}{\alpha h} \right\rceil + 1$  – количество точек переключения (4);  $C(n)$  – функция, характеризующая количество операций при вычислении компонент интегрируемой функции.

**Доказательство.** Наибольшую сложность имеют операции вычисления матрицы (3) и решение задачи Коши (5).

При вычислении (3) требуется  $n - 1$  умножений двух прямоугольных матриц размером  $(n + r) \times (n + r)$  и  $(n + r) \times r$ . Оценка сверху сложности данной операции составляет  $O((n + r)^2 \cdot r)$ . Так как  $r \leq n$  по условию задачи, с учетом необходимого количества умножений для определения (3) получим оценку сверху для данной операции:  $O(n^4)$ .

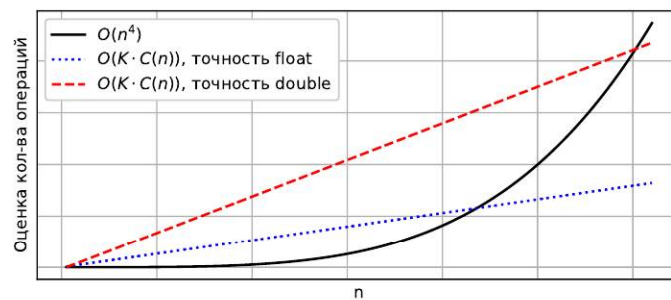
Решение задачи Коши производится на интервале  $t \in [0, 1]$ . Точки переключения определяются по (4) и составляют либо счетное (задача 1), либо конечное (задача 2) множество. Для оценки количества операций в наихудшем случае необходимо определить наибольшее количество точек переключения. С этой целью можно принять точность приближения к 1 значения  $t_m$  на правом конце интервала  $[0, 1]$ . Тогда из формулы (4) будем иметь количество точек переключения:

$$K = m + 1 = \left\lceil \frac{\ln((1-t_m)^{-1})}{\alpha h} \right\rceil + 1,$$

где  $|1 - t_m| < \varepsilon_2$  – точность приближения значения  $t_m$  на правом конце интервала  $[0, 1]$  в соответствии с задачей 2.

**5. Анализ вычислительной сложности.** На основе полученной формулы (6) построены графики функций роста для вычисли-

тельной сложности символьных и численных расчетов (Рис. 1). Были приняты значения:  $\varepsilon_{2f} = 10^{-8}$  (точность *float*),  $\varepsilon_{2d} = 10^{-16}$  (точность *double*),  $\alpha = 0,25$ ,  $h = 0,01$ ,  $C(n) = 120n$ . Значения  $\varepsilon_2$  выбраны исходя из стандартных значений типов данных *float* и *double*, применяемых в различных языках программирования.



**Рис. 1.** Характер зависимости вычислительной сложности символьной и численной частей алгоритма от размерности задачи

Анализ графика на рис. 1 позволяет сделать следующие выводы:

1. чем выше точность приближения на правом конце интервала  $[0, 1]$ , тем больше вычислительная сложность решения задачи Коши;
2. при небольших размерностях сложность решения задачи Коши превышает сложность символьных вычислений;
3. начиная с некоторого значения  $N = \left[ \sqrt[3]{C \frac{\ln(\varepsilon_2^{-1})}{\alpha h}} \right]$ , вклад в вычислительную сложность символьных вычислений превышает сложность решения задачи Коши;
4. при достаточно большой размерности задачи вычислительную сложность решения системы ОДУ можно не учитывать, однако, большинство решаемых задач управления обычно имеет небольшую размерность (до 10 уравнений).

**6. Заключение.** В настоящей работе был проведен анализ вычислительной сложности алгоритма дискретного управления [2] и рассмотрена ее зависимость от размерности задачи и точности приближения последней точки интервала  $[0, 1]$ . Кроме того, вычислительная сложность исследуемого алгоритма зависит от значений  $\alpha$  и  $h$ . Рассмотренный алгоритм относится к классу  $P$  [5].

## Литература

1. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Вычислительная сложность задач управления активными системами // Труды Международной конференции «РАСО'2001». М.: ИПУ РАН., 2001. С. 81–102.
2. Квитко А. Н., Литвинов Н. Н. Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 1. С. 18–36.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 9 изд. М.: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.
4. SymPy [Электронный документ] <https://www.sympy.org/en/index.html> (дата обращения: 20.03.2023).
5. Cook S. A. The complexity of theorem proving procedures // Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '71). 1971. P. 151–158.

УДК 517.95

Маковеева П. Е.

## Построение функционала с заданной производной для системы с распределенными параметрами

*Рекомендовано к публикации доцентом Егоровым А. В.*

**1. Введение.** В современном мире достаточно большое количество моделей содержит уравнения в частных производных. Так, например, уравнения параболического типа хорошо известны из математической физики [1], кроме того, они встречаются в задачах анализа динамики популяции [2]. Для их исследования можно применять метод функционалов Ляпунова – Красовского.

В данной статье для уравнения параболического типа с однородными граничными условиями строится функционал с наперед заданной отрицательно определённой квадратичной производной. Показано, что этот функционал может быть построен по функциональной матрице Ляпунова, найдены основные свойства, определяющие эту матрицу, и для случая экспоненциально устойчивой системы представлен ее явный вид. Аналогичный подход использован в статье [3].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим систему, которая включает в себя уравнение в частных производных, однородные граничные условия и начальные ограничения:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = au_{xx}(x, t), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – начальная функция, для определенности будем предполагать, что она абсолютно непрерывна,  $a \neq 0$ .

**3. Метод Фурье.** Требуется найти функцию  $u(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t$ , которая является решением системы (1).

---

*Маковеева Полина Евгеньевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076937@student.spbu.ru, тел.: +7(912)241-52-32

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 21-71-00052

Представим решение в виде произведения двух функций:  $u(x, t) = f(x)g(t)$ . Подставляем новый вид функции в систему (1), получаем систему уравнений с граничными условиями, где  $\mu$  – некоторая константа:

$$\begin{cases} af''(x) = -\mu f(x), \\ g'(t) = -\mu g(t), \\ f(0) = f(l) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Находим решение уравнения  $af''(x) = -\mu f(x)$  системы (2) в зависимости от значения параметра  $\mu$ . Представляет интерес случай  $\mu/a > 0$ , так как при остальных значениях граничным условиям удовлетворяют только тривиальные решения. Получаем  $f_i(x) = \sin(\pi i x/l)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , – собственные векторы, соответствующие собственным числам  $\mu_i$ . Далее для упрощения вычислений будем полагать  $l = 1$ .

Решение уравнения  $g'(t) = -\mu g(t)$  имеет вид

$$g(t) = e^{-\mu t} C. \quad (3)$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид

$$u(x, t) = \sum C_i e^{-\mu_i t} \sin(\pi i x).$$

Коэффициенты  $C_i$  найдём из разложения функции  $\varphi$  в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \sin(\pi i x). \quad (4)$$

Подставляя формулу (3) в решение исходной системы (1), и учитывая формулу (4), получим

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu_i t} \varphi_i \sin(\pi i x). \quad (5)$$

**3.1. Вычисление функционала  $v_0$ .** Решение задачи (1) будем обозначать через  $u(x, t, \varphi)$  и рассматривать как функцию из пространства Лебега  $L_2((0, 1))$  относительно аргумента  $x$ .

**Теорема 1.** *Рассматриваем экспоненциально устойчивую систему (1). Если производная в силу системы*

$$\frac{d}{dt}v_0(\varphi) = -\|\varphi\|_{L_2}^2, \quad (6)$$

то значение функционала

$$v_0(\varphi) = \int_0^1 \varphi(y_2) \int_0^1 U(y_1, y_2) \varphi(y_1) dy_1 dy_2, \quad (7)$$

где матрица Ляпунова:

$$U(y_1, y_2) = \frac{1}{2a\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\cos(\pi i(y_1 - y_2))}{i^2} - \frac{\cos(\pi i(y_1 + y_2))}{i^2} \right]. \quad (8)$$

**Доказательство.** Производная  $v_0$  вдоль решения системы (1):

$$\frac{d}{dt}v_0(u(\cdot, t, \varphi)) = -\|u(\cdot, t, \varphi)\|_{L_2}^2. \quad (9)$$

Далее подставляем решение уравнения (5) в (9), полученное равенство проинтегрируем на отрезке  $[0, T]$ , где  $T > 0$ , затем выполняем предельный переход, устремляя  $T \rightarrow \infty$ . Возводим в квадрат подынтегральное выражение. От двойного суммирования переходим к одинарному, в силу ортонормированности системы синусов. Меняем порядок суммирования и интегрирования, так как полученный ряд сходится по признаку Вейерштрасса. Получаем итоговый вид искомого функционала:

$$2 \int_0^1 \varphi(y_2) \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \sin(\pi i y_1) \sin(\pi i y_2) \int_0^{\infty} e^{-2\mu_i t} dt \right] \varphi(y_1) dy_1 dy_2.$$

В силу экспоненциальной устойчивости коэффициенты  $\mu_i > 0$ , значит несобственный интеграл сходится. Вычисляем значение интеграла, проводим преобразования, получаем матрицу Ляпунова вида (8).

Рассматриваем ряд

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi i x)}{i^2} \quad (10)$$

По графику ряда (10) сделаем предположение, что это разложение некоторой параболы в ряд Фурье. Для однозначного определения функции необходимо найти значение ряда (10) в трех точках:

$$h(0) = h(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}; \quad h(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2}.$$

Эти суммы вычисляем через разложение функции  $x^2$ . Запишем ряд Фурье:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Подставляем в эту формулу  $x = 0, 1, 2$  и получаем значения рядов. Затем составляем систему для нахождения коэффициентов параболы.

**Теорема 2.** *Ряд (10) является рядом Фурье для параболы:*

$$h(x) = \frac{\pi^2}{4}x^2 - \frac{\pi^2}{2}|x| + \frac{\pi^2}{6}. \quad (11)$$

**Доказательство.** Доопределим найденное (11) на отрезке  $[-2, 0]$  таким образом, чтобы функция была четной, так как исходный ряд  $h$  – разложение в ряд Фурье неизвестной четной функции. Разложим полученную функцию в ряд Фурье на отрезке  $[-2, 2]$  и сравним разложения, чтобы убедиться, что исходный ряд  $h$  представляет собой найденную параболу. Коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = 0, \quad a_i = \int_0^2 \left( \frac{\pi^2 x^2}{4} - \frac{\pi^2 x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \cos(\pi i x) dx = \frac{1}{i^2}.$$

Получаем, что разложение в ряд Фурье для функции (11) на интервале  $[-2, 2]$  и исходный ряд  $h$  равны.

**4. Свойства матрицы Ляпунова.** Выведем свойства матрицы Ляпунова. С их помощью мы значительно упростим вычисления функционала  $v_0$  и его производной.

Можно явно вычислить матрицу Ляпунова, используя выражения (11) и (8). Справедлива следующая

**Лемма 1.** *Матрица Ляпунова представима в виде*

$$U(y_1, y_2) = \frac{1}{4a} \left[ -2y_1 y_2 - |y_1 - y_2| + (y_1 + y_2) \right]. \quad (12)$$

**Лемма 2.** Разность первых производных матрицы

$$\frac{\partial U(y_1, y_1 + 0)}{\partial y_2} - \frac{\partial U(y_1, y_1 - 0)}{\partial y_2} = -\frac{1}{2a}.$$

**Лемма 3.** Вторая производная матрицы Ляпунова

$$\frac{\partial^2 U(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 U(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} = 0$$

равна нулю для всех  $y_1, y_2$ , кроме  $y_1 = y_2$

**Лемма 4.** Матрица Ляпунова удовлетворяет свойству симметрии:

$$U(y_1, y_2) = U(y_2, y_1).$$

**Лемма 5.** Матрица Ляпунова на границе интегрирования принимает нулевое значение:

$$U(0, y_2) = U(1, y_2) = U(y_1, 0) = U(y_1, 1) = 0.$$

Леммы 2–5 доказываются непосредственным вычислением по формуле (12).

**5. Дифференцирование функционала  $v_0$ .** Теперь откажемся от предположения об экспоненциальной устойчивости. Необходимо доказать, используя только свойства матрицы Ляпунова, что производная функционала будет иметь вид (6).

**Теорема 3.** Если матрица Ляпунова  $U(y_1, y_2)$  удовлетворяет леммам 2–5, и при этом функционал имеет вид (7), то производная вдоль решения системы удовлетворяет равенству (6).

**Доказательство.** Рассмотрим функционал  $v_0$  из условия теоремы. Тогда производная вдоль решения системы, учитывая свойство симметрии, может быть записана следующим образом:

$$\frac{dv_0(u(x, t))}{dt} = 2a \int_0^1 u(y_1, t) \int_0^1 U(y_1, y_2) u_{y_2 y_2}(y_2, t) dy_2 dy_1.$$

Для вычисления производной необходимо два раза применить интегрирование по частям, после этого в формуле появятся слагаемые, содержащие частные производные матрицы Ляпунова, но мы не сможем явно продифференцировать ряд (8), так как условия теоремы о дифференцировании функциональных рядов не выполняются, а



следовательно, формулы интегрирования по частям не будут справедливы. Поэтому будем разбивать интеграл на интервале  $(0, 1)$  на два и рассматривать их на области непрерывности.

Затем явно вычислим значение интегралов. Слагаемые содержащие значение функции  $u$  на границе будут равны нулю. Учитывая лемму 3 и непрерывность функции  $u$ , получаем

$$\frac{dv_0(u(x, t))}{dt} = 2a \int_0^1 u^2(y_1, t) \left[ \frac{\partial U(y_1, y_1 + 0)}{\partial y_2} - \frac{\partial U(y_1, y_1 - 0)}{\partial y_2} \right] dy_1.$$

По лемме 2 получаем, что производная функционала удовлетворяет равенству (6).

**6. Заключение.** В данной работе рассмотрен случай уравнения без запаздывания. Разработан метод построения функционала с заданной производной для уравнения с распределенными параметрами. Некоторые методы, использованные в данном исследовании, в дальнейшем можно будет перенести на случай уравнения с запаздыванием, которое возникает при моделировании популяций [2].

## Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, Физматлит, 1977. 742 с.
2. Shuxia P. Asymptotic behavior of travelling fronts of the delayed Fisher equation // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2009. No 10. P. 1173–1182.
3. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // *Вестник СПбУ. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. процессы управления*. 2005. Т. 10. No 1. С. 110–117.

УДК 519.718.2

Розенгард А. С.

## Анализ поведения корней квазиполинома в зависимости от запаздывания

*Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.*

**1. Постановка задачи.** Многие простые системы с запаздыванием, такие как математический маятник, движение тележки с одной степенью свободы и другие, описываются уравнением

$$y''(t) + ky(t) - qy(t - h) = 0, \quad (1)$$

где  $k > 0$ ,  $q > 0$ ,  $k - q > 0$  – некоторые параметры, а  $h \geq 0$  – запаздывание. Уравнению (1) соответствует следующий характеристический квазиполином [1]:

$$s^2 + k - qe^{-sh} = f(s, e^{-sh}). \quad (2)$$

Если корни квазиполинома (2) лежат слева от мнимой оси, то решение системы (1) экспоненциально устойчиво. Задача – изучить, как запаздывание влияет на расположение корней квазиполинома (2). Данный вопрос изучался в работе [2], где рассмотрен подход анализа устойчивости с помощью функций Разумихина, и в работе [3], в которой анализ расположения корней проведен для линейных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Близкие вопросы рассматривались также в [4].

**2. Определение максимального запаздывания.** В работе [5] доказано, что если  $h = 0$ , то решение уравнения (1) устойчиво, но не экспоненциально. Однако при малых  $h$  уже имеет место экспоненциальная устойчивость. Приняв во внимание факт непрерывной зависимости корней квазиполинома (2) от параметров (в нашем случае  $h$ ), можно предположить, что есть интервал значений запаздывания, при котором корни находятся в левой полуплоскости. Приравняв  $s = i\omega$  и подставив это в (2), получим

---

*Розенгард Александр Сергеевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087513@student.spbu.ru, тел.: +7(904)600-91-35

$$h = \frac{\pi z}{\sqrt{k - (-1)^z q}}, \quad z \in \mathbb{Z}^+.$$

Выберем минимальное значение [6]

$$h = \frac{\pi}{\sqrt{k + q}}.$$

В дальнейшем будем обозначать максимальное запаздывание как  $H$ .

**3. Максимальный запас устойчивости.** По результатам пункта 2 можно сказать, что если  $h \in (0, H)$ , то корни (2) расположены слева от мнимой оси. Поставим задачу нахождения такого  $h^*$ , при котором запас устойчивости  $\sigma$  будет достигать своего максимального значения  $\sigma^*$ . Возможны два варианта поведения корней квазиполинома в зависимости от параметра  $h$ .

**3.1. Первый вариант.** Будем искать  $h^*$ , при котором отдаляющиеся от мнимой оси корни образуют кратные корни с корнями, которые стремятся к мнимой оси. Тогда  $\sigma^* = \min \sigma(h^*)$  (см. рис. 1).

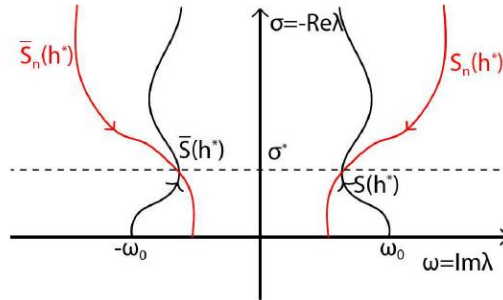


Рис. 1. Первый вариант

Исходя из теоремы о неявной функции [7],  $h^*$  удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} f(s, e^{-sh}) = 0, \\ \frac{\partial f(s, e^{-sh})}{\partial s} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma^2 - \omega^2 + k)^2 + 4\sigma^2\omega^2 = q^2 e^{2\sigma h}, \\ 4(\sigma^2 + \omega^2) = q^2 h^2 e^{2\sigma h}. \end{cases} \quad (3)$$

**3.2. Второй вариант.** Будем искать  $h^*$ , при котором отдаляющиеся от мнимой оси корни и приближающиеся к ней имеют равные вещественные части (см. рис. 2).

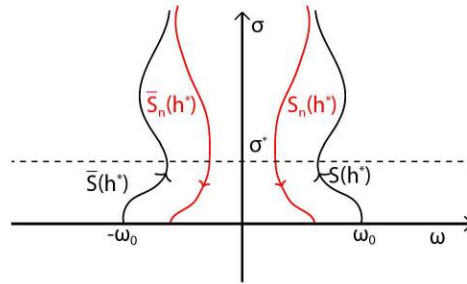


Рис. 2. Второй вариант

Пусть  $\text{Im } S = \omega_1$ ,  $\text{Im } S_n = \omega_2$ . Значит  $h^*$  удовлетворяет системе

$$(-\sigma + i\omega_j)^2 + k - qe^{\sigma h} e^{-i\omega_j h} = 0, \quad j = \overline{1, 2},$$

откуда

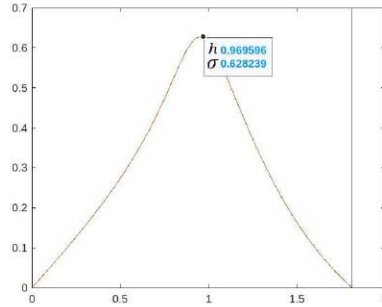
$$(\sigma^2 - \omega_j^2 + k)^2 + 4\sigma^2\omega_j^2 = q^2 e^{2\sigma h}, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (4)$$

**4. Пример поиска максимального запаса устойчивости.**

Возьмем  $k = 2$ ,  $q = 1$ . Определим траекторию движения  $s(h)$ , удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} \sigma(0) = 0, \\ \omega(0) = \sqrt{k - q}. \end{cases}$$

Для этого продифференцируем равенство (2), разделим вещественную и мнимую части у переменной  $s$  и используем численный метод для решения полученной системы дифференциальных уравнений.



**Рис. 3.** График решение системы, полученный в MATLAB с использованием функции ode45

Для данного примера  $\sigma^* \leq 0,628239$  а,  $h^* \leq 0,0969596$ . Значит  $\sigma^* \in (0; 0,628239]$ , а  $h^* \in (0; 0,0969596]$  (см. рис. 3). Полученные два неравенства задают область поиска решения для систем уравнений (3), (4). Так как область является компактом, то применимы численные методы решения. Если решения будут найдены, необходимо изучить дальнейшее поведение корней. Максимальный запас устойчивости будет равен минимальному  $\sigma$  в тех точках, где хотя бы один корень приближается к мнимой оси. Если решений нет, то  $\sigma^* = 0,628239$ .

**5. Заключение.** Получен алгоритм поиска запаса устойчивости:

1. Найти максимальное  $h^*$ .
2. Изучить динамики корней, находящихся при  $h = 0$  на мнимой оси, для получения области поиска решений (3), (4).
3. Решить систему алгебраических уравнений для дальнейшего анализа поведения корней.
4. На основе анализа из пункта 3 определить максимальный запас устойчивости.

Данный алгоритм может быть применен не только к (1), но и к другим системам запаздывающего типа.

## Литература

1. Эльсгольд Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
2. Жабко А. П., Медведева И. В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 9–20.
3. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.
4. Уразов Д. Р. Геометрический метод максимизации запаса устойчивости для уравнения с запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 69–74.
5. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Boston: Birkhäuser, 2013. 311 p.
6. Харитонов В. Л. К определению максимально допустимого запаздывания в задаче стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1982. № 4. С. 723–724.
7. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. М.: МЦНМО, 2019. 564 с.

УДК 517.929.4

Соколов В. М.

## Обобщённая задача Мышкиса для линейных систем с одним запаздыванием

*Рекомендовано к публикации доцентом Егоровым А. В.*

**1. Введение.** В данной работе рассматривается семейство линейных систем с одним изменяющимся во времени запаздыванием и предполагается, что это запаздывание может принимать произвольное функциональное значение из заданного ограниченного множества. Задача состоит в том, чтобы определить значения параметров системы, при которых всё семейство устойчиво.

Эту задачу будем называть обобщённой задачей Мышкиса, поскольку первый точный результат в этом направлении был получен А. Д. Мышкисом [1], который рассмотрел скалярное уравнение  $\dot{x}(t) = -bx(t - \tau(t))$ , где  $b$  – вещественная константа, а запаздывание  $\tau$  – функция, ограниченная заданной константой  $h$ . Было показано, что уравнение равномерно устойчиво, если  $bh \in [0, 3/2]$ , и при  $bh > 3/2$  существует запаздывание, такое что уравнение неустойчиво. Этот результат был обобщён в нескольких направлениях [2, 3]. Однако все эти обобщения объединяет то, что они посвящены скалярному уравнению с вещественными коэффициентами. Одним из наиболее распространённых методов исследования устойчивости систем из нескольких уравнений является метод функционалов Ляпунова – Красовского. Для случая постоянных запаздываний в этом направлении получены довольно существенные результаты (см., например, [4]). Цель данной работы состоит в том, чтобы обобщить результат, полученный А. Д. Мышкисом, для матричного случая, используя теорему из [5] и сведя её в дальнейшем к терминам задачи квадратичного программирования (QQP) и задачи квадратичного программирования с квадратичными ограничениями (QCQP) для упрощения поиска области равномерной устойчивости.

---

*Соколов Вадим Михайлович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vad\_sokolov@email.ru, тел.: +7(921)335-02-84

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-00052

**2. Основные понятия.** Рассмотрим матричное уравнение с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau(t)), \quad (1)$$

где  $\tau(t) \in [0, h]$  – допустимое запаздывание,  $t \in [-h, \infty)$ ,  $A_0$  и  $A_1$  – постоянные вещественные  $n \times n$  матрицы. Здесь может быть выбрано число  $h = 1$  за счёт масштабирования времени.

**Определение 1** [5]. Функция  $\tau(t)$ ,  $t \in [-1, \infty)$ , называется допустимым запаздыванием, если она кусочно-непрерывна на множестве  $[-1, \infty)$  (т. е. имеет конечное число точек разрыва на любом отрезке, содержащемся в этом множестве), непрерывна справа в каждой точке и удовлетворяет двум свойствам:

1.  $0 \leq \tau(t) \leq 1$  для любых  $t \in [-1, \infty)$ ,
2.  $\frac{\tau(t) - \tau(\theta)}{t - \theta} \leq 1$  для любых  $t, \theta \in [-1, \infty)$ ,  $t \neq \theta$ .

**Определение 2** [5]. Будем говорить, что пара матриц  $(A_0, A_1)$  решает обобщённую задачу Мышкиса, если уравнение (1) с соответствующими матрицами равномерно устойчиво при любом допустимом запаздывании.

Здесь используется евклидова норма для векторов, соответствующая индуцированная матричная норма и матричная мера для матриц –  $\mu(A)$ , а также след матрицы –  $\text{Tr}$ . Кроме того, введём понятие отрицательно полуопределённой матрицы – это симметрическая матрица с неположительными собственными числами. Обозначим  $A^H = \frac{A^T + A}{2}$ .

Для матрицы  $S = (S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , где  $S_1, \dots, S_n$  – столбцы матрицы, будем использовать операцию векторизации:

$$\text{vec } S = (S_1^T, \dots, S_n^T)^T \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

**Теорема** [5]. Пара матриц  $(A_0, A_1)$  решает обобщённую задачу Мышкиса для системы (1), если матрица  $A_0^H + A_1^H$  отрицательно полуопределена, и множества решений  $(\gamma, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  следующих двух систем пусты:

$$\begin{cases} \gamma^T A_1 \mu > -\mu(A_0), & \gamma^T \gamma \mu^T \mu < 1, & \gamma^T A_0 \mu < \mu(A_0), \\ 1 - \gamma^T \mu < \int_0^1 \min\{\|A_1\|, \gamma^T A_1 \mu + \theta \alpha_1\} d\theta + \\ \qquad \qquad \qquad + 2 \int_0^{1/2} \min\{\|A_0\|, \mu(A_0) + \theta \alpha_0\} d\theta, \end{cases} \quad (2)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^T A_1 \mu > -\mu(A_0), \quad \gamma^T \gamma \mu^T \mu < 1, \quad \gamma^T A_0 \mu \geq \mu(A_0), \\ 1 - \gamma^T \mu < \int_0^1 \min\{\|A_1\|, \gamma^T A_1 \mu + \theta \alpha_1\} d\theta + \\ \quad + \int_0^1 \min\{\|A_0\|, \mu(A_0) + (1 - \theta) \alpha_0, \gamma^T A_0 \mu + \theta \alpha_0\} d\theta, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\alpha_0 = \|A_0^2\| + \|A_0 A_1\|$ ,  $\alpha_1 = \|A_1 A_0\| + \|A_1^2\|$ .

### 3. Сведение к задаче квадратичного программирования.

Сведём систему (2) к задаче квадратичного программирования, ослабив неравенства, но упростив таким образом проверку пустоты множества решений системы. Введём новый вектор переменных  $x = \text{vec } \gamma \mu^T \in \mathbb{R}^{n^2}$  и перепишем произведения следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma^T \mu &= \text{Tr}(\gamma^T \mu) = \text{Tr}(I \mu \gamma^T) = (\text{vec } I)^T x, \\ \gamma^T A_0 \mu &= \text{Tr}(A_0 \mu \gamma^T) = (\text{vec } A_0)^T x, \\ \gamma^T A_1 \mu &= \text{Tr}(A_1 \mu \gamma^T) = (\text{vec } A_1)^T x, \\ \gamma^T \gamma \mu^T \mu &= \text{Tr}(\gamma \mu^T \mu \gamma^T) = x^T x. \end{aligned}$$

Получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu(A_0) < (\text{vec } A_1)^T x < \|A_1\|, \quad x^T x < 1, \\ -\|A_0\| < (\text{vec } A_0)^T x < \mu(A_0), \\ 1 - (\text{vec } I)^T x < \int_0^1 \min\{\|A_1\|, (\text{vec } A_1)^T x + \theta \alpha_1\} d\theta + \\ \quad + 2 \int_0^{1/2} \min\{\|A_0\|, \mu(A_0) + \theta \alpha_0\} d\theta. \end{array} \right. \quad (4)$$

Обозначим второй интеграл в последнем неравенстве системы за  $q$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \min\{\|A_1\|, (\text{vec } A_1)^T x + \theta \alpha_1\} d\theta &= \int_0^\tau (\text{vec } A_1)^T x + \theta \alpha_1 d\theta + \\ &+ \int_\tau^1 \|A_1\| d\theta. \end{aligned}$$

В качестве момента времени  $\tau$  принимается решение уравнения  $(\text{vec } A_1)^T x + \tau \alpha_1 = \|A_1\|$ , если  $\tau \in (0, 1)$ , в ином случае  $\tau = 1$ . При этом всегда  $\tau \neq 0$ , поскольку  $(\text{vec } A_1)^T x < \|A_1\|$ . Таким образом, возможно два случая:  $0 < \tau < 1$  и  $\tau = 1$ .

Тогда в первом случае необходимо выразить  $\tau$  из уравнения  $(\text{vec } A_1)^T x + \tau \alpha_1 = \|A_1\|$  и подставить в систему (4), после чего, интегрируя, можно получить итоговые системы для каждого случая и свести их к задачам квадратичного программирования.

Примем обозначения  $a_0 = (\text{vec } A_0)^T$ ,  $a_1 = (\text{vec } A_1)^T$ ,  $e = (\text{vec } I)^T$ ,  $p = -1 + \alpha_1/2 + 2q$  и запишем получившуюся задачу квадратичного программирования в виде леммы.

**Лемма.** Множество решений системы (2) пусто, если оптимальное решение  $x^*$  следующей задачи квадратичного программирования с квадратичными ограничениями таково, что  $f_1(x^*) \geq r$ :  
минимизировать  $f_1(x) = x^T Q x - 2q_2^T x$  при условии

$$\begin{aligned} x^T x - 1 &\leq 0, \\ -a_1 x &\leq \min(\mu(A_0), -\|A_1\| + \alpha_1), \\ a_1 x &\leq \|A_1\|, \\ a_0 x &\leq \mu(A_0), \\ -a_0 x &\leq \|A_0\|, \end{aligned}$$

где  $Q = \frac{a_1^T a_1}{2\alpha_1}$ ,  $q_2 = \frac{1}{2} \left( e + a_1 \frac{\|A_1\|}{\alpha_1} \right)^T$ ,  $r = -1 - \frac{\|A_1\|^2}{2\alpha_1} + \|A_1\| + 2q$ .

Кроме того, множество решений системы (2) будет пусто, если оптимальное решение  $x^*$  следующей задачи квадратичного программирования таково, что  $f_2(x^*) \geq 1$ :

минимизировать  $f_2(x) = x^T x$  при условии

$$\begin{aligned} a_1 x &\leq \|A_1\| - \alpha_1, \\ -a_1 x &\leq \mu(A_0), \\ a_0 x &\leq \mu(A_0), \\ -a_0 x &\leq \|A_0\|, \\ -(e + a_1)x &\leq p. \end{aligned}$$

Теперь можно аналогичным образом свести систему (3) к задаче квадратичного программирования, используя введённые выше обозначения:

$$\begin{cases} a_1 x > -\mu(A_0), & x^T x < 1, & a_0 x \geq \mu(A_0), \\ 1 - ex < \int_0^1 \min\{\|A_1\|, a_1 x + \theta \alpha_1\} d\theta + \\ \quad + \int_0^1 \min\{\|A_0\|, \mu(A_0) + (1 - \theta)\alpha_0, a_0 x + \theta \alpha_0\} d\theta. \end{cases}$$

Для данной системы можно получить 6 различных задач квадратичного программирования с использованием новых переменных.

**4. Исследование скалярного случая.** Теперь рассмотрим скалярный случай:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau(t)),$$

где  $a+b \leq 0$  (условие отрицательной полуопределённости  $A_0^H + A_1^H$ ).

Не умаляя общности, примем  $\gamma = 1$  и рассмотрим системы (2), (3). Для начала рассмотрим случай  $a \geq 0, b < 0$ . Поскольку  $\mu(a) = a$ , то условие системы (3)  $a\mu \geq a$  никогда не будет выполняться. Рассмотрим систему (2), которая примет вид

$$\begin{cases} -1 < \mu < -\frac{a}{b}, \\ 1 - \mu - a < \int_0^1 \min\{|b|, b\mu + \theta(a|b| + b^2)\} d\theta. \end{cases}$$

Интеграл во втором неравенстве можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & |b| + |b| \int_0^1 \min\{0, -\mu - 1 + \theta(a + |b|)\} d\theta = \\ & = |b| + \frac{|b|}{a + |b|} \int_0^{a+|b|} \min\{0, -\mu - 1 + \theta\} d\theta = \\ & = |b| + \frac{|b|}{2(a + |b|)} ((\min\{0, a + |b| - \mu - 1\})^2 - (\mu + 1)^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: 1)  $a + |b| - \mu - 1 \geq 0$ , 2)  $a + |b| - \mu - 1 < 0$ . В первом случае получим систему

$$\begin{cases} \mu \leq a + |b| - 1, & -1 < \mu < -\frac{a}{b}, \\ 1 - \mu - a < |b| + \frac{|b|}{2(a + |b|)} (-(\mu + 1)^2). \end{cases}$$

Данная система не будет иметь решения на интервале  $(0, 1/3]$  при  $b > 1/4(-\sqrt{4a^2 - 20a + 9} + 2a - 3)$ , на интервале  $(1/3, 2 - \sqrt{2}]$  при  $b > 1/2(a + \sqrt{a(a+8)} - 4)$ .

Во втором случае система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \mu > a + |b| - 1, & -1 < \mu < -\frac{a}{b}, \\ 1 - \mu - a < |b| + \frac{|b|}{2(a + |b|)} ((a + |b| - \mu - 1)^2 - (\mu + 1)^2). \end{cases}$$

На интервале  $(0, 1/3]$  система не будет иметь решения, если  $b$  меньше второго по величине корня уравнения  $-2a - 2x - ax^2 + x^3 = 0$ . На интервале  $(1/3; \sqrt{5\sqrt{5} - 11})$  система не будет иметь решения между вторым и третьим по величине корнем данного уравнения.

В случае  $a < 0$  условие системы (2)  $a\mu < a$  никогда не будет выполняться, поскольку  $\mu(a) = a$ . Значит будет достаточно рассмотреть систему (3). Применим теорему и рассмотрим системы неравенств (2), (3). Проведём моделирование в среде MATLAB полученных задач квадратичного программирования для  $a \geq 0$  и  $a < 0$ . В случае  $a \geq 0$  описанная в лемме область будет совпадать с областью, полученной аналитически (на графике представлена чёрной линией, см. рис. 1). Для первого подграфика серым цветом выделены точки, в которых выполняется условие первой (QCQP) и второй (QCP) задачи из леммы.

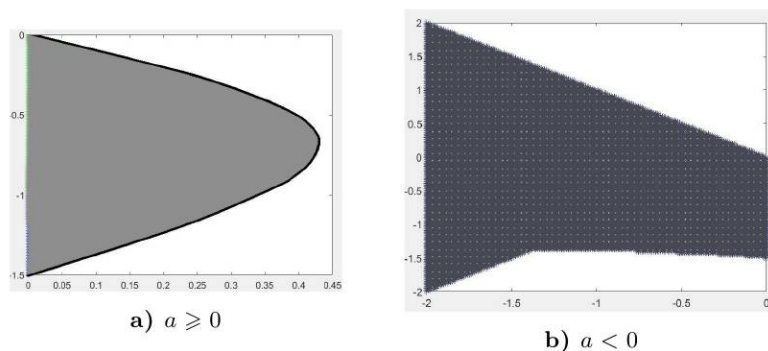


Рис. 1. Результаты моделирования в скалярном случае

**5. Заключение.** Таким образом, была упрощена процедура решения задачи Мышкиса путём сведения исходной рассмотренной теоремы к выпуклой задаче QQP и QCQP. С использованием теоремы и полученной леммы изучен скалярный случай. Области равномерной устойчивости при  $a > 0$ , полученные аналитически и с использованием леммы, совпадают. Кроме того, стоит отметить, что полученные области сводятся к классическому результату Мышкиса при  $a = 0$ .

## Литература

1. Мышкис А. Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28. Вып. 3. С. 641–658.
2. Yoneyama T. The  $3/2$  stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1992. Vol. 165. P. 133–143.
3. Малыгина В. В. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 72–85.
4. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 1. С. 110–117.
5. Egorov A. V. Robust stability analysis of time-varying delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55. No 36. P. 210–215.

УДК 517.962

Сулиман Б.

## Математическое моделирование динамики управляемой тележки при наличии запаздывания в канале обратной связи

*Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.*

**1. Введение.** Математическое моделирование играет важную роль при анализе динамики сложных систем в физике, экономике, биологии и инженерии. В теории управления математические модели используются для проектирования контроллеров, которые регулируют поведение системы и улучшают качество ее динамики.

В данной статье исследуется динамика управляемой тележки при наличии запаздывания в канале обратной связи. Тележка имеет одну степень свободы, отсутствует трение, которое осуществляло бы стабилизацию динамики за счет диссипации энергии, и имеется управляющее воздействие, пропорциональное значению отклонения тележки от положения равновесия в некоторый предыдущий момент времени.

На практике запаздывание в канале обратной может возникать из-за различных причин. Например, это время срабатывания датчика, время обработки сигнала в блоке управления, запаздывание в канале передачи информации и т. д. [1]. В данной работе запаздывание играет положительную роль, поскольку позволяет обеспечить экспоненциальную устойчивость положения равновесия.

**2. Постановка задачи.** Изучается динамика системы при наличии запаздывания. Цель состоит в том, чтобы провести оптимизацию параметров управления.

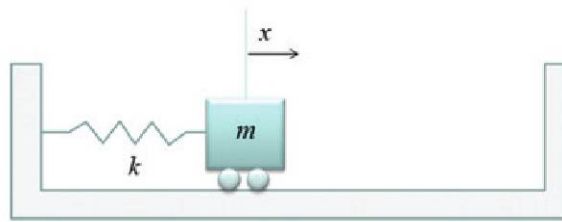
Для этого проводится комплексный анализ движения в зависимости от параметров системы и величины запаздывания. Далее на основе численного моделирования динамики тележки определяются допустимые пределы изменения запаздывания и коэффициента усиления управления, в которых следует искать оптимальные значения параметров.

---

*Сулиман Башар* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: Bashar123soad@gmail.com, тел.: +7(925)380-18-29

**3. Анализ устойчивости в пространстве параметров.** В этом пункте рассмотрим задачу параметрического анализа.

**3.1. Математическое моделирование.** Предполагается, что на поверхности нет трения и пружина без демпфирования (рис. 1).



**Рис. 1.** Динамика системы с тележкой

Уравнение второго закона Ньютона для данной системы выглядит следующим образом:

$$\sum f = ma.$$

Здесь  $F$  – сила, действующая на тележку,  $m$  – масса объекта,  $a$  – ускорение, которое получает объект при действии этой силы.

Таким образом, получаем уравнение

$$m\ddot{x}_p = -u, \quad (1)$$

где

$$u = -k(x_p - l). \quad (2)$$

Считаем, что система полностью наблюдаема, т. е.

$$y = x.$$

**3.2. Передаточная функция объекта управления.** Передаточную функцию можно получить, применив преобразование Лапласа к уравнению (1):

$$mX(s)S^2 = U(s).$$

Таким образом,

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2},$$

$$Y(s) = X(s).$$

Введем переменные состояния

$$\begin{cases} x_1 = x_p, \\ x_2 = \dot{x}_p. \end{cases}$$

Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_p = x_2, \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_p = \frac{-k}{m}u, \end{cases}$$

или в матричной форме [2]

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-k}{m} \end{bmatrix} U, \\ [ y ] = [ 1 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [ 0 ] u. \end{cases}$$

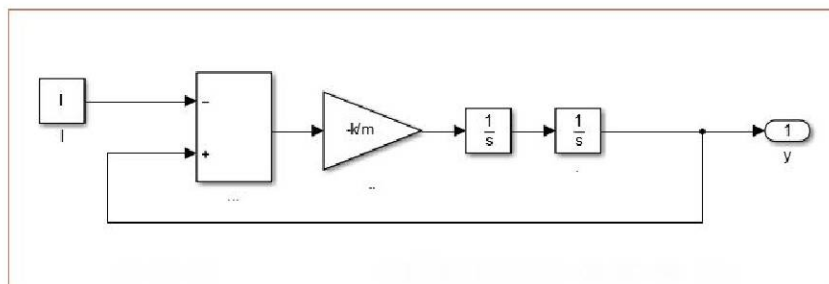


Рис. 2. Динамика системы с тележкой в MATLAB

Блок-схема этой системы управления, реализованная в MATLAB, представлена на рис. 2.

#### 4. Характеристические функции для системы с учетом запаздывания и без запаздывания.

##### 4.1. Система без запаздывания. Рассмотрим (1), (2)

$$m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - l).$$

Пусть  $x(t) - l = y(t)$ ,  $\ddot{x}(t) - \ddot{l} = \ddot{y}(t)$ ,

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t), \tag{3}$$



Тогда уравнение (3) принимает вид

$$m\lambda^2 + k = 0.$$

Его решения  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**4.2. Система с запаздыванием без управления.** Уравнение системы с запаздыванием задается в следующем виде [3]:

$$m\ddot{x}(t) = -k(x(t - \tau) - l). \quad (4)$$

Пусть  $x(t) - l = y(t)$ ,  $x(t - \tau) - l = y(t - \tau)$ . Тогда уравнение (4) принимает вид

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t - \tau).$$

Характеристический квазиполином этого уравнения есть

$$f(\lambda) = m\lambda^2 + k \exp(-\lambda\tau).$$

**4.3. Общий случай.** Исходное уравнение при наличии управляемых слагаемых с запаздыванием и без запаздывания имеет вид

$$m\ddot{x}(t) = -k_1(x(t) - l) - k_2(x(t - \tau) - l). \quad (5)$$

Пусть  $x(t) - l = y(t)$ ,  $x(t - \tau) - l = y(t - \tau)$ . Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$m\ddot{y}(t) = -k_1y(t) - k_2y(t - \tau), \quad (6)$$

а его характеристический квазиполином

$$\tilde{f}(\lambda) = m\lambda^2 + k_2 \exp(-\lambda\tau) + k_1.$$

**5. Примеры.** Рассмотрим два примера.

**5.1. Система с запаздыванием.** Уравнение системы записывается в следующем виде:

$$ms^2 + k \exp(-s\tau) = 0.$$

Домножим его на  $\exp(s\tau)$  и учтем, что  $s = i\omega$

$$k - m\omega^2(\cos(\omega\tau) + i \sin(\omega\tau)) = 0.$$

Выделим полиномы искоемых параметров:

$$\begin{aligned} P(i\omega) &= 1, \\ Q(i\omega) &= -m\omega^2(\cos(\omega\tau) + i\sin(\omega\tau)), \\ R(i\omega) &= 0. \end{aligned}$$

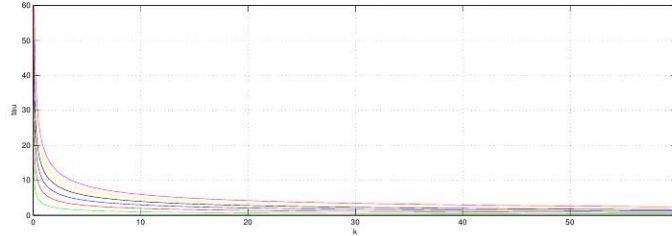
Отделим действительную часть от мнимой:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & P_2 &= 0, \\ Q_1 &= -m\omega^2 \cos(\omega\tau), & Q_2 &= -m\omega^2 \sin(\omega\tau), \\ R_1 &= 0, & R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Если комплексное число равно нулю, то равны нулю его действительная и мнимая часть, т. е.

$$\begin{aligned} k + m\omega^2 \cos(\omega\tau) &= 0, \\ 0 + m\omega^2 \sin(\omega\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему, найдем  $\omega\tau = \pi n$ ,  $k = \mp m\omega^2$  и  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



**Рис. 3.** Система с запаздыванием

Заметим из рис. 3, что для устойчивости системы при различных значениях частоты  $k$  и  $\tau$  должны быть больше нуля.

**5.2. Система в целом.** Уравнение системы записывается в следующем виде:

$$ms^2 + k_2 \exp(-s\tau) + k_1 = 0.$$

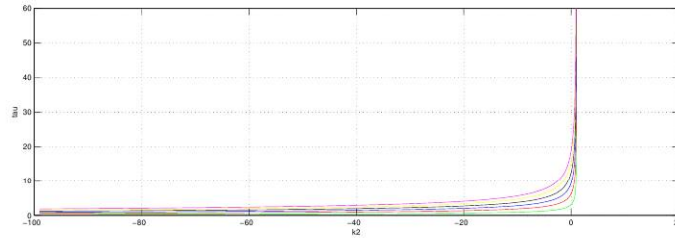
Выразим из него  $k_2$ , учитывая, что  $s = i\omega$

$$k_2 = (-k_1 + m\omega^2)(\cos(\omega\tau) + i\sin(\omega\tau)).$$

Если комплексное число равно нулю, то равны нулю действительная и мнимая его части, т. е.

$$\begin{aligned}k_2 + k_1 \cos(\omega\tau) - m\omega^2 \cos(\omega\tau) &= 0, \\ 0 + k_1 \sin(\omega\tau) - m\omega^2 \sin(\omega\tau) &= 0.\end{aligned}$$

Решая систему, получаем  $\omega\tau = \pi n$ ,  $k_2 = \mp(k_1 - m\omega^2)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



**Рис. 4.** Система в целом

Заметим из рис. 4, что для устойчивости системы при различных значениях частоты  $k$  должно быть меньше нуля, а  $\tau$  больше нуля.

**6. Заключение.** В данной работе рассматривалась математическая модель управляемой тележки при наличии запаздывания в канале обратной связи. С целью анализа устойчивости в пространстве управляющих параметров применялись метод D-разбиений и компьютерное имитационное моделирование при различных параметрах и начальных условиях.

### Литература

1. Bhattacharyya S. P., Keel L. H. Robust control: the parametric approach. Pergamon: Prentice Hall PTR, 1995. 648 p.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009. 496 с.
3. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

УДК 519.71

Томилова А. С.

## Применение метода оптимального демпфирования к синтезу закона управления колёсным роботом

*Рекомендовано к публикации профессором Сотниковой М. В.*

**1. Введение.** Статья посвящена синтезу закона управления движением колёсного робота с применением метода оптимального демпфирования, который впервые был предложен В. И. Зубовым в начале 1960-х годов [1]. Целью управления является движение робота в заданное положение, т. е. рассматривается задача динамического позиционирования. Метод оптимального демпфирования позволяет найти приближенное решение поставленной задачи оптимального управления, сводя её к задаче параметрической оптимизации. Показано, что такой подход гарантирует глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы. Приведён пример имитационного моделирования, демонстрирующий полученные результаты.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим математическую модель движения колёсного робота [2]

$$\dot{\eta} = R(\eta)v. \quad (1)$$

Здесь  $\eta = (x \ y \ \varphi)^T$  – вектор состояния;  $x, y$  – координаты центра масс,  $\varphi$  – угол поворота;  $v = (v_x \ v_y \ w)^T$  – вектор скорости, который в данном случае играет роль управляющего воздействия; матрица поворота

$$R(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Целью управления является достижение заданного положения робота на плоскости, определяемого вектором  $\eta_d = (x_d \ y_d \ \varphi_d)^T$ .

---

*Томилова Анастасия Сергеевна* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nt4815@gmail.ru, тел.: +7(981)951-77-91

На движениях замкнутой системы задан функционал, характеризующий качество процессов управления:

$$J = J(\eta, v) = \int_0^{\infty} (\eta^T R \eta + v^T Q v) dt, \quad (2)$$

где  $R$  и  $Q$  – положительно-определённые матрицы.

Отметим, что модель (1) и функционал (2) в дальнейшем используются для синтеза оптимального управления, стабилизирующего систему (1) в нулевом положении равновесия. Если рассматривается другая точка покоя, отличная от нулевой, то необходимо построить систему в отклонениях на основе модели (1).

Ставится задача синтеза закона управления, обеспечивающего достижение цели управления с наилучшим качеством переходных процессов по отношению к заданному функционалу (2).

**3. Применение метода оптимального демпфирования к синтезу закона управления.** Управление  $v$  будем строить при помощи решения задачи оптимального демпфирования по отношению к вспомогательному функционалу

$$L = L(\eta, v) = \eta^T V \eta + \int_0^t (\eta^T R \eta + v^T Q v) d\tau, \quad (3)$$

где  $V$  – матрица, являющаяся кандидатом на функцию Ляпунова.

Метод оптимального демпфирования [3] состоит в минимизации функции  $W$ , определяющей скорость изменения функционала (3) на движениях системы (1):

$$W = W(\eta, v) = \left. \frac{d(\eta^T V \eta)}{dt} \right|_{(1)} + \eta^T R \eta + v^T Q v. \quad (4)$$

Тогда задача оптимального демпфирования принимает вид

$$W = W(\eta, v) \rightarrow \min_{v \in U}, \quad v = v_d(\eta) := \arg \min_{v \in U} W(\eta, v), \quad (5)$$

где  $U = E^3$  – допустимое множество, совпадающее с евклидовым трёхмерным пространством;  $v_d$  – оптимальное управление.

Найдём решение задачи (5). Для поиска минимума функции (4) по переменной  $v$  воспользуемся условием

$$\frac{\partial W}{\partial v} = 0. \quad (6)$$

Решая систему (6), получим оптимальное управление

$$v = v_d(\eta) = -Q^{-1}R(\eta)^T V \eta. \quad (7)$$

Управление (7) зависит от матрицы  $V$ , выбор которой должен обеспечивать глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия в замкнутой системе (1), (7). Поиск матрицы  $V$  будем осуществлять с помощью введения вектора параметров  $h$ , который задаёт её коэффициенты:

$$V = \begin{pmatrix} h_1 & h_4 & h_5 \\ h_4 & h_2 & h_6 \\ h_5 & h_6 & h_3 \end{pmatrix}, \quad h = (h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \quad h_5 \quad h_6)^T.$$

Воспользуемся вычислительным алгоритмом, предложенным в статье [3]. Пусть задан вектор параметров  $h \in H_v$ , где  $H_v$  – множество векторов  $h$ , для которых матрица  $V$  положительно определена. Обозначим решение (7) задачи оптимального демпфирования для заданного вектора  $h$  через  $v_d(\eta, h)$ , а соответствующее ему движение через  $\eta(t, \eta_0, h)$ , где  $\eta_0$  – начальные условия для замкнутой системы (1), (7). Вектор параметров  $h$  найдём как решение задачи минимизации функционала

$$J(h) = \int_0^{\infty} (\eta(t, \eta_0, h)^T R \eta(t, \eta_0, h) + v_d(\eta, h)^T Q v_d(\eta, h)) dt \quad (8)$$

на допустимом множестве  $H_v$ . Эта задача представляет собой задачу параметрической оптимизации вида

$$J = J(h) \rightarrow \min_{h \in H_v}, \quad h_d := \arg \min_{h \in H_v} J(h). \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи оптимального демпфирования (5) сводится к решению задачи параметрической оптимизации (9).

**4. Пример имитационного моделирования.** В качестве примера рассмотрим движение колёсного робота в заданное положение. Для этого зададим начальные условия системы (1) и желаемое положение, в которое движется робот:

$$\begin{aligned} x_0 = 10, & \quad y_0 = 10, & \quad \varphi_0 = 0^\circ; \\ x_d = 5, & \quad y_d = 5, & \quad \varphi_d = 80^\circ. \end{aligned}$$

Построим систему в отклонениях от заданного положения:

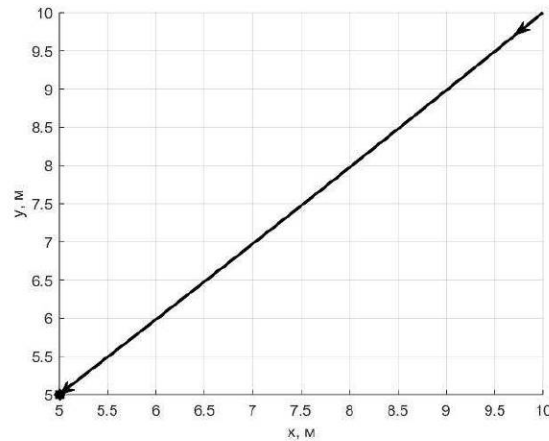
$$\dot{e} = R(e + \eta_d)v. \quad (10)$$

Здесь  $e = \eta - \eta_d$  – вектор состояния системы в отклонениях,  $\eta_d$  – вектор заданного положения.

Применим изложенный выше подход к синтезу управления для системы (10). Пусть матрицы  $R = Q = E$ . Тогда, решая задачу параметрического синтеза (9), получим вектор

$$h = (1,593 \quad 1,4311 \quad 3,9725 \quad -0,4035 \quad 0,745 \quad 0,0801)^T.$$

На рис. 1 представлена траектория движения колёсного робота в заданное положение.



**Рис. 1.** Траектория движения колёсного робота в заданное положение

На рис. 2 представлены графики изменения линейных ( $v_x$ , м/с и  $v_y$ , м/с) и угловой ( $w$ , рад/с) скоростей, полученные при движении колёсного робота в заданное положение.

По результатам, приведенным на графиках, можно сделать вывод, что цель управления достигается. При этом время переходного процесса составляет примерно 5 с.

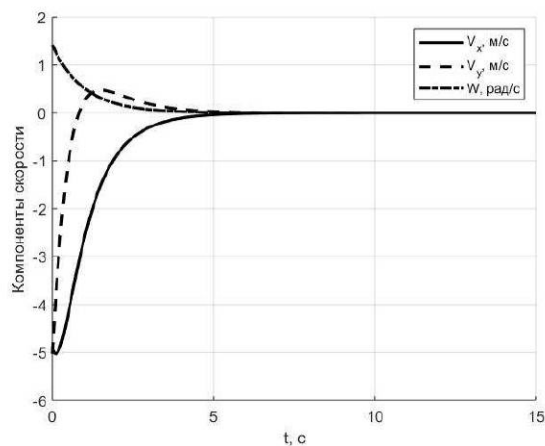


Рис. 2. Графики изменения линейных и угловой скоростей

**5. Заключение.** В результате работы выполнен синтез закона управления движением колёсного робота с применением метода оптимального демпфирования. Данный метод позволяет найти приближённое решение поставленной задачи оптимального управления путём сведения к задаче параметрической оптимизации. Рассмотрен пример движения колёсного робота в заданное положение. Полученные результаты позволяют сделать вывод о корректности решения поставленной задачи.

## Литература

1. Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 631 с.
2. Абушик В. П. Управление движением омниколёсного робота с учётом внешних возмущений // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 188–192.
3. Veremey E. I. On practical application of Zubov's optimal damping concept // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 293–315.



УДК 517.977.56

Тран 3.

**Программный комплекс для решения  
начально-краевой задачи для гиперболического  
уравнения с распределенными параметрами  
в сетеподобной области**

*Рекомендовано к публикации профессором Провоторовом В. В.*

**1. Введение.** В работе рассматривается широкий спектр вопросов, относящихся к решению начально-краевой задачи для уравнения в частных производных гиперболического типа с  $n$ -мерной пространственной переменной ( $n \geq 2$ ), изменяющейся на сетеподобной области. Математическая модель, описывающая процесс переноса упругой среды по сетевому носителю, определяется формализмами начально-краевой задачи. Разработана ЭВМ-программа, которая апробирована на тестовых задачах, ориентированных на задачи прикладного характера [1–3].

**2. Пример численного решения.** Для упрощения представления результатов исследования рассматривается тестовая начально-краевая задача для областей пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$ . Двумерная область  $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ , состоящая из подобластей  $\mathfrak{S}_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , с узловыми местами  $\xi_1, \xi_2$  (двухсторонними поверхностями примыкания  $S_1$  и  $S_2$ ). Структура такой области представлена на рис. 1.

Тестовая задача, представленная ниже, описывает упрощенный процесс колебательных явлений в наполненном жидкой субстанцией трубопроводе. Математическая модель колебательного процесса для амплитуд  $u(x, y, t)$ ,  $(x, y, t) \in \mathfrak{S} \times [0, T]$  описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(x, y) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right).$$

Здесь  $a(x, y)$  – коэффициент упругости среды,  $x \in (0, 5)$ ,  $y \in (0, 5)$ ,  $t \in \mathfrak{S}_T \setminus \{S_1, S_2\}$ . Условия примыкания в узловых местах  $\xi_p$  ( $p = 1, 2$ ):

$$u(x, y, t)|_{S_1^+} = u(x, y, t)|_{S_1^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{S_1^-},$$

---

*Тран Зуя* – аспирант, Воронежский государственный университет; e-mail: trandyusp94@gmail.com, тел.: +7(952)438-17-94

$$u(x, y, t)|_{S_2^+} = u(x, y, t)|_{S_2^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{S_2^-}.$$

Начальные условия

$$u(x, y, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Граничные условия

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(2.5, y, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right),$$

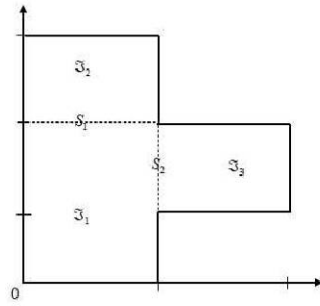
$$u(5, y, t) = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad u(x, 0, t) = 0,$$

$$u\left(x, \frac{5}{3}, t\right) = \frac{1}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

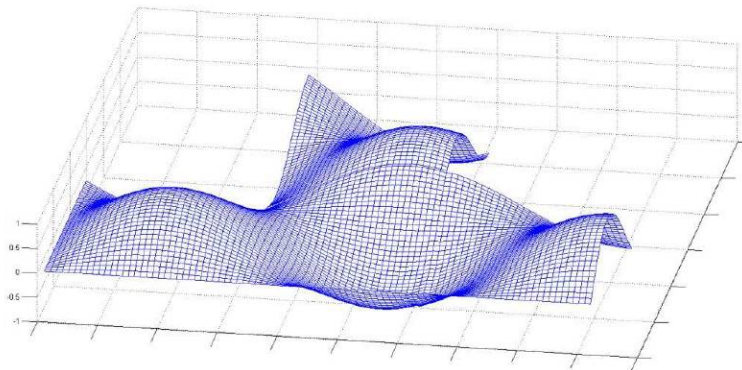
$$u\left(x, \frac{10}{3}, t\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

$$u(x, 5, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

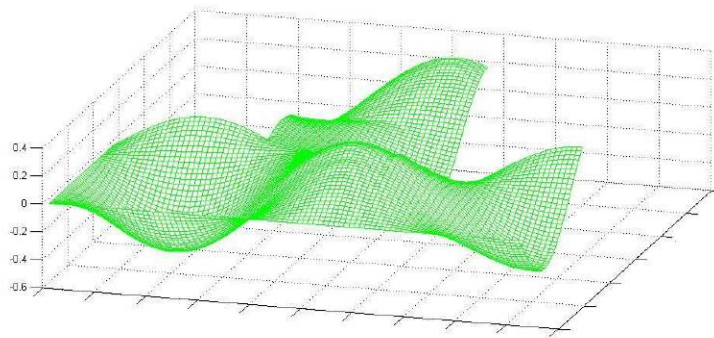
Рассматриваемая задача имеет параметры  $a(x, y) = 4$ ,  $h_x = 0,05$ ,  $h_y = 0,0556$ ,  $\tau = 0,0185$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ . На рис. 2–4 приведено графическое представление полученных в тестовой задаче численных результатов.



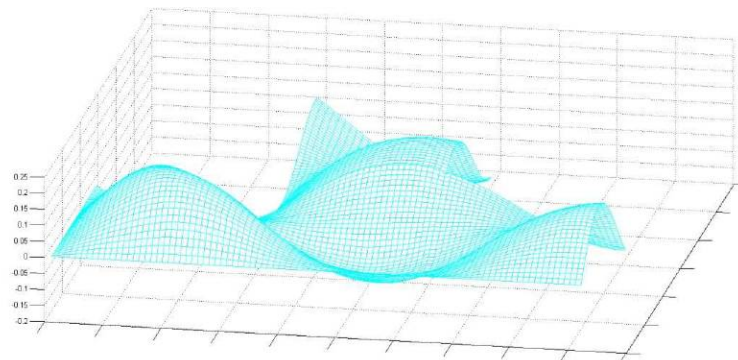
**Рис. 1.** Структура области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



**Рис. 2.** Изменение амплитуд колебаний  $u(x, y, t)$  при  $t = 0$



**Рис. 3.** Изменение амплитуд колебаний  $u(x, y, t)$  при  $t = 1,85$

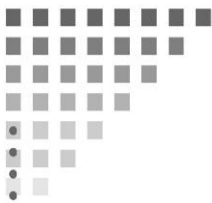


**Рис. 4.** Изменение амплитуд колебаний  $u(x, y, t)$  при  $t = 7,38$

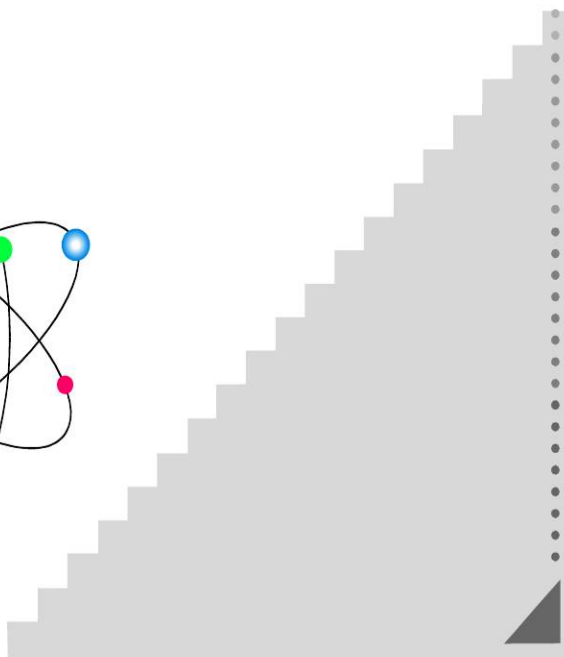
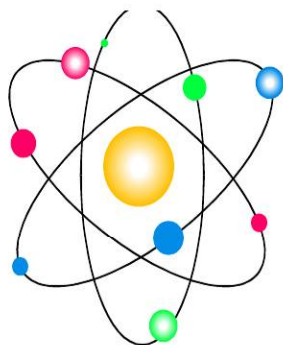
**3. Заключение.** В работе рассмотрена начально-краевая задача для уравнения в частных производных гиперболического типа с многомерной пространственной переменной, принадлежащей евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , и изменяющейся на сетеподобной области. Для решения задачи колебаний использованы локально-одномерный метод и метод прогонки. В исследовании получены результаты для начально-краевой задачи колебаний в случае  $n = 2$ . Результаты работы применимы в задачах оптимального управления и сетевой экономики.

## Литература

1. Тран З., Провоторов В. В. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9. Вып. 3. С. 1–15.
2. Тран З. Локально-одномерный метод для уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2022. Т. 10. Вып. 2. С. 1–12.
3. Провоторов В. В., Провоторова Е. Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. №. 2. С. 209–224.



*2. Математические  
методы в механике и  
физике*





УДК 519.642

Алцыбеев Г. О., Бурова И. Г.

## О применении сплайнов к решению интегральных уравнений со слабой особенностью

**1. Введение.** Многочисленные задачи механики, математической физики и техники приводят к интегральным уравнениям. В представленной работе рассматривается численное решение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Предлагается решение этих уравнений на основе локальных сплайновых аппроксимаций и квадратурных формул гауссова типа. Как показано в работе [1], при решении интегральных уравнений применение сплайновых аппроксимаций часто дает меньшую погрешность решения, чем при применении традиционных методов.

**2. Уравнение Фредгольма второго рода.** Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью

$$y(x) - \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

в котором  $y(x)$  – неизвестная непрерывная на  $[a, b]$  функция,  $f(x)$  – правая часть интегрального уравнения, непрерывная на  $[a, b]$ ,  $K(x, s)$  – ядро со слабой особенностью, определенное на квадрате  $\Pi = \{(x, s) | a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$ , представляющее собой произведение

$$K(x, s) = p(x, s) g(x, s),$$

где  $g(x, s)$  – непрерывная функция,  $p(x, s)$  – весовая функция вида

$$p(x, s) = \frac{1}{|x - s|^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

---

*Алцыбеев Глеб Олегович* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gleb.altsybeev@spbu.ru, тел.: +7(931)531-43-75

*Бурова Ирина Герасимовна* – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.g.burova@spbu.ru, тел.: +7(921)575-44-15

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета, проект Pure ID: 104625746



Рассмотрим применение локальных интерполяционных сплайнов второго порядка аппроксимации для построения численного метода решения интегрального уравнения (1). Пусть на промежутке  $[a, b]$  построена сетка упорядоченных узлов  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  с шагом  $h_j = x_{j+1} - x_j$ . Рассмотрим интеграл в виде

$$\int_a^b p(x, s) g(x, s) y(s) ds = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x, s) g(x, s) y(s) ds. \quad (2)$$

Функция  $y(s)$  может быть аппроксимирована сплайном

$$\tilde{y}(s) = y(x_j) \omega_j(s) + y(x_{j+1}) \omega_{j+1}(s), \quad s \in [x_j, x_{j+1}], \quad (3)$$

где базисные сплайны таковы

$$\omega_j(s) = \frac{\varphi(s) - \varphi(x_{j+1})}{\varphi(x_j) - \varphi(x_{j+1})}, \quad \omega_{j+1}(s) = \frac{\varphi(s) - \varphi(x_j)}{\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)},$$

$$s \in [x_j, x_{j+1}],$$

а  $\{1, \varphi(x)\}$  образуют чебышевскую систему. В случае  $\varphi(s) = s$  получаем полиномиальные сплайны, а в случае  $\varphi(s) = e^s$  или  $\varphi(s) = e^{-s}$  получаем неполиномиальные (экспоненциальные) сплайны [1].

Далее будем использовать норму

$$\|y\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|.$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1** [1]. Пусть функция  $y(s)$  такая, что  $y \in C^2[a, b]$ . Для погрешности аппроксимации функции  $y(s)$ ,  $s \in [x_j, x_{j+1}]$ , сплайном (3) с полиномиальными базисными функциями выполняется следующее неравенство:

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \leq \kappa_1 h^2 \|y''\|_{[x_j, x_{j+1}]}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{8}, \quad s \in [x_j, x_{j+1}].$$

Обозначим  $Ly = e^{-s}(y''(s) + y'(s))$  в случае, когда  $\varphi(s) = e^{-s}$ ;  $Ly = e^s(y''(s) - y'(s))$  в случае, если  $\varphi(s) = e^s$ .

**Теорема 2** [1]. Пусть функция  $y(s)$  такая, что  $y \in C^2[a, b]$ . Предположим, что базисные функции  $\omega_j(s)$ ,  $\omega_{j+1}(s)$  неполиномиальные,  $\tilde{y}(s)$  строится по формуле (3). Тогда для  $\varphi(s) = e^s$  или  $\varphi(s) = e^{-s}$ ,  $s \in [x_i, x_{i+1}]$ , имеем

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \leq \kappa_2 h^2 \|Ly\|, \quad \kappa_2 > 0, \quad s \in [x_j, x_{j+1}].$$

Заменяя  $y(s)$  в выражении (2) по формуле (3) получаем

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x, s) g(x, s) y(s) ds \approx \tilde{y}(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x, s) g(x, s) \omega_j(s) ds + \\ + \tilde{y}(x_{j+1}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x, s) g(x, s) \omega_{j+1}(s) ds.$$

Полагая  $x = x_i$ , уравнение (1) сводим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\tilde{y}(x_i) - \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \tilde{y}(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x_i, s) g(x_i, s) \omega_j(s) ds + \right. \\ \left. + \tilde{y}(x_{j+1}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x_i, s) g(x_i, s) \omega_{j+1}(s) ds \right] = f(x_i), \quad (4) \\ i = 0, \dots, n-1.$$

Решив эту систему, находим каркас приближенного решения [2], то есть приближенные значения  $y(x)$  в узлах  $\{x_i\}$ . Далее приближенное решение можно использовать в виде

$$\tilde{y}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \tilde{y}(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x, s) g(x, s) \omega_j(s) ds + \right. \\ \left. + \tilde{y}(x_{j+1}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x, s) g(x, s) \omega_{j+1}(s) ds \right], x \in [a, b]. \quad (5)$$

Интегралы в (4) и (5) вычисляем по квадратурной формуле гауссова типа с весом  $p(x, s)$  по двум узлам.

Кроме этого, отметим, что полученные приближенные значения решения в узлах сетки можно соединять, например, с помощью квадратичных сплайнов или кубических  $B$ -сплайнов.

**3. Уравнение Вольтерра второго рода.** Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью

$$y(x) - \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (6)$$

в котором основные обозначения соответствуют обозначениям из уравнения (1), а  $K(x, s)$  – ядро со слабой особенностью, определенное на треугольнике  $\Delta = \{(x, s) | a \leq x \leq b, a \leq s \leq x\}$ ,

$$K(x, s) = p(x, s)g(x, s), \quad p(x, s) = \frac{1}{|x-s|^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Аналогично пункту 2 решение уравнения (6) приводим к решению СЛАУ

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \left[ \tilde{y}(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x_i, s)g(x_i, s)\omega_j(s)ds + \right. \\ \left. + \tilde{y}(x_{j+1}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x_i, s)g(x_i, s)\omega_{j+1}(s)ds \right] = f(x_i), \\ i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Решив эту систему получаем каркас приближенного решения.

**4. Примеры вычислений.** Приведем примеры численных решений интегральных уравнений с применением математического пакета Maple 2015.0.

**4.1. Пример 1.** Рассмотрим модельное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \int_0^\pi K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [0, \pi], \quad K(x, s) = \frac{\sin(xs)}{\sqrt{|s-x|}}.$$

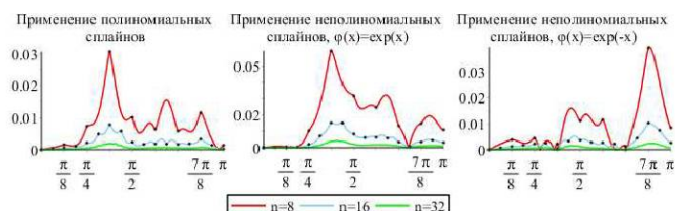
Правая часть  $f(x)$  строится по ядру и точному решению. Точное решение  $y(x) = \sin x$ .

Построим приближенные решения на равномерной сетке с  $n = 8, 16, 32$  и переменной окружения  $Digits = 15$ , отвечающей за количество знаков в мантиссе числа. На рис. 1 представлены абсолютные погрешности  $E = |y(x) - \tilde{y}(x)|, x \in [0, \pi]$ .

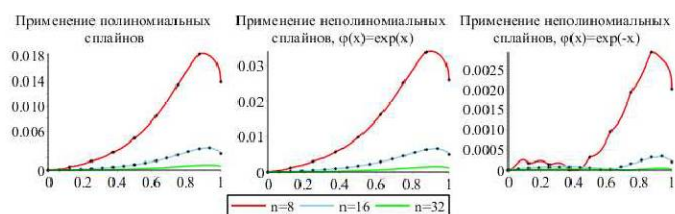
**4.2. Пример 2.** Рассмотрим результат решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) + \int_0^x \frac{\sin(xs)}{\sqrt{|x-s|}}y(s)ds = f(x), \quad x \in [0, 1].$$

Точное решение  $y(x) = \sqrt{x}$ . Построим приближенные решения на равномерной сетке с  $n = 8, 16, 32$  и переменной  $Digits = 15$ . На рис. 2 представлены абсолютные погрешности  $E = |\tilde{y}(x) - y(x)|, x \in [0, 1]$ .



**Рис. 1.** Сравнение абсолютных погрешностей в зависимости от применяемых типов сплайнов и количества узлов сетки



**Рис. 2.** Сравнение абсолютных погрешностей в зависимости от применяемых типов сплайнов и количества узлов сетки

**5. Заключение.** Применение локальных интерполяционных сплайнов второго порядка аппроксимации удобно для численного решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

## Литература

1. Burova I. G., Alcybeev G. O. Application of splines of the second order approximation to Volterra integral equations of the second kind. Applications in systems theory and dynamical systems // International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing. 2021. Vol. 15. P. 63–71.
2. Даугавет И. К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 288 с.

УДК 004.942

**Волокитин Е. М.**

## **Идентификация модели однозвенного маятника**

*Рекомендовано к публикации ассистентом Севостьяновым Р. А.*

**1. Введение.** Моделирование помогает в работе с различными системами, так как позволяет отойти от проверки гипотез на реальных устройствах к проверке гипотез на моделях, что может значительно сэкономить время и ресурсы. Однако точность моделирования напрямую зависит от того, насколько корректно будет построена математическая модель.

Для изучения моделирования и теории управления подходит класс маятников. Они имеют очень широкую область применения, например, в основе шагающих роботов лежат обратные маятники.

Зачастую в литературе приводят упрощённые модели маятников без учёта различных сил, которые возникают при реальных экспериментах.

Данная статья рассматривает вопросы сравнения теоретических моделей и результатов реальных экспериментов.

**2. Постановка задачи.** Дана установка с однозвенным маятником на жёстком подвесе. Необходимо построить математическую модель, провести численные эксперименты с компьютерной моделью и сравнить результаты с собранными в ходе реального эксперимента данными. Также нужно идентифицировать параметры реального маятника и сравнить полученные теоретические результаты с экспериментальными, но уже с другими начальными условиями.

**3. Вывод уравнения колебаний маятника.** На маятник действуют сила тяжести и сила вязкого трения (см. рис. 1). Сила вязкого трения зависит от среды, в которой маятник совершает колебания, и от внутреннего устройства вала вращения, вида смазки. Поэтому под коэффициентом вязкого трения  $r$  будем понимать сумму коэффициентов трения среды и трения вала.

---

*Волокитин Егор Михайлович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: volokitine@yandex.ru, тел.: +7(921)658-04-28

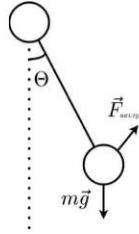


Рис. 1. Действие сил

Решая задачу поиска зависимости угла отклонения  $\theta$  от времени, получим следующее дифференциальное уравнение [1]:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{r}{m}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{L}\sin\theta(t) = 0, \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $r$  – коэффициент вязкого трения,  $m$  – масса груза,  $L$  – расстояние от оси вращения до груза.

Сведём уравнение (1) к системе заменой переменных  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{r}{m}\omega - \frac{g}{L}\sin\theta. \end{cases} \quad (2)$$

Для проведения численных экспериментов примем следующие значения коэффициентов:  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $L = 0,25 \text{ м}$ ,  $m = 0,15 \text{ кг}$ . Основная трудность заключается в том, что невозможно точно определить значение коэффициента вязкого трения. Возьмём  $r = 4,5 \times 10^5$ , исходя из средних значений. Начальный угол отклонения равен  $0,34 \text{ рад}$ .

Численно решим систему (2) полуняевным методом Эйлера.

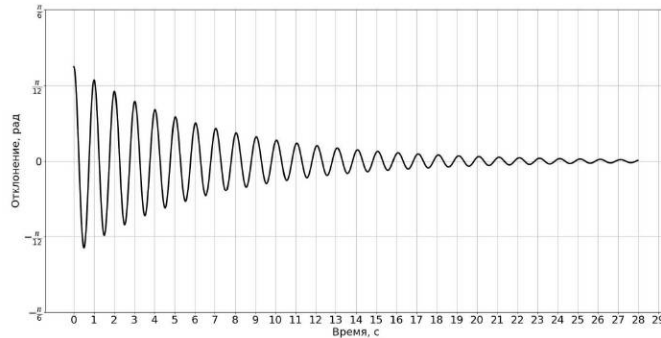


Рис. 2. График затухания колебаний

На рис. 2 видно, что затухание колебаний имеет экспоненциальный характер.

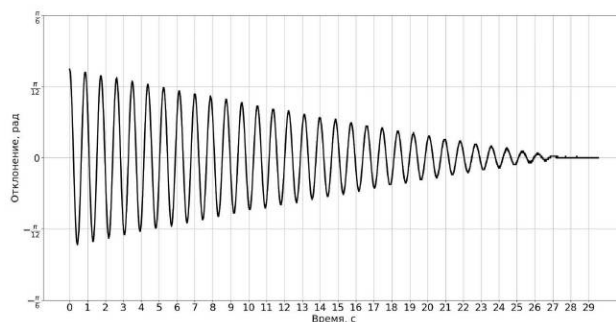
**4. Описание установки.** Установка (рис. 3) собрана на базе абсолютного энкодера и микроконтроллера ATmega328p. Звено маятника прочно закреплено с валом энкодера. Энкодер показывает, в каком положении сейчас находится его вал. Эти значения снимает микроконтроллер и передаёт в компьютер. Также записываются и моменты времени, в которые были полученные данные об углах отклонения, так как значения снимаются через разные промежутки времени.



**Рис. 3.** Фото установки

**5. Сравнение эмпирических и теоретических данных.** Проведём реальный эксперимент. Пусть начальный угол равен  $0,3$  рад.

На рис. 4 видно, что процесс затухания не имеет такого ярко выраженного экспоненциального характера, как в теории.



**Рис. 4.** График затухания колебаний

Данное различие можно объяснить тем [2], что не учитывалось сухое трение, которое возникает в энкодере. Логично предположить, что внутри энкодера нет смазочных материалов, которые бы давали вязкое трение, а значит в нём возникает сухое трение, которое зависит от постоянного коэффициента сухого трения и знака вектора скорости.

Система уравнений, которая будет учитывать эту силу, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -k_1\omega - k_2 \sin \theta - \text{sign}(\omega)k_3. \end{cases} \quad (3)$$

Коэффициент вязкого трения всё ещё значим, так как маятник совершает колебания в вязкой среде.

**6. Моделирование с учётом сухого трения.** Имея значения, снятые с реального маятника, и уравнения, описывающие его колебания, идентифицируем коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ .

Рассмотрим  $L_2$ -норму, которая будет показывать разницу между реальной траекторией и траекторией, полученной в результате решения нового дифференциального уравнения при подстановке каких-либо значений коэффициентов. Задача заключается в минимизации  $L_2$ -нормы.

С помощью метода Нелдера – Мида получаем значение  $L_2 = 0,29$ . Дополнительно приведём значение нормы  $L_{\text{inf}} = 0,0202$ .

$$\begin{cases} k_1 = 5,20344118 \times 10^{-3}, \\ k_2 = 1,39553092 \times 10^{-5}, \\ k_3 = 7,00949640 \times 10^{-7}. \end{cases}$$

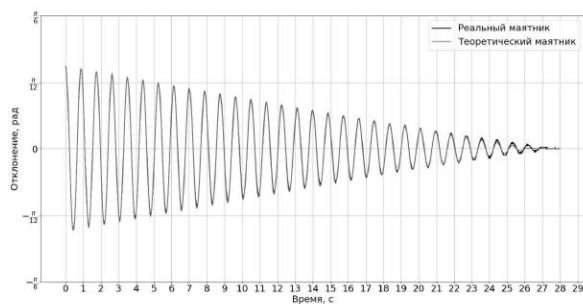
Также подставим эти значения в систему (3) и сравним графики, реальный и теоретический.

Как можно видеть из рис. 5, 6, реальные и теоретические колебания практически совпадают.

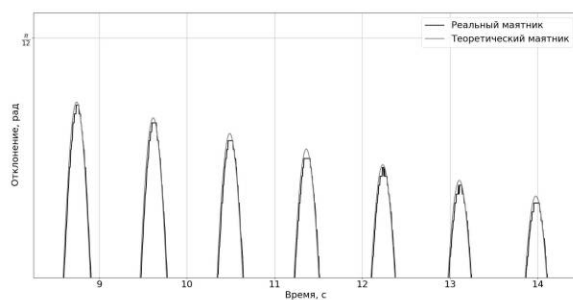
**7. Повторный эксперимент.** Проведём повторный реальный эксперимент. Снимем значения и сравним с результатом, который получится, если использовать ранее идентифицированные коэффициенты. Начальный угол равен 0,28 рад.

Результаты  $L_2 = 0,7438$ ,  $L_{\text{inf}} = 0,0489$ , говорят о том, что траектории практически совпадают.





**Рис. 5.** Сравнение реальных данных и полученных теоретически



**Рис. 6.** Выборочное сравнение пиковых значений

**8. Вывод.** В данной работе получена математическая модель реального маятника. В дальнейшем планируется совместить маятник с электромотором и изучать управление с учётом полученной модели.

## Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
2. Быков В. Г. От маятника к роботу. Введение в компьютерное моделирование управляемых механических систем. СПб.: Наука, 2011. 85 с.

УДК 539.3

Вяльцева В. В., Седова О. С.

### Применение итераций обобщенного метода конечных элементов с локальным и глобальным решением к задаче Кирша

**1. Введение.** Несмотря на то, что для многих задач механики найдены аналитические решения, например [1], метод конечных элементов (FEM) пользуется большой популярностью, когда дело касается решения задач о напряженно-деформированном состоянии тел с выемками, трещинами, порами [2]. Однако, если рассматривается тело с дефектом маленького размера или сложной формы, то сетка FEM накладывает на него ограничения [3]. По оценкам, создание подогнанных или соответствующих геометрии сеток для сложных геометрий занимает около 80% от общего времени анализа [4]. Кроме того, создание сетки хорошего качества – это сложная задача, которая может закончиться неудачей, особенно для трехмерных моделей. В то же время, известно, что при построении сетки конечных элементов [5] необходимо не допускать того, чтобы соседние элементы значительно различались по размерам. Таким образом, наличие локальных неоднородностей геометрии приводит к существенному увеличению количества элементов. С точки зрения численного решения задачи увеличение количества элементов в сетке ведет к значительным вычислительным затратам. Эти особенности FEM отмечены в работах [3, 6]. Существует несколько методов решения данной проблемы. Высокую эффективность показал обобщенный метод конечных элементов с локальным и глобальным решением (GFEM<sup>gl</sup>) [6]. В [7] данный метод применен для решения задачи Кирша. Однако в некоторых ситуациях применение GFEM<sup>gl</sup> приводит к существенной погрешности решения.

Для повышения точности GFEM<sup>gl</sup> применяют итеративный процесс решения [8].

---

*Вяльцева Виктория Витальевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: valcevav@gmail.com, тел.: +7(952)892-77-38

*Седова Ольга Сергеевна* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.s.sedova@spbu.ru, тел.: +7(911)-159-23-84

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 21-19-00100

Данная работа посвящена реализации итеративного подхода для GFEM<sup>gl</sup> и применению его к задаче Кирша.

**2. Основные положения используемых методов.** Рассмотрим алгоритмы FEM, GFEM<sup>gl</sup> и его итерации.

**2.1. Метод конечных элементов.** Для решения задач с помощью FEM рассматриваемый объект разбивается на конечное число элементов, которые имеют фиксированные узловые точки. По известным значениям искомой величины в этих точках, используя кусочно-непрерывную функцию, определяют значения величины внутри элементов [7, 9].

**2.2. Обобщенный метод конечных элементов с локальным и глобальным решением.** Решение задачи данным методом представимо в виде двух частей: гладкое глобальное решение, построенное на крупной сетке конечных элементов, и решение задачи в относительно небольшой области или областях, которое строится на мелкой сетке и учитывает неоднородности [8]. Оба решения ищутся одним численным методом. В данной работе для построения глобального и локального решения использован FEM. Итоговый вектор перемещений можно получить по формуле

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \hat{u}_j^t(x) + \sum_{k \in I_{gl,t}} N_k(x) u_k^{gl,t}(x),$$

где  $N_j(x)$  – функция формы  $j$ -го узла глобальной сетки,  $\hat{u}_j^t(x)$  – перемещение  $j$ -го узла, найденное глобальным решением,  $N_k(x)$  – функция формы  $k$ -го узла крупной сетки, который попал в локальное решение,  $u_k^{gl,t}$  – перемещение  $k$ -го узла, найденное локальным решением,  $x$  – точка в рассматриваемой области,  $j$  – узлы глобальной сетки, не вошедшие в локальную сетку,  $I_{gl,t}$  – узлы глобальной сетки, вошедшие в локальную сетку.

**2.3. Итерации.** Для увеличения точности глобального решения, которое будет использовано в качестве граничных условий в локальной задаче GFEM<sup>gl</sup>, применяются итерации построения локального и глобального решений. Например, в [8] рассматривается задача с трещиной, а в [10] решена задача с локальными включениями и продемонстрирована более высокая точность решения GFEM<sup>gl</sup> с несколькими итерациями относительно решения без итераций. Кроме того, в [10] приводится сравнение вычислительной эффективности GFEM<sup>gl</sup> с итерациями и прямого численного моделирования, ко-

торое показывает, что GFEM<sup>gl</sup> с итерациями сокращает количество проводимых вычислений. Алгоритм итераций GFEM<sup>gl</sup>:

1. Глобальное решение задачи на крупной сетке с помощью FEM. За граничные условия берутся усилия, которые действуют на объект.
2. Локальное решение вблизи дефекта на мелкой сетке с помощью FEM. За граничные условия берутся перемещения узлов на границе локальной области, найденные на предыдущем шаге.
3. Локальная сетка из предыдущего шага рассматривается как глобальная и повторяется предыдущий шаг.

**3. Решение задачи Кирша.** Рассматривается задача Кирша в следующей постановке. Квадратная пластина значительных размеров (длина грани  $d = 1$  м) с малым круговым отверстием радиуса  $r = 5$  см в ее центральной части подвергается равномерному растяжению нагрузкой интенсивностью  $P = 1$  Па в направлении оси  $x$ . Рассмотрим тонкую пластинку из однородного изотопного материала с круглым отверстием в центре. Модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коэффициент распределения Пуассона  $\nu = 0,3$ . Необходимо найти напряженно-деформированное состояние пластины, максимальное  $\sigma_{xx}$  и сравнить полученное численное решение с аналитическим. В таблице представлены результаты решения задачи Кирша на разных сетках, где  $p$  – количество элементов на грани пластины,  $m$  – количество элементов на половине диагонали,  $m_1$  – количество слоев в локальной сетке (на каждой итерации это число одинаковое). В качестве локальной области на каждой итерации рассматривается слой ближайших к отверстию элементов. В столбцах, соответствующих решениям, приведены полученные значения максимального  $\sigma_{xx}$ , в скобках указано отклонение от аналитического решения [11]. На рис. 1 представлены сетки, соответствующие итерациям в первой строке таблицы. Алгоритм, реализующий решение, написан на языке Python. Полученные результаты подтверждают исследования [10] и показывают, что первые две итерации позволяют значительно улучшить качество решения.

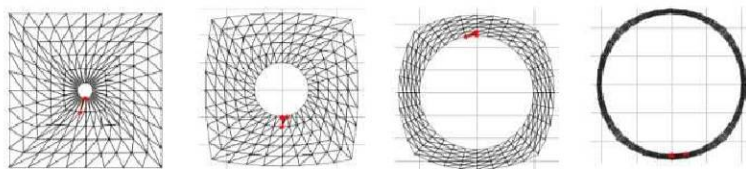


Рис. 1. Сетка при  $p = 8$ ,  $m = 5$ ,  $m_1 = 5$

Таблица. Результаты решения задачи Кирша

$N$	$p$	$m$	$m_1$	Максимальное напряжение $\sigma_{xx}$ , Па; в скобках указана погрешность по сравнению с аналитическим решением			
				Глобальное решение на круп- ной сетке	Решение после первой итерации	Решение после второй итерации	Решение после третьей итерации
1	8	5	5	1,895 (36,84%)	2,743 (8,56%)	2,8957 (3,48%)	2,8962 (3,46%)
2	8	8	5	2,215 (26,17%)	2,874 (4,21%)	2,9263 (2,45%)	2,9264 (2,45%)
3	16	5	10	1,912 (36,27%)	2,965 (1,18%)	2,9912 (0,28%)	2,9914 (0,28%)
4	16	10	10	2,408 (19,71%)	3,02 (-0,67%)	3,021 (-0,68%)	3,021 (-0,68%)
5	16	20	10	2,858 (4,73%)	3,1055 (-3,52%)	3,1052 (-3,51%)	3,1052 (-3,51%)

**4. Вывод.** В работе проведен обзор метода GFEM<sup>gl</sup> и его итераций. На языке Python реализован двумерный метод GFEM<sup>gl</sup> с итерациями, в котором глобальное и локальное решения ищутся методом конечных элементов. Метод успешно применен к задаче Кирша. Проанализированы результаты, полученные с использованием разного числа итераций.

## Литература

1. Shuvalov G. M., Vakaeva A. B., Shamsutdinov D. A., Kostyrko S. A. The effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on stress concentration near the nanopatterned bimaterial interface // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. Vol. 16. No 2. P. 165–176.

2. Окулова Д. Д., Вакаева А. Б., Седова О. С. Расчет напряжений в поллой сфере с поверхностными дефектами // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 112–116.
3. Belytschko T., Gracie R., Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2009. Vol. 17. No 4. Art. no. 043001
4. Zhang J., Zhebel E., J. van den Boom S., Liu D., M. Aragon A. An object-oriented geometric engine design for discontinuities in unfitted/immersed/enriched finite element methods // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2022. P. 5126–5154.
5. Chen J., Hillman M., Chi S. Meshfree methods: progress made after 20 Years // J. Eng. Mech. 2017. Vol. 143. No 4. Art. no. 04017001.
6. Kim D. J., Pereira J. P., Duarte C. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: a two-scale approach using coarse generalized FEM meshes // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010. Vol. 81. No 3. P. 335–365.
7. Вяльцева В. В., Седова О. С. Применение обобщенного метода конечных элементов с локальным и глобальным решением к задаче Кирша. 2022. Т. 9. № 1. С. 82–85.
8. Fonseca G. M., Barros F. B., de Oliveira T. S., Monteiro H. A., Novelli L., Pitangueira R. L. 2-D Crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2020. P. 70–83.
9. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
10. Plews J. A., Duarte C. A. Bridging multiple structural scales with a generalized finite element method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2014. P. 180–201.
11. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

УДК 004.942

Гончарук Д. Д.

## Идентификация процесса развития аварии судна в результате затопления отсеков

*Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.*

**1. Введение.** Во время плавания корабля важной задачей является постоянный контроль и прогнозирование его равновесного положения, для чего могут использоваться точные методы вычисления состояния корабля. Однако их применение подразумевает знание точных данных, таких как масса корабля, центр тяжести, центр водоизмещения судна и другие, что в реальных условиях не представляется возможным.

В связи с существованием проблем, для которых применение точных методов невозможно по причинам неполноты данных и необходимости быстрой динамической поправки решения при изменении условий внешней среды, возникает задача создания интеллектуальных систем поддержки принятия решений. Они должны уметь по известным входным данным вывести примерное решение поставленной задачи, что позволило бы оператору без сложных и длительных вычислений получить приемлемый рациональный результат.

Данное исследование представляет собой начальный этап построения такой интеллектуальной системы и преследует цель построения модели корабля. Исследования в смежных областях проводились в работах [1–3], их целью было построить достаточно точную и полную модель судна. Поскольку задачей данной работы является идентификация типового случая затопления корабля, исследование ограничивается рассмотрением только бортовой качки. Исследования на похожие темы проводились в работах [4–6]. В работе [4] проанализировано поведение судна при различных типах затопления; в работе [5] проведено изучение особенностей нелинейной качки судна на нерегулярном волнении; в работе [6] реализована идентификация равновесного положения надводного корабля в условиях реального волнения.

---

*Гончарук Даниил Дмитриевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st080521@student.spbu.ru, тел.: +7(921)565-31-12

Данное исследование углубляет результаты приведенных выше работ и распространяет их на случай переходных процессов между различными типами затопления судна.

**2. Постановка задачи.** Формирование инструментария для проведения исследований качки корабля в результате развития аварии подразумевает последовательное решение следующих задач:

- моделирование преобразования функции восстанавливающего момента;
- моделирование качки судна при различных типах аварии;
- моделирование развития аварии судна.

**3. Моделирование бортовой качки корабля.** Динамическое поведение судна на волнении можно описать нелинейным дифференциальным уравнением

$$(J_x + \mu_{\theta\theta})\ddot{\theta} + F_1(\dot{\theta}) + F_2(\theta, \phi, t) = A(t), \quad (1)$$

где  $J_x$  – момент инерции массы судна;  $\mu_{\theta\theta}$  – присоединенный момент инерции;  $\theta$  – угол крена судна;  $F_1(\dot{\theta})$  – функция демпфирования;  $F_2(\theta, \phi, t)$  – многозначная функция нелинейности, характеризующая восстанавливающий момент поврежденного судна;  $\phi$  – форм-фактор, учитывающий вид нелинейной функции, описывающей диаграмму устойчивости в исследуемом случае затопления;  $A(t)$  – возмущающая компонента (волнение) [7].

Поскольку рассматривается изолированная бортовая качка корабля, а задача ставится как качественное определение типа затопления судна по его качке, уравнение (1) можно упростить до вида

$$\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + R(\theta, t) = A(t), \quad (2)$$

так как функции в его левой части сильно зависят от характеристик конкретного судна. Здесь  $\ddot{\theta}$  – угловое ускорение крена,  $\dot{\theta}$  – угловая скорость крена,  $R(\theta, t)$  – восстанавливающая сила, зависящая от угла крена,  $A(t)$  – возмущающая компонента волнения. Восстанавливающая компонента  $R(\theta, t)$  описывается полиномом пятой степени, коэффициенты которого приведены в таблице [4]. Ее зависимость от времени характеризует переходный процесс между разными поло-



жениями судна, реализованный в виде линейной интерполяции.

**Таблица.** Коэффициенты восстанавливающего момента  $R(\theta, t)$

Ситуация	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_5$
неповрежденное судно	0,0	0,64	-0,1	-0,07
аварийное состояние 1	0,0	0,25	-0,1	-0,05
аварийное состояние 2	-0,2	0,64	-0,1	-0,07
аварийное состояние 3	0,0	-0,64	2,5	-1,3
аварийное состояние 4	-0,2	-0,64	2,5	-1,3
аварийное состояние 5	0,2	-0,64	2,5	-1,3

Приведенное уравнение (2) решается в среде MATLAB с помощью встроенной процедуры ode45 путем приведения дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

**4. Моделирование волнения.** Реальное волнение непросто описать математическими функциями, поэтому его реализация также занимает важное место в моделировании динамики судна.

Реальное волнение обычно состоит из двух составляющих: ветрового волнения и зыби. Для моделирования первой части, предполагая, что волнение зависит только лишь от скорости ветра, можно использовать модель Бретшнайдера [8]:  $k = 5, n = 4$ ;  $A$  и  $B$  – коэффициенты, связанные со значительной высотой волны и модальным периодом  $\tau$  по зависимостям

$$A = 0,28(2\pi)^4 h^2 \tau^{-4}, \quad (3)$$

$$B = 0,44(2\pi)^4 \tau^{-4}, \quad (4)$$

где  $h$  – значительная высота волны, а период волнения [9]

$$\tau \approx 4,8\sqrt{h}. \quad (5)$$

Для моделирования зыби используются те же формулы, что и для ветрового волнения, но с другими показателями степени:  $k = 9, n = 8$ .

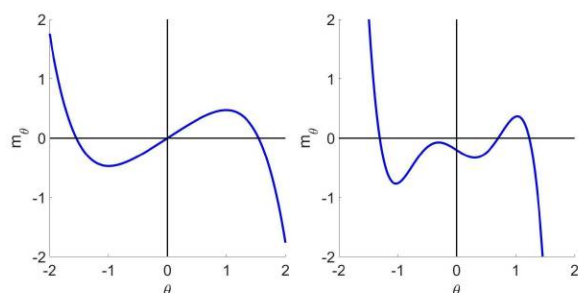
Для получения смешанного волнения достаточно сложить частотные распределения для ветрового волнения и зыби:

$$S_{\text{смеш}}(\omega) = S_{\text{ВВ}}(\omega) + S_{\text{зыбь}}(\omega), \quad (6)$$

Приведенная реализация нерегулярного волнения взята из работы [6]. В работе реализовано простейшее косинусоидальное волнение, которое задается в виде  $A \cos(\omega t)$ , где  $A$  – амплитуда волнения,  $\omega$  – частота волнения.

**5. Процесс реализации моделирования.** Осуществление поставленной задачи в программном виде разделено на несколько основных частей:

1. Создание динамического процесса развития аварии судна.
2. Моделирование качки судна с постоянным аварийным состоянием.
3. Добавление динамического развития аварии в моделирование качки.



**Рис. 1.** Развитие аварии судна

На первом этапе моделирования реализована функция восстанавливающего момента корабля при различных типах затопления. Она представляет собой статичный график, однако процесс развития аварии подразумевает под собой и изменение восстанавливающего момента во времени, из чего получается динамический график, представленный на рис. 1.

Далее для моделирования качки судна применена реализованная на предыдущем шаге функция восстанавливающего момента. На данном этапе использовался один и тот же восстанавливающий момент на всем временном интервале, а изменение графика достигалось рассмотрением разных типов восстанавливающих моментов.

Результаты реализации приведены на рис. 2.

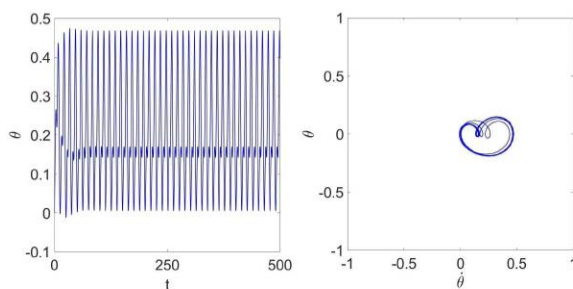


Рис. 2. Фазовый портрет и колебания судна при статичном типе затопления

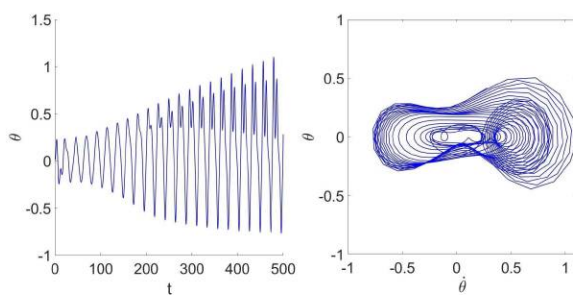


Рис. 3. Фазовый портрет и колебания судна при развитии процесса затопления

На последнем этапе была получена полноценная модель колебаний корабля. На рис. 3 представлен процесс развития аварии судна при переходе от незатопленного положения к четвертому типу затопления. Исследование проводилось в среде MATLAB.

**6. Заключение.** В результате работы достигнуты цели:

- Моделирование преобразования функции восстанавливающего момента.
- Моделирование качки судна при различных типах аварии.
- Моделирование развития аварии судна.

В дальнейшем предполагается использование представленных результатов для формирования правил и базы знаний о поведении корабля и создания интеллектуальной системы поддержки принятия решений при затоплении корабля для избежания принятия некорректных и опасных решений.

## Литература

1. Лобов А. Л. Компьютерные алгоритмы идентификации моделей морских судов // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 309–314.
2. Федотова А. О. Нейросетевой подход к идентификации линейной модели динамики судов // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 408–413.
3. Красовская И. А. Идентификация параметров модели морского судна в условиях внешнего возмущения // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 406–410.
4. Нечаев Ю. И., Дегтярев А. Б., Бухановский А. В., Пикатова Р. В. Отчет по НИР «Методы математического моделирования при анализе и прогнозе динамики аварийного судна в интеллектуальных системах реального времени». № гос. рег. 0197.0007471, Инв. № 0297.0004156. СПбГМТУ. СПб. 1996. 63 с.
5. Нечаев Ю. И., Дегтярев А. Б., Бухановский А. В., Пикатова Р. В. Отчет по НИР «Исследование вероятностных характеристик существенно нелинейной качки корабля методами имитационного моделирования». № гос. рег. 0197.0007471, Инв. № 0197.0006844. СПбГМТУ. СПб. 1997. 32 с.
6. Лаврентьев А. И. Идентификация равновесного положения надводного корабля в условиях реального волнения. Выпускная квалификационная работа бакалавра. СПб. СПбГУ. 2016. 40 с.

7. Нечаев Ю. И., Тун Х. Анализ и прогноз поведения судна в экстремальной ситуации на основе нечеткой системы знаний // Искусственный интеллект. 2009. № 3. С. 434–442.
8. Режим, диагноз и прогноз ветрового волнения в морях и океанах / под ред. Е.С. Нестерова. М.: Изд-во Росгидромет, 2013. 337 с.
9. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 288 с.

УДК 517.958, 539.3

Муллаянов Т. О.

## Метод возмущений в задаче о наноразмерном рельефе поверхности твёрдого тела

*Рекомендовано к публикации доцентом Костырко С. А.*

**1. Введение.** В последнее время всё больше внимания уделяется изучению свойств наноразмерных структур. В современной микроэлектронике и оптике есть потребность создания материалов с определёнными свойствами. Однако при производстве таких наноматериалов возникает ряд проблем. При обработке материала на поверхности могут образовываться наноразмерные канавки и впадины. Такие топологические дефекты приводят к ухудшению механических и оптических свойств материала. Для прогнозирования морфологических изменений необходимо достаточно точно определять напряжённое состояние вблизи искривлённой поверхности.

На данный момент самой распространённой моделью в области наномеханики, позволяющей учитывать поверхностные напряжения, является модель Гертгина–Мёрдока. В этой модели приповерхностный слой представляется в виде упругой мембраны, идеально связанной с объёмной фазой. В результате полные смещения поверхности совпадают с полными смещениями объёмной части. При этом для связи полных поверхностных деформаций и полных смещений используются формулы классической теории упругости. Более подробный обзор данной модели, а также некоторые приложения представлены в [1–3]. Однако в большинстве исследований рассматривались наноструктуры с идеальной поверхностью без топологических дефектов, хотя это практически невозможно в силу того, что поверхностные атомы обладают пониженной устойчивостью.

**2. Постановка задачи.** Следуя работе [4], рассмотрим полубесконечное упругое твёрдое тело с шероховатой поверхностью. Поверхность представляет собой тонкий слой бесконечно малой толщины,

---

*Муллаянов Тимур Олегович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087024@student.spbu.ru, тел.: +7(987)053-38-01

прилегающий к телу без проскальзывания. С учётом условий плоской деформации тело представимо в виде полуплоскости (рис. 1)

$$\Omega = \{z = x_1 + ix_2 : x_2 < \varepsilon f(x_1), x_1 \in \mathbb{R}^1\},$$

с границей

$$\Gamma = \{\zeta = x_1 + ix_2 : x_2 = \varepsilon f(x_1), x_1 \in \mathbb{R}^1\}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Форма рельефа определяется функцией  $f(x_1) = -a \cos(2\pi x_1/a)$ ,  $A = \varepsilon a$  – максимальное отклонение точек поверхности  $\Gamma$  от плоскости  $x_2 = 0$ .

Напряженное состояние на границе  $\Gamma$ , вызванное действием поверхностных напряжений, принимает вид

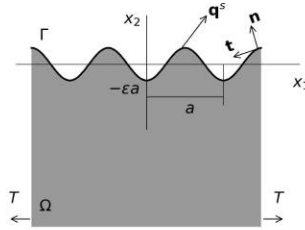
$$\sigma_{nn}(\zeta) + i\sigma_{nt}(\zeta) = q^s(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (1)$$

где  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{nt}$  – компоненты тензора напряжений в локальной системе координат  $n, t$ , связанной с искривлённой поверхностью.

Дополнительное уравнение, определяющее неразрывность перемещений на поверхности, имеет вид

$$u^s(\zeta) = u(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (2)$$

где  $u^s = u_1^s + iu_2^s$  и  $u = u_1 + iu_2$  – перемещения вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ .



**Рис. 1.** Модель полубесконечного твёрдого тела с наноразмерным рельефом

Функция  $q^s$  модели Гертена – Мёрдока [1] может быть представлена в виде

$$q^s(\zeta) = \kappa\sigma_0^s + \frac{\kappa}{2} \left[ p_s \frac{\partial u}{\partial \zeta} + m_s \overline{\frac{\partial u}{\partial \zeta}} \right] - \frac{1}{2h} \left[ p_s(i - \varepsilon f') \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + m_s(i + \varepsilon f') \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}} \right], \quad (3)$$

где  $p_s = M_s + \sigma_0^s$ ,  $m_s = M_s - \sigma_0^s$ ,  $\kappa$  – кривизна границы  $\Gamma$ ,  $h$  – метрический коэффициент,  $\sigma_0^s$  – поверхностное натяжение;  $M_s = \lambda_s + 2\mu_s$ ,  $\lambda_s, \mu_s$  – константы поверхностной упругости, аналогичные константам Ламе  $\lambda, \mu$  объёмной фазы наноматериала.

На бесконечности напряжения  $\sigma_{ij}$  и угол поворота  $\omega$  определяются как

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{22} = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{12} = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{11} = T.$$

**3. Метод возмущений.** Выразим комплексный вектор напряжений  $\sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$  через комплексные потенциалы Гурса – Колосова  $\Phi$  и  $\Upsilon$ , голоморфные в областях  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega} = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$  соответственно. Далее, переходя к пределу при  $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$  и принимая во внимание (1) и (2), получим граничное условие для комплексных потенциалов

$$\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \left( \Upsilon(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi(\zeta)} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi'(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0} = q^s(\zeta), \quad (4)$$

$$2\mu u'(\zeta) = (\varkappa + 1)\Phi(\zeta) - q^s(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (5)$$

где  $\Phi(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta - i0} \Phi(z)$ ,  $\Upsilon(\bar{\zeta}) = \lim_{z \rightarrow \zeta - i0} \Upsilon(\bar{z})$ .

В соответствии с методом возмущений, представим функции  $\Phi(z)$ ,  $\Upsilon(z)$  и  $u'(z)$  в виде степенных рядов по малому параметру  $\varepsilon$ , при этом на границе разложим их в ряд Тейлора в окрестности  $x_2 = 0$ :

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Psi_{(n)}(z), \quad \Psi_{(n)}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[i\varepsilon f(x_1)]^m}{m!} \Psi_{(n)}^{(m)}(x_1), \quad (6)$$

$$\Psi(z) \equiv \{\Phi(z), \Upsilon(z), u'(z)\}.$$

Подставляя полученные ряды в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , получаем рекуррентную последовательность задач Римана – Гильберта. Решение этой задачи может быть записано в терминах интегралов типа Коши.

В результате, граничное условие (5) может быть представлено в виде рекуррентной последовательности интегральных уравнений

$$2\mu u'_n(x_1) - (\varkappa + 1)I_n^-(x_1) + q_n^s(x_1) = (\varkappa + 1)J_n^-(x_1) + Q_n, \quad (7)$$



где

$$Q_0 = (\varkappa + 1)T/4, \quad Q_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$I_n^-(x_1) = \frac{1}{2}q_n^s(x_1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_n^s(t)}{x_1 - t} dt,$$

$$J_n^-(x_1) = -\frac{1}{2}F_n(x_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_n(t)}{x_1 - t} dt,$$

$q_n^s$  – коэффициенты разложения (3),  $F_n$  – известные функции.

Таким образом, последовательность интегральных уравнений (7) позволяет вычислить коэффициенты разложения (6), что в конечном итоге приводит к определению компонент тензора напряжений для любой степени точности аппроксимации  $n$ .

**4. Численные результаты.** В случае нулевого приближения  $n = 0$  решение соответствует полуплоскости с прямолинейной границей  $x_2 = 0$ :

$$u'_0 = \frac{(\varkappa + 1)T}{8\mu}.$$

Комплексные потенциалы могут быть найдены из задачи Римана–Гильберта:  $\Phi_0 = \Upsilon_0 = T/4$ . Граничные значения остальных коэффициентов разложения функции  $u'$  в (6) ищутся в виде тригонометрических рядов

$$u'_n(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^n \sin(b_k x_1) + B_k^n (b_k x_1)], \quad b_k = 2\pi k/a.$$

На их основе определяются коэффициенты разложения в степенной ряд комплексных потенциалов  $\Phi$  и  $\Upsilon$  в тождестве (6). После чего находятся компоненты тензора напряжений.

На рис. 2 показано распределение напряжений  $\sigma_{tt}$  и  $\sigma_{nn}$  в случае порядков приближения  $n = 1$  и  $n = 2$  при  $\varepsilon = 0,1$  и  $\varepsilon = 0,05$ ,  $a = 10$  нм. В качестве материала используется алюминий с параметрами  $\lambda = 58,17$  ГПа,  $\mu = 26,13$  ГПа и константами  $\lambda_s = 6,851$  Н/м,  $\mu_s = -0,376$  Н/м.

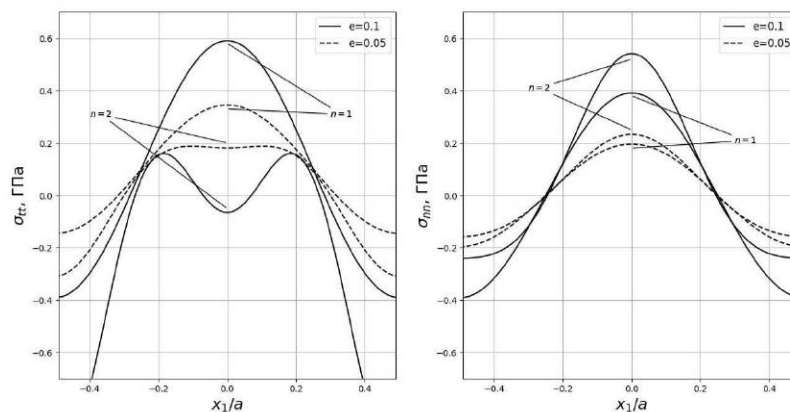


Рис. 2. Распределение напряжений

## Литература

1. Grekov M. A. General approach to the modified Kirsch problem incorporating surface energy effects // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. Т. 33. № 4. P. 1675–1689.
2. Кипкаев Д. Р., Костырко С. А. Учет нелинейных слагаемых в методе малого параметра решения задачи о твердом теле с наноразмерным рельефом поверхности // *Процессы управления и устойчивость*. 2018. Т. 5. № 1. С. 144–148.
3. Шамсутдинов Д. А., Костырко С. А. Учет нелинейных слагаемых в методе малого параметра решения плоской задачи о двухкомпонентном материале с наноразмерным рельефом межфазной поверхности // *Процессы управления и устойчивость*. 2019. Т. 6. № 1. С. 96–100.
4. Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Stress distribution at the wavy surface of a solid incorporating surface stresses and surface tension // *Advances in Solid and Fracture Mechanics*. Springer, Cham, 2022. P. 151–166.

УДК 519.245, 519.688

Обада М. Х., Шиманчук Д. В.

### Использование метода отжига для решения обратной задачи о положении робота-манипулятора

**1. Введение.** Одной из актуальных и непростых задач в робототехнике является решение проблем обратной задачи кинематики. Например, знание правильного значения каждого сервомотора (или степени свободы) роботизированной системы обеспечивает заданное конечное положение многосвязного механизма. В настоящее время существует ряд методов решения такого рода задач, но, к сожалению, они могут требовать много вычислительного времени, приводить к ограниченным решениям, а для случая избыточных механизмов быть далекими от наилучшего решения. Для заданного механизма данный подход можно сравнить с классическим решением обратной задачи кинематики, конечно, если такое решение может быть получено. Предполагается, что преимуществом данного метода является сокращение вычислительного времени с учетом минимизации энергопотребления исполнительных механизмов.

Управление роботами-манипуляторами, когда сервомоторы программируются в зависимости от положения инструмента, реализуется заданным изменением обобщенных координат. Однако это положение требует наличия решения обратной задачи о положении. Управление манипулятором в пространстве координат инструмента является основным требованием для многих прикладных задач, но большинство систем управления роботом не обладают такой возможностью. Управление роботами-манипуляторами с помощью «обратной кинематики» требует построения преобразования компонент командного вектора инструмента робота в соответствующие обобщенные координаты манипулятора. Это общий подход к решению с обратным преобразованием и его возможно реализовать только

---

*Обада Мунтадер Хазим* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st106383@student.spbu.ru, тел.: +7(912)747-20-65

*Шиманчук Дмитрий Викторович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: d.shimanчук@spbu.ru, тел.: +7(906)240-51-19

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 23-21-00027

для некоторых типов роботов (например, манипуляторов со сферическим запястьем – робот PUMA 560, FANUC Robotics M-20iA), для которых существует конечный набор решений задачи обратной кинематики. Таким образом, можно определить проблему, которая заключается в наличии избыточного числа степеней свободы манипулятора – более трех для плоских механизмов и более шести для пространственных. В общем случае кинематическое преобразование между пространством координат инструмента манипулятора и пространством конфигураций самого манипулятора является нелинейным. Решением обратной задачи кинематики является преобразование вектора координат инструмента в соответствующий вектор пространства конфигураций, который, вообще говоря, не единственный. Это является предпосылкой для создания различных алгоритмов по управлению роботами-манипуляторами с избыточным числом степеней свободы, когда решение задачи может быть получено на основе определенных критериев качества при определенных ограничениях на вектор обобщенных координат и обобщенных скоростей. В работе представлен подход для решения обратной задачи о положении робота-манипулятора с избыточным числом степеней свободы. Подход основан на применении элементов искусственного интеллекта – метода отжига, который зарекомендовал себя как эффективный инструмент решения задач оптимизации.

**2. Метод отжига.** Это метод вероятностного поиска, который пытается определить глобальный минимум критерия качества из множества ее локальных минимумов, особенно когда обычные методы не могут быть применены. Отжиг – это термин из металлургической промышленности. В процессе отжига металл нагревается до высокой температуры, тогда возникают нестабильные структуры при постоянно падающей температуре. Однако, если дать металлу достаточно времени для остывания, то он в конце концов образует упорядоченную и стабильную структуру.

Для решения задач оптимизации в основе лежит процесс имитационного отжига, при котором во время поиска оптимального решения на основании текущего решения и заданного значения «температуры» генерируется новое состояние, которое с вероятностью может быть принято за новое текущее решение. После заданного числа испытаний при заданной температуре промежуточное решение становится новым текущим решением. Температура уменьшается и

делается новая попытка поиска решения [1].

Таким образом, метод отжига может быть использован для решения различных задач, в том числе задач оптимизации параметров. Для того чтобы применить метод отжига, необходимо определить:

- критерий качества  $I(\mathbf{x})$ , который, например, может характеризовать производственные затраты;
- начальное состояние  $\mathbf{x}_0$  – начальный набор параметров, подлежащих определению, и начальное значение температуры  $T_0$ ;
- функцию перехода, которая задает случайный способ изменения состояния и определяется заданным семейством вероятностных распределений  $g(\mathbf{x}, T)$ ;
- убывающую функцию температуры  $T$ , которая определяет скорость «охлаждения» системы;
- функцию оценки решения – критерий допуска худшего решения;
- критерий остановки – это условие, при котором поиск решения прекращается. Например, заданное количество итераций или достижение определенного значения критерия качества.

Конкретная схема метода отжига определяется соответствующим набором параметров.

**3. Об обратной задаче кинематики в задачах управления.** Робот-манипулятор – это цепь звеньев, соединенных шарнирами, один конец этой цепи закреплен, а другой – свободен. Шарниры являются призматическими или вращательными и приводятся в движение сервомоторами. Для перемещения свободного конца, также называемого инструментом робота-манипулятора, по определенной траектории, большинство звеньев, если не все, должны быть перемещены соответствующим образом. В каждый момент времени необходимо знать, как перемещаются звенья относительно фиксированной системы отсчета, которая называется базовой и в которой определяется траектория движения инструмента. Заметим, что кинематическая модель определяет положение, скорость и ускорение каждого звена робота-манипулятора без учета массы, сил и моментов.

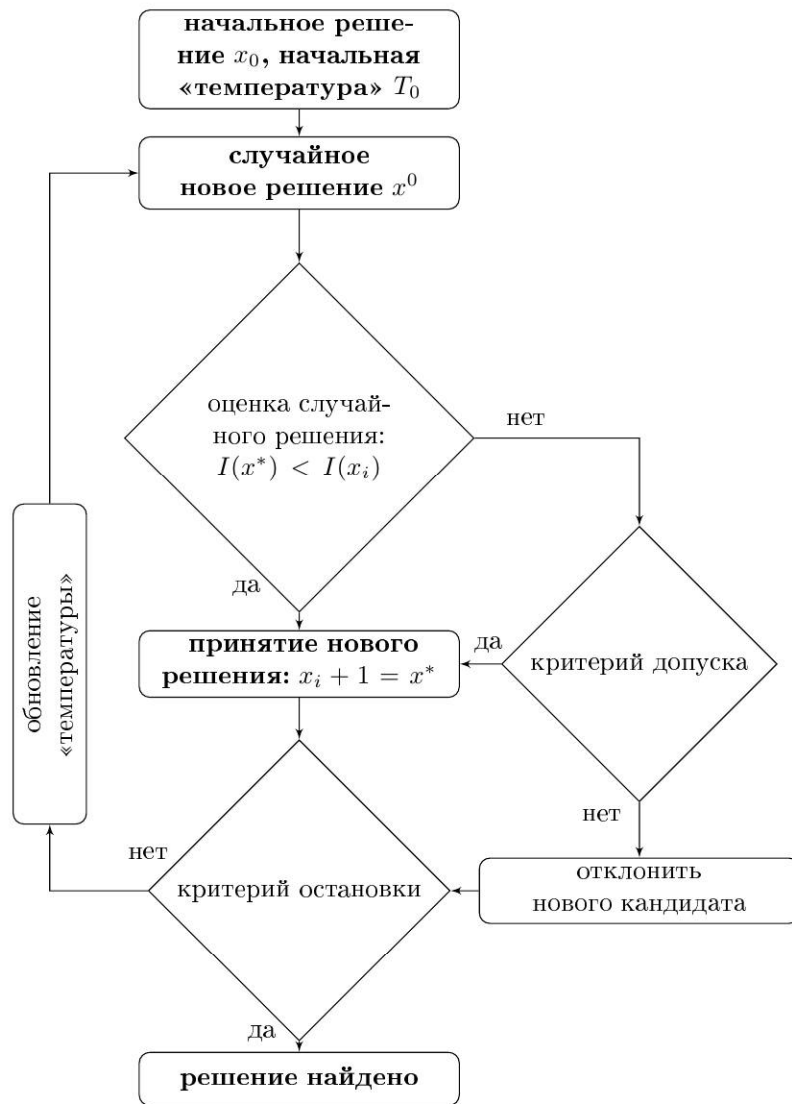


Рис. 1. Блок-схема процедуры поиска решения

Учитывая движение звеньев и их параметры, кинематика робота может быть определена равенством, которое определяет решение прямой задачи кинематики. Эта задача предполагает нахождение для заданного вектора обобщенных координат  $\mathbf{q}$  положения и ориентации инструмента  $\mathbf{s}$  в базовой системе координат:

$$\mathbf{s} = f(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где  $f$  – нелинейная, непрерывная и дифференцируемая функция. Уравнение (1) имеет единственное решение.

Другая задача, называемая обратной задачей кинематики манипулятора, связана с нахождением значений обобщенных координат для заданного положения и ориентации инструмента в базовой системе отсчета, т. е. с решением уравнения

$$\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{s}). \quad (2)$$

Решение уравнения (2) в общем случае не является единственным. Отметим также, что задача управления движением робота с целью его заданного позиционирования состоит в том, чтобы переместить инструмент робота в желаемое положение с желаемой ориентацией в базовой системе отсчета, следуя заданной траектории в обобщенных координатах. Однако, если управление роботом-манипулятором осуществляется в пространстве координат инструмента, исполнительный механизм, используемый для приведения манипулятора в действие, должен управлять обобщенными координатами определенным образом, а для этого и необходимо знать решение обратной задачи кинематики [2].

**4. Постановка задачи.** Пусть задан робот-манипулятор с соответствующими геометрическими характеристиками.

Требуется реализовать вычислительную систему для решения обратной задачи кинематики о положении (2) с заданным критерием качества

$$I(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{q} \in Q} \sum_{i=1}^6 \omega_i |s_i - s_i^{\text{ref}}|,$$

где  $Q$  – допустимая область пространства конфигураций робота-манипулятора,  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , – весовые коэффициенты,  $s_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , – текущие компоненты командного вектора,  $s_i^{\text{ref}}$ ,  $i = \overline{1,6}$ , – компоненты командного вектора  $\mathbf{s}^{\text{ref}}$  в желаемом положении инструмента робота.

Считаем, что решение задачи  $\mathbf{s}^*$  найдено, если для заданного числа  $\varepsilon > 0$  будет выполнено условие  $I(\mathbf{s}^*) < \varepsilon$  или выполнено заданное число итераций поиска решения.

**5. Пример реализации и анализ результатов.** Пусть задана кинематическая схема мобильного робота с манипулятором. Построено решение прямой задачи о положении робота-манипулятора в виде

$$T(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & \cos q_3 & -\sin q_3 & q_1 + a_0 \cos q_3 \\ 0 & \sin q_3 & \cos q_3 & q_2 + a_0 \sin q_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^3 A_i(q_{i+2}),$$

где  $a_0 = 0,1$ ,  $d_0 = 0,01$ , а матрицы  $A_i(q_{i+2})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – матрицы перехода, определяемые параметрами Денавита–Хартенберга [1]:  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $d_3 = 0,1$ ,  $a_1 = 0,1$ ,  $a_2 = a_3 = 0$ ,  $q_4 = q_4 - \frac{\pi}{2}$ ,  $q_5 = q_5 + \frac{\pi}{2}$ ,  $q_6 = q_6$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$ . Обозначим желаемое положение инструмента робота-манипулятора  $T^{\text{ref}}$ .

Согласно общей схеме алгоритма была реализована программа на языке *Python* для поиска решения, в качестве критерия качества в данном случае рассмотрен функционал

$$I(T) = \min_{\mathbf{q} \in Q} \sum_{i=1}^3 \omega_i |r_{i4} - r_{i4}^{\text{ref}}| + \omega_4 |r_{12} - r_{12}^{\text{ref}}| + \omega_5 |r_{13} - r_{13}^{\text{ref}}| + \omega_6 |r_{23} - r_{23}^{\text{ref}}|,$$

где  $r_{12}$ ,  $r_{13}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{14}$ ,  $r_{24}$ ,  $r_{34}$  – компоненты матрицы  $T$ . Для заданных  $r_{12}^{\text{ref}} = 1$ ,  $r_{13}^{\text{ref}} = 0$ ,  $r_{23}^{\text{ref}} = 1$ ,  $r_{14}^{\text{ref}} = 1$ ,  $r_{24}^{\text{ref}} = 1$ ,  $r_{34}^{\text{ref}} = 0,1$ , была рассмотрена следующая схема:  $T_{i+1} = (1 - \alpha)T_i$ ,  $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \text{Norm}(\mu, \sigma)$ , где  $\text{Norm}(\mu, \sigma)$  – функция нормального распределения ( $\mu$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение), максимальное число итераций  $N$ , для которой  $T_0 = 100$ ,  $\mathbf{q}_0 = (0; 0; 0; 0; 0; 0)$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1/18$ ,  $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 4/18$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $N = 50000$ .

На рис. 2 представлен график зависимости значения критерия качества от номера итерации поиска решения. На рис. 3 представлено графическое представление рассматриваемой задачи поиска решения. Найденному решению соответствует вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}^* = (0,99982; 0,85193; 1,57101; 1,01694; -1,06002; -0,02107)$ , которому соответствует значение критерия качества  $I(T^*) = 0,00050$ .



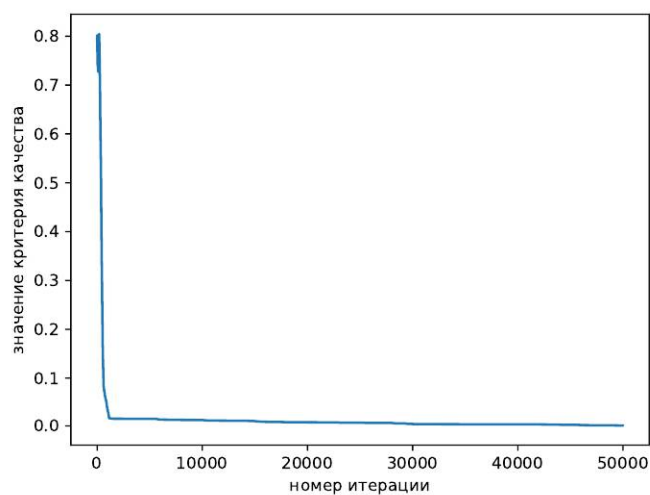


Рис. 2. Значение критерия качества

**6. Заключение.** Представленный подход на основе применения метода отжига может быть использован как весьма эффективное средство поиска решения обратной задачи о положении манипулятора с избыточным числом степеней свободы. Несмотря на то, что имеющиеся результаты утверждают о статистической гарантии сходимости к глобальному решению, в некоторых прикладных задачах, которые характеризуются размерностью и отсутствием уникального решения, такой подход может иметь особое значение, когда требуется найти удовлетворительное решение при ограничении на время принятия решения. Использование такого подхода в сложных вычислительных системах, имеющих иерархическую структуру, также может найти свое место.

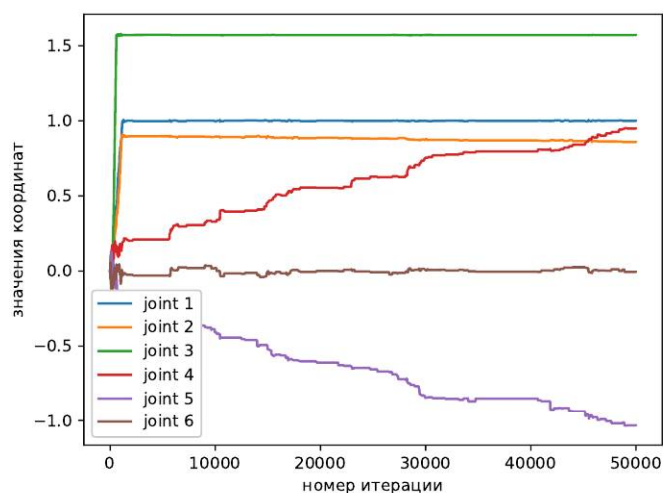


Рис. 3. Поиск вектора обобщённых координат

## Литература

1. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 480 с.
2. Горovenko П. А. Системы билатерального управления роботами // Процессы управления и устойчивость. 2018. Т. 5. № 1. С. 117–121.
3. Ивкин К. А., Шиманчук Д. В. Автономное движение омниколесного робота по расчетной траектории // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 107–111.
4. Kirkpatrick S., Gellat Jr. C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing // Science. 1983. 220. P. 671–680.
5. Hopper R. A. Simulated annealing optimization algorithm implemented within an Operator-Assist Interface. Department of Mechanical Engineering. The University of Texas at Austin. United States. 1997.

УДК 519.651

Руднева Е. В.

## Адаптированный алгоритм летучих мышей в задаче поиска оптимальной траектории

*Рекомендовано к публикации профессором Аббасовым М. Э.*

**1. Введение.** Проблема поиска оптимального по затратам и протяжённости маршрута между двумя заданными точками актуальна для многих организаций – от государственных учреждений до мелких частных предприятий. Существует множество способов решения этой задачи, но в данной работе будет применён один из алгоритмов роевого интеллекта.

Роевой интеллект – метаэвристический метод оптимизации, описывающий коллективное поведение самоорганизующейся системы. Системы роевого интеллекта состоят из множества агентов, локально взаимодействующих между собой и с окружающей средой. Создатели алгоритмов роевого интеллекта, как правило, вдохновлялись примерами из живой природы. В них каждый агент следует простым правилам, и, несмотря на то, что не определена система управления поведением каждой из частей системы, локальные взаимодействия приводят к возникновению группового поведения [1].

Целью данной работы является реализация алгоритма, основанного на поведении летучих мышей и адаптированного под рассматриваемую задачу построения оптимального с точки зрения стоимости и длины пути маршрута между двумя точками на рельефе, траектория которого определена интегральным функционалом.

**2. Постановка задачи.** Пусть на рельефе местности заданы начальная и конечная точки  $A$  и  $B$  с координатами  $(x_a, y_a)$  и  $(x_b, y_b)$  соответственно. Их необходимо соединить дорогой с минимальными затратами на построение. Введём константу  $\alpha$ , равную стоимости доставки материалов на единицу длины пути объёма материалов, необходимых для укладки единицы длины пути.

---

*Руднева Екатерина Вячеславовна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087043@student.spbu.ru, тел.: +7(967)501-55-82

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 23-21-00027

Также будем определять стоимость укладки дороги в точке функцией с непрерывными частными производными  $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . В рассматриваемой задаче  $\beta(x, y)$  отвечает за высоту рельефа. В работе [2] было показано, что поставленная задача сводится к минимизации функционала вида

$$J(y) = \frac{\alpha}{2} \left( \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \right)^2 + \int_{x_a}^{x_b} \beta(x, y) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx . \quad (1)$$

**3. Описание и адаптация алгоритма летучих мышей.** Данный алгоритм был предложен в 2010 году Янгом [3]. Летучие мыши используют эхолокацию, чтобы обнаруживать добычу, избегать препятствий при полёте и находить свои гнёзда, перемещаясь при этом вслепую. В основном мыши используют короткие частотно-модулированные в пределах одной октавы сигналы.

Алгоритм летучих мышей подчиняется следующим правилам:

- все летучие мыши используют эхолокацию, чтобы анализировать расстояние до объектов, а также различать добычу и природные препятствия;
- летучие мыши перемещаются случайным образом с заданной скоростью. Они могут регулировать длину волны и скорость испускаемого импульса в зависимости от близости цели.

В начале поиска летучие мыши (далее – агенты) распределяются случайным способом в пространстве поиска. Затем каждый из агентов осуществляет поиск локального оптимума в заданной ему окрестности, и из полученных от агентов данных выбирается наиболее оптимальный результат.

В настоящей работе предложена адаптация поведения агентов, обусловленная условиями поставленной задачи минимизации функционала. Созданный алгоритм подчиняется следующим правилам:

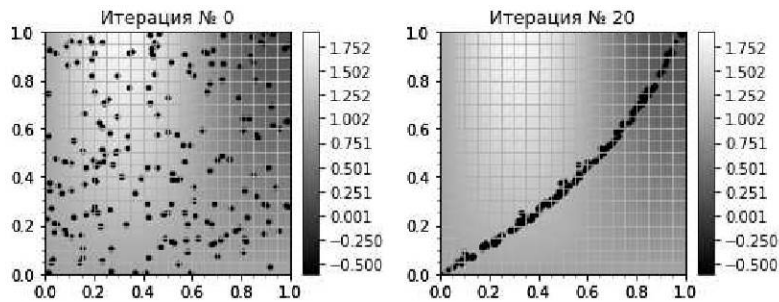
1. В начале работы алгоритма каждый агент случайным образом выбирает цель, к которой идет, т. е. начинает двигаться к начальной или конечной точке.
2. На каждой итерации агент принимает от ближайших соседей сигнал, в котором содержится информация об их расположении относительно выбранного рассматриваемым агентом пункта назначения. Стоимость пути определяем с помощью

функционала (1). Также к расстоянию от агента до начальной или конечной точки будет прибавляться функционал стоимости строительства дороги между рассматриваемым агентом и тем, кто подаёт ему сигнал.

3. Каждый агент при получении сигнала от соседа сравнивает его со своими данными.
4. Если агент получает информацию о том, что другой агент находится ближе к необходимому ему пункту назначения, он обновляет свои данные, разворачивается в направлении источника сигнала и движется в его сторону.
5. При достижении любой искомой точки агент меняет свою цель, разворачивается на  $180^\circ$  и начинает искать следующий пункт.
6. По окончании работы алгоритма по расположениям агентов можно построить искомую траекторию.

**4. Реализация алгоритма.** Рассмотрим поставленную задачу со следующими начальными данными:

- $(x_a, y_a) = (0, 0)$ ;
- $(x_b, y_b) = (1, 1)$ ;
- стоимость доставки материалов на единицу пути  $\alpha = 0,1$ ;
- стоимость укладки пути в точке  $\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \sin y$ ;
- количество агентов – 200;
- количество итераций алгоритма – 20.



**Рис. 1.** Результат работы алгоритма

На рис. 1 представлен результат работы алгоритма для заданных начальных условий. Заметно, что траектория движения агентов обходит возвышенности рельефа.

**5. Заключение.** В данной работе рассмотрен один из алгоритмов роевого интеллекта, его адаптация и применение к поставленной задаче оптимизации маршрута между двумя точками на рельефе. В дальнейшем предполагается решить задачу выбора параметров алгоритма, обеспечивающих наилучшую скорость сходимости. Кроме того, планируется адаптировать предложенный алгоритм к задаче с ограничениями, а также сравнить его с другими алгоритмами роевого интеллекта, например, алгоритмом пчелиного роя.

## Литература

1. Васильев В. А., Кузнецова Д. С. Алгоритм роя частиц и анализ его эффективности для решения задач безусловной однокритериальной оптимизации // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 190–196.
2. Аббасов М. Э., Шарлай А. С. Поиск оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 1. С. 4–12.
3. Yang X.-S. A new metaheuristic bat-inspired algorithm // Studies in Computational Intelligence. 2010. No 284. P. 65–74.

УДК 519.711.2

Рыбалкин А. А.

## Управление роботом-манипулятором в режиме реального времени с внешней измерительной системой в качестве наблюдателя

*Рекомендовано к публикации доцентом Шиманчуком Д. В.*

**1. Введение.** В промышленности для обработки изделий из различных материалов, перемещения объектов и других операций используются чаще всего два типа промышленного оборудования: станки и промышленные роботы-манипуляторы.

Главным преимуществом станка является высокая точность обработки за счет параллельной кинематики и высокой жесткости конструкции. К недостаткам можно отнести ограниченные степени свободы (чаще всего это станки трехосевые, редко – четырехосевые, а пятиосевые являются уникальным решением), большие габариты установки, высокую стоимость.

Для робота-манипулятора главным преимуществом является высокая подвижность за счет наличия шести степеней свободы [1]. Благодаря этому, он способен перемещаться в сложно доступные места. Также робота-манипулятора можно установить на портальную систему, что позволяет увеличить его рабочую зону. Но главным недостатком роботов-манипуляторов является низкая жесткость, из-за чего погрешность абсолютного позиционирования робота-манипулятора может достигать 2 миллиметров (в сравнении со станком, который способен работать с погрешностью в сотни раз меньше).

Для некоторых сложных конструктивных задач требуется наличие сразу двух факторов – высокая точность позиционирования, как у станка, и высокая подвижность, как у робота-манипулятора. Добиться этого возможно, если использовать робот-манипулятор с внешней измерительной системой в качестве наблюдателя, который будет измерять позицию робота-манипулятора и корректировать его положение так, чтобы он выдерживал требуемые погрешности.

---

*Рыбалкин Алексей Александрович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail:st061287@student.spbu.ru, тел.: +7(950)664-93-34

**2. Постановка задачи.** Пусть имеется робот-манипулятор с соответствующей кинематической цепью. Робот-манипулятор в зависимости от неточности кинематики (параметры кинематической цепи) и динамики (динамика электроприводов, центр масс звеньев, их моменты инерции и т. д.) имеет погрешность позиционирования до 2 миллиметров. При этом у робота-манипулятора присутствует возможность управлять электроприводами с минимальной дискретизацией в  $10^{-4}$  град., что соответствует повторяемости до 60 микрометров.

Пусть также имеется внешний наблюдатель, способный измерять реальное положение робота-манипулятора с погрешностью десятки микрометров для декартовых координат и  $10^{-4}$  град. для ориентации.

Предполагается, что робот-манипулятор и внешний наблюдатель имеют фиксированное положение друг относительно друга.

Задача состоит в том, чтобы построить внешнюю систему управления робота-манипулятора с обратной связью для увеличения точности его позиционирования.

**3. Построение системы управления.** Простейший метод управления, который способен решать данную задачу, представляет собой ПИД-регулятор [2], на вход которого подаются координаты от робота-манипулятора и внешнего наблюдателя, на выход – ошибки позиционирования, которые передаются на робота-манипулятора в качестве корректировки положения. Робот-манипулятор в свою очередь, зная свои кинематические параметры, сам определяет, как ему изменить свои обобщенные координаты так, чтобы минимизировать ошибку позиционирования. Уравнение ПИД-регулятора имеет следующий вид:

$$u[i+1] = K_p e[i] + \frac{1}{K_i} \sum_{k=0}^i e[k] + K_d \frac{e[i+1] - e[i]}{\Delta t},$$

где  $e[i]$  – ошибка измерения (разность между желаемой координатой от робота-манипулятора и измеренной координатой на  $i$ -м шаге от внешнего наблюдателя),  $u[i]$  – управление на  $i$ -м шаге,  $K_p$  – пропорциональный коэффициент,  $K_i$  – интегральный коэффициент,  $K_d$  – дифференциальный коэффициент,  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ .



Схема работы системы управления представлена на рис. 1.

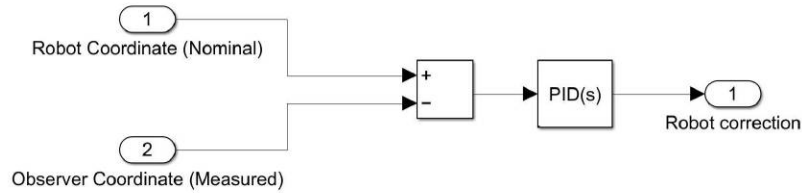


Рис. 1. Упрощенная схема системы управления

**4. Построение системы управления с решением обратной задачи кинематики.** Усложнением данного метода управления является то, что вычисление корректировки по обобщенным координатам робота-манипулятора происходит на стороне внешней системы управления при решении обратной задачи кинематики (ОЗК) робота-манипулятора численно с помощью матрицы Якоби [3]. При этом в данном методе имеется уже два ПИД-регулятора – для ошибки позиционирования, а также для корректировок по обобщенным координатам робота-манипулятора. Уравнение ОЗК робота-манипулятора с помощью матрицы Якоби имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} q_1 [i] \\ q_2 [i] \\ q_3 [i] \\ q_4 [i] \\ q_5 [i] \\ q_6 [i] \end{pmatrix} = J [i] \begin{pmatrix} x [i] \\ y [i] \\ z [i] \\ rz [i] \\ ry [i] \\ rx [i] \end{pmatrix},$$

где  $q_j, j = \overline{1,6}$ , – ошибка позиционирования  $j$ -й обобщенной координаты робота-манипулятора для  $i$ -й позиции,  $J [i]$  – матрица Якоби или матрица частных производных, вычисленная в  $i$ -й позиции,  $x [i], y [i], z [i], rz [i], ry [i], rx [i]$  – ошибка позиционирования в виде декартовых координат и углов Тейта – Брайана ZYX для  $i$ -й позиции.

Схема работы системы управления с ОЗК представлена на рис. 2.

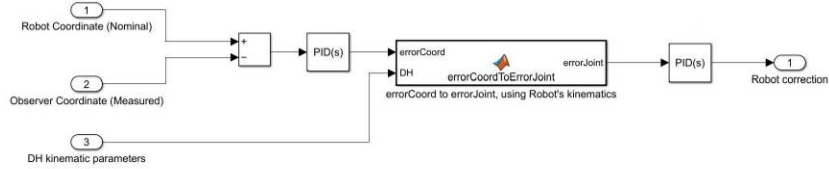


Рис. 2. Схема системы управления с ОЗК

Данный метод является более точным, так как при решении ОЗК можно использовать уточненные кинематические параметры, которые получают при измерении кинематической цепи с помощью внешнего наблюдателя.

**5. Фильтрация измерений.** Одной из главных особенностей системы управления является фильтрация измерений от внешнего наблюдателя. Большие внешние и внутренние погрешности (вибрация инструмента, вибрация робота-манипулятора) вызывают высокую ошибку корректировки, из-за которой робот-манипулятор выполняет колебания. Решением проблемы стало применение линейных фильтров. Проведено сравнение двух видов фильтрации:

1. Со скользящим средним

$$y[i] = y[i - 1] + (x[i] - x[i - 1])K_f,$$

где  $x[i]$  – значение от наблюдателя на  $i$ -м шаге,  $y[i]$  – отфильтрованное значение на  $i$ -м шаге,  $K_f$  – коэффициент фильтрации.

2. Простейший фильтр Калмана

$$K[i] = \frac{e[i - 1]}{e[i - 1] + m},$$

$$y[i] = y[i - 1] + K[i](x[i] - y[i - 1]),$$

$$e[i] = (1 - K[i])e[i - 1] + |y[i] - y[i - 1]|q[i],$$

где  $x[i]$  – значение от наблюдателя на  $i$ -м шаге,  $y[i]$  – отфильтрованное значение на  $i$ -м шаге,  $e[i]$  – расчетный параметр на

$i$ -м шаге,  $K[i]$  – коэффициент Калмана на  $i$ -м шаге,  $q[i]$  – скорость изменения координаты,  $m$  – дисперсия погрешности измерений, получаемая статистически.

Так как оба фильтра вызывают запаздывание, при этом фильтр Калмана дает динамическое запаздывание, то применение данного фильтра невозможно на практике. В этом случае не представляется возможным синхронизировать координаты и ориентацию отфильтрованную и номинальную, полученную от робота-манипулятора. Пример фильтрации с помощью скользящего среднего представлен на рис. 3. Серой кривой на графике обозначены реальные показания измерений внешнего наблюдателя, черной кривой – отфильтрованные значения с помощью скользящего среднего с коэффициентом 0,03.

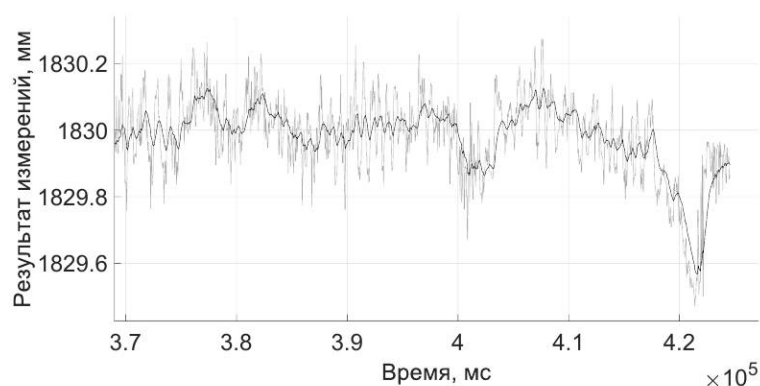


Рис. 3. Фильтрация измерений

**6. Применение системы управления на практике.** Созданный алгоритм управления был применен в частности для статического случая – корректировки в точке, когда робот-манипулятор попадает в требуемую точку с некоторой погрешностью, и далее внешняя система управления корректирует положение робота-манипулятора, минимизируя погрешность позиционирования в этой точке. На практике данный принцип корректировки называется «сдвинься, измерь, корректируйся» (ММС – Move, Measure, Correct) [4]. На рис. 4, 5 представлены графики ошибки декартовых координат (расстояние

между номинальной и реальной характеристическими точками) и ошибки углов ориентации (угол Тейта – Брайана ZYX вокруг оси X). Из графиков видно, что внешняя система управления обрабатывает за достаточно короткий промежуток времени, доставляя необходимую повторяемость позиционирования робота.

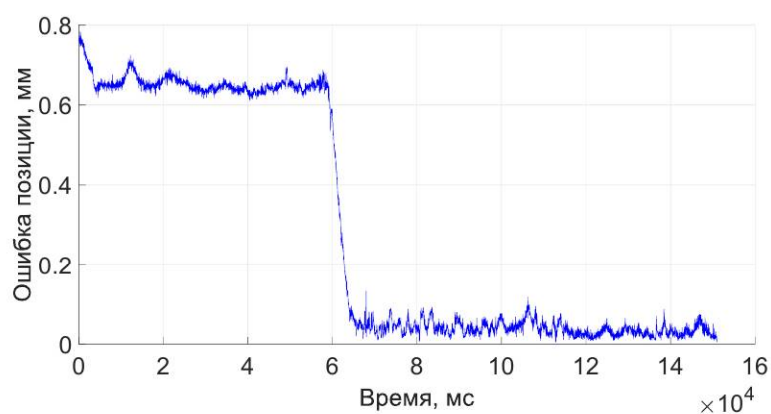


Рис. 4. ММС, декартовая ошибка

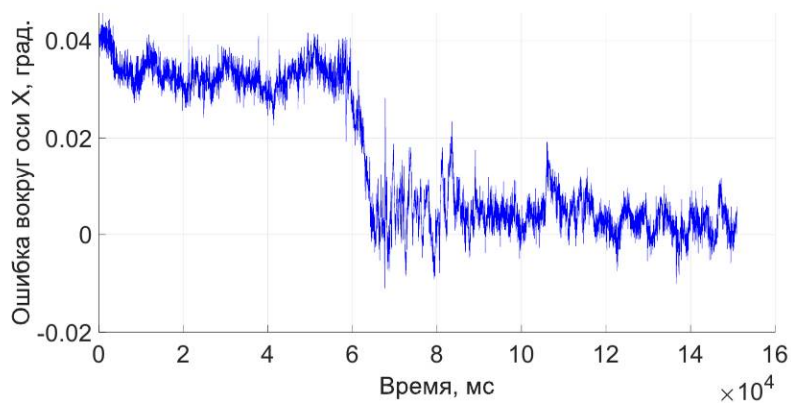


Рис. 5. ММС, ошибка ориентации

**7. Заключение.** Разработанная система управления позволяет перемещать робота-манипулятора по заданной траектории с высокой точностью. При этом система управления учитывает возможные вибрации изделия и робота-манипулятора, шум измерений, а также особенность конструкции конкретного робота-манипулятора. Разработанный алгоритм показал эффективность для таких операций, как фрезеровка, шлифовка, сверление, нарезка резьбы и лазерная резка. Система управления была применена в рамках робототехнического комплекса «AssuVig», который применен в аэрокосмической отрасли для обработки различных частей космической ракеты. Кроме того, данная система управления будет поставлена на другие российские предприятия. Поэтому исследования и разработки по данному направлению имеют высокую ценность.

В дальнейшем планируется исследовать алгоритмы, использующие классические методы управления с обратной связью и теорией устойчивости на основе математической модели (кинематическая и динамическая модели) робота-манипулятора.

Кроме того, имеется возможность добавить ещё одного внешнего наблюдателя – силомоментный датчик, который способен вычислять динамические параметры робота-манипулятора. Будет необходимо разработать математические методы управления, учитывающие данный наблюдатель.

Главной целью является получение погрешности позиционирования робота-манипулятора, не превышающая погрешности внешней измерительной системы (до 100 микрометров), для выполнения более сложных технологических операций, требующих такой высокой точности.

## Литература

1. Бабаджанянц Л. К., Пупышев Ю. А., Пупышева Ю. Ю. Классическая механика. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. 259 с.
2. Лукас В. А. Теория автоматического управления: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 416 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
4. Move, measure, correct [Электронный ресурс]: URL:[https://info.appliedmfg.com/hubfs/AMT\\_MoveMeasureCorrect\\_FINAL.pdf](https://info.appliedmfg.com/hubfs/AMT_MoveMeasureCorrect_FINAL.pdf) (дата обращения: 18.03.2023).

УДК 519.6

Рычков А. С.

**Построение оптимальной в смысле интегрального функционала стоимости дороги на рельефе местности с помощью алгоритма муравьиной колонии**

*Рекомендовано к публикации профессором Аббасовым М. Э.*

**1. Введение.** Проблема построения дороги наименьшей стоимости на рельефе местности представляет собой задачу повышенной практической важности, результаты решения которой могут найти широкое применение в различных практических областях. В данной работе стоимость пути рассматривается как значение некоторого интегрального функционала, после чего для решения полученной вариационной задачи используется алгоритм муравьиной колонии. Предварительно задача поиска гладкой кривой, описывающей дорогу, упрощается до проблемы нахождения ломаной, наилучшим образом аппроксимирующей искомую кривую. Для этих целей вводится равномерная сетка, в узлах которой могут находиться вершины указанной ломаной.

Пусть на карте местности заданы точки  $A(0, 0)$  и  $B(x_b, y_b)$ , которые требуется соединить дорогой наименьшей стоимости. Пусть  $\alpha$  – постоянная, равная стоимости подвозки необходимого для укладки единицы длины пути объема материалов на единицу длины пути, а  $\beta(x, y)$  – функция, описывающая стоимость укладки в каждой точке (при этом особенности рельефа будут учтены при построении конкретного вида данной функции).

Поставим задачу: найти функцию  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ , такую, что

$$y(0) = 0, \quad y(x_b) = y_b \quad (1)$$

и интегральный функционал

$$\int_0^{x_b} \alpha \sqrt{1 + y'^2(x)} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)} d\xi dx + \int_0^{x_b} \beta(x, y) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

---

*Рычков Андрей Сергеевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st090457@student.spbu.ru, тел.: +7(987)749-04-73

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 23-21-00027

достигает на  $y$  минимума.

Как показано в работе [1], данный функционал можно переписать в виде

$$J(y) = \frac{\alpha}{2} \left( \int_0^{x_b} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \right)^2 + \int_0^{x_b} \beta(x, y) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (2)$$

Введем на  $[0, x_a] \times [0, y_a]$  равномерную прямоугольную сетку, содержащую  $(n + 1)^2$  узлов. Будем искать аппроксимацию искомой функции с помощью кусочно-линейной кривой (ломаной), вершины которой могут быть только в узлах сетки. Очевидно, что при фиксированном  $n$  наилучшей аппроксимацией является ломаная, доставляющая  $J(y)$  наименьшее среди всех допустимых ломаных значение. Таким образом, задача сведена к поиску кратчайшего пути от начальной до конечной вершины на сетке.

**2. Алгоритм муравьиной колонии.** Для решения данной задачи можно применить метод муравьиной колонии.

**2.1. Базовый алгоритм.** Алгоритм муравьиной колонии (или муравьиный алгоритм), описанный в [2, 3], применяется для быстрого поиска приближенного решения задачи поиска кратчайшего пути, к аналогу которой была сведена исследуемая задача. Основа алгоритма – эвристическая оптимизация, основанная на наблюдении за поведением муравьев, ищущих кратчайший путь к источнику пищи, а именно, маркировка наиболее удачных путей наибольшим количеством феромона.

Работа алгоритма начинается с размещения в случайно выбранных вершинах графа некоторого заранее фиксированного числа  $N$  агентов («муравьев»). Затем начинается симуляция вероятностного процесса обхода вершин выделенными агентами, причем вероятность выбора ребра  $i \rightarrow j$  равна

$$P_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}^q \eta_{i,j}^p}{\sum_{k,m} \tau_{k,m}^q \eta_{k,m}^p},$$

где  $k \rightarrow m$  – ребра, смежные по вершине с  $i \rightarrow j$ ,  $\tau_{i,j} = \rho_{i,j}^{-1}$ ,  $\rho_{i,j}$  – длина ребра  $i \rightarrow j$ ,  $\eta_{i,j}$  – количество феромона на ребре  $i \rightarrow j$ ,  $p$  – параметр, задающий «стадность» алгоритма,  $q$  – параметр, задающий «жадность» алгоритма,  $p + q = 1$ . При увеличении значения  $p$  повышается вероятность выбора путей с наибольшим количеством феромона, при увеличении значения  $q$  повышается вероятность выбора локально оптимальных путей (т. е. тех, чья длина на текущем шаге как можно меньше). После того, как конечная вершина оказалась достигнута, путь считается построенным.

После того как вышеописанная симуляция была проведена  $N$  раз, на всех ребрах построенных путей проводится обновление значения количества феромона по формуле

$$\tau'_{i,j} = (1 - \xi)\tau_{i,j} + \sum_{k=0}^n \Delta\tau_{i,j}^k,$$

где  $\tau_{i,j}$  – количество феромона на ребре  $i \rightarrow j$ ,  $\xi$  – скорость испарения феромона (с помощью подбора данного параметра можно сделать алгоритм в большей или меньшей степени чувствительным к результатам прошлых итераций),

$$\Delta\tau_{i,j}^k = \begin{cases} \frac{1}{\rho_{i,j}}, & k \in K(i, j), \\ 0, & k \notin K(i, j), \end{cases}$$

– прибавка количества феромона, отложенного  $k$ -м муравьем на ребре  $i \rightarrow j$ , где  $K(i, j)$  – множество муравьев, прошедших по ребру  $i \rightarrow j$ .

После обновления запускается следующая итерация из  $N$  симуляций; действие алгоритма прекращается после фиксированного числа  $K$  итераций.

Данный подход можно адаптировать к рассматриваемой задаче, если в качестве вершин графа рассматривать узлы сетки, а в качестве ребер – связи между узлами, смежными по вертикали, горизонтали или диагонали. Пусть длина  $\rho_{i,j}$  равна вкладу, который ребро  $i \rightarrow j$  вносит в стоимость всего пути от начальной вершины до  $j$ -й при условии, что вершина  $i$  была пройдена непосредственно перед вершиной  $j$ .

**2.2. Сглаживание результирующей кривой.** В результате работы алгоритма муравьиной колонии будет получена некоторая ломаная, аппроксимирующая искомую кривую. Выделив вершины



результатирующей ломаной, для получения гладкой кривой можно использовать метод наименьших квадратов.

**3. Пример работы алгоритма.** Рассмотрим применение алгоритма муравьиной колонии к решению задачи минимизации функционала (2) с начальными условиями (1).

Положим  $\alpha = 0,1$ ;  $x_a = 1$ ;  $y_a = 1$ ;  $\beta = 1 + \sin 5x \sin y$ ;  $n = 25$ . Для параметров алгоритма муравьиной колонии выберем следующие значения:  $N = 600$ ;  $K = 1000$ ;  $\xi = 0,4$ ;  $p = 0,6$ ;  $q = 0,4$ .

На рис. 1 представлен результат работы алгоритма.



Рис. 1. Результат работы алгоритма муравьиной колонии и сглаженная ломаная

**4. Модификации алгоритма муравьиной колонии.** Помимо базового алгоритма, можно рассмотреть некоторые модификации, основанные на дополнительных эвристических оптимизациях.

**4.1. Муравьиная система с элитарными муравьями.** Из общего числа  $n$  муравьев выделяется  $k < n$  элитных. После завершения каждой итерации по  $k$  лучшим путям дополнительно проходят элитные муравьи, таким образом увеличивая значимость наилучших путей и потенциально повышая скорость сходимости. Однако при слишком большом количестве элитных муравьев алгоритм может попасть в локальный экстремум и с каждой итерацией лишь повышать шанс повторного рассмотрения субоптимального пути. Подроб-

нее данный алгоритм описан в [4].

**4.2. Max-Min муравьиная система.** Дополнительно вводится диапазон допустимого количества феромона на каждом ребре, т. е. требуется выполнение условия  $\tau_{i,j} \in (\tau_{\min}, \tau_{\max}) \forall i, j$ . Изначально полагается  $\tau_{i,j} = \tau_{\min} \forall i, j$ . Кроме того, на каждой итерации обновляется только глобально лучший путь.

**5. Вывод.** В данной работе рассмотрено применение алгоритма муравьиной колонии для получения приближенного решения задачи поиска дороги наименьшей в смысле заданного интегрального функционала стоимости с последующим сглаживанием результирующей ломаной с помощью применения метода наименьших квадратов. Основным преимуществом данного подхода является высокая скорость работы и наличие возможности для дальнейшего обобщения. Например, возможно применение описанного алгоритма к модификации исходной задачи, допускающей наличие на рельефе местности препятствий.

## Литература

1. Аббасов М. Э., Шарлай А. С. Поиск оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 1. С. 4–12.
2. Dorigo M., Maniezzo V., Coloni A. The ant system: optimization by a colony of cooperating agents // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B. 1996. Vol. 26. No 1. P. 29–41.
3. Кажаров А. А., Курейчик В. М. Муравьиные алгоритмы для решения транспортных задач // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 1. С. 32–45.
4. Bullnheimer B., Hartl R. F., Strauss C. A new rank based version of the ant system – a computational study // Central European Journal for Operations Research and Economics. 1997. No 1. P. 25–38.

УДК 537.533

Соколов И. А., Никифоров К. А.

### Моделирование автоэмиссионного катодно-модуляторного узла

**Введение.** Работа любого катода определяется не только фундаментальными внутренними физическими процессами, но и внешними. В частности, системой специальных электродов, составляющих вместе с катодом электронно-оптическую систему соответствующего электровакуумного прибора и позволяющих при приложении к ним необходимых напряжений обеспечить фокусировку и транспортировку электронного пучка, эмиттированного катодом. Роль электродов в системе существенно возрастает при использовании в качестве источника электронов не термо-, а автоэмиссионного катода, так как в этом случае с помощью дополнительных электродов электронно-оптической системы осуществляется не только транспортировка и фокусировка пучка, но и управление как эмиссионной способностью катода, так и самим электронным пучком [1]. Актуальная задача состоит в создании прототипа электровакуумного прибора в виде автоэмиссионного ультрафиолетового источника нового поколения с катодолюминесцентным принципом действия без использования экологически вредных и токсичных веществ, применяемых в традиционных ртутных ультрафиолетовых лампах.

В данной работе рассматриваются особенности численного моделирования в рамках создания цифровой модели соответствующей автоэмиссионной электронно-оптической системы, при декомпозиции которой на ряд модулей и определении типов связей между ними выделен автоэмиссионный катодно-модуляторный узел в качестве важнейшего структурного элемента.

**Метод решения и результаты.** Решение задачи моделирования подразумевает, во-первых, нахождение напряженности электрического поля в межэлектродном пространстве, из-за сложной гео-

---

*Соколов Иван Александрович* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st049861@student.spbu.ru, тел.: +7(960)170-65-13

*Никифоров Константин Аркадьевич* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: k.nikiforov@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 23-29-00937

метрии которого в литературе [1–4] применяются различные вычислительные процедуры и алгоритмы с развитием полуаналитических, численных, проекционно-сеточных и других методов в соответствии с обозначенными спецификациями модулей системы. Полуаналитические методы [1–3] открывают возможность строгого решения задачи оптимизации по геометрическим параметрам системы, так как формальные ряды для потенциала и напряженности электрического поля включают геометрические параметры в явном виде, но необходима разработка специального программного обеспечения. С другой стороны, могут быть использованы универсальные библиотеки и пакеты. Например, в [4] рассмотрено решение в MATLAB, которое использует проекционную формулировку метода конечных элементов, являющуюся частным случаем метода взвешенных невязок. Применение метода Галеркина к уравнению в частных производных эллиптического типа с неизвестной функцией электростатического потенциала приводит к вычислению элементарных матриц, соответствующих краевой задаче, составлению из них глобального матричного уравнения, решению этого уравнения и анализу узлового распределения искомой величины. Решение задачи имеет быстро изменяющийся градиент в области эмиссии (на вершине катода с большой кривизной поверхности), поэтому используется адаптивная конечноэлементная сетка со сгущением в окрестности вершины эмиттера, чтобы скорость сходимости решения к точному существенно не снизилась и не произошло увеличения числа неизвестных – размерности конечноэлементной системы. При адаптивном построении сетки используется индикатор ошибки, включающий норму невязки уравнения и скачки градиента конечноэлементного решения, поскольку они связаны с одной из основных в данной задаче физических величин – напряженностью электрического поля.

Во-вторых, модель электронного тока в стационарном случае может быть основана на методе «токовых трубок», который является упрощением метода частиц [5]. В рамках данного подхода траекторный анализ эмитированных электронов сводится к исследованию распределения силовых линий электрического поля в межэлектродном пространстве. Рассматривается функция  $\psi$ , которая является аналогом гидродинамической функции тока, а ее физический смысл состоит в том, что она постоянна вдоль любой силовой линии электрического поля. При этом поток вектора напряженности электрического поля между двумя поверхностями, образованными вращением

двух силовых линий вокруг оси системы, равен разности двух соответствующих значений функции  $\psi$ :

$$\psi_i(\tau) = \psi_{0i} + 2\pi \int_0^\tau r(\zeta) \mathbf{E}(\zeta) \mathbf{n} d\zeta,$$

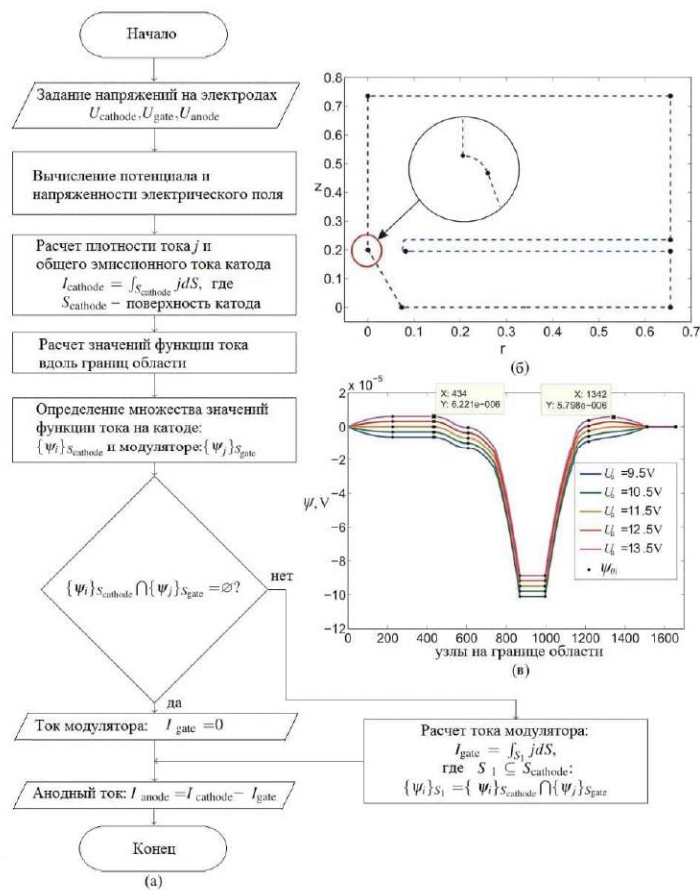
$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\psi_i(\tau)}{d\tau},$$

где  $r$  – цилиндрическая координата,  $\tau$  – локальная координата на  $i$ -й границе (на электродах: катодном, модуляторном, анодном; на боковой поверхности вычислительной области, на оси симметрии и т. п.),  $\psi_{0i}$  – начальное значение  $\psi$  на  $i$ -й границе (выбирается исходя из условия непрерывности функции  $\psi$  вдоль границ вычислительной области). Интеграл представляет поток вектора напряженности электрического поля через соответствующий участок границы вычислительной области.

Таким образом, становится возможным определение величины анодного тока, а вместе с ним и тока модуляторного электрода, который равен разности катодного и анодного. В результате, каждая точка вольт-амперной характеристики может быть вычислена по алгоритму, представленному на рис. 1а. Катодный ток определяется интегрированием по всей области катода, анодный же определяется интегрированием по области эмиттера, в которой значения  $\psi_i$  совпадают со значениями  $\psi_j$  на аноде.

Из предположения, что электронные траектории совпадают с силовыми линиями электрического поля, следует функциональная зависимость  $I(\psi)$  электронного тока  $I$  через поверхность  $\psi = \text{const}$ . Производная  $\frac{dI(\psi)}{d\psi}$  является характеристикой плотности тока вдоль силовой линии, соответствующей заданному значению  $\psi$ :  $\frac{dI(\psi)}{d\psi} = \xi(\psi)$ . При этом эмиссионный ток на рассматриваемой силовой линии  $\xi(\psi) = \frac{2\pi r j(E)}{dI(\psi)/d\tau}$ , где плотность тока  $j$  определяется по теории автоэлектронной эмиссии как функция напряженности  $E$ , при отсутствии эмиссионного тока  $\xi(\psi) = 0$ .

Итак, после расчета потенциала и напряженности поля производится вычисление и анализ значений функции тока  $\psi$  в граничных узлах вычислительной области (на рис. 1б маркерами отмечены участки границ, на которых, как правило, происходит смена характера монотонности/выпуклости функции тока  $\psi$ ). На рис. 1в представлено семейство графиков функции  $\psi$  для нескольких значений



**Рис. 1.** а) блок-схема алгоритма вычисления вольт-амперных характеристик цифровой модели; б) пример геометрической конфигурации вычислительной области: общий вид и область эмиссии (на вставке размеры увеличены в 100 раз); в) графики значений функции тока  $\psi$  в граничных узлах при обходе границ вычислительной области в направлении против часовой стрелки, начиная с верхнего правого угла. Значения анодного напряжения указаны при постоянной разности потенциалов между катодом и модулятором

анодного напряжения при постоянной разности потенциалов между катодом и модулятором. Маркеры на границах вычислительной области (рис. 1б) соответствуют точкам на графиках  $\psi$  (рис. 1в).

**Заключение.** Представлен алгоритм и вычислительные процедуры задачи моделирования автоэмиссионного катодно-модуляторного элемента электронно-оптической системы, в которой траекторный анализ эмиттированных электронов осуществляется на основе узловых значений потенциала и напряженности электрического поля вдоль границ вычислительной области. Алгоритм может быть использован как с полуаналитическими, так и с проекционно-сеточными методами вычисления электрического поля с целью оптимизации модулей электронно-оптической системы и сравнения доступных методов реализации вычислительных процедур для соответствующих электрофизических процессов в каждом из модулей.

Исследования проведены с использованием оборудования ресурсных центров Научного парка СПбГУ «Вычислительный центр» и «Нанотехнологии».

## Литература

1. Бугаев А. С., Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронные катоды и пушки. М.: Интеллект, 2017. 288 с.
2. Виноградова Е. М., Крымская К. А. Математическое моделирование триодной электронно-оптической системы с модулятором на основе полевого острия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Т. 1. № 3. С. 3–9.
3. Доронин Г. Г., Виноградова Е. М. Моделирование триодной системы на основе полевого острия с острой кромкой // Процессы управления и устойчивость. 2018. Т. 5. № 1. С. 113–116.
4. Соколов И. А., Никифоров К. А. Моделирование токовых характеристик автоэмиссионного нанотриода // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 117–121.
5. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.

УДК 517.929.2

Хоанг В. Н.

## Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе

*Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.*

**1. Введение.** В работе исследуется вопрос формирования условия существования оптимума для задачи дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы.

**2. Основные обозначения.** Используются обозначения, принятые в работе [1]. Пусть  $\Gamma$  – ориентированный геометрический граф с одинаковыми ребрами  $\gamma$  и внутренними узлами  $\xi$ . Каждое ребро  $\gamma$  графа  $\Gamma$  параметризовано отрезком  $[0, 1]$ ;  $\partial\Gamma$  и  $J(\Gamma)$  – множества граничных и внутренних узлов графа соответственно;  $\Gamma_0$  – объединение всех ребер, не содержащих конечных точек;  $L_2(\Gamma)$  – банахово пространство измеримых на  $\Gamma_0$  функций, суммируемых с квадратом;  $W_2^1(\Gamma)$  – пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих обобщенную производную первого порядка также из  $L_2(\Gamma)$ .

На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по  $\Gamma$   
 $\int_{\Gamma} f(x)dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma} f(x)_{\gamma} dx$ ,  $f(\cdot)_{\gamma}$  – сужение функции  $f(\cdot)$  на ребро  $\gamma$ .

Обозначим через  $\Omega_a(\Gamma)$  множество непрерывных во всех внутренних узлах функций  $u(x)$  из класса  $W_2^1(\Gamma)$ , удовлетворяющих краевому условию  $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$  и соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_{\gamma} \frac{du(1)_{\gamma}}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_{\gamma} \frac{du(0)_{\gamma}}{dx},$$

здесь  $R(\xi)$  и  $r(\xi)$  – множества ребер  $\gamma$ , соответственно ориентированных к узлу  $\xi$  и от узла  $\xi$ . Замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества  $\Omega_a(\Gamma)$  обозначим через  $W_0^1(a, \Gamma)$ .

**3. Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы.** Рассмотрим дифференциально-разностное

---

*Хоанг Ван Нгуен* – аспирант, Воронежский государственный университет;  
e-mail: fadded9x@gmail.com, тел.: +7(952)544-27-74



уравнение

$$\frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1)) + \Lambda y(k) = f(k), \quad (1)$$

$$y(0) = \varphi(x), \quad y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где  $\tau > 0$  – действительное число,  $k = 1, \dots, M$ ,  $f(k) \in L_2(\Gamma)$ ,  $\varphi(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ,  $\Lambda y(k) = -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k)$ . Коэффициенты  $a(x), b(x)$  – фиксированные, измеримые и ограниченные на  $\Gamma_0$  функции, суммируемые с квадратом:  $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$ ,  $|b(x)| \leq \beta$ ,  $x \in \Gamma_0$ .

**Определение 1.** Слабым решением дифференциально-разностной системы (1), (2) называются функции  $y(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ,  $k = 1, \dots, M$ , удовлетворяющие тождеству

$$\int_{\Gamma} y(k)_t \eta(x) dx + \ell(y(k), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad y(0) = \varphi(x),$$

для любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ,  $y(k)_t = \frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1))$  и

$$\ell(y(k), \eta) = \int_{\Gamma} \left( a(x) \frac{dy(k)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + b(x)y(k)\eta(x) \right) dx.$$

**Теорема 1** [2]. Для слабого решения дифференциально-разностной системы (1), (2) имеет место следующие утверждения:

1) при любом  $1 \leq k_0 < M$  и произвольном  $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$  слабое решение  $y = \{y(k), k = 1, \dots, M\}$  определяется единственным образом;

2) слабое решение дифференциально-разностной системы (1), (2) непрерывно зависит от исходных данных  $\varphi(x), f(k)$ .

Обозначим через  $I$  и  $J$  – множество индексов и число внутренних узлов соответственно. Обратимся к задаче с дискретными управляющими воздействиями, сосредоточенными во всех внутренних узлах множества  $J(\Gamma)$ . Для каждого узла  $\xi_i \in J(\Gamma)$ ,  $i \in I$ , зафиксируем одно ребро  $\gamma^{\xi_i} \in R(\xi_i)$ . Для каждого фиксированного  $k = 1, \dots, M$  дискретное управление  $v(k)$  определяется множеством чисел  $v_i(k) : v(k) = \{v_i(k), i \in I\}$ . При этом  $\{v_i(k), i \in I\} \in U$  и множество  $U \subset \mathbb{R}^J$  задается в зависимости от характера прикладных задач. Таким образом, управляющие воздействия  $v(k)$ ,  $k = 1, \dots, M$ , сосредоточены в концевых точках фиксированных ребер  $\gamma^{\xi_i} \in R(\xi_i)$  каждого внутреннего узла  $\xi_i, i \in I$ .

Пусть в уравнении (1) функции

$$f(k) = \sum_{i \in I} v_i(k) \delta(x - x^i) \Big|_{x^i=1 \in \gamma^{\xi_i}}, \quad k = 1, \dots, M,$$

состояние  $y(x, k, v(k))$  системы (1), (2) определено дифференциально-разностным уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} [y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] + \Lambda y(k; v(k)) = \\ & = \sum_{i \in I} v_i(k) \delta(x - x^i) \Big|_{x^i=1 \in \gamma^{\xi_i}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$y(0; v(0)) := y(0) = \varphi(x), \quad y(k; v(k))|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4)$$

**Определение 2.** Слабым решением системы (3), (4) называются функции  $y(k) \in W_0^1(a; \Gamma)$ , удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma} y(k, v(k))_t \eta(x) dx + \ell(y(k; v(k)), \eta) = \sum_{i \in I} v_i(k) \eta_i, \quad k = 1, \dots, M,$$

для любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a; \Gamma)$ ;  $\eta_i = \eta(x)|_{x=1 \in \gamma^{\xi_i}}$ . Здесь  $\xi_i \in J(\Gamma)$  и  $i \in I$ .

Для простоты дальнейшего изложения будем считать, что наблюдение состояния  $y(k, v(k))$  системы (3), (4) осуществляется на всей области  $\Gamma$ . Как следует из теоремы 1, линейное отображение  $v(k) \rightarrow y(k; v(k))$  множества  $U$  в пространство  $W_0^1(a, \Gamma)$  непрерывно для любого  $k = 1, \dots, M$ . Введем функционал

$$\Psi(v) := \Psi(v(1), \dots, v(M)) = \tau \sum_{k=1}^M \Psi_k(v),$$

$$\Psi_k(v(k)) = \|y(k; v(k)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J},$$

где  $w_0(k) := w_0(x; k)$  – заданные элементы пространства  $L_2(\Gamma)$ , оператор  $N : U \rightarrow U$  положительно определен и выполнены условия

$$(Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J} \geq \varsigma \|v(k)\|_{\mathbb{R}^J}^2, \quad \varsigma > 0, \quad \forall v(k) \in \mathbb{R}^J, \quad k = 1, \dots, M.$$

Здесь и везде ниже  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^J}$  обозначаются скалярные произведения в пространстве  $\mathbb{R}^J$ . Функционал  $\Psi(v)$  определяется оператором, устанавливающим соотношение  $v \rightarrow y(v)$ . Пусть  $U_\partial$  – выпуклое замкнутое ограниченное в  $U$  множество.

Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы (3), (4) состоит в отыскании

$$\inf_{v \in U_\partial} \Psi(v), \quad v = \{v(k), \quad k = 1, \dots, M\}.$$

Элемент  $v^* \in U_\partial$  назовем оптимумом системы (3),(4), если он доставляет минимум функционалу  $\Psi(v)$  на множестве  $U_\partial$ .

**Теорема 2** [3]. *Задача дискретной оптимизации системы (3), (4) имеет единственный оптимум  $v^* \in U_\partial$ , т. е.*

$$\Psi(v^*) = \min_{v \in U_\partial} \Psi(v), \quad v^* = \{v^*(k), \quad k = 1, \dots, M\}.$$

Введем сопряженное состояние  $p(k, v(k))$  системы (3), (4), как слабое решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau}(p(k+1, v(k)) - p(k, v(k))) + \Lambda p(k, u(k)) = \\ = y(k, v(k)) - w_0(k), \quad k = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$p(M, v(M)) = 0, \quad p(k, v(k))|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 0, \dots, M-1. \quad (6)$$

**Теорема 3** [3]. *Слабое решение дифференциально-разностной системы уравнений (5), (6) является элементом  $W_0^1(a, \Gamma)$  и однозначно определено при достаточно малых  $\tau$ .*

**Теорема 4.** *Пусть выполнена теорема 2. Для оптимума  $u(k) \in U_\partial$  имеют место следующие соотношения:*

$$\int_{\Gamma} y(k, u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k, u(k)), \eta) = \sum_{i \in I} v_i(k) \eta_i, \quad k = 1, \dots, M,$$

для любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ . Здесь  $\eta_i = \eta(x)|_{x=1 \in \gamma^{\xi_i}}$ ,  $\xi_i \in J(\Gamma)$  и  $i \in I$ .

$$\int_{\Gamma} p(k, u(k))_t \eta(x) dx + \ell(p(k, u(k)), \eta) = \int_{\Gamma} (y(k, v(k)) - w_0(k)) \eta(x) dx,$$

$$k = 1, \dots, M,$$

для любой функции  $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ .

$$\sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} \geq 0,$$

для любого управляющего воздействия  $v(k) \in U_{\partial}$ . Здесь  $y(k; u(k))$ ,  $p(k; u(k))$ ,  $k = 0, \dots, M$ , принадлежат пространству  $W_0^1(a, \Gamma)$  и выполнены условия  $y(0, v(0)) = \varphi(x)$ ,  $p(M, v(M)) = 0$ .

**4. Заключение.** В результате работы указаны необходимые и достаточные условия существования оптимума для задачи дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы.

## Литература

1. Хоанг В. Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 127–132.
2. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. Vol. 16. No 4. P. 402–414.
3. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17. No 4. P. 433–448.

УДК 519.6

Ягафаров А. Р., Еремин А. С.

## О двухшаговом методе Рунге – Кутты для функциональных дифференциальных уравнений

**1. Введение.** Пусть  $r \in [0, +\infty)$  и  $C$  – пространство непрерывных функции  $[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$  с нормой-максимум

$$\|\phi\| = \max_{\theta \in [-r, 0]} |\phi(\theta)|, \quad \phi \in C,$$

где  $|\cdot|$  произвольная норма в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть  $u$  – непрерывная функция  $[a-r, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , где  $a < b$ . Тогда  $\forall t \in [a, b)$  обозначим через  $u_t$  функцию

$$u_t(\theta) = u(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

**Определение.** Функциональное дифференциальное уравнение запаздывающего типа (ФДУЗ) – уравнение вида

$$y'(t) = f(t, y_t), \tag{1}$$

где  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega = \mathbb{R} \times C$ .

Предположим, что функция  $f$  непрерывна и имеет первую производную по второму аргументу, которая ограничена и непрерывна по второму аргументу. Тогда  $\forall (\sigma, \phi) \in \Omega$ , (1) имеет единственное непрерывное решение  $y = y(\sigma, \phi) : [\sigma - r, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , где  $\bar{t} = \bar{t}(\sigma, \phi)$ ,  $\bar{t} \in (\sigma, \infty)$  т.е.  $y$  удовлетворяет (1) для  $t \in [\sigma, \bar{t}]$  и  $y_\sigma(\theta) = \phi(\theta)$  при  $\theta \in [-r, 0]$ .

В настоящей работе представлены явные двухшаговые методы Рунге – Кутты разработанные для прямого интегрирования ФДУЗ (1).

**2. Двухшаговый метод Рунге – Кутты.** Детальное рассмотрение методов Рунге – Кутты для ФДУЗ было представлено в работе [1]. Своё развитие тема получила, например, в работе [2]. В качестве обзорной статьи, подходящей для введения в эту тему, можно рекомендовать [3].

---

*Ягафаров Арслан Равилевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069089@student.spbu.ru, тел.: +7(960)030-25-01

*Еремин Алексей Сергеевич* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.eremin@spbu.ru, тел.: +7(921)871-89-37

Общие линейные методы являются обобщением методов Рунге–Кутты и линейных многошаговых методов. Достаточно полное их описание дано в [4].

Одним из возможных обобщений традиционных методов Рунге–Кутты являются двухшаговые методы Рунге–Кутты. Их особенность заключается в том, что на каждом шаге помимо внутренних вычислений стадий мы используем решение и стадии, полученные на предыдущем шаге. Их адаптация на случай ФДУЗ (выполненная по аналогии с адаптацией одношаговых методов Рунге–Кутты [1]) представлена в препринте [5].

Для любых многошаговых методов необходимо учесть условия согласованности разностной схемы с задачей Коши [4]. С учётом таких условий, а также явности рассматриваемых методов,  $s$ -этапный двухшаговый метод Рунге–Кутты на  $n$ -м шаге даёт непрерывное приближение к решению  $y(t_{n-1} + \alpha h)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \eta^{[n]}(t_{n-1} + \alpha h) = & (1 - v(\alpha))y_{n-2} + v(\alpha)y_{n-1} + \\ & + h \sum_{j=1}^s \tilde{b}_j(\alpha)K_j^{[n-1]} + h \sum_{j=1}^s b_j(\alpha)K_j^{[n]}, \end{aligned} \quad (2)$$

где для  $i = 1, \dots, s$

$$K_i^{[n]} = f\left(T_i^{[n]}, Y_{T_i^{[n]}}^{i,[n]}\right), \quad T_i^{[n]} = t_{n-1} + c_i h,$$

$$\begin{aligned} Y^{i,[n]}(t_{n-1} + \alpha h) = & (1 - u_i(\alpha))y_{n-2} + u_i(\alpha)y_{n-1} + \\ & + h \sum_{j=1}^s \tilde{a}_{ij}(\alpha)K_j^{[n-1]} + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\alpha)K_j^{[n]}, \quad \alpha \in [0, c_i], \end{aligned}$$

и  $Y^{i,[n]}(t) = \eta(t)$  при  $t < t_{n-1}$ , а  $\eta(t)$  — непрерывный сплайн, на каждом отрезке  $[t_{m-1}, t_m]$  равный  $\eta^{[m]}(t)$  и совпадающий с предысторией  $\phi(t)$  при  $t \leq t_0$ .

**3. Явный метод шестого порядка с тремя этапами.** В работе [5] рассматривались двухэтапные двухшаговые методы. В рамках двух этапов были построены методы четвёртого и пятого порядков. Наша проверка показала, что метод пятого порядка является неустойчивым при любом выборе свободных параметров. В связи с этим в настоящей работе мы взяли три этапа. Решая систему условий порядка и условий устойчивости метода (которая не приводится

в силу своей громоздкости), нам удалось построить методы пятого и шестого порядков. Здесь приведём коэффициенты метода шестого порядка, в которых в силу явности  $c_1 = 0$ , а свободные параметры выбраны как  $c_2 = \frac{1}{3}$ ,  $c_3 = \frac{2}{3}$ ,  $b_3 = \frac{3}{10}\alpha^6 + \frac{67}{80}\alpha^5 - \frac{7}{160}\alpha$ ,  $\tilde{a}_{31} = \frac{81}{80}\alpha^5$ .

$$\begin{aligned}
v &= 6\alpha^6 - 26\alpha^5 + 45\alpha^4 - 20\alpha^3 - 12\alpha^2 + 7\alpha + 1, \\
b_1 &= \frac{39}{20}\alpha^6 + \frac{409}{40}\alpha^5 - \frac{27}{2}\alpha^4 + \alpha^3 + \frac{67}{20}\alpha^2 - \frac{53}{80}\alpha, \\
b_2 &= -\frac{57}{40}\alpha^6 - \frac{307}{80}\alpha^5 + \frac{9}{4}\alpha^4 + \frac{9}{8}\alpha^3 + \frac{9}{40}\alpha^2 + \frac{49}{160}\alpha, \\
\tilde{b}_1 &= -\frac{39}{40}\alpha^6 + \frac{221}{80}\alpha^5 - \frac{9}{2}\alpha^4 + \frac{17}{8}\alpha^3 + \frac{49}{40}\alpha^2 - \frac{119}{160}\alpha, \\
\tilde{b}_2 &= -\frac{21}{20}\alpha^6 + \frac{1003}{80}\alpha^5 - \frac{45}{2}\alpha^4 + 9\alpha^3 + \frac{117}{20}\alpha^2 - \frac{511}{160}\alpha, \\
\tilde{b}_3 &= -\frac{24}{5}\alpha^6 + \frac{139}{40}\alpha^5 - \frac{27}{4}\alpha^4 + \frac{27}{4}\alpha^3 + \frac{27}{20}\alpha^2 - \frac{133}{80}\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= -54\alpha^5 - 135\alpha^4 - 110\alpha^3 - 30\alpha^2 + 1, \\
a_{21} &= \frac{27}{4}\alpha^5 + 18\alpha^4 + \frac{67}{4}\alpha^3 + \frac{13}{2}\alpha^2 + \alpha, \\
\tilde{a}_{21} &= \frac{27}{4}\alpha^5 + \frac{63}{4}\alpha^4 + \frac{49}{4}\alpha^3 + \frac{13}{4}\alpha^2, \\
\tilde{a}_{22} &= \frac{81}{4}\alpha^5 + 54\alpha^4 + \frac{189}{4}\alpha^3 + \frac{27}{2}\alpha^2, \\
\tilde{a}_{23} &= \frac{81}{4}\alpha^5 + \frac{189}{4}\alpha^4 + \frac{135}{4}\alpha^3 + \frac{27}{4}\alpha^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= -3\alpha^5 + 5\alpha^4 - \frac{10}{9}\alpha^3 - \frac{10}{9}\alpha^2 + 1, \\
a_{31} &= -\frac{87}{40}\alpha^5 - \frac{13}{2}\alpha^4 - \frac{83}{36}\alpha^3 + \frac{13}{9}\alpha^2 + \alpha, \\
a_{32} &= \frac{51}{80}\alpha^5 + \frac{7}{4}\alpha^4 + \frac{49}{36}\alpha^3 + \frac{13}{36}\alpha^2, \\
\tilde{a}_{32} &= -\frac{57}{40}\alpha^5 - \frac{11}{2}\alpha^4 + \frac{35}{36}\alpha^3 + \frac{11}{9}\alpha^2, \\
\tilde{a}_{33} &= \frac{99}{20}\alpha^5 + \frac{21}{4}\alpha^4 + \frac{13}{12}\alpha^3 - \frac{23}{12}\alpha^2.
\end{aligned}$$

**4. Тестирование.** Прорешаем уравнение с постоянным запаздыванием

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{y(t-1)}{e}, & t \geq 0, \\ y(t) = e^{-t}, & t \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

с аналитическим решением  $y(t) = e^{-t}$  на отрезке  $[0; 3]$  с постоянным шагом и покажем, что построенные методы (метод пятого порядка не приведён в работе) сходятся с заявленным порядком. В табл. 1 показаны глобальная погрешность  $E_{gl}$  решения при заданной длине шага  $h$  и оцененный порядок сходимости  $p$ , то есть порядок малости погрешности относительно  $h$ :  $E_{gl} = Ch^p$  при некотором  $C$ .

**Таблица 1.** Проверка порядка сходимости на примере (3)

$h$	Порядок 5		Порядок 6	
	$E_{gl}$	$p$	$E_{gl}$	$p$
$2^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-5}$	—	$6,0 \cdot 10^{-6}$	—
$2^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	5,2	$1,8 \cdot 10^{-8}$	6,1
$2^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	5,2	$2,8 \cdot 10^{-10}$	6,0
$2^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-9}$	5,1	$4,5 \cdot 10^{-12}$	6,0
$2^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-11}$	5,1	$7,1 \cdot 10^{-14}$	6,0
$2^{-6}$	$9,4 \cdot 10^{-13}$	5,0	$1,5 \cdot 10^{-15}$	5,5
$2^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-14}$	5,0	$8,5 \cdot 10^{-16}$	0,9

Второй пример – уравнение с переменным запаздыванием

$$\begin{cases} y'(t) = y \left( \frac{t}{(1+2t)^2} \right)^{(1+2t)^2}, & t \geq 0, \\ y(t) = e^t, & t \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

с аналитическим решением  $y(t) = e^t$ . Для него тест так же проведён на отрезке  $[0; 3]$ . Результаты представлены в табл. 2.

**Таблица 2.** Проверка порядка сходимости на примере (4)

$h$	Порядок 5		Порядок 6	
	$E_{gl}$	$p$	$E_{gl}$	$p$
$2^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	—	$5,0 \cdot 10^{-5}$	—
$2^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	5,7	$1,1 \cdot 10^{-6}$	5,7
$2^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	4,6	$2,2 \cdot 10^{-8}$	5,6
$2^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	4,7	$3,5 \cdot 10^{-10}$	6,0
$2^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-10}$	4,9	$5,6 \cdot 10^{-12}$	6,0
$2^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-11}$	5,0	$9,1 \cdot 10^{-14}$	6,0
$2^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-13}$	5,0	$1,6 \cdot 10^{-15}$	5,9

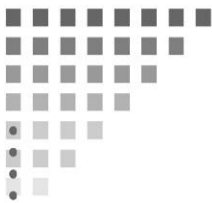


Как показывают тесты за исключением большой длины шага, когда асимптотическое поведение сходимости ещё не достигнуто, и очень малой длины шага, когда вычислительная погрешность становится доминирующей (метод шестого порядка на примере (3) достиг машинной точности ещё при  $h = 2^{-6}$ ), оба метода демонстрируют теоретически заявленный порядок сходимости.

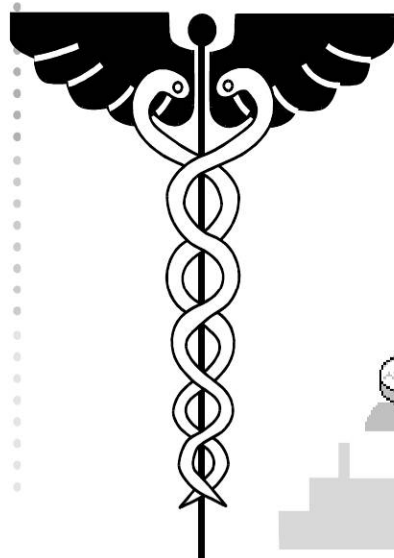
**5. Заключение.** В настоящей работе рассмотрены двухшаговые методы Рунге–Кутты применительно к функциональным дифференциальным уравнениям запаздывающего типа. Приводятся коэффициенты метода шестого порядка. Проверка на тестовых уравнениях с известным решением демонстрирует заявленный порядок сходимости построенных методов.

## Литература

1. Maset S., Torelli L., Vermiglio R. Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2005. V. 15. No 8. P. 1203–1251.
2. Еремин А. С. Комбинированный функционально-непрерывный метод для дифференциальных уравнений с запаздыванием // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2019. Т. 15. № 4. С. 425–441.
3. Еремин А. С. Непрерывные методы Рунге–Кутты для решения уравнений с запаздываниями // *Процессы управления и устойчивость*. 2022. Т. 9. № 1. С. 13–37.
4. Butcher J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, Ltd. 2016. 544 p.
5. Tuzov R. Two-step Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations // arXiv preprint [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1704.04619v1> (дата обращения: 14.06.2023).



*3. Математические  
модели медико-  
биологических систем*





УДК 519.23

Асатурян В. Г.

## Статистический анализ данных популяционного когортного исследования старения мозга и возникновения болезни Альцгеймера

*Рекомендовано к публикации доцентом Гончаровой А. Б.*

**1. Введение.** Впервые болезнь Альцгеймера (БА) была описана психиатром и невропатологом А. Альцгеймером в 1906 году [1]. Болезнь Альцгеймера – это дегенеративное заболевание центральной нервной системы, характеризующееся нарушением речи, потерей памяти, нарушением координации движений и др. Различают несколько типов БА: с ранним началом (до 65 лет) и с поздним началом (после 65 лет). Это заболевание разносится по миру с огромным размахом: около 50 млн человек с поставленным диагнозом «деменция» [1]. На долю БА с ранним началом приходится не менее 4%, и эта цифра возрастает [2]. Распространённость БА с ранним началом составляет 24 случая на 100 тыс. населения. Считается, что риски развития такой формы БА увеличиваются черепно-мозговыми травмами (ЧМТ), отягощенностью в семье. В среднем пациенты живут около 8–10 лет после появления первых клинических симптомов. Так как в основном диагноз ставится уже на стадии развивающейся деменции, то и лечение начинается с этой же стадии [1]. БА с поздним началом протекает медленнее и проявляется после 65 лет, с преимущественным поражением памяти [1].

**2. Цель исследования.** Провести анализ по установлению наиболее значимых факторов выявления болезни Альцгеймера.

**3. Методы исследования.** Исследование «Изменения мышления у взрослых» (АСТ) представляет собой продольное популяционное проспективное когортное исследование старения мозга и возникновения деменции в столичном районе Сиэтла [3]. Эта когорта включает более 5000 участников, из которых более 700 согласились

---

*Асатурян Виктория Георгиевна* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st080171@student.spbu.ru, тел.: +7(911)287-20-88

на вскрытие после своей смерти. Из этого небольшого числа согласившихся на вскрытие, для исследования были отобраны участники, перенесшие по крайней мере одну ЧМТ легкой и средней степени тяжести с потерей сознания. В процессе исследования учитывались пол, возраст и посмертный интервал. Когортная подгруппа представлена в виде базы данных пациентов, клиническая картина для которых совпала с гистологией, содержащей 117 строк записей о пациентах с 17 столбцами-признаками: возраст, пол (таблица 1), этническая принадлежность, наличие ЧМТ, социальные, генетические, клинические характеристики и др. В качестве прогнозируемой переменной рассматривается подтвержденный гистологией диагноз болезни Альцгеймера.

**Таблица 1.** Описание выборки пациентов в зависимости от пола

	<b>Наличие болезни Альцгеймера</b>	<b>Отсутствие болезни</b>
Мужчины	27 (25,2%)	36 (33,6%)
Женщины	23 (21,5%)	21 (19,7%)

**Таблица 2.** Значимые по критерию Пирсона номинальные переменные

<b>Фактор</b>	<b>Значение критерия Пирсона</b>	<b>Уровень значимости</b>
Возрастная группа	24,35	0,04
Наличие формы <i>APOE</i> $\epsilon$ 4 гена аполипротеина Е	5,85	0,05
Степень тяжести отложения аполипротеина Е от 0 (отсутствует) до 3 (тяжелая степень), согласно определению CERAD (Консорциума по созданию реестра болезни Альцгеймера)	17,36	0,01
Наличие клинических проявлений болезни	104,32	0,01
Стадирование нейрофибриллярных клубков (NFT) от 0 (отсутствует) до 6 (обширные неокортикальные NFT) на основе метода стадирования Braak	19,44	0,01
Степень клинической деменции как результат болезни Альцгеймера 0 (отсутствует) до 3 (значительно выражена)	14,25	0,01

Для анализа данных использовался программный пакет jamovi

с подключенными библиотеками анализа медицинских данных [4, 5].

**4. Результаты.** По возрасту пациенты разбиты на группы. В таблице 2 приведены основные номинальные факторы, влияющие на исход (наличие болезни Альцгеймера).

**5. Заключение.** В работе получены факторы, влияющие на диагностирование болезни Альцгеймера. Выяснено, что факторов, подтверждающих, что черепно-мозговая травма приводит к развитию болезни, нет. Зависимостей наличия болезни Альцгеймера от этнической принадлежности и от пола пациентов не найдено. Полученные результаты могут применяться для диагностики и построения систем поддержки принятия врачебных решений [6].

## Литература

1. Федеральные клинические рекомендации по диагностике и лечению болезни Альцгеймера // Официальный сайт ФГБНУ НЦПЗ [Электронный ресурс]: URL: <https://www.psychiatry.ru/siteconst/userfiles/frdcl.pdf> (дата обращения: 11.12.2022).
2. Деменция: в ближайшие 30 лет число затронутых людей возрастет втрое // ВОЗ [Электронный ресурс]: URL: <https://www.who.int/ru/news/item/07-12-2017-dementia> (дата обращения: 15.11.2022).
3. Aging, dementia and TBI study // Allen Institute for Brain Science (USA) [Электронный ресурс]: URL: <https://aging.brainmap.org/overview/home> (дата обращения: 15.11.2022).
4. Jamovi documentation [Электронный ресурс]: URL: <https://docs.jamovi.org> (дата обращения: 17.01.2023).
5. ClinicoPath jamovi Module // ClinicoPath 0.0.2.0093 [Электронный ресурс]: URL: <https://www.serdarbalci.com/ClinicoPathJamoviModule> (дата обращения: 13.01.2023).
6. Гончарова А. Б. Постановка предварительного медицинского диагноза на основе теории нечетких множеств с использованием меры Сугено // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 529–543.

УДК 519.6

Беляева А. А.

## Реализация оптимизационного алгоритма построения поля скоростей

*Рекомендовано профессором Котиной Е. Д.*

**1. Введение.** Разработка новых методов обработки изображений остается актуальной задачей, имеющей множество приложений. Построение поля скоростей, основанное на определении оптического потока, рассматривалось в большом количестве статей известных авторов. В данной работе используется оптимизационный подход на основе вариации интегрального функционала в задачах управления ансамблями траекторий. Актуальность этого направления связана с возможностью применения оптимизационного алгоритма для решения множества прикладных задач. Например, задача анализа наборов изображений, получаемых с аппаратов ОФЭКТ, ПЭТ и МРТ или тепловизионных камер. При помощи представленного алгоритма этот анализ может быть автоматизирован. Алгоритм предусматривает возможность обрабатывать широкий спектр изображений.

Целью данной работы является реализация алгоритма построения поля скоростей на основе оптимизационного подхода [5].

Проблема определения поля скоростей давно привлекает внимание многих авторов. Данной тематике посвящено большое количество статей. Было разработано несколько подходов к её решению, включающих в себя работу с разреженными (метод Лукаса – Канаде [1]) и плотными (метод Хорна – Шанка [2]) потоками, метод фазовой корреляции [3] и оптимизационный алгоритм [4].

В методе Хорна – Шанка используется вариационная модель для вычисления оптического потока, которая подразумевает работу с двумя изображениями, яркость которых остаётся неизменной вдоль траектории движения. Данный метод имеет большую чувствительность к шуму в сравнении с локальными методами.

---

*Беляева Александра Антоновна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st088235@student.spbu.ru, тел.: +7(927)433-05-05

Метод Лукаса–Канаде является дифференциальным методом для вычисления оптического потока и подразумевает постоянство потока в каждой локальной области рассматриваемого изображения. Данный алгоритм не так чувствителен к шуму на изображениях, как поточечные методы, но является исключительно локальным и не может предоставить информацию о направлении движения пикселей внутри однородных областей.

Метод фазовой корреляции относительно устойчив к шумам, окклюзиям и другим дефектам, характерным для медицинских или спутниковых изображений. Его можно применять, чтобы определить различия между двумя изображениями во вращении и масштабировании, с этой целью предварительно преобразовав изображения в логарифмически-полярные координаты. Однако на практике сдвиг часто является линейным, что снижает производительность метода.

Также в работе [5] рассмотрен подход к построению оптического потока для последовательных изображений на основе дискретных систем.

В данной работе рассматривается реализация оптимизационного алгоритма. Этот метод позволяет делить изображение на подобласти (как, например, при использовании метода Лукаса–Канаде), но не требует обязательного дробления входного изображения.

**2. Постановка задачи.** Задача состоит в реализации алгоритма построения поля скоростей на основе оптимизационного подхода [4].

Предполагаем, что движение осуществляется в силу системы

$$\dot{x} = Ax + C,$$

где матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , а вектор  $C = \{c_i\}_{i=1}^n$ . Вектор параметров  $u$  будет состоять из компонентов матрицы  $A$  и вектора  $C$  и иметь вид  $u = (a_{11}, \dots, a_{nn}, c_1, \dots, c_n)$ .

Пусть  $p_0(x)$  – известная яркость в момент времени  $t = 0$ , которая определяет некоторое исходное изображение. Задача состоит в нахождении вектора параметров  $u$  такого, что в момент времени  $T$  яркость, при условии, что  $p(0, x) = p_0(x)$ , совпала с яркостью  $\hat{p}(x)$ :

$$p(T, x) = \hat{p}(x).$$



Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_{M_{T,u}} g(x, p(T, x)) dx,$$

где  $M_{T,u}$  – сечение пучка траекторий в момент времени  $t = T$ ,  $g(x, p)$  – неотрицательная, непрерывно дифференцируемая по  $x$  и  $p$  функция. В частности, можно взять функцию

$$g(x, p(T, x)) = \left( p(T, x(T, x_0, u)) - \hat{p}(x) \right)^2,$$

где  $\hat{p}(x)$  – известная заданная плотность в  $R^n$ .

Решая задачу минимизации функционала  $J(u)$  и определяя параметры вектора  $u$ , мы решаем задачу восстановления функции  $Ax + C$ , то есть определяем искомое поле скоростей.

**3. Программная реализация.** Следующий алгоритм построения поля скоростей (рис. 2) реализован на языке Python с использованием библиотек `numpy` и `matplotlib`.

Получая на вход изображения 1, 2 (рис. 1), формируем на выходе поле скоростей, соответствующее оптическому потоку, отражающему переход первого изображения во второе (рис. 3).

Получая на вход последовательность изображений 1–3 (рис. 1), формируем на выходе оптический поток, отражающий последовательные смещения на изображениях (рис. 4). На рис. 4 разные направления стрелок соответствуют различным смещениям изображений.

Примеры, приведённые на рис. 3, 4, демонстрируют работу алгоритма. Для тестовых примеров был рассмотрен случай, когда матрица  $A = 0$ , а вектор  $C \neq 0$ . На рассматриваемых изображениях перемещались прямоугольные объекты на неподвижном фоне.



Рис. 1. Изображения 1–3

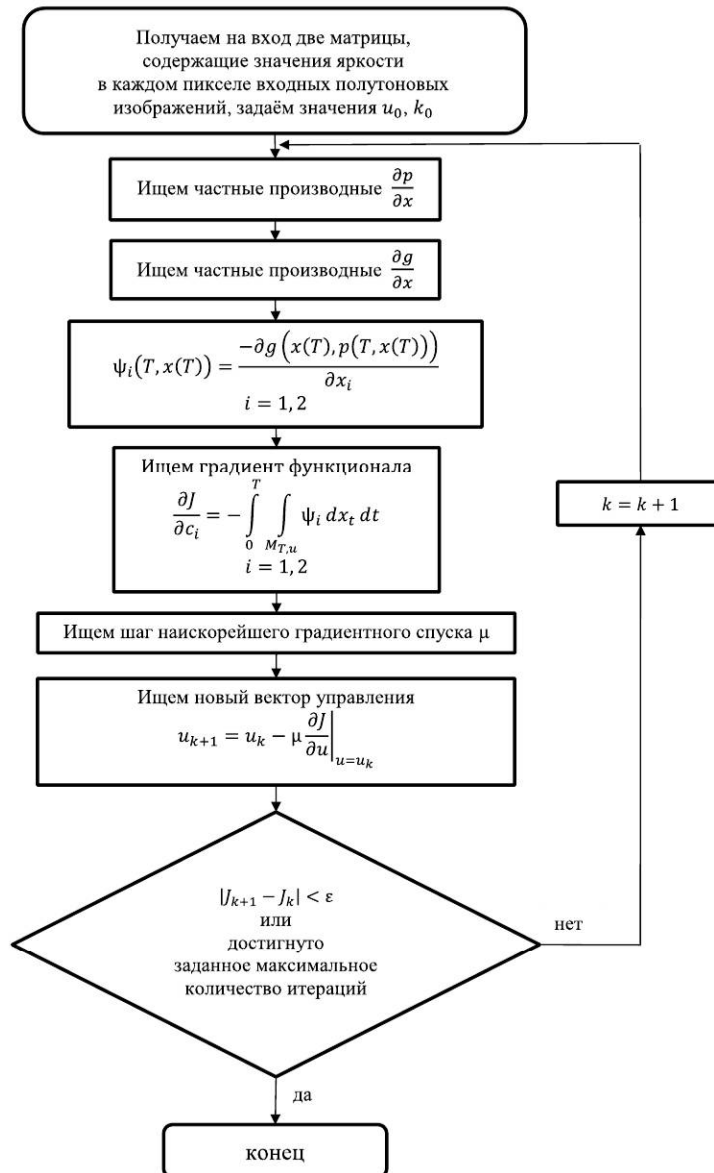


Рис. 2. Описание алгоритма

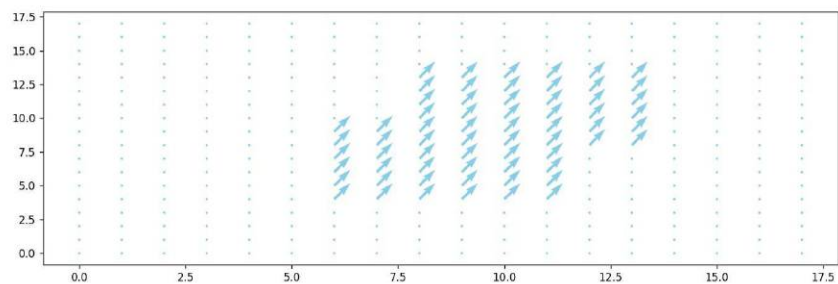


Рис. 3. Пример 1 построения оптического потока

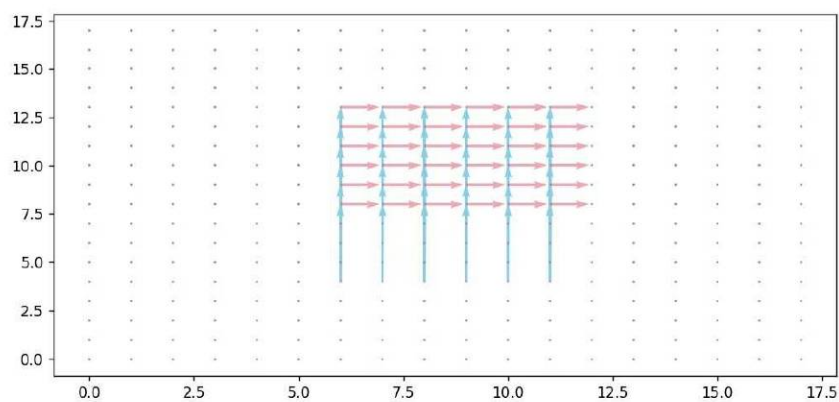


Рис. 4. Пример 2 построения оптического потока

**4. Заключение.** В данной работе реализован метод построения оптического потока. За основу взят оптимизационный метод и алгоритм построения поля скоростей при предположении постоянства яркости вдоль траектории. Данный метод может быть применён для обработки широкого спектра изображений, в том числе медицинских.

## Литература

1. Lucas B. D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proceedings of Imaging Understanding Workshop. 1981. P. 121–130.
2. Horn B., Schunck B. Determining optical flow // Artificial Intelligence. 1981. No 17. P. 185–203.
3. Sarvaiya J. N., Patnaik S., Kothari K. Image registration using log polar transform and phase correlation to recover higher scale // J. Pattern Recogn. Research. 2012. Vol. 7. P. 90–105.
4. Bazhanov P. V., Kotina E. D. On optimisation approach to velocity field determination in image processing problems // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2018. No 24. P. 3–11.
5. Котина Е. Д., Леонова Е. Б., Плоских В. А. Обработка радионуклидных изображений с использованием дискретных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 544–554.

УДК 57.087.1

Давыденко Б. Н.

### **Исследование изменений биомеханических свойств роговицы после проведения операции по технологии ReLEx SMILE**

*Рекомендовано к публикации доцентом Корниковым В. В.*

**Актуальность.** Исследования в области эпидемиологии показали высокий рост заболеваемости миопией в разных странах мира в течение последних десятилетий [1]. По этой причине выбор оптимальной методики коррекции зрения является важной проблемой офтальмологии в настоящее время. Для лечения миопии широко применяется рефракционная хирургия. Количество операций подобного рода постоянно растет, активно разрабатываются и внедряются новые технологии и методики. Одной из таких технологий является ReLEx SMILE [2].

С другой стороны, возможность лечения и прогнозирование побочных эффектов, таких как кератэктазии, связаны с изучением биомеханических свойств роговицы пациента [3]. Один из самых совершенных приборов, позволяющий оценивать большой перечень параметров роговицы в реальном времени – CORVIS ST, появился в России только в 2020 году, что ограничивает количество исследований. Поэтому изучение воздействия рефракционных вмешательств на биомеханику глаза важно для выбора лечения и снижения риска возникновения послеоперационных осложнений.

**Данные и методы.** Исследуемую выборку составили 10 пациентов, соответственно 20 глаз. Измерения биомеханических свойств глаз проводились на анализаторе CORVIS ST до и после хирургического вмешательства, выполненного по методике ReLEx SMILE. Данные были предоставлены Санкт-Петербургским филиалом Национального медицинского исследовательского центра Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени

---

*Давыденко Богдан Николаевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st086788@student.spbu.ru, тел.: +7(900)569-15-87

академика С. Н. Федорова. Прибор позволяет измерять девять параметров:

- ВГД и ВГД скорректированное – внутриглазное давление без и с учетом прочих биомеханических свойств соответственно;
- толщина роговицы в центральной зоне (ССТ);
- обратное значение интегрированного радиуса (ICR);
- амплитуда деформации роговицы по времени (DA);
- коэффициент деформации (DA ratio);
- пиковая дистанция (PD);
- индекс модуля жесткости (SSI);
- параметр жесткости (SP-A1).

Полученные имперические распределения этих показателей проверялись на близость к нормальному распределению. Вывод о нормальности распределения делался при небольших значениях асимметрии и эксцесса и по критерию  $\chi^2$  [4]. Для данных, распределенных нормально, заключение о значимости изменений проводилось на основании парного критерия Стьюдента, а для не нормально распределенных – на основании критерия Уилкоксона [5]. Расчеты производились при помощи программного пакета MATLAB.

**Анализ результатов.** Статистическое исследование показало значимое уменьшение толщины роговицы, что предполагается характером произведенной операции. При этом медиана показателя после вмешательства уменьшилась на 76 мкм (см. рис. 1).

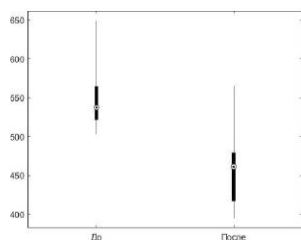
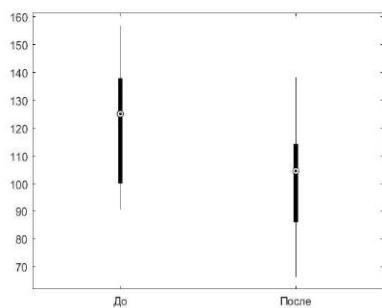


Рис. 1. ССТ до и после коррекции

Значимые изменения обнаружены и в изменении ВГД, однако ВГД скорректированное значимо не меняется. Это свидетельствует о том, что различия в значениях ВГД связаны не с непосредственными изменениями внутриглазного давления, а с влиянием на измерение других биомеханических характеристик.

Тот же вывод был получен и при исследовании другой методики коррекции зрения [6]. В значениях индекса модуля жесткости не было найдено различий, однако показатели DA ratio и ICR претерпели значимые изменения. Соответственно с этим, параметр SP-A1 – основная характеристика жесткости роговицы – значительно уменьшился (см. рис. 2).



Пиковая дистанция изменилась значимо, однако увеличение небольшое – медиана изменилась лишь на 0,13 мм (см. рис. 3). Это может быть связано с одновременным отсутствием значимых изменений амплитуды деформации и значимым изменением остальных показателей жесткости роговицы.

Рис. 2. SP-A1 до и после коррекции

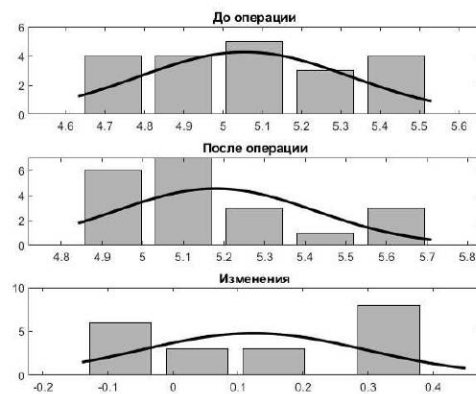


Рис. 3. Распределения PD

**Выводы.** В работе показано, что при коррекции зрения по методике ReLEx SMILE уменьшается толщина роговицы, но параметры DA, SSI и истинное значение ВГД значимых изменений не претерпевают. Жесткость роговицы уменьшается, что подтверждается изменением многих характеристик. Основным показателем этого служит параметр SP-A1.

## Литература

1. Foster P. J., Jiang Y. Epidemiology of myopia // Eye. 2014. No 28. P. 202–208.
2. Бойко Э. В., Мирсаитова Д. Р., Титов А. В., Масян Я. И. Возможности технологии SMILE в коррекции миопической аномалии рефракции // Современные проблемы науки и образования. 2021. № 2. [Электронный ресурс]: URL:<https://science-education.ru/article/view?id=30583> (дата обращения: 19.03.2023).
3. Иомдина Е. Н., Петров С. Ю., Антонов А. А. и др. Корнеосклеральная оболочка глаза: возможности оценки биомеханических свойств в норме и при патологии // Офтальмология. 2016. № 13. С. 62–68.
4. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. 3 изд. М.: Наука, 1983. 416 с.
5. Гланц С. Медико-биологическая статистика. М.: Практика, 1998. 459 с.
6. Антонюк В. Д., Кузнецова Т. С. Исследование биомеханических свойств роговицы на приборе CORVIS ST (Oculus, Германия) у пациентов с миопией и миопическим астигматизмом // Офтальмохирургия. 2020. № 4. С. 20–28.



УДК 004.891

Залесов И. М., Гончарова А. Б., Козубова К. В.

## Модель определения метастатического поражения печени по данным контрастно-усиленного ультразвукового сканирования

**1. Введение.** По данным мировой статистики онкологические заболевания занимают одну из лидирующих позиций по заболеваемости и смертности населения в мире. Только в России с 2010 по 2018 год заболеваемость возросла на 6,8% в стандартизованных показателях [1].

Из-за уникальной архитектурной особенности строения печень занимает лидирующие позиции по частоте метастазирования. Ультразвуковое исследование с контрастным усилением (КУУЗИ) открыло новые возможности в дифференциальной диагностике очаговых образований печени и позволяет с высокой точностью предположить природу новообразования [2].

Построение систем поддержки принятия врачебных решений при диагностировании метастатического поражения печени при КУУЗИ поможет начинающим врачам при постановке диагноза [3].

**2. Цель исследования.** Построение прогностической модели определения метастатического поражения печени по данным ультразвукового исследования с контрастированием.

**3. Методы исследования.** За основу взята база данных пациентов, обследовавшихся в Национальном медицинском исследовательском центре онкологии имени Н. Н. Петрова в Санкт-Петербурге с 2015 по 2019 год. Общее количество пациентов 123, общее число факторов 54. Окончательный клинический диагноз онкология верифицирован с помощью биопсии или гистологии не у всех пациентов. Большинство факторов – мультиномиальные, три фактора –

---

*Залесов Илья Михайлович* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st080208@student.spbu.ru, тел.: +7(911)018-88-16

*Гончарова Анастасия Борисовна* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.goncharova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-26

*Козубова Ксения Вячеславовна* – врач ультразвуковой диагностики, НМИЦ онкологии им. Н. Н. Петрова; e-mail: dr.kozubova@yandex.ru, тел.: +7(812)428-47-26

количественные: возраст, глубина залегания метастаз, размер метастаз [2].

Для определения статистически значимых факторов и построения прогностической модели использовался статистический программный пакет jamovi с подключенными модулями psychoPDA и meddeside [4, 5].

При анализе данных выявлены следующие статистически значимые факторы при раке печени: количественные – возраст (таблица 1), номинальные – тип артериальной, портальной, поздней венозной фаз, наличие симптомов вымывания, присутствие дополнительных очагов в печени. Важным симптомом также является наличие онкологических заболеваний в анамнезе пациента (таблица 2).

**Таблица 1.** Значимые количественные факторы по тесту Манна – Уитни

Признак	Статистика U	Уровень значимости p
Возраст	429	0,009

**Таблица 2.** Значимые номинальные данные по тесту Пирсона  $\chi^2$

Признак	Значение $\chi^2$	df (степеней свободы)	Уровень значимости p
Тип артериальной фазы КУУЗИ	43,7	5	<0,001
Тип портальной фазы КУУЗИ	44,5	3	<0,001
Тип поздней венозной фазы КУУЗИ	49,2	4	<0,001
Симптом вымывания КУУЗИ	50,6	1	<0,001
Наличие дополнительных очагов	19,6	1	<0,001
Онкологические заболевания в анамнезе у пациента	8,20	1	0,04

Далее разбиваем базу, в первую группу включаем всех пациентов с подтвержденной гистологией в количестве 80 человек, остальные 43 пациента использовались для верификации построенной модели. Для разработки классификатора пациентов с метастатическим поражением печени и без была выбрана биномиальная логистическая регрессия, как наиболее часто используемый инструмент для медицинских прогностических моделей.

Рассмотрим математическую модель биномиальной логистической регрессии

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4,$$

где  $a$ ,  $b_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , – коэффициенты регрессии,  $x_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  – независимые переменные (предикторы),  $y$  – зависимая переменная, значение которой мы предсказываем. Для нашей задачи  $y$  является непрерывной и лежит в отрезке  $[0, 1]$ , что достигается при помощи логит-преобразования:

$$P = \frac{1}{1 + e^{-y}},$$

где  $P$  – вероятность того, что событие произойдет (у больного обнаружат метастазы).

В таблице 3 представлены показатели соответствия модели. По данным таблицы можно сделать вывод, что получена хорошая модель, пригодная для внедрения в медицинскую информационную систему организации. В таблице 4 приведены коэффициенты логистической модели. Использовалась бинарная классификация, то есть отнесение объекта к одному из двух классов. Сама логистическая модель – это функция нескольких переменных, дающая число с отсечением 0,5. Если полученное значение логистической функции меньше 0,5, то класс принадлежности «0», если больше 0,5, то «1». Таким образом, значения логистической функции представляют собой логарифмические шансы «0 – добро» по сравнению с «1 – метастазы». Далее в таблицах AIC – это информационный критерий Акаике, вес – коэффициент в логистической функции, AUC – численный показатель площади под кривой, SE – стандартная ошибка среднего коэффициента (веса), Z – стандартная оценка коэффициента (веса), p – уровень значимости.

**Таблица 3.** Показатели качества биномиальной логистической регрессии

Девиантность	AIC	$R^2_{McF}$	Тест модели $\chi^2$	Число степеней свободы модели	Уровень значимости p
36,6	46,6	0,627	61,7	4	<0,001

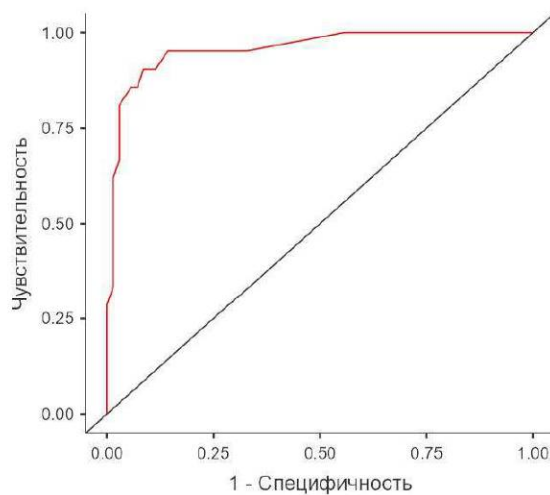
**Таблица 4.** Коэффициенты модели биномиальной логистической регрессии

Предиктор	Вес	SE	Z	p
Константа	-7,576	2,594	-2,92	0,003
Наличие дополнительных очагов	-0,879	0,477	-1,84	0,065
Тип артериальной фазы КУУЗИ	-0,339	0,191	-1,78	0,075
Симптом вымывания КУУЗИ	4,652	1,081	4,30	< 0,001
Онкологические заболевания в анамнезе у пациента	2,960	1,105	2,68	0,007

Проверка модели проведена на базе из 43 пациентов, в таблице 5 приведены прогностические характеристики модели, а на рис. 1 построена характеристическая кривая.

**Таблица 5.** Прогностические меры

Точность	Специфичность	Чувствительность	AUC
0,934	0,971	0,810	0,957



**Рис. 1.** Характеристическая кривая биномиальной логистической регрессии

**4. Выводы.** В работе построена модель биномиальной логистической регрессии для прогнозирования метастатического поражения печени по характеристикам, полученным при проведении контрастно-усиленного ультразвукового исследования. Модель имеет высокие чувствительность 81% и специфичность 97%.

## Литература

1. Мерабишвили В. М. Эпидемиология и выживаемость больных со злокачественными новообразованиями в России // *Формулы фармации*. 2021. Т. 3. № 1S. С. 32–35.
2. Бусько Е. А., Козубова К. В. и др. Сравнительный анализ эффективности КТ и контрастно-усиленного УЗИ в диагностике метастазов колоректального рака в печени // *Анналы хирургической гепатологии*. 2022. Т. 27. № 1. С. 22–32.
3. Кривополенова С. Д., Гончарова А. Б. Программная реализация системы постановки предварительного диагноза // *Процессы управления и устойчивость*. 2020. Т. 7. № 1. С. 153–157.
4. Jamovi documentation [Электронный ресурс]: URL:<https://docs.jamovi.org> (дата обращения: 10.06.2023).
5. Sing T., Sander O., Beerenwinkel N., Lengauer T. ROCRC: visualizing classifier performance in R // *Bioinformatics*. 2005. Vol. 21. No 20. P. 3940–3941.

УДК 004.942

Пономарева П. М.

## Моделирование динамики распространения COVID-19 на примере первых волн пандемии в Германии

*Рекомендовано к публикации доцентом Кумачевой С. Ш.*

**1. Введение.** Для моделирования распространения инфекционных заболеваний часто используется модель SIR [1]. Применяя эту модель или её модификации, можно создавать прогнозы, тем самым получая возможность заранее готовиться к вспышкам заболеваний или принимать решения, которые могли бы уменьшить число пострадавших, снизить нагрузку на систему здравоохранения и на другие сферы жизнедеятельности, претерпевшие негативные изменения из-за временной нетрудоспособности сотрудников. Есть другие способы моделирования распространения болезни, показавшие хорошие результаты для вируса COVID-19 [2].

**2. Постановка задачи.** Целью исследования является построение модели распространения эпидемии вируса COVID-19 на конкретном примере для дальнейшего развития и обобщения. В качестве основы для моделирования рассматривается модель SIRD (Восприимчивые – Инфицированные – Выздоровевшие – Умершие) [3]. Основным преимуществом модели, помимо учета инфицированных и выздоровевших, является возможность описания смертности. Оценка параметров проведена по реальным данным эпидемии вируса в период 08.03.2020 – 28.05.2021 на примере Германии. Построенная модель применена к прогнозированию динамики развития пандемии в трех регионах Германии и Швеции. Проведен сравнительный анализ модельных и реальных результатов.

**2.1. SIRD модель.** Система дифференциальных уравнений модели SIRD имеет вид

---

*Пономарева Полина Максимовна* — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077072@student.spbu.ru, тел.: +7(919)293-98-71

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu I(t). \end{cases}$$

В данной модели вся популяция делится на четыре группы:  $S(t)$  — лица, восприимчивые к вирусу в момент времени  $t$ ,  $I(t)$  — лица, зараженные вирусом,  $R(t)$  — выздоровевшие,  $D(t)$  — умершие. Коэффициент  $\beta$  отражает интенсивность контактов, после которых следует заражение,  $\gamma$  — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных лиц,  $\mu$  — коэффициент смертности. Предполагается, что  $S(t) + I(t) + R(t) + D(t)$  остается постоянной величиной. Таким образом, модель SIRD позволяет описывать и прогнозировать динамику смертности, что очень важно при моделировании эпидемии, так как вирус COVID-19 привел к избыточной смертности во многих странах. Для численной реализации модели было произведено сравнение нескольких решателей ОДУ с разными длинами шагов. Было установлено, что ошибка рассматриваемой модели многим больше ошибки численного решения ОДУ даже самым грубым методом. Так как увеличение затрат на решение не приводило к улучшению качества прогноза, для ускорения вычисления решение было произведено явным методом Эйлера [4] с шагом в один день.

**2.2. Оценка параметров.** Для нахождения параметров  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  была решена задача минимизации целевой функции

$$f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (I_i^r - I_i^m)^2 + \sum_{i=1}^N (R_i^r - R_i^m)^2 + \sum_{i=1}^N (D_i^r - D_i^m)^2},$$

где  $I_i^r, R_i^r, D_i^r$  — реальное число случаев инфицирования, выздоровления и смерти,  $I_i^m, R_i^m, D_i^m$  — модельные данные. Для нахождения минимума был использован метод покоординатного спуска [5].

**2.3. Построение модели на данных Германии.** В исследовании были рассмотрены данные с 28.03.2020 по 14.05.2021 [6]. На рис. 1 можно выделить четыре периода:

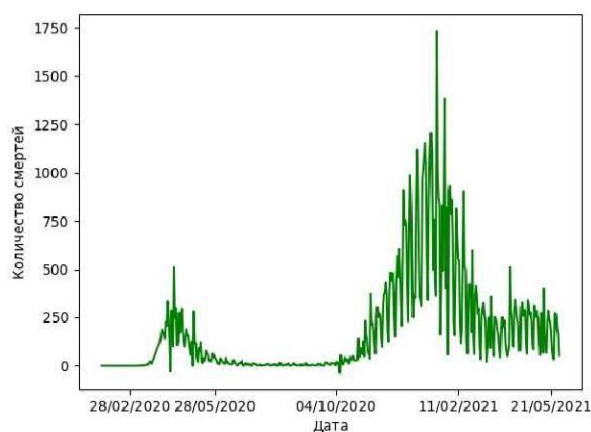


Рис. 1. График смертности по дням

1. 28.03.2020 – 28.05.2020: первая волна вируса COVID-19 в Германии. На этом этапе в качестве начальных условий взяты реальные данные  $N = 81,1 \cdot 10^6$ ,  $I(0) = 62095$ ,  $R(0) = 9211$ ,  $D(0) = 533$ . В конце данного этапа модельное число умерших превышает реальное в 1,35 раз, модельное число инфицированных в 1,23.
2. 28.05.2020 – 04.10.2020: выход смертности на плато. Начиная с этого этапа, в качестве начальных условий брались модельные данные из предшествующего периода. Смертность в модели превышает реальную в 1,2 раза, заболеваемость отличается от реальной в 0,85.
3. 04.10.2020 – 11.02.2021: вторая волна вируса. Отношение модельной смертности к реальной составляет 0,95, заболеваемость большую часть периода занижена, однако в конце отличается от реальной в 1,2 раза.
4. 11.02.2021 – 14.05.21: третья волна вируса. Отличается от предыдущих периодов тем, что при высоком уровне заболеваемости интенсивность смертности несильно возрастает. Отношение смертности 1,02, заболеваемости — 0,96.



В таблице 1 приведены параметры для каждого из этапов, для заболеваемости и смертности указана среднеквадратичная ошибка

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (F_i^r - F_i^m)^2}.$$

Таблица 1. Параметры

	$\beta$	$\gamma$	$\mu$	f(x)	RMSE I	RMSE D
1	0,05	0,028	0,0014	324999	32460,7	1410,2
2	0,000885	0	0	2034	30178,3	2283,2
3	0,0367	0,0165	0,00039	27885	281430,3	3236,7
4	0,00205	0,00104	0,000067	9594	382017,3	640,8

С использованием параметров четвертого периода построен прогноз для 14.05.2021–28.05.21. В полученном прогнозе была завышена смертность, среднеквадратичная ошибка показателя D составила 234,4, и занижена заболеваемость, среднеквадратичная ошибка I составила 436041. На рис. 2 представлены графики заболеваемости и смертности в Германии за все рассмотренные периоды.

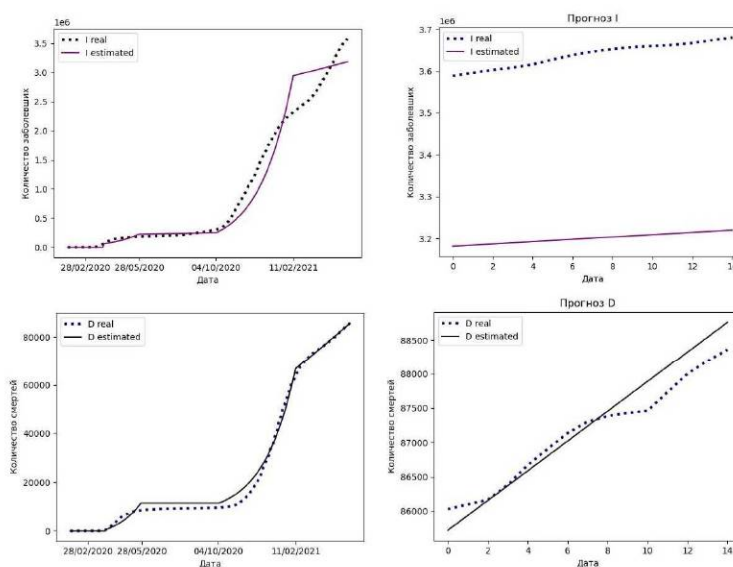


Рис. 2. Графики заболеваемости и смертности

**2.4. Проверка параметров на данных регионов Германии и Швеции.** Эти страны выбраны из-за сильных различий в стратегии борьбы с вирусом: в Германии с началом первой волны был введен жесткий карантин, а в Швеции правительство сделало упор на коллективный иммунитет, введя только ограничение на мероприятия с числом участников более 50 человек. Данная модель была применена для трех регионов каждой из стран. В Германии: Бавария, Северный Рейн-Вестфалия, Саксония. В Швеции: Вестра-Гёталанд, Сконе и Стокгольм. Регионы выбирались, исходя из количества наблюдений и смертности. В таблицах 2, 3 приведены результаты применения модели для каждого из регионов.

**Таблица 2.** Параметры регионов Германии

Регион	$\frac{I^m}{I^r}$	$\frac{D^m}{D^r}$	RMSE I	RMSE D	Население (млн)
Бавария	1,4	1,7	114774,7	3469,8	13,08
Северный Рейн-Вестфалия	1,2	0,95	4740,2	1353,8	19,93
Саксония	0,4	3,3	51902	2148,1	4,079

Из таблицы 2 видно, что ближе всего к реальным данным модель оказалась для региона Северный Рейн-Вестфалия. Самые далекие результаты как для смертности, так и для заболеваемости были получены для Саксонии. Одна из возможных причин – соблюдение карантинных мер и процент вакцинации населения в том или ином регионе. Как показывает официальная статистика по вакцинации в Германии, Саксония является регионом с самым низким процентом вакцинированного населения, в то время как регион Северный Рейн-Вестфалия имеет один из самых высоких показателей.

**Таблица 3.** Параметры регионов Швеции

Регион	$\frac{I^m}{I^r}$	$\frac{D^m}{D^r}$	RMSE I	RMSE D	Население (млн)
Вестра- Геталанд	0,5	1,23	27842,4	60,6	1,71
Сконе	0,2	0,53	42599,1	358,8	1,34
Стокгольм	0,59	1,5	25767,3	550,4	0,975

Можно сделать вывод, что модель, построенная по параметрам Германии, дает сильно заниженные результаты для заболевших в каждом из рассмотренных регионов Швеции.

**3. Заключение.** В работе получены оценки параметров модели SIRD так, что для данных, по которым производилась калибровка, а также для наблюдений из тех мест, где политика борьбы с эпидемией была идейно похожей, модель описывает смертность и заражаемость с приемлемой точностью (см. значение  $f(x)$  в таблице 1). Также построен прогноз для заболеваемости и смертности на период с 14.05.2021 по 28.05.21. Результат применения модели с откалиброванными параметрами к ситуации распространения COVID-19 в Швеции подтвердил, что ожидаемое количество заболевших можно уменьшать в том числе при соблюдении карантинных мер.

### Литература

1. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1927. Vol. 115. No 772. P. 700–721.
2. Захаров В. В., Балыкина Ю. Е. Прогнозирование динамики эпидемии коронавируса (COVID-19) на основе метода прецедентов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 249–259.
3. Charles I. Charles Estimating and simulating a SIRD Model of COVID-19 for many countries, states, and cities // Journal of Economic Dynamics and Control. 2022. Vol. 140. [Электронный ресурс]: URL:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165188922000239> (дата обращения: 04.10.2022).
4. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
5. Аббасов М. Э. Методы оптимизации : учеб. пособие. СПб.: ВВМ, 2014. 64 с.
6. World Health Organization [Электронный ресурс]: URL:<https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019> (дата обращения: 03.09.2022).

УДК 551.583.13

**Селиверстова К. А.**

## **Применение статистических методов для оценки глобального потепления**

*Рекомендовано к публикации доцентом Лежниной Е. А.*

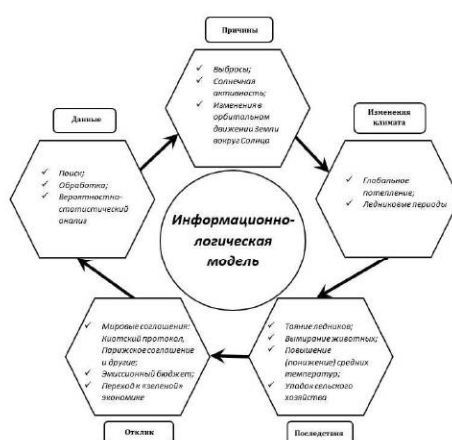
**1. Введение.** Последние несколько лет стали самыми теплыми за весь период метеорологических наблюдений, на данный момент температура превышает по разным данным на 1–1,5 градуса Цельсия температурные значения доиндустриальной эпохи. Ускорившиеся таяние ледников и сокращение ледового покрова приводит к повышению уровня мирового океана, что в ближайшем будущем может привести к затоплению большого количества населенных участков суши [1]. В связи с этим возникает потребность не только в более глубоком изучении процесса глобального потепления, но и в прогнозировании дальнейшего его поведения.

Об изменении климата и о глобальном потеплении как таковом заговорили еще в прошлом столетии, когда ученые узнали о ледниковых периодах, парниковом эффекте и других естественных изменениях климатических условий Земли. До сих пор идет множество споров о степени влияния человека на климат, а также о последствиях, которые могут наступить в ближайшем будущем. В настоящее время публикуется множество научных статей и докладов, посвященных изменению климата и в частности глобальному потеплению. Так, например, актуальные проблемы и основные достижения в области метеорологии, гидрологии и загрязнений природной среды представлены в научном журнале [2]. Более полные оценки рисков, к которым приводит глобальное потепление, а также меры борьбы и адаптаций к изменениям описаны в оценочных докладах Межправительственной группы экспертов по изменению климата (МГЭИК) [3].

---

*Селиверстова Ксения Александровна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kseniyaseliverstova1999@gmail.com, тел.: +7(924)531-35-58

**2. Постановка задачи.** Процесс перемены климата представляет собой колебания температуры Земли в целом или отдельных ее регионов с течением времени. Колебания выражаются в статистически достоверных отклонениях параметров погоды от многолетних значений за определенный период времени (от десятилетий до миллионов лет) [4].



**Рис. 1.** Информационно-логическая модель

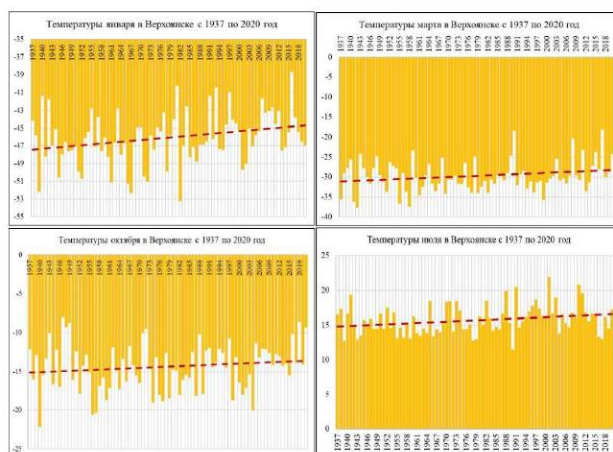
Для проведения исследования были использованы данные о среднесуточных температурах, высоте снежного покрова и количестве осадков для восьми населенных пунктов, расположенных в северной части России. Рассматриваемый временной промежуток длиной в 83 года выбран по причине доступности данных, так как измерения для исследуемых городов начались с 1930-х годов. Требуется оценить степень изменений для наблюдаемых параметров в условиях глобального потепления, а также спрогнозировать дальнейшее поведение для каждого из параметров.

Причины глобального потепления можно разделить на два основных блока: антропологические и естественные. Деятельность человека в настоящее время считается одной из главных причин потепления. Парниковые газы, выделяемые при производстве различных видов топлива и энергии, частично поглощают инфракрасное излучение и удерживают уходящую в космос энергию, вызывая рост температуры на Земле. К естественным причинам относятся вул-

канические выбросы, солнечная активность, орбитальное движение Земли вокруг Солнца. Такие процессы оказывают влияние на климат планеты в течение длительного интервала времени. На рис. 1 представлена информационно-логическая модель, отражающая процесс изучения глобального потепления.

**3. Основные результаты.** В ходе работы было проведено исследование предметной области процесса глобального потепления, а также реализован первичный вероятностно-статистический анализ, включающий в себя построение гистограмм, выделение трендовой составляющей и их интерпретацию. Также были вычислены показатели динамики среднегодовых температур и реализован 1 этап метода Singular Spectrum Analysis (SSA), результатом которого стала декомпозиция временно ряда.

**3.1. Вероятностно-статистический анализ.** Для систематизации и графического представления данных были использованы сводные таблицы программного продукта Excel.



**Рис. 2.** Гистограммы среднемесячных температур

В силу большого объема данных были вычислены среднемесячные значения метеорологических показателей для каждого из исследуемых населенных пунктов. На рис. 2 представлены гистограммы среднемесячных температур в г. Верхоянске в каждый из сезонов,

а также пунктирной линией выделен тренд. Как можно заметить из гистограмм, среднемесячная температура возросла на  $1-1,5$  °C в каждое из времен года. Наибольший рост наблюдается в межсезонье, что говорит о возможном размывании границ между холодным и теплым периодами.

**Таблица 1.** Показатели динамики среднегодовых температур

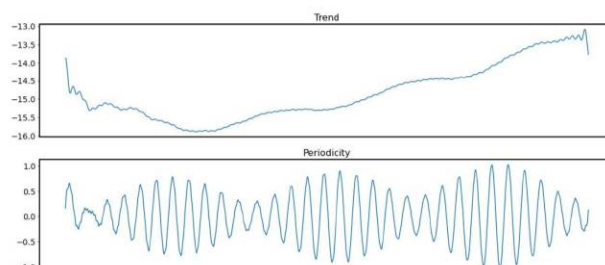
Название показателя	Значение
Среднее значение температуры	-14,734
Средний абсолютный прирост	0,057
Средний коэффициент роста	0,995
Средний темп роста	99,494
Средний темп прироста	-0,506
Средняя величина абсолютного значения 1% прироста	-0,113

В таблице приведены значения показателей динамики среднегодовых температур г. Верхоянска, которые используются для изучения интенсивности изменения уровней временного ряда. Среднее значение температуры за весь период наблюдений составляет  $-14,734$  °C. Значение абсолютного прироста, равно  $0,057$  °C, то есть в среднем среднегодовые температуры различаются на  $0,057$  градуса. Коэффициент роста характеризует во сколько раз различаются значения наблюдаемого и базисного периодов. Также в среднем температура каждого года совпадает со среднегодовой температурой любого другого из рассматриваемого промежутка, о чем говорят значения темпов роста и прироста.

**3.2. Реализация 1 этапа метода SSA.** Сингулярный спектральный анализ является математическим методом анализа временных рядов, при котором поведение исследуемого процесса рассматривается как результат сложения шумовой, трендовой и нескольких волновых составляющих.

Данный метод состоит в преобразовании одномерного ряда в многомерный, исследовании полученной многомерной траектории методом главных компонент и последующем восстановлении одномерного ряда [5]. В настоящей статье приведены результаты разложения временного ряда на составляющие (см. рис. 3).

На графике наблюдается восходящий тренд, сигнализирующий о повышении температур с течением времени, что также наблюдалось и на гистограммах (см. рис. 2). Периодичность включает в себя два вида колебаний: первые обусловлены сменами времен года, а вторые



**Рис. 3.** Тренд и периодичность временного ряда

(более плавные) характеризуются изменениями амплитуды. Данные изменения можно проинтерпретировать следующим образом: разница в температурах достигает своего минимального значения каждые 8 лет, что также подтверждает предположение о размывании границ между сезонами.

### Литература

1. Борьба с изменением климата – гонка, из которой мы все еще можем выйти победителями // Организация Объединенных Наций. [Электронный ресурс]: URL: <https://www.un.org/ru/un75/climate-crisis-race-we-can-win> (дата обращения: 23.01.2023).
2. Научно-технический журнал Метеорология и гидрология. [Электронный ресурс]: URL: <http://www.mig-journal.ru/> (дата обращения: 15.01.2023).
3. Гладильщикова А. А., Дмитриева Т. М. Межправительственная группа экспертов по изменению климата: завершение цикла шестой оценки и планы на будущее // Фундаментальная и прикладная климатология. 2022. № 4. С. 407–412.
4. Изменение климата и глобальное потепление: одно и то же, или есть разница? // Движение экологической культуры Ecososm. [Электронный ресурс]: URL: <https://eco-cosm.com/articles/globalno/izmenenie-klimata-vs-globalnoe-poteplenie> (дата обращения: 10.02.2023).
5. Данилов Д. Л., Жиглявский А. А. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница». СПб.: Издательство СПбГУ, 1997. С. 307.



УДК 51-7

**Фролова Е. А.**

## **Статистический анализ клинических показателей пострадавших с тяжелой ожоговой травмой**

*Рекомендовано к публикации доцентом Балыкиной Ю. Е.*

**1. Введение.** Ожоговая травма относится к наиболее тяжелым и трудноизлечимым поражениям с высокой летальностью, что является серьезной медицинской и социальной проблемой [1]. Ежегодно в Российской Федерации медицинскую помощь по поводу ожогового поражения кожных покровов получают 300–350 тысяч пациентов. При этом стационарное лечение требуется в 30–35% случаев, а в 70% пациенты проходят лечение в амбулаторных условиях [2]. Ожоги занимают третье место в структуре общего травматизма, без учета пациентов с последствиями критического низкотемпературного воздействия, они составляют 8–12% от всех травм [3]. Тяжелая ожоговая травма требует максимально быстрого и эффективного врачебного вмешательства, а значит, полной ресурсной и материально-технической готовности медицинских учреждений для оказания медицинской помощи и проведения лечения. Для этого чрезвычайно важен анализ клинико-статистических показателей, оценка количества, частоты, тяжести, а также прогноза исходов термического поражения среди разных возрастных групп населения.

**2. Постановка задачи и методы решения.** В работе проведен анализ медико-статистических параметров пострадавших с тяжелой ожоговой травмой, проходивших лечение в ГБУ «СПб НИИ скорой помощи им. И. И. Джанелидзе».

На основе данных медицинской информационной системы была создана база данных, включающая различные параметры пострадавших с тяжелой ожоговой травмой в период с 2017 по 2022 годы (рис. 1). В качестве программного обеспечения использовалась среда Python 3.10. На первом этапе была проведена предобработка данных пациентов: из общего количества поступивших (1155 пациентов)

---

*Фролова Елизавета Алексеевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st075663@student.spbu.ru, тел.: +7(921)940-69-12

исключены пострадавшие с холодовой травмой и токсическим эпидермальным некролизом, а также пациенты, у которых было комбинированное термомеханическое поражение с ведущим механическим повреждением. Таким образом, из дальнейшего анализа было исключено 20% пациентов, поступивших в отделение реанимации и интенсивной терапии. На следующем этапе, с применением методов статистического анализа данных, было выполнено исследование 924 случаев тяжелой ожоговой травмы, требующих стационарного лечения.

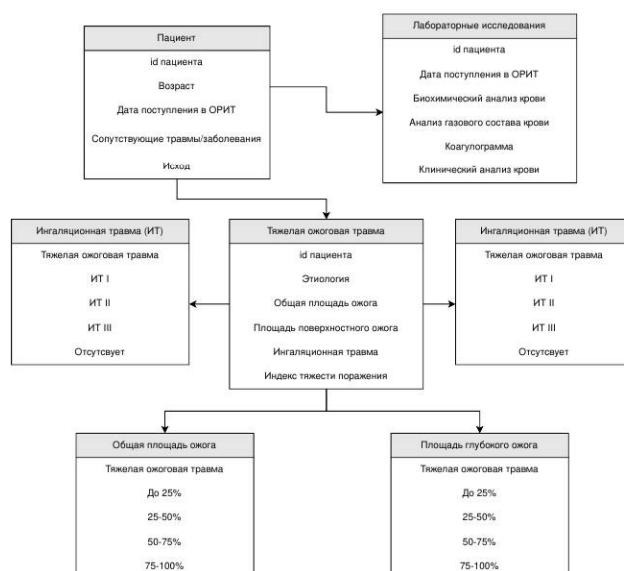


Рис. 1. Схема базы данных

**3. Результаты.** Изучение структуры заболеваемости показало, что из 924 пострадавших с тяжелой ожоговой травмой поступило 613 мужчин (66%) и 311 женщин (34%). Среди них 700 пациентов (76%) получили ожог пламенем, 196 (21%) – ожог горячей водой, остальные 29 случаев (3%) были получены при ожогах другой этиологии (горячая пища, контактный ожог, полученный от горячей воды и пара одновременно, химический, фотохимический, ультрафиолет). В общей когорте поступивших в отделение реанимации ожогового центра

преобладали пациенты с ожоговым поражением, преимущественно пламенем. Распределение реанимационных пациентов по этиологическому фактору представлено в таблице 1.

**Таблица 1.** Этиология госпитализированных в ОРТИ

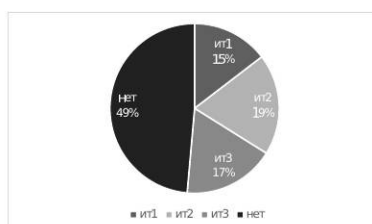
	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Всего пациентов	184	171	162	130	142	135
Ожог пламенем	74,5%	70,2%	74,7%	80,0%	85,2%	71,8%
Ожог горячей водой	21,8%	24,5%	22,2%	19,2%	13,4%	25,2%
Другое	3,7%	5,3%	3,1%	0,8%	1,4%	3,0%

Согласно представленным данным, большая часть пациентов поступает с диагнозами «ожог пламенем» и «ожог горячей водой». В динамике за 6 лет доля таких пациентов остается одинаковой. Остальные этиологические факторы ожоговых поражений имеют незначительные колебания в исследуемый период. В ходе статистического анализа пациентов были рассчитаны коэффициенты выживаемости в зависимости от этиологического фактора ожоговой травмы. Результаты представлены в таблице 2.

**Таблица 2.** Коэффициент выживаемости в зависимости от этиологии ожога

Этиология	Коэффициент выживаемости
Ожог пламенем	0,644286
Ожог горячей водой	0,617347

Из всех пациентов с тяжелой термической травмой у 475 из 700 пострадавших от ожога пламенем (68%) имелась ингаляционная травма (ИТ). Среди них 135 человек (15%) получили ингаляционную травму первой степени (ИТ I), 177 (19%) – второй степени (ИТ II) и 162 (17%) – третьей степени (ИТ III) (рис. 2).



**Рис. 2.** Распределение пациентов с ингаляционной травмой и без

Ингаляционная травма утяжеляет течение ожоговой болезни. Была изучена выживаемость пациентов с изолированным ожогом пламенем и ожогом пламенем с комбинацией – с ингаляционной травмой. Результаты представлены в таблице 3.

**Таблица 3.** Распределение пациентов с изолированным ожогом пламенем и ожогом пламенем с комбинацией

	<b>Ожог пламенем</b>	<b>Ожог + ИТ I</b>	<b>Ожог + ИТ II</b>	<b>Ожог + ИТ III</b>
Количество пациентов	225	135	178	162
Выжили	179	125	118	30

Отдельно изучен вопрос половозрастной структуры пациентов (таблица 4).

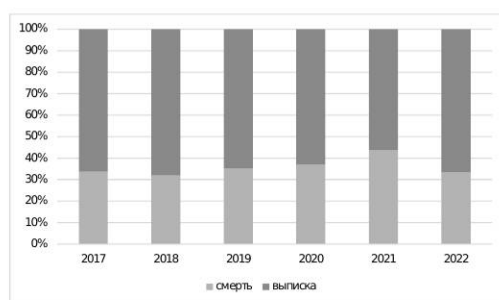
**Таблица 4.** Половозрастная структура пациентов

<b>Пол</b>	<b>Возрастные группы (годы)</b>					<b>Итого</b>
	<b>18–29</b>	<b>30–59</b>	<b>60–74</b>	<b>75–89</b>	<b>Более 90</b>	
Женский	11 (3,5%)	103 (33,1%)	87 (28%)	83 (26,7%)	27 (8,7%)	311 (100%)
Мужской	70 (11,4%)	372 (60,7%)	115 (18,8%)	53 (8,6%)	3 (0,5%)	613 (100%)

Как следует из таблицы 4, в структуре пациентов ОРИТ ожогового профиля преобладают мужчины трудоспособного возраста (30–59 лет), доля которых составляет 60,7% от всех пострадавших мужчин. На втором месте возрастная группа мужчин 60–74 лет (18,8%). В группе молодых пострадавших (18–29 лет) также преобладают мужчины (11,4%). У женщин большинство травм так же, как и у мужчин возникает в возрастной группе от 30 до 59 лет (33,1%). На втором и на третьем месте среди женщин возрастные группы 60–74 и 75–89 лет, что составляет 28% и 26,7% соответственно от всех травм среди женщин. Кроме того, высока доля травм в старческом возрасте (90 лет и более), которая составляет у женщин 8,7%, тогда как у мужчин в этом возрасте травматизм составляет только 0,5%.

Анализ распределения возникновения травм в разных возрастных категориях, а также смертности пациентов в этих возрастных группах показал, что преобладают пациенты трудоспособного возраста (30–59 лет) как среди мужчин, так и среди женщин. Именно в этой возрастной группе также преобладает и летальность.

Всего из 924 пациентов ОРИТ 595 выживших (64%) и 329 умерших (36%). Распределение выживаемости по годам представлено на рис. 3.



**Рис. 3.** Выживаемость пациентов по годам

В ходе исследования проведен также анализ площади ожогового поражения у пациентов поступивших в ОРИТ (таблица 5). Были рассмотрены общая площадь ожогов и площадь глубоких ожогов (в процентах относительно площади всего тела). Ожоговые травмы как поверхностные, так и глубокие, были поделены на четыре группы: ожоги до 25% кожного покрова, от 25% до 50%, 50–75% и от 75% до 100%.

**Таблица 5.** Исследование площадей термических поражений

	Общая площадь			Глубокий ожог		
	Выписка	Смерть	Итого	Выписка	Смерть	Итого
До 25%	18,5%	7%	25,5%	59,4%	19,8%	79,2%
25–50%	36,1%	13,1%	49,2%	4,5%	9,5%	14,0%
50–75%	9,4%	9,7%	19,1%	0,3%	3,6%	3,9%
75–100%	0,2%	6%	6,2%	0%	2,9%	2,9%
Итого	64,2%	35,8%	100,0%	64,2%	35,8%	100,0%

Проведенное исследование площади термических поражений показало, что большая часть травм имеют общую площадь термического поражения до 25% – 608 человек (65,8%) и площадь глубокого ожога также до 25% – 732 пациента (79,2%).

Также были рассчитаны показатели, характеризующие прогноз исхода ожоговой болезни по общей площади и по площади глубокого ожога: индекс Франка (общая площадь ожога + площадь глубокого ожога × 3) и индекс тяжести поражения (индекс Франка +15 условных единиц (у.е.) при наличии ИТ I, +30 у.е. – ИТ II, +45 у.е. –

ИТ III). В зависимости от количества баллов, полученных при расчете, делается прогноз: меньше 30 единиц – благоприятный прогноз; 30–60 единиц – относительно благоприятный прогноз; 61–90 единиц – сомнительный прогноз; 90 единиц и более – неблагоприятный прогноз. Затем была изучена корреляционная зависимость всех характеристик и построена корреляционная матрица, представленная на рис. 4.

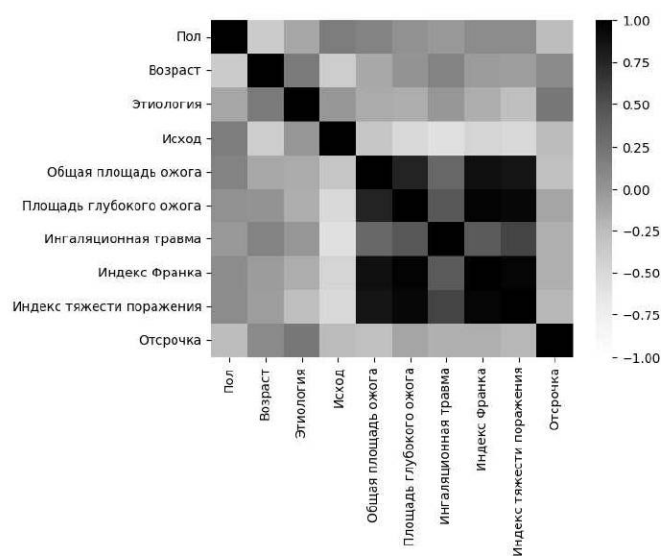


Рис. 4. Корреляционная матрица

Как следует из данных, представленных на рис. 4, существует зависимость между такими показателями, как общая площадь ожога, площадь глубокого ожога, наличие ингаляционной травмы, индекс Франка, индекс тяжести поражения и отсрочка – количество прошедших дней с момента получения травмы до поступления пострадавшего в ОРИТ. Результаты проведенного исследования позволили определить, что среди общего потока пациентов наибольшее количество пострадавших – это люди трудоспособного возраста. Таким образом, полученные данные позволили сделать вывод о том, что необходимо обоснованное планирование обеспечения специализированного лечения пациентов с термической травмой с учетом актуаль-

ных стандартов и протоколов лечения по профилю. Важно наиболее эффективными и быстрыми способами оказывать медицинскую помощь пострадавшим.

**4. Выводы.** В данной работе проанализированы показатели и выявлены зависимости, которые в дальнейшем планируется использовать при проведении кластерного анализа данных пациентов с тяжелой термической травмой, чтобы выявить наиболее значимые показатели формирования осложнений и неблагоприятных исходов у тяжелообожженных и разработать модель дифференциальной диагностики, позволяющей оценить развитие осложнений и исход тяжелой ожоговой травмы.

## Литература

1. Зиновьев Е. В., Костяков Д. В., Заворотный О. О. и др. Тенденции развития методов прогнозирования исхода ожоговой болезни // Российские биомедицинские исследования. СПб. 2022. Т. 7. № 1. С. 38–43.
2. Крылов П. К., Зиновьев Е. В., Орлова О. В. и др. Медико-статистические характеристики больных и пострадавших ожогового центра ГБУ «Санкт-Петербургский научно-исследовательский институт скорой помощи имени И. И. Джанелидзе» // Скорая медицинская помощь. СПб. 2022. Т. 15. № 2. С. 43–49.
3. Всемирная организация здравоохранения. Ожоги // Всемирная организация здравоохранения. [Электронный ресурс]: URL:<https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/burns> (дата обращения: 15.03.2023).

УДК 004.891

Хоменко И. Е., Легкова И. А.

## Применение логистической регрессии для анализа необходимости подключения больного коронавирусной инфекцией к аппарату ИВЛ

*Рекомендовано к публикации доцентом Гончаровой А. Б.*

**1. Введение.** Коронавирусная инфекция входит в пятерку лидеров по смертности как в нашей стране, так и во всем мире. Поэтому задача анализа выживаемости пациентов с коронавирусной инфекцией (COVID-19) является важной [1], и как следствие, актуальной является задача построения соответствующей прогностической модели. Данная задача является нетривиальной, поскольку необходимо не только учесть все сложности медицинских процессов: индивидуальность развития заболевания, большое число слабо формализованных показателей, слабовыраженные закономерности в статистических данных пациентов; но и учесть строгие математические требования к объему данных и их согласованности с результатами компьютерного анализа [2].

**2. Цель исследования.** Изучение особенности течения коронавирусной инфекции у пациентов, поступивших в отделение реанимации и интенсивной терапии (ОРИТ), по выявлению наиболее значимых факторов перевода пациента на искусственную вентиляцию легких (ИВЛ).

**3. Материалы и методы.** База данных, включающая обезличенные медицинские данные 250 параметров 299 пациентов, поступивших в ОРИТ в 2020 году, была предоставлена ФГБУ «Федеральный научно-клинический центр специализированных видов медицинской помощи и медицинских технологий Федерального медико-биологического агентства». Расчеты, а также построение модели анализа, проведены в программном статистическом пакете Jamovi [3].

---

*Хоменко Ирина Евгеньевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087797@student.spbu.ru, тел.: +7(924)150-11-84

*Легкова Ирина Анатольевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st088253@student.spbu.ru, тел.: +7(911)299-63-71



**4. Выявление значимых показателей.** Для корректной работы с данными проведена нормировка непрерывных показателей. Проведена проверка данных на корректность автоматически выбранного типа в программном пакете Jamovi.

**Таблица 1.** Результат применения критерия Фишера

Показатели	Значение p
Злокачественные заболевания	<b>0,004</b>
Хроническая болезнь почек	<b>0,015</b>

Представленные данные базы двух типов – бинарные и непрерывные. Для оценки значимости бинарных данных использовался точный тест Фишера [4], статистически значимые показатели приведены в таблице 1. Второй тип данных – непрерывные данные, содержащие значительное число выбросов. При сравнении выборочных средних использовался метод непараметрической статистики – U-критерий Манна – Уитни [4]. Статистически значимые показатели и значения статистики U-критерий Манна – Уитни приведены в таблице 2.

**Таблица 2.** Результат применения критерия Манн – Уитни

Показатели	Статистика	Значение p
Нейтрофил-лимфоцитарное соотношение	1550	<b>0,024</b>
SpO2	1393	<b>0,003</b>
Лимфоциты	1530	<b>0,013</b>
Лейкоциты	1596	<b>0,043</b>
Гемоглобин	1573	<b>0,044</b>

**5. Классификационная модель.** Для построения классификационной модели из базы данных были исключены пациенты не имеющие хотя бы одного значимого показателя из приведенных выше. Таким образом, осталось 208 пациентов, 146 из которых были переведены на ИВЛ.

Для нахождения адекватной выборки для построения модели минимальный по численности показатель (положительный исход – подключение к ИВЛ) был поделен в соотношении 2:1, большая часть вошла в выборку для построения модели, вторая – для тестовой модели. Далее в выборку для построения модели в том же количестве были добавлены пациенты с отрицательным исходом (которых

не подключали к ИВЛ), чтобы количество положительных и отрицательных исходов соотносилось как 1:1. Построение модели было проведено на выборке из 82 пациентов, тестирование модели – на оставшихся 126 пациентах. В результате построения биномиальной логистической регрессии [4] получена следующая модель:

$$P = \frac{1}{1 + e^{-y}},$$

$$y = 5,43x_1 + 3,43x_2 - 25,17x_3 - 5,52x_4 + 1,67x_5 + 16,03x_6 - 0,15x_7 - 0,99,$$

где  $x_1$  – уровень сатурации,  $x_2$  – уровень лейкоцитов,  $x_3$  – нейтрофил-лимфоцитарное соотношение,  $x_4$  – уровень гемоглобина,  $x_5$  – наличие злокачественного заболевания,  $x_6$  – наличие хронической болезни почек,  $x_7$  – уровень лимфоцитов.

На рис. 1 приведена характеристическая кривая (ROC-кривая), полученная при проверке модели на тестовой выборке.

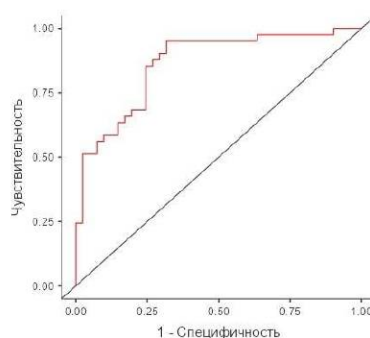


Рис. 1. ROC-кривая

**6. Вывод.** Построенная регрессионная модель хорошего качества: чувствительность – 0,732; специфичность – 0,756; точность – 0,744; AUC – 0,863. Отметим, что в модель включены не все значимые параметры. Целесообразным является построение не только модели для анализа необходимости подключения больного коронавирусной инфекцией к аппарату ИВЛ, но и для анализа выживаемости.

## Литература

1. Бычинин М. В., Антонов И. О., Клыпа Т. В. и др. Нозокомиальная инфекция у пациентов с тяжелым и крайне тяжелым течением COVID-19 // *Общая реаниматология*. 2022. Т. 18. № 1. С. 4–10.
2. Гончарова А. Б., Виль М. Ю. Программное обеспечение для анализа медицинских данных // *Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2022)*. Воронеж. 2022. С. 13–15.
3. The Jamovi project (Computer Software, version 2.3) [Электронный ресурс]: URL:<https://www.jamovi.org>. (дата обращения: 12.04.23).
4. Красько О. *Статистический анализ данных в медицинских исследованиях: учеб. метод. пособие*. Минск: МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2014. 127 с.

УДК 004.932.1

Шмидт Я. А.

## Анализ саркопении методами машинного обучения

*Рекомендовано к публикации профессором Котиной Е. Д.*

**1. Введение.** Саркопения – это состояние, ассоциируемое с потерей мышечной массы, утратой силы и функциональности мышц. Считается, что у 5–13% населения в возрасте 60–70 лет и 11–15% людей старше 80 лет наблюдается саркопения. Своевременное выявление и лечение особенно важны, ведь наличие саркопении снижает качество жизни и усложняет процесс реабилитации после хирургического вмешательства.

Существует множество методов для оценки саркопении, среди которых можно выделить *методы скрининга* и *методы диагностики*. Скрининг включает в себя SARC-F, замер антропометрических данных и проверку мышц на работоспособность, в то время как *диагностирование* подразумевает компьютерную томографию (КТ), магнитно-резонансную томографию (МРТ), Dual-energy X-ray Absorptiometry (DXA), а также биоимпедансный анализ (БИА), ультразвуковые методы и мышечную биопсию [1].

Имеются разнообразные варианты проведения оценки саркопении [2–4]. Среди них можно выделить *скрининговые* подходы, основывающиеся на *использовании информации о пациенте, анализе генома пациента* и *детальном разборе походки пациента*.

**1.1. Оценка саркопении с помощью КТ.** Анализ саркопении путем обработки медицинских изображений КТ представляется одним из наиболее точных методов на практике. Цель работы состоит в автоматизации оценки саркопении путем сегментации мышечных групп при обработке DICOM-файлов, полученных с КТ.

Одно из главных преимуществ КТ перед остальными способами рентгенографии – возможность различать незначительные изменения в плотностях. Кроме того, обследование на КТ позволяет получить более широкий спектр анатомо-топометрической информации.

---

*Шмидт Ян Александрович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st090984@student.spbu.ru, тел.: +7(931)371-10-98

В работе для оценки саркопении проведен анализ среза на уровне позвонка L3. Этот выбор объясняется тем, что не только висцеральный и подкожный жиры хорошо видны в этом положении, но и 7 групп мышц [5].

**2. Обработка медицинских изображений.** DICOM (Digital Imaging and COmmunications in Medicine) де-факто является стандартом, который устанавливает правила, позволяющие обмениваться медицинскими изображениями и ассоциированной с ними информацией между аппаратурой различных поставщиков, компьютерами и больницами. Файлы DICOM имеют расширение `.dcm` и обеспечивают средства хранения информации под отдельными тегами. Извлекая из них данные, можно получить доступ к информации, касающейся демографии пациента, а также параметров исследования.

Для КТ-изображений в качестве единиц измерения плотности используют *единицы Хаунсфилда* (HU), которые варьируются в диапазоне  $HU \in [-1000, 3071]$ . Поскольку в работе используются DICOM-данные, перед обучением нейросети особую важность приобретает предобработка данных.

**3. Предобработка данных.** Для получения точных результатов на этапе обучения необходимо, чтобы у информации было равномерное распределение. Для этого данные нормализуют, отображая значения в промежуток  $[0, 1]$ . Так, с помощью функции `freqhist_hist` из библиотеки `fastai` можно разбить диапазон значений пикселей изображений из обучающей выборки на группы в зависимости от того, какое значение установлено для `n_bins`, чтобы в каждой группе было примерно одинаковое количество пикселей. При увеличении числа `n_bins` распределение стремится к равномерному.

С целью увеличения количества данных обучающей выборки можно произвести аугментацию: применить к изображениям случайные изменения яркости, добавление шумов и поворотов, зеркальных отражений и размытий по Гауссу.

**4. Решение задачи сегментации.** Под сегментацией в медицинских задачах понимается *построение контуров* интересующей ткани. Для этого используют полносверточные нейронные сети.

От пациента к пациенту формы и размеры тканей могут сильно отличаться. Также различные типы структур могут иметь близкие

значения плотности, поэтому сегментировать надо осторожно. Выявление аномальных участков следует проводить особенно тщательно, так как незначительные ошибки могут привести к снижению точности анализа исследуемой структуры.

**4.1. Нейросети для медицинской сегментации.** Среди подходящих нейросетей можно выделить U-Net, U-Net++, трансформеры, ResUnet, ResUnet++, DenseNet, SAUnet и другие [6]. Среди перечисленных нейросетей отдельно стоит **U-Net**, представленная в 2015 году [7].

Для сегментации выбрана архитектура U-Net, поскольку она соответствует архитектуре энкодер-декодер и использует сравнительно небольшой объем данных для обучения, достигая высокой точности сегментации. Работа энкодера заключается в многократном применении двух  $3 \times 3$  сверток без отступов, после каждой из которых следует ReLU. Далее – max pool, слой субдискретизации с фильтром  $2 \times 2$  и шагом 2 для уплотнения карты признаков. На каждом шаге понижающей дискретизации количество каналов признаков удваивается. Декодер состоит из повышающей дискретизации карты объектов, за которой следуют: «свертка вверх» размером  $2 \times 2$ , уменьшающая количество каналов признаков вдвое, после которой следует конкатенация с соответствующим образом обрезанной картой признаков из части кодировщика; две свертки  $3 \times 3$ , за каждой из которых – ReLU.

Обрезку необходимо производить из-за потери граничных пикселей в каждой свертке. На последнем слое применяется свертка  $1 \times 1$  для отображения каждого вектора признаков на требуемое количество классов. Всего в сети 23 сверточных слоя.

Ниже приведены фрагменты кода на языке Python – части энкодера и декодера соответственно.

```
inputs = Input((sample_width, sample_height, 1))
conv1 = Conv2D(32, (3, 3), activation='relu',
              padding='same')(inputs)
conv1 = Conv2D(32, (3, 3), activation='relu',
              padding='same')(conv1)
pool1 = MaxPooling2D(pool_size=(2, 2))(conv1)
drop1 = Dropout(0.5)(pool1)

conv2 = Conv2D(64, (3, 3), activation='relu',
```

```

padding='same')(drop1)
conv2 = Conv2D(64, (3, 3), activation='relu',
padding='same')(conv2)
pool2 = MaxPooling2D(pool_size=(2, 2))(conv2)
drop2 = Dropout(0.5)(pool2)

:

up8 = concatenate([Conv2DTranspose(64, (2, 2),
strides=(2, 2), padding='same')(conv7), conv2],
axis=3)
conv8 = Conv2D(64, (3, 3), activation='relu',
padding='same')(up8)
conv8 = Conv2D(64, (3, 3), activation='relu',
padding='same')(conv8)

```

Предобученная модель U-Net показала следующие результаты на КТ-снимках: коэффициенты Дайса составляют  $0,91 \pm 0,02$ ;  $0,92 \pm 0,04$ ;  $0,91 \pm 0,04$  для мышц, выпрямляющих позвоночник (*erector spinae*), поясничной (*psaos*) и прямой мышц живота (*rectus abdominus*) соответственно.

**5. Заключение.** В статье рассмотрена задача количественного анализа саркопении. Выбран метод оценки с использованием КТ-данных на уровне позвонка L3. Написан код, отражающий структуру рассматриваемой нейросети, приведены предварительные результаты сегментации, полученные с помощью U-Net. Также показаны способы предобработки данных обучающей выборки, методы работы с DICOM-файлами. Имеющиеся результаты можно улучшить, обучив нейросеть на большей выборке и добавив возможность оконтуривания дополнительных групп мышц.

## Литература

1. Guttikonda D., Amber L. S. Sarcopenia assessment techniques // Clinical Liver Disease. 2021. Vol. 18. Iss. 4. P. 189–192.
2. Heewon C., Dongryeol R., Changwon J. et al. Artificial-intelligence-driven discovery of prognostic biomarker for sarcopenia // Journal of Cachexia, Sarcopenia and Muscle. 2021. Vol. 12. P. 2220–2230.

3. Castillo-Olea C., Garcia-Zapirain S. B. et al. Automatic classification of sarcopenia level in older adults: a case study at Tijuana general hospital // International Journal of Environmental Research and Public Health. 2019. Vol. 16. Art. no 3275.
4. Yung-Chih C., Yao-Hong Y., Arpita S. S. et al. Towards deep learning-based sarcopenia screening with body joint composition analysis // 2021 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). 2021. P. 3807–3811.
5. SeungJin K., Tae-Hoon K., Chang-Won J. et al. Development of quantification software for evaluating body composition contents and its clinical application in sarcopenic obesity // Scientific Reports. 2020. Vol. 10. No 1. Art. no 10452.
6. Петрова О. Г. Сегментация МРТ изображений позвоночника с использованием сверточных нейронных сетей // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. P. 214–218.
7. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation // CoRR [Электронный ресурс]: URL: <http://arxiv.org/abs/1505.04597> (дата обращения: 13.04.23).



UDC 004.932

**Kamguia F. H., Kozubova K. V.**

## **Application of neural networks to recordings of ultrasound exams to identify focal forms in the liver**

**1. Introduction.** Neural networks are powerful tools for extracting features from images and are widely used in image processing. Convolutional neural networks (CNN) have proven to be very efficient in video processing [1]. A video is a set of images recorded at different moments. Thus, a video has both spatial and temporal dimensions. Automatic organ localization from ultrasound images is quite challenging due to specular noise, low contrast, and wide variability of data in the obtained images. For an ultrasonographer imaging a focal liver lesion and determining whether it is malignant or not, the change in the parenchyma of that organ in different parts and at different time intervals is important. The visualization of a focal change in the echogenicity of the liver during an ultrasound is important to determine the presence of a lesion [2]. In ultrasound, there are 4 types of echogenic formation: *anechogenic* – completely absorbs ultrasonic waves, most often liquid structure, *isoechogenic* – has the same density as the unchanged tissue, *hypoechoic* – structural change in the tissue of the studied organ, characterized by reduced density and *hyperechogenic* – formation having high density for the passage of ultrasonic waves. One of the challenging aspects of this task is that the focus forms appear in our videos for a very brief period. This paper considers a prognostic model capable of extracting features and taking into account the temporal dimension of ultrasound videos.

**2. Material and method.** The data [3] used in our work was provided by specialists working at the N.N. Petrov National Medicine Research Center of Oncology in Saint Petersburg. This data contained anonymized video recordings from ultrasound examinations carried out on patients at this research center.

For each video recording, the ultrasound diagnostic physician creates a text document describing the state of the liver based on the following

---

*Kamguia Feukwi Herve* – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st093241@student.spbu.ru

*Kozubova Ksenia Vyacheslavovna* – Ultrasound doctor, Doctor, SN.N. Petrov National Medicine Research Center of Oncology: dr.kozubova@yandex.ru

ultrasound parameters: assessment of the structure and echogenicity of the parenchyma, assessment of the vascular architectonics of the organ, identification of signs of diffuse and focal changes, as well as the presence of a focal lesion, and a complete description of the changes according to generally approved standards. Based on this document the videos were classified into two classes: those with focal forms and those without. A brief description of the collected videos is presented in Table 1.

**Table 1.** Description of the data set

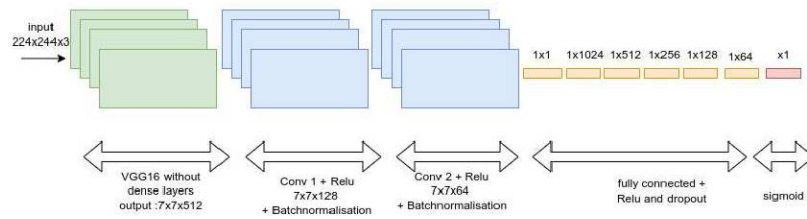
Category	Number of video recordings
Normal liver	17
Diffuse liver changes (fatty hepatitis) without focal formations	8
Benign focal formations (cysts, hemangiomas)	5
Metastasis formations	7

A total of 37 videos were obtained from either the longitudinal scan or the cross-sectional scan imaging.

**3. Data pre-processing.** Only seven videos out of the total in our data set demonstrated focal liver formations. In healthcare analysis, data availability is critical to provide services such as automated diagnostics. Large data sets usually lead to better classifications, while small ones may trigger overfitting [4]. Moreover, in binary classification tasks and machine learning, it is very important to have a balanced set between your classes as much as possible. This is because an unbalanced data set may lead to biased models [4], since if a model learns more from one class than the other it can't generalize the learned weights efficiently. There exist different approaches to overcome the problem of data set size and unevenly balanced data sets. Li et al. proposed the augmenting data approach [5]. Authors in [6] proposed the sample extending attribute (SEA) method. These approaches usually suffer from data replicates and noise [7, 8].

Based on the aforementioned approaches, we decided to use the same number of videos in both classes to solve the problem of an unbalanced data set. Moreover, we used transfer learning [9] to overcome the data availability limitation and this has proven to be efficient. From each video, the maximum number of frames with equal time intervals are extracted and scaled to the model's input shape. Each frame is attributed a tag corresponding to the class of the video from which it was extracted. The frames were then separated into test and validation sets.

**4. Proposed model.** The primary objective was to create a trainable neural network model for differentiating between ultrasonic exam recordings with and without focal forms in the liver. Classification of medical images with the Visual Geometry Group (VGG16) model has proven to be successful, according to [9]. We utilized the VGG16 neural network as a base model, with the last layer's weights frozen, and trained weights on ImageNet images. If we don't do this, the model will only be able to recognize images from the ImageNet data set, which is not what we want. The model was then fine-tuned by adding two convolutional layers (filters of 128 and 64 with kernels of  $3 \times 3$ ), followed by six dense layers with dropout layers in between. The dropout layers in this case are used to assist the model in overcoming the overfitting problem that is common in CNN networks. Figure 1 shows our model. We trained the model using the Adam optimizer and a learning rate of 0.0001. The rest of the parameters for the fitting function was left unchanged. To classify a video, the model reads all its frames and does a prediction per frame. Finally, the class of the video will be determined by the most occurring predicted class among its frames.

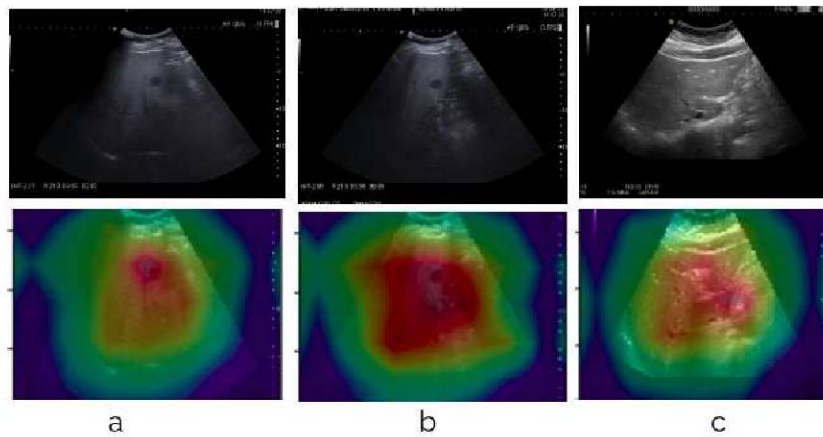


**Figure 1.** Proposed model

**5. Discussion.** The saliency map of some frames extracted from our data set's videos is shown in Figure 2. The color intensity reflects areas of interest in our final layer, which is used to interpret the diagnosis. We achieved 83.33% accuracy (see Table 2), which is a very good result. We successfully classified videos of ultrasound recordings and the model correctly identified areas with possible lesions. The model will be improved by training on more videos.

**Table 2.** Result characteristics

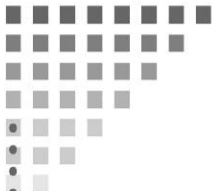
Characteristics	Value
Sensitivity	100%
Specificity	66.67%
Disease prevalence	75%
Accuracy	83.3%

**Figure 2.** Saliency map of metastasis frames (a,b) and non-metastasis frame (c)

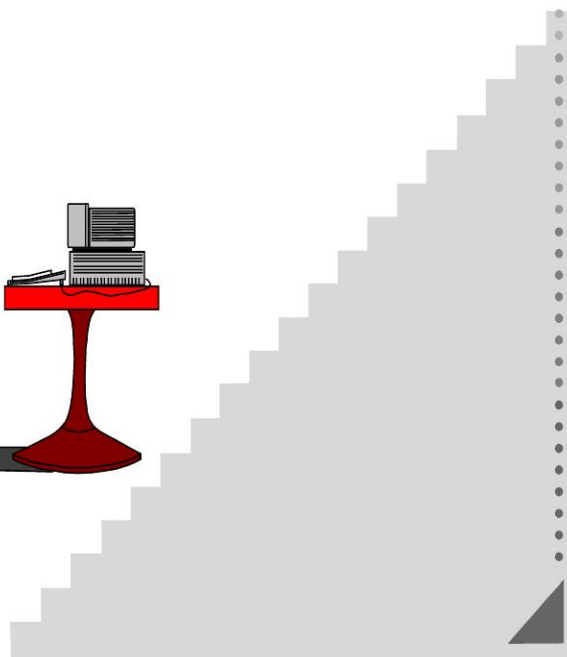
## References

1. To M.N.N., Vu D.Q., Turkbey B., Choyke P.L., Kwak J.T. Deep dense multipath neural network for prostate segmentation in magnetic resonance imaging // *Int. J. Comput. Assist. Radiol. Surg.* 2018. Vol. 13. No 11. P. 1687–1696.
2. Busko E., et al. Comparative assessment of diagnostic value of computed tomography and contrast-enhanced ultrasound in cancer liver metastases diagnosis // *Annals of HPB Surgery.* 2022. Vol. 27. No 1. P. 377–382.
3. Kamguia F., Kozubova K., Busko E., Goncharova A. Creation of a set of video recordings of ultrasound examinations for diagnosing focal formations in the liver in order to train artificial intelligence services // *Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory And Computer Tech.* 2022. No 2. P. 29–30. (in Russian)

4. Hasanin T., et al. Severely imbalanced Big Data challenges: investigating data sampling approaches // *Journal of Big Data*. 2019. Vol. 6. Art. no. 107.
5. Li D., Lin W., Lin L., Chen C., Huang W. The attributetrend similarity method to improve learning performance for small datasets // *Int. Journal Prod. Res.* 2017. Vol. 55. P. 1898–1913.
6. Lin L., Li D., Chen H., Chiang Y. An attribute extending method to improve learning performance for small datasets // *Neurocomputing* 2018. Vol. 286. P. 75–87.
7. Yang J., Yu X., Xie Z., Zhang J. A novel virtual sample generation method based on gaussian distribution // *Knowledge Based System* 2011. Vol. 24. P. 740–748.
8. Lin L., Li D., Chen H., Chiang Y. An attribute extending method to improve learning performance for small datasets // *Neurocomputing* 2018. Vol. 286. P. 75–87.
9. Yadav S., Jadhav S. Deep convolutional neural network based medical image classification for disease diagnosis // *Journal of Big Data*. 2019. Vol. 6. Art. no. 113.



*4. Информационные  
и компьютерные  
технологии*





УДК 004.852

Адамович А. О.

## Алгоритм оценивания параметров за конечное время при настройке весов нейронной сети

*Рекомендовано к публикации доцентом Ведяковой А. О.*

**1. Введение.** Стремительное развитие аппарата искусственных нейронных сетей привело к их повсеместному применению в разных сферах нашей жизни. Однако для создания и поддержки программных продуктов, использующих нейронные сети, необходимо пройти через трудоемкий этап, сопряженный с многочисленными вычислительными затратами, – этап обучения модели, т. е. подбора параметров с целью достижения высокой обобщающей способности.

В настоящее время классическим подходом к обучению нейронных сетей является применение приближенных итеративных методов поиска минимума функции ошибки. Данные алгоритмы показывают хорошую работоспособность, но не гарантируют сходимость за конечное время. Кроме того, для повышения качества модели чаще всего приходится увеличивать объемы используемых данных или делать модель более сложной с точки зрения архитектуры. Подводя итог вышесказанному, можно отметить, что проблема высокой ресурсозатратности еще не решена, а потому представляет собой научный интерес [1].

Целью данной работы является реализация нового метода оптимизации, основанного на результатах современных исследований в области теории управления и идентификации параметров [2], с помощью библиотеки PyTorch [3], а также сравнение его производительности с классическими алгоритмами, применяемыми в настоящее время. Новый метод использует процедуру динамического расширения и смешивания регрессора (ДРСР), главное преимущество которой заключается в возможности перейти от линейной регрессионной модели  $n$ -го порядка к  $n$  регрессиям первого порядка [4, 5]. Следующим шагом является применение алгоритма оценивания па-

---

*Адамович Анатолий Олегович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076264@student.spbu.ru, тел.: +7(904)200-93-42



раметров, работающего за конечное время, для каждой полученной регрессионной модели первого порядка. Таким образом, настоящая работа направлена на рассмотрение возможности применения нового метода оптимизации нейронных сетей, который потенциально обладает более высокой скоростью и точностью сходимости, чем классические алгоритмы.

**2. Методы обучения нейронных сетей.** Самым затратным по времени этапом при разработке приложений с использованием нейронных сетей выступает фаза обучения модели. Ее суть заключается в итеративной корректировке весов сети с целью минимизировать выбранную функцию ошибки  $L$ , которая принимает на вход предсказания модели  $\hat{y} = \hat{y}(X, \hat{\theta})$  и истинные значения  $y = \{y_i\}_{i=1}^m$ :

$$L(y, \hat{y}) \longrightarrow \min_{\hat{\theta}}.$$

Предсказания модели зависят от настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$  и набора данных  $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ ,  $y = \{y_i\}_{i=1}^m$ , на котором модель обучается. Здесь  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T$ . Далее будем рассматривать квадратичную функцию ошибки

$$L(y, \hat{y}) = \text{SSE}(y, \hat{y}) = \|y - \hat{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 \longrightarrow \min_{\hat{\theta}}.$$

Поскольку параметров модели может быть очень много, поиск точного решения задачи минимизации затрудняется. В связи с этим используются аппроксимационные методы (например, [6]), в частности – градиентные. Метод градиентного спуска заключается в итеративном смещении параметров  $\hat{\theta}$  в сторону наискорейшего убывания функции ошибки  $L(y, \hat{y})$  с некоторой скоростью обучения  $\alpha > 0$ :

$$\hat{\theta}(t+1) := \hat{\theta}(t) - \alpha \nabla L(y, \hat{y}),$$

где  $\nabla$  – оператор дифференцирования по вектору  $\hat{\theta}$ . В классическом виде метод градиентного спуска практически не используется. Вместо него применяются различные модификации (например, [7]), разработанные с целью повышения производительности стандартного алгоритма и устранения его недостатков.

### 3. Динамическое расширение и смешивание регрессора.

Далее будем рассматривать шаг оптимизации нейронной сети как решение задачи линейной регрессии:

$$y(t) = \theta_1 f_1(t) + \dots + \theta_n f_n(t) = \langle f(t), \theta \rangle, \quad (1)$$

где  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$  – регрессор (признаковое описание объекта), а  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$  – вектор неизвестных параметров нейронной сети, которые следует оценить. Введем в рассмотрение оператор запаздывания

$$[H_d(\cdot)](t) = \begin{cases} 0, & t \leq d, \\ (\cdot)(t-d), & t > d, \end{cases}$$

где  $d \geq 0$  – величина запаздывания, а на месте  $(\cdot)$  может стоять произвольная функция. Пропустим регрессор  $f(t)$  и зависимую переменную  $y(t)$  через  $n-1$  различных операторов запаздывания:

$$[H_{d_i}(y)](t) = y(t-d_i), \quad [H_{d_i}(f)](t) = \begin{pmatrix} f_1(t-d_i) \\ \vdots \\ f_n(t-d_i) \end{pmatrix},$$

где  $d_i \geq 0, i = \overline{1, n-1}$  – величины запаздывания. Из полученных выражений сформируем матрицы

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1(t-d_1) & \dots & f_n(t-d_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(t-d_{n-1}) & \dots & f_n(t-d_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-d_1) \\ \vdots \\ y(t-d_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрицу вида (2) называют **расширенным регрессором**. Нетрудно заметить, что для формул (2) и (3) справедливо соотношение

$$y(t) = F(t)\theta. \quad (4)$$

Далее сделаем переход к независимому оцениванию параметров нейронной сети. С этой целью домножим систему (4) слева на союзную матрицу расширенного регрессора  $\text{adj}\{F(t)\} = \Delta(t)F^{-1}(t)$ . Тогда она примет вид

$$\Phi(t) := \Delta(t)F^{-1}(t)y(t) = \Delta(t)F^{-1}(t)F(t)\theta = \Delta(t)\theta. \quad (5)$$

В результате применения ДРСР был осуществлен переход от исходной множественной регрессии (1) к системе независимых регрессионных уравнений первого порядка (5), использующих те же неизвестные параметры  $\theta$ . Такой переход дает возможность применять новые методы оценивания, а также позволяет настраивать скорость сходимости для каждого параметра нейронной сети в отдельности.

**4. Метод оценивания параметров за конечное время.** ДРСР позволяет использовать алгоритмы оценивания параметров, работающие за конечное время. Рассмотрим работу метода, описанного в [2] и реализованного в данной работе, для скалярного случая.

Пусть  $\hat{\theta}_i$  – это оценка параметра  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Предполагая, что оцениваемый параметр изменяется непрерывно, можно найти производную

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\theta}_i(t + \Delta t) - \hat{\theta}_i(t)}{\Delta t} = -\frac{\alpha_i}{\Delta t} \nabla L(\hat{\theta}_i). \quad (6)$$

На первом этапе работы алгоритма (см. пункт 3) был осуществлен переход к системе регрессионных уравнений первого порядка, поэтому функция ошибки принимает вид  $L(\hat{\theta}_i) = (\Phi_i(t) - \Delta(t)\hat{\theta}_i(t))$ , где  $\Phi_i(t) = \Delta(t)\theta_i$ . Формулу (6) можно переписать в виде

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = \gamma_i \Delta(t) \left( \Phi_i(t) - \Delta(t)\hat{\theta}_i(t) \right),$$

где  $\gamma_i = -\frac{2\alpha_i}{\Delta t}$ .

Ошибкой приближения оцениваемого параметра является величина  $\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i - \hat{\theta}_i(t)$ . Найдем производную

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma_i \Delta(t) \left( \Delta(t)\theta_i - \Delta(t)\hat{\theta}_i(t) \right) = -\gamma_i \Delta^2(t) \tilde{\theta}_i(t). \quad (7)$$

Уравнение (7) – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его решение имеет вид

$$\tilde{\theta}_i(t) = \tilde{\theta}_i(0)e^{-\int_0^t \gamma_i \Delta^2(\tau) d\tau},$$

где  $C_i$  – произвольная постоянная, зависящая от начального значения  $\tilde{\theta}_i(0)$ . Обозначим  $w_i(t) = e^{-\int_0^t \gamma_i \Delta^2(\tau) d\tau}$ . Тогда, заменяя ошибку приближения по определению, имеем оценку

$$\theta_i = \frac{\hat{\theta}_i(t) - \hat{\theta}_i(0)w_i(t)}{1 - w_i(t)}.$$

**5. Моделирование.** Для реализации нового метода использовалась библиотека PyTorch языка Python. Каждый момент времени  $t$  соответствует шагу оптимизации, т. е. моменту, когда происходит обновление весов. Для проведения численного эксперимента был сгенерирован тренировочный набор данных для задачи регрессии, состоящий из 750 примеров, и тестовый набор, состоящий из 250 примеров. Каждый объект сформированных датасетов описывался 10 признаками. В данные был добавлен гауссовский шум со стандартным отклонением равным 10,5. Сравнение осуществлялось для задачи обучения однослойной нейронной сети. На каждой эпохе обучения производилось оценивание качества модели посредством предсказания целевого значения для тестовых данных и последующего вычисления значения коэффициента детерминации  $R^2$  и значения квадратичной функции ошибки. Результаты исследования приведены в таблице, в которой новый метод обозначен FT.

**Таблица.** Сравнение нового метода оптимизации с классическими

Метод	Скорость обучения, $\alpha$	Число эпох	$R^2$
Adam	0,1	12	0,95
SGD	0,01	2	0,989
FT	0,01	1	0,959

Наилучшая сходимость FT-метода дает повод предполагать, что дальнейшие исследования могут оказаться полезными для решения проблемы высокой ресурсозатратности.

**6. Заключение.** В ходе работы реализован новый метод оценивания параметров нейронных сетей, состоящий из двух этапов: применение ДРСР и использование алгоритма, работающего за конеч-

ное время. Проведен вычислительный эксперимент, по результатам которого можно сделать вывод, что рассмотренный подход обладает высоким потенциалом и может быть использован для дальнейших исследований с целью развития теории оптимизации нейронных сетей.

## Литература

1. Deep's learning diminishing returns. The cost of improvement is becoming unsustainable [Электронный ресурс]: URL:<https://spectrum.ieee.org/deep-learning-computational-cost> (дата обращения: 17.03.23)
2. Ведякова А. О. Методы оценивания параметров гармонических сигналов в режиме реального времени с введением запаздывания: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.01. СПб. 2021. 140 с.
3. Библиотека PyTorch [Электронный ресурс]: URL:<https://pytorch.org/> (дата обращения: 12.03.23).
4. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A. A., Bobtsov A. A. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing // 2016 American Control Conference (ACC). P. 6971–6976.
5. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A. A. et al. New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: continuous and discrete-time cases // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 6. No 5. P. 2265–2272.
6. Клименко И. С., Козынченко В. А., Головкина А. Г. Метод последовательных приближений для построения модели динамической полиномиальной регрессии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 4. С. 487–500.
7. Полякова Л. Н., Халюков А. И. Об одном алгоритме минимизации максимума квадратичных функций // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 78–83.

УДК 519.61

Алцыбеев Г. О.

## Кроссплатформенная библиотека линейной алгебры для языка C++

*Рекомендовано к публикации профессором Буровой И. Г.*

**1. Введение.** Библиотека линейной алгебры AS::LinearAlgebra возникла в процессе научно-исследовательской работы в области численного решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра как первого, так и второго рода [1, 2]. Вычисления осуществлялись в системе Maple, которая кроме богатого функционала, позволяющего решать математические задачи, содержит в себе инструменты для вычислений с высокой точностью. Как известно, Maple представляет собой среду с одноименным предметно-ориентированным языком программирования, обладающим высоким уровнем абстракции. Следует отметить, что из-за этого в ряде случаев теряются многие преимущества языков общего назначения с более низким уровнем абстракции, например скорость вычислений или возможность внесения изменений в стандартный набор функций. Использование языка C++ позволяет избежать этих недостатков.

В настоящее время существует большое количество различных библиотек, написанных на языке C++. К наиболее известным библиотекам линейной алгебры можно отнести MTL [3], Eigen [4], Armadillo [5], IT++ [6] и другие. Имеется возможность решения некоторых задач и в известных фреймворках, таких как Qt. С более объемным списком можно ознакомиться, например, в [7]. Перечисленные разработки являются хорошими инструментами, тем не менее, в них имеется ряд недостатков. Так например, в некоторых библиотеках не реализованы многие функции, которые требуются при решении интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, в некоторых не уделяется внимание распараллеливанию вычислений, в некоторых отсутствует возможность работы с числами с

---

*Алцыбеев Глеб Олегович* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gleb.altysbeev@spbu.ru, тел.: +7(931)531-43-75

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета, проект Pure ID: 104625746

плавающей запятой произвольной длины, что в свою очередь может потребоваться в ряде случаев, например, при решении обратных и некорректно поставленных задач. В связи с этим появилась необходимость разработать собственную, независимую от платформы, библиотеку под названием `AS::LinearAlgebra`. Предлагаемый программный комплекс поможет программистам решать задачи линейной алгебры с использованием длинной арифметики.

**2. Описание библиотеки.** В предлагаемую библиотеку включены подпрограммы для построения и управления матрицами и векторами, вычисления стандартных операций, запроса результатов и решения задач линейной алгебры. В частности, можно выделить следующие возможности. В библиотеке присутствуют процедуры для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): `GaussLinearSolve` – реализация метода Гаусса, `ThomasLinearSolve` – реализация метода прогонки, `IterationLinearSolve` – реализация метода простой итерации и другие. Кроме стандартных методов, здесь также присутствуют реализации подходов к решению СЛАУ с плохо обусловленными матрицами (см. [8, 9]): `RegularizationLinearSolve`, `RyabovRegularizationLinearSolve` и т. д. Также можно выделить некоторые процедуры, позволяющие решать другие задачи, например: `EigenVectors`, `EigenValues` – для нахождения собственных векторов и значений соответственно, `ConditionNumber` – для нахождения числа обусловленности, `JordanForm` – для нахождения жордановой формы матрицы и т. д. Основные возможности библиотеки аналогичны возможностям пакета `LinearAlgebra` из системы `Maple`.

Библиотека `AS::LinearAlgebra` состоит из следующих модулей: `AS::Matrix`, `AS::Vector`, `AS::Digits`, `AS::Operations`, `AS::ParallelOperations` и `AS::LoggerLite`.

Реализация класса матриц в предлагаемой библиотеке представлена в модуле `AS::Matrix`, векторов – в модуле `AS::Vector`. Для данных классов выполнены перегрузки операторов.

В модуле `AS::Operations` реализованы последовательные операции линейной алгебры как итерационные, так и прямые численные методы. При разработке модуля использовались некоторые алгоритмы и подходы из [10, 11].

В модуле `AS::ParallelOperations` содержатся варианты реализаций численных методов с распараллеливанием вычислений с использованием технологии `OpenMP`. При разработке модуля использовались

некоторые алгоритмы и подходы из [12, 13].

Имеется возможность производить вычисления с числами, содержащими в мантиссе произвольное количество знаков. Для этого в модуле `AS::Digits` представлены два класса `IntNumber` – для целочисленных вычислений и `RealNumber` – для вычислений с числами с плавающей запятой. Стоит отметить, что возможность использовать стандартные типы данных также присутствует.

В библиотеке имеется вспомогательный модуль `AS::LoggerLite`, который отвечает за вывод информационных сообщений в консоль.

Библиотека `AS::LinearAlgebra` написана на языке C++ стандарта ISO/IEC 14882:2014(E) (C++14), с использованием системы сборки CMake (версия 3.14).

**3. Использование библиотеки.** Включение библиотеки в проект осуществляется с использованием системы сборки CMake и программы `git`. Сначала библиотека включается в проект с помощью `git` в качестве подмодуля:

```
git submodule add https://<...>/ASLinearAlgebra.git
```

После этого, в файле `CMakeList.txt` добавляются следующие команды:

```
add_subdirectory(ASLinearAlgebra)
target_link_libraries(${PROJECT_NAME} ASLinearAlgebra)
```

Далее в необходимом файле `*.cpp` или `*.h` подключается заголовочный файл библиотеки:

```
#include <ASLinearAlgebra.h>
```

Стоит отметить, что представленная библиотека имеет свою документацию, сгенерированную на основании комментариев с помощью программы `Doxygen`.

**4. Практическое применение.** Как отмечалось во введении, библиотека `AS::LinearAlgebra` создавалась в контексте научно-исследовательской работы в области решения интегральных уравнений. Приведем результаты численных решений интегральных уравнений на языке C++ с применением представленной библиотеки и сравним с результатами вычислений в математическом пакете `Maple`. Решения выполнены согласно методам, представленным в [1, 2].



Характеристики ЭВМ, на которой осуществлялись вычисления: процессор – 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700H, тактовая частота 2.30 GHz; оперативная память – DDR5 16.0 GB, скорость 4800 MHz. Программное обеспечение: Maple 2015.0; C++14, Cygwin: gcc/g++ 11.3.0-1, CMake 3.23.2-1, make 4.4.0.90-2.

**4.1. Пример 1.** Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода [14]

$$y(x) - \int_0^1 |x-s|^{-1/2} y(s) ds = f(x), \quad x \in [0, 1].$$

Точное решение  $y(x) = x$ . Правая часть  $f(x)$  строится по ядру и точному решению. Рассмотрим решения на равномерной сетке с количеством сеточных интервалов  $n = 8, 16, 32$  с помощью полиномиальных и экспоненциальных сплайнов.

Разработанная библиотека позволяет задать произвольное количество знаков в мантиссе (положим равным 15), используя разработанный тип данных RealNumber. В таблице 1 представлено среднее время решения задачи.

**Таблица 1.** Среднее время вычислений

$n$	$\varphi(x) = x$		$\varphi(x) = \exp(x)$		$\varphi(x) = \exp(-x)$	
	Maple, с	C++, с	Maple, с	C++, с	Maple, с	C++, с
8	0,26247	0,00003	0,59166	0,00003	0,52187	0,00002
16	2,49167	0,00009	6,62501	0,00011	6,58367	0,00010
32	11,00413	0,00050	15,61102	0,00051	15,00413	0,00053

**4.2. Пример 2.** Рассмотрим результат решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода [15]

$$y(x) + \int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{|x-s|}} ds = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Точное решение  $y(x) = \sqrt{x}$ . Рассмотрим решение на равномерной сетке с  $n = 16, 32, 64$ . Аналогично примеру 1, количество знаков в мантиссе числа положим равным 15. В таблице 2 представлено среднее время решения задачи.

**Таблица 2.** Среднее время вычислений

$n$	$\varphi(x) = x$		$\varphi(x) = \exp(x)$		$\varphi(x) = \exp(-x)$	
	Maple, с	C++, с	Maple, с	C++, с	Maple, с	C++, с
16	0,23126	0,00002	0,75833	0,00002	0,93753	0,00003
32	2,38226	0,00009	6,08433	0,00013	8,99693	0,00017
64	15,82400	0,00059	18,22286	0,00071	21,60200	0,00077

**5. Заключение.** Скорость вычислений средствами представленной библиотеки существенно превышает скорость вычислений в системе Maple. Также библиотека показывает результаты не хуже, чем библиотеки для C++ приведенные во введении. Объем представленной библиотеки составляет 7295 строк кода. Отметим, что по мере необходимости библиотека может дополняться новыми модулями и возможностями. Библиотека может применяться независимо от платформы, в частности, возможно ее использование на семействе операционных систем Windows и Linux. В настоящее время библиотека AS::LinearAlgebra не является проектом с открытым исходным кодом.

## Литература

1. Burova I. G., Alcybeev G. O. Application of splines of the second order approximation to Volterra integral equations of the second kind. Applications in systems theory and dynamical systems // International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing. 2021. Vol. 15. P. 63–71.
2. Burova I. G., Alcybeev G. O. Solution of integral equations using local splines of the second order // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2022. Vol. 17. P. 258–262.
3. Siek J. G., Lumsdaine A. The matrix template library: A generic programming approach to high performance numerical linear algebra // ISCOPE 1998: Computing in Object-Oriented Parallel Environments. 2002. P. 59–70.
4. Guennebaud G. Eigen: A C++ linear algebra library [Электронный ресурс]: URL:[http://downloads.tuxfamily.org/eigen/eigen\\_CGLibs\\_Giugno\\_Pisa\\_2013.pdf](http://downloads.tuxfamily.org/eigen/eigen_CGLibs_Giugno_Pisa_2013.pdf) (дата обращения: 15.03.23).
5. Sanderson C. Armadillo: An open source C++ linear algebra library for fast prototyping and computationally intensive experiments // Technical report, NICTA. 2010. 16 p.
6. Lima C. H. M., Stancanelli E. M., Rodrigues E. B., Maciel J. M. S., Cavalcanti F. R. P. A Software development framework based on C++ OOP language for link-level simulation tools // VI International telecommunications symposium (ITS2006). 2006. P. 597–602.

7. A list of open source C++ libraries [Электронный ресурс]: URL:<https://en.cppreference.com/w/cpp/links/libs> (дата обращения: 15.03.23).
8. Burova I. G., Kalnitskaia M. A., Malevich A. V. On the numerical solution of system of linear algebraic equations with positive definite symmetric ill-posed matrices // WSEAS Transactions on Mathematics. 2018. Vol. 17. P. 13–19.
9. Лебедева А. В., Рябов В. М. О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). № 4. С. 619–626.
10. Dongarra J. J., Duff I. S., Sorensen D. C., Vorst H. A. Numerical linear algebra on high-performance computers. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1987. 182 p.
11. Wilkinson J. H., Reinsch C. Handbook for automatic computation. Volume II: Linear algebra. Berlin: Springer, 1971. 449 p.
12. Гергель В. П. Теория и практика параллельных вычислений. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. 501 с.
13. Старченко А. В., Берцун В. Н. Методы параллельных вычислений. Томск: Изд-во Томского университета, 2013. 223 с.
14. Lakestani M. Numerical solution for the weakly singular Fredholm integro-differential equations using Legendre multiwavelets // Journal of Comp. and Appl. Math. 2011. Vol. 235. P. 3291–3303.
15. Mori M., Nurmuhhammad A. Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernel based on the DE-Sinc method // Japan J. Indust. Appl. Math. 2008. Vol. 25. P. 165–183.

УДК 004.931.4

**Бабкина А. В.**

## **Распознавание нот фортепианной музыки с использованием машинного обучения**

*Рекомендовано к публикации доцентом Козыньченко В. А.*

**1. Введение.** Тема исследования относится к классу задач анализа и распознавания музыкальной информации с применением вычислительных средств (MIR – Music Information Retrieval). Данные исследования необходимы для разработки и построения автоматизированных систем поиска, обработки, хранения и доступа к музыкальным данным.

Задачами данной работы являлись разработка алгоритма, позволяющего преобразовать звуковую запись звучания фортепиано в последовательность распознанных нот и аккордов с продолжительностью их звучания, проведение сравнения различных архитектур нейронной сети и способов их обучения.

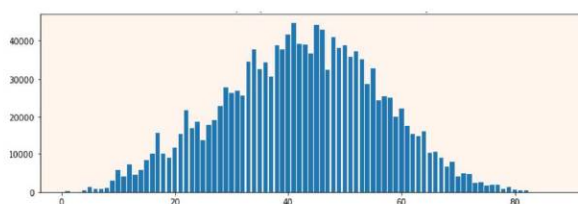
На данный момент задача надежного распознавания нот по звучанию музыкальных инструментов полностью не решена. Ее решение может быть полезным при создании музыкальных произведений, записи музыкальных импровизаций, для автоматического распознавания передаваемых мелодий или использоваться как вспомогательный инструмент при обучении в музыкальных школах [1–3]. Существуют также программные продукты для транскрибирования музыки в ноты [4, 5]. В статье [1] использовалась модель BiLSTM в конструкции encoder-decoder, а в качестве входных данных использовались Mel и CQT спектрограммы. В статье [2] для детектирования нот использовалась сверточная нейронная сеть, на вход которой подавались спектрограммы CQT. В статье [3] приведен обзор современных методов и задач обработки музыкальной информации.

В данной работе используется алгоритм распознавания нот фортепианной музыки на основе применения спектрального анализа и искусственных нейронных сетей.

---

*Бабкина Анна Владимировна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076184@student.spbu.ru, тел.: +7(904)331-72-88

**2. Набор данных.** Набор данных был взят из датасета SMD (Saarland Music Data) [6]. Он включает в себя 52 звуковые дорожки, представленные синхронными файлами в форматах midi и mp3 общим объемом 410 Мб. Набор данных состоял из отрывков фортепианных произведений таких композиторов, как Рахманинов, Бетховен, Бах, Моцарт и др. Общая продолжительность звучания составляет 4 ч. 45 мин. В тренировочную выборку вошла 31 композиция, в выборку текущего контроля – 11 композиций, в выборку проверки работы сети – 10 композиций. Распределение нот в проверочном наборе данных представлено на рис. 1.



**Рис. 1.** Распределение нот в тестовой выборке

Множества тренировочных данных и данных текущего контроля создавались двумя различными способами. При первом способе все музыкальные фрагменты в обучающих пакетах (batches) брались последовательно во времени. При втором способе было введено перемешивание данных, в результате которого в каждый пакет входили обучающие фрагменты, выбранные случайным образом из всех музыкальных произведений обучающего множества.

**3. Алгоритм решения.** Решение поставленной задачи складывается из двух этапов – выделение значимых признаков звукового сигнала и их последующий анализ с принятием решения. Для принятия решения существует два основных подхода: на основе настраиваемых вручную решающих правил для отдельных признаков или с использованием нейронных сетей.

В данной работе использовался второй подход. На первом этапе производился спектральный анализ музыкальной информации, а на втором – классификация нот с использованием нейронной сети.

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 2. На вход сети подавались спектры сигналов, а на выходе сети получалась развертка

нот во времени (piano roll). Выход сравнивался с целевыми значениями, в результате чего вычислялась ошибка обучения, которая в дальнейшем минимизировалась.

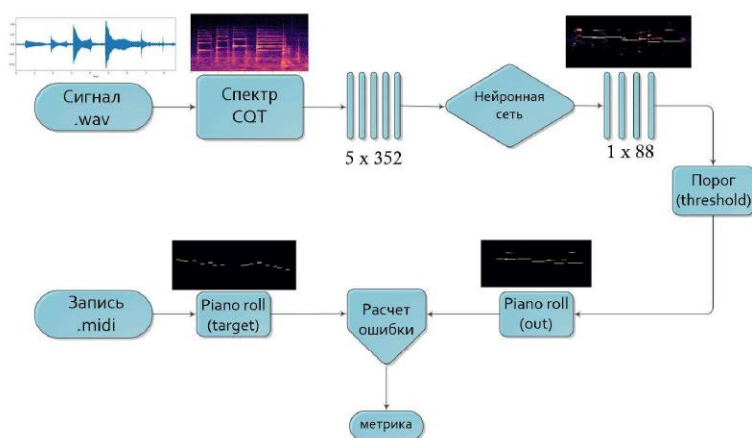


Рис. 2. Блок-схема алгоритма

Для получения спектра сигнала использовалось CQT (constant Q-transform) преобразование с логарифмической шкалой частот и с фильтрами равной добротности [7]. Для его расчета использовалась библиотека Librosa [8]. Частота дискретизации сигнала составляла 22050 Гц. Построение спектрограммы осуществлялось с помощью выборок сигнала, полученных скользящим окном анализа с длиной 2048 отсчетов и сдвигом на 512 отсчетов. После расчета CQT происходила нормализация логарифмической спектрограммы и приведение ее значений к диапазону от 0 до 1.

Для получения целевой развертки нот использовались синхронные записи в формате midi, преобразованные с использованием библиотеки pretty\_midi [9].

**3.1. Построение нейронной сети.** В ходе работы рассмотрено три различных архитектуры нейронной сети:

1. Однослойная полносвязная сеть – one\_layer\_model – использует 88 нейронов с функцией активации сигмоида.
2. Сверточная нейронная сеть – conv\_model. Сеть состоит из слоя Conv2D (50 слоев, размер ядра  $5 \times 48$ ), функция активации tanh, Dropout (0.5), MaxPooling2D (окно (1,2)) и двух полно-

связных слоев Dense (528 выходных нейронов с функцией активации relu и 88 нейронов с функцией активации sigmoid).

3. Сверточная нейронная сеть с применением механизма долгой краткосрочной памяти LSTM (Long short-term memory) – conv\_LSTM\_model. Сеть состоит из сверточного слоя, аналогичного сети 2, слоя LSTM (размерность выходного пространства 128) и полносвязного выходного слоя (88 нейронов, функция активации sigmoid).

На вход каждой модели подавалась матрица, состоящая из 5 временных срезов спектра по 352 частотных канала, на выходе получался вектор, состоящий из 88 классов (нот). Дополнительно рассматривался еще один вариант однослойной полносвязной сети с одним временным срезом спектра. При обучении, с помощью стохастического градиентного спуска (SGD – Stochastic gradient descent), минимизировалась бинарная кросс-энтропия. После обучения производилась обработка выходного сигнала развертки нот, малые амплитуды которого рассматривались как помехи и обнулялись.

**4. Анализ полученных результатов.** Для каждой архитектуры нейронной сети производилось обучение с применением перемешивания обучающих множеств внутри пачки и без него. Также для однослойной модели производилось сравнение результатов после 110 эпох, в зависимости от количества срезов входного спектра. Результаты приведены в таблице.

Таблица 1. Результаты

Без перемешивания				
Модель	Эпохи	recall	precision	F1
one_layer_model (5 срезов спектра)	110	52,1	60,0	55,8
conv_model	10	50,7	55,1	52,8
conv_LSTM_model	15	56,7	44,1	49,6
С перемешиванием				
Модель	Эпохи	recall	precision	F1
one_layer_model (1 срез спектра)	110	42,8	58,3	49,4
one_layer_model (5 срезов спектра)	110	52,1	61,1	55,7
conv_model	10	57,2	53,5	55,3
conv_LSTM_model	15	63,1	54,3	58,4

Из таблицы видно, что для однослойной полносвязной модели нейронной сети применение перемешивания обучающего множества дает прирост показателя точности на 1,1%, т. е. вероятность правильного ответа увеличивается. Для сверточной модели и для сверточной модели с применением механизма долгой краткосрочной памяти наблюдается прирост по всем трем показателям. Также стоит отметить, что при применении данных моделей сеть начинает распознавать ноты на концах диапазона, в отличие от однослойной сети, в которой они не распознаются.

Для однослойной сети также видно, что увеличение числа временных срезов спектра дает прирост показателей по всем трем метрикам: recall – на 8,4%, precision – на 2,8%, F1 – на 6,3%.

**4.1. Метрики.** Для оценки точности моделей использовались метрики recall (полнота), precision (достоверность) и F1-score (среднегармоническое первых двух). Метрики вычислялись для каждой из 88 нот отдельно и для всех нот одновременно суммированием одинаковых событий. На рис. 3–5 приведены результаты для модели conv\_LSTM\_model (общее значение показано горизонтальной линией).

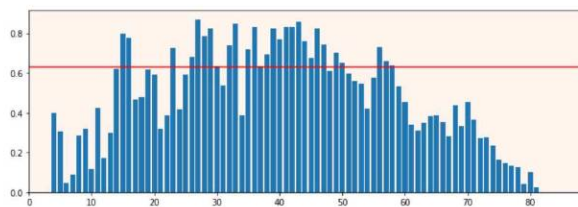


Рис. 3. Recall для каждой ноты

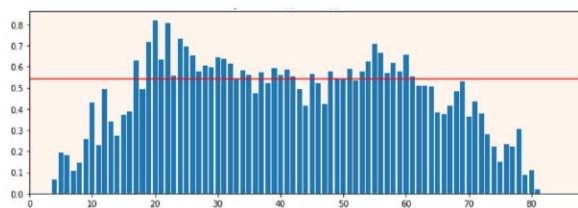


Рис. 4. Precision для каждой ноты



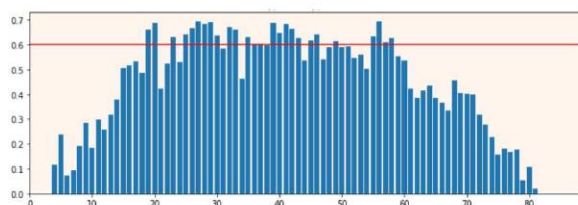


Рис. 5. F1-score для каждой ноты

**5. Выводы.** Лучшими показателями при классификации нот обладает модель, включающая в себя сверточную нейронную сеть с механизмом долгой краткосрочной памяти. Применение перемешивания в наборе обучающих данных и использование нескольких срезов спектра позволяет сети давать более точные результаты.

При решении поставленной задачи возникает ряд трудностей. Проблема достижимой точности результатов тесно связана с природой обучающих данных. Музыкальный сигнал записан акустически, в концертном зале, а midi-файлы отражают лишь моменты нажатия и отпускания клавиш пианистом на фортепиано. Они не учитывают силу нажатия и время затухания акустического сигнала. Поэтому midi-файлы не содержат полной информации о звуковых данных. И наоборот, звуковой сигнал не содержит полной информации о моменте отпускания клавиши пианистом, так как струна возбуждается ударом молоточка, в момент нажатия клавиши и продолжает звучать независимо от момента отпускания.

Следует учитывать, что результаты получены для полифонической музыки при игре двумя руками, аккорды которой перекрываются во времени и содержат несколько нот каждый. А каждая нота содержит от одной до десяти гармошек.

Дополнительной трудностью разработки алгоритмов анализа музыкальных произведений являются несбалансированные наборы тренировочных данных. Например, ноты первой октавы встречаются в музыкальных композициях намного чаще, чем ноты четвертой октавы или контроктавы, что приводит к лучшему обучению для центральных нот, чем на краях диапазона.

## Литература

1. Cheuk K. W., Luo Y-J., Benetos E., Herremans D. The effect of spectrogram reconstruction on automatic music transcription: an alternative approach to improve transcription accuracy // 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR). 2020. P. 9091–9098.
2. Cong F., Liu S., Guo L., Wiggins G. A. et al. A parallel fusion approach to piano music transcription based on convolutional neural network // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). 2018. P. 391–395.
3. Moysis L., Iliadis L. A. et al. Music deep learning: deep learning methods for music signal processing – a review of the state-of-the-art // IEEE Access. 2023. Vol. 11. P. 17031–17052.
4. Widisoft [Электронный ресурс]: URL:<http://www.widisoft.com/english/samples.html> (дата обращения: 15.03.23).
5. Piano2notes [Электронный ресурс]: URL:<https://piano2notes.com/> (дата обращения: 15.03.23).
6. Saarland Music Data (SMD) [Электронный ресурс]: URL:[https://resources.mpi-inf.mpg.de/SMD/SMD\\_MIDI-Audio-Piano-Music.html](https://resources.mpi-inf.mpg.de/SMD/SMD_MIDI-Audio-Piano-Music.html) (дата обращения: 15.03.23).
7. Schorkhuber C., Klapuri A. Constant-Q transform toolbox for music processing // 7th Sound and Music Computing Conference (SMC 2010). 2010. P. 3–64.
8. McFee B., Raffe C., Liang D. et al. Librosa: Audio and music signal analysis in Python // 14th Python in Science Conference (SCIPY 2015). 2015. P. 18–25.
9. Raffel C., Ellis D. P. W. Intuitive analysis, creation and manipulation of mididata with pretty\_midi // ISMIR late breaking and demo papers. 2014. P. 84–93.

УДК 004.912

**Береснев В. С.**

## **Генерация текстов естественного и программного языка**

*Рекомендовано к публикации доцентом Козыниченко В. А.*

**1. Введение.** Каждый день мы сталкиваемся с необходимостью написания каких-либо сообщений, текстов, различных работ, что часто сопровождается помощью автоматки. Например, современное программное обеспечение для обмена сообщениями предлагает возможные следующие слова, электронные письма можно начать с помощью автоматически подобранных вариантов ответа, а эссе улучшаются с помощью предложенных орфографических и грамматических правок.

Одним из последних достижений в области генерации текста является использование нейронных сетей, обучающихся на больших массивах данных, что значительно улучшает восприятие текста, создаваемого машиной. Однако существующие системы нуждаются в совершенствовании по многим направлениям, включая генерацию текстов, выходящих за рамки английского языка, и написание все более длинных текстов.

В данной работе рассматривается задача создания текстов, представляющих собой некоторое подобие сценария, сочетающего в себе как естественный русский язык, так и программный язык. Такой выбор сделан по нескольким причинам. Во-первых, сочетание настолько различных языков будет хорошим иллюстративным примером учитывания генератором различных языковых и синтаксических норм в пределах одного текста. Во-вторых, так как полученный текст представляет собой некий сценарий и программный код, то он будет содержать последовательности и связи слов/предложений друг с другом.

**2. Генерация текста.** В настоящее время существует много различных способов создания текстов, начиная с методов, использующих марковские цепи, и заканчивая нейронными сетями, специально обученными для выполнения задач обработки языка. Одними из

---

*Береснев Виктор Сергеевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076239@student.spbu.ru, тел.: +7(922)607-89-62

наиболее новых алгоритмов являются BERT и GPT (а также всевозможные их модификации), построенные на основе сложных трансформеров.

BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers) – нейронная сеть, в основе которой лежат кодировщики трансформеров. При этом BERT является автокодировщиком. На каждом уровне кодировщика используется внимание, обращенное с двух сторон, что позволяет рассматривать модель в контексте обрабатываемого элемента с обеих сторон и, таким образом, более точно определять его значения [1].

GPT (Generative Pre-trained Transformer) – алгоритм обработки естественного языка от OpenAI, насчитывающий на данный момент уже несколько поколений. В настоящее время это самая большая и самая передовая языковая модель в мире. По мнению разработчиков, модель может быть использована для решения любых задач на английском языке [2], но это не значит, что ее невозможно использовать на других языках, например, модель ruGPT-3, недавно представленная SberDevices, показывает хорошие результаты при создании текстов на русском языке [3]. Алгоритм GPT – это авторегрессионная генеративная языковая модель на архитектуре трансформер, которая предсказывает следующее слово в предложении. Это не просто языковая модель, как BERT, это генератор текста. Достаточно дать ей начало фразы в качестве ввода, а затем она дополнит ее слово за словом.

**3. Практическая часть.** В качестве практического применения выбор пал на модель GPT-2. Это обусловлено относительной простотой использования и качественными результатами данной модели. Реализация произведена спомощью методов для трансформеров, представленных Hugging Face [4].

Так же будут использоваться различные языковые модели, в том числе ruGPT3 от SberDevices, предварительно обученная на русскоязычном массиве данных.

В качестве генерируемого текста выбраны скрипты (сценарии) для визуальных новелл, а именно, скрипты на движке Ren'Py [5], и в качестве примера текста полный набор сценариев игры «Бесконечное лето», разработанной Soviet Games [6]. Тем самым в качестве результата получено некое подобие «модификации» для этой игры.

Обучение производилось с помощью сервиса Google Colab.

**3.1. Подготовка набора данных.** В качестве датасета (набора данных) для GPT-2 выступает файл формата .txt (возможны и некоторые другие), включающий в себя образцы текстов-примеров для обучения и последующей генерации.

Первым этапом являлось извлечение всех файлов скриптов, отвечающих за сценарий из игры, и их частичное редактирование. Из изначального кода были убраны команды, отвечающие за анимацию в некоторых моментах, условия, изменение значений переменных в процессе игры и другие. Это сделано для упрощения обрабатываемого текста и облегчения предсказания слов моделью.

Обычно на данном этапе одним из шагов также является добавление в текст специальных слов/символов, указывающих на начала и концы текстов, входящих в файл. Этот этап был пропущен в связи с тем, что в скриптах уже есть подобные слова, например, слово «label» показывает на начало нового эпизода/главы, а слово «scene» – на смену места действия/сцены/локации.

#### Пример скрипта

```
scene bg ext_square_night_party
with dissolve
show mt normal dress at center with dissolve
window show
mt "Чего не танцуешь?"
me "Не хочется что-то..."
show mt smile dress at center with dspr
mt "Ну, дело твоё."
"Она хитро улыбнулась."
mt "Тогда у меня для тебя есть занятие получше!"
me "Например?"
"Сейчас мне любое занятие казалось лучше, чем танцы."
```

Как видно из примера, скрипты представляют собой сочетание команд программного языка, напоминающего Python, и естественного русского языка, описывающего реплики, мысли и действия персонажей.

**3.2. Дообучение на необходимой задаче.** Вначале необходимо установить модель GPT-2 для дообучения. Языковая модель ruGPT3Small (125М параметров) является подходящим вариантом, так как для текста с таким объемом, как в данном случае, обучение должно занять не слишком много времени и показать относительно

неплохие результаты. Также нужно заранее загрузить свой файл с набором данных.

Следующим этапом является обучение. В примерах, представленных Hugging Face [4], оно реализовано с помощью весьма простых для использования команд.

На данный момент модель дообучалась на протяжении нескольких эпох. Каждый запуск продолжения тренировки включал в себя дополнительное дообучение ранее полученной модели.

После тренировки (и в процессе) можно генерировать тексты, что тоже не очень сложно реализовано в примерах из [4].

**4. Результаты.** После тренировки было отмечено несколько особенностей при работе с естественным и программным языками.

**4.1. Естественный язык.** Так как изначально использовалась `ruGPT3`, в текстах присутствует понятность и некая осмысленность. Более интересным представляется то, что связность именно естественного языка сохраняется и в разных строках, разбавленных кодом, и не теряется из-за наличия, вклиненного внутрь программного языка. В случае же `GPT-2 Small` заметно очень большое количество ошибок в русских словах, что связано с тем, что оригинальная версия была преимущественно обучена на английском языке, несмотря на полученные лучшие результаты оценки.

**4.2. Программный язык.** Обучение созданию рабочего кода произошло относительно быстро, так как практически в самом начале уже получались частично работоспособные скрипты (они нуждались в некоторых корректировках). В процессе тренировки генерируемый код становился все лучше: правильнее подписывались персонажи, говорящие реплики, и вызывались их изображения с подходящими эмоциями и одеждой; правильные фоны с соответствующими им звуками окружающей среды и музыкой; код нуждался в меньшем количестве корректировок. Незначительные ошибки, как например, неправильное название фона/музыки или недостающий символ «"», хоть редко, но все еще встречаются и нуждаются в ручном исправлении. В случае обычной `GPT-2 Small` можно отметить, что в плане кода модель справляется лучше, чем основанная на `ruGPT3`, что указывает «склонность» модели к более известным ей словам.

Также в модели на основе `ruGPT3` при слишком долгой тренировке наблюдается переобучение и результаты оценки становятся немного (но не критично) хуже.

### Пример сгенерированного текста

```
scene bg ext_square_night
with dissolve
window show
"Я вышел на площадь и сел на лавочку."
"В голове было совершенно пусто."
"Я просто сидел и смотрел на памятник."
"И тут меня словно кто-то схватил за руку."
"Я обернулся и увидел Лену."
show un normal pioneer at center with dissolve
un "Привет..."
"Она улыбнулась."
me "Привет..."
```

Построенная модель (на основе ruGPT3) доступна по ссылке [7].

### Литература

1. Devlin J., Chang M., Lee K., Toutanova K. BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // arXiv preprint arXiv:1810.04805v2, 2019.
2. Radford A., Wu J., Child R., Luan D., Amodei D., Sutskever I. Language Models are Unsupervised Multitask Learners, 2019. 24 p.
3. Russian GPT-3 models [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/ai-forever/ru-gpts> (дата обращения: 10.03.2023).
4. Transformers – Hugging Face [Электронный ресурс]: URL: <https://huggingface.co/docs/transformers/> (дата обращения: 10.03.2023).
5. The Ren'Py Visual Novel Engine [Электронный ресурс]: URL: <https://www.renpy.org/> (дата обращения: 10.03.2023).
6. Soviet Games. Everlasting Summer (Бесконечное лето) [Электронный ресурс]: URL:<https://everlastingsummer.su/ru/> (дата обращения: 10.03.2023).
7. VvVitekVvV. Everlasting Summer Small Model [Электронный ресурс]: URL:[https://huggingface.co/VvVitekVvV/everlasting\\_summer\\_small](https://huggingface.co/VvVitekVvV/everlasting_summer_small) (дата обращения: 10.03.2023).

УДК 681.5.015

Ганаева Д. Д.

## Прогнозирование временных рядов с использованием метода реконструкции нелинейных динамических систем

*Рекомендовано к публикации доцентом Головкиной А. Г.*

**1. Введение.** Прогнозирование – это одна из самых распространенных бизнес-задач, которая помогает принимать обоснованные решения о планировании производства и управлении ресурсами, а также предоставляет ориентир для долгосрочного планирования. Существует широкий спектр количественных методов прогнозирования, включая декомпозиционные, регрессионные, скользящее среднее, экспоненциальное сглаживание, ARIMA и т. д. [1].

В данной статье предлагается подход, комбинирующий уже существующие методы с прогнозированием на основе восстановленных нелинейных динамических систем. Реконструкция нелинейных динамических систем по имеющимся измерениям также является центральной проблемой во многих дисциплинах, так как наличие математической модели в форме дифференциальных уравнений позволяет решать прикладные задачи, требующие информацию о поведении процесса при различных воздействиях и условиях. В силу возрастающей доступности данных измерений, проблема идентификации динамических систем по ним может решаться различными методами, например, [2].

В данной статье исследуется применение метода реконструкции динамических систем, предложенного в [3], для прогнозирования на реальных данных телекоммуникационной сети. Результаты сравнивались с метриками, полученными в [4] с помощью нейронной сети GRU.

**2. Постановка задачи.** В работе рассматривается набор данных «Abilene» [5], описывающий передачу трафика в телекоммуникационной сети, состоящей из 12 узлов. Значение трафика (Гбит/с)

---

*Ганаева Дарья Дмитриевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ganaeva.dd@mail.ru, тел.: +7(911)004-31-84

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, проект ID 94029367



фиксировалось между каждой парой узлов с дискретностью 5 минут. Набор данных представляет собой таблицу, состоящую из 30 столбцов и 48384 строк.

Задача состоит в идентификации модели динамики телекоммуникационной сети по временным рядам трафика между её узлами и прогнозировании сетевой нагрузки для заданного промежутка времени в будущем.

**3. Метод прогнозирования временных рядов.** Временные ряды исследуемого набора данных помимо динамической составляющей, которая может быть описана системой дифференциальных уравнений, содержат стохастическую компоненту, в том числе включающую в себя шум. В связи с этим для прогнозирования предлагается подход, состоящий из четырех последовательных шагов: декомпозиция временного ряда на динамическую и статистическую составляющие; построение динамической модели; построение статистической модели; комбинация результатов прогнозирования двух моделей.

### 3.1. Декомпозиция данных.

В качестве метода декомпозиции временных рядов был использован метод сингулярного спектрального анализа (SSA) [6], основанный на преобразовании одномерного временного ряда в многомерный ряд с последующим сингулярным разложением полученной матрицы. На рис. 1 приведён пример декомпозиции одного из временных рядов «Abilene».

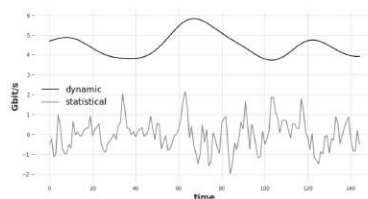


Рис. 1. Декомпозиция временного ряда

**3.2. Идентификация динамической системы.** Сеть «Abilene» содержит 30 связей между узлами, поэтому восстановление динамической системы такой размерности является нереализуемым на практике. Чтобы преодолеть эту сложность, предлагается схема реконструкции системы с предварительной группировкой фазовых переменных. Данный подход также соответствует предположению об ограниченности влияния трафика между двумя узлами на остальные узлы сети.

Группировка осуществляется на основе корреляции данных с ис-

пользованием метода, описанного в [7]. После этого коррелирующие временные ряды, отнесенные к одной группе, описываются одной динамической системой с полиномиальной правой частью [3]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \sum_{k=0}^N P^k \mathbf{X}^{[k]}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор, описывающий состояние системы в момент времени  $t$ ,  $\mathbf{X}^{[k]}$  – степень Кронекера  $k$ -го порядка для вектора  $\mathbf{X}$ ,  $N$  – степень правой части системы,  $P^k$  – матрицы коэффициентов.

Указанный метод был дополнен с учётом предположения, что трафик, проходящий между одной парой узлов, влияет на трафик, проходящий между другой парой, с некоторой задержкой. Следовательно, система (1) в правой части содержит полиномиальные компоненты с  $\mathbf{X}(t - \tau)$ , где параметр запаздывания  $\tau$  подбирался экспериментально. Прогнозирование динамической компоненты временного ряда осуществлялось с помощью численного решения системы (1). На рис. 2 приведены результаты для одной из групп рядов сети «Abilene». Вертикальной чертой разграничены тренировочные и тестовые данные.

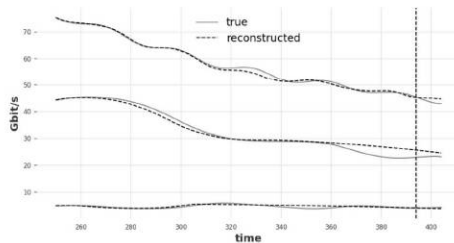
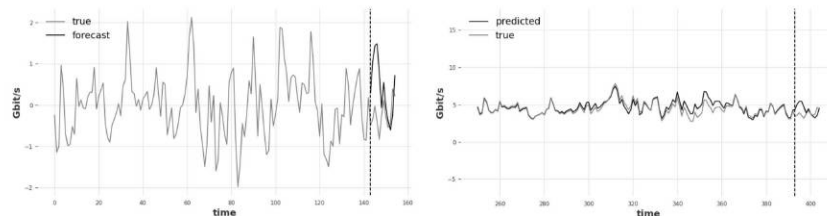


Рис. 2. Прогнозирование динамической составляющей для одной группы рядов

Результаты для одной из групп рядов сети «Abilene». Вертикальной чертой разграничены тренировочные и тестовые данные.

**3.3. Аппроксимация статистической моделью.** Для аппроксимации и прогнозирования статистических составляющих временных рядов был использован метод экспоненциального сглаживания [1]. Прогнозы, полученные с использованием этого метода, представляют собой средневзвешенные значения прошлых наблюдений, при этом их веса экспоненциально уменьшаются по мере устаревания наблюдений. На рис. 3 слева приведён пример прогнозирования статистической составляющей одного из временных рядов.

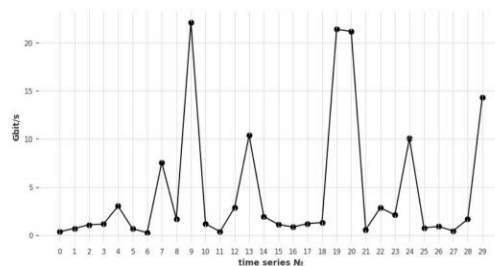
**3.4. Комбинация моделей.** Для прогнозирования поведения трафика необходимо суммировать в каждый момент времени численные решения динамической системы (1) и спрогнозированные ста-



**Рис. 3.** Прогнозирование статистической компоненты и суммарный прогноз с добавлением динамической компоненты

статистической моделью значения. На рис. 3 справа приведён пример такой комбинации прогнозов для одного из временных рядов.

**4. Результаты.** В результате применения описанного метода к набору данных «Abilene» для прогнозирования на 24 часа, используя модель, обученную по 12 часам тренировочных данных прогнозировать 1 час, были получены значения средней абсолютной ошибки (MAE) и средней абсолютной ошибки в процентах (MAPE) для каждого временного ряда, представленные на рис. 4. Среднее значение MAE по всему набору данных составило 4,5 Гбит/с, а MAPE – 4%. Для сравнения, значение MAE, полученное при прогнозировании на 24 часа с помощью метода, описанного в [4], составило 7,4 Гбит/с.



**Рис. 4.** Значения MAE для временных рядов

**5. Заключение.** В работе предложен подход к прогнозированию временных рядов, использующий комбинацию методов декомпозиции, аппроксимации, экспоненциального сглаживания, а также реконструкции нелинейных динамических систем. Результаты тестирования описанного подхода на реальном наборе данных показали, что

удалось превзойти ранее достигнутую с помощью нейронной сети GRU точность прогнозирования временных рядов набора «Abilene». Полученные результаты можно улучшить, исследовав методы поиска параметров запаздывания для динамической системы, а также усовершенствовав аппроксимацию статистической компоненты, например, используя другой метод ее моделирования.

## Литература

1. Hyndman R. J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice [Электронный ресурс]: URL:<https://otexts.com/fpp3/expsmooth.html> (дата обращения: 14.03.2023).
2. De Silva B. M., Champion K. P., Quade M. et al. PySINDy: A Python package for the sparse identification of nonlinear dynamical systems from data // Journal of Open Source Software. 2020. Vol. 5. No 49. P. 2104.
3. Ганаева Д. Д., Головкина А. Г. Метод реконструкции нелинейных динамических систем по временным рядам // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 197–201.
4. Troia S., Alvizu R., Zhou Y. et al. Deep learning-based traffic prediction for network optimization // 20th International Conference on Transparent Optical Networks. 2018. P. 1–4.
5. SNDlib [Электронный ресурс]: URL:<http://sndlib.zib.de> (дата обращения: 20.04.22).
6. Traore O. I., Pantera L., Favretto-Cristini N. et al. Structure analysis and denoising using singular spectrum analysis: application to acoustic emission signals from nuclear safety experiments // Measurement. 2017. Vol. 104. P. 78–88.
7. Luo L., Wang J., Tong C. et al. Multivariate fault detection and diagnosis based on variable grouping // Industrial and Engineering Chemistry Research. 2020. Vol. 59. No 16. P. 7693–7705.

УДК 510

Девришев Н. Э.

## Улучшение перевода zero-shot с использованием лексического сходства языков

*Рекомендовано к публикации доцентом Козыниченко В. А.*

**1. Введение.** Машинный перевод – одна из наиболее быстро развивающихся сфер обработки естественного языка (Natural Language Processing, NLP). Однако с каждым днем не только появляются новые методы машинного перевода и модификации уже существующих, но и пополняется список подзадач. Так, например, в 2017 году команда Google Translate описала принцип работы своей кросс-языковой модели [1], использовавшей в процессе обучения большое количество пар предложений на различных языках, которая помимо осуществления универсального перевода между любыми двумя языками, встречающимися на этапе обучения, неплохо осуществляла новый для своего времени метод zero-shot translation.

Zero-shot translation (ZST) – это подход к решению задачи машинного перевода, отличительным условием которой является отсутствие в явном виде обучающих данных между ними [2]. Обычно задача ZST ставится при наличии большого количества параллельных данных (т. е. содержащих соответствие между предложениями, написанными на исходном и целевом языках) для широкого множества языковых пар (рис. 1). Так, например, если на этапе обучения доступны параллельные наборы предложений для языкового перевода  $\mathbf{En} \leftrightarrow \mathbf{Ru}$  и  $\mathbf{En} \leftrightarrow \mathbf{De}$ , то интерес представляет модель, осуществляющая перевод между русским ( $\mathbf{Ru}$ ) и немецким ( $\mathbf{De}$ ) вопреки отсутствию блока параллельных данных между этими языками.

Другим очевидным методом решения задачи является простой двукратный перевод с исходного языка на язык-посредник и с языка-посредника на целевой язык двумя однонаправленными моделями (pivot-based approach), однако такой подход приводит к накоплению ошибок при переводе и двойную сложность [3, 4]. По этой причине наиболее используемым вариантом становится обучение одной большой кросс-языковой модели и осуществление перевода между всеми

---

*Девришев Надир Эльнурович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077036@student.spbu.ru, тел.: +7(902)182-90-11

парами языков путем ее использования. Однако с ростом числа исследуемых моделью языков падает качество перевода между каждой отдельной парой [5].

Основная цель данной работы – улучшение zero-shot перевода различными способами. Наиболее успешным оказалось использование лексического сходства между парами языков. Показано, что при дополненном обучении кросс-языковой модели переводу с исходного на лексически близкий к целевому язык, качество перевода улучшается. Тем самым появляется возможность получить более точную модель, все еще не привлекая обучающие данные между исходным и целевым языками. В процессе исследований были использованы результаты работ [6–10].

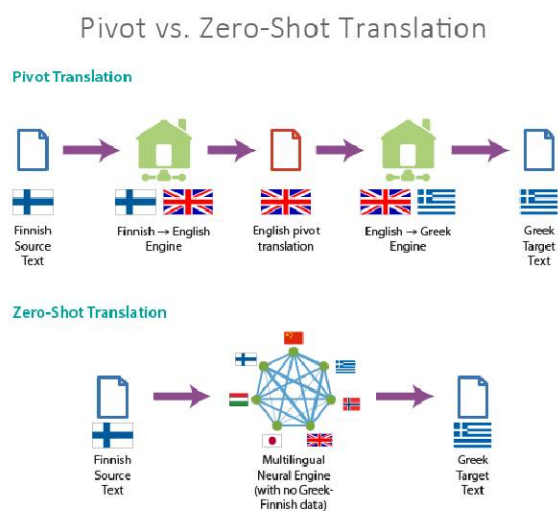


Рис. 1. Zero-shot translation

**2. Актуальность.** Задача ZST крайне актуальна, поскольку большое количество наборов обучающих данных на сегодняшний день имеют лишь английский в качестве целевого или исходного языков [11]. По этой причине многие исследования в области машинного перевода связаны с английским языком, в то время как исследования перевода между остальными языками могут стагнировать.

Тем не менее, качество перевода без явных обучающих данных (ZST) на сегодняшний день оставляет желать лучшего.

**3. Описание данных.** Для решения задачи был использован набор данных OPUS OpenSubtitles, состоящий из попарно взятых субтитров к фильмам и сериалам из различных веб-сервисов и онлайн-площадок. В качестве основных направлений перевода взяты пары немецкий–английский (**De** → **En**) и английский–украинский (**En** → **Uk**) для осуществления перевода с немецкого на украинский (**De** → **Uk**). Для чистоты эксперимента обучение проводилось дважды: первый раз для указанных выше наборов данных были взяты части размером 50 тыс. пар предложений, во второй – 100 тыс. пар. В обоих случаях предложения из двух наборов были перемешаны между собой.

Для улучшения результата перевода **De** → **Uk** в качестве обучающего был также дополнительно взят набор предложений, состоящий из немецко-русских субтитров (**De** → **Ru**). Аналогично, для двух случаев были взяты размеры в 20% от размеров основных тренировочных выборок предложений, т. е. 10 тыс. и 20 тыс. предложений соответственно.

**4. Подход.** Метод zero-shot translation основан на обучении крупной кросс-языковой модели для перевода между большим количеством языков. Основа архитектуры такой модели не содержит никаких концептуальных отличий от моделей, используемых в переводе одной пары языков. Существенная разница заключается лишь в размере модели. Из-за использования универсальных для всех языков кодировщика и декодировщика она должна быть гораздо больше, чтобы улавливать зависимости для всех пар языков.

В статье [1] составляется смешанный словарь, содержащий разбиения из всех языков, на основе которого составляются общие погружения. Предполагается, что модель сможет с помощью универсального кодировщика (8xLSTM) отображать предложения на любом языке в общее пространство признаков, после чего общий декодировщик (8xLSTM) так же успешно будет из данного пространства извлекать представления на нужном языке.

Чтобы модель самостоятельно различала нужный язык перевода, исходные предложения снабжаются метками `<target_language>` в начале (например, `<es>`, `<en>` и т. д.). В среднем представленная модель справляется на 0,005–0,01 балл BLEU хуже (таблица 1),

чем модель с такой же архитектурой, но обученная на одном парном корпусе данных WMT.

Таблица 1. Google's multilingual model

Модель	Single	Multi
WMT English>German	0,2467	0,2449
WMT English>French	0,3895	0,3623
WMT German>English	0,3043	0,2984
WMT French>English	0,3550	0,3489

К сожалению, данный подход имеет свои недостатки. Одной из наиболее ярко выраженных слабых сторон zero-shot translation является низкий уровень качества. В некоторых случаях метод уступает в показателях даже обычному pivot-based подходу [8]. Второй проблемой является перевод на неправильный язык [2, 9]. Кросс-языковые модели склонны к присваиванию ложных корреляция между языком и семантикой предложения, хотя выбор целевого языка для исходного предложения должен осуществляться лишь по тегу в начале вне зависимости от смысла этого предложения.

**4.1. Используемая модель.** В статье [1] была использована устаревшая модель с кодировщиками и декодировщиками на основе многослойных LSTM. На сегодняшний день применительно к задаче ZST, как и к большинству других задач обработки естественного языка, state-of-the-art подходом является архитектура глубоких нейронных сетей Transformer, представленная в 2017 году исследователями из Google Brain citeCross. Своим появлением модель оказала влияние на все сферы, связанные с NLP, повысив планку результатов в большинстве задач и открыв новые возможности для исследований.

Данная архитектура состоит из кодировщика и декодировщика. Кодировщик получает на вход векторизованную последовательность с позиционной информацией. Декодировщик получает на вход часть этой последовательности и выход кодировщика. Кодировщик и декодировщик состоят из слоев. Слои кодировщика последовательно передают результат следующему слою в качестве его входа. Слои декодировщика последовательно передают результат следующему слою вместе с результатом кодировщика в качестве его входа.

Каждый кодировщик состоит из механизма самовнимания (вход из предыдущего слоя) и нейронной сети с прямой связью (вход из механизма самовнимания) (рис. 2). Каждый декодировщик состоит из механизма самовнимания (вход из предыдущего слоя),



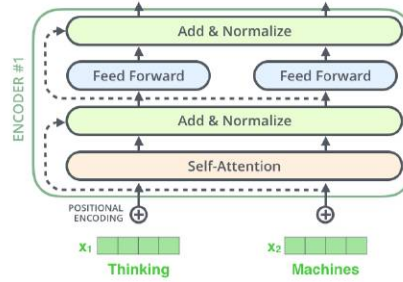


Рис. 2. Архитектура кодировщика

механизма внимания к результатам кодирования (вход из механизма самовнимания и кодировщика) и нейронной сети с прямой связью (вход из механизма внимания).

Каждый механизм внимания параметризован матрицами весов запросов  $W_Q$ , весов ключей  $W_K$ , весов значений  $W_V$ . Для вычисления внимания входного вектора  $X$  к вектору  $Y$ , вычисляются векторы  $Q = W_Q X$ ,  $K = W_K X$ ,  $V = W_V Y$ , которые используются для вычисления результата внимания:

$$\text{Attention}(Q, V, K) = \text{softmax} \left( \frac{QK^T}{\sqrt{d_k}} \right) V$$

Для улучшения результата и усложнения модели также используют механизм «Multi-Head attention», который заключается в использовании не одной, а нескольких (например, 4, 6 или 8) матриц  $W_Q$ ,  $W_K$ ,  $W_V$ . Это дает кодировщику возможность выделять из входной последовательности больше разнородной необходимой информации.

Помимо достижения лучших результатов в задачах NLP еще одним преимуществом архитектуры Transformer является ее высокая эффективность в условиях параллелизации, так как все вычисления внутри модели представлены в виде независимых матричных операций.

**5. Лексическое сходство.** Языки, входящие в одни и тех же языковые группы, могут быть лексически и грамматически похожи друг на друга.

Лексическое сходство (в лингвистике) – мера того, до какой сте-

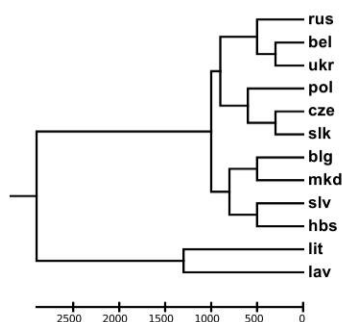


Рис. 3. Дерево лексической схожести языков

пени слова двух данных языков лексически сходны. Лексическое сходство, равное единице (или 100%), означает полное совпадение двух данных языков, тогда как равенство нулю означает полное отсутствие в них общих слов. Например, русский и украинский языки имеют 62% лексического сходства, что может помочь в обучении модели машинного перевода путем подмены целевого языка лексически с ним схожим.

Эксперименты проводились замещением украинского языка русским. Для обучения кросс-языковой модели были использованы корпуса предложений **De** → **En** и **En** → **Uk**, а в качестве дополнительного – корпус **De** → **Ru**. Оценивался лишь перевод **De** → **Uk**. Предполагалось, что отсутствие прямых обучающих данных **De** → **Uk** может быть компенсировано привлечением корпуса **De** → **Ru**.

**6. Результаты.** Для всех вычислений использовался компьютер с процессором Intel(R) Core(TM) i3-7020U @ 2.30GHz, оперативной памятью 16,00 Гб и операционной системой Ubuntu 22.04.2 LTS. Реализация описанных алгоритмов проводилась в Jupyter Notebook 6.4.5.

Использование лексического сходства украинского и русского языков поспособствовало улучшению качества перевода с немецкого на украинский **De** → **Uk**.

Эксперименты проводились дважды на наборе данных «OpenSubtitles» от OPUS. Были взяты корпуса **De** → **En** и **En** → **Uk** размерами по 50 тыс. и по 100 тыс. пар предложений. В обоих экспериментах основные данные дополнялись корпусом **De** → **Ru**

размером 20% от основных.

Для тестирования качества использовались метрики BLEU (bilingual evaluation understudy) и NIST (National Institute of Standards and Technology). Тестирование проводилось с использованием корпуса размером 20 тыс. **De** → **Uk** предложений.

Таблица 2. Результаты

Размеры корпусов	BLEU	NIST
<b>De</b> → <b>En</b> – 50 тыс., <b>En</b> → <b>Uk</b> – 50 тыс.	0,082	0,025
<b>De</b> → <b>En</b> – 50 тыс., <b>En</b> → <b>Uk</b> – 50 тыс., <b>De</b> → <b>Ru</b> – 10 тыс.	0,111	0,036
<b>De</b> → <b>En</b> – 100 тыс., <b>En</b> → <b>Uk</b> – 100 тыс.	0,117	0,037
<b>De</b> → <b>En</b> – 100 тыс., <b>En</b> → <b>Uk</b> – 100 тыс., <b>De</b> → <b>Ru</b> – 20 тыс.	0,132	0,046

Из таблицы 2 можно сделать вывод, что для двух экспериментов дополнение корпусом **De** → **Ru** обеспечивает улучшение в 35% и 13% для метрики BLEU и 44% и 24% – для NIST.

**7. Выводы.** Лексическое сходство языков можно использовать для улучшения качества машинного перевода zero-shot (ZST), компенсировав отсутствие корпуса параллельных данных другим корпусом, имеющим похожий язык в качестве целевого.

Данное свойство способно существенно помочь в реальных условиях, если необходимо осуществить перевод с одного языка на другой в отсутствие параллельного корпуса данных. Например, необходимо обучить модель машинного перевода с русского языка **Ru** на один из языков индоарийской группы бходжпури **Bho**. Для этого достаточно будет корпусов **Ru** → **En**, **En** → **Bho** и корпуса параллельных данных переводов с русского **Ru** на язык, схожий с языком бходжпури **Bho**, – Хинди **Hi**.

**8. Заключение.** Улучшения качества машинного перевода можно добиться не только значительными дорогостоящими увеличениями модели или сборами новых, необходимых для обучения корпусов данных, но и используя свойства самих языков, их лексическую и грамматическую схожесть.

## Литература

1. Johnson M., Schuster M., Le V. Q. et al. Google's multilingual neural machine translation system: enabling zero-shot translation // Transactions of the Association for Computational Linguistics. 2017. Vol. 5. P. 339–351.
2. Jiatao Gu, Yong Wang, Kyunghyun Cho, Victor O.K. Li. Improved zero-shot neural machine translation via ignoring spurious correlations. // In Proceedings of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. 2019. P. 1258–1268.
3. Currey A., Heafield K. Zero-resource neural machine translation with monolingual pivot data // Proceedings of the 3rd Workshop on Neural Generation and Translation. 2019. P. 99–107.
4. Firat O., Sankaran B., Alonaizan Y. et al. Zero-resource translation with multi-lingual neural machine translation // Proceedings of the 2016 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2016. P. 268–277.
5. Thanh Le Ha, Niehues J., Waibel A. Effective strategies in zero-shot neural machine translation // Institute for Anthropomatics and Robotics KIT – Karlsruhe Institute of Technology, Germany. 2017. P. 105–112.
6. Малютин Е. А., Бугайченко Д. Ю., Мишенин А. Н. Выделение текстовых трендов в социальной сети ОК // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 3. С. 313–325.
7. Акопян А. С. Улучшение методов получения выравнивания слов в задаче нейронного машинного перевода // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 239–245.
8. Arivazhagan N., Vapna A., Firat O. et al. The missing ingredient in zero-shot neural machine translation [Электронный ресурс]: URL:<https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.07091> (дата обращения: 15.02.23).

9. Zhang B., Williams P., Titov I. et al. Improving massively multilingual neural machine translation and zero-shot translation // Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. 2020. P. 1628–1639.
10. Gheini M., Ren X., May J. Cross-attention is all you need: adapting pretrained transformers for machine translation [Электронный ресурс]: URL:<https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.08771> (дата обращения: 15.02.23).
11. Freitag M., Firat O. Complete multilingual neural machine translation // Proceedings of the Fifth Conference on Machine Translation. 2020. P. 550–560.

УДК 519.6

Дмитриева К. А.

**Применение алгоритма RRT\*  
для поиска оптимальной по стоимости  
строительства дороги на рельефе местности с  
ограничениями**

*Рекомендовано к публикации профессором Аббасовым М. Э.*

**1. Введение.** В работе рассматривается задача построения оптимальной по стоимости затрат на строительство траектории дороги. Для получения искомой траектории применяется метод случайных быстрорастущих деревьев RRT\*.

**2. Постановка задачи и сведение к минимизации интегрального функционала.** Пусть на местности заданы точки  $A$  и  $B$ , выступающие в качестве начальной и конечной точек соответственно. Требуется соединить их дорогой таким образом, чтобы затраты на ее построение были минимальными. Обозначим через  $\alpha$  отношение величины стоимости доставки материалов, требующихся для укладки единицы длины дорожного полотна, к длине уже готового полотна (считаем, что для построения единицы пути требуется одно и то же количество материалов, вне зависимости от рельефа), а стоимость укладки обозначим как непрерывную функцию  $\beta(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющую непрерывные частные производные.

Как было показано в [1], функционал может быть записан в виде

$$J(y) = \frac{\alpha}{2} \left( \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \right)^2 + \int_{x_A}^{x_B} \beta(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

**3. Применение алгоритма RRT\*.** Метод RRT, описанный в [2], применяется для решения задач построения траектории. Алгоритм работает на основе случайного построения графов-деревьев из начальной точки до тех пор, пока один из узлов не достигнет целевой точки. Алгоритм RRT позволяет находить произвольную

---

*Дмитриева Кира Алексеевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087969@student.spbu.ru, тел.: +7(812)422-05-71

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 23-21-00027

траекторию, соединяющую две заданные точки в области с ограничениями. При этом путь может быть неоптимальным. Для поиска оптимальной траектории была создана модификация RRT\* [3], в которой после каждой итерации добавляется шаг проверки на возможную оптимизацию графа. Такое улучшение алгоритма дает более оптимальное (монотонно сходящееся к оптимальному) решение.

**3.1. Общие условия для построения графа.** Пусть задана метрика  $\rho$  в метрическом пространстве состояний  $U$ , где  $U$  – ограничено, и дерево  $T \in U$ . Обозначим  $x_0$  – начальное состояние, первый узел нашей модели:  $x_0 \in U$ ,  $x_0 \in T$ , и  $x_*$  – конечное состояние, в которое необходимо прийти:  $x_* \in U$ ,  $x_* \in T$ .

Пусть  $Y$  представляет собой множество препятствий, которые надо обойти. Единственное, что можно сказать о препятствиях – лежат ли выбранное состояние в области препятствий или нет.  $U \setminus Y$  – свободная область, в которой будет лежать путь;  $T \subset U \setminus Y$ .

Величина  $\delta = \text{const}$  – шаг, а  $\varepsilon \geq 0$  – радиус окрестности конечной точки, попадая в которую алгоритм прекращает дальнейшую работу.

**3.2. Алгоритм на  $k$ -м шаге.** Обозначим через  $X_k$  множество вершин дерева  $T$  на шаге  $k$ ,  $X_k \in T$ .

1. Выбираем случайное состояние  $\xi \in U \setminus Y$ .
2. Находим ближайшего к состоянию  $\xi$  в смысле метрики  $\rho$  соседа  $\bar{x}_k$  из множества  $X_k$ .
3. Добавим новый узел  $x_{k+1} = \bar{x}_k + \min((\xi - \bar{x}_k)\delta; \xi)$ . Если отрезок  $[\bar{x}_k; x_{k+1}]$  пересекает множество препятствий  $Y$ , полагаем, что  $X_{k+1} = X_k$ , не добавляя новых ребер в  $T$ , переходим к  $(k + 1)$ -й итерации. Если же отрезок не пересекает множество препятствий, то  $X_{k+1} = X_k \cup x_{k+1}$ .

Пусть  $\hat{X}_k$  – множество вершин дерева, которые расположены в  $r$ -окрестности точки  $x_{k+1}$ :

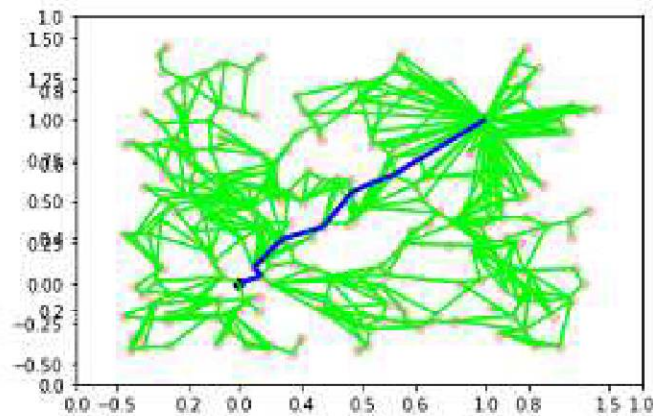
$$\hat{X}_k = X_k \cap B_r(x_{k+1}).$$

Убираем из множества  $T$  все ребра, приводящие к вершинам множества  $\hat{X}_k$  за исключением ребра, приводящего к ближайшей вершине  $x_0$  из множества  $\hat{X}_k$ , и переходим к подзадаче по построению оптимальных, в смысле значения функционала,

путей между вершинами множества  $\widehat{X}_k$ , исходящих из  $x_0$ , не пересекающих множества препятствий  $Y$  и сохраняющих структуру дерева  $T$ . Эту подзадачу решаем с помощью алгоритма Дейкстры. Ребра, полученные методом Дейкстры, добавляем к множеству  $T$  и переходим к следующему шагу.

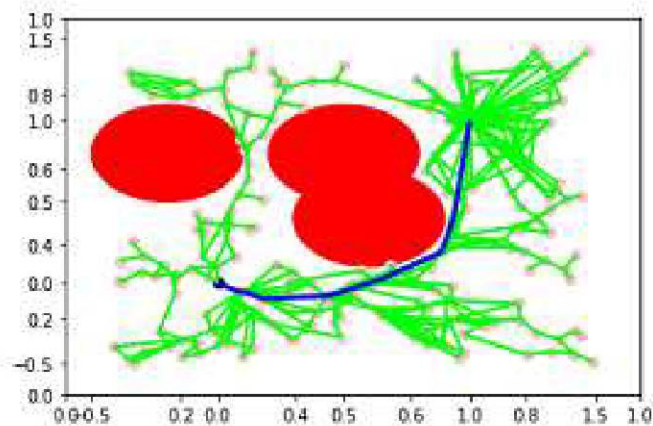
4. Если  $\rho(x_{k+1}, x_*) \leq \varepsilon$ , то мы прекращаем дальнейшие расчеты и считаем, что путь построен. Если же нет, то переходим к  $(k + 1)$ -й итерации.

**4. Примеры работы алгоритма.** На рис. 1, 2 можно увидеть примеры работы 300 итераций алгоритма. Пример построен со следующими параметрами: пространство двумерное с евклидовой метрикой  $\rho$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $(x_*, y_*) = (1, 1)$  – начальная и конечная точки соответственно. Множество  $Y$  состоит из точек, то есть каждое препятствие представляет собой множество точек,  $U \setminus Y$  – свободная область, в которой лежит путь  $T$ . Шаг  $\delta = 0,1$  и считаем, что только попадание в конечную точку является причиной прекращения работы алгоритма, то есть  $\varepsilon = 0$ .



**Рис. 1.** Маршрут, построенный методом RRT\* за 300 итераций, без препятствий





**Рис. 2.** Маршрут, построенный методом RRT\* за 300 итераций, с препятствиями

**5. Заключение.** В данной работе был описан алгоритм RRT\* для построения оптимальной в смысле затрат на строительство траектории дороги на рельефе местности с ограничениями.

### Литература

1. Аббасов М. Э., Шарлай А. С. Поиск оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 1. С. 4–12.
2. LaValle S. M. Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning // TR 98-11. Computer Science Dept., Iowa State University. 1998. <http://lavalle.pl/papers/Lav98c.pdf> (дата обращения: 09.04.2023).
3. Karaman S., Frazzoli E. Sampling-based algorithms for optimal motion planning // International Journal of Robotics Research. 2011. Vol. 30. Iss. 7. P. 846–894.

УДК 004.932

Ежов Ф. В., Ларин Е. С., Блеканов И. С., Ким Г. И.

## Нейросетевые методы сегментации аорты сердца при автоматической диагностике снимков КТ

**1. Введение.** В настоящее время в области медицины проводится много исследований, связанных с автоматизациями таких процессов как полная или быстрая диагностика пациента, уточнение диагноза, мобильная медицина. После начала эпидемии коронавируса 2020 года появилось много статей, посвященных анализу легких на снимках компьютерной томографии (КТ). Тем не менее, исследования и инструменты, посвященные автоматической диагностике сердечно-сосудистой системы, в частности, диагностике аорты сердца человека, являются крайне востребованными и актуальными при диагностировании заболеваний [1, 2]. Однако их количество остается небольшим, ввиду ограниченного числа экспертов-врачей в этой области и, как следствия, отсутствие достоверных размеченных данных.

Анализ медицинских изображений (в частности, снимков КТ) включается в перечень основных задач по направлению компьютерного зрения. Часто анализ снимков КТ сводится к решению задачи семантической сегментации или детекции какого-либо внутреннего органа. В настоящее время наиболее современными и эффективными методами решения задачи семантической сегментации являются методы на основе нейронных сетей и технологий трансферного обучения.

В данной работе рассматриваются современные нейросетевые методы сегментации аорты сердца и прилегающих сосудов как часть

---

*Ежов Федор Валерьевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: morememes@yandex.ru, тел.: +7(812)428-71-59

*Ларин Евгений Сергеевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054751@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-71-59

*Блеканов Иван Станиславович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.blekanov@spbu.ru, тел.: +7(812)428-71-59

*Ким Глеб Ирламович* – сердечно-сосудистый хирург кардиохирургического отделения с кабинетом рентгенэндоваскулярных диагностики и лечения, к. м. н., ФГБУ ВО СПбГУ Клиника высоких медицинских технологий им. Н. И. Пирогова; e-mail: gikim.cor@gmail.com, тел.: +7(812)676-25-25

автоматической системы диагностики патологий, без введения красящего вещества в сердечно-сосудистую систему пациента.

**2. Предлагаемые методы решения.** Для сегментирования аорты сердца на снимках КТ в работе были обучены и настроены следующие три архитектуры нейросетей: TransUNet [3], SegFormer [4], Lawin [5], которые зарекомендовали себя в задаче семантической сегментации в других сферах применения.

**2.1. TransUNet.** Данная нейросеть, как следует из названия, сочетает в себе архитектурные решения трансформеров и U-Net. Для получения эмбедингов из изображения (кодировщик данных) используются ResNet-50 и Visual Transformer (ViT) [6]. С помощью нейронной сети ResNet-50 получают первичные эмбединги, из которых в дальнейшем ViT выделяет ключевую информацию. Для декодирования эмбедингов (декодировщик) в маску задействуется декодировщик обычного U-Net. Всего в модели 19,5 миллионов параметров.

**2.2. SegFormer.** Данная архитектура сочетает в себе Mix Transformer (MiT) в качестве кодировщика и All-MLP в качестве декодировщика. Ключом к использованию такого простого декодировщика является то, что MiT имеет большее эффективное рецептивное поле (ERF), чем у традиционных CNN кодировщиков. MiT основывается на архитектурных решениях ViT, но по сравнению с последним имеет ряд существенных преимуществ. Данный кодировщик был оптимизирован для решения задач семантической сегментации, в частности, вычислительная сложность для self-attention сократилась до  $\frac{N^2}{R}$ , где  $R$  – настраиваемый гиперпараметр. Всего в модели 27,3 миллионов параметров.

**2.3. Lawin.** В данной нейросети основные архитектурные изменения касаются части декодировщика. В качестве кодировщика была выбрана нейронная сеть MiT. В декодировщике для захвата различной контекстной информации применяется attention spatial pyramid pooling (ASPP) (похожая на spatial pyramid pooling [7]). Данное архитектурное решение позволяет лучше захватывать как локальную, так и глобальную контекстную информацию, что приводит к лучшей точности. Всего в модели 29,5 миллионов параметров.

**3. Данные.** Рассмотренные выше методы были обучены на двух наборах данных с размеченными снимками КТ различных внутренних органов: Synapse [8] и Aortic Vessel Tree (AVT) [9]. Обучение

моделей выполнялось на видеокарте NVIDIA A100 80 GB.

Фактически снимок КТ является трехмерной моделью исследуемой области человеческого тела. Каждый снимок КТ представлен как трехмерный массив размерностью  $H \times W \times N$ , где  $H$  и  $W$  – высота и ширина соответственно, а  $N$  – количество двумерных срезов в некоторой плоскости.

**3.1. Synapse.** В данных размечено 13 различных органов для решения задачи семантической сегментации, в том числе и аорта. Параметры  $H = W = 512$ , всего двумерных срезов  $\sum N_i = 2211$ . Значения каждого снимка КТ «обрежем» так, чтобы они лежали в интервале  $[-125, 275]$ , те значения что выходят за границы интервала присвоим ближайшей границе интервала. Значения каждого снимка КТ нормализуем так, чтобы они принадлежали интервалу  $[0, 1]$ . Далее можно разбить снимок КТ на двумерные срезы.

На данных Synapse можно получить предобученную модель для дальнейшей дообучения. Разобьем данные на тренировочную и валидационную выборки по 1547 и 664 двумерных срезов соответственно.

Будем обучать каждую нейронную сеть в течении 200 эпох, в качестве функции потери выберем кросс-энтропию. Считаем наилучшей версией нейронной сети ту, что покажет наименьшую ошибку на валидационной выборке.

**3.2. Aortic Vessel Tree.** В этих данных размечена аорта и прилегающие сосуды как один класс, все остальное считается фоном. Параметры  $H = 512$  и  $W = 666$ , всего двумерных срезов  $\sum N_i = 2840$ . Предобработка данных такая же, как в пункте 3.1.

На данных Aortic Vessel Tree обучим полученные модели на данных Synapse с помощью transfer learning. Разобьем данные на тренировочную, валидационную и тестовую выборки по 1704, 568 и 568 двумерных срезов соответственно. Модели будем обучать так же, как для данных Synapse.

**4. Эксперимент.** В работе поставлен эксперимент по оценке качества и выбору наилучшего метода решения задачи семантической сегментации аорты сердца на описанных наборах данных. Большое внимание уделено качеству сегментации, а также скорости работы и требовательности к вычислительным ресурсам.

**4.1. Метрики.** Предложенные нейросетевые методы оценивались по точности и скорости работы с помощью следующих метрик:

- Intersection over union (IoU);

- F1-score;
- попиксельная точность (pixel accuracy);
- количество потребляемой памяти на один двумерный срез без вычисления градиента, в гигабайтах (GB/slice);
- скорость прохождения валидационного процесса, в секундах.

**4.2. Результаты.** В таблицах 1, 2 представлены результаты экспериментов. Полужирным шрифтом выделены наилучшие результаты (колонка GB/slice одинакова для обоих датасетов, поэтому представлена только в таблице 2).

Из таблицы 1 видно, что методы TransUnet и SegFormer показывают схожую высокую точность по разным метрикам качества.

**Таблица 1.** Значения метрик качеств для датасета Synapse

Нейронная сеть	pix. acc.	f1 score	IoU	sec
TransUnet	<b>0,9118</b>	<b>0,9211</b>	<b>0,8583</b>	17,19
SegFormer	0,9022	0,9101	0,8431	<b>16,86</b>
Lawin	0,7789	0,7908	0,6814	32,31

Таблица 2 показывает, что после трансферного обучения все методы показывают схожие результаты по оценкам. Наилучшие показатели в точности по-прежнему принадлежат TransUnet. Точность метода SegFormer немного ниже, но значения метрик скорости и потребляемости памяти лучше. Метод Lawin также показал хорошую точность, но потребляет больше вычислительных ресурсов.

**Таблица 2.** Значения метрик качеств для датасета AVT

Нейронная сеть	pix. acc.	f1-score	IoU	GB/slice	sec
TransUnet	<b>0,9820</b>	<b>0,9813</b>	0,9630	1,033	14,53
SegFormer	0,9713	0,9777	0,9560	<b>0,716</b>	<b>13,23</b>
Lawin	0,9769	0,9808	<b>0,9639</b>	1,277	27,20

**5. Заключение.** В работе проведена оценка качества современных нейросетевых методов для решения задачи семантической сегментации аорты сердца на данных без красящего вещества. Из трех рассмотренных методов, два метода TransUnet и SegFormer показали наилучшие результаты.

## Литература

1. Noothout J. M., De Vos B. D. Automatic segmentation of thoracic aorta segments in low-dose chest CT // Medical Imaging 2018: Image Processing. 2018. P. 446–451.
2. Comelli A., Dahiya N. Deep learning approach for the segmentation of aneurysmal ascending aorta // Biomedical Engineering Letters. 2021. No 11. P. 15–24.
3. Chen J. et al. TransUNet: transformers make strong encoders for medical image segmentation // arXiv preprint [Электронный ресурс]: URL: <https://arxiv.org/abs/2102.04306> (дата обращения: 04.04.2023).
4. Xie E., Wang W., SegFormer: Simple and efficient design for semantic segmentation with transformers // Advances in Neural Information Processing Systems 34. NeurIPS, 2021. P. 12077–1209.
5. Yany H. et al. Lawin Transformer: Improving Semantic Segmentation Transformer with Multi-Scale Representations via Large Window Attention // arXiv preprint [Электронный ресурс]: URL: <https://arxiv.org/abs/2201.01615> (дата обращения: 04.04.23).
6. Dosovitskiy A. et al. An image is worth 16x16 words: Transformers for image recognition at scale // arXiv preprint [Электронный ресурс]: URL: <https://arxiv.org/abs/2010.11929> (дата обращения: 04.04.23).
7. He K., Zhang X. Spatial pyramid pooling in deep convolutional networks for visual recognition // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2015. Vol. 37. No 9. P. 1904–1916.
8. Датасет Synapse [Электронный ресурс]: URL: <https://www.synapse.org/#!Synapse:syn3193805/wiki/89480> (дата обращения: 04.04.2023).
9. Датасет Aortic Vessel Tree [Электронный ресурс]: URL: [https://figshare.com/articles/dataset/Aortic\\_Vessel\\_Tree\\_AVT\\_CTA\\_Datasets\\_and\\_Segmentations/14806362](https://figshare.com/articles/dataset/Aortic_Vessel_Tree_AVT_CTA_Datasets_and_Segmentations/14806362) (дата обращения: 04.04.2023).

УДК 004.855.5

**Индыков Д. А.**

## **Сегментация капилляров глаза человека по снимкам с офтальмологической щелевой лампы**

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем  
Митрофановым Е. П.*

**1. Введение.** Сейчас медицинские работники в области офтальмологии вынуждены вручную обрабатывать огромное количество данных, проводить типовые измерения и расчеты. Довольно значительную часть их работы можно было бы автоматизировать при помощи обученной модели машинного обучения.

Модель должна помочь в выделении сосудов для их дальнейшего анализа и постановки верного диагноза. С ее помощью медицинские работники смогут ускорить свою работу, максимально сконцентрироваться на анализе результатов измерений, а не на их обработке [1,2].

В настоящей работе на основе фотографий и разметки разработана модель, которая может сегментировать сосуды на фотографиях глаз с щелевой лампы.

**2. Описание входных значений.** Данные представлены набором, содержащим 652 снимка глаз с офтальмологической щелевой лампы. Каждому снимку поставлена в соответствие разметка в png формате, где белым цветом выделены сосуды, а черным – все остальное.

**2.1. Препроцессинг данных.** Для тренировки модели было использовано 652 изображения, которые были сжаты до размера  $256 \times 256$ . После этого изображения были разделены на тренировочную и валидационную части по 521 и 131 изображению соответственно. Для тренировочной части из одного изображения отражением по горизонтали, по вертикали и поворотом на  $45^\circ$  было создано четыре изображения [3]. Таким образом модель имела 2084 изображения для тренировки и 131 – для теста. После этого был создан смешанный фильтр, состоящий из зеленого канала изображения, фильтра контурной резкости, фильтра CLAHE [4]. Обучение происходило парал-

---

*Индыков Дмитрий Андреевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087204@student.spbu.ru, тел.: +7(980)555-78-51

лельно на оригинальном и смешанном наборах данных для выбора лучшего.

**3. U-Net Convolutional Neural Networks.** U-Net считается одной из стандартных архитектур CNN для задач сегментации изображений, когда нужно не только определить класс изображения целиком, но и сегментировать его области по классу, то есть создать маску, которая будет разделять изображение на несколько классов [5].

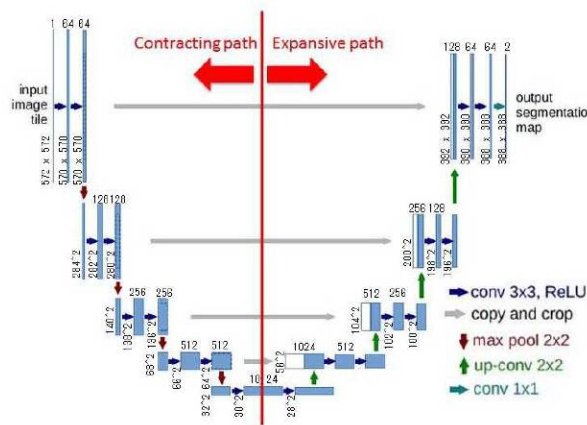


Рис. 1. Архитектура U-Net

Архитектура сети приведена на рис. 1. Она состоит из сужающегося пути для захвата контекста (слева) и симметричного расширяющегося пути (справа). Сужающийся путь состоит из повторного применения двух сверток  $3 \times 3$ , за которыми следуют ReLU и операция максимального объединения  $2 \times 2$  для понижения разрешения. На каждом этапе понижающей дискретизации каналы свойств удваиваются.

Каждый шаг в расширяющемся пути состоит из свертки  $2 \times 2$ , которая уменьшает количество каналов свойств, объединение с соответствующим образом обрезанной картой свойств из стягивающегося пути и две  $3 \times 3$  свертки, за которыми следует ReLU. На последнем слое используется свертка  $1 \times 1$  для сопоставления каждого 64-компонентного вектора свойств с желаемым количеством классов.



Всего сеть содержит 23 сверточных слоя [5].

**4. U-Net++ (Nested U-Net).** Эта архитектура по сути представляет собой U-Net, в которой подсети кодировщика и декодировщика соединены серией вложенных пропускных путей, изображенных на рис. 2, которые сначала обрабатывают данные из кодировщика, и только потом передают их на декодировщик. Карты функций кодировщика подвергаются блоку свертки, количество слоев свертки которого зависит от уровня пирамиды. Например, путь пропуска между узлами  $X^{0,0}$  и  $X^{1,3}$  состоит из блока свертки с тремя слоями свертки, где каждому слою свертки предшествует слой конкатенации, который объединяет выходные данные предыдущего слоя свертки того же блока с соответствующим выходным сигналом более низкого блока с повышенной частотой дискретизации. По сути, блок свертки приближает семантический уровень карт признаков кодировщика к уровню карт признаков, ожидаемых декодировщиком. Гипотеза состоит в том, что оптимизатор столкнулся бы с более легкой проблемой оптимизации, когда полученные карты признаков кодировщика и декодировщика семантически подобны [6].

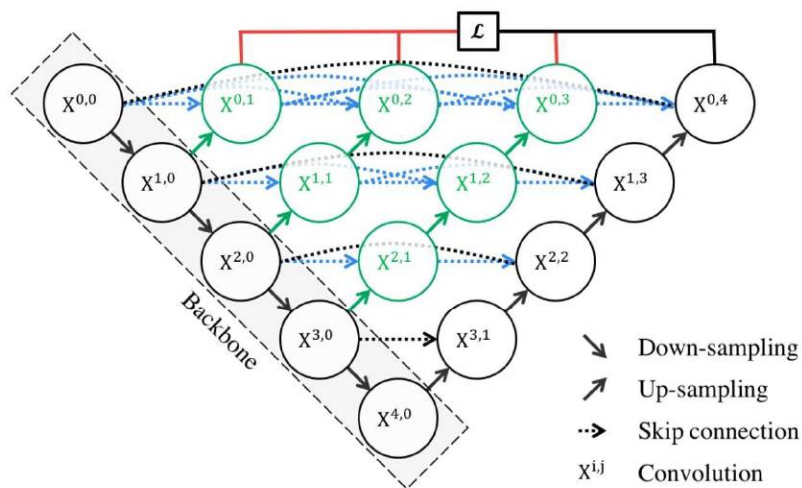


Рис. 2. Архитектура U-Net++

**5. Attention U-Net.** Эта модель U-Net добавила шлюзы внимания, изображенные на рис. 3, позволяющие акцентироваться лишь на значимые части изображения [7].

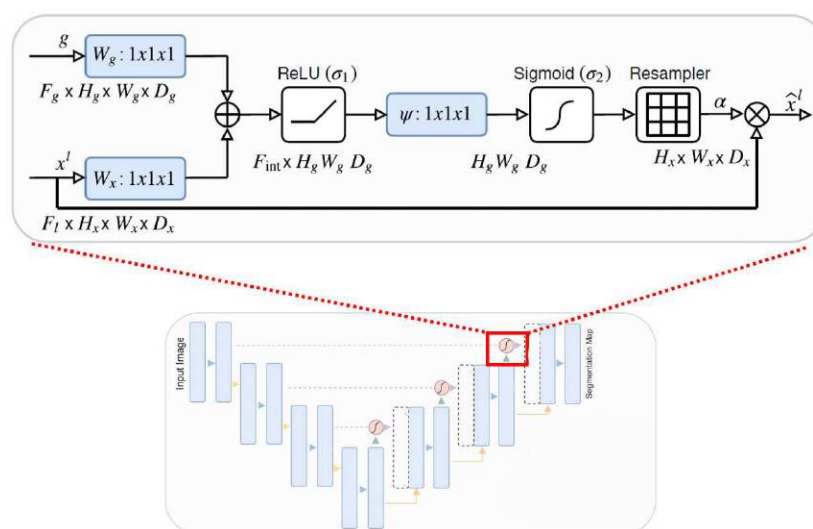


Рис. 3. Архитектура Attention U-Net [8]

Благодаря этим воротам активации, модель неявно учится подавлять ненужные области во входном изображении, выделяя при этом важные функции, полезные для конкретной задачи. Интеграция таких блоков минимально увеличивает вычислительные затраты при одновременном повышении чувствительности и времени прогнозирования [7].

**6. Сравнение сетей.** Приведем краткое сравнение моделей между собой.

Модель U-net:

- конкатенация с образом происходит напрямую.

Модель U-Net++:

- модифицированная U-Net;

- конкатенация с образом проходит через слой, сокращающий семантический разрыв между картами признаков подсетей кодировщика и декодировщика.

Модель Attention U-Net:

- модифицированная U-Net;
- конкатенация с образом и развертка проходят через активационные ворота, выделяющие лишь главные признаки.

**7. Обучение.** Сеть обучается методом стохастического градиентного спуска на основе входных изображений и соответствующих им карт сегментации.

**7.1. Метрика.** В качестве метрики выступает DiceBCEloss, состоящая из Dice, изображенная на рис. 4 и Binary cross entropy (BCE), выраженная формулой

$$\ell(x, y) = \text{mean}(\{l_1, \dots, l_n\})^\top, \quad l_n = -\omega_n [y_n \log x_n + (1 - y_n) \log(1 - x_n)].$$

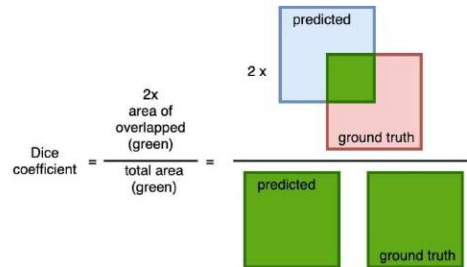


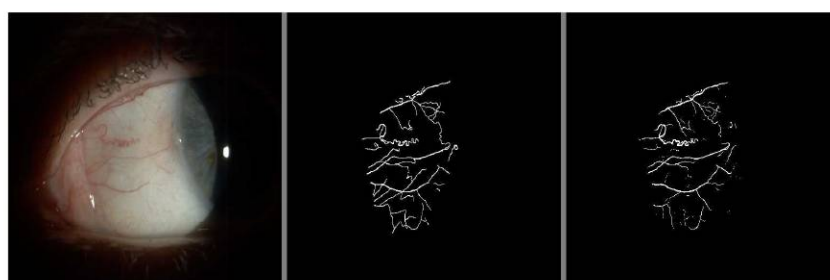
Рис. 4. Графическое представление Dice loss

Комбинация двух методов допускает некоторые вариации потерь, при этом выигрывая от стабильности BCE. Это считается основной функцией потерь задач сегментации.

**7.2. Реализация.** Данные нейронные сети были реализованы на языке программирования Python с использованием фреймворка PyTorch. Полный код доступен на Github [9].

**7.3. Гиперпараметры.** Обучение в любом тесте длилось 20 эпох со скоростью обучения 0,0001. Размер пакета – 1, размер изображений –  $256 \times 256$ . Увеличивать размер изображения нецелесообразно, так как слишком низкое соотношение улучшения результатов к возрастанию количества вычислений.

**7.4. Результаты.** На рис. 5 показаны результаты построения маски. В таблице представлены результаты функции потерь.



**Рис. 5.** Оригинальное изображение (слева), оригинальная маска (по центру), предсказанная маска (справа)

**Таблица.** Результаты

Набор данных	Train loss	Valid loss
U-Net		
original	0,438	0,512
mixed	0,477	0,514
At U-Net		
original	0,487	0,515
mixed	0,499	0,517
U-Net++		
original	0,443	0,515
mixed	0,499	0,521

**8. Вывод.** В ходе работы были изучены различные подходы и их модификации для задачи медицинской сегментации капилляров глаза. При довольно низком разрешении изображений три нейронные сети показали почти равные результаты. Это позволяет сделать вывод, что при размере изображения  $256 \times 256$  как-то изменять классическую архитектуру U-Net не имеет смысла. Однако при увеличении разрешения фотографий, результаты будут изменяться в сторону той или иной рассмотренной модификации, в зависимости от

различных параметров, таких как длительность обучения, размерности и качества набора данных.

## Литература

1. Хлопин И. В. Предсказывание наличия болезни сердца у человека с помощью машинного обучения // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 295–300.
2. Сегментация капилляров глаза человека по снимкам с офтальмологической щелевой лампы [Электронный ресурс] // Цифровой прорыв 2022: хакатоны и чемпионаты по искусственному интеллекту URL:<https://clck.ru/yTTCz> (дата обращения: 12.12.2022).
3. Rotation transforms [Электронный ресурс]: URL:<https://clck.ru/347XxA> (дата обращения: 12.12.2022).
4. Filters [Электронный ресурс]: URL:<https://clck.ru/347Xxu> (дата обращения: 12.12.2022).
5. Глек П. U-Net: нейросеть для сегментации изображений [Электронный ресурс]: URL:<https://clck.ru/347XyR> (дата обращения: 10.12.2022).
6. Zhou Z., Rahman M., Siddiquee., et al. UNet++: A Nested U-Net architecture for medical image segmentation [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1807.10165> (дата обращения: 15.12.2022).
7. Oktay O., Schlemper J., Folgoc L., et al. Attention U-Net: learning where to look for the pancreas [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1804.03999> (дата обращения: 17.12.2022).
8. Lee J. H. Image segmentation: Pytorch implementation of U-Net, R2U-Net, Attention U-Net and Attention R2U-Net [Электронный ресурс]: URL:<https://clck.ru/347Xyh> (дата обращения: 12.12.2022).
9. Индыков Д. А. Unets [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/Burunduke/Unets> (дата обращения: 10.01.2023).

УДК 004.912

Исаев Р. О., Куприянов И. В., Митяй Г. В., Школин А. Ю.

## Разработка новостного агрегатора с использованием нейросетей

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем  
Давыденко А. А.*

**1. Введение.** Каналы распространения информации, к которым относятся социальные сети и другие информационные ресурсы, публикуют множество новостных статей на разнообразные тематики. С ростом количества публикуемых текстов становятся актуальными задачи агрегации новостей по соответствующим тематикам и поиска в них *трендов* [1] – популярных на данный момент тем.

В работе предложен подход к выделению текстовых *трендов* из новостных публикаций на основе кластеризации векторных представлений. Дополнительно разработаны методы выделения *дайджеста* (главных новостей) и *инсайтов* (ключевых фактов из новостей). В работе также описаны технологии и программные пакеты, используемые для реализации модели.

**2. Сбор и обработка текстовых данных.** Источником новостных статей стали новостные каналы популярного мессенджера Telegram. С помощью *парсинга* (автоматизированного сбора данных из открытых источников) собираются новости с Telegram-каналов, проходя фильтрацию по длине. После этого тексты обрабатываются, очищаются от лишних символов и знаков, смайлов, разделений на абзацы, сохраняя только буквы, цифры и знаки препинания.

**3. Векторное представление текстовых данных.** Одним из наиболее актуальных методов оценки семантической близости пары текстов является анализ наборов числовых характеристик, отражающих семантику текстов. В частности, для решения подобного

---

*Исаев Роман Олегович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077292@student.spbu.ru, тел.: +7(937)216-77-21

*Куприянов Илья Владимирович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st075958@student.spbu.ru, тел.: +7(999)520-55-17

*Митяй Герман Витальевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076514@student.spbu.ru, тел. : +7(999)584-59-84

*Школин Александр Юрьевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077019@student.spbu.ru, тел. : +7(920)955-76-57

рода задач используется архитектура трансформеров, которые представляют собой нейросетевую архитектуру с механизмом внимания. Примером модели, построенной на данной архитектуре, является Bidirectional Encoder Representations from Transformers (BERT) [2]. В работе использована модель RuBertTiny [3] для получения векторных представлений новостей. Выбор данной модели обусловлен возможностью обрабатывать русскоязычный текст, а также сравнительно небольшой вычислительной сложностью.

**4. Кластеризация текстовых данных.** При поиске трендов или тематик в наборе новостных статей необходимо разделить текстовые данные по семантически похожим группам. Таким образом задача рассматривалась как задача кластерного анализа. Большое количество существующих алгоритмов кластеризации, дополненное наличием сложностей в настройке их параметров, требует сравнительного исследования. В качестве анализируемых моделей выбраны «К-средних» [4] и «Иерархическая кластеризация» [5] из библиотеки `scikit-learn` для языка программирования Python.

**4.1. Алгоритм кластеризации К-средних.** Данный алгоритм в качестве основного входного параметра принимает количество кластеров. Таким образом, необходимо определить оптимальное число групп для различного количества кластеризуемых новостей, для чего часто используется *метод локтя* с метрикой

$$\text{inertia} = \sum_{i=1}^N (x_i - C_k)^2.$$

Визуальная оценка двадцати построенных графиков метода локтя

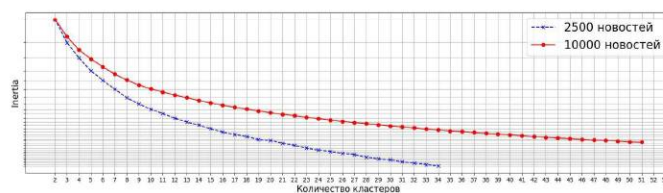


Рис. 1. Визуализация метода локтя

указывает на неизменность оптимального числа кластеров, несмот-

ря на увеличение количества новостей. На рис. 1 изображены графики метода локтя для значений количества новостей, равным 2500 и 10000 соответственно. Исходя из неоднозначности результатов метода локтя, предпочтение в выборе отдано алгоритму иерархической кластеризации без явного указания количества кластеров.

**4.2. Алгоритм иерархической кластеризации.** При инициализации алгоритма каждый объект относится к одному кластеру. Затем последовательно объединяются кластеры, находящиеся друг к другу ближе заданного порога – distance threshold. Алгоритм прекращает работу, когда расстояние, рассчитанное по формуле (1), между любыми кластерами станет не больше порога.

$$d(x, y) = 1 - \frac{xy^T}{\|x\| \|y\|}. \quad (1)$$

Значение параметра distance threshold необходимо подобрать таким, чтобы похожие по тематике новости объединялись в кластер и в то же время количество кластеров соответствовало числу трендов и тематик, не избыточно возрастая. Расстояние между кластерами можно вычислить как расстояние между центрами кластеров (average) или как расстояние между наиболее удаленными элементами (complete).

**4.3. Выбор параметров для алгоритма иерархической кластеризации.** Параметр complete является наиболее подходящим в нашей задаче, так как он позволяет получить более равномерное распределение количества элементов в кластере, при этом не возникает групп с большим количеством элементов, как у параметра average (рис. 2). Для подбора гиперпараметров иерархической кла-

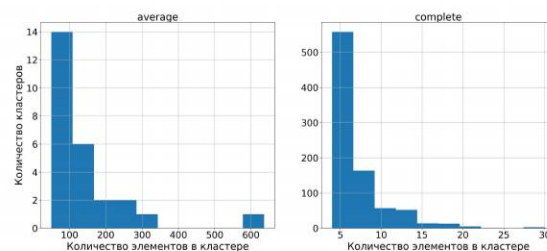


Рис. 2. Распределение количества элементов в кластерах



стеризации производилось формирование трендов и дайджеста с разными значениями параметров, а затем 29 независимых экспертов ставили баллы от 1 до 10 для оценки разнообразности дайджеста и соответствия новостей тренду.

По результатам, которые были получены (см. таблицу), принято решение о выборе итоговых гиперпараметров для иерархической кластеризации.

Таблица. Результаты оценок

п/п	Оценка дайджеста	Оценка трендов
complete, 0,25	<b>8,62</b>	4,72
complete, 0,3	5,07	<b>6,03</b>
average, 0,25	5,79	4,76

**4.4. Выделение трендов в текстовых данных.** Кластер с большим количеством элементов указывает на наличие активного обсуждения новостными ресурсами соответствующей ему темы. Для выявления трендов внутри кластеров была использована модель `keyt5-large` [6], выделяющая ключевые слова из набора текстов. В качестве данных, поступающих на вход модели, взяты  $N$  наиболее близких к центроиду кластера новостей. В каждом из  $N$  текстов выделяются ключевые слова, после чего определяется самое частое слово, которое в дальнейшем используется как название тренда.

**4.5. Выделение инсайтов.** Генерация краткого описания содержания и выделение главного смысла из нескольких новостных статей рассмотрены как задача суммаризации текстов. В качестве решения использована модель `rut5-base-absun` [7]. Наиболее близкие к центроиду  $M$  новостей объединяются в один текст и поступают на вход модели, которая затем выдает суммаризацию объединенных новостей (рис. 3).

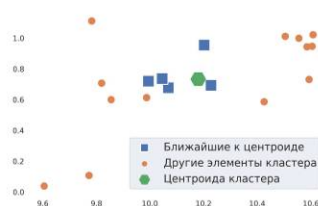


Рис. 3. Отдельно выделенный кластер

**4.6. Формирование дайджеста.** С помощью кластеризованных векторных представлений новости разбиваются на семантические кластеры. В работе используется идея выделения главной (относительно кластера) новости как центроиды кластера. Для формирования дайджеста выделяются пять самых больших по количеству новостей кластеров, в каждом кластере вычисляется центр масс, после чего выделяется новость, векторное представление которой расположено ближе всего к центру масс по косинусному расстоянию (1).

**5. Програмная реализация.** Предложенный подход был реализован в качестве веб-сервиса (рис. 4) на языке Python с использованием фреймворка Flask, технологии Docker и облачным хостингом Yandex Cloud для разработки серверной части приложения [8]. Клиентская часть оформлена в виде веб-страницы [9] с помощью фреймворка Streamlit.

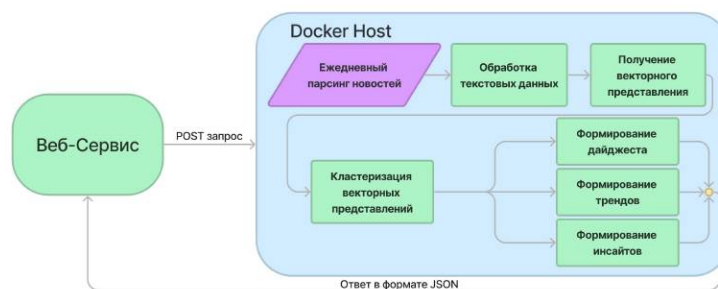


Рис. 4. Схема веб-сервиса

**6. Заключение.** В работе рассмотрено несколько алгоритмов кластеризации и выбран лучший с помощью публичной оценки. Предложен метод выделения различных новостных сущностей, таких как тренды, инсайты и дайджест, с помощью обученных нейросетевых алгоритмов. Также реализована система парсинга данных, их обработки и визуализации на сайте.

## Литература

1. Малютин Е. А., Бугайченко Д. Ю., Мишенин А. Н. Выделение текстовых трендов в социальной сети ОК // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13 № 3. С. 313–325.
2. Jacob Devlin, Ming-Wei Chang, Kenton Lee, Kristina Toutanova. Bert: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding // Proceedings of NAACL-HLT 2019, Minneapolis, Minnesota, June 2 – June 7, 2019, Association for Computational Linguistics. P. 4171–4186.
3. Русскоязычный энкодер на основе BERT [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co/cointegrated/rubert-tiny2> (дата обращения: 14.01.2023).
4. Алгоритм кластеризации K-Means из библиотеки scikit-learn [Электронный ресурс]: URL:<https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html> (дата обращения: 01.04.2023).
5. Алгоритм Agglomerative Clustering из библиотеки scikit-learn [Электронный ресурс]: URL:<https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.AgglomerativeClustering.html> (дата обращения: 01.04.2023).
6. Русскоязычная модель выделения ключевых слов из текста [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co/0x7194633/keyt5-large> (дата обращения: 10.03.2023).
7. Русскоязычная модель суммаризации текста [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co/cointegrated/rut5-base-absun> (дата обращения: 10.03.2023).
8. Исходный код программной реализации [Электронный ресурс]: URL:[https://github.com/PunkButterfly/Project-Get\\_N\\_Trends](https://github.com/PunkButterfly/Project-Get_N_Trends) (дата обращения: 22.02.2023).
9. Разработанный веб-сервис [Электронный ресурс]: URL:<https://getntrends.streamlit.app/> (дата обращения: 11.03.2023).

УДК 518.677

**Калинин П. Е.**

## Оптимизация роем частиц

*Рекомендовано к публикации доцентом Лежниной Е. А.*

**Введение.** Алгоритм оптимизации роем частиц (канонический PSO) является эвристическим. Он был предложен Р. Эберхартом и Дж. Кеннеди в 1995 году. Концепция оптимизации роем заключается в создании множества частиц, изучающих пространство поиска и взаимодействующих между собой с целью найти наибольшее значение функции и прообраз этого значения в пространстве поиска.

Сформулируем задачу оптимизации. На множестве  $D \subset R^n$  (пространстве поиска) задана функция  $f : D \rightarrow R$ . Требуется найти  $\hat{x} \in D : f(\hat{x}) \geq f(x), \forall x \in D$ .

**Реализация канонического PSO для функции двух переменных.** В работе [1] предлагается брать количество частиц в рое  $N = \lfloor 10 + 2\sqrt{\dim(D)} \rfloor$ .

До начала итераций вычисляется наибольшее значение целевой функции, найденное роем в начальный момент. Определяется данное значение как максимум из значений целевой функции по всем частицам. Также до начала итераций происходит инициализация основных параметров со значениями из [1]:

1. Коэффициент «инерции»  $w = 0,721$ ;
2. Коэффициент «памяти частицы»  $c_1 = 1,419$ ;
3. Коэффициент «сотрудничества частиц»  $c_2 = 1,419$ .

За счёт изменения данных параметров можно влиять на поведение частиц, на вероятность сходимости алгоритма к глобальному максимуму и на скорость сходимости алгоритма.

### Алгоритм

1. Инициализация роя (случайное распределение частиц по пространству поиска) и инициализация параметров модели.
2. Определение «наилучшей частицы» – частицы с наибольшим значением целевой функции.

---

*Калинин Павел Евгеньевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: pavelkalinin2020@yandex.ru, тел.: +7(981)958-75-13

### 3. Вычисление скоростей

$$v_x(t) = wv_x(t-1) + c_1r_1[p_x(t) - x(t)] + c_2r_2[g_x(t) - x(t)], \quad (1)$$

$$v_y(t) = wv_y(t-1) + c_1r_1[p_y(t) - y(t)] + c_2r_2[g_y(t) - y(t)]. \quad (2)$$

Здесь  $p_x(t)$  и  $p_y(t)$  – прообраз наибольшего значения целевой функции, найденный каждой отдельной частицей к итерации  $t$ ,  $(g_x(t), g_y(t))$  – прообраз наибольшего значения целевой функции, найденный всемодем к итерации  $t$ . Величины  $r_1$  и  $r_2$  – случайные величины от 0 до 1.

### 4. Перемещение частиц

$$x(t+1) = x(t) + v_x(t), \quad (3)$$

$$y(t+1) = y(t) + v_y(t). \quad (4)$$

5. Обновление найденных максимумов целевой функции (при необходимости, для каждой отдельной частицы и для всего роя в целом).

6. Проверка критерия останова алгоритма: найдено решение  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ :  $|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\hat{x}, \hat{y})| < \varepsilon$ , где  $(\hat{x}, \hat{y})$  – глобальный максимум целевой функции.

Будем считать, что глобальный максимум не найден, если выполняются три условия:

- $t > H$ ;
- $|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\hat{x}, \hat{y})| > \varepsilon$ ;
- $|g(t) - g(t-H)| < \delta$ .

Во всех дальнейших экспериментах взято значение  $H = 300$ . Совокупность этих условий означает, что на протяжении последних  $H$  итераций наибольшее найденное частицами значение целевой функции возросло не более, чем на  $\delta$ , при условии, что критерий останова алгоритма не выполнен.

В качестве функций взяты часто применяемые тестовые функции с различным количеством максимумов, а также некоторые овражные функции, на которых применение классических градиент-

ных методов оптимизации является неэффективным по числу итераций или по количеству вычислений.

**Проблема канонического PSO.** Согласно [2] одной из открытых проблем алгоритмов поиска за счёт роящихся частиц является поддержание баланса между диверсификацией (т. е. поиском новых решений) и интенсификацией (т. е. улучшением найденных потенциальных решений за счёт поиска решений в их окрестности). Иными словами, некоторые алгоритмы «попадают в ловушку локального максимума»: находят локальный, а не глобальный максимум из-за преждевременной сходимости алгоритма или недостаточного изучения пространства поиска. Или же наоборот, частицы чрезмерно изучают пространство поиска и быстро рассеиваются вокруг глобального максимума, обеспечивая низкую точность найденного решения на заданном числе итераций.

Улучшить баланс между диверсификацией и интенсификацией решений можно за счёт настройки параметров алгоритма, гибридации с другими метаэвристиками, применения PSO в рамках меметического алгоритма или же с помощью модификации PSO.

**Оценка эффективности алгоритмов.** При выборе алгоритма для решения конкретной задачи важно оценить, насколько эффективен тот или иной метод. Поэтому возникает необходимость в строгом определении критериев оценки эффективности алгоритмов, решающих задачу оптимизации.

Многие исследователи, сравнивающие различные метаэвристические алгоритмы оптимизации, в качестве критериев оценки эффективности выбирают (см. напр. [3, 4]):

1. Число итераций, необходимых для попадания найденного решения в заданную  $\varepsilon$ -окрестность оптимума, то есть минимальное натуральное число  $N$ , удовлетворяющее неравенству  $|f(\hat{x}) - f(x(N))| < \varepsilon$  для наперёд заданного числа  $\varepsilon$ .
2. Время работы алгоритма (при условии, что алгоритм будет работать, пока не выполнится критерий остановки).
3. Точность найденного решения за фиксированное число итераций (или в других вариантах аналог данного показателя – скорость сходимости алгоритма к оптимуму).

В работе [1] И. А. Ходашинский указывает, что на настоящий момент не существует универсального алгоритма оптимизации, способ-

ного решать разнородные задачи. Кроме того, ссылаясь на «теорему о бесплатных завтраках» Дэвида Уолперта и Уильяма Макриди, он указывает на «отсутствие необходимости оценки эффективности алгоритмов оптимизации в среднем для всех проблем», так как эффективность одного и того же алгоритма может сильно колебаться в зависимости от решаемой задачи.

В заключении [1] автор отмечает, что оптимизация эффективности алгоритма оптимизации является открытой проблемой гипероптимизации и в общем случае неизвестно, как выбрать алгоритм и каким образом задать его параметры, чтобы эффективность была максимально возможной. Однако за счёт настройки параметров конкретной модели, можно получать различные показатели эффективности алгоритма.

**Результаты экспериментов.** Относительная частота сходимости алгоритма к глобальному максимуму вычисляется как отношение «успешных» (т. е. попавших в  $\varepsilon$ -окрестность глобального максимума) экспериментов к общему числу экспериментов. Также вычисляется среднее число итераций как среднее арифметическое количества итераций в «успешных» экспериментах. Для каждой из тестовых функций было проведено 10 тыс. экспериментов. Для сравнения представлена таблица с результатами численных экспериментов с различными функциями. В ней  $M$  – количество экспериментов (запусков программы),  $S$  – количество успешных экспериментов,  $F$  – количество неуспешных экспериментов,  $V$  – вероятность того, что очередной запуск алгоритма сойдётся к глобальному максимуму,  $K$  – среднее число итераций на один успешный эксперимент,  $T$  – время работы программы (в секундах). Во всех экспериментах требуемая точность  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

**Таблица.** Результаты экспериментов

$N = 12$						
Функция	$M$	$S$	$F$	$V$	$K$	$T$
Параболоид	$10^4$	10000	0	1	42,2	225
Функция Розенброка	$10^4$	9969	31	0,9969	80	275
Функция Экли	$10^4$	9846	154	0,9846	102,7	549
Функция Бута	$10^4$	9999	1	0,9999	52,34	255
Функция Хольдера	$10^4$	4598	5402	0,4598	41,4	988

**Заключение.** В статье представлена реализация алгоритма оптимизации функции двух переменных роем частиц. Приведены результаты численных экспериментов для параболоида, функций Розенброка, Экли, Бута и Хольдера. В отличие от публикации [5], в которой исследовалась точность найденного решения, в данной статье проведено сравнение функций по частоте сходимости алгоритма к глобальному максимуму.

## Литература

1. Ходашинский М. А. Методы повышения эффективности роевых алгоритмов оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2018. № 6. С. 3–45.
2. Казакова Е. М. Краткий обзор методов оптимизации на основе роя частиц // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 39. № 6. С. 150–174.
3. Ключева И. А. Исследование характеристик сходимости алгоритма роя частиц и его модификации в решении задачи глобальной оптимизации // Международная научно-техническая и научно-методическая конференция «Современные технологии в науке и образовании». 2016. Т. 2. С. 46–50.
4. Веретехина С. В., Груздев С. А. Алгоритмы рой частиц и поиск кукушки // Заметки учёного. 2020. № 6. С. 16–30.
5. Васильев В. А., Кузнецова Д. С. Алгоритм роя частиц и анализ его эффективности для решения задач безусловной однокритериальной оптимизации // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 190–196.



УДК 519.62

Клименко И. С.

## Метод матричных отображений для решения системы дифференциальных уравнений с параметрами

*Рекомендовано к публикации доцентом Головкиной А. Г.*

**1. Введение.** Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) в правой части могут содержать параметры, определяющие характер решения уравнения. К их числу, например, относятся параметры управления, которые могут меняться со временем по заранее неизвестному закону, но при этом принимать значения из ограниченного диапазона. В этом случае находить численное решение СОДУ необходимо каждый раз, когда изменяются начальные условия или параметры системы. В работе [1] рассмотрен метод решения обыкновенных полиномиальных дифференциальных уравнений на основе матричных отображений, позволяющий получить решение, мультипликативно включающее начальные условия. В настоящей работе предлагается подход, распространяющий данную идеологию в случае изменяющихся параметров в правой части СОДУ.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим СОДУ в полиномиальной форме [2], содержащую параметры в правой части:

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{k=1}^n P_k(a)X^{[k]}, \quad (1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $X^{[k]}$  – степень Кронекера  $k$ -го порядка для фазового вектора  $X$  (является частным случаем тензорного умножения, при котором элементы получившегося вектора записываются в лексикографическом порядке без повторов),  $a \in \mathbb{R}^m$  – вектор параметров системы, компоненты которого  $a_i, i = \overline{1, m}$ , могут изменяться со временем в диапазоне  $[a_i^l; a_i^h]$ .

---

*Клименко Илья Сергеевич* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tweetklim@gmail.com, тел.: +7(900)951-88-14

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, проект ID 90317740

Для фиксированных значений вектора параметров  $a$  можно найти приближенное решение задачи Коши для системы (1) в виде полинома по кронекеровским степеням вектора начальных данных  $X = X_0$

$$X(t, a) = \sum_{k=1}^n W_k(a) X_0^{[k]}. \quad (2)$$

Алгоритм получения матриц  $W_k$  описан в статье [1]. Формула (2) определяет отображение  $\mathcal{M} : X(t_0, a) \rightarrow X(t, a)$ , зависящее от конкретных значений вектора параметров  $a$ . Далее будем рассматривать отображение значений фазового вектора на фиксированном временном интервале  $\Delta t$ , таком что  $t = t_0 + \Delta t$ .

Таким образом, чтобы получить решение системы (1) для нового вектора параметров  $a$ , потребуется заново построить матрицы отображения  $\mathcal{M}$ . Чтобы сократить количество вычислений, предлагается покрыть пространство изменения параметров СОДУ сеткой  $G$  с постоянным шагом, в узлах  $G^{j_1, \dots, j_m}$  которой необходимо рассчитать и сохранить матрицы  $W_k^{j_1, \dots, j_m}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . При этом численное решение (2) с параметрами, попадающими во внутренние или граничные точки сетки, предлагается находить с помощью интерполяции по численным решениям, вычисленным при соответствующих узловых значениях  $W_k^{j_1, \dots, j_m}$ .

**3. Построение сетки.** Для построения сетки, состоящей из минимальных замкнутых множеств, воспользуемся триангуляцией Делоне: для заданного множества точек  $S$  в  $m$ -мерном пространстве, при котором для любого  $(m - 1)$ -мерного симплекса все точки из  $S$  за исключением точек, являющихся его вершинами, лежат вне гиперсферы [3].

**4. Интерполяция весовых коэффициентов с использованием барицентрических координат.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^m$  выбраны базисные точки  $M_0, \dots, M_m$  так, что

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Здесь  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$  – декартовы координаты точки  $M_j$ . В этом случае координаты  $(a_1, \dots, a_m)$  произвольной точки  $M$  можно однозначно

но представить следующим образом:

$$a_i = \sum_{j=0}^m \beta_j a_{ij}, \quad i = \overline{1, m},$$

где  $\sum_{j=0}^m \beta_j = 1$ . Величины  $(\beta_0, \dots, \beta_m)$  называются барицентрическими координатами точки  $M$ .

С использованием интерполяции по барицентрическим координатам можно определить численное решение (2), соответствующее любому вектору параметров из заданного диапазона значений.

Рассмотрим решение  $X(t, \bar{a})$  системы (1), где координаты вектора  $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \notin G^{j_1, \dots, j_m}$ . Тогда с использованием интерполяции по барицентрическим координатам узловых значений сетки решение может быть вычислено следующим образом:

$$X(t, \bar{a}) = \sum_{j=0}^m \beta_j \sum_{k=1}^n W_k(a_j) X_0^{[k]} = \sum_{j=0}^m \beta_j X(t, a_j), \quad (4)$$

где  $\{a_j\}_{j=0}^m$  образует минимальное замкнутое множество, которому принадлежит  $\bar{a}$ . Множество  $\{a_j\}_{j=0}^m$  определяется по построенной сетке единственным образом из условия  $\beta_j \geq 0, \forall j = \overline{0, m}$ .

В случае  $m = 1$  имеем линейную интерполяцию по двум точкам:

$$X(t, \bar{a}) = \sum_{j=0}^1 \beta_j X(t, a_j) = \frac{\bar{a} - \bar{a}_0}{\bar{a}_1 - \bar{a}_0} X(t, a_0) + (1 - \beta_0) X(t, a_1).$$

Случай  $m = 2$  проиллюстрирован на рис. 1, где  $D = X(t, \bar{a})$ ,  $A = X(t, a_1)$ ,  $B = X(t, a_2)$ ,  $C = X(t, a_3)$ . Для произвольного значения  $m$  искомые барицентрические координаты по минимальному замкнутому множеству определяются из решения системы линейных уравнений

$$D\beta = \bar{a},$$

где матрица  $D$  составлена из координат базисных точек (3),  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)$  – искомые барицентрические координаты.

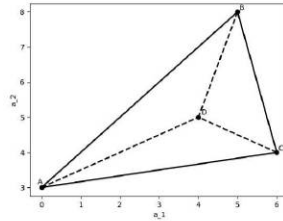


Рис. 1. Результат интерполяции для двух параметров

**5. Результаты расчетов.** Рассмотрим в качестве примера СОДУ Лотки–Вольтерры:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - \beta y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (-\gamma + \delta x)y, \end{aligned} \quad (5)$$

правая часть которой зависит от параметров. Зафиксируем два параметра значениями  $\gamma = \alpha = 1$  и предположим, что  $\beta = a_1$  и  $\delta = a_2$  могут меняться с течением времени. В соответствии с алгоритмом, представленном в [1], вычислим матрицы весов  $W_k$  при всевозможных комбинациях значений параметров  $a_1 = \{0, 1\}$  и  $a_2 = \{0, 2\}$ . Далее, в соответствии с формулой (4) найдем численное решение  $X(t, \bar{\mathbf{a}})$  при  $\bar{\mathbf{a}} = (0, 5; 0, 7)$  и сравним его с численным решением, полученным с использованием явного метода Рунге–Кутты четвертого порядка.

На рис. 2 представлены результаты интегрирования уравнения (5), полученные методом Рунге–Кутты четвертого порядка и с помощью интерполяции по барицентрическим координатам. Также построен модуль отклонения численных решений в каждой точке по времени. Модуль разности не превосходит 2%.

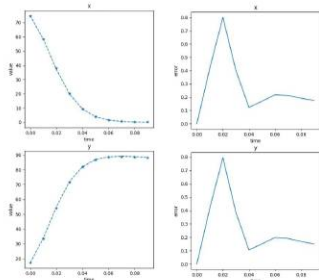


Рис. 2. Результаты интегрирования

ях параметров без необходимости заново запускать численный алгоритм. Метод проиллюстрирован на примере СОДУ Лотки–Вольтерры с двумя изменяющимися параметрами в правой части. Результаты сравнивались с методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

**6. Заключение.** Рассмотренный подход распространяет идею численного решения СОДУ с использованием метода матричных отображений на случай изменяющихся параметров в правой части. Благодаря интерполяции по небольшому количеству матриц отображения, рассчитанных заранее, имеется возможность получить численное решение с высокой точностью при новых значениях

## Литература

1. Клименко И. С. Реализация метода матричных отображений для решения системы дифференциальных уравнений // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 53–57.
2. Головкина А. Г., Козынченко В. А., Клименко И. С. Метод последовательных приближений для построения модели динамической полиномиальной регрессии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Т. 18. № 4. С. 487–500.
3. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение. Томск: Изд-во Томского университета, 2002. 128 с.

УДК 004.932.1

Коваленко Л. А., Блеканов И. С., Ежов Ф. В.,  
Разумилов Е. С.

## Инструменты краудсорсинга для анализа и обработки медицинских изображений в виде снимков КТ

**1. Введение.** За последние несколько лет наблюдается все большая интенсивность появления научных исследований, в которых применяются методы и инструменты искусственного интеллекта для решения различных задач в области медицины и здравоохранения в целом. Направление, которое занимается продвижением и расширением внедрения информационных технологий и технологий искусственного интеллекта в сферу здравоохранения, называется «Медицинские технологии» (Medtech) [1].

К наиболее популярным технологиям этой сферы относятся программные и аппаратные решения, направленные на получение, обработку и анализ медицинских изображений в виде рентгеновских снимков, снимков КТ и МРТ [2, 3].

Для разработки эффективных методов и алгоритмов анализа медицинских изображений требуется наличие качественных наборов данных, подготовленных высококвалифицированными специалистами-экспертами (врачами по соответствующим направлениям медицины). Построение таких наборов является нетривиальной задачей и требует не только точности в разметке данных, но и наличия эргономичных и специализированных инструментов краудсорсинга [4] по разметке и работе с проприетарными форматами медицинских данных (например, DICOM).

---

*Коваленко Лев Алексеевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054731@student.spbu.ru тел.: +7(981)855-10-97

*Блеканов Иван Станиславович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.blekanov@spbu.ru, тел.: +7(921)339-53-43

*Ежов Федор Валерьевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: morememes@yandex.ru, тел.: +7(921)867-32-56

*Разумилов Егор Сергеевич* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068863@student.spbu.ru, тел.: +7(981)708-22-34

В настоящее время существует множество различных краудсорсинговых инструментов, систем и платформ для разметки различных типов и форматов данных [5–7], включая медицинские. Однако не существует единого, доступного для общего использования, универсального программного комплекса, отвечающего всем важным функциональным требованиям с учетом специфики работы врача и инженеров по анализу данных. Существующие специализированные сервисы с полным набором функциональности для разметки DICOM-изображений являются либо платными, либо имеют региональные ограничения по использованию.

В данной работе сформулированы функциональные требования, построена веб-ориентированная система краудсорсинга для разметки медицинских изображений с учетом этих требований, а также проведен сравнительный анализ с известными инструментами разметки данных.

**2. Постановка задачи.** В работе поставлена задача проектирования и разработки функционального прототипа веб-ориентированной системы для разметки медицинских данных формата DICOM [8]. К системе выдвигаются следующие функциональные требования:

- удаленность работы ассессоров;
- наличие ролевой модели ассессоров;
- защищенность персональных и медицинских данных;
- импортозамещенность (доступность работы в РФ);
- мониторинг и контроль процесса разметки;
- поддержка стандартных функций обработки и представления формата DICOM.

**3. Специфика медицинских данных.** DICOM [9] является общепринятым стандартом хранения, передачи и обработки медицинской информации о пациенте. Вместе с тем существует проблема прямого доступа к изображениям: для оптимального хранения DICOM использует внутренний бинарный формат. Для визуализации КТ/МРТ снимков требуется выполнить считывание и

преобразование бинарных данных в изображение. Также стандарт DICOM позволяет хранить данные нескольких пациентов, несколько исследований и съемок для каждого из них. Для разметки необходимо корректно сгруппировать снимки в DICOM для каждой съемки каждого пациента. Для разметки данные нужно сгруппировать по съемкам.

Кроме того, процесс аннотации снимков DICOM (в рамках краудсорсинга) сводится к преобразованию изображений в формате DICOM в стандартный формат (например, png), который непосредственно размечается ассессорами. В результате работы этого процесса многие краудсорсинговые системы теряют информацию о связи размеченного изображения в стандартном формате с исходными данными DICOM, что может оказать негативное влияние на качество методов анализа данных.

**4. Обзор существующих инструментов.** В работе рассмотрены стандартные и специализированные инструменты краудсорсинга для разметки изображений.

Для коллаборативной онлайн разметки изображений часто используется V7 [5]. Это онлайн-сервис, позволяющий ассессорам совместно проводить разметку и аннотацию изображений. Кроме изображений, сервис позволяет аннотировать видео, документы и данные DICOM, но только в платной версии. Также этот инструмент предоставляет набор предобученных моделей для полуавтоматической сегментации. Такие же возможности предоставляет коллаборативная онлайн платформа Epsord [6] для разметки DICOM и NifTi. Данный сервис является платным, в пробной версии предоставляется весь функционал с ограничением на количество ассессоров и объем размечаемых данных. Главной отличительной чертой инструмента является отображение DICOM в различных проекциях (рис. 1), а также построение 3D-модели данных.

Кроме специализированных сервисов разметки DICOM-данных рассматривались и общие инструменты разметки изображений Computer Vision Annotation Tool и Label Studio. Computer Vision Annotation Tool (CVAT) [7] – это программное обеспечение с открытым исходным кодом, разработанное Intel, которое имеет простой и понятный пользовательский интерфейс и поддерживает основные функции, включая прямоугольники, многоугольники, полилинии и точечные аннотации. CVAT также поддерживает загрузку моделей



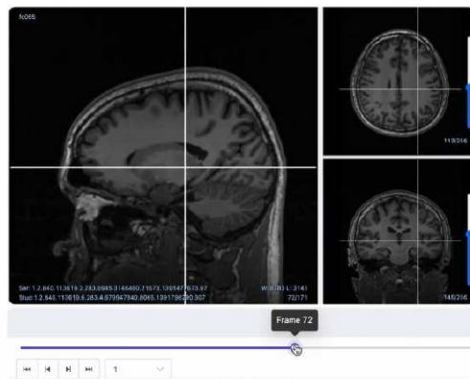


Рис. 1. Отображение DICOM-данных в различных проекциях

для автоматической аннотации и может быть развернут на собственной инфраструктуре. Label Studio [10] – это тоже инструмент с открытым исходным кодом. Он поддерживает широкий спектр аннотаций, включая классификацию изображений, обнаружение объектов, семантическую сегментацию. Кроме изображений, он позволяет размечать и другие форматы данных: аудио, видео, текст. Кроме этого, он позволяет загрузить обученную модель для автоматизации и ускорения разметки. Этот сервис можно развернуть на своей инфраструктуре.

**5. Предлагаемое решение.** В работе реализовано решение для разметки данных формата DICOM, а также проведен сравнительный анализ с рассмотренными в пункте 4 сервисами разметки.

**5.1. Реализация.** В работе спроектирован и реализован сервис по разметке DICOM-данных на основе CVAT. Архитектура сервиса представлена на рис. 2.

Также авторами был разработан модуль предобработки данных (Preprocessing module, см. рис. 2) на языке Python для преобразования DICOM в набор съемок из изображений формата png и последующего сохранения в базу данных информацию о связи изображения с исходным слайсом в DICOM. Далее каждая съемка загружалась как отдельная задача для разметки ассессорам в CVAT. Такие доработки позволили использовать сервис CVAT для разметки

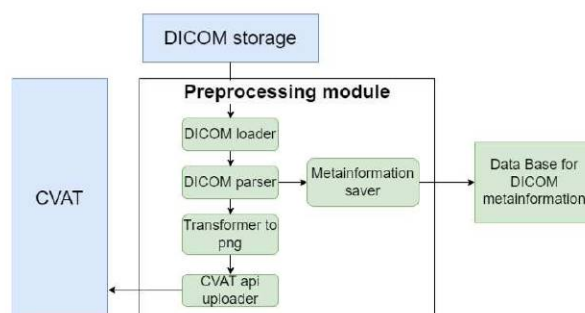


Рис. 2. Архитектура предлагаемого решения

данных DICOM. Предложенное решение позволяет сохранить взаимосвязь между разметкой и DICOM-данными, а также автоматизировать загрузку DICOM-данных для разметки.

**5.2. Сравнительный анализ.** В работе был поставлен эксперимент по сравнительному анализу функциональных требований у разработанного программного комплекса (Our solution) и 4 известных стандартных/специализированных инструментов краудсорсинга. Результаты сравнительного анализа представлены в таблице.

Таблица. Сравнительный анализ инструментов краудсорсинга

Функциональные требования	Our solution	V7	Encord	CVAT	Label studio
Удаленность работы ассессоров	+	+	+	+	+
Наличие ролевой модели ассессоров	+	—	—	+	+
Self-hosted сервис	+	платно	платно	+	+
Импортозамещенность	+	—	—	+	+
Мониторинг и контроль процесса разметки	+	платно	платно	+	+
Поддержка стандартных функций обработки и представления формата DICOM	+	платно	платно	—	—
Связь исходных данных и разметки	+	платно	платно	—	—
Защищенность персональных и медицинских данных	+	платно	платно	—	—

**6. Заключение.** Разработан собственный краудсорсинговый сервис на основе решения с открытым исходным кодом CVAT, адаптированного для разметки медицинских изображений в формате DICOM и позволяющего в процессе разметки сохранять связь между аннотацией изображений и исходными данными DICOM.

Сравнительный анализ показал, что предложенное решение предоставляет весь функционал для разметки DICOM, имеющийся в платных решениях, и может быть развернуто на собственной инфраструктуре для обеспечения защищенности медицинских и персональных данных.

Разработанный инструмент планируется использовать в дальнейшем для разметки снимков DICOM сердечно-сосудистой системы человека и разработки медицинских технологий искусственного интеллекта для автоматизации диагностики заболеваний сердца и смежных органов.

## Литература

1. Trubetskaya A., Manto D., McDermott O. A review of lean adoption in the irish MedTech industry // Processes. 2022. Vol. 10. No 391. P. 1–15.
2. Hatamizadeh A., Tang Y., Nath V. et al. UNETR: transformers for 3D medical image segmentation // Proceedings of the IEEE/CVF Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV). 2022. P. 574–584.
3. Ji Y., Bai H., Yang J. et al. AMOS: A large-scale abdominal multi-organ benchmark for versatile medical image segmentation // NeurIPS 2022 Datasets and Benchmarks [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/2206.08023.pdf> (дата обращения: 14.03.23).
4. Kim T. S., Malpani A., Reiter A. et al. Document details – Crowdsourcing annotation of surgical instruments in videos of cataract surgery // Lecture Notes in Computer Science. 2018. Art. no 11043. P. 121–130.
5. Image labeling service V7 [Электронный ресурс]: URL:<https://www.v7labs.com/> (дата обращения: 14.03.23).

6. ENCORD Collaborative DICOM & NIFTI Annotation Platform [Электронный ресурс]: URL:<https://encord.com/dicom/> (дата обращения: 14.03.23).
7. Image labeling service CVAT [Электронный ресурс]: URL:<https://www.cvat.ai/> (дата обращения: 14.03.23).
8. Digital imaging and communications in medicine [Электронный ресурс]: URL:<https://www.dicomstandard.org/> (дата обращения: 14.03.23).
9. Mustra M., Delac K., Grgic M. Overview of the DICOM standard // 50th International Symposium ELMAR. 2008. P. 39–44.
10. Image labeling service Label Studio [Электронный ресурс]: URL: <https://labelstud.io/> (дата обращения: 14.03.23).

УДК 004.932

Ларин Е. С., Коваленко Л. А., Блеканов И. С., Ким Г. И.

### Методы построения 3D-модели аорты сердца и её сечения для автоматизации процесса КТ-диагностики

**1. Актуальность работы.** Попытки автоматизации анализа КТ-снимков начались примерно одновременно с появлением КТ. В последнее время направление цифровизации и автоматизации в медицине переживает небывалый подъём: появились такие направления, как телемедицина и *MedTech*.

Актуальность задачи цифровизации лечения и диагностики подтверждает и наличие большого количества МИАС, которые занимаются сопровождением пациента и аналитикой: рекомендуют методы лечения, помогают выявлять заболевания с помощью, например, анализа изображений [1, 2].

Одной из интересных для исследования областей организма является сердечно-сосудистая система, являющаяся жизненно важным органом. Однако исследований в сфере применения методов искусственного интеллекта для изучения этой системы органов крайне мало, несмотря на актуальность данной задачи.

В данной работе делается акцент на автоматизацию процесса диагностики аорты сердца, в частности, рассматриваются методы построения сечения цифровой 3D-модели аорты, которые позволяют построить нейросетевые модели для автоматической детекции аномальных срезов аорты, требующих оперативного вмешательства.

---

*Ларин Евгений Сергеевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054751@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-71-59

*Коваленко Лев Алексеевич* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054731@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-71-59

*Блеканов Иван Станиславович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.blekanov@spbu.ru, тел.: +7(812)428-71-59

*Ким Глеб Ирламович* – сердечно-сосудистый хирург кардиохирургического отделения с кабинетом рентгенэндоваскулярных диагностики и лечения, к. м. н., ФГБУ ВО СПбГУ Клиника высоких медицинских технологий им. Н. И. Пирогова; e-mail: gikim.cor@gmail.com, тел.: +7(812)676-25-25

## 2. Постановка задачи и предлагаемые методы решения.

Для построения 3D-модели аорты сердца и её срезов в работе использовался набор КТ-снимков в формате DICOM, содержащих информацию о размерах пикселя, расстояниях между срезами и двумерные снимки [3].

Существуют несколько подходов к построению 3D-модели аорты. Наиболее актуальными являются следующие три.

- Первый заключается в детектировании аорты сердца на 2D-снимках с последующим построением трёхмерной модели по ним. Такой подход применяется, например, в одном из режимов работы программного инструмента с открытым исходным кодом *Sim Vascular* [4] и в работе [5].
- Второй подход основан на построении 3D-модели с выделенной аортой сердца по полным снимкам КТ. Данный подход реализуется в том же программном инструменте *Sim Vascular* [4] и в работе [6].
- Гибридный подход [4] заключается в последовательном применении первого и второго методов.

Отметим, что первый подход предъявляет более низкие требования к исходным данным и производительности, но с другой стороны, второй подход обеспечивает полноту и детализацию результатов, что продемонстрировано, например, в работе [5].

**2.1. Реализация алгоритма на основе 2D-снимков аорты.** В работе предложен и реализован Алгоритм 1 построения 3D-модели аорты и её сечений на основе анализа 2D-снимков (слайсы КТ-снимков).

Отметим, что в данном алгоритме необходим также алгоритм выбора точек и нормалей секущих плоскостей.

**2.2. Примеры результатов представленного алгоритма.** На рис. 1 представлены результаты работы Алгоритма 1. На рис. 1a показана одна из масок КТ-снимка, полученная на шаге 1 алгоритма, на рис. 1b – 3D-модель аорты в натуральную величину, полученная на шаге 2 алгоритма. На рис. 1c показан пример сечения аорты, полученный на шаге 3 алгоритма. В данном примере сечение построено в плоскости, параллельной исходным 2D-снимкам, но это необязательное условие.

**3. Сравнение с другими подходами.** Сравним указанный Алгоритм 1 с подходами, упоминаемыми в других работах.

---

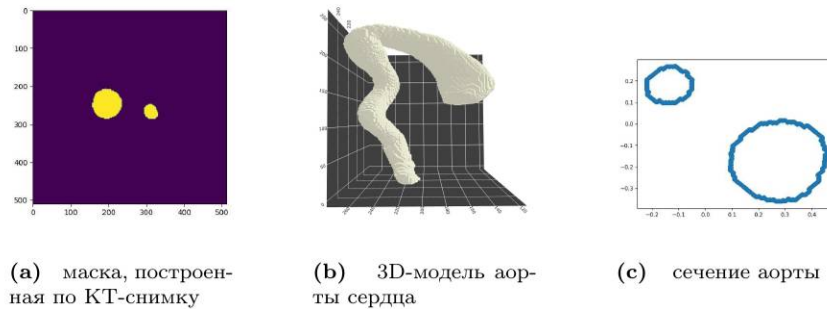
**Алгоритм 1:** Построение 3D-модели аорты и её сечений

---

**Входные данные:** Снимки КТ в формате DICOM, погрешность  $\varepsilon$ , способ выбора секущих плоскостей.

**Выходные данные:** 3D-модель восходящей аорты и набор сечений.

1. Извлечение аорты из 2D-изображений:
    - из исходного *DICOM*-файла извлекаются 2D-снимки, координата смещения снимка и размер пикселя в миллиметрах;
    - строится маска аорты на изображениях (например, с помощью модели *TransUNet* [7]);
    - применяется полученная бинаризованная маска к исходным изображениям.
  2. Построение полигональной модели аорты сердца осуществляется с помощью алгоритма *Marching Cubes* [8].
  3. Построение сечения аорты по точке и нормали секущей плоскости:
    - по точке секущей плоскости вычисляется вектор смещения, по нормали и двум произвольным точкам секущей плоскости строится  $(4 \times 4)$ -матрица поворота  $\mathbf{A}$ ;
    - для всех точек  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]$  добавляется четвертая координата, равная единице, строятся координаты в системе координат, связанной с секущей плоскостью:
$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_{11} & \dots & \widehat{x}_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x}_{14} & \dots & \widehat{x}_{N4} \end{pmatrix};$$
    - выбираются точки, удовлетворяющие условию  $|\widehat{x}_{.3}| < \varepsilon$ ;
    - возвращается построенная на шаге 2 модель аорты сердца и первые две координаты точек:  $\begin{bmatrix} \widehat{x}_{11} & \dots & \widehat{x}_{N1} \\ \widehat{x}_{12} & \dots & \widehat{x}_{N2} \end{bmatrix}$ .
-



**Рис. 1 :** Результаты каждой стадии работы Алгоритма 1.

**3.1. SimVascular.** В программном комплексе *SimVascular* в обоих режимах рассматриваются DICOM снимки не как набор срезов, параллельных плоскости  $OXY$ , а как трёхмерный тензор данных. Поэтому, в 2D-режиме построение аорты осуществляется в направлении, обратном Алгоритму 1: сначала строится направляющая (в представленном алгоритме это аналог задаваемой секущей плоскости), перпендикулярно которой строятся «сегменты», которые затем объединяются. Важно отметить, что в работе [4] рассматривается не только аорта сердца, но и другие кровеносные сосуды.

Выделение кровеносных сосудов в двумерном случае производится двумя способами:

1. Поиск резкого изменения интенсивности просвета путём увеличения контура, центр которого расположен в точке пересечения направляющей и рассматриваемого среза.
2. Строятся изокривые по яркости пикселей, затем выбирается кривая с наименьшим радиусом, центром считается точка пересечения направляющей и рассматриваемого среза.

В 3D-случае выделение кровеносных сосудов производится первым способом, с той лишь разницей, что вместо контура рассматривается поверхность. Отметим, что для работы этого метода также требуются «точки инициализации» (аналог направляющей в 2D-снимках), которые можно получить, например, как результат 2D-режима.

**3.2. Подходы других работ.** В работе [5] в качестве базового метода рассматривается метод, аналогичный *SimVascular*, с той



разницей, что срезы берутся параллельные плоскости  $OXY$ , как и в Алгоритме 1. Выделение аорты осуществляется с помощью поиска резкого изменения интенсивности просвета.

В работе [9] использовался полностью нейросетевой подход как к поиску точек построения замеров, так и к самому выделению аорты. В качестве входных данных рассматривались снимки КТ как трёхмерный тензор. Выбор точек замера диаметра аорты осуществлялся с помощью глубокого обучения с подкреплением [10], а выделение аорты осуществлялось сетью *DI2IN*.

**4. Заключение.** Построение модели аорты представлено в большинстве работ, связанных с анализом заболеваний сердечно-сосудистой системы. При этом чаще используются модели аорты, построенные по снимкам КТ, рассматриваемым как трёхмерный тензор, чем по 2D-изображениям, объединяемым впоследствии в трёхмерный объект.

В данной работе предложен алгоритм построения 3D-модели аорты и её сечений, который планируется использовать для построения нейросетевых моделей автоматической детекции аномальных срезов аорты, требующих оперативного вмешательства.

В дальнейшем планируется построить гибридный метод, основанный на использовании указанного алгоритма для анализа 2D-снимков с использованием 3D-методов.

## Литература

1. Батяев А. М. Проект модели многопрофильного центра по оказанию специализированной медицинской помощи взрослому населению и членам их семей на примере Тюменской области и Ханты-Мансийского автономного округа – Югры // Уроки пандемии COVID-19 для здравоохранения и общества. 2022. С. 324–343.
2. Смалюк А. Ф., Жуковец А. Г., Тризна Н. М. Регистрация дерматоскопических изображений новообразований кожи и выявление структурных отличий // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 4. С. 65–72.
3. DICOM standard browser URL:<https://dicom.innolitics.com/ciods> (дата обращения: 12.03.2023).

4. Updegrove A., Wilson N. M., Merkow J. et al. SimVascular: an open source pipeline for cardiovascular simulation // *Annals of Biomedical Engineering*. 2017. Vol. 45. No 3. P. 525–541.
5. Lareyre F., Adam C. et al. A fully automated pipeline for mining abdominal aortic aneurysm using image segmentation // *Scientific reports*. 2019. Vol. 9. No 1. Art. no 13750.
6. Duquette A. A., Lalande A. et al. 3D segmentation of abdominal aorta from CT-scan and MR images // *Computerized Medical Imaging and Graphics*. 2012. Vol. 36. No 4. P. 294–303.
7. Chen J., Lu Y. et al. Transunet: Transformers make strong encoders for medical image segmentation // arXiv preprint [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/2102.04306.pdf> (дата обращения: 12.03.2023).
8. Lewiner T., Lopes H. et al. Efficient implementation of marching cubes' cases with topological guarantees // *Journal of graphics tools*. 2003. Vol. 8. No 2. P. 1–15.
9. Pradella M., Weikert T. et al. Fully automated guideline-compliant diameter measurements of the thoracic aorta on ECG-gated CT angiography using deep learning // *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*. 2021. Vol. 11. No 10. Art. no 4245.
10. Ghesu F. C., Zheng Y. et al. Multi-scale deep reinforcement learning for real-time 3D-landmark detection in CT scans // *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 2017. Vol. 41. No 1. P. 176–189.

УДК 004.852

Оленев Р. О.

## Прогнозирование фондовых индексов с использованием моделей ARIMA и LSTM

*Рекомендовано к публикации доцентом Козыньченко В. А.*

**1. Введение.** Фондовый индекс – это индикатор состояния рынка ценных бумаг, позволяющий оценить состояние рынка и определить, на каком этапе экономического цикла он находится. Получение качественных прогнозов основных индикаторов фондового рынка является важной задачей алгоритмической торговли. В последние десятилетия алгоритмическая торговля активно развивается благодаря множеству факторов: значительному развитию методов машинного обучения, развитию технологий работы с данными и их анализа, росту возможностей для хранения и обработки больших объемов данных. В связи с этими тенденциями исследование применимости различных алгоритмов машинного обучения для прогнозирования фондовых индексов является актуальной задачей.

**2. Постановка задачи.** Даны три одномерных временных ряда, которые представляют собой цену закрытия соответствующих фондовых индексов: Dow Jones, S&P 500, индекс Мосбиржи. Данные по временным рядам были получены из открытых источников [1]. Требуется спрогнозировать цену закрытия фондовых индексов на один день вперед с применением моделей ARIMA и LSTM. Цель работы – выявление наилучшей модели среди рассматриваемых путем сравнения качества прогнозов с помощью метрики

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|X_t - \bar{X}_t|}{X_t},$$

где  $n$  – количество прогнозов,  $\bar{X}_t$  – спрогнозированное значение цены в момент времени  $t$ ,  $X_t$  – реальное значение цены в момент вре-

---

*Оленев Роман Олегович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: roman.olenev.cs@mail.ru, тел.: +7(950)441-59-58

мени  $t$ . Для того, чтобы оценить качество моделей, исходные временные ряды были разбиты на тренировочные и тестовые выборки. Оценка параметров моделей производилась на основе тренировочной выборки – данных за период с 01.01.2001 по 01.01.2016. Сравнение моделей по значению критерия качества производилось с помощью тестовой выборки – данных за период с 02.01.2016 по 01.01.2022. Разделение данных на примере индекса Мосбиржи представлено на рис. 1. Вычисления производились с помощью языка программирования Python.

### 3. Модель ARIMA.

ARIMA – обобщение модели ARMA (Autoregressive moving average), при котором модель работает с интегрированным рядом, полученным с помощью взятия разностей некоторого порядка [2]. Модель  $ARIMA(p, d, q)$  может быть представлена следующим образом:

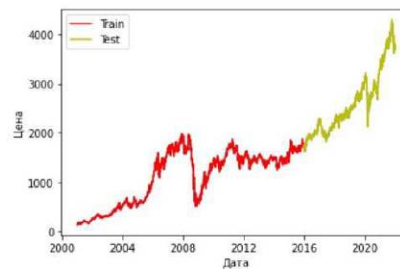


Рис. 1. Цена закрытия индекса Мосбиржи

$$\Delta^d X_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta^d X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

где  $p$  – порядок процесса авторегрессии,  $q$  – порядок процесса скользящего среднего,  $\varphi_i, \theta_j, c$  – параметры модели,  $\Delta^d$  – оператор взятия разности порядка  $d$ ,  $X_t$  – значение временного ряда в момент времени  $t$ ,  $\varepsilon_t$  – белый шум с нулевым средним. Для реализации модели использовались библиотеки `pmdarima` [3] и `statsmodels` [4].

**4. Модель LSTM.** LSTM (Long short-term memory) – разновидность архитектуры рекуррентных нейронных сетей [5]. Основным элементом данной архитектуры является LSTM-блок, классическая реализация которого представлена на рис. 2. Архитектура нейронной сети состоит из одного LSTM-блока и выходного полносвязного слоя. Гиперпараметры модели представлены в таблице 1, 2.

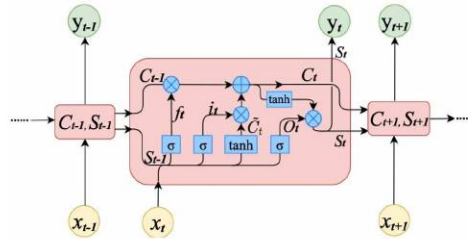


Рис. 2. LSTM-блок

Таблица 1. Параметры модели

Гиперпараметр	
Число LSTM-блоков	1
Число нейронов в слоях LSTM	16
Число нейронов в выходном слое	1
Функция активации в выходном слое	<i>Leaky ReLU</i> , $\alpha=0.1$

Таблица 2. Параметры обучения

Гиперпараметр	
Оптимизатор	<i>Adam</i>
Learning rate	0.001
Функция потерь	<i>MAE</i>
Количество эпох	100
Batch-size	32

Для корректной работы модели данные были подвергнуты нормализации

$$\hat{X}_t = \frac{X_t - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}}, \quad t = \overline{1, n},$$

где  $n$  – количество значений в нормализуемой выборке,  $X_{\max}$ ,  $X_{\min}$  – максимальное и минимальное значения в выборке соответственно,  $X_t$  – значение временного ряда в момент времени  $t$ ,  $\hat{X}_t$  – нормализованное значение временного ряда в момент времени  $t$ . На вход модели подается вектор предыдущих значений ряда размерности  $r$ ,

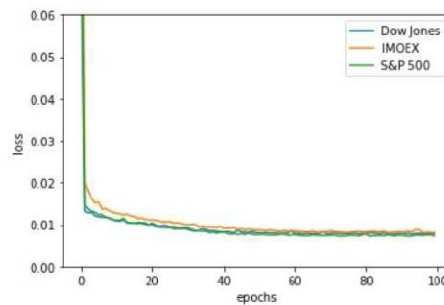
на основе которого модель делает прогноз. Опытным путем было выбрано значение  $r = 21$ . Для реализации модели использовалась библиотека Keras [6].

**5. Результаты.** Значения метрики MAPE на тестовой выборке для выбранных моделей и соответствующих фондовых индексов приведены в таблице 3.

**Таблица 3.** Значения метрики MAPE на тестовой выборке

Model\idx	Dow Jones	S&P 500	IMOEX
ARIMA(2,1,2)	0,7071	0,6947	0,7640
ARIMA(0,1,2)	0,7065	0,6945	0,7640
ARIMA(1,1,1)	0,7066	0,6945	0,7640
LSTM	0,6937	0,6813	0,7644

Зависимость функции потерь от количества эпох во время обучения нейронной сети LSTM представлена на рис. 3.



**Рис. 3.** Функция потерь в зависимости от количества эпох обучения нейронной сети LSTM

Модель LSTM показала наилучший результат на фондовом индексе Dow Jones и S&P 500, однако результат для индекса Мосбиржи оказался хуже, чем у моделей ARIMA. Предполагается, что это может быть связано с различиями в тренировочной и тестовой выборке данного индекса, что оказывает существенное влияние на обучение и последующую работу нейронной сети. Среди моделей ARIMA наилучшей оказалась модель с параметрами  $(0, 1, 2)$ .

**6. Заключение.** Проведен сравнительный анализ нескольких реализаций моделей типа ARIMA и LSTM. Удалось выявить модели, дающие наиболее качественные прогнозы для каждого фондового индекса.

## Литература

1. Investing.com – котировки и финансовые новости [Электронный ресурс]: URL:<https://www.investing.com/> (дата обращения: 10.03.23).
2. Суслов В. И., Ибрагимов Н. М., Талышева Л. П., Цыплаков А. А. Эконометрия: Учебное пособие. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2005. 742 с.
3. Pmdarima [Электронный ресурс]: // PyPI. URL:<https://pypi.org/project/pmdarima/> (дата обращения: 12.03.23).
4. Statsmodels [Электронный ресурс]: URL:<https://www.statsmodels.org/stable/index.html> (дата обращения: 10.03.23).
5. Shi J., Jain M., Narasimhan G. Time series forecasting (TSF) using various deep learning models [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/2204.11115> (дата обращения: 11.03.23).
6. Keras: the Python deep learning API [Электронный ресурс]: URL:<https://keras.io/> (дата обращения: 10.03.23).

УДК 519.175.3

Пономарев Ю. Ю.

### Вопросы точных оценок характеристик деревьев при моделировании термов предметных областей, нейросетей, XML данных

**Введение.** Современные информационные системы порождают термы определенной глубины вложенности. Термы могут выражать: XML данные, нейронные сети в виде деревьев решений, обычное их значение как в статье [1]. Общие постановки современных задач для создания информационных систем требуют анализа и синтеза деревьев. Это приводит нас не только к необходимости совершенствовать алгоритмы их подсчета на основании теорем из монографии Ф. Харари и Э. Палмера [2], но и создавать формулы для их построения при том или ином способе эффективного кодирования в ЭВМ. Статья посвящена эффективной системе DOWN-UP кодов и в ней содержится ряд важных теорем, дающих решение множества практических задач.

**Описание предметной области.** Рассмотрим понятие предметной области на основании статьи [1].

Предметная область  $\mathbf{D}$  спецификации  $(c_0^0, c_1^{m_1}, \dots, c_n^{m_n})$  — совокупность термов, получаемых из данного количества  $c_0 \neq 0$  знаков переменных  $x_1, \dots, x_{c_0}$  и данных количеств  $c_i$   $m_i$ -местных функциональных знаков

$$f_1^{(m_1)}, \dots, f_{c_i}^{(m_i)},$$

где  $i = 1, \dots, n$ , соединяемых с помощью композиции.

Терм, как обычно, определяется индуктивно: 1) переменная есть терм, 2) если  $f_{(i)}$  —  $i$ -местный функциональный знак и  $a_1, \dots, a_i$  — термы, то  $f_{(i)}(a_1, \dots, a_i)$  — терм, 3) никаких других термов не существует.

---

*Пономарев Юрий Юрьевич* — эксперт, ООО "Автоматизированные системы, консалтинг, информационные технологии"; e-mail: yura\_graph@mail.ru, тел.: +7(903)537-46-11



Глубиной вложенности данного вхождения термина  $a \in \mathbf{D}$ , как подтерма в терм  $b \in \mathbf{D}$ , назовем число термов, содержащих данное вхождение. Максимальную из глубин вложенности всех вхождений переменных в терм назовем глубиной термина. На языке функциональных деревьев, представляющих структуру термина, глубина термина — высота соответствующего функционального дерева.

**Постановка задачи.** Дополним термины предметных областей описанием XML данных понятием “namespace”, т. е. некоторым признаком любого термина, определяемого в заголовке файла и служащего для разделения термов по пространствам имен внутри предметной области данных.

Дополним термины предметных областей описанием нейросети в виде дерева решений, совокупностью термов-решающих правил. Так получим, в случае с XML данными, лес из упорядоченных функциональных деревьев. В случае дерева решений получим аналогичное по строению функциональное упорядоченное дерево.

В статье будут рассмотрены способы анализа и синтеза корневых деревьев с заданным числом вершин и высот концевых вершин, максимальной высоты концевой вершины по точным параметрам его структурных элементов — числа листьев, высот концевых вершин, числа вершин.

**Основные результаты.** Изложение материала ведем на языке DOWN-UP кодов, которые определяются рекурсивно.

Здесь и далее, для простоты изложения, положим  $A = a_1$ ,  $a_1 = 1$  либо  $A = 1$  — граничное условие на код, единичный код. В общем виде код есть последовательность из элементов с четными и нечетными индексами:

$$A = \{a_i, i \in (2n + 1), n \in N, a_i, i \in (2n), n \in N, a_i \in N \cup 0\},$$

при этом элементы, имеющие четные индексы строго меньше обеих соседствующих с ними элементов с нечетными индексами,  $|A|$  — число элементов в коде или размерность кода, число всегда нечетное,  $|A| \geq 3$ .

Как указано в [3], существует биекция между множеством корневых деревьев и DOWN-UP кодов, что позволяет распространять результаты, полученные для DOWN-UP кодов, на все множество упорядоченных корневых деревьев без потери общности сформулированных в статье утверждений. Для удобства перечисления деревьев,

DOWN-UP коды создаются с минимальными возможными нечетными элементами (и, соответственно, минимальными четными).

Автором в статье [4] представлено несколько теорем и следствий из них, которые утверждают, что многие особенности DOWN-UP кода могут быть установлены в виде описания его элементов. Для удобства дальнейшего изложения приведем эти теоремы.

**Теорема 1** [4]. *Максимальная размерность  $|A|$  DOWN-UP кода для дерева с  $k$  вершинами и высотой  $h$  концевых вершин над корнем равна*

$$L_{max} = 2k - 2h - 1.$$

**Теорема 2** [4]. *Минимальную размерность  $|A|$  DOWN-UP кода для дерева с  $k$  вершинами и высотой концевых точек над корнем равной  $h$ , дает формула:*

$$L_{min} = 2 \left\lceil \frac{k - h - 1}{h} \right\rceil + 1,$$

где  $\lceil \cdot \rceil$  – операция взятия целого числа, ближайшего большего данного дробного.

Там же в [4] автором была введена функция, дающая число вершин в дереве по его DOWN-UP коду  $A = (a_1, \dots, a_{2n+1})$ :

$$f(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i-\text{odd}}}^{i=2n+1} a_i - \sum_{\substack{i=2 \\ i-\text{even}}}^{i=2n} a_i + 1.$$

Как ранее указывалось в [1], данная функция должна обладать свойствами, сходными с тета-функцией. Эти свойства функции подтвердились.

Рассмотрим два соотношения из [1]. Производящая функция для числа термов заданной глубины  $h$  есть:

$$Z_h(t) = \frac{tF(-h + 1/2, -h; -2h - 1, 4/t)}{F(-h, -h + 1/2; -2h, 4/t)},$$

при этом явное разложение для заданного члена ряда  $k$  обозначается  $z_h(k)$  и описывается формулой

$$z_h(k) = \frac{2^{-2(k-1)}}{2h + 1} \sum_{l=1}^h \cos^{-2k} \frac{\pi l}{2h + 1} \sin^2 \frac{\pi l}{2h + 1}, \quad (1)$$

где  $k > 1$ ,  $h > 0$ ,  $z_h(1) = h + 1$ ,  $F(a, b; c, t)$  – гипергеометрическая функция Гаусса.

Ю. М. Волошин сравнивает разложение цепной дроби, дающей упорядоченные деревья с заданной высотой, с определением тета-функции [1] при определении суммарной высоты дерева по производящей функции  $T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n y^{n(n-1)/2}$ :

$$\exp^{-2\pi iz} T(\exp^{2\pi iz}, q^2) + \exp^{2\pi iz} T(\exp^{-2\pi iz}, q^2) = \theta_2(z, q)q^{1/4}.$$

Так как при определении суммарной высоты дерева становится существенным быстрое решение систем алгебраических уравнений вида  $f(A) = n$ , для заданного  $n$  – числа вершин в дереве, то для вычисления большого набора решений был написан ряд программ на языке C++, которые позволяют создавать динамическую базу данных внутри ЭВМ для анализа данных запросами на языке SWI-Prolog.

При дальнейшем обобщении результата была введена функция:  $\text{VertexCount}(A, n, |A|)$ , где  $|A|$  – размерность DOWN-UP кода. Функция  $\text{VertexCount}(A, n, |A|)$  обозначает число кодов  $A$ , удовлетворяющих уравнению  $f(A) = n$ , при условии фиксации размера кода  $|A| \in \{3, 5, 7, 9, \dots\}$ .

Опишем ее свойства в виде следующих теорем.

**Теорема 3.** Для всех  $A$  при любом  $n$

$$\text{VertexCount}(A, n, k) = \text{VertexCount}(A, n, m),$$

пара  $(k, m) \in ((3, L_{\max} - 2), (5, L_{\max} - 4), \dots)$ ,  $k < m$ .

**Теорема 4.** Для нахождения  $\text{VertexCount}(A, n, |A|)$  для любого заданного  $|A|$  справедлива формула:

$$\text{VertexCount}(A, n, |A|) = \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{|A|}{l} \text{VertexCount}(A, n-l, |A|),$$

причем степень данного рекуррентного выражения возрастает по  $|A|$  до некоторого максимального значения, убывая после достижения максимального номера элементов равных друг другу для заданного  $n$ , а начальные условия находятся по формуле (1). Коэффициенты полинома всегда целочисленны.

**Теорема 5.** Равенство  $z_h(k) = \sum_{n=1}^m \text{VertexCount}(A, n, |A|)$  выполняется для любого набора параметров  $h$  и  $k$ , но в расчет не берутся DOWN-UP коды  $A$  с  $\max(A) \leq h$ .

**Теорема 6.** *Ниже главной диагонали из  $A = 1$  находятся элементы из столбцов  $|A| = 3, |A| = 5, \dots, |A| = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ .*

**Теорема 7.** *При вычислении сумм вида*

$$z_h(k) = \sum_{n=1}^m \text{VertexCount}(A, n, |A|),$$

*при ограничении на DOWN-UP коды  $A$  с  $\max(A) \leq h$  слагаемые начинаются с 1, последовательно растут до какого-то максимума и убывают до 1.*

**Теорема 8.** *При нахождении разностей  $z_h(k)$  возможно использовать  $\text{VertexCount}(A, n, |A|)$  при ограничении на DOWN-UP коды  $A$  с  $\max(A) = h$ .*

Детальные доказательства приведенных теорем требуют введения двух операций над кодами  $A$ : операции конкатенации кодов и операции сложения-вычитания элементов кода. Эти операции обладают свойствами алгебраической замкнутости, если понимать замкнутость в терминах функции  $f(A)$ , а именно: при увеличении  $|A|$ , но фиксированном  $n$ , элементы кода уменьшаются, иначе – растут. Операция конкатенации кодов конкатенирует код с заданным числом вершин в дереве, кроме числа вершин в дереве  $n = 1, 2$ . Операция сложения-вычитания элементов кода уменьшает-увеличивает элементы кода  $A$  на заданное значение, которое прибавляется к заданным элементам. Критические коды  $A$  с одинаковой высотой  $h$  кода с заданной  $|A|$  над корнем  $\max(A)$  отображаются друг на друга. Применение двух этих операций дает нужную биекцию. Например, для  $n = 5$  и  $|A| = 3, 5$  получим биекцию вида:

$$\left| \begin{array}{c|c|c} |A|=3 & & |A|=5 \\ \hline 103 & \iff & 10212 \\ 301 & \iff & 21201 \\ 213 & \iff & 10201 \\ 312 & \iff & 20101 \\ 202 & \iff & 10102 \\ 323 & \iff & 21212 \end{array} \right|$$

**Практическое применение.** Для небольших по размеру построений, расчет можно выполнить вручную. Для  $z_3(2) = 14$  имеем

множество DOWN-UP кодов:

$$A = \{101; 102; 201; 212; 103; 301; 202; 213; 312; 323; 203; 302; 313; 303\}.$$

Приведем ряд более громоздких численных результатов, полученных на основании Теорем 1–6.

В таблице 1 приведены значения функции  $z_h(k)$  для небольших  $k$  и  $h$ .

Таблица 1. Значения  $z_h(k)$

	h=1	h=2	h=3	h=4	h=5	h=6
k=1	1	2	3	5	6	7
k=2	1	5	14	31	56	92
k=3	1	13	70	247	672	1548
k=4	1	34	353	2038	8273	26586
k=5	1	89	1782	16887	102092	457380

В таблице 2 приведены значения функции  $\text{VertexCount}(A, n, |A|)$  для небольших значений аргументов.

Таблица 2. Значения  $\text{VertexCount}(A, n, |A|)$

	A =3	A =5	A =7	A =9	A =11	A =13
n=3	1					
n=4	3	1				
n=5	6	6	1			
n=6	10	20	10	1		
n=7	15	50	50	15	1	

**Пример** вывода формул по теореме 4 и преобразовании их в удобную для счета форму.

Для ряда  $[1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105]$  из столбца  $|A| = 3$ :  $\text{VertexCount}(A, n, 3) = 3 * \text{VertexCount}(A, n - 1, 3) - 3 * \text{VertexCount}(A, n - 2, 3) + \text{VertexCount}(A, n - 3, 3)$ .

Для ряда  $[1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540, 825, 1210, 1716, 2366, 3185]$  из столбца  $|A| = 5$ :  $\text{VertexCount}(A, n, 5) = 5 * \text{VertexCount}(A, n - 1, 5) - 10 * \text{VertexCount}(A, n - 2, 5) + 10 * \text{VertexCount}(A, n - 3, 5) - 5 * \text{VertexCount}(A, n - 4, 5) + \text{VertexCount}(A, n - 5, 5)$ .

Вид, удобный для счета, с подставленными начальными условиями для  $|A| = 3$  (нулевой индекс соответствует  $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} \text{VertexCount}(A, n, 3) &= \text{VertexCount}(A, 2, 3) - \\ &3 * \text{VertexCount}(A, 1, 3) + 3 * \text{VertexCount}(A, 0, 3) - \\ &(- \text{VertexCount}(A, 0, 3) - \text{VertexCount}(A, 2, 3) + \\ &2 * \text{VertexCount}(A, 1, 3))(n + 1)(n/2 + 1) + \end{aligned}$$

$$(-3 * \text{VertexCount}(A, 0, 3) - 2 * \text{VertexCount}(A, 2, 3) + 5 * \text{VertexCount3}(A, 1, 3))(n + 1).$$

Вид, удобный для счета, с подставленными начальными условиями для  $|A| = 5$  (нулевой индекс соответствует  $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} \text{VertexCount}(A, n, 5) = & -(-46 * \text{VertexCount}(A, 2, 5) - \\ & 10 * \text{VertexCount}(A, 0, 5) - 6 * \text{VertexCount}(A, 4, 5) + \\ & 27 * \text{VertexCount}(A, 3, 5) - 5 * \text{VertexCount}(A, 0, 5) + \\ & 17 * \text{VertexCount}(A, 3, 5) - 4 * \text{VertexCount}(A, 4, 5)) * \\ & (n + 1)(n/2 + 1)(n/3 + 1) - (-\text{VertexCount}(A, 0, 5) - \\ & \text{VertexCount}(A, 4, 5) + 4 * \text{VertexCount}(A, 3, 5) - \\ & 6 * \text{VertexCount}(A, 2, 5) + 4 * \text{VertexCount}(A, 1, 5)) * \\ & (n + 1)(n/2 + 1)(n/3 + 1)(n/4 + 1) + \\ & (-35 * \text{VertexCount}(A, 2, 5) + 19 * \text{VertexCount}(A, 3, 5) + \\ & 30 * \text{VertexCount}(A, 1, 5) - 10 * \text{VertexCount}(A, 0, 5) - \\ & 4 * \text{VertexCount}(A, 4, 5))(n + 1) + \text{VertexCount}(A, 4, 5) - \\ & 5 * \text{VertexCount}(A, 3, 5) + 10 * \text{VertexCount}(A, 3, 5) - \\ & 10 * \text{VertexCount}(A, 1, 5) + 5 * \text{VertexCount}(A, 0, 5). \end{aligned}$$

Вычисление  $z_{11}(5) = 77173602$  через  $|A| = 9$ :

$$\begin{aligned} z_{11}(5) = & \text{VertexCount}(A, 6, 9) + \text{VertexCount}(A, 7, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 8, 9) + \text{VertexCount}(A, 9, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 10, 9) + \text{VertexCount}(A, 11, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 12, 9) + \text{VertexCount}(A, 13, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 14, 9) + \text{VertexCount}(A, 15, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 16, 9) + \text{VertexCount}(A, 17, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 18, 9) + \text{VertexCount}(A, 19, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 20, 9) + \text{VertexCount}(A, 21, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 22, 9) + \text{VertexCount}(A, 23, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 24, 9) + \text{VertexCount}(A, 25, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 26, 9) + \text{VertexCount}(A, 27, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 28, 9) + \text{VertexCount}(A, 29, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 30, 9) + \text{VertexCount}(A, 31, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 32, 9) + \text{VertexCount}(A, 33, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 34, 9) + \text{VertexCount}(A, 35, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 36, 9) + \text{VertexCount}(A, 37, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 38, 9) + \text{VertexCount}(A, 39, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 40, 9) + \text{VertexCount}(A, 41, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 42, 9) + \text{VertexCount}(A, 43, 9) + \\ & \text{VertexCount}(A, 44, 9) + \text{VertexCount}(A, 45, 9) + \end{aligned}$$

$\text{VertexCount}(A, 46, 9) + \text{VertexCount}(A, 47, 9) +$   
 $\text{VertexCount}(A, 48, 9) + \text{VertexCount}(A, 49, 9) +$   
 $\text{VertexCount}(A, 50, 9) + \text{VertexCount}(A, 51, 9) +$   
 $\text{VertexCount}(A, 52, 9) + \text{VertexCount}(A, 53, 9) +$   
 $\text{VertexCount}(A, 54, 9) + \text{VertexCount}(A, 55, 9) +$   
 $\text{VertexCount}(A, 56, 9)$ , при выполнении условий теоремы 5.  
 $z_{11}(5) = 1 + 15 + 105 + 490 + 1764 + 5292 + 13860 + 32670 +$   
 $70785 + 143143 + 273273 + 481910 + 784420 + 1188369 +$   
 $1691453 + 2280034 + 2928555 + 3600135 + 4248673 +$   
 $4822818 + 5272190 + 5556265 + 5656365 + 5572798 +$   
 $5321463 + 4930065 + 4434105 + 3872830 + 3285348 +$   
 $2707133 + 2167165 + 1685970 + 1274845 + 936573 +$   
 $667953 + 461934 + 309360 + 200340 + 125264 + 75493 +$   
 $43758 + 24310 + 12870 + 6435 + 3003 + 1287 + 495 + 165 + 45 + 9 + 1.$

**Итоговый алгоритм** состоит из следующих шагов:

Если заданы  $n$ ,  $|A|$  и  $h$  входит в сумму целиком, то берем  $z_h(k)$ , если нет – то вычисляем  $\text{VertexCount}(A, n-1, |A|)$ .

Если элементы  $\text{VertexCount}(A, n-l, |A|)$  и  $z_h(k)$  посчитаны, то задача для  $n$ ,  $|A|$  и  $h$  решена полностью.

**Гипотеза.** Вычисление средней высоты заданного множества деревьев в работе [1] является сильно смещенной оценкой из-за наличия большого количества одинаковых деревьев.

**Заключение.** Результаты этой работы обсуждались с участниками семинара лаборатории 57 ИПУ РАН им. Трапезникова. Они могут применяться для анализа и синтеза любого корневого упорядоченного дерева в любых математических моделях информационных и организационных систем.

**Благодарности.** Работа над этой тематикой начиналась под научным руководством профессора В. Ф. Горьковского (1937–2007) во время обучения в аспирантуре, что внесло неоценимый вклад в становление автора как самостоятельного исследователя, разработчика программного обеспечения и преподавателя ИТ-дисциплин.

Автор также благодарит с.н.с. Пономареву А. С., в.н.с. Сухарева В. Г. (ИИФ г. Серпухов), г.н.с., заведующего 57 лабораторией ИПУ РАН Чхартишвили А. Г., за помощь в работе и обсуждение результатов.

## Литература

1. Волошин Ю. М. Перечисление термов предметных областей по глубине вложенности // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 6. С. 1294–1297.
2. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов / перевод с англ. Г. П. Гаврилова. М.: Мир, 1977. 324 с.
3. Волошин Ю. М. Последовательности “ап-даун” и упорядоченные деревья // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 2. С. 125–127.
4. Пономарев Ю. Ю. DOWN-UP последовательности и корневые деревья // Процессы управления и устойчивость: Труды 30-й научной конференции / под ред. В. Н. Старкова. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 1999. С. 374–380.
5. Пономарев Ю. Ю. Кодирование корневых деревьев DOWN-UP последовательностями // Процессы управления и устойчивость: Труды 29-й научной конференции / под ред. В. Н. Старкова. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 1998. С. 257–259.



УДК 004.932

Попов А. П., Блеканов И. С.

## Нейросетевые методы улучшения качества изображения рентгеновских снимков семян сельскохозяйственных культур

**1. Актуальность работы.** Проблема продовольственной безопасности является важной актуальной задачей в сельскохозяйственных науках. Применение современных информационных и коммуникационных технологий в данной сфере, так называемое умное сельское хозяйство [1], позволяет автоматизировать и оптимизировать технологические процессы принятия решений [2].

В данном контексте важной задачей является определение качества семян сельскохозяйственных культур, решение которой позволит оценить состояние партии и рациональность её использования для посева или переработки, а также улучшить показатели всхожести и урожайности. Одним из предлагаемых инструментов диагностики качества семян является рентгенографический анализ [3]. Однако снимки, получаемые на специальном оборудовании, не всегда имеют хорошее качество, а более дорогие установки не везде доступны.

В то же время стремительно развивающаяся в последнее десятилетие область компьютерного зрения позволяет решать большой спектр задач, связанных с анализом изображений. В частности, одной из популярных задач является задача повышения качества изображений (Image Super Resolution) [4], нашедшая своё приложение в медицине [5], астрономии, микроскопии и т. д.

В данной работе рассматривается обучение генеративно-сопоставительной сети [6] для улучшения качества рентгеновских снимков семян сельскохозяйственных культур с использованием построенного специализированного набора данных и приводится оценка качества полученных результатов.

---

*Попов Артём Петрович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076324@student.spbu.ru, тел.: +7(913)053-36-89

*Блеканов Иван Станиславович* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.blekanov@spbu.ru, тел.: +7(921)339-53-43

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим изображение семени низкого качества, полученное с помощью функции деградации  $D$  [4]:

$$I_x = D(I_y, \delta),$$

где  $I_y$  – изображение семени высокого качества, а  $\delta$  – параметры функции. Необходимо построить модель сверхразрешения с параметрами  $\theta$ , которая принимает на вход  $I_x$  и возвращает сгенерированное изображение семени, максимально похожее на  $I_y$ :

$$\hat{I}_y = F(I_x, \theta).$$

Таким образом, задача сводится к минимизации параметра

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} L(\hat{I}_y, I_y) + \lambda \Phi(\theta),$$

где  $L$  – функция потерь,  $\Phi$  – функция регуляризации,  $\lambda$  – контролирующий параметр.

**2.1. Метрики качества.** Для оценки результатов работы модели используют различные критерии качества, наиболее популярными среди которых являются пиковое отношение сигнала к шуму (PSNR) и индекс структурного сходства (SSIM):

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{L^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I(i) - \hat{I}(i))^2} \right),$$

где  $I$  и  $\hat{I}$  – оригинальное и реконструированное изображение соответственно,  $N$  – число пикселей,  $L$  – максимальное значение, принимаемое пикселем (обычно 255).

$$\text{SSIM} = L(I, \hat{I})^\alpha C(I, \hat{I})^\beta S(I, \hat{I})^\gamma,$$

где множители представляют собой взвешенные компоненты яркости  $L$ , контрастности  $C$  и структуры  $S$ .

**3. Подготовка набора данных.** Важнейшей частью решения задачи является построение специализированного набора данных для обучения. Процесс построения состоит из следующих этапов:

- обработка «сырых» данных;
- аугментация данных;
- зашумление данных.

**3.1. Обработка «сырых» данных.** «Сырые» данные были составлены экспертами агрономами и представляют собой рентгеновские снимки партии семян пшеницы разрешения  $4000 \times 2500$  пикселей (на одном снимке содержатся изображения более 50 семян). Однако использование таких крупных изображений при обучении нейросетей является трудозатратным процессом. Вместо этого для сокращения трудозатрат было предложено использовать процедуру предобработки «сырых» данных, основанную на детекции изображений отдельных семян (Object Detection).

На рис. 1 представлена процедура детекции изображений семян, которая находит интересующий объект на рентгеновском снимке и выделяет его в рамку. В основе данной процедуры лежит интенсивность чёрных и белых цветов на снимках, которая регулируется с помощью метода порогового значения. На основе выбранного порога (threshold) построены бинарные маски изображений, выделяющие необходимые участки снимков. Существуют разные способы определения этого значения: от примитивных (константное значение) до адаптивных (например, метод Оцу [7], минимизирующий внутриклассовую дисперсию).

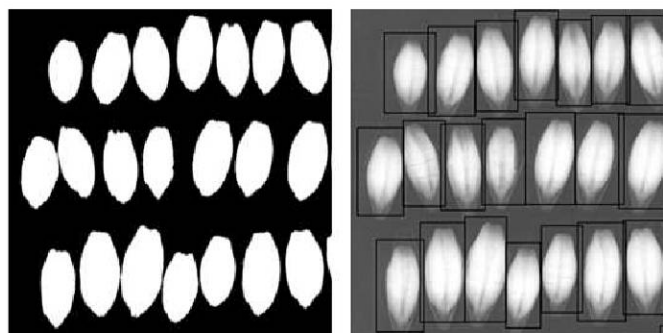


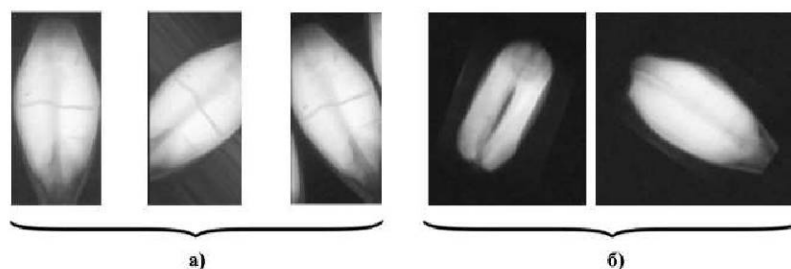
Рис. 1. Пример работы процедуры детекции изображений семян

Таким образом, с помощью данного метода из 25 рентгеновских

снимков было получено около 2000 изображений семян, используемых для создания набора данных.

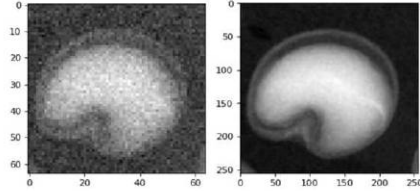
**3.2. Аугментация данных.** Важным критерием оценки работы модели является её обобщающая способность на новых данных. Однако в случае малого размера набора данных или его однородности применяется искусственное увеличение обучающего набора с целью генерации новых признаков.

В работе в качестве аугментации использовалась модификация процедуры поворота изображения, учитывающая специфику поставленной задачи в части необходимости обеспечения целостности аугментированного изображения семени и равномерности заполнения фона на снимке (см. рис. 2). В результате применения процедуры аугментации тренировочный набор данных был расширен до 6000 изображений семян.



**Рис. 2.** Примеры работы аугментации данных с использованием  
а) стандартной процедуры; б) модифицированной процедуры

**3.3. Зашумление данных.** При решении задачи сверхразрешения для создания обучающего набора данных, состоящего из множества обучающих пар изображения высокого качества и соответствующего ему изображения низкого качества, в работе применялась процедура зашумления данных. Данная процедура на первом этапе приводит все снимки к одному размеру ( $256 \times 256$  пикселей). А на втором этапе для получения обучающих пар применяется функция деградации на основе операций добавления гауссовского шума к исходному изображению и изменения разрешения полученного изображения до  $64 \times 64$  пикселей (см. рис. 3).



**Рис. 3.** Пример обучающей пары после применения функции деградации

**4. Выбор модели и обучение.** В качестве модели сверхразрешения была выбрана генеративно-сопоставительная сеть SRGAN [8] с функцией потерь вида

$$\mathcal{L}^{SR} = \mathcal{L}_X^{SR} + 10^{-3} \mathcal{L}_{Gen}^{SR},$$

где  $\mathcal{L}_X^{SR}$  – ошибка отображения признаков контента (content loss),  $\mathcal{L}_{Gen}^{SR}$  – сопоставительная ошибка (adversarial loss).

Ошибка  $\mathcal{L}_X^{SR}$  представляет собой среднеквадратичную ошибку между картами признаков оригинального и сгенерированного изображений, которые были получены в одном из промежуточных слоёв сети VGG19 [9]. Величина

$$\mathcal{L}_{Gen}^{SR} = \sum_{n=1}^N -\log D_{\theta_D}(G_{\theta_G}(I^{LR})),$$

где  $D_{\theta_D}(G_{\theta_G}(I^{LR}))$  – вероятность того, что сгенерированное изображение будет воспринято дискриминатором как оригинальное. Для реализации нейросетевой модели использовался фреймворк Tensorflow языка программирования Python.

**5. Результаты обучения.** Обучение производилось с помощью GPU облачной среды Google Colab. Модель была обучена на собранном наборе данных, состоящим из 2500 тренировочных изображений и 200 тестовых.

На рис. 4 представлены данные об истории обучения, а на рис. 5 – примеры сгенерированных изображений. Как можно заметить, сеть в целом справилась с поставленной задачей. Также в процессе экспериментов была отмечена нестабильность в обучении, что зачастую свойственно генеративным моделям.

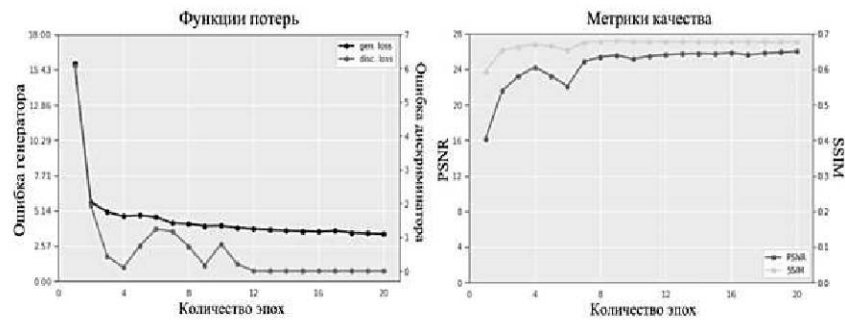


Рис. 4. Эпохи обучения функций потерь и метрик качества

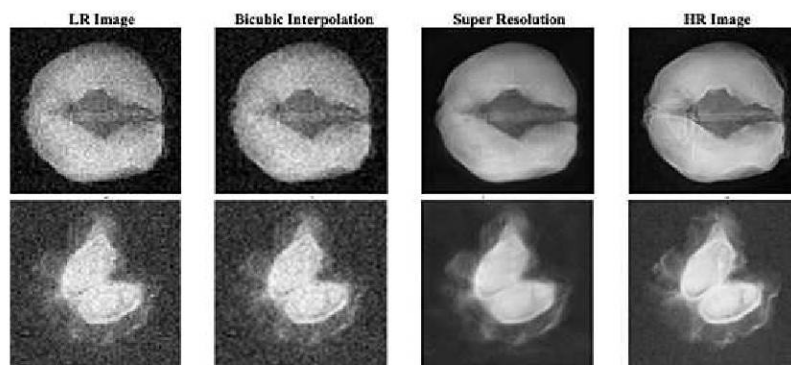


Рис. 5. Результат работы сети SRGAN

**6. Заключение.** Таким образом, удалось реализовать автоматизированный сбор и обработку данных, а на собранном наборе данных обучить нейросетевую модель сверхразрешения, которая показывает хорошие оценки качества при восстановлении структуры и детализации изображений семян в зашумлённых рентгеновских снимках. В дальнейшем предполагается рассмотрение более современных архитектур, а также создание модели бинарной классификации, оценивающей качество сельскохозяйственных культур.

## Литература

1. Balafoutis A. T., Evert F. K. V., Fountas S. Smart farming technology trends: economic and environmental effects, labor impact and adoption readiness // *Agronomy*. 2020. Vol. 10. Iss. 5. Art. no 743.
2. Буре В. М., Митрофанов Е. П., Митрофанова О. А., Петрушин А. Ф. Выделение однородных зон сельскохозяйственного поля для закладки опытов с помощью беспилотного летательного аппарата // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. № 2. С. 145–150.
3. Arkhipov M. V., Priyatkin N. S., Gusakova L. P. et al. X-Ray computer methods for studying the structural integrity of seeds and their importance in modern seed science // *Technical Physics*. 2019. Vol. 64. Iss. 4. P. 582–592.
4. Wang Z., Chen J., Hoi S. C. H. Deep learning for image super-resolution: a survey // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2021. P. 3365–3387.
5. Кванчиани К. Ш. Повышение качества медицинских изображений в контексте задачи сегментации опухолей // *Процессы управления и устойчивость*. 2021. Т. 8. № 1. С. 279–283.
6. Goodfellow I. J., Pouget-Abadie J., Mirza M. et al. Generative adversarial nets // *27th International Conference on Neural Information Processing Systems*. 2014. Vol. 2. P. 2672–2680.
7. Otsu N. Threshold selection method from gray-level histograms // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 1979. P. 62–66.
8. Ledig C., Theis L., Huszar F. et al. Photo-realistic single image super-resolution using a generative adversarial network // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2017. P. 4681–4690.
9. Simonyan K., Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1409.1556> (дата обращения: 12.02.23).

УДК 51-73

**Рычагов Е. А.**

## **Методы эквализации звукового сигнала**

*Рекомендовано к публикации доцентом Гришкиным В. М.*

**1. Введение.** Обработка и анализ звукового сигнала распространяется на различные области науки, в каждой из которых предлагаются множества задач и их решений [1]. Не является исключением и звукорежиссура. Обозначим актуальные проблемы звукорежиссуры:

- высокая стоимость качественной системы мониторинга (средства прослушивания);
- дороговизна акустического оформления рабочего пространства;
- отражение звука от массивных аналоговых приборов и средств их закрепления (студийный стол, рэковые стойки и т. д.);
- прочие незначительные, но влияющие на результат нюансы, связанные исключительно с условиями работы звукорежиссера.

На данный момент существуют следующие решения перечисленных проблем:

- калибровка имеющейся системы мониторинга;
- привыкание к текущим условиям работы.

Однако калибровка акустической системы не исправит плохую акустику рабочего пространства, а привыкание к плохим условиям может помешать дальнейшему развитию специалиста.

Данная статья создана с целью получения нового решения для контроля результата работы звукорежиссера независимо от внешних факторов. Для достижения цели отлично подойдет программный способ контроля, а именно выравнивание спектра частот (распределения звукового давления по частотам) на мастер-канале (канале, воспроизводящем сумму сигналов индивидуально обрабатываемых аудиофайлов) относительно эталонного частотного спектра.

Такой подход имеет следующие достоинства:

- способность результата сохранять схожее восприятие частотного спектра на различных устройствах воспроизведения;
- независимость от условий работы специалиста;

---

*Рычагов Егор Алексеевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076928@student.spbu.ru, тел.: +7(980)684-70-77



- возможность отказаться от смены акустической системы.

**2. Анализ звукового сигнала.** Для начала стоит отметить, что современные спектральные анализаторы с возможностью автоматической эквализации сигнала с целью приведения его частотного спектра к спектру частот другого сигнала не учитывают динамический диапазон громкостей на частотах, строя спектральные кривые по наибольшим значениям звукового давления на них.

Для анализа звукового сигнала  $s(t)$  выбран показатель RMS [2]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}.$$

Не смотря на то, что подынтегральная функция является функцией сигнала, среднеквадратический показатель отлично подходит для анализа кривых, описывающих спектр частот, так как он учитывает изменение звукового давления на частоте с течением времени, а так же позволяет строить спектральные кривые с учетом динамического диапазона. Таким образом, RMS позволяет учесть значительный недостаток современных спектральных анализаторов. Далее в этой работе RMS будет использоваться для построения спектральных кривых в дискретной форме, поэтому для устранения недопониманий обозначим его как S-RMS (Spectral Root Mean Square).

**3. Параметры спектрального анализа.** При работе со спектральным анализатором можно получить массив значений звукового давления на частотах. Воспользуемся этой возможностью. За частоту дискретизации возьмем  $h = 44100$  Гц, что соответствует формату WAV. Тогда массив значений громкости будет определен на натуральном массиве индексов  $f = [1, \dots, 22050]$ . Общее количество семплов для сигнала рассчитывается по формуле  $T = th$ , где  $t$  – длительность аудиофайла в секундах.

**4. Постановка задачи.** Даны два сигнала  $s_1(t_1)$  и  $s_2(t_2)$ , необходимо:

- используя S-RMS построить спектральные кривые  $\omega_1(f)$  и  $\omega_2(f)$ ;
- выровнять громкости звуковых сигналов;
- найти точки пересечения кривых  $\omega_1(f)$  и  $\omega_2(f)$ ;
- выполнить разбиение частотного массива;

- выполнить фильтрацию частотного спектра сигнала  $s_1(t_1)$  по отношению к спектру частот сигнала  $s_2(t_2)$ ;
- выровнять громкости звуковых сигналов.

## 5. Построение алгоритма.

**5.1. Построение спектральных кривых.** Сначала необходимо измерить S-RMS для двух сигналов:

$$b_i^j = \sqrt{\frac{1}{T_i} \sum_{i=1}^{T_i} (v_i^j)^2},$$

где  $i$  – номер сигнала,  $j \in f$ ,  $v_i^j$  – звуковое давление сигнала  $s_i(t)$  на частоте  $j$ .

Далее необходимо аппроксимировать полученные значения полиномом  $P_m$  степени  $m$ .

**5.2. Выравнивание громкостей.** Для выравнивания громкостей найдем среднее значение S-RMS на всем массиве частот:

$$\sigma_i = \frac{1}{22050} \sum_{j=1}^{22050} \sqrt{\frac{1}{T_i} \sum_{i=1}^{T_i} (v_i^j)^2}.$$

Не умаляя общности будем считать, что  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ , и добавим к  $\omega_1(f)$  значение  $\sigma^\Delta$ .

**5.3. Поиск точек пересечения спектральных кривых.** Решим уравнение  $\omega_1(f) = \omega_2(f)$ . Отбросим комплексные корни и корни, не принадлежащие отрезку  $[1, 22050]$ . В результате получим набор корней  $l = [l_1, \dots, l_k]$ . Заменяем значения корней на округленные до ближайшего натурального числа. Получим отрезки разбиения  $f^* = \{[1, \dots, l_1], [l_1, \dots, l_2], \dots, [l_k, \dots, 22050]\}$ .

**6. Генерация экспериментальных данных.** Экспериментальные данные представляют собой два набора семплов (сэмпл – массив значений звукового давления на частотном массиве  $f$ ). Поскольку семплы должны имитировать частотные спектры на мастер-канале, для них необязательно наличие аналога гармоник, но при этом должна соблюдаться разреженность значений громкости на частотном массиве.

Реализация алгоритма генерации данных проделана на языке Python. Определим звуковое давление на частоте 1 Гц значением

-10 Дб. Каждое последующее значение громкости рассчитаем по формуле  $v_j = v_{j-1} + x$ , где  $x$  - случайное число, полученное с помощью функции `random.uniform(-0.1, 0.1)` (параметры функции подобраны экспериментально). Ограничим значения генерируемых громкостей отрезком  $[-13, 3]$  (рис. 1).

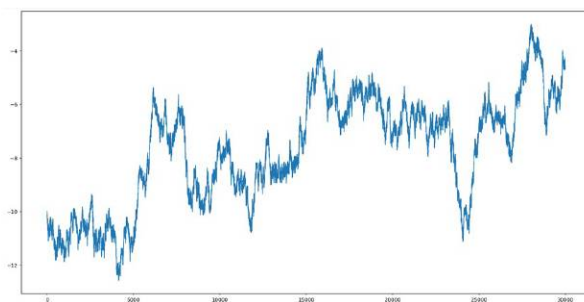


Рис. 1. Пример сгенерированного семпла

**7. Проведение эксперимента.** Вычислим S-RMS на каждой частоте для двух сигналов. Для аппроксимации полученных значений с целью получения большей точности результата работы алгоритма желательно использовать полиномиальную регрессию [2], однако для проведения эксперимента достаточно аппроксимации значений полиномом первой степени. Построим спектральные кривые  $\omega_1(f)$  и  $\omega_2(f)$ . Найдём их точки пересечения (рис. 2).

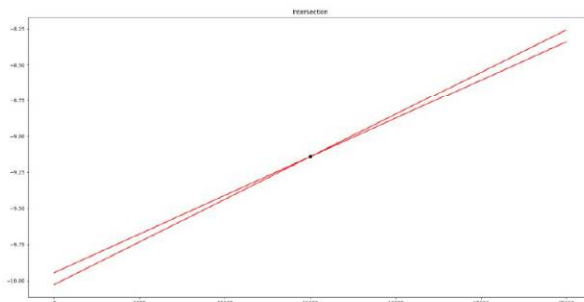


Рис. 2. Приближение  $\omega_1(f)$  и  $\omega_2(f)$  линейной регрессией

Увеличим значения звукового давления на каждой частоте на разницу значений спектральных кривых на этой же частоте для всех семплов сигнала с меньшим значением свободного члена спектральной кривой (что эквивалентно применению фильтра вида «flat tilt»), после чего снова построим спектральные кривые (рис. 3).

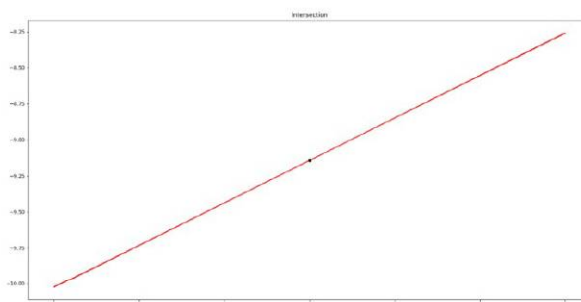


Рис. 3. Измененные спектральные кривые

**8. Анализ результата.** После применения фильтра максимальная разница значений спектральных кривых равна 0.003 S-RMS, что является несущественным и обусловлено погрешностью в вычислениях.

**9. Выводы.** В данной работе построен новый алгоритм спектрального анализа в виду дополнения к современным цифровым спектральным анализаторам. Данный алгоритм является уникальным и учитывает недостатки современных спектральных анализаторов, а также решает ранее обозначенные проблемы звукорежиссуры. Алгоритм готов к адаптации под спектральные анализаторы, но пока предоставляет неполный функционал фильтров (только фильтр вида «flat tilt»).

**10. Заключение.** С добавлением иных фильтров алгоритм станет представлять собой полноценное «автоматическое руководство» по эквализации и контролю результата работы звукорежиссера. Алгоритм можно усовершенствовать, строя спектральные кривые аппроксимацией полиномов степени больше единицы или комбинацией интерполяции с методом скользящих окон.

## Литература

1. Ding Z. H., Yang F. W., Petrosian O., Li Y., Liu Y. Audio-visual speech recognition // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 25. С. 311–317.
2. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигнала. СПб.: Питер, 2003. 604 с.
3. Головкина А. Г., Козынченко В. А., Клименко И. С. Метод последовательных приближений для построения модели динамической полиномиальной регрессии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 14. № 4. С. 487–479.

УДК 004.89

Садиев С. А.

## Анализ возможности обоснования работы алгоритмов искусственного интеллекта

*Рекомендовано к публикации профессором Роговым А. А.*

**1. Введение.** Алгоритмы искусственного интеллекта (ИИ) в настоящее время используются в различных областях, в том числе таких, где требуется не только принятие решений, но и ответ на вопрос «Почему модель ИИ дает именно этот ответ?» (например, медицина, судопроизводство, промышленность).

Хотя исследования в области объяснимого искусственного интеллекта накапливаются, и растёт доступность фреймворков, позволяющих распаковывать различные black-box методы, на данный момент общего решения проблемы не существует.

В статье приведён обзор программных ресурсов, позволяющих обосновывать полученные решения и анализ доступности и наличия фреймворков для конкретных моделей ИИ.

**2. Мотивировка.** Частные, но масштабные примеры применения ИИ в реальном мире касаются областей, в которых ответ на вопрос о причинах принятия решений является жизненно важным. В качестве конкретных примеров можно рассмотреть судопроизводство [1, 2], научные исследования [3], медицину и другие.

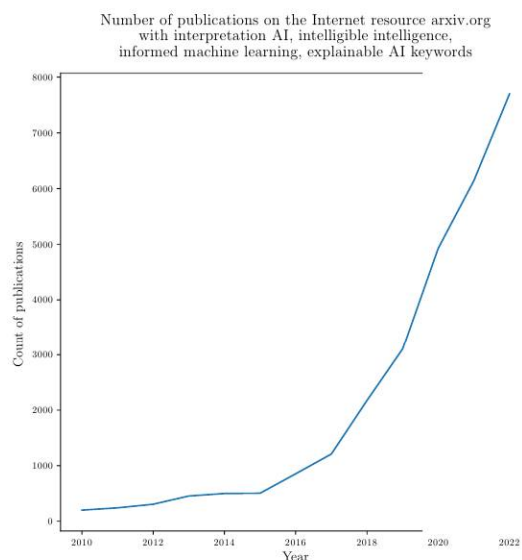
В настоящее время существуют различные ветви направлений исследований, касающиеся интерпретации, – объяснимый ИИ (Explainable AI) [4], информированное машинное обучение (Informed machine learning) [5], понятный интеллект (Intelligible intelligence) [6] и, возможно, другие. Рассмотрение описанных направлений показало различный фундамент данных исследований, что мешает решению проблемы в общем смысле.

**3. Доступность существующих методик интерпретации.** Востребованность интерпретации моделей подтверждается ростом количества публикаций на данную тему. Поиск по интернет-ресурсу [arxiv.org](http://arxiv.org) демонстрирует, что количество публикаций по ключевым

---

*Садиев Сабрина Аймановна* – студент, Петрозаводский государственный университет; e-mail: [sad.sabrina.d@yandex.ru](mailto:sad.sabrina.d@yandex.ru), тел.: +7 (911) 407-87-13

словам: “interpretation AI”, “intelligible intelligence”, “informed machine learning”, “explainable artificial intelligence” растёт по экспоненте (рис. 1).



**Рис. 1.** Количество публикаций по ключевым словам

Кроме того, растёт само количество методов интерпретации. Вместо перечисления каждого, в данном разделе проводится анализ на наличие методов для практического использования. Важно отметить, что создание полной и чёткой теоретической классификации также является решаемой [7–9], но не решённой задачей.

Объяснение модели может проводиться, например, как:

- анализ гиперпараметров и архитектуры модели (какая конфигурация отдаёт наилучший отклик на данных?);
- анализ важности признаков, например, permutation importance [10], partial dependence plots [11] (изменение каких признаков оказывает наибольшее влияние на прогноз?);
- анализ «внимания» моделей (saliency maps [12], анализ активаций модели [13]) (на какие участки данных модель реагирует больше всего?);

- построение суррогатной модели, интерпретирующей основную (surrogate trees [14]).

Каждая из приведённых выше категорий подразумевает под собой свой арсенал методов.

Был проведён анализ методик интерпретации, доступных для реализации с использованием языка Python. Полученные результаты представлены в виде таблиц на рис. 2–4.

В качестве отправной точки перечня методов были взяты методики, описанные в книге [15]. Далее перечень обогащался по мере нахождения в открытых фреймворках теоретически обоснованных методов, и по итогу перечень был сведён к девяти основным и одной обобщающей категории.

К основным отнесены – local interpretable model-agnostic explanations (LIME) [16], partial dependence plots (pdp plots) [11], SHAP values [17], permutation importance [10], sensitivity analysis [18], counterfactual explanations [19], integrated gradients [20], layer-wise relevance propagation [21] и scalable Bayesian rule lists [22]. Колонка “other methods” включает в себя методики deep learning important features [13] (библиотека deeplift), guided backpropagation [23] (библиотеки deeplift, captum), smoothgrad [24], gradCAM [25] (библиотека captum), и другие. Эти методы вынесены отдельно, так как они встречаются в библиотеках для интерпретации нейронных сетей реже других (рис. 2).

Для большей детализации был также проведён анализ найденных библиотек на возможность объяснения принятия решений в зависимости от данных (рис. 2).

Он показал что на каждый тип решаемой задачи (классификация, регрессия, кластеризация), в зависимости от сложности модели (является модель нейронной сетью или нет) и типа данных, существует хотя бы один возможный метод интерпретации. Все нули в строке означают, что в документации не было найдено явного названия метода.

С другой стороны, также выявлено, что решения, принимаемые на некоторых типах данных, поддаются интерпретации сложнее других. Те структуры данных, обработка которых алгоритмами ИИ производится относительно недавно (графы, звук и генетические последовательности), требуют подключения дополнительных библиотек (PGExplainer, GNNExplainer для графовых и librosa – для звуковых



Methods of interpretation in libraries

Library	LIME	pdp plots	shap values	Permutation importance	Sensitivity Analysis	Counterfactual Explanations	integrated gradients	Layer-wise Relevance Propagation	Scalable Bayesian Rule Lists	other methods
eli5	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
pdpbox	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
shap	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
deeplift	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
SALib	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
LIME	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
interpretML	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
dice-ml	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
interpret-text	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
treeinterpreter	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
captum	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
skater	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0

Рис. 2. Методики интерпретации, доступные с использованием библиотек для языка Python

данных) (рис. 3), эти библиотеки не отмечены на рисунке 2, так как GNN и PG-explainers предназначены только для решений, принятых на графовых данных, а librosa – для извлечения признаков из аудио-данных. И хотя проблема интерпретации решений, принятых на таких данных, также решается различными исследователями путём создания интерпретируемых моделей (графовые данные [26, 27], звук [28]) и частных реализацией описанных методов [29], здесь также не удалось выявить согласованности подходов.

Наконец, чтобы исключить абстракции в задаче «возможность интерпретации моделей» был проведён анализ библиотек в разрезе

Availability of interpretation for models  
trained on different types of data

Library	Data type					
	Text	Images	Sound	Tabular data	Graphs	Genetic data
eli5	1	1	0	1	1	0
pdpbox	0	0	0	1	0	0
shap	1	1	0	1	0	0
deeplift	1	1	0	0	0	1
LIME	1	1	0	1	0	0
SALib	0	0	0	1	0	0
librosa	0	0	1	0	0	0
interpretML	1	1	1	1	0	0
dice-ml	0	0	0	1	0	0
interpret-text	1	0	0	0	0	0
treeinterpreter	0	0	0	1	0	0
captum	1	1	0	1	0	0
skater	1	1	0	1	0	0
transformers-interpret	1	1	0	0	0	0
bertviz	1	0	0	0	0	0
GNNExplainer	0	0	0	0	1	0
alibi	1	1	0	1	0	0
PGExplainer	0	0	0	0	1	0

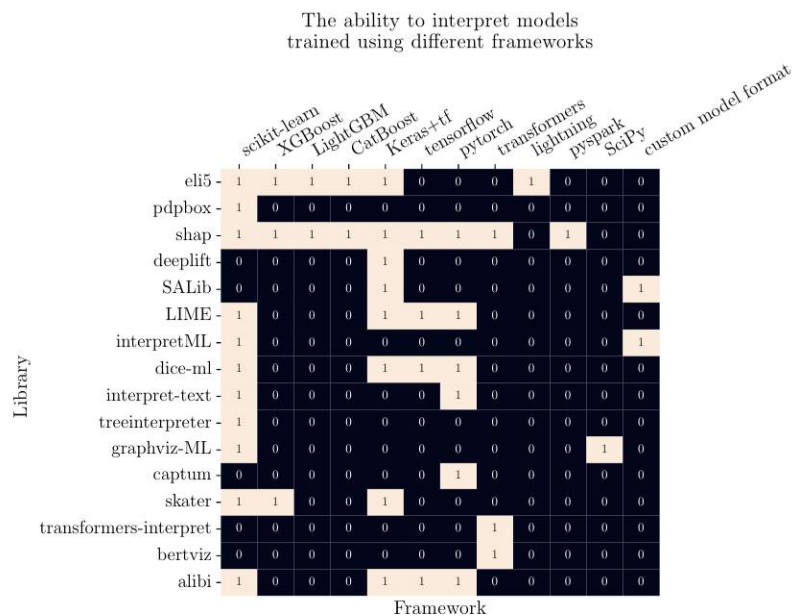
**Рис. 3.** Наличие и доступность методик интерпретации для моделей, обученных на разных типах данных

поддержки моделей, обученных при помощи различных фреймворков машинного и глубокого обучения. Результаты найденных данных приведены на рис. 4.

Анализ общей ситуации показывает, что модели, обученные при помощи `sklearn`, могут быть интерпретированы при помощи минимум 11-ти библиотек, что согласуется с популярностью `sklearn` в среде разработчиков машинного и глубокого обучения.

Вместе с этим проведённый анализ также показывает, что

- для некоторых фреймворков существуют унифицированные библиотеки интерпретации (например, `transformers-interpret` и `bertviz` для интерпретации моделей, обученных при помощи



**Рис. 4.** Наличие и возможность использования методик интерпретации для моделей, обученных при помощи разных фреймворков

фреймворка transformers);

- в случае обучения на некоторых фреймворках (lightning, pyspark, scipy) интерпретация может быть получена минимальным числом возможных способов (удалось найти по одному);
- некоторые фреймворки предполагают обучение интерпретируемых моделей внутри библиотеки, а не интерпретацию обученной при помощи сторонней библиотеки модели (столбец custom model format, рис. 4).

**4. Общий вывод и заключение.** Проведённое исследование демонстрирует интерес к понятию «интерпретируемый искусственный интеллект», причём растущий по экспоненте. Оно показывает,

что методы интерпретации существуют для большинства типов задач, однако при этом стандартизированного общего подхода нет.

Кроме того, в том числе из-за отсутствия стандартизации, вопрос «является ли интерпретация устойчивой от фреймворка к фреймворку?» остаётся открытым и требует дальнейших исследований, что говорит о решении задачи интерпретации только в частном смысле.

## Литература

1. Courts and predictive algorithms [Электронный ресурс]: URL:[https://www.datacivilrights.org/pubs/20151027/Courts\\_and\\_Predictive\\_Algorithms.pdf](https://www.datacivilrights.org/pubs/20151027/Courts_and_Predictive_Algorithms.pdf) (дата обращения: 20.01.2023).
2. AI in legal proceedings [Электронный ресурс]: URL:[https://www.researchgate.net/publication/336339778\\_ARTIFICIAL\\_INTELLIGENCE\\_IN\\_LEGAL\\_PROCEEDINGS](https://www.researchgate.net/publication/336339778_ARTIFICIAL_INTELLIGENCE_IN_LEGAL_PROCEEDINGS) (дата обращения: 20.01.2023).
3. Explainable machine learning for scientific insights and discoveries [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1905.08883.pdf> (дата обращения: 23.01.2023).
4. Explainable AI: understanding, visualizing and interpreting deep learning models [Электронный ресурс]: URL:<https://www.itu.int/en/journal/001/Documents/itu2017-5.pdf> (дата обращения: 23.01.2023).
5. Informed machine learning – a taxonomy and survey of integrating prior knowledge into learning systems [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1903.12394.pdf> (дата обращения: 26.01.2023).
6. The challenge of crafting intelligible intelligence [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1803.04263.pdf> (дата обращения: 26.01.2023).
7. Classification of explainable artificial intelligence methods through their output formats [Электронный ресурс]: URL:<https://www.mdpi.com/2504-4990/3/3/32> (дата обращения: 28.02.2023).
8. XAI: concepts, taxonomies, opportunities and challenges toward responsible AI [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1910.10045.pdf> (дата обращения: 28.02.2023).

9. Explainable artificial intelligence: an overview [Электронный ресурс]: URL:<https://cedar.buffalo.edu/~srihari/papers/XAI-Overview.pdf> (дата обращения: 28.02.2023).
10. Permutation importance: a corrected feature importance measure [Электронный ресурс]: URL:[https://www.researchgate.net/publication/43130914\\_Permutation\\_importance\\_A\\_corrected\\_feature\\_importance\\_measure](https://www.researchgate.net/publication/43130914_Permutation_importance_A_corrected_feature_importance_measure) (дата обращения: 17.02.2023).
11. Explaining hyperparameter optimization via partial dependence plots [Электронный ресурс]: URL:[https://www.researchgate.net/publication/356083950\\_Explaining\\_Hyperparameter\\_Optimization\\_via\\_Partial\\_Dependence\\_Plots](https://www.researchgate.net/publication/356083950_Explaining_Hyperparameter_Optimization_via_Partial_Dependence_Plots) (дата обращения: 17.02.2023).
12. Attention-based saliency maps improve interpretability of pneumothorax classification [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/2303.01871> (дата обращения: 05.03.2023).
13. Learning important features through propagating activation differences [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1704.02685> (дата обращения: 05.03.2023).
14. Interpretable local tree surrogate policies [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/2109.08180.pdf> (дата обращения: 05.03.2023).
15. A guide for making black box models explainable [Электронный ресурс]: URL:<https://christophm.github.io/interpretable-ml-book/> (дата обращения: 12.02.2023).
16. “Why should i trust you?”: explaining the predictions of any classifier [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1602.04938> (дата обращения: 05.03.2023).
17. A unified approach to interpreting model predictions [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1705.07874> (дата обращения: 05.03.2023).
18. SALib [Электронный ресурс]: URL:<https://salib.readthedocs.io/en/latest/index.html> (дата обращения: 05.03.2023).
19. Multi-objective counterfactual explanations [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/2004.11165.pdf> (дата обращения: 05.03.2023).

20. Axiomatic attribution for deep networks [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1703.01365> (дата обращения: 05.03.2023).
21. Layer-wise relevance propagation for neural networks with Local renormalization layers [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1604.00825.pdf> (дата обращения: 05.03.2023).
22. Scalable Bayesian rule lists [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1602.08610.pdf> (дата обращения: 05.03.2023).
23. Striving for simplicity: the all convolutional net [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1412.6806> (дата обращения: 05.03.2023).
24. SmoothGrad: removing noise by adding noise [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1706.03825> (дата обращения: 05.03.2023).
25. Grad-CAM: visual explanations from deep networks via gradient-based localization [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1610.02391> (дата обращения: 05.03.2023).
26. ProtGNN: towards self-explaining graph neural networks [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/2112.00911> (дата обращения: 05.03.2023).
27. Explainability methods for graph convolutional neural networks [Электронный ресурс]: URL:[https://openaccess.thecvf.com/content\\_CVPR\\_2019/papers/Pope\\_Explainability\\_Methods\\_for\\_Graph\\_Convolutional\\_Neural\\_Networks\\_CVPR\\_2019\\_paper.pdf](https://openaccess.thecvf.com/content_CVPR_2019/papers/Pope_Explainability_Methods_for_Graph_Convolutional_Neural_Networks_CVPR_2019_paper.pdf) (дата обращения: 07.03.2023).
28. An interpretable deep learning model for automatic sound classification [Электронный ресурс]: URL:[https://www.researchgate.net/publication/350599409\\_An\\_Interpretable\\_Deep\\_Learning\\_Model\\_for\\_Automatic\\_Sound\\_Classification](https://www.researchgate.net/publication/350599409_An_Interpretable_Deep_Learning_Model_for_Automatic_Sound_Classification) (дата обращения: 07.03.2023).
29. GCNN-explainability [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/ndey96/GCNN-Explainability> (дата обращения: 07.03.2023).

УДК 004.912

Скачихин А. М.

## **Автоматическое реферирование текстов с использованием алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта**

*Рекомендовано к публикации доцентом Блекановым И. С.*

**1. Введение.** Автоматическое реферирование текстов является одной из задач работы с естественными языками [1] и используется для выделения основной информации из текста. С течением времени появилось очень много данных, сохраненных в электронном виде, и вместе с этим – проблема нахождения конкретной информации в большом объеме документов, а также проблема хранения больших объемов данных. На данный момент не существует универсального алгоритма решения этой задачи. Благодаря глубокому обучению удалось совершить большой скачок в области резюмирования текстов, но технология все еще не идеальна. Сложно создать такое резюме, которым был бы доволен каждый человек. Ведь реферирование текста – это написание краткого изложения, т. е. у каждого будет получаться что-то уникальное. Поэтому задача состоит в том, чтобы результат удовлетворял как можно большее количество пользователей. Ежедневно мы сталкиваемся с результатами суммаризации (от англ. summarization) текстов, когда ищем нужную информацию в интернете. Всплывающие под ссылками аннотации – самые яркие примеры автоматического реферирования. В их основе лежат экстрактивные алгоритмы суммаризации.

В данной работе предложено несколько алгоритмов реферирования текстов на русском языке, и проведен их анализ. В качестве данных были использованы статьи и их аннотации: для проверки работы алгоритмов аннотация – то, что надо получить, статьи – то, из чего будет создаваться резюме. Исследуемые алгоритмы могут быть использованы для облегчения работы журналистов, которым после написания статьи зачастую приходится писать и аннотацию или пересказ.

---

*Скачихин Александр Максимович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076214@student.spbu.ru, тел.: +7(904)385-11-18

**2. Описание рассматриваемых алгоритмов.** В данном разделе рассмотрены используемые в исследовании алгоритмы реферирования текстов, а также информация о наборе данных.

**2.1. Алгоритмы на основе экстрактивного подхода.** Для данного подхода характерно, что модель не генерирует новый текст, а использует имеющийся и составляет резюме из его предложений. Данная модель проста в понимании. Первый алгоритм основан на предположении о том, что большое количество общих слов в предложениях означает важность этой информации в тексте. Вторая модель исследует близость векторных представлений предложений. Осуществляется это с помощью модели Word2Vec [2], которая изучает контекст и корректирует значения векторов, а также формулы косинусного расстояния

$$\text{Similarity}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i B_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2}}.$$

**2.2. Реферирование на основе абстрактного подхода.** Абстрактная суммаризация строит новый текст из слов и словосочетаний, которые могли не встречаться в исходном тексте. Результат работы данного алгоритма больше похож на ручное написание резюме. Используемая модель основана на архитектуре кодировщик – декодировщик [3], созданной с использованием различных механизмов внимания [4].

**2.3. Набор данных.** В качестве данных выбраны статьи и их аннотации с сайта gazeta.ru, взятые за период с 2010 по 2020 годы. Также в наборе данных имеются заголовки статей, что позволяет перепрофилировать задание в формирование заголовков для статей.

**3. Сравнение алгоритмов.** В этом разделе представлен процесс написания компьютерных программ для исследуемых алгоритмов, а также проведено сравнение результатов тестирования программ для решения различных прикладных задач.

**3.1. Написание и обзор алгоритмов.** Для каждого отдельного алгоритма первостепенная задача – предобработка данных. В нее входят очистка текста от знаков препинания, разбиение на отдельные предложения, а предложения на слова. Также необходимо провести лемматизацию слов – процесс приведения слова к нормальной форме. Далее алгоритмы имеют разные шаги.

Для первого экстрактивного алгоритма весь процесс составления



резюме заключается в поиске коэффициентов схожести предложений. Их можно посчитать, как отношение количества общих слов к длине предложений. Результат хорошо представим в виде матрицы смежности, каждый элемент которой является полученным отношением предложений  $i$  и  $j$ .

Далее рассчитывается рейтинг для каждого предложения (средняя величина по строке матрицы), и составляется список самых значимых предложений. Затем по их номерам выводятся предложения из исходного текста. Это и будет результат реферирования.

В итоге получается резюме, в котором содержатся слова из истинной аннотации. Оно частично передает суть изложенного в тексте. Однако получается не самое качественное резюме. Это связано с тем, что никак не учитывается контекст предложений.

Для второго экстрактивного алгоритма процесс написания сложнее. Прежде всего, для каждого уникального слова из текста необходимо найти его векторное представление. Для этого использовалась известная модель Word2Vec – хороший инструмент для количественной оценки дискретных значений. Текст разбивается на токенизированные предложения. Для каждого из них находится векторное представление. Если какое-либо слово не встречается в словаре, тогда считаем, что векторное представление такого слова – нулевой вектор. Затем с использованием формулы косинусного расстояния строится матрица схожести предложений.

Дальнейшие шаги похожи на предыдущий алгоритм. Сначала необходимо ранжировать предложения по значимости, после чего вывести те, у которых самый высокий рейтинг.

Данный алгоритм гораздо лучше улавливает суть текста, по сравнению с предыдущим. Но при этом, он выводит много лишней информации, из-за чего резюме получается довольно объемным.

Теперь рассмотрим алгоритм, основанный на абстрактном подходе. В качестве модели использовалась готовая нейронная сеть `ruT5` [5], дообученная для суммаризации текстов. Подобно предыдущему алгоритму, она разбивает предложения на токены, применяет Embedding слой [6] для поиска векторных представлений, а также слой нормализации, полносвязные, линейные, и другие слои, среди которых несколько слоев Attention, которые позволяют ускорить работу, по сравнению с аналогичными рекуррентными нейронными сетями. Кроме того, этот механизм позволяет учитывать контекст.

Данный алгоритм хорошо воспринимает контекст, ведь в итоге

получается крайне близкое к оригиналу резюме. Также в нем учтена возможность влиять на длину желаемого резюме, что полезно при работе с текстами. Может получиться так, что модель генерирует слишком много информации, либо, наоборот, слишком мало. Длина текста является изменяемым параметром модели.

Пример оригинального резюме: *«Протестующие против антикоронавирусных мер немцы скандировали имя российского президента, потому что уважают его. Такое мнение выразил депутат городской палаты представителей Гуннар Линдеманн. На этих выходных в Берлине прошли крупные акции протеста. Манифестанты требовали отменить ношение масок и отказаться от соблюдения безопасного расстояния в 1,5 м друг от друга.»*

Резюме, сгенерированное первым алгоритмом: *«По официальным данным, манифестантов было почти в два раза меньше – 18 тыс. На улице Унтер-ден-Линден находилась группа примерно в две тысячи человек, из которой в полицию бросали бутылки и камни. Позднее сенатор Берлина по вопросам внутренней политики Андреас Гайзель в прямом эфире Inforadio отметил, что часть полицейских была направлена именно к посольству России, из-за чего была ослаблена охрана бундестага. Всего в субботу были задержаны 316 человек.»*

Резюме, сгенерированное вторым алгоритмом: *«На этих выходных в Берлине прошли крупные акции протеста против введенных для борьбы с коронавирусом ограничений. В эти выходные – 29 и 30 августа – в Берлине прошли массовые акции протеста против антикоронавирусных мер: ношения масок и соблюдения безопасного расстояния в 1,5 м друг от друга. В частности, было перекрыто пространство вокруг Бранденбургских ворот, а также Александерплац и Лейпцигерплац. Но на улице Унтер-ден-Линден, почти перед российским посольством были насильственные действия, там кидали бутылки и камни, были ранены, задержано более 200 человек – там было необходимо полицейское подкрепление, и произошла переброска сил.»*

Резюме, сгенерированное gT5: *«В Берлине прошли массовые акции протеста против введенных для борьбы с коронавирусом ограничений. По словам депутата городской палаты представителей Гуннара Линдеманна, манифестанты выкрикивали фамилию президента России Владимира Путина из уважения к нему. По его словам, протестующие ранее пришли к российскому посольству, что-*

бы „привлечь внимание к условиям в Германии“, надеясь, что Россия сможет оказать влияние на канцлера ФРГ Ангелу Меркель.»

**3.2. Метрики.** Для численной оценки методов использовались три метрики: ROUGE – какой процент  $n$ -грамм исходного текста содержится в сгенерированном тексте [7], BLEU – какой процент  $n$ -грамм сгенерированного текста содержится в исходном тексте [8], METEOR – аналогична BLEU, но дополнительно учитывает синонимы и различные словоформы [9]. Они наиболее качественно отражают особенности исследуемых алгоритмов.

В таблице приведены результаты измерений указанных метрик.

**Таблица.** Метрики

Метрика	Alg1	Alg2	Alg3
ROUGE-1	0,207407	0,196825	0,130000
ROUGE-2	0,055556	0,100000	0,066667
ROUGE-L	0,207407	0,196825	0,130000
BLEU	0,390874	0,377833	0,409355
METEOR	0,241524	0,240715	0,267178

**4. Выводы.** Результаты измерений отражают особенности алгоритмов. Абстрактный алгоритм создает уникальное резюме, в котором могут встречаться слова, отсутствующие в исходном тексте. Также может измениться порядок слов в предложении, из-за чего метрика ROUGE более низкая. Однако метрики METEOR и BLEU показывают хорошие результаты. Таким образом, данный алгоритм лучше подходит для задач, в которых необходимо найти суть в тексте. А экстрактивные алгоритмы показывают более хорошее качество для задач, связанных с генерацией заголовков и выдержек из текста. Например, поисковые системы используют экстрактивные алгоритмы для написания аннотаций под ссылкой на веб-страницу.

**5. Заключение.** В данной работе исследовано несколько алгоритмов автоматического реферирования текстов. Проведены обработка данных, выбор и построение моделей, а также подбор метрик, их измерение на данных и анализ результатов. В дальнейшем планируется продолжить исследования в области суммаризации текстов, рассчитать результаты на других метриках, найти более качественные модели реферирования.

## Литература

1. Андрейченко А. Г., Блеканов И. С. Нейросетевые методы анализа мнений пользователей в дискуссиях социальных сетей // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 165–174.
2. Wang R., Shi Y. Research on application of article recommendation algorithm based on Word2Vec and Tfidf // 2022 IEEE International Conference on Electrical Engineering, Big Data and Algorithms (EEBDA), Changchun, China, 2022. P. 454–457.
3. Naputhanthri D., Wijayasiri A. Short-term traffic forecasting using LSTM-based deep learning models // 2021 Moratuwa Engineering Research Conference (MERCCon), Moratuwa, Sri Lanka. 2021. P. 602–607.
4. Ji M., Fu R., Xing T., Yin F. Research on text summarization generation based on LSTM and attention mechanism // 2021 International Conference on Information Science, Parallel and Distributed Systems (ISPDS), Hangzhou, China. 2021. P. 214–217.
5. RuT5SumGazeta [Электронный ресурс]: URL:[https://huggingface.co/IlyaGusev/rut5\\_base\\_sum\\_gazeta](https://huggingface.co/IlyaGusev/rut5_base_sum_gazeta) (дата обращения: 08.03.2023).
6. Xia X. et al. Synergistic union of word embedding and knowledge graph for words semantic similarity measure // 2018 IEEE 4th International Conference on Computer and Communications (ICCC), Chengdu, China. 2018. P. 2349–2353.
7. Metric: rouge [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co/spaces/evaluate-metric/rouge> (дата обращения: 10.03.2023)
8. Evaluating models [Электронный ресурс]: URL:<https://cloud.google.com/translate/automl/docs/evaluate> (дата обращения: 10.03.2023)
9. Metric: meteor [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co/spaces/evaluate-metric/meteor> (дата обращения: 10.03.2023)

UDC 004.8

Chen X., Dan J., He Y., Sun M., Guo Z., Li Y.

## Implementation of 22 categories license plate recognition and multiple license plate detection

**1. Introduction.** Under the development of smart cities, license plate detection and recognition have obvious applications in various occasions, such as traffic management, parking lot charges, automatic driving, etc. The traditional method mainly uses the color information, edge contour information, brightness, texture and other features in the image for license plate location and character recognition. Usually, the traditional method needs to be realized through multiple stages (license plate location, license plate correction, character segmentation, character recognition [1–5]). With the gradual improvement of the concept of smart city, license plate detection and recognition based on convolutional neural network has been developed rapidly. For example, the R-CNN series [6] for license plate detection and classification based on candidate areas; another type of YOLO series [7] that does not directly perform frame regression and category output based on candidate areas. He et al. [8] proposed a character recognition model based on convolutional neural network; CRNN network is used to recognize text sequences of variable length end-to-end, and has been widely used in the direction of license plate character recognition [9]. The method based on deep learning has achieved good results in license plate detection and recognition. The recognition rate of most networks is above 95%. At present, there are few algorithms that realize the detection and recognition of all types

---

*Chen Xinquan* – graduate student, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: XinquanChen0117@163.com, phone: +8617721606070

*Dan Jiaqian* – graduate student, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: 22s012031@stu.hit.edu.cn, phone: +8613990055149

*He Yuwei* – graduate student, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: he20010515@163.com, phone: +8618246198523

*Sun Mengyuan* – graduate student, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: 22s012034@stu.hit.edu.cn, phone: +8615510813191

*Guo Zhichang* – professor, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: mathgzc@hit.edu.cn, phone: +8615045858027

*Li Yao* – associate professor, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: yaoli0508@hit.edu.cn, phone: +8615145025182

of license plates. Taking Chinese license plates as an example, it is difficult to recognize uncommon license plates such as civil aviation vertical green license plates, Hong Kong and Macao three license plates, and agricultural license plates. Among the more cutting-edge algorithms, Yilin Gao et al. proposed a Groupplate framework for multi-category license plate recognition [10], which still cannot solve the above-mentioned complex engineering problems.

To summarize, the following contributions were made to this paper:

- As shown in Fig. 1, the license plate detection network based on YOLOv7-Face realizes the license plate detection of all types (22 categories, see Fig. 2) of national standard license plates according to the characteristics of different national standard license plates.
- It can detect and recognize the situation where a vehicle contains multiple license plates in Hong Kong and Macao regions of China; based on the idea of character replacement, it can realize the recognition of vertical civil aviation license plates in the field, and also provide solutions for this type of special license plate recognition problems; for pollution Damaged or blocked police signs are not limited to character recognition, and the police signs are output through license plate detection information and 22 categories of classification information.

**2. Our work.** According to the Chinese national standard, we now divide the license plate into 22 categories. Before that, the license plate category was divided into two categories at most, which are single-layer

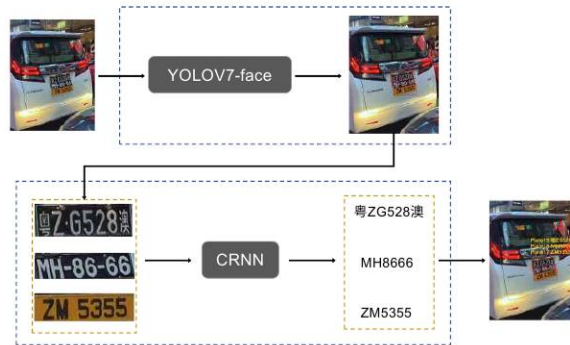


Figure 1. License plate recognition flow chart

NUM	NAME	EXAMPLE
1	Single layer blue license plate	
2	Single layer yellow license plate	
3	Double layer yellow license plate	
4	New energy license plate	
5	Single layer police license plate	
6	Single layer armed police license plate	
7	Double layer armed police license plate	
8	Single layer military license plate	
9	Double layer military license plate	
10	Single layer practice license plate	
11	Single layer emergency license plate	
12	Single layer new embassy license plate	
13	Single layer new consulate license plate	
14	Civil aviation license plate	
15	Civil aviation horizontal green license plate	
16	Civil Aviation Vertical Green license plate	
17	Single layer Hong Kong license plate	
18	Single layer Macau license plate	
19	Hong Kong and Macau license plates in the Mainland	
20	Agricultural license	
21	Double layer Hong Kong license plate	
22	Double layer Macau license plate	

Figure 2. 22 category license plate classification

license plate and double-layer license plate. However, due to the non-uniform character structure in the double-layer license plate, not only is it difficult to segment and recognize adaptively, but it will also cause confusion when encountering recognizable vehicles that are covered by stains or have three license plates. Due to geographical reasons, although there are mostly single-layer blue plates in mainland China, there will be a large number of multi-layer license plates in areas close to Hong Kong and Macau. Therefore, it is very important to recognize multiple license plates and double-layer license plates more accurately. Here we have made a precise division of this category. As shown in the Fig. 2, we have implemented a classification method for different multi-layer license plates, and on this basis, we have performed higher-precision detection and recognition.

**2.1. 22 categories of standard national license plates.** In the process of classification, we took into account not only the structural differences between single-layer and double-layer license plates, but also the differences within the double-layer license plate category, such as the different division ratios of double-layer Hong Kong license plates

and agricultural license plates. Therefore, we subdivide these double-layer license plates to get the most appropriate segmentation method. In the case of missing characters, using this technology can automatically complete keywords after recognition, thereby avoiding the problem of missing characters. In addition, each type of license plate after standardization has a different set of characters, and separate detection after classification can reduce the similarity of characters and improve the accuracy rate, and will not let the characters of rare license plates affect the correct rate of most, and effectively reduce character recognition probability of error. In the following experiments, we will prove that this classification method is effective and compare it with other license plate recognition models.

**2.2. License plate detection and recognition.** For the license plate detection in the first stage, we use YOLOv7-Face [11] for target detection. By classifying different license plates according to the above classification standards, we can detect all license plates in the picture and perform key point regression for subsequent processing. In each of the following categories, we preprocess the structure of the license plate for building material splicing and then use the CRNN model for character recognition. Through this method, we can solve the problem that three license plates cannot be detected at the same time. Although vehicles with multiple license plates can be detected before, the license plate is a single output instead of three license plates, which will cause confusion. Now after classification, the three license plates can be marked and output one by one to avoid the problem that the recognized license plate characters do not correspond to the license plate. And since the model now recognizes characters on the basis of each category, if it is occluded or defaced but does not affect the license plate classification, we can replace some of the missing key characters through the prior classification of the classification. The final result display and comparison of the output are shown in the experimental part.

**3. Experiment.** In this study, we used a deep learning-based license plate detection and recognition system and designed a series of experiments to evaluate its performance. Firstly, to demonstrate the effectiveness of our model, we trained and tested it on the CCPD dataset and compared it with other models. Moreover, we are actively seeking special license plates and datasets with diverse features, such as different regions, vehicle types, and vehicle usage, to showcase the accuracy and



robustness of our model in various scenarios.

**3.1. YOLOv7-Face detection capability.** Firstly, we used the CCPD dataset as the training and testing data to verify the performance of YOLOv7 as the license plate detection network. Notice, that YOLOv7-Face (CCPD) was trained using the entire CCPD dataset for training, while YOLOv7-Face (company) was trained only using the company’s data.

**Table.** CCPD Test Benchmark

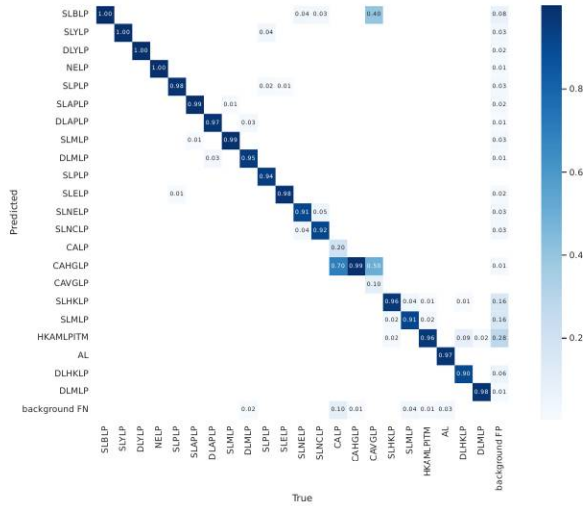
METHOD	AP	DB	BLUR	FN	ROT-ATE	TILT	CHALLENGE
Faster-RCNN	84.98	66.73	81.59	76.45	94.42	88.19	89.82
SSD300	86.99	72.90	87.06	74.84	96.53	91.86	90.06
SSD512	87.83	69.99	84.23	80.65	96.50	91.26	92.14
YOLOv3-320	87.23	71.34	82.19	82.44	96.69	89.17	91.46
YOLOv7-Face (CCPD)	<b>97.9</b>	<b>93.65</b>	<b>93.86</b>	<b>93.81</b>	<b>93.48</b>	<b>93.83</b>	<b>93.64</b>
YOLOv7-Face (company)	67.99	32.91	57.35	60.41	76.60	69.07	80.30

As shown in the Table, YOLOv7-Face network showed excellent performance on the CCPD dataset and achieved better AP indicators on challenging CCPD subsets such as blur and challenge compared to algorithms such as SSD and YOLOv3. This indicates that the network has high detection performance. On the other hand, we also attempted to train the network using data provided by a certain company and achieved good AP performance on the CCPD test set.

**3.2. Detection performance of 22 license plate models.** Since the CCPD dataset lacks license plate category information, we used a test set provided by a certain company to test the detection performance of our multi-classification model and the detection performance of three types of license plates.

As shown in Fig. 3, except for the confusion that occurs between the extremely similar CALP, CAHGLP, and CAHVLP license plates, YOLOv7-Face achieved extremely high precision and recall rates. Additionally, for cases with multiple license plates, the recall rates for HKAMPLPITM, Single layer Hong Kong license plate, and Single layer Macau license plate were all above 95%.

We show some visualization results, as shown in the Fig. 4, The first row represents the original input image, and the second row represents the recognized license plate type and number. From the results, our network has achieved the recognition of three license plates in Hong



**Figure 3.** Confusion matrix of YOLOv7-Face network in detecting models on company dataset

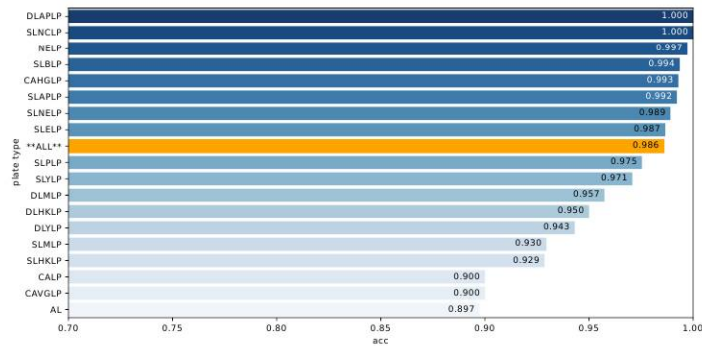
Kong and Macao, single layer blue license plates, large angle license plates, single layer yellow plates, and double layer yellow plates.

**3.3. End-to-end detection performance.** As shown in Fig. 5, using the YOLOv7-Face-based and CRNN end-to-end detection and recognition system on a complete dataset of license plates provided by a certain company, we achieved a high overall accuracy rate. Common license plates, such as SLBLP and NELP, both achieved an accuracy rate of over 99%. The overall accuracy rate of license plate detection and recognition reached 98.6%.

**4. Conclusion.** In this work, we have realized the recognition of all license plates in Chinese Mainland, and divided Chinese license plates into 22 categories according to the national standard, which has solved the problem of recognition of unconventional license plates. The YOLOv7-Face and CRNN models are used to extract license plates from input images and recognize characters. Our model has strong recognition ability on the CCPD dataset, and has achieved an end-to-end comprehensive accuracy rate of 98.5% on the full range of vehicle license plate datasets given by the company.



**Figure 4.** Visualized results. The first line displays the input original image, the second line displays the recognized license plate type and license plate number



**Figure 5.** Accuracy of end-to-end detection system on complete license plate dataset of a certain company

## References

1. Bakhtan M. A. H., Abdullah M., Rahman A. A. A review on license plate recognition system algorithms // 2016 Int. Conf. on Information and Communication Technology (ICICTM), Kuala Lumpur, Malaysia. 2016. P. 84–89.
2. Lin H., Zhao J., Li S., Qiu G. License plate location method based on edge detection and mathematical morphology // 2020 IEEE 4th Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conf. (ITNEC), Chongqing, China. 2020. P. 853–857.

3. Ma S.-j., Zhao J.-y. A method of license plate location based on mathematical morphology and corner detection // 2011 Int. Conf. on Network Computing and Information Security, Guilin, China. 2011. P. 257–260.
4. Yu Y., Zhang Q., Wu H., Jiao Z. License plate location based on combination of deep learning and feature fusion // 2019 10th Int. Conf. on Information Technology in Medicine and Education (ITME), Qingdao, China. 2019. P. 684–687.
5. Ma L., Luo X., Jiang P. Research on dot matrix character recognition based on template matching and support vector machine // Computer Engineering and Applications. 2020. V. 56. No 4. P. 134–139. (In Chinese)
6. Girshick R. et al. Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation // 2014 IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, Columbus, OH, USA. 2014. P. 580–587.
7. Bochkovskiy A., Wang C.-Y., Liao H.-Y. M. YOLOv4: Optimal speed and accuracy of object detection // arXiv preprint [Internet resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/2004.10934> (date: 16.06.2023).
8. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep residual learning for image recognition // 2016 IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Las Vegas, NV, USA. 2016. P. 770–778.
9. Shi B., Bai X., Yao C. An end-to-end trainable neural network for image-based sequence recognition and its application to scene text recognition // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2017. V. 39. No 11. P. 2298–2304.
10. Gao Y., Lu H., Mu S., Xu S.. GroupPlate: Toward multi-category license plate recognition // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2023. V. 24. No 5. P. 5586–5599.
11. Wang C.-Y., Bochkovskiy A., Liao H.-Y. M. YOLOv7: Trainable bag-of-freebies sets new state-of-the-art for real-time object detectors // arXiv preprint [Internet resource]: URL:[arxiv.org/abs/2207.02696](https://arxiv.org/abs/2207.02696) (date: 16.06.2023).

UDC 004.92

Liu J., Zhang C., Li Z.

## Computer vision-based license plate recognition technology

*Recommended for publication by associate professor Blekanov I. S.*

**1. Social significance.** With the rapid development of machine vision technology, automated, intelligent and sophisticated traffic control by means of advanced target detection algorithms has started to gain a lot of popularity [1]. Therefore, an OpenCV-based road number plate recognition system [2] is proposed and designed, which can keep working for a long time and maintain a certain accuracy rate under complex road environment, and can realize the functions of car park entrance and exit fee management, vehicle theft management, highway speeding automation management, red light running electronic police and highway toll management. It is of practical importance for maintaining traffic safety and urban security, preventing traffic jams and achieving fully automated traffic management.

### **2. Technical support and introduction to the dataset.**

**2.1. OpenCV.** Python's OpenCV module is an open source C++-based computer vision library designed to provide an easy-to-use and efficient interface for implementing a variety of computer vision tasks such as image processing, computer vision, video capture, image and video analysis, and more. The OpenCV module uses a number of classic computer vision algorithms and techniques, including image processing, feature detection, feature extraction, machine learning, deep learning and more. The following are some common application principles for OpenCV modules:

- (1) Image processing: it can load, save and process images.
- (2) Feature detection and extraction: It detects and extracts features from the image.

---

*Liu Jie* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: liujie-hd@foxmail.com, phone: +8615691662991

*Zhang Chenxi* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: e-mail: zhangcx000424@163.com, phone: +8613909238258




*Li Zhuo* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: 204810448@qq.com, phone: +8615691662991

- (3) Target tracking and object recognition: It enables object recognition and tracking by detecting and tracking targets. From the model output, and for each detected pedestrian, the enclosed frame position and confidence score are recorded.
- (4) Face recognition and expression recognition: It can use machine learning and deep learning algorithms to implement face recognition and expression recognition.
- (5) Video processing: It can handle video and it provides various functions and tools such as video capture, video coding and decoding, video analysis, etc.

**2.2. Introduction to the training data set.** We used this public dataset [3] of about 10,000 images, including images of numbers, capital letters, and abbreviations of Chinese provinces. Example of the images and the categories of numbers, letters and province abbreviations, are shown in Table.

**Table.** Numbers, letters and province abbreviations

Image	Should be categorized as one of
	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
	皖, 京, 渝, 闽, 甘, 粤, 桂, 贵, 琼, 冀, 黑, 豫, 港, 鄂, 湘, 蒙, 苏, 赣, 吉, 辽, 澳, 宁, 青, 陕, 鲁, 沪, 晋, 川, 台, 津, 藏, 新, 云, 浙

**3. Overall design solutions.** Using the basics of OpenCV, the images are pre-processed to find the relevant contours and then the licence plate prediction recognition is carried out by template matching.

**3.1. Main points.**

- (1) Graphics processing operations using OpenCV;
- (2) Extraction of licence plate outline;
- (3) Locate the license plate and identify it.

**3.2. Steps.**

- (1) The image is loaded and edge detection of the image using the Sobel operator on the image is performed;
- (2) Template files are read;

- (3) Contours of images are detected: from the model output, and for each detected pedestrian, the enclosed frame position and confidence score are recorded.
- (4) The outline size of the plate is calculated and it is positioned onto the plate;
- (5) A template matching algorithm is used to obtain the plate characters, traverse the plate and recognise the plate.

#### 4. Programming.

- (1) Read the example image:



Figure 1. Example image

The image is greyed out and edge detection is performed using the Sobel operator (the original image is shown in Fig. 1 and the processed image is shown in Fig. 2).

---

```
gray = cv2.cvtColor(img, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
blur = cv2.GaussianBlur(gray, (3, 3), 0)
canny = cv2.Canny(blur, 75, 200)
Sobel_x = cv2.Sobel(canny, cv2.CV_16S, 1, 0)
absX = cv2.convertScaleAbs(Sobel_x)
```

---



Figure 2. After Sobel operator processing

- (2) Read template file

---

```
def read_template_file(directory_name):
    template_list = []
    for fileName in os.listdir(directory_name):
        template_list.append(directory_name + "/" +
                              fileName)

    return template_list

def get_template(start, end):
    template_words = []
    for i in range(start, end):
        word = read_template_file('./template/' +
                                   template[i])

        template_words.append(word)
    return template_words
```

---

- (3) Use of rectangular convolution kernels, closed operations:

---

```
rectKernel = cv2.getStructuringElement(cv2.MORPH_RECT,
                                       (9, 3))

close = cv2.morphologyEx(absX, cv2.MORPH_CLOSE,
                        rectKernel)
```

---

- (4) Contour detection of images:

---

```
thresh_Contours = close.copy()
cnts = cv2.findContours(
    thresh_Contours, cv2.RETR_EXTERNAL,
    cv2.CHAIN_APPROX_SIMPLE)[0]
image = img.copy()
cv2.drawContours(image, cnts, -1, (0, 0, 255), 3)
```

---



- (5) The plate is divided and then the plate is framed (Fig. 3):

---

```
car_no_list = []
for cnt in cnts:
    rect = cv2.boundingRect(cnt)
    (x,y,w,h) = rect
    ar = w / float(h)
    if w > 80 and h > 30 and ar > 2:
        roi = img[y + 10:y + h - 5, x + 5:x + w - 5]
        cv2.rectangle(img, (x, y), (x + w, y + h),
                      (0, 0, 255), 2)
```

---



Figure 3. Framing the license plate

- (6) Treatment of framed up license plates: Grayscale, Gaussian filtering, closed operations, binarisation and contour filling of licence plate images:

---

```
gray = cv2.cvtColor(roi, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
blur = cv2.GaussianBlur(gray, (3, 3), 0)
rectKernel = cv2.getStructuringElement(
    cv2.MORPH_RECT, (2, 3))
close = cv2.morphologyEx(blur, cv2.MORPH_CLOSE,
                        rectKernel)
group = cv2.threshold(close, 0, 255,
                    cv2.THRESH_BINARY | cv2.THRESH_OTSU)[1]
digitCnts, hierarchy = cv2.findContours(
    group.copy(), cv2.RETR_EXTERNAL,
    cv2.CHAIN_APPROX_SIMPLE)
imageROI = roi.copy()
cv2.drawContours(imageROI, cnts, -1, (0, 0, 255), 3)
```

---

(7) Get plate characters based on template match, traverse plate:

```
car_all_no = []
first_chinese = get_car_No(car_no_list[0], 34, 64)
car_all_no.append(first_chinese)
second_english = get_car_No(car_no_list[1], 10, 33)
car_all_no.append(second_english + " ")
for car_no in car_no_list[2:]:
    number_english = get_car_No(car_no, 0, 33)
    car_all_no.append(number_english)
print(car_all_no)
```

```
print(car_all_no)
['陕', 'J ', '2', '1', '5', '2', '6']
```

Figure 4. Printed out license plate

**5. Results of the experiment.** As you can see, the original image plate number matches the result shown in Fig 5, proving that the output of this program is correct.



Figure 5. Result output

**6. Conclusion.** This paper proposes and designs a license plate recognition system based on computer vision processing algorithms and using OpenCV tools as a development platform. The system is capable of processing licence plate images in complex environments and recognising

licence plate images. The licence plate in the image is located by means of the colour factor, and after a series of pre-processing, segmentation and recognition operations, the licence plate information in the image is recognised. The original images of the experimental results that appear in this article are taken from images of car licence plates from the city of Yan'an.

The license plate recognition method in this paper still has shortcomings that require subsequent correction and improvement:

- (1) When processing licence plate images, the method of using licence plate features to locate and segment them has certain limitations and false detection rates, and the method requires high image quality.
- (2) When positioning the plate characters, if the border is too large it will result in a lot of non-character long black areas in the left border, which will be incorrectly identified as the first character area when segmenting the characters.



**Figure 6.** Failure example

An example of our failure is shown in Fig. 6. In such cases with recognition errors, this paper improves accuracy by [4]:

- (1) Improve the quality of test images: Use higher resolution, sharper template images; use image processing methods for denoising and filtering.
- (2) Selecting a suitable matching algorithm: This paper tried various template matching algorithms provided in OpenCV, such as TM\_SQDIFF, TM\_CCORR. This paper used `cv2.matchTemplate()` function for matching and `cv2.minMaxLoc()` function to find the best matching position.
- (3) Adjusting the matching threshold: The setting of the matching threshold also has a great impact on the matching result, so adjust the threshold according to the actual situation to make the matching result more accurate; this paper uses the `cv2.threshold()` function for thresholding.

## References

1. Pan M. et al. Visual recognition based on deep learning for navigation mark classification // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 32767–32775.
2. Nie W., Cai J. License plate recognition method based on OpenCV and SVM // *Computer & Digital Engineering*. 2021. Vol. 49. No 6. P. 1244–1247. (In Chinese)
3. Gong Y. et al. Unified Chinese license plate detection and recognition with high efficiency // *J. Vis. Commun. Image Represent.* 2022. Vol. 86. Art. no. 103541.
4. Zhou Q., Fang J., Du Y., Gao K. FAFNet: A false-alarm filtering algorithm base on deep learning for license plate recognition // *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. Art. no. 012004.

UDC 004.80

Liu Y., Xia Y., He J.

## Detection of green walnuts on trees using improved deep learning model

**1. Introduction.** In recent years, with the development and improvement of computer technology, many models of machine vision can be used in agricultural intelligent inspection technology. In terms of agricultural intelligent inspection technology, the color of the fruit and the background will increase the difficulty of computer detection. So, the problem of the color of the fruit and the background has attracted the general of the researchers. Using the traditional machine vision method to detect the walnut requires designers to extract the key features, such as size, color, and edge. Afterward, put the key features into machine learning models, such as support vector machine, decision tree, artificial neural network and so on. The basic feature extraction of these methods is complex, the real-time is poor, and the accuracy is low in field conditions. But by inputting large-scale image data and iterative training, deep learning can independently extract the key features of the target independently, which has strong adaptability and robustness.

Nowadays, image detection is based on deep learning and computer vision mainly uses image segmentation and object detection methods. These methods have been used to identify fruits, and good results have been achieved. However, most of the existing studies focus on large targets such as peaches, tomatoes, and apples. And there are fewer studies on the detection of green walnut which are small targets with a similar color to the background. Therefore, this study aims to find the best method for the detection of green walnut.

### 2. Data.

**2.1. Data acquisition.** In this study, the data used for green walnut that are captured using a smartphone (oppo A5) under field conditions at the orchard, which is located in Lantian, Xian, China.

---

*Liu Yuanhao* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: liu1796@outlook.com, phone: +8613379000651

*Xia Yuyan* – PhD student, Saint-Petersburg state University;  
e-mail: 154110443@qq.com, phone: +7(929)1297026

*He Jinrong* – associate professor, Yan'an University;  
e-mail: hejinrong@yau.edu.cn, phone: +8618792809680

The study collected two sets of images of the dataset in a ratio of 10:1. The first set (the set that collected the most percentage, a total of 500 images were collected) had a resolution of the image 9101920 pixels, and the other (the set that collected the most percentage, a total of 50 images were collected) had a wide variety of resolutions. The reason for this is that the study uses a unified group of pixels for the training model and the other group for detection. In this way, it can be concluded whether the trained model can be applied to detection under different pixels. The image format is jpg. We used this augmentation to expand from 550 to 10 500 images.

**2.2. Data augmentation.** Convolutional neural networks often need lots of training samples to effectively extract the feature of the image to output recognition results. To enhance the richness and the size of the image database, the study amplified the image using the methods in the PIL (Python Image Library). PIL is the most used image-processing library in Python. PIL supports image storage, display and processing. And it can handle almost all image formats. The study used PIT to process the dataset in various forms. Such as flip, flipud, cutout, gaussian blur and affine.

**3. Experiments and discussion.** The study used the training to get the model according to the Intersection Over Union (IoU) threshold of 0.5, and the Confusion matrix (Table 1) was obtained. In this table, TP represents the positive samples predicted by the model as a positive class (true positive); TN represents the negative samples predicted by the model as a negative class (false positive); FP represents the negative samples predicted by the model as a positive class (true negative); and FN represents the positive samples predicted by the model as a negative class (false negative).

**Table 1.** Confusion matrix

Detect result	Positive example	Negative example
Positive example	TP	FN
Negative example	FP	TN

Then, the Precision ( $P$ ) and Recall ( $R$ ) are defined as follows:

$$P = \frac{TP}{TP + FP} \quad (1)$$

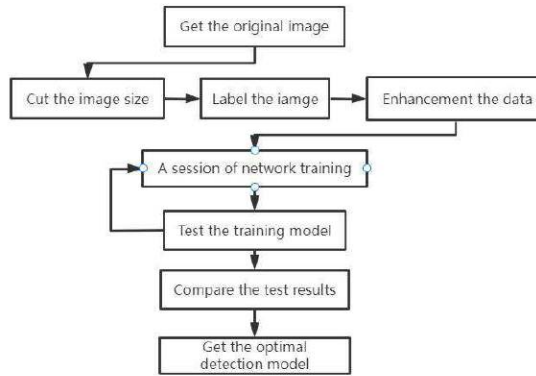
$$R = \frac{TP}{TP + FN} \quad (2)$$

And there are also two evaluation indicators defined as the F-Measure ( $F_1$ ) and mean Average Precision (mAP) are defined as follows:

$$F_1 = \frac{2PR}{P + R} \quad (3)$$

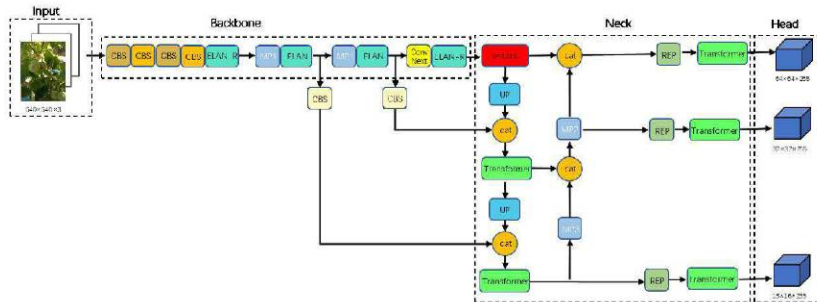
$$\text{mAP} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_1^0 P(R) dR \quad (4)$$

The study training process is show as follow:



**Figure 1.** The training procedure

In this study, we add the Transformer [1] and the ConvNeXt [2] in the YOLOv7 [3]. The network structure of the YOLOv7-Transformer-ConvNeXt as follow:



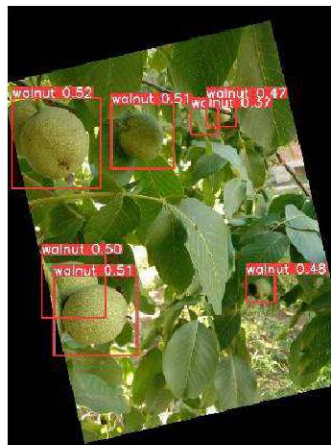
**Figure 2.** The network of YOLOv7-Transformer-ConvNeXt

**4. Result.** The study used  $P$ ,  $R$ ,  $F_1$  and mAP as the accuracy index of the model in the result. And used the Faster R-CNN [4] model, RetinaNet [5] model, YOLOv5 model, YOLOv7 model and improved YOLOv7 model to train the dataset to get the accuracy index. Table 2 shows the model performance comparison of different networks. By analyzing the data in it, the improved YOLOv7 has the best  $R$ ,  $F_1$  and mAP. So the study thinks the improved YOLOv7 is the best model for detecting the green walnut.

**Table 2.** Model performance comparison of different network

Accuracy index	P	R	F1	mAP
Faster R-CNN	0.6788	0.9307	0.79	0.9241
RetinaNet	0.9365	0.7566	0.84	0.7969
YOLO-V5	0.97	0.918	0.95	0.954
YOLO-V7	0.976	0.921	0.95	0.951
YOLOv7-Transformer-ConvNeXt	0.981	0.939	0.96	0.962

From the detect result, the YOLOv7-Transformer-ConvNeXt has a high confidence and detect more green walnut. The detect result of the improved YOLOv7 model is presented in Figure 3.



**Figure 3.** Detect results of YOLOv7-Transformer-ConvNeXt

**5. Conclusion.** In this study, The improved YOLOv7 has the highest  $P$ ,  $R$ ,  $F_1$  and mAP values among the several models. It can reach 98.1%, 93.9%, 96% and 96.2%. And the improved YOLOv7 detection result has low error. So, we found the YOLOv7-Transformer-ConvNeXt



is more suitable for detect the green walnut from five commonly used computer vision models. And we used the five data enhancement methods mixed to expand the data so that the trained model can adapt to a variety of conditions. The training model is able to detect the green walnut that was small and similar to the background. In terms of crop detection, the study of this paper meets the real-time and accuracy requirements, and provides technical support for subsequent research.

### References

1. Vaswani A. et al. Attention is all you need // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/1706.03762> (date 19.06.2023).
2. Liu Zh. et al. A ConvNet for the 2020s // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/2201.03545v2> (date 19.06.2023).
3. Wang Ch.-Y., Bochkovskiy A., Liao H.-Y. M. YOLOv7: Trainable bag-of-freebies sets new state-of the art for real-time object detectors // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/2207.02696> (date 19.06.2023).
4. Ren Sh. et al. Faster R-CNN: Towards real-time object detection with region proposal networks // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/1506.01497> (date 19.06.2023).
5. Lin Ts. et al. Focal loss for dense object detection // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/1708.02002> (date 19.06.2023).

UDC 004.92

Liu Y., Xu H., Li Z., Liang Y.

## Pedestrian detection system based on YOLOv3

*Recommended for publication by senior lecturer Mikheev V. S.*

**1. Introduction.** Object detection [1] is an important branch of computer vision, which has been widely used in people's lives, such as monitoring safety, autonomous driving and so on. The task of object detection is to locate instances of certain classes of semantic objects. With the rapid development of deep learning networks citebananas for detection tasks, the performance of object detectors is greatly improved. Pedestrian detection has always been the hot spot and difficult point in the object detection. The problem of pedestrian detection is finding all pedestrians in an image or video frame, including location and size, represented by rectangular boxes, like face detection, which is also a typical object detection problem. Pedestrian detection technology has a strong usage value, it can be combined with pedestrian tracking, pedestrian recognition, and other technologies, and applied to automobile driverless systems, intelligent robots, intelligent video monitoring, human behavior analysis, passenger flow statistics system, intelligent transportation, and other fields. There are many models for object detection, but compared with other models, the YOLO [3] series models can quickly train the model of object detection by using a simple framework, and the YOLO series models can predict based on the information of the whole picture, and the resulting picture features are more universal. In recent years, YOLO series models have also been applied to more fields such as medicine and agriculture, with better results than Faster R-CNN, RetinaNet, etc.

**2. Data.** We trained the model using the Microsoft Common Objects in Context (COCO) dataset. The COCO dataset is used to solve

---

*Liu Yuanhao* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: liu1796@outlook.com, Phone:+8613379000651

*Xu Huaijinhui* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: xuhuaijinhui816@outlook.com, phone: + 8618829454333

*Li Zekun* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: lizekun052@outlook.com, phone: + 8618991754979

*Liang Ying* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: liangying901@outlook.com, phone: + 8615691301691

three problems: object detection, contextual relations between objects, and precise localization of objects in two dimensions. There are 80 categories in the COCO dataset, for example, person, bicycle, car and so on. The COCO dataset has fewer categories, but more image data for each category, which facilitates the category attribution and makes the model more favorable to apply in real-world scenarios. Therefore, we chose the COCO dataset for training. After downloading the COCO dataset, we extracted the data of the person labels for model training.

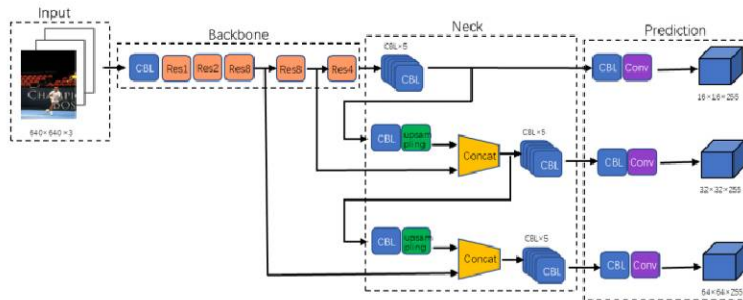
**3. Model.** We trained the data using the more classical YOLOv3 [4] model in the YOLO series. The network used by the YOLOv3 model is an improvement on the previous YOLO series. In contrast to YOLOv1 and YOLOv2, YOLOv3 uses multi-scale features for object detection and uses Logistic instead of SoftMax for object classification. In basic image feature extraction, YOLOv3 uses a network structure called Darknet-53 (including 53 convolutional layers), which draws on the practice of residual networks and sets up quick links between some layers. The figure below shows the network structure of YOLOv3.

The YOLO-V3 loss function consists of three parts:

- (1)  $L_{box}$  – loss due to bounding boxes, i.e. errors in  $x$ ,  $y$ ,  $w$  and  $h$ .
- (2)  $L_{obj}$  – loss due to confidence, caused by object detection.
- (3)  $L_{cls}$  – loss due to categories, caused by class prediction.

In this study, only the person category was used, so  $L_{cls}$  was set to 0. Therefore, the loss function for this experiment is as follows:

$$L = L_{box} + L_{obj}, \quad (1)$$



**Figure 1.** YOLOv3 Network structure

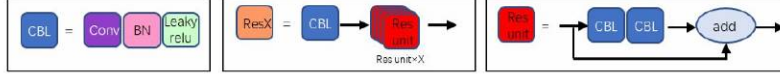


Figure 2. Network module

$$\begin{aligned}
 L_{box} = & -\lambda_{coord} \sum_{i=0}^{S_2} \sum_{j=0}^B I_{ij}^{obj} [\hat{x}_i^j \log(x_i^j) + (1 - \hat{x}_i^j) \log(1 - x_i^j) \\
 & + \hat{y}_i^j \log(y_i^j) + (1 - \hat{y}_i^j) \log(1 - y_i^j)] \\
 & + \lambda_{coord} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{S_2} \sum_{j=0}^B I_{ij}^{obj} [(w_i^j - \hat{w}_i^j)^2 + (h_i^j - \hat{h}_i^j)^2],
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 L_{obj} = & -\lambda_{coord} \sum_{i=0}^{S_2} \sum_{j=0}^B I_{ij}^{obj} [\hat{C}_i^j \log(C_i^j) + (1 - \hat{C}_i^j) \log(1 - C_i^j)] \\
 & + \lambda_{nobj} \sum_{i=0}^{S_2} \sum_{j=0}^B I_{ij}^{nobj} [\hat{C}_i^j \log(C_i^j) + (1 - \hat{C}_i^j) \log(1 - C_i^j)].
 \end{aligned} \tag{3}$$

In the above formula,  $(x_i, y_i)$  represents the center coordinates of the predicted bounding box, and  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  represents the center coordinates of the labeled bounding box.  $I_{ij}^{obj}$  indicates whether the bounding box is responsible for predicting an object.  $\lambda_{coord}$  is a coefficient used to coordinate the contribution of the error function for different-sized bounding boxes, and its value is  $\lambda_{coord} = (2 - \hat{w}_i \times \hat{h}_i)$ . When the bounding box is small, this coefficient is larger, thereby increasing the contribution of small bounding boxes to the loss function. Conversely, when the bounding box is large, this coefficient is smaller, thereby reducing the contribution of large bounding boxes to the loss function.  $(w_i, h_i)$  represents the predicted width and height of the bounding box, and  $(\hat{w}_i, \hat{h}_i)$  represents the labeled width and height of the bounding box.  $C_i$  is the probability score that the predicted box contains an object, and  $\hat{C}_i$  represents the ground truth value.  $I_{ij}^{nobj} = 1 - I_{ij}^{obj}$ .  $\lambda_{nobj}$  is a weight value, which is often set to 0.5.

**4. Model training results.** Average precision (AP), i.e. the one with Intersection over Union (IoU) threshold equal to 0.5, was used to evaluate the performance of instance segmentation for each mask type. The metrics are first calculated for the following precision and recall values at 101 evenly-spaced threshold values between 0 and 1, as in (4)

and (5):

$$P_i = \frac{TP_i}{TP_i + FP_i}, \quad (4)$$

$$R_i = \frac{TP_i}{TP_i + FN_i}, \quad (5)$$

where  $P_i$  and  $R_i$  are the precision and recall values at threshold index  $i$ , respectively, and  $TP_i$ ,  $FP_i$ , and  $FN_i$  are the number of true positives, false positives, and false negatives at threshold index  $i$ , respectively. After these values are calculated, average precision is then calculated as follow:

$$AP = \int_0^1 P_i(R_i) dR \quad (6)$$

And the mean average precision as

$$mAP = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n AP. \quad (7)$$

We used the YOLOv3 model to train the data, and the results are shown in the Table.

**Table.** Test results

Accuracy index	$P_i$	$R_i$	$mAP$
YOLOv3	0.85	0.84	0.855

**5. System implementation process.**The detection of the system adopts YOLOv3 model for research and design. The specific process is as follows:

- (1) Load the YOLOv3 model: Use the `cv2.dnn.readNetFromDarknet` function to load the YOLOv3 model structure and weight.
- (2) Preprocess the input image: zoom the input image to the specified size and normalize the pixel values to the range of  $[0,1]$ .
- (3) Perform object detection: The pre-processed images are fed into the model to obtain the model output. The object detection results for the pedestrian category are extracted from the model output, and for each detected pedestrian, the enclosed frame position and confidence score are recorded.

- (4) Perform non-maximal suppression: use the `cv2.dnn.NMSBoxes` function to perform non-maximal suppression of the object detection results, removing duplicate detection results.
- (5) Draw the detection result: use the `cv2.rectangle` function to draw the detected pedestrian envelope onto the original images.

**6. Some test results.** The examples of the system work are presented in Figures 3–6.



**Figure 3.** The system work example



**Figure 4.** The system work example

**7. Conclusion.** In this paper, we implement a pedestrian detection system based on the YOLOv3 model by using Python language. After testing, the system can more accurately identify the pedestrians in the pictures or videos, and the system has a certain significance in the application of pedestrian tracking. In addition, the system can have practical applications in intelligent driving, intelligent video surveillance, human behavior analysis and other fields.



**Figure 5.** The system work example



**Figure 6.** The system work example

## References

1. Jiao L. et al. A survey of deep learning-based object detection // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/1907.09408> (date 19.06.2023).
2. Mazen F. M. A., Nashat A. A. Ripeness classification of bananas using an artificial neural network // Arabian Journal for Science and Engineering. 2019. V. 44. P. 6901–6910.
3. Redmon J., Farhadi A. YOLO9000: better, faster, stronger // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Honolulu, HI, USA. 2017. P. 6517–6525.
4. Redmon J., Farhadi A. YOLOv3: An incremental improvement // arXiv preprint [Electronic resource]: URL:<https://arxiv.org/abs/1804.02767> (date 19.06.2023).

UDC 519.8

Qiao T., Zhang R., Ma X.

## Study of the optimization problem of grouping batches of square-shaped parts

*Recommended for publication by professor Krylatov A. Yu.*

**1. Introduction.** Smart manufacturing has become the top priority of manufacturing industry nowadays, and its personalization, shortening product and system life cycle, and connected service model have become the focus of enterprises in the transformation of smart manufacturing. The manufacturing of square-shaped products is mainly based on the original sheet, and the plate parts are assembled after processing. Due to the large number of orders, the production mode of “order batching + mass production + order picking” is usually adopted to achieve batch cutting and improve the utilization rate of raw materials by using order batching, and then sorting according to different customer orders after the processing is completed. Optimization of the layout is the rationalization of the square pieces on the sheet to reduce the waste of the sheet.

This problem is a combinatorial optimization type of problem. A reasonable model is created to improve material utilization and reduce costs [1]. The problem is solved and compared using greedy algorithm and forbidden search algorithm with maximum utilization as the optimization objective to solve the problem of cutting plates and order grouping in square part manufacturing.

**2. Problem formulation.** Scheduling optimization problem. A mixed integer programming model is needed to minimize the amount of sheet while meeting the production order requirements and related constraints. 2 constraints are satisfied: the width (or length) of the product items in the same stack should be the same; the final cut generates product items that are complete and not stitched together.

---

*Qiao Tiantian* – graduate student, Yan’an University;  
e-mail: qtt.qiao@outlook.com, phone: +8617809213113

*Zhang Ruizhou* – undergraduate student, Veliky Novgorod State University;  
e-mail: zhangruizhou497@gmail.com, phone: +7(931)8536448

*Ma Xu* – undergraduate student, Yan’an University;  
e-mail: 2205497619@qq.com, phone: +8615091259558



**3. Problem analysis.** The cutting stock problem is the classic NP hard problem [2, 3]. The characteristic is that the size of the sheet is larger than the size of each required square part, and the variety of these square parts can be different. The optimization goal is to make the highest material utilization while satisfying the final processing requirements. Since the parameters of the raw material and the parameters of the demanded square pieces both have length and width requirements, it can be seen as a planar cutting problem. Each sheet of raw material has the same dimensions,  $A$  in length and  $B$  in width, and the length and width of each square piece of the product are known. After observing the crating in several places, it was found that the arrangement order of objects with larger volume or area took precedence without considering other factors.

**4. Model assumptions.**

1. Assume that additional losses in the sheet cutting process are not considered.
2. Assume that the thickness of the sheet and the width of the cut are neglected.
3. Assume that the remaining scrap after cutting the sheet cannot be reused.
4. Assuming the same order delivery date does not make a distinction.

**5. Main symbols description.**

Symbol	Definition	Units
$A$	Length of the original sheet	mm
$B$	Width of the original sheet	mm
$a$	Length of the product	mm
$b$	The width of the product	mm
$m$	Number of pieces arranged by long side	Pcs
$n$	Number of pieces placed by short side	Pcs
$M$	Total number of square pieces to be processed	Pcs
$N$	Number of raw materials required for square parts	Pcs
$P = \{p_1, \dots, p_M\}$	An available collection of square parts to be machined	

## 6. Model building and solving.

**6.1. Model building.** To solve the area utilization problem, we develop a mixed integer linear programming model. Various combinations of length and width are used to make the utilization rate as high as possible in each side direction of the board, which is equivalent to optimizing the combination of length and width on the sides. After the arrangement of the outer layer is completed, the remaining rectangular area inside is discharged, and so on, until the remaining area cannot fit into the board. Set the total number of a batch of square parts to be processed as  $M$ , then the square parts to be processed can be represented by the set  $P = \{p_1, \dots, p_M\}$ , and the number of workpiece processed on each sheet raw material is  $m$ . Once  $p_i$  is processed, it will be the rest of  $p' = P - p_i$  until  $p'$  is 0, and the processing task is completed.

First consider the problem of raw material an edge, when the product  $p_1$  placed horizontally or vertically can make the maximum utilization of the edge, it is possible to determine the placement of an edge first, and then place the next row. Various combinations of length and width are used to make the utilization rate as high as possible in each side direction of the large square. For the first side placement case, we analyze and list the following linear programming equation: If the length and width of product  $p_1$  are  $a_1$  and  $b_1$  respectively, then the area of the product

$$S_1 = a_1 \times b_1.$$

The original sheet has length  $A$  and width  $B$ . Then its area:

$$S = A \times B, \quad (1)$$

$$S \geq \sum S_n, \quad n = 1, \dots, n_m.$$

The number of raw materials required to process this batch of square pieces is  $N$

$$\text{Utilization rate} = \frac{A \times B \times N - \sum S_i}{A \times B \times N} \times 100\%.$$

**6.2. Graphical detection for rectangular pieces.** The initial cutting of the first rectangular piece is based on the idea of the greedy algorithm [4], where one of the top corners of the raw material is selected for cutting according to the Cartesian coordinate system, and the size of the sheet is known to be larger than the size of each desired rectangular

piece. The horizontal and vertical placement of the raw material does not affect the final result, so only the horizontal placement of the sheet is considered. The abstract representation has length  $x$  and width  $y$ .

**6.2.1. Center point.** In Cartesian coordinate system the center point  $(x_c, y_c)$  of a rectangular piece is calculated as

$$x_c = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i, \quad y_c = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i,$$

where  $x_i$  is the horizontal and  $y_i$  is the vertical coordinates of the  $i$ -th vertex of the rectangle.

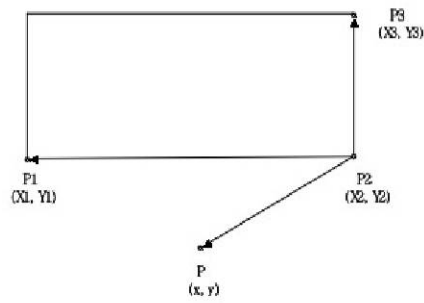
**6.2.2. Overlap detection.** For rectangular pieces it is sufficient to consider only vertices and centroids to detect overlapping. It is made in two independent steps, and if at any of them the overlapping is detected, the proposed position is rejected.

**Step 1:** If all the vertices and center points of the rectangle to be placed are outside of the already placed pieces and vice versa, the position is not rejected. The relationship between the point  $P(x, y)$  and the rectangle with three vertices closest to  $P$  denoted as  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  and  $P_3(x_3, y_3)$  can be judged according to the following relations:

$$\begin{aligned} v_0 &= (x - X_2, y - Y_2), \\ v_1 &= (X_3 - X_2, Y_3 - Y_2), \\ v_2 &= (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2), \\ C &= (\vec{v}_1 \times \vec{v}_0) \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_0). \end{aligned}$$

If  $C > 0$  then the point  $P$  is outside the rectangle (see Fig. 1), if  $C = 0$  then  $P$  is on its edge, if  $C < 0$  then  $P$  is inside the rectangle. Through this criterion, we determine whether the rectangle to be placed and the already placed pieces overlap.

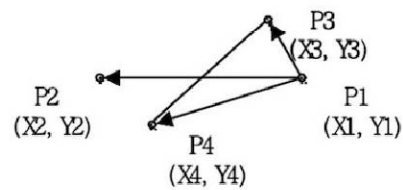
**Step 2:** Check if the rectangle edge to be placed intersects with edges of already placed pieces. When testing, two overlapping edges are not considered to be intersecting, and if an edge has one vertex on another edge they are not considered to be intersecting, but only touching. For example, if the edge  $L_1 = P_1P_2$  intersects the edge  $L_2 = P_3P_4$  (Fig. 2)



**Figure 1.**  $P$  outside the graph, corresponding to  $C > 0$

it can be translated into the following equations:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1), \\
 v_1 &= (X_3 - X_1, Y_3 - Y_1), \\
 v_2 &= (X_4 - X_1, Y_4 - Y_1), \\
 v_3 &= (X_1 - X_3, Y_1 - Y_3), \\
 v_4 &= (X_2 - X_3, Y_2 - Y_3), \\
 v_5 &= (X_4 - X_3, Y_4 - Y_3), \\
 C_1 &= (\vec{v}_0 \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{v}_2), \\
 C_2 &= (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4) \cdot (\vec{v}_3 \times \vec{v}_5).
 \end{aligned}$$



**Figure 2.**  $L_1 = P_1P_2$  and  $L_2 = P_3P_4$  intersection check

Finally, if  $C_1 < 0$  and  $C_2 < 0$ , then the two edges intersect, thus the rectangles can be judged to overlap; otherwise the two lines segments don't intersect. If the vertices and center point of the rectangle to be placed are accepted after Step 1, and all the edges are accepted in Step 2, it means that the graphs do not overlap, i.e. the layout is qualified.

Additionally, lengths and widths of all rectangles to be placed must be less than the length and the width of the full plate.

**6.3. Greedy algorithm for solving the model.** The problem cutting problem is assumed to be a problem of placing rectangular blocks to the plane, at a certain moment, a number of rectangular blocks are placed in the rectangular container according to the placement rules, and according to the no-overlap interval emission matrix, this operation is repeated and the cavity-occupying action is performed by the greedy algorithm [4]. Based on the greedy algorithm idea, that is, when placing rectangular blocks, always occupy a certain corner, and the cavity degree of the action should also be as large as possible, so that the placement can make the rectangular blocks next to each other, reducing the waste of space. From (1) we know that the raw material area of the plate is  $S \text{ mm}^2$ .

Using the area formula, the area utilization of the pallet can be obtained:

$$\text{Total plate utilization} = \frac{\text{Total area of all square pieces}}{\text{Area of plate} \times \text{Number of plates}}.$$

**6.4. Tabu search for model solving.** Tabu search is an artificial intelligence algorithm. From the above experiments we know that the direction and position of cutting square pieces cannot be set blindly, otherwise even after cutting a full plate will make irregular, and many gaps will appear in the middle of the plate. Although the tabu search is slower than the greedy algorithm but the utilization rate of the sheet is greatly improved, and with the increase in the number of iterations and the increase in the size of the problem, the tabu search will play a better advantage.

## 7. Model building and solving.

### 7.1. Advantages.

1. The greedy algorithm is applicable to combinatorial optimization problems, where the current optimal solution can be obtained at each step of the problem.

2. The tabu search used in this paper possesses the ability of global search.
3. The comparison of the two algorithms allows to solve different types of problem sizes.

### **7.2. Disadvantages.**

1. Greedy algorithm can not get the optimal solution from the global perspective
2. The greedy algorithm can only solve the range of feasible solutions that satisfy the constraints.
3. The use of the tabu search method is prone to fall into the case of local optimum.
4. Using the tabu search cutting scheme is easy to fall into the search loop, resulting in long computation time.

## **References**

1. Cheng L., Wu J., Zhang Y. Operational research: models and methods tutorial. Tsinghua University Press. 2000. 283 p. (In Chinese)
2. Xing W., Xie J. Modern computational methods for optimization. Tsinghua University Press. 2005. 244 p. (In Chinese)
3. Chen X., Li X., Yu Sh. Introduction to NP-complete problems // China Science and Technology Information. 2005. No 22. P. 53. (In Chinese)
4. Chen D., Huang W. Greedy algorithm for rectangle-packing problem // Jisuanji Gongcheng/Computer Engineering. 2007. Vol. 33. No 4. P. 160–162. (In Chinese)

UDC 004.62

Ren Y., Yang Z., Zhang T., He Y.

## The quantitative research on big data of stocks based on the BIAS

*Recommended for publication by associate professor Blekanov I. S.*

**1. Introduction.** With the fast pace of our life and the impact of COVID-19 pandemic, human beings are facing with great pressure. Many investors hope that they can earn more money through speculating on the stock market so that the life pressure can be reduced. The quantitative trading [1] aims at replace the peoples subjective judgement with the advanced mathematical model and uses computer technology to select multiple events with “high probability” from huge historical data to develop some strategies. This kind of trading tremendously eliminates the impact of sentimental investors and helps them to get rid of the irrational investment decisions during extreme market frenzy.

Essentially, quantitative investment and traditional qualitative investment are the same thing, they both are inefficient or weak efficient theories based on the market. One of the differences between these two ways is that quantitative investment is “the quantitative application of qualitative thought”, which has more requirement for data [2].

**2. Quantitative trading.** The construction of a quantitative trading platform is a typical item for separation of front-end and back-end. It realizes the presentation of front-end data, data update and selecting stocks using strategic algorithm and other operations. Moreover, it brings convenience for users to operate and helps investors to foresee risks in advance within limits.

There are three modules in a quantitative trading system, the background system including stock recommendation, real-time acquisition of

---

*Ren Yifan* – undergraduate student, Yan’an University;

e-mail: 1357593221@qq.com, phone: +861538944200

*Yang Zechun* – undergraduate student, Yan’an University;

e-mail: 1840007076@qq.com, phone: +861839540795

*Zhang Tong* – undergraduate student, Yan’an University;

e-mail: 3093248809@qq.com, phone: +8618092695422

*He Yuxi* – undergraduate student, Yan’an University;

e-mail: 1447316292@qq.com, phone: +8619929407794

stock data, data analysis and other functions. Front-end and back-end are separated in the following way: back-end develops the basic development based on SpringBoot, MyBatis and other technologies; front-end develops its function based on Vue and operates the big data analysis with Hadoop module.

**3. Design for algorithm.** BIAS is the difference between market indicator or closing price and other Moving Average Price (MAP). Its function mainly aims at calculating the deviation between stock price and Moving Average (MA) in the fluctuation, so that which can measure the probable retracement and bounce caused by the further divergent movement when the stock price was very volatile. As we select different computing cycles, there are many types of BIAS indicators, such as the  $N$  BIAS of days, weeks, months, years and minutes. Especially days BIAS and months BIAS are often used in speculating and judging the stock market. Although they have a lot of differences in calculating and valuing, their basic computing ways are in common.

**Definition 1.** The equation of BIAS is

$$\text{BIAS} = \frac{\text{Closing price of the day} - N \text{ day average price}}{N \text{ day average price}} \times 100\%. \quad (1)$$

There are many ways to adopt the numerical value of  $N$  and the most common ways are the two. One adopts multiples of 5 as its numerical value such as 5 days, 10 days, 30 days and 60 days; the other adopts multiples of 6 as its numerical value such as 6 days, 12 days, 18 days, 24 days and 72 days. Although their numerical values are different, their analyzing ways and speculating functions are the same. In this research, 6 is the adopted value of  $N$  to calculate and measure.

The recommendation of BIAS mainly refers to the three following ways:

**3.1. Considering the value range of BIAS.** We can set a pair of constant values (one is positive, the other is negative) for BIAS indicator as their upper and lower boundary. If the value of BIAS exceeds the set positive value, the selling signal will be given, otherwise, if the value of BIAS is lower than the set negative value, the buying signal will be given. This boundary, however, depends on the three following factors to conform the accurate value: parameter range of selecting BIAS indicator, variety of using band and the period and stage of this band. Universally, the larger the value of  $N$  parameter is, the greater the set boundary span



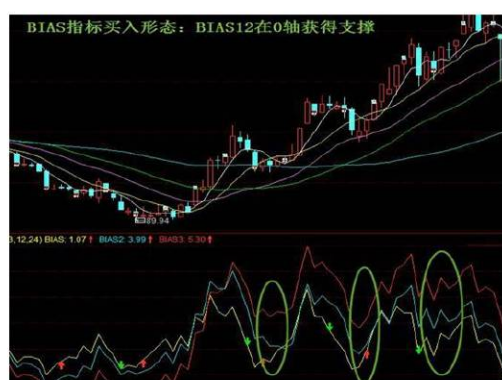
should be; and the more active the variety trading is, then the greater the set boundary span will be too. But what is the reasonable threshold of this boundary, there is not very common judgement in the businesses. So it requires investors take advantage of appropriate test methods to seek this judgement on their own according to their different abilities to tolerant risks or their own experiences.

**3.2. Considering the curve shape of BIAS.** For example, if BIAS indicator has two or more descending peak values from the top to the bottom and the market price is still rising at the same time, then which may be the hint for selling signal. If BIAS indicator, otherwise, has two or more valley values from the bottom to the top and the market price is still falling at the same time, then which may be the hint for buying signal. It is worth noticing that investors should be very careful that there are many operational mistakes will be easy to occur if BIAS reaches the first current peak value or valley value immediately. Besides, the Tangent Theory can be introduced in an appropriate way and combined it with the curve shape of BIAS, then accuracy of analysis and judgement will be improved.

**3.3. Considering the combination of two BIAS lines.** We can use BIAS as the short-term curve and construct BIASMA ( $M$ ) as the long-term curve through the  $M$  moving average method. As BIAS curve gets through BIASMA curve at a low level from the top to the bottom, as well as the golden crossing appears, then the buying signal is given; when BIAS curve gets through BIASMA curve at a high level from the top to the bottom, as well as the dead crossing appears, The selling signal is given. Obviously, the parameter values (values of  $N$  and  $M$ ) of these two curves are appropriate or not, which is extremely crucial for the last analysis and judgement accuracy. Therefore, we will mainly discuss about this topic and try to find out the most appropriate parameter settings, so as to provide some references to investors.

This project starts with processing the data using MapReduce. Separate inaccurate data, leaving only the more accurate data for calculation. Then, the data is processed using the deviation rate algorithm, and finally the data required by the user is obtained for the user to analyze. The results of the analysis of the deviation rate indicator are shown in Figure 1, where the circled part is a buy signal. When the deviation rate changes from negative to positive and the moving average rises, it is recommended to follow up with long. When the deviation from positive to negative value changes and the moving average continues to rise, it

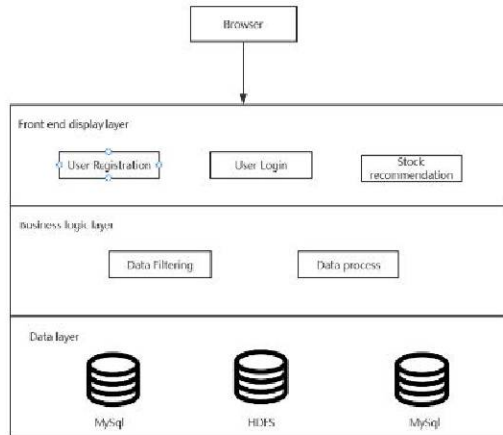
is recommended to hold the coin for sale. When the moving average follows a decline, it is recommended to sell. When the deviation rate is close to the historical extreme, you should reduce your position or buy on the dip. The stock price is too far from the moving average, and the deviation from the up/down will not last long, and the reversal may occur at any time, bringing the stock price back to the moving average.



**Figure 1.** Deviation rate index

**4. Systematic design.** This research aims to storage data from Tushare connector importing to MySQL database and sets different main keys in different charts in order to facilitate the invoking of every chart. We also take advantage of HDFS (Hadoop distributed file system) to save the data in the way of MapReduce, and finally analyze and recommend stocks through algorithm. Systematic structural design show as the Figure 2.

**4.1. Front-end presentation layer.** The main function of front-end presentation layer is as display window of frontpage. The presentation of this system shows as browser, which function is that when users access this system, it can show the stock situation with the users' strategic recommendation for these users based on business logic layer. In the presentation layer, users can access some functions such as new user registration, user's login and inquiring the stock recommendation based on BIAS model. The presentation layer is also the mutual association between users and business logic layer.



**Figure 2.** Systematic structural design

The presentation layer achieves the front-end display with HTML and Echarts, and interacts with business logic layer using JS and Ajax.

**4.2. Business logic layer.** The business logic layer is a module of data acquisition and algorithmic achievement. Back-end researchers collect the stock data including stock basic data and daily line data while using QuantTradeData module. Due to the extremely huge daily line data, researchers put the data into HDFS, as well as reconstruct the daily line data. They take advantage of BIAS to calculate and measure in accordance with the rules, and subsequently, transfer the result into the front end to display it.

The business logic layer mainly uses the data provided by Tushare servicer and MapReduce for Hadoop platform to achieve the algorithm.

**4.3. Data layer.** The main function of data layer is that provides data support for business logic layer. It transfers the collected data to MySQL database and HDFS through data storage and stores users' registered information at the same time. For example, users' accounts and passwords are saved to the database through encryption or can be inquired, and data layer accesses login users to verify and visit through business logic layer. The data layer through the use of Hadoop platform and MySQL database where SQL statements are defined in the MyBatis mapper.

**5. Ultimate impact.** Users can choose to create an account and set their own password, then they can use this account to log in quantitative trading platform and select different modules to operate in the different ways, as well as inquiry the information about stocks. This research totally achieves the following functions, including home page (to show some stock informations), login and registration page (to accomplish the process of creating a user's account), divisor research page, strategy study page (users can log in their own studying strategies and finally select the most appropriate stock recommendation to facilitate their choices), the system can analyse the stock.

## References

1. Dong X., He Y., Lei M. Investment planning model based on quantitative trading strategies // Proc. 3rd Int. Symposium on Frontiers of Economics and Management Science (FEMS 2022) / BCP Business and Management. 2022. Vol. 19. P. 227–235.
2. Archana P. et al. Stock recommendation and trade assistance // Int. J. of Information Technology Project Management (IJITPM). 2022. Vol. 13. No 3. P. 1–17.

UDC 519.6

Wang B., Qiao X., Su R., Zhu M.

## Analysis and identification of unknown glass components based on data mining

*Recommended for publication by professor Krylatov A. Yu.*

**1. Introduction.** Glass is an important physical evidence for early trade exchanges along the Silk Road. Its main chemical composition is  $\text{SiO}_2$ , which also contains oxides. Different oxides lead to different types of glass. Due to the high melting point of pure quartz sand, fluxes should be added to reduce the melting temperature during refining. In ancient times, nitrate, lead ore, plant ash, and natural alkali were commonly used as fluxes, and limestone was used as a stabilizer. Ancient glass is prone to weathering due to the influence of the burial environment, and during the weathering process, environmental factors can cause a large amount of exchange of elements within the glass, resulting in changes in the composition ratio of the glass, which in turn can affect the correct judgment of the glass category.

Based on the chemical composition of cultural relics samples of unknown glass categories in existing data, a model is established to identify the category to which the cultural relics of unknown glass categories belong. In this paper, we first use a decision tree to classify the original data, and then conduct a cross test using  $K$ -means clustering method to analyze the sensitivity of pre-weathering and non-weathering glass, respectively. The results show that the clustering model has a good adaptability to such issues. The title of the document consists of a mandatory type declarations and connection of the stylesheet file.

### 2. Data preprocessing.

**2.1. Eliminate invalid data.** Perform data processing on the original data, and the cumulative sum of the proportions of each component of the valid data should be between 85% and 105%, retain the

---

*Wang Bingyu* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: 2955018228@qq.com, phone: +7(812)428-41-54

*Qiao Xingqi* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: 1914765850@qq.com, phone: +7(812)428-41-54

*Su Ruixin* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: 1342557272@qq.com, phone: +7(812)428-41-54

*Zhu Meng* – undergraduate student, Yan'an University;  
e-mail: 1536581860@qq.com, phone: +7(812)428-41-54

effective data, and the remaining wrong or invalid data are eliminated, to get a new data set.

**2.2. Quantitative processing.** In order to improve the correlation analysis, the original text data were quantified and patterns A, B, C in the original data were quantified as 0, 1, 2; glass high potassium and lead-barium as 0, 1; glass black, blue, green, light blue, light blue, light green, dark blue and dark green as 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 respectively; weathering types of unweathered and weathered were quantified as 0 and 1 respectively.

**2.3. Missing value processing.** There are four missing data items for the “color” feature in the original dataset. Due to the fact that there are many different colors when controlling other features such as surface weathering, type, and decoration, and considering that the 7 feature items in the original data set only represent the color of a certain part, it is not suitable to fill in the data processing gaps. The impact of the missing data can be ignored, which can be expressed as not detecting the component. Therefore, the missing value is processed by adding 0.

At this point, the preprocessing of the dataset has been completed, and then a model can be established to classify and predict the data.

**2.4. Component data.** Component data refers to any non-negative  $N$ -element vector, which satisfies the definite sum constraint and is the basic property of component data. The data of the original data set is the proportion of each chemical component, so it meets the requirements of component data. In order to better analyze the statistical law of data, the valid data were converted in this paper, and the cumulative sum of the chemical composition of the data after conversion was 1.

### 3. Establish a model for component analysis.

**3.1. Establishing a decision tree model.** The decision tree model in the supervised learning method is used to classify the dataset. The original data is divided into weathered point data and non-weathered point data, and then the decision tree classification is performed based on these two types of data.

Decision tree is a prediction model that represents a mapping relationship between object attributes and object values. Each node in the tree represents an object, while each branching path represents a possible attribute value, and each leaf node corresponds to the value of the object represented by the path from the root node to the leaf node. The decision tree classification is performed on the glass type dataset, and

the ratio of the training set to the test set is 7:3. The decision tree shown in Figure 1 is obtained. It can be seen that both types of weathering are classified based on the content of PbO. The difference is that when the PbO content in the glass at the unweathered point is less than or equal to 8.495, it is considered as high potassium glass, otherwise it is lead-barium glasses. When the PbO content of glass with weathering points is less than or equal to 6.155, it is considered as high potassium glass, otherwise it is considered as lead-barium glasses.

From the decision tree results, it can be seen that the decisive factor in determining whether a glass is high potassium glass or lead-barium glasses is the content of PbO. When the content of PbO is low, it is most likely to be high potassium glass, and when the content of PbO is high, it is most likely to be lead-barium glasses. In addition, from the decision tree boundary value, it can be obtained that weathering can have an impact on the identification of glass types, that is, weathering can lead to a decrease in the content of PbO, thereby affecting the decision-making of glass types.

### 3.2. Establishing a clustering model.

**3.2.1. Select appropriate chemical components for subclassing.** We use the clustering analysis ( $K$ -means) algorithm [1] to divide subcategories. The principle is as follows: the Euclidean distance calculation formula between a data object and a cluster center in space is

$$d(x, C_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - C_{ij})^2}, \quad (1)$$

where  $x$  is a data object,  $m$  is its dimension,  $C_i$  is the  $i$ -th clustering center,  $x_j$  and  $C_{ij}$  are  $j$ -th attribute values of  $x$  and  $C_i$  respectively.

The sum of squares of errors (SSE) for the entire dataset is

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i} |d(x, C_i)|^2, \quad (2)$$

where  $k$  is the number of clusters. The value of SSE indicates the quality of the clustering result.

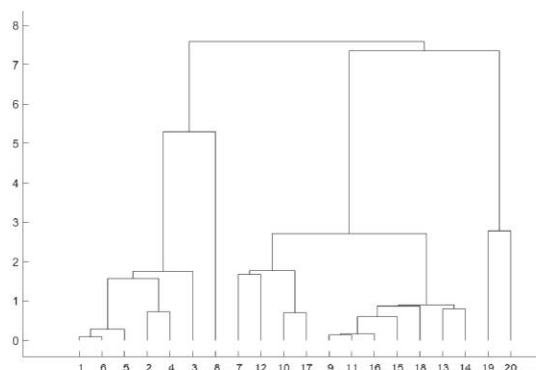
When classifying each category into subcategories, we first need to determine the significant characteristics and corresponding characteristic chemical components of high potassium and lead-barium glasses. Using principal component analysis to analyze the significant element variables,

the corresponding significant feature elements are obtained by relying on the explanatory power of variance. Generally, the higher the explanatory power of variance, the more important the principal component is, and the higher the weight ratio should be.

After classification rules and analysis, it is concluded that for high potassium glass, weathering or not is the basis for classification criteria:

- a. Silicon dioxide rises after weathering, while other elements decrease;
- b. Silicon dioxide has a large content in glass, accounting for the largest proportion in high potassium glass;
- c. Silicon dioxide has a small variance in chemical elements, reflecting a high stability before and after weathering;
- d. In the classification of whether silicon dioxide is weathered or not, the data difference is the largest, with obvious division areas.

Therefore, the content of silicon dioxide is selected as the subclassification standard for high potassium weathered glass and high potassium non-weathered glass.



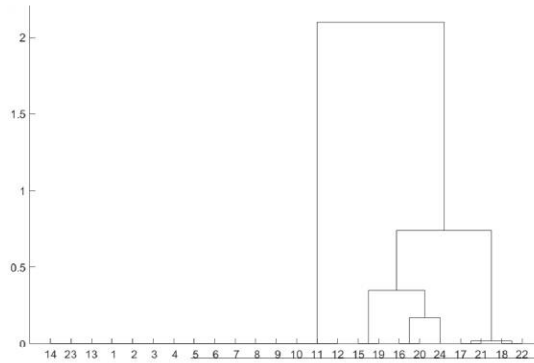
**Figure 1.** Classification results of high potassium glass by weathering or not

For lead-barium glass, the classification criteria are based on weathering:

- a. Lead oxide rises after weathering and has a high content;
- b. Lead oxide can be detected in all glass without dirty data;
- c. The contrast of lead oxide content between before and after weathering is also obvious.



Therefore, the content of lead oxide is selected as the standard for the subclass classification of lead-barium weathered glass and lead-barium non-weathered glass.



**Figure 2.** Classification of lead-barium glass by differentiation

**3.2.2. Model accuracy verification.** Subsequently, set a random initial range and calculate the Euclidean distance between the calculated result and the coordinates of the original cluster center point [2]. Compare the calculated result with the true value, and obtain the accuracy of the model through perturbation errors. The specific results are shown in the following Table.

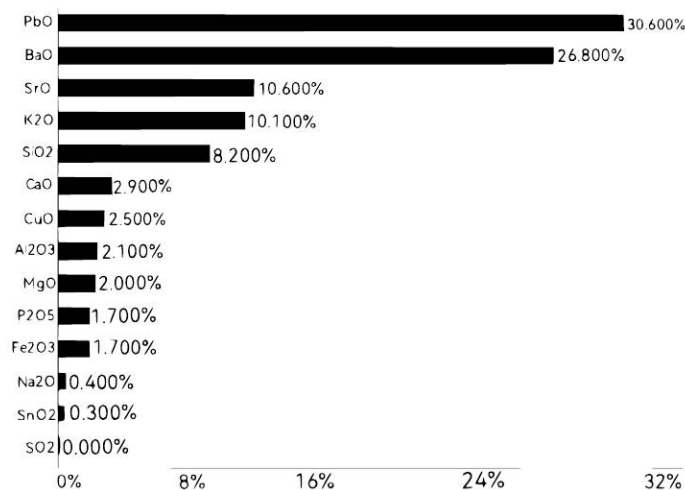
**Table.** Prediction results of the model

Category	Random noise					
	1%	2%	5%	10%	20%	30%
Weathered high potassium glass	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Non-weathered high potassium	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Weathered lead-barium glass	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Non-weathered lead-barium	100%	100%	100%	100%	100%	91%

From Table it can be seen that despite random disturbances added to high potassium glass before and after weathering, the accuracy of the model is still 1, indicating that the clustering effect is good. However, for lead-barium glasses, the accuracy rate decreases when it is not weathered due to increased disturbance before and after weathering, and the clustering effect is relatively lower than that of high potassium glass [3].

**4. Identification results and classification.** Establish a random forest classification model for the preprocessed training set data, as well as the established model, and calculate its feature importance. Apply training and data testing to the model, and then classify and evaluate the resulting model. Random forest is an algorithm that integrates multiple trees using the idea of ensemble learning. Its basic unit is a decision tree, and its essence belongs to a major branch of machine learning – Ensemble Learning method [4]. There are two keywords in the name of a random forest, one is “random”, and the other is “forest”. From an intuitive perspective, each decision tree is a classifier (assuming that it is currently aimed at classification issues), then for an input sample,  $N$  trees will have  $N$  classification results. The random forest integrates all the classified voting results, specifying the category with the most votes as the final output, which is the simplest Bagging idea [5].

First, set the proportion of the random forest algorithm to 0.7, and test the importance of features. The result is shown in Figure 3.



**Figure 3.** Feature importance

The random forest model is tested by the preprocessed valid data, and the prediction and evaluation results of the test data are obtained, and the prediction results of the model are output according to the evaluation results.

## 5. Advantages and disadvantages of the model.

### 5.1. Advantages.

- (1) In this paper, clustering algorithm is used to discuss and model all types of glass, and better sub classification is performed. The model has high accuracy.
- (2) In this paper, the relationship between the components is fully considered, and a decision tree model is used to effectively classify the components. Glass products with different content are successfully divided into two categories.
- (3) In this paper, considering the relationship between variables, a random forest model is used to classify and partition unknown data, taking advantage of the feature that random forests have their own dimensionality reduction, and there is no need to perform dimensionality reduction processing on the original data in the early stage.

### 5.2. Disadvantages.

- (1) The dataset used in this article is a small dataset, and the analysis of the data has limitations. The model used has good results on a small amount of data, but if used in a large dataset, it cannot be guaranteed to have good adaptability and accurately verify the universal applicability of the model.
- (2) This article does not fully consider the relationship between component content and weathering severity, and there may be deeper links and chemical changes among the three.

## References

1. SPSSPRO: Scientific Platform Serving for Statistics Professional 2021, (Version 1.0.11). [Electronic resource]: URL:<https://www.spsspro.com/> (date 19.06.2023).
2. de Ridder D., Tax D. M. J., Lei B., et al. Classification, parameter estimation and state estimation: an engineering approach using MATLAB, 2nd ed. John Wiley and Sons. 2017. 480 p.
3. Kanji G. K. 100 statistical tests, 3rd ed. SAGE Publications Ltd. 2006. 256 p.
4. Li X. Using “random forest” for classification and regression // Chinese Journal of Applied Entomology. 2013. No 4. P. 1190–1197. (In Chinese)
5. Mao Sh., Wang J., Pu X. Advanced mathematical statistics, 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006. 413 p.

UDC 004.8, 004.93

Zhang Y., Li Y., Li Y., Guo Z., Zhang D.

## A review of adversarial attacks in computer vision

**1. Introduction.** Deep neural networks (DNN) have been widely used in various downstream tasks, especially those safety-critical scenario such as autonomous driving, but deep networks are often threatened by adversarial samples [1]. Such adversarial attacks can be invisible to human eyes, but can lead to DNN misclassification, and often exhibits transferability between deep learning and machine learning models [2] and real-world achievability [3].

Adversarial attacks can be divided into **white-box attacks** (Section 2.1), for which the attacker knows the parameters and gradient of the model, and **black-box attacks** (Section 2.2), for the latter, the attacker can only obtain the input and output of the model. In terms of the attacker's purpose, it can be divided into targeted attacks and non-targeted attacks, which means that the attacker wants the model to misclassify the original sample into the specified class, which is more practical, while the non-targeted attack just needs to make the model misclassify the sample. The black box setting is a scenario we will encounter in practice.

Black-box attacks can also be divided into **query-based attacks**, which require a lot of repeated query model output to adjust perturbations, while **transfer-based** attacks do not, which makes the latter easier to do because too many queries are not allowed in practice. Transfer-based attacks often require the use of a white-box surrogate model to create adversarial perturbations, which are mostly developed from existing white-box attacks.

---

*Zhang Yutong* – graduate student, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: 22s112078@stu.hit.edu.cn, phone: +8645186412114

*Li Yao* – associate professor, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: yaoli0508@hit.edu.cn, phone: +8645186412114

*Li Yin* – associate professor, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: dr.liyin@hit.edu.cn, phone: +8645186412114

*Guo Zhichang* – professor, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: mathgzc@hit.edu.cn, phone: +8645186412114

*Zhang Dazhi* – professor, Harbin Institute of Technology;  
e-mail: zhangdazhi@hit.edu.cn, phone: +8645186412114

In terms of the way adversarial perturbations are generated, there are **optimization-based methods** (Sections 2.3.1–2.3.3) and **generative methods** (Section 2.3.4). Optimization-based methods uses model gradients to iteratively change the specified sample to obtain perturbation, which is the most common way. In order to improve the transferability of adversarial samples, subsequent work combined optimization-based adversarial attacks with various means, such as adding momentum during iteration, performing input transformations, replacing losses, or building auxiliary classifiers. Compared to generative methods, they are still slightly inferior in target attack scenarios, and they need to iteratively create perturbations for each specified sample, while generative methods can be generalized on more samples, which could help to produce **universal adversarial perturbations** (UAPs) (Section 2.3.5). UAP aims to solve the problem that traditional optimized adversarial attacks are Instance-dependent, and it is hoped that the generated adversarial perturbation is effective for as many samples as possible.

For different tasks, adversarial attacks on traditional image classification tasks, adversarial attacks in **object detection**, including images and videos, (Section 3.1) and adversarial attacks in **semantic segmentation** (Section 3.2) have all been studied. Object detection models tend to be more vulnerable because they need to predict the class and location, which is equivalent to both classification and regression tasks, while image classification models only need to predict classes. Semantic segmentation is a regression problem, which also makes it more vulnerable to adversarial attacks. Because regression problems are not like classification problems, the prediction result of classification problems does not change continuously with the change of input, but has a threshold, but in regression problems, the prediction result will change continuously as the input changes, which makes the model in the regression problem less robust and less resistant to adversarial attacks.

## 2. Adversarial attack methods.

**2.1. White-box attacks.** White-box attack is the most common way to generate adversarial samples, which requires full access to the target model under attack, that is, knowing the structure of the model and the specific parameters of each layer. The attacker modifies the input data at the bit level according to the structure and parameters of the target model so that the data is misjudged by the target model. Mostly, white-box attacks generate adversarial perturbations for each

single input image, but there are also general adversarial perturbations for target models and entire datasets. The success rate of white-box attacks can be very high since all the details of the target model is known. Once an adversarial perturbation is found, a better attack can be obtained by continuously reducing the disturbance.

There are two main mainstream white-box adversarial attack algorithms: **optimization-based attack algorithms** and **gradient-based attack algorithms**.

### 2.1.1. Optimization-based white-box attacks.

(1) **Box-constrained L-BFGS**. In 2013 Szegedy et al. [1] showed for the first time that a neural network can be misled to make a misclassification by adding a small amount of perturbation to an image that is not perceptible to humans. They first tried to solve the equation for the minimum perturbation that would allow the neural network to make a misclassification. Because the complexity of the problem was too high, they turned it to a simplified convex version, i.e. finding the minimum loss function additive term that allows the neural network to make a misclassification:

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_r \quad c\|r\|_\infty + \text{loss}_f(x + r, y^t) \\ & \text{s.t.} \quad x + r \in [0, 1]^m. \end{aligned} \tag{1}$$

In the above function,  $\text{loss}_f(x + r, y^t)$  is the cross-entropy loss that misled the model classifying adversarial sample to the target class  $y^t$ . The adversarial sample is constrained at  $[0, 1]$  to stay in the intensity range of images. The optimization problem is solved by first fixing the hyperparameter  $c$  to find the optimal solution for the current  $c$ , and then finding the optimal adversarial perturbation  $r$  that satisfies the condition by performing a linear search on  $c$  to obtain the final adversarial sample  $x + r$ .

(2) **C&W**. Carlini and Wagner [4] propose the C&W attack algorithm, which uses  $L_0$ ,  $L_2$ ,  $L_\infty$  norms to generate adversarial samples with restrictions on perturbations respectively. It is one of the most powerful target attack algorithms available, based on an improved version of the Box-constrained L-BFGS algorithm. It considers the optimization problem to find an adversarial sample for a image  $x$  as

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_\delta \quad D(x, x + \delta) \\ & \text{s.t.} \quad C(x + \delta) = t, \\ & \quad \quad x + \delta \in [0, 1]^n, \end{aligned} \tag{2}$$

where the objective is to find a  $\delta$  such that  $D(x, x + \delta)$  is minimal and  $D$  is some distance indicator that can be  $L_0, L_2, L_\infty$  norm. The above objective function is difficult to optimize because the restrictions are highly non-linear. Thus, the first constraint is expressed in a different form as an objective function  $f$  such that when  $C(x + \delta) = t$  is satisfied,  $f(x + \delta) \leq 0$  is also satisfied, where  $f$  has a wide range of choices. In the original paper, the empirical best  $f$  is given by

$$f(x^A) = \max(\max\{Z(x^A)_i : i \neq t\} - Z(x^A)_t, -k) \quad (3)$$

where  $Z(x^A) = \text{Logits}(x^A)$  denotes the output of the previous layer of Softmax,  $i$  denotes the label category, and  $k$  denotes the attack success rate of the adversarial sample, with larger generated adversarial perturbation having a higher attack success rate.

### 2.1.2. Gradient-based white-box attacks.

(1) **FGSM**. Goodfellow et al. [2] developed a method that efficiently computes the adversarial perturbation and referred as **fast gradient signed method** (FGSM). In FGSM the amount of change in the adversarial perturbation is aligned with the direction of change in the gradient of the model loss. In an un-targeted attack, the gradient of the model loss function about the input  $x$  is made to vary in the upward direction of the perturbation to achieve the effect of allowing the model to misclassify. The perturbations generated are adversarial perturbations subject to the  $L_\infty$  norm constraint

$$x^A = x + \alpha \text{sign}(\nabla_x J(\theta; x, y)), \quad (4)$$

where  $\text{sign}(\cdot)$  is the sign function and  $\alpha$  is the hyperparameter, denoted as the step size of the one-step gradient.

FGSM generates adversarial samples with good migration attack capabilities, and its work has far-reaching influence. Most of the attack algorithms based on gradient optimization that have appeared since then are variants of the FGSM algorithm. However, since the gradient is calculated only once, its attack capability is limited. The premise of the successful application of this method is that the gradient direction of the loss function is linear in the local interval. In the nonlinear optimization interval, the adversarial examples generated by large stepwise optimization along the direction of gradient change cannot guarantee the success of the attack.

(2) **I-FGSM**. Iterative-FGSM algorithm makes the linearity assumption hold approximately by making the optimization interval

smaller. The objective-free attack of the I-FGSM algorithm is described as

$$\begin{aligned} x_0^A &= x, \\ x_{N+1}^A &= \text{clip}_{x,\varepsilon} \{x_N^A + \alpha \text{sign}(\nabla_x J(\theta; x_N^A, y_{true}))\}, \end{aligned} \quad (5)$$

where the step size is denoted by  $\alpha$  and the number of iterations is denoted by  $N$ . As the perturbation amplitude can be assigned to each iteration, the step size  $\alpha$  and  $N$  can be set with  $\alpha = e_N$  given  $e$ . The  $\text{clip}(\cdot)$  function replaces the perturbation which larger than  $\varepsilon$  with  $\varepsilon$ , because as the number of iterations increases, some of the pixel values may overflow.

Kurakin et al. [3] build on the I-FGSM algorithm by targeting the lowest confidence category. The target category  $y$  of the attack was specified as the category label  $y_{LL}$  that the original sample outputs with the lowest confidence on the model. This targeting approach generates adversarial samples that misclassify the model to classes that are significantly different from the correct class, and the effect of the attack is more destructive. During the target attack, the direction of change of the perturbation is aligned with the direction of gradient descent of the model loss function with respect to the input, and the objective of its optimisation takes this form:

$$\begin{aligned} x_0^A &= x, \\ x_{N+1}^A &= \text{clip}_{x,\varepsilon} \{x_N^A - \alpha \text{sign}(\nabla_x J(\theta; x_N^A, y_{LL}))\}. \end{aligned} \quad (6)$$

The above method is a prototype of the targeted attack. Many of the current gradient-based targeted attack algorithms basically generate the attack image by replacing the real label with the target label and calculating the gradient.

**(3) PGD Projected gradient descent (PGD)** [5] is an iterative attack that usually works better than FGSM and is one of the benchmark testing algorithms for assessing the robustness of a model. The PGD algorithm avoids encountering saddle points by doing multiple iterations, taking one small step at a time and randomly initializing the noise on the  $x^A$  obtained in the previous iteration at each iteration. The perturbation is clipped to a prescribed range. Because the derivative of loss with respect to the input is fixed if the target model is linear, the direction of decline in loss is clear and the direction of perturbation does not change with the iterations, whereas for a non-linear model, the direction may not be exactly correct by doing just one iteration.



### 2.1.3. Other white-box attack methods.

(1) **DeepFool.** Moosavi-Dezfooli et al. [6] generate minimum normative adversarial perturbations by an iterative computational method that gradually pushes images that lie within the classification boundary outside the boundary until a misclassification occurs. The authors show that the perturbations generated by DeepFool are smaller than FGSM, while having similar deception rates. For example, given a classifier  $\hat{k}(x) = \text{sign}(f(x))$  in a binary classification problem  $f(x) = \omega x + b$ , the decision boundary of the classifier is the separating affine hyperplane  $F = \{x : f(x) = 0\}$ . The minimum perturbation to change the classification of  $x$  is to move  $x$  onto the decision boundary, i.e. the minimum cost is the orthogonal projection  $r_*(x_0)$  on  $F$  for  $x_0$ :

$$\begin{aligned} r_*(x_0) &\equiv \arg \min_r \|r\|_2, \\ \text{s.t. } &\text{sign}(f(x_0 + r)) \neq \text{sign}(f(x_0)). \end{aligned} \tag{7}$$

When solving a binary classification problem with non-linear decision boundaries, the minimum perturbation  $r_*(x_0)$  of  $x_0$  is approximated by the iterative process. The model is considered approximately linear during each iteration. The minimum distance of the data point  $x_0$  corresponding to this iteration after the perturbation at this point is:

$$\begin{aligned} r_i(x_i) &= \arg \min_r \|r_i\|_2, \\ \text{s.t. } &f(x_i) + \nabla f(x_i)^T r_i = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

The resulting closed-form solution yields the minimum perturbation in the set  $r_i(x_i) = -\frac{f(x_i)}{\|\nabla f(x_i)\|_2^2} \nabla f(x_i)$  for the nonlinear decision boundary, and the perturbation  $r_i$  obtained at each iteration is accumulated to obtain the minimum perturbation for the current point  $x_0$ .

(2) **UAPs.** Moosavi-Dezfooli et al. [7] found the existence of generic adversarial perturbations in deep learning models that are independent of the input samples, which are related to the target model structure and dataset features. Perturbations that enable attacks on any image can be generated that are also virtually invisible to humans. The approach used is similar to DeepFool in that it uses adversarial perturbations to push images out of classification boundaries, although the UAPs algorithm generates generic adversarial perturbations by iteratively computing over a small number of sampled data points, with the same perturbation

targeting all images, and this perturbation approach has been shown to generalise to other networks.

**(3) ATNs.** Baluja and Fischer train multiple forward neural networks to generate adversarial samples that can be used to attack one or more networks [8]. The **adversarial transformation networks** algorithm (ATNs) generates adversarial samples by minimizing a joint loss function that has two components, the first of which keeps the adversarial samples similar to the original image, and the second of which causes the adversarial samples to be misclassified. ATNs can be targeted or untargeted and also trained in either a white-box or black-box manner.

**(4) JSMA.** A common approach used in the adversarial attack literature is to restrict the value of the  $L_\infty$  or  $L_2$  norm of the perturbation so that the perturbation in the adversarial sample is not perceptible. However, **Jacobian-based saliency map attack** (JSMA) [9] proposes a method that restricts the  $L_0$  norm by changing the value of only a few pixels, rather than perturbing the whole image.

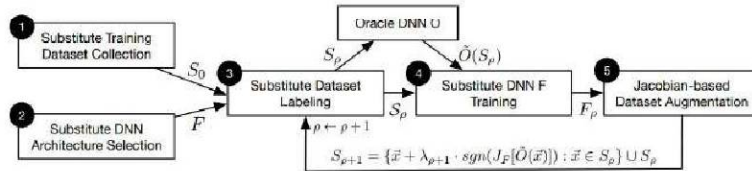
This is effectively a greedy algorithm that uses a saliency map to represent the degree of influence of the input features on the predicted outcome, modifying one pixel of a clean image at a time, and then calculating the bias derivative of the output of the final layer of the model for each feature of the input. With the resulting forward derivatives, the significance map is calculated. Finally, the significant graph is used to find the input features that have the greatest influence on the model's output, and by modifying these features that have a greater influence on the output, a valid counter sample is obtained.

**2.2. Black-box attacks.** Before the advent of black-box attacks, the generation of adversarial samples was based on a white-box approach, i.e. the attacker was fully aware of the structure of the model and the parameters such as the weights. In practice, however, this ideal condition is almost non-existent and it is almost impossible for the attacker to obtain detailed information about the model.

**2.2.1. Nicolas Papernot's attack.** Papernot et al. [10] propose a black-box attack based on training an alternative model that performs the same task as the target model that one wants to attack, generating adversarial samples based on the current model, which are eventually used to attack the original target model. However, training an alternative model  $F$  to approximate the original model oracle  $O$  is challenging because

- (a) the structure needs to be chosen for the alternative model without knowing the structural information of the original model, and
- (b) the number of queries (inputs and outputs) to the original model needs to be limited in order to ensure that this approach is feasible and easy to handle.

They overcome these challenges primarily by introducing a synthetic data generation technique, known as Jacobian-based dataset augmentation. This technique is not designed to maximize the accuracy of the alternative model, but to allow the alternative model to approximate the decision boundaries of the original model. The main training process is shown in Figure 1.



**Figure 1.** Training of the substitute DNN  $F$

**Initial Collection:** The attacker collects a very small set  $S_0$  representing the input domain. For example, if the original model is used to classify handwritten numbers, the attacker collects 10 images for each number from 0–9 and the distribution of this set does not have to match the distribution of the target model’s training set.

**Architecture Selection:** Selects an architecture for the alternative model  $F$ . It should be noted that the type, number of layers and size of the model have little influence on the success of the attack.

**Substitute Training:** Iteratively train the substitution model  $F_\rho$  to improve its accuracy.  $\rho$  is the number of iterations.

**Labeling:** The initial set of alternative inputs  $S_\rho$  is fed into the model  $O$  and the output is used as a label for the sample.

**Training:** Training the model  $F_\rho$  with the labeled alternative training set.

**Augmentation:** The current dataset  $S_\rho$  is expanded using the dataset expansion technique mentioned previously to obtain  $S_{\rho+1}$ , a new set that

better represents the decision boundary of the model. Repeat the above Labeling and Training process with the set  $S_{\rho+1}$ .

The above process was repeated several times to improve the accuracy of  $F$  and to make its decision boundary more similar to model  $O$ .

Papernot et al. use the trained alternative model  $F$  to generate adversarial samples and compare two generation strategies.

The algorithm of Goodfellow et al.:

$$\delta_{\vec{x}} = \varepsilon \text{sign}(\nabla_{\vec{x}} c(F, \vec{x}, y)). \quad (9)$$

The algorithm of Papernot et al.:

$$S(\vec{x}, t)[i] = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{\partial F_t}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}) < 0 \text{ or } \sum_{j \neq t} \frac{\partial F_j}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}) > 0, \\ \frac{\partial F_t}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}) \left| \sum_{j \neq t} \frac{\partial F_j}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}) \right|, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

Each algorithm has its advantages and disadvantages. Goodfellow algorithm is well suited to quickly producing many adversarial samples with relatively large perturbations and is therefore potentially easier to detect. Papernot algorithm reduces perturbations at the expense of greater computational cost.

They validated the attack design by targeting a remote DNN provided by MetaMind, forcing it to misclassify 84.24% of the adversarial samples. They also extensively calibrated our algorithm and generalised it to other ML models by instantiating it against Amazon and Google-hosted classifiers with success rates of 96.19% and 88.94%.

**2.2.2. NES.** Threat models for real-world systems are usually more restrictive than typical black-box models, such as limiting the number of queries, and when accessing a model excessively frequently, the model may self-lock to disallow access. Ilyas et al. [11] propose three realistic threat models:

Query-limited setting: The attacker has a limited number of query results for the classifier. The limitation on the number of queries may be the result of restrictions on other resources, e.g., time limits and money limits.

Partial-information setting: local models may output probabilities for all categories, but for APIs may output only the top  $k$  categories, i.e. a score that does not sum to 1 in the output category, to indicate relative confidence in the prediction;

Label-only setting: In a label-only setting, an attacker cannot access category probabilities or scores. Instead, only a list of  $k$  inferred labels ordered by their predicted probabilities can be accessed.

In response to these three problems, the authors develop new attacks that fool the classifier under these more restrictive threat models, suggesting that previous approaches are impractical or ineffective.

In the query restriction setting, the attacker has a query budget  $L$  that aims to cause targeted misclassification in  $L$  or fewer queries. To attack this setting, in [11] they use “standard” first-order techniques to generate adversarial samples, replacing the gradient of the loss function with a gradient estimate, which is approximated by the query classifier rather than computed by automatic differentiation. The authors give in details an algorithm for efficiently estimating gradients from queries based on the **natural evolutionary strategies** (NES) approach of Wierstra et al. [12] and then show how the estimated gradients can be used to generate adversarial samples.

**(1) Query-limited setting.** To estimate the gradient, in [11] they use NES, a derivative-free optimization method based on the idea of a search distribution  $\pi(\theta|x)$ . Instead of maximizing the objective function  $F(x)$  directly, NES maximizes the expected value of the loss function under the search distribution. This allows for gradient estimation in much fewer queries than typical finite-difference methods.

A search distribution of random Gaussian noise around the current image  $x$  is chosen; that is, one has  $\theta = x + \sigma\delta$ , where  $\delta \sim N(0, I)$ . One employs antithetic sampling to generate a population of  $\delta_i$  values: instead of generating  $n$  values  $\delta_i \in N(0, I)$ , Gaussian noise for  $i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$  is sampled and  $\delta_j = -\delta_{n-j-i}$  for  $j \in \{(\frac{n}{2} + 1), \dots, n\}$  is set. The following variance reduced gradient estimate:

$$\nabla \mathbb{E}[F(\theta)] \approx \frac{1}{\sigma n} \sum_{i=1}^n \delta_i F(\theta + \sigma \delta_i). \quad (11)$$

Once the gradient has been estimated, the PGD can be applied directly to the attack:

$$x^{(t)} = \prod_{[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} (x^{(t-1)} - \eta \text{sign}(g_t)). \quad (12)$$

**(2) Partial-information setting.** In this setup, the attack does not start with image  $x$ , but with an instance  $x_0$  of the target class  $y_{adv}$ ,

so that  $y_{adv}$  will initially appear in the first  $k$  classes. In each step  $t$  of the update, there are 2 different steps. Ensure that the target category remains in the former top- $k$ :

$$\epsilon_t = \min \epsilon' \text{ s.t. } \text{rank} \left( y_{adv} | \prod_{\epsilon'} (x^{(t-1)}) \right) < k. \quad (13)$$

Maximize the probability value of the target class:

$$x^{(t)} = \arg \max_{x'} P \left( y_{adv} | \prod \epsilon_{t-1}(x') \right). \quad (14)$$

**(3) Label-only setting.** Consider a setting that assumes access to only the first  $k$  sorted labels. As mentioned earlier, this case explicitly includes the setting  $k = 1$ , but aims to design an algorithm that can include additional information when  $k > 1$ .

The key idea behind the attack is that in the absence of an output score, an alternative way to characterise the success of the adversarial sample needs to be found. First, the authors define a discretized score  $R(x(t))$  of the adversarial sample to quantify the degree of adversariality of the image at each step  $t$  simply based on the ranking of the adversarial label  $y_{adv}$ :

$$R(x^{(t)}) = k - \text{rank} \left( y_{adv} | x^{(t)} \right). \quad (15)$$

As a proxy for the softmax probability, the robustness of the adversarial image to random perturbations is considered, using a discretization score to quantify the adversarial nature:

$$S(x^{(t)}) = E_{\delta \sim u[-\mu, \mu]} [R(x^{(t)} + \delta)]. \quad (16)$$

A final Monte Carlo approximation was used to estimate this proxy score:

$$\hat{S}(x^{(t)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(x^{(t)} + \mu \delta_i). \quad (17)$$

In [11] the effectiveness of these algorithms by attacking an ImageNet classifier is shown and targeted adversarial examples for the Google Cloud Vision API are demonstrated, showing that the methods enable black-box attacks on real-world systems in challenging settings. The results suggest that machine learning systems remain vulnerable even with limited queries and information.

**2.2.3. One pixel attack.** DNN-based methods surpass traditional image processing techniques, but recent research has found that adversarial images can allow classifiers to misclassify, by adding some perturbation to the image that is not recognizable to the human eye. Mainstream work adds perturbations that are full-image and easily recognized by the human eye, so Su et al. [13] focus on proposing a single-pixel black-box attack method using differential evolution, where the only information available is the probabilistic label. The main advantages of this work compared to previous work are:

**Effectiveness:** On the Kaggle CIFAR-10 dataset, non-targeted attacks could be launched by modifying just one pixel on three common deep neural network structures, with success rates of 68.71%, 71.66% and 63.53%. We also found that each natural image could be scrambled to the other categories of 1.8, 2.1 and 1.5. On the original CIFAR-10 dataset, where the attack scenarios are more limited, we show success rates of 22.60%, 35.20% and 31.40%. On the ImageNet dataset, non-targeted attacks on the BVLC AlexNet model were also possible by changing a single pixel, showing that 16.04% of the test images could be attacked.

**Semi-black box attack:** Only black-box feedback is required, without internal information about the target DNN, such as gradients and network structure. Our approach is also simpler than existing methods because it does not abstract the problem of searching for perturbations into any explicit objective function, but focuses directly on increasing the probabilistic label values of the target class.

**Flexibility:** Enables attacks on networks where gradients are difficult to calculate and not microscopic.

Generating an adversarial image can be formulated as an optimization problem with constraints. Assume that the input image can be represented by a vector, where each scalar element represents a pixel. Let  $f$  be a target image classifier receiving an  $n$ -dimensional input and  $x = (x_1, \dots, x_n)$  be the original natural image correctly classified into class  $t$ . Thus, the probability that  $x$  belongs to class  $t$  is  $f_t(x)$ . The vector  $e(x) = (e_1, \dots, e_n)$  is an additional added adversarial perturbation with a target class  $adv$  and a maximum alteration range  $L$ . Note that  $L$  is generally measured by its length. So the objective of the target

adversarial attack is to find an optimised solution  $e(x)^*$ :

$$\begin{aligned} & \text{maximize}_{e(x)^*} f_{adv}(x + e(x)) \\ & \text{s.t. } \|e(x)\| \leq L. \end{aligned} \quad (18)$$

The problem involves finding two values: (a) which dimensions need to be perturbed and (b) the range of modifications for each dimension. Therefore, the above equation has some modifications:

$$\begin{aligned} & \text{maximize}_{e(x)^*} f_{adv}(x + e(x)) \\ & \text{s.t. } \|e(x)\|_0 \leq d. \end{aligned} \quad (19)$$

Whereas the usual adversarial image is constructed by perturbing all pixels while imposing an overall constraint on the cumulative modification intensity, the minority pixel attack considered by Jiawei Su is the opposite, focusing on only a few pixels but not limiting the modification intensity.

They encode the perturbations into a tuple (candidate solution) which is optimised (evolved) by means of a difference operation. A candidate solution contains a fixed number of perturbations and each perturbation is a tuple that contains five elements: the  $x - y$  coordinates and the RGB value of that perturbation. A perturbation modifies one pixel. The initial number of candidate solutions (children) is 400 and in each iteration another 400 candidate solutions (children) will be generated using the conventional DE formula:

$$x_i(g + 1) = x_{r_1}(g) + F(x_{r_2}(g) - x_{r_3}(g)), \quad r_1 \neq r_2 \neq r_3, \quad (20)$$

where  $x_1$  is an element of the candidate solution,  $r_1, r_2, r_3$  are random numbers,  $F$  is a scale parameter set to 0.5 and  $g$  is the index of the current generation. Once generated, each candidate solution will compete with its corresponding parent based on the overall index, with the winner surviving to the next iteration.

### 2.3. Transfer-based attack.

**2.3.1. Momentum is added to the iterative process.** In order to increase the migration ability of adversarial samples, domestic and foreign scholars have proposed a variety of methods that combine optimization-based adversarial attacks with various means.

The first approach is to add momentum to the iteration. Dong et al. [14] proposed the use of gradient momentum to enhance the iterative



attack of FGSM, namely MI-FGSM. Similar to the effect of gradient descent, momentum can further improve the success rate of black box attacks by accumulating velocity vectors in the gradient direction of the loss function, thereby stabilizing the direction of renewal of the perturbation and helping to get rid of poor local extreme values to produce more examples of transferable confrontation. This momentum method leads to faster convergence and less oscillation.

MI-FGSM can be written as:

$$\begin{aligned} g_{i+1} &= \mu g_i + \frac{\nabla_x J(x_i^A, y)}{\|\nabla_x J(x_i^A, y)\|_1}, \\ x_{i+1}^A &= x_i^A + \alpha \text{sign}(g_{i+1}), \end{aligned} \quad (21)$$

where  $g_{i+1}$  represents the accumulated gradient momentum after the  $i$ -th iteration,  $\mu$  is the attenuation factor of the momentum term. Since the gradient obtained in multiple iterations is not of the same magnitude, the current gradient  $\nabla_x J(x_i^A, y)$  obtained in each iteration is normalized [14].

In the black box model, most existing attacks can't generate strong adversarial samples to against the defense model. Lin et al. [15] proposed a new idea. They regarded the generation process of adversarial samples as an optimization process, and proposed a new method to improve the mobility of adversarial samples – **Nesterov iterative fast gradient signed method** (NI-FGSM).

NI-FGSM is a fusion of **Nesterov accelerated gradient** (NAG) and I-FGSM. NAG, a variation of the common gradient descent method, can accelerate the training process and significantly improve the convergence.

NAG can be written as:

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \mu v_t + \nabla_{\theta_t} J(\theta_t - \alpha \mu v_t), \\ \theta_{t+1} &= \theta_t - \alpha v_{t+1}, \end{aligned} \quad (22)$$

where  $v_{t+1}$  and  $v_t$  are the update directions of this time and last time respectively.  $\nabla_{\theta_t} J(\theta_t - \alpha \mu v_t)$  represents the gradient of the objective function at  $(\theta_t - \alpha \mu v_t)$ . The hyperparameter  $\mu$  is the attenuation weight of the last update direction, so it is generally between 0 and 1, and  $\alpha$  is the learning rate. This formula indicates that the direction of each parameter update not only depends on the gradient of the current position, but also is affected by the direction of the last parameter update.

Compared with MI-FGSM, in addition to stabilizing the updating direction, NAG makes use of the second derivative information of the target function, which helps the attack to effectively look ahead. This property helps us to escape from poor local optimal solutions more easily and quickly, thus improving transferability.

NI-FGSM can be written as:

$$\begin{aligned}
 x_t^{nes} &= x_t^{adv} + \alpha \mu g_t, \\
 g_{t+1} &= \mu g_t + \frac{\nabla_x J(x_t^{nes}, y^{true})}{\|\nabla_x J(x_t^{nes}, y^{true})\|_1}, \\
 x_{t+1}^{adv} &= \text{clip}_X^\epsilon \{x_t^{adv} + \alpha \text{sign}(g_{t+1})\},
 \end{aligned} \tag{23}$$

where  $g_t$  denotes the accumulated gradients at the iteration  $t$ , and  $\mu$  denotes the decay factor of  $g_t$ .

It should be noted that before each iteration, NI-FGSM accumulates the gradient in the previous direction and then updates it.

**2.3.2. The input transformation is considered in the iterative process.** The second method is to input the transformation during the iteration. Spatial transformation includes rotation, enlargement and reduction, which is a kind of data expansion method. The purpose is to enrich the representation of similar data by using spatial transformation of input images. This can not only prevent the adversarial examples from overfitting the model, but also improve the portability of the adversarial examples.

The study shows that the defense model’s resistance to transferable adversarial examples is mainly due to the fact that the defense model has different identification areas to predict compared with the normal training model. While normal models have similar attention maps, defense models produce different attention maps (defense models are either trained under different data distributions or transform inputs before classification). When FGSM, BIM or other models are used to generate adversarial samples, only a single sample is optimized, so it will be highly correlated with the gradient of the identification area or the white box model at the attack point of the input data. For another black box model with different identification areas, the adversarial sample is difficult to maintain adversarial.

In order to reduce the impact of different recognition regions among models, Dong et al. [16] proposed a **transition invariant attack method** (TIM). In this paper, a collection of images and their translated

images are generated adversarial sample. It is hoped that the adversarial sample are insensitive to the recognition area of the attacked white box model and have a higher probability of deceiving another black box model with a defense mechanism. However, to generate such a sample, the gradient of all images in the set needs to be calculated, which is a large amount of computation. In order to improve efficiency, it is proposed in the literature that, under certain assumptions, the convolution gradient method is made for untransferred images, in which the convolution kernel is predetermined. This method can be combined with any gradient-based attack method (such as FGSM, etc.) to generate more transferable and adversarial samples.

TIM can be written as

$$\begin{aligned} \text{TI-FGSM: } x^{adv} &= x^{real} + \epsilon \text{sign}(W * \nabla_x J(x^{real}, y)), \\ \text{TI-BIM: } x_{t+1}^{adv} &= x_t^{adv} + \alpha \text{sign}(W * \nabla_x J(x_t^{adv}, y)), \end{aligned} \quad (24)$$

where  $W$  is the Gaussian convolution kernel [16].

In addition, Xie et al. [17] proposed DIM, a diverse Input method. He adopted the idea of data enhancement. Before inputting images into the model, random transformation of input samples was carried out, such as random adjustment of sample size or random filling of given distribution. Then the converted image is input to the classifier, and the subsequent gradient calculation is carried out to generate the adversarial sample. This method can be combined with MI-FGSM, etc., which can also improve the migration of attacks.

Optimization has another way of extending the model. It is found that DNN may have scale invariance in addition to translation invariance. Specifically, the loss values of the original and scaled images on the same model are similar. Therefore, scaling can be used as a model extension method.

SIM is based on the discovery of scale-invariant properties of deep learning models. In the already mentioned paper [15] Lin et al. proposed to optimize adversarial perturbation by scaling input images to avoid “overfitting” the white box model under attack and generate more adversarial examples that could be transferred.

**2.3.3. Train the auxiliary classifier.** The third approach is to train an auxiliary classifier. Almost all current adversarial attacks of **convolutional neural networks** (CNN) classifiers rely on information derived from the output layer of the network, Inkawhich et al. [18] proposed a new adversarial attack based on the modeling and exploitation

of class-wise and layer-wise deep feature distributions, which called the **feature distribution attack** (FDA).

The basic idea is that, to compute FDA adversarial noise from layer  $l$ , we first build a composite model using the truncated white-box model  $f_l$  and the corresponding layer’s auxiliary model  $g_{l,c} = y_{tgt}$ . ( $g_{l,c}$  can capture the layer-wise and class-wise feature distributions, aiming to model the probability that the layer  $l$  features extracted from input  $x$  are from the class  $c$  feature distribution). The loss is calculated as the **binary cross entropy** (BCELoss) between the predicted  $p(y = y_{tgt}|f_l(x))$  and 1. Thus, we perturb the input image in the direction that will minimize the loss, in turn maximizing  $p(y = y_{tgt}|f_l(x))$ , to generate targeted (or un-targeted) adversarial examples. The key intuition for the targeted methods is that if a sample has features consistent with the feature distribution of class  $c$  at some layer of intermediate feature space, then it will likely be classified as class  $c$ .

FDA can be written as:

$$\max_{\delta} p(y = y_{tgt}|f_l(x + \delta)), \quad (25)$$

where  $\delta$  is a perturbation of the “clean” input image  $x$ .

The paper stress that unlike standard attacks that use output layer information to directly cross decision boundaries of the white-box, the FDA objective leverages intermediate feature distributions which do not implicitly describe these exact boundaries.

Moreover, Inkawhich et al. proposed to significantly improve the FDA method by extending it into a more flexible framework to allow for multilayer perturbations across the intermediate feature space, including the output layer.

The difference is that each  $g_{l,y_{tgt}}$  is a feature distribution model that estimates the probability that the layer  $l$  feature map  $f_l(x)$  is from a sample of class  $y_{tgt}$ , i.e.  $p(y_{tgt}|f_l(c))$ . For a chosen  $y_{tgt}$  and set of layers, we accumulate the losses w.r.t.  $y_{tgt}$  at each intermediate layer and the output layer. By optimizing the sum, we are noising  $x$  with  $\delta$  such that  $x + \delta$  lies in high probability regions of the target class at several layers across feature space. We find that this method significantly improves transferability of the generated adversarial samples.

FDA can be written as:

$$\max_{\delta} p(y = y_{tgt} | f_l(x + \delta)) + \eta \frac{\|f_l(x + \delta) - f_l(x)\|_2}{\|f_l(x)\|_2} - \gamma H(f(x + \delta), y_{tgt}). \quad (26)$$

The second component is the feature disruption term, which enforces that the feature map of the perturbed input is significantly different than the feature map of the original input.

A key contribution in this work is the third component to include multi-layer information. One way to do so is to incorporate the white-box model’s output prediction as part of the attack objective. Let  $H(f(x), y)$  be the standard cross-entropy loss between the predicted probability distribution  $f(x)$  and the target distribution  $y$  (commonly a one-hot distribution). We include this term in the FDA objective to create FDA+xent. The factor  $\gamma > 0$  weights the contribution of cross-entropy term. This attack objective optimizes the noise such that the layer  $l$  feature map is in a high-probability region of the target class, and that the output prediction of the white-box model is of the target class. Addition of the cross-entropy term is because of the probability distribution over the classes, as measured in the optimal transfer layer, has low correlation with the probability distribution over the classes at the output layer.

The paper introduced a feature space-based adversarial attack framework that allows for perturbations along the extracted feature hierarchy of a DNN image classifier to achieve state-of-the-art targeted blackbox attack transferability. These performance gains are attributed to the inclusion of multi-layer information, which leads to significantly higher disruption in the feature spaces of both the white-box and black-box [19].

Other methods include transforming the target function and then using optimization algorithms to search for solutions to the target function.

**2.3.4. Generative-based adversarial transfer.** Studies have shown that perturbations exist in large contiguous regions rather than scattered in multiple small discontinuous pockets, so the most important thing when generating perturbations is to consider the direction of perturbations, rather than specific points in space [2]. Considering generative perturbation modeling for a given region of classes, Mopuri et al. [20] make the GAN framework a suitable choice for our task by introducing a generative model similar to GAN to capture the distribution of unknown adversarial perturbations as well as the space of unknown

perturbations, which is not affected by parametric assumptions, and the target distribution is unknown (there are no known samples in the target distribution of adversarial perturbations). This method successfully trains a generator network to capture unknown target distributions without the need for any training samples. The resulting model produces adversarial perturbations with a large diversity for migration attacks almost immediately, and the method can effectively simulate perturbations that spoof multiple deep models at the same time.

For perturbations that need to be generated, two types of adversarial perturbations can be considered: generic and instance-dependent. The perturbations that a particular instance depends on can vary depending on the image in the datasets. To generate these perturbations, we need a function to acquire a natural image and output a hostile image, and we can approximate this function with a deep neural network. A general perturbation is a fixed perturbation that, when added to a natural image, significantly reduces the accuracy of the pre-screened network. For the generation of adversarial perturbations for specific instances such as image dependencies, four types of adversarial attacks are generally considered: target general, non-target generic, target image dependency, and non-target image dependency. While the non-target black-box transferability of adversarial perturbations has previously been extensively studied, changing the decision of an invisible model to a specific “target” category remains a challenging feat. Under the condition of small perturbation norm, high deception rates have been achieved for all tasks, and these perturbations can be successfully transferred between different target models. A method [21] is proposed to discard pre-trained models and only use generators to generate adversarial examples to accommodate perturbations of input samples, which avoids the need for iterative gradient computation and allows us to quickly generate perturbations, in addition to using generative models to create adversarial perturbations, allowing us to further train more complex models. Moreover, the study also proves that the resulting perturbations can be transferred in different models, which is a migration attack.

### **2.3.5. Universal adversarial perturbations.**

**(1) Universal adversarial perturbations.** Traditional optimized counter attacks typically target a single sample, while the goal of a generic counter attack is to find a generic counter disturbance that works for as many samples as possible [22]. That is, finding a general pertur-

bation  $v$  such that for most images  $x$ ,

$$\hat{k}(x+v) \neq \hat{k}(x) \text{ for "most" } x \sim \mu. \quad (27)$$

There are also constraints to ensure visual quality and attack effectiveness:

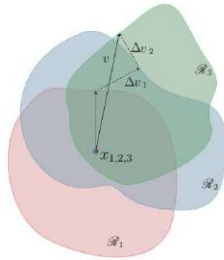
$$\|v\|_p \leq \xi, \quad (28)$$

$$P_{x \sim \mu}(\hat{k}(x+v) \neq \hat{k}(x)) \geq 1 - \delta. \quad (29)$$

Moosavi-Dezfooli et al. [7] propose a systematic algorithm for computing universal perturbations, and show that state-of-the-art deep neural networks are highly vulnerable to such perturbations, although the human eye cannot distinguish. This article generates general perturbations through DeepFool. The purpose of this algorithm is to find the minimum perturbation  $v$ , so that  $x_i + v$  moves out of the correct classification region  $R_i$ . This algorithm makes it easy to calculate the corresponding disturbances for different models such as VGG, Google LeNet, ResNet, and so on. The article demonstrates the existence of these general perturbations (as shown in the figure below) and their good generalization.

The implementation of this algorithm is as follows. The dataset  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  is given. Based on constraints and optimization objectives, the algorithm iterates over data points on dataset  $X$  to gradually construct a generic perturbation. Iterative solution is to calculate a new perturbation based on the previous perturbation  $v$ . The specific optimization formula is as follows:

$$\Delta v_i \leftarrow \arg \min_r \|r\|_2 \text{ s.t. } \hat{k}(x_i + v + r) \neq \hat{x}_i. \quad (30)$$



**Figure 2.** Gradient transformer module

To ensure that constraints are met  $\|v\|_p \leq \xi$ . The updated general perturbation is further projected to a radius of  $\xi$ , centered at 0 on the ball  $\ell_p$ . Therefore, the projection operation is defined as

$$P_{p,\xi}(v) = \arg \min_{v'} \|v - v'\|_2 \text{ s.t. } \|v\|_p \leq \xi. \quad (31)$$

The actual update process is  $v \leftarrow P_{p,\xi}(v + \Delta v_i)$ .

**(2) Fast feature fool.** Mopuri et al. [22] provide a method for effectively generating generic perturbations by deceiving features learned in multiple network layers without data, thereby misleading CNN. And these disturbances have good generalization. **Fast feature fool** (FFF) is used to generate generic perturbations without relying on data, which fool CNN by supersaturating the features of multi-layer learning (replacing the “flip the label” target), that is, by adding perturbations to the input, destroying the features of each layer to mislead the features of subsequent layers. Cumulative disturbances along the network hierarchy will make the network unable to distinguish between original inputs, resulting in a large number of prediction errors at the final layer. Its essence is to find a disturbance that can generate the maximum false activation at each layer without any data provided by the target CNN. The objective function of this optimization problem is:

$$Loss = -\log \left( \prod_{i=1}^K \bar{l}_i(\delta) \right) \text{ s.t. } \|\delta\|_\infty < \xi, \quad (32)$$

where  $\bar{l}_i(\delta)$  is the mean activation in the output tensor at layer  $i$  when  $\delta$  is input to the CNN. Note that the activations are considered after the non-linearity (typically ReLU), therefore it is non-negative.  $K$  is the total number of layers in the CNN at which we maximize activations for the perturbation  $\delta$ .  $\xi$  is the limit on the pixel intensity of the perturbation  $\delta$ .

Considering all convolutional layers before the fully connected layer, the product of multi-layer average activation is calculated to maximize all layers simultaneously. To avoid the occurrence of extreme values, the  $\log()$  function is applied to the product. Because optimization updates are perturbations, there is no need for sample data to participate in the process of generating generic countermeasures. After each update, the disturbance is clipped to the constraint range to meet the constraint of disturbance size. The perturbation proposed by researchers has three characteristics. First, the same perturbation can deceive multiple images



based on a target dataset on a given CNN; Second, the transferability of disturbances between multiple networks trained on the same dataset can be proved; Third, they surprisingly retain the ability to deceive cellular neural networks trained on different target datasets (compared to relying on data). Experiments have shown that data independent universal adversarial disturbances may pose a more serious threat than data dependent disturbances.

**(3) Generalizable data-free objective for crafting universal adversarial perturbations.** GD-UAP is also a general data-independent anti-perturbation method proposed by Mopuri et al. [23], which is an extension of the FFF. The difference from FFF method is that it uses the  $i$ -th layer tensor activation value  $L_2$  norm instead of the average activation value, and the loss function is:

$$Loss = -\log \left( \prod_{i=1}^K \|l_i(\delta)\|_2 \right) \text{ s.t. } \|\delta\|_\infty < \xi. \quad (33)$$

The authors use this method in target detection, semantic segmentation and other tasks to achieve a variety of attacks. This paper proves that the disturbance is data-free. The authors conducted a comprehensive analysis of the proposed goals, including: a thorough comparison of the GD-UAP approach with the opposing portions of the dependent data, and an assessment of the strength of UAPs in the presence of various defense mechanisms. It extended UAP attacks to visual tasks other than image classification and proposed a target model for training data distribution with minimal prior information to create stronger disturbances.

**(4) Regionally homogeneous perturbations.** Li et al. [24] proposed **regionally homogeneous perturbations** (RHP) using a natural training model and a defense model for white box attacks. In this paper, a gradient transformer module is proposed to obtain regional homogeneity confrontation samples. The principle is to increase the correlation of pixels in the same region, thereby causing regional uniform disturbance.

Based on this observation, researchers proposed a transformation paradigm and a gradient transformer module to generate an RHP specifically for attack defense. Researchers have demonstrated the effectiveness of regional homogeneous disturbances through experiments attacking a series of defense models. Using semantic segmentation tasks to attack

and test object detection tasks has proven the cross task portability of RHP.

### 3. Adversarial attack in computer vision applications.

**3.1. Adversarial attack in object detection.** Object detection [25] is one of the research hotspots in the field of computer vision, which aims at detecting and classifying targets, specifically in the given specific environment, for example, a static image or a dynamic video data set, in different background in the image or video of interest in the specific location of the object of interest in the extraction of information and with a rectangular box marked, and the class of the object is given.

Figure 3 shows an example of using target detection technology to detect vehicles on the road.



Figure 3. Object detection is used in vehicle detection

Despite the rapid development of target detection, recent studies have shown that target detection has shortcomings in security [26] and is easily deceived by antagonistic samples.

**3.1.1. Two-stage network attack.** In 2017, Lu et al. [27] proposed the DFooL method to mislead the corresponding detector by adding disturbances to the “Stop sign and the face image, which is the first article in the field of target detection to adversarial sample generation. In the same year Xie et al. [28] proposed **dense adversary generation** (DAG), which attacks the target candidate set generated

on the **region proposal network** (RPN) component of two-stage network, each target candidate region is assigned an antagonism tag and a gradient rise strategy is executed until the candidate region is successfully predicted to stop iteration for the specified antagonism tag. DAG is one of the most classical attack methods in target detection. In the actual attack, the effect of DAG is better, but it is time-consuming because of the need of iterative attack on each candidate box. Shapeshifter is the first targeted attack method against Faster R-CNN proposed by Chen et al. [29], which borrows from the adversarial attack Methods CW and **expectation over transformation** (EOT) [30] in image classification, the adversarial sample generated by the stop sign attack successfully deceived Faster R-CNN, but the attack required modification of the entire stop sign at a high cost. Li et al. [31] put forward a **robust adversarial perturbation** (RAP) attack on two-stage network. In the attack, by designing a loss function which combines the loss of classification and the loss of location, compared with DAG method, Li's method makes use of the location information of target detection to attack and the attack method is original, but the actual attack new ability is more general and the attack mobility against RPN is poor. **Contextual adversarial perturbation** (CAP) by Zhang et al. [32] is based on the previous attack methods. It makes full use of the context information, extracts the context information of the target object in the image and destroys these areas, at the same time, the background area score is improved to increase the intensity of the attack, and better experimental results are obtained on PASCAL VOC and MS COCO datasets.

**3.1.2. One-stage network attack.** On one-stage network model, PhyAttack by Song et al. [33] is inspired by the **robust physical perturbations** (RP2) in the image classification domain [34]. It added an additional antagonistic loss function to the original RP2, the YOLOv2 detector was successfully deceived by gradient descent to reduce the mark score in the image so that the detector could not detect the stop sign. Daedalus by Wang et al. [35] attacks on the common module **non maximum suppression** (NMS) of the one-stage detection model, which makes YOLO network produce false alarm, false negative and so on. Liao et al. [36], who suggested **category-wise attack** (CA), were the first to attack a particular anchor-free class model CenterNet in a single-stage network by looking for important pixel areas in an image, it uses its high-level semantic information to carry on the category attack to the detector. The CenterNet model is used to extract thermograms in which

the pixel points with a score greater than the threshold are defined as the important pixel areas and their prediction categories. During the attack, these important pixel points are attacked to deviate from the original category, the resulting adversarial samples can not only attack the anchor-free model, but also successfully migrate to the traditional one-stage and two-stage target detection models.

**3.1.3. Both detectors can be attacked.** Wei et al. [37] proposed an **unified and efficient adversary** (UEA) method to solve the problems of high time-cost and poor migration of target detection adversarial samples, combining GAN with the advanced classification loss and the low-level feature loss, the GAN is trained to generate the adversarial samples. The experiment proves that the adversarial samples can be generated in real-time by the trained GAN network, and the real-time attack on video is realized, the generated adversarial samples have a high attack success rate against SSD and YOLO in single-phase networks. Wu et al. [38] improved and migrated the UAP in image classification [39] to the field of target detection and proposed the G-UAP model. By selecting a batch of pictures to attack the data set and attacking each picture at the same time as well as by reducing the confidence score of foreground objects in the picture and increasing the confidence score of background, the corresponding disturbance can be obtained, finally, all the perturbations are aggregated as the feature map of the network, so that we can learn the general perturbations from this batch of images to deceive more images. Chow et al. [40] proposed an iterative TOG method that can attack both two-stage and one-stage target detectors simultaneously, according to the final attack effect, TOG method can be divided into three categories: Target vanishing, forged tag, and classification error, in the process of iteration generation the original image of gradient modification is obtained by performing gradient descent on the set loss function until the attack is successful or the iteration number is reached. TOG can achieve nearly one hundred percent attack success rate on white box, but it has poor mobility.

In addition to these global adversarial jamming attacks, some other researchers have proposed a new adversarial, which only adds perturbations in one region of the original image so that the perturbations in that region can affect the whole image which can be described as the local perturbation attack to achieve the goal of spoofing the target detector.

**3.1.4. Local adversarial jamming.** In 2018, Li et al. [41] first proposed the method BPatch for local adversarial-jamming attacks on

two-stage detectors. In this method, the target detector is attacked by adding disturbing blocks to the background outside the target of the image. BPatch is also an attack against RPN which is a unique part of the two-phase detector. Since the RPN network generates a large number of candidate fields containing the candidate boxes, the next stage of the network will arrange the candidate boxes for the RPN network according to the confidence level, the candidate boxes above the confidence threshold were selected for the next stage of classification and location regression. BPatch presents an attack method for RPN network filtering mechanism by reducing the confidence of the high confidence candidate obtained by the RPN layer and make the candidate boxes that end up in the next layer of the network contain little or no foreground targets. Liu et al. [42] add a patch to the picture and treat the patch as a **ground truth** (GT) check box. Back propagation causes the network to optimize the patch directly so that the final detector is affected by the patch, resulting in a detection error. In addition, Wang et al. [43] proposed a particle swarm optimization target detection black box attack EA which uses a natural optimization algorithm to guide disturbance generation in place, but this approach is time-consuming. Thys et al. [44] have created an adversarial block to fool the YOLOv2 detector so that the YOLOv2 detector can not detect the presence of a person after the person has carried the adversarial block.

**3.2. Adversarial attacks in semantic segmentation.** As an extension of classification, adversarial attacks are also widely used in the field of semantic segmentation. Semantic segmentation is a fundamental task in computer vision that refers to the use of deep learning models to segment different objects in an image from the pixel level and label each pixel with a category. For example, we may need to distinguish all pixels belonging to cars in an image and paint them in a specific color. **Fully convolutional networks** (FCN) proposed by Long et al. [45] is a framework for semantic segmentation of images, which is the pioneering work of deep learning for semantic segmentation. In this paper, full convolution is used instead of full concatenation, and the operation of inverse convolution is used to recover information in order to compensate for the loss caused by the downsampling operation, and high and low channel features are fused to recover low-level visual information. The state-of-the-art semantic segmentation models are usually based on standard image classification architectures [46], extended by additional components such as dilated convolution [47], specialized pooling [48],

skip connections [45], **conditional random fields** (CRFs) [49] and/or multiscale processing [50], but their impact on robustness has never been thoroughly investigated.

Arnab et al. [51] applied an adversarial attack method migration for image classifiers to semantic segmentation models, carefully evaluating work on adversarial attacks on semantic segmentation models such as DeepLab V2 [50] and PSPNet [48], showing that segmentation models built on deep neural networks are also plagued by adversarial samples. And (already mentioned in Section 3.1.1) Xie et al. [28] proposed DAG attack to start applying adversarial attacks to target detection and semantic segmentation, and proposed an adversarial attack method with migration capability. DAG is a greedy algorithm that considers all targets simultaneously and optimizes the overall loss function by simply specifying for each target a adversarial label and iteratively performs gradient backpropagation to obtain cumulative perturbations, but does not minimize the number of considered paradigms. To address this, Cisse et al. [52] proposed the Houdini attack for several tasks including semantic segmentation. The goal of this approach is to maximize the surrogate loss for a given perturbation budget (i.e. a constraint on the  $L_\infty$ -norm), so that no minimum perturbation is generated, and by directly formulating adversarial samples for the combined infeasible task loss, it can be achieved to deceive any gradient-based learning machine. Ozbek et al. [53] studied adversarial examples in medical image segmentation tasks. They proposed a targeted attack, which is equivalent to a conventional penalty approach. However, the weight of the penalty term is set to 1, which leads to a large  $L_2$ -parametrization, even compared to DAG. Thys et al. [44] generated an “adversarial patch” by optimizing the target loss, this small patch can cause the target to evade the AI detector of the object. Nesti et al. [54] proposed a scenario-specific attack that uses the CARLA driving simulator to improve the transferability of EOT-based attacks in real 3D environments. Instead of the traditional cross-entropy loss, Rossolini et al. [55] designed a loss function that can attack image regions far from the patch, which contains several separate loss terms that do not contain the patch pixels, with the aim of gradually shifting the deception focus from increasing the number of misclassified pixels to increasing the antagonistic strength of the patch on the misclassified pixels to improve the attacker’s ability to induce pixel misclassification, and the paper also validates the effectiveness of the scenario-specific attack. Gu et al. [56] proposed a segmentation attack method called “segPGD”,

and the experimental results showed that the convergence was faster and better than that of PGD.

In addition there are more studies on the robustness of semantic segmentation under adversarial attacks. Since previous work on deep neural networks performing vulnerably against samples has focused on classification tasks and has rarely been used on large-scale datasets and structured tasks such as semantic segmentation, based on this, Fischer et al. [57] generated adversarial samples by invoking the last-likely method proposed by Kurakin et al. [3] and misclassified each pixel in the pixel to the closest class for a more natural effect in order to analyze how adversarial perturbations affect semantic segmentation. Metzen et al. [58] generate generic perturbations by “letting the network produce a fixed target segmentation as the output” and “keeping the segmentation constant except for removing the specified target class” to make the network produce the desired target segmentation as the output, which can change the semantic segmentation of an image in a near-arbitrary way. The perturbation can change the semantic segmentation of the image in a nearly arbitrary way. It is important to know that the generic perturbation was first proposed in [39], which is a fixed perturbation with a specific algorithm that iterates over a sample of the target set, while Poursaeed et al. [59] creates generic attacks and image-related attacks by using an end-to-end generative model instead of an iterative algorithm, with a significant improvement in generation and inference time. Kang et al. [60] then compared the advantages and disadvantages of local perturbation with generic perturbation, where is a perturbation generated indirectly by a noise function and an intermediate variable to make the gradient of pixels propagate infinitely. Xiao et al. [61] observed that spatial consistency information can potentially be exploited to robustly detect adversarial examples even when a strongly adaptive attacker has access to the model and the detection strategy, and that the adversarial examples of the attacks considered in the paper hardly migrate between models.

Much of the above work uses FGSM [3] or its derivative models, which provide a coarse robustness evaluation and are not a minimization attack. Rony et al. [62] proposed a white-box attack which is based on approximate partitioning to produce adversarial perturbations with smaller  $L_1$ ,  $L_2$  or  $L_\infty$ -norm. This attack can handle a large number of constraints within a non-convex minimization framework by augmenting Lagrangian methods and adaptive constraint scaling and masking

strategies.

For certain adversarial attacks designed for classification problems, especially those that do not rely on projecting to the estimated decision boundary (e.g., DeepFool or FAB [63]), they can also be applied to the segmentation domain, such as PGD, DDN [64], FMN [65], PDGD and PDPGD [66], and ALMA [67], where PDPGD, although it relies on approximate partitioning, uses the AdaProx algorithm [68]. AdaProx introduces a mismatch between the scale and the step size of the gradient step in the computation of the approximation operator, and the convergence of this algorithm in the non-convex case is well worth investigating.

## References

1. Szegedy C., Zaremba W., Sutskever I., et al. Intriguing properties of neural networks // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1312.6199](https://arxiv.org/abs/1312.6199) (date: 25.06.2023).
2. Goodfellow I. J., Shlens J., Szegedy C. Explaining and harnessing adversarial examples // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1412.6572](https://arxiv.org/abs/1412.6572) (date: 25.06.2023).
3. Kurakin A., Goodfellow I. J., Bengio S. Adversarial examples in the physical world // In: Artificial intelligence safety and security, Chapman and Hall/CRC, 2018. P. 99–112.
4. Carlini N., Wagner D. Towards evaluating the robustness of neural networks // IEEE Symposium on Security and Privacy (SP), San Jose, CA, USA, 2017, P. 39–57.
5. Madry A., Makelov A., Schmidt L., et al. Towards deep learning models resistant to adversarial attacks // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1706.06083](https://arxiv.org/abs/1706.06083) (date: 25.06.2023).
6. Moosavi-Dezfooli S. M., Fawzi A., Frossard P. Deepfool: a simple and accurate method to fool deep neural networks // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016. P. 2574–2582.
7. Moosavi-Dezfooli S. M., Fawzi A., Fawzi O., et al. Universal adversarial perturbations // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017. P. 1765–1773.



8. Baluja S., Fischer I. Adversarial transformation networks: Learning to generate adversarial examples // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1703.09387](https://arxiv.org/abs/1703.09387) (date: 25.06.2023).
9. Papernot N., McDaniel P., Jha S., et al. The limitations of deep learning in adversarial settings // IEEE European Symposium on Security and Privacy (EuroS&P). 2016. P. 372–387.
10. Papernot N., McDaniel P., Goodfellow I., et al. Practical Black-Box Attacks against Machine Learning // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1602.02697](https://arxiv.org/abs/1602.02697) (date: 25.06.2023).
11. Ilyas A., Engstrom L., Athalye A., et al. Black-box adversarial attacks with limited queries and information // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1804.08598.pdf> (date: 25.06.2023).
12. Wierstra D. et al. Natural evolution strategies // J. of Machine Learning Research. 2014. Vol. 15. No 1. P. 949–980.
13. Su J., Vargas D. V., Sakurai K. One pixel attack for fooling deep neural networks // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2019. Vol. 23. No 5. P. 828–841.
14. Dong Y., Liao F., Pang T., et al. Boosting adversarial attacks with momentum // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1710.06081](https://arxiv.org/abs/1710.06081) (date: 25.06.2023).
15. Lin J., Song C., He K., et al. Nesterov accelerated gradient and scale invariance for adversarial attacks // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1908.06281](https://arxiv.org/abs/1908.06281) (date: 25.06.2023).
16. Dong Y., Pang T., Su H., et al. Evading defenses to transferable adversarial examples by translation-invariant attacks // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1904.02884.pdf> (date: 25.06.2023).
17. Xie C., Zhang Z., Zhou Y., et al. Improving transferability of adversarial examples with input diversity // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1803.06978.pdf> (date: 25.06.2023).

18. Inkawhich N., Liang K. J., Carin L., et al. Transferable perturbations of deep feature distributions // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:2004.12519](https://arxiv.org/abs/2004.12519) (date: 25.06.2023).
19. Inkawhich N., Liang K. J., Wang B., et al. Perturbing Across the Feature Hierarchy to Improve Standard and Strict Blackbox Attack Transferability // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:2004.14861](https://arxiv.org/abs/2004.14861) (date: 25.06.2023).
20. Mopuri K. R., Ojha U., Garg U., et al. Nag: Network for adversary generation // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018. P. 742–751.
21. Poursaeed O., Katsman I., Gao B., et al. Generative adversarial perturbations // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018. P. 4422–4431.
22. Mopuri K. R., Garg U., Babu R. V. Fast feature fool: a data independent approach to universal adversarial perturbations // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1707.05572](https://arxiv.org/abs/1707.05572) (date: 25.06.2023).
23. Mopuri K. R., Ganeshan A., Babu R. V. Generalizable data-free objective for crafting universal adversarial perturbations // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2018. Vol. 41. No 10. P. 2452–2465.
24. Li Y., Bai S., Xie C., et al. Regional homogeneity: towards learning transferable universal adversarial perturbations against defenses // Computer Vision–ECCV 2020: 16th European Conference, Glasgow, UK, August 23–28, 2020, Proceedings, Part XI 16. Springer, 2020. P. 795–813.
25. Zaidi S., Ansari M. S., Aslam A., et al. A survey of modern deep learning based object detection models // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:2104.11892](https://arxiv.org/abs/2104.11892) (date: 25.06.2023).
26. Kong Z., Xue J., Wang Y., et al. A survey on adversarial attack in the age of artificial intelligence // Wireless Communications and Mobile Computing. 2021. Vol. 2021. P. 1–22.
27. Lu J., Sibai H., Fabry E. Adversarial examples that fool detectors // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1712.02494.pdf> (date: 25.06.2023).

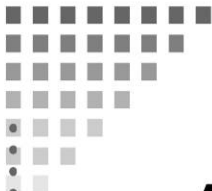
28. Xie C., Wang J., Zhang Z., et al. Adversarial examples for semantic segmentation and object detection // IEEE International Conference on Computer Vision. 2017. P. 1378–1387.
29. Chen S. T., Cornelius C., Martin J., et al. Robust physical adversarial attack on faster R-CNN object detector // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1804.05810v1.pdf> (date: 25.06.2023).
30. Athalye A., Engstrom L., Ilyas A., et al. Synthesizing Robust Adversarial Examples // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1707.07397.pdf> (date: 25.06.2023).
31. Li Y., Tian D., Mingching-Chang , et al. Robust adversarial perturbation on deep proposal-based models // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1809.05962v1.pdf> (date: 25.06.2023).
32. Zhang H., Zhou W., Li H. Contextual adversarial attacks for object detection // 2020 IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME), London, UK. 2020. P. 1–6.
33. Eykholt K., Evtimov I., Fernandes E., et al. Physical adversarial examples for object detectors // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1807.07769.pdf> (date: 25.06.2023).
34. Eykholt K., Evtimov I., Fernandes E., et al. Robust physical-world attacks on deep learning models // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1707.08945](https://arxiv.org/abs/1707.08945) (date: 25.06.2023).
35. Wang D., Li C., Wen S., et al. Daedalus: Breaking Nonmaximum Suppression in Object Detection via Adversarial Examples // IEEE Transactions on Cybernetics. Vol. 52. No. 8. P. 7427–7440.
36. Liao Q., Wang X., Kong B., et al. Category-wise attack: transferable adversarial examples for anchor free object detection // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:2003.04367](https://arxiv.org/abs/2003.04367) (date: 25.06.2023).
37. Wei X., Liang S., Chen N., et al. Transferable adversarial attacks for image and video object detection // arXiv preprint [Internet resource]: <https://arxiv.org/pdf/1811.12641.pdf> (date: 25.06.2023).

38. Wu X., Huang L., Gao C. G-UAP: generic universal adversarial perturbation that fools RPN-based detectors // *Proceedings of Machine Learning Research*. 2019. Vol. 101. P. 1204–1217.
39. Moosavi-Dezfooli S. M., Fawzi A., Fawzi O., et al. Universal adversarial perturbations // *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Honolulu, USA. 2017. P. 86–94.
40. Chow K. H., Liu L., Gurosoy M. E., et al. TOG: targeted adversarial objectness gradient attacks on real-time object detection systems // *arXiv preprint [Internet resource]*: <https://arxiv.org/pdf/2004.04320.pdf> (date: 25.06.2023).
41. Li Y., Bian X., Lyu S. Attacking object detectors via imperceptible patches on background // *arXiv preprint [Internet resource]*: <https://arxiv.org/pdf/1809.05966v1.pdf> (date: 25.06.2023).
42. Liu X., Yang H., Liu Z., et al. DPatch: an adversarial patch attack on object detectors // *arXiv preprint [Internet resource]*: [arXiv:1806.02299](https://arxiv.org/pdf/1806.02299.pdf) (date: 25.06.2023).
43. Wang Y., Tan Y. A., Zhang W., et al. An adversarial attack on DNN-based black-box object detectors // *Journal of Network and Computer Applications*. 2020. Vol. 161. Art. no 102634.
44. Thys S., Ranst W. V., Goedeme T. Fooling automated surveillance cameras: adversarial patches to attack person detection // *2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*, Long Beach, CA, USA. 2019. P. 49–55.
45. Long J., Shelhamer E., Darrell T. Fully convolutional networks for semantic segmentation // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2015. P. 3431–3440.
46. He K., Zhang X., Ren S., et al. Deep residual learning for image recognition // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2016. P. 770–778.
47. Chen L. C., Papandreou G., Kokkinos I., et al. Semantic image segmentation with deep convolutional nets and fully connected CRFs // *arXiv preprint [Internet resource]*: [arXiv:1412.7062](https://arxiv.org/abs/1412.7062) (date: 25.06.2023).

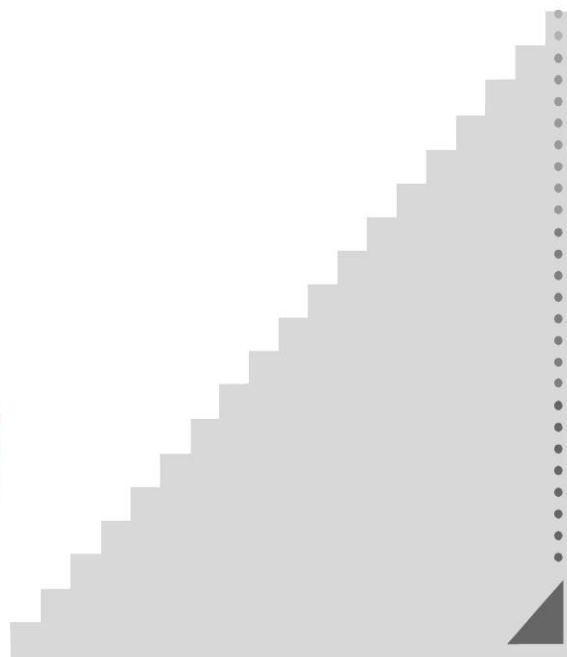
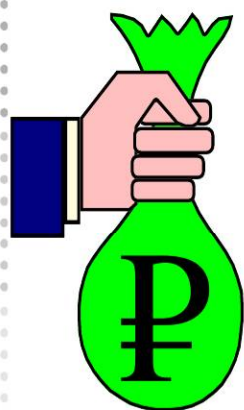
48. Zhao H., Shi J., Qi X., et al. Pyramid scene parsing network // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017. P. 2881–2890.
49. Zheng S., Jayasumana S., Romera-Paredes B., et al. Conditional random fields as recurrent neural networks // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), Santiago, Chile. 2015. P. 1529–1537.
50. Chen L. C., Papandreou G., Kokkinos I., et al. DeepLab: semantic image segmentation with deep convolutional nets, atrous convolution, and fully connected CRFs // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2018. Vol. 40. No. 4. P. 834–848.
51. Arnab A., Miksik O., Torr P. H. On the robustness of semantic segmentation models to adversarial attacks // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018. P. 888–897.
52. Cisse M. M., Adi Y., Neverova N., et al. Houdini: fooling deep structured visual and speech recognition models with adversarial examples // Advances in Neural Information Processing Systems, 2017, Vol. 30.
53. Ozbek U., Van Messem A., De Neve W. Impact of adversarial examples on deep learning models for biomedical image segmentation // Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention – MICCAI 2019: 22nd International Conference, Shenzhen, China, October 13–17, 2019, Proceedings, Part II 22. Springer. 2019. P. 300–308.
54. Nesti F., Rossolini G., Nair S., et al. Evaluating the robustness of semantic segmentation for autonomous driving against real-world adversarial patch attacks // Proceedings of the IEEE/CVF Winter Conference on Applications of Computer Vision. 2022. P. 2280–2289.
55. Rossolini G., Nesti F., D’Amico G., et al. On the real-world adversarial robustness of real-time semantic segmentation models for autonomous driving // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv: 2201.01850](https://arxiv.org/abs/2201.01850) (date: 25.06.2023).

56. Gu J., Zhao H., Tresp V., et al. SegPGD: An effective and efficient adversarial attack for evaluating and boosting segmentation robustness // *Computer Vision–ECCV 2022: 17th European Conference, Tel Aviv, Israel, October 23–27, 2022, Proceedings, Part XXIX*. Springer. 2022. P. 308–325.
57. Fischer V., Kumar M. C., Metzen J. H., et al. Adversarial examples for semantic image segmentation // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1703.01101](https://arxiv.org/abs/1703.01101) (date: 25.06.2023).
58. Hendrik Metzen J., Chaithanya Kumar M., Brox T., et al. Universal adversarial perturbations against semantic image segmentation // *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*. 2017. P. 2755–2764.
59. Poursaeed O., Katsman I., Gao B., et al. Generative adversarial perturbations // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2018. P. 4422–4431.
60. Kang X., Song B., Du X., et al. Adversarial attacks for image segmentation on multiple lightweight models // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 31359–31370.
61. Xiao C., Deng R., Li B., et al. Characterizing adversarial examples based on spatial consistency information for semantic segmentation // *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*. 2018. P. 217–234.
62. Rony J., Pesquet J. C., Ayed I. B. Proximal splitting adversarial attacks for semantic segmentation // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:2206.07179](https://arxiv.org/abs/2206.07179) (date: 25.06.2023).
63. Croce F., Hein M. Minimally distorted adversarial examples with a fast adaptive boundary attack // *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2020. P. 2196–2205.
64. Rony J., Hafemann L. G., Oliveira L. S., et al. Decoupling direction and norm for efficient gradient-based l2 adversarial attacks and defenses // *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2019. P. 4322–4330.

65. Pintor M., Roli F., Brendel W., et al. Fast minimum-norm adversarial attacks through adaptive norm constraints // Advances in Neural Information Processing Systems. 2021. Vol. 34. P. 20052–20062.
66. Matyasko A., Chau L. P. PDPGD: Primal-dual proximal gradient descent adversarial attack // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:2106.01538](https://arxiv.org/abs/2106.01538) (date: 25.06.2023).
67. Rony J., Granger E., Pedersoli M., et al. Augmented lagrangian adversarial attacks // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2021. P. 7738–7747.
68. Melchior P., Joseph R., Moolekamp F. Proximal Adam: robust adaptive update scheme for constrained optimization // arXiv preprint [Internet resource]: [arXiv:1910.10094](https://arxiv.org/abs/1910.10094) (date: 25.06.2023).



*5. Управление  
социально-  
экономическими  
системами*







УДК 51-77

Гордюшин Д. С.

## Оценка состояния экономики при помощи имитационного моделирования

**1. Введение.** В данной работе показана возможность использования анализа и прогнозирования финансового состояния предприятия с учетом его работы в условиях цифровой трансформации. Проведенное исследование позволит принимать решения не только в условиях конкретного предприятия, а с учетом всей экономической зоны, в которой находится данное предприятие. Изменения, которые происходят в мире, позволяют подключаться к интернету все большему числу устройств, накапливая огромный объем данных. Для обработки и анализа такого количества данных необходимы новые подходы и средства принятия решений.

**2. Постановка задачи.** Цель работы – исследование и разработка алгоритма применения имитационного моделирования на основе модели Ферхюльста [1] для анализа финансового состояния компаний из различных отраслей экономики на основе экономических показателей – операционной деятельности. В ходе работы необходимо решить следующие задачи:

- разработать методологию поддержки принятия решений в условиях цифровой трансформации экономики;
- исследовать модель Ферхюльста на предмет возможности прогнозирования операционной деятельности предприятия на основе реальных данных;
- осуществить сбор и подготовку данных для анализа при помощи выбранной модели, описать актуальность решаемых задач рассматриваемой модели в рамках операционной деятельности;
- применить модель Ферхюльста и провести анализ полученных результатов.

Оптимизационная модель Ферхюльста позволяет получить явную оценку перспективности предприятия в виде величины возврата

---

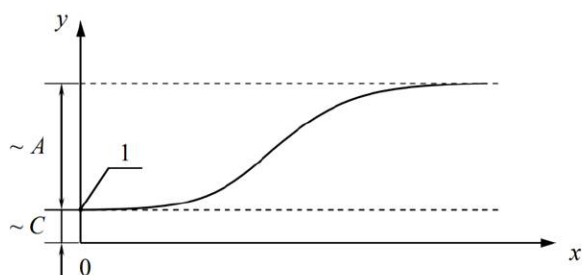
*Гордюшин Денис Сергеевич* – аналитик ООО «СКБ ЛАБ»; e-mail: godeniska@yandex.ru, тел.: +7(950)227-16-27

капитала. Данный параметр можно применить для оценки деятельности любого участника экономической системы, от индивидуально-предпринимателя до мега-корпорации. Методы оптимизационного моделирования, регрессионные модели, графо-аналитические модели [2–7] позволяют заниматься исследованиями без проведения инвестиционных экспериментов с высокими рисками. Использование указанных моделей существенно снижает степень неопределенности исходной информации, на основе которой необходимо принять решение.

**3. Применение модели Ферхюльста в анализе развития промышленных предприятий.** Для анализа влияния инвестиционных проектов на развитие промышленных предприятий была выбрана модель Ферхюльста следующего вида [2]:

$$y(x) = \frac{A}{1 + 10^{a-b \cdot x}} + C. \quad (1)$$

Модель с учетом выбранных знаков представлена на рис.1.



**Рис. 1.** Графическое представление модели Ферхюльста в анализе развития предприятия

При нулевом значении независимой переменной, соответствующее значение зависимой переменной определяется значениями масштаба  $A$ , смещения  $C$ , и формы  $a$ .

Необходимо учесть, что начальные инвестиции и их отдача со временем связаны и определены в рамках выбранной модели следующим выражением:

$$y(x=0) = 0, \quad (2)$$

и требуется модификация модели Ферхюльста в процессе следующих двух этапов:

1. Определение параметра смещения  $C$  из условия (2):

$$y(x=0) = \frac{A}{1+10^a} + C = 0 \implies C = \frac{-A}{1+10^a}. \quad (3)$$

2. Подстановка выражения (3) в равенство (1) и приведение подобных:

$$y(x) = \frac{A}{1+10^{a-bx}} - \frac{A}{1+10^a} = \frac{A \cdot 10^a}{1+10^a} \frac{1-10^{-bx}}{1+10^{a-bx}}. \quad (4)$$

В выражении (4) получаем модифицированную аналитическую модель Ферхюльста, описывающую взаимосвязь между величиной исходных инвестиций и величиной возврата капитала, в ходе реализации инвестиционных проектов и оценки развития предприятия.

**4. Подготовка исходных данных.** Для применения выбранной модели в качестве значений зависимой и независимой переменной выбраны операционные доходы и операционные расходы. Были выгружены годовые отчеты компаний за последние шесть лет из доступных отчетов, агрегированных компанией Refinitiv и предоставляющей инструменты для выгрузки финансовых данных. Refinitiv – американско-британский глобальный поставщик данных и инфраструктуры финансового рынка.

В качестве необходимых данных были выбраны:

- международный идентификационный код ценной бумаги (ISIN);
- фискальный год финансового отчета;
- суммарные операционные расходы;
- операционные доходы;
- код классификации бизнеса и название;
- название компании.

Всего 26 компаний, в том числе: ФосАгро, Полюс, ПИК – Специализированный Застройщик, Детский мир, АФК Система, Группа ЛСР, ГазПром Нефть, СеверСталь и т.д.

**5. Построение модели и представление результатов.** Для построения модели было выполнено три шага из методики обоснования характеристик процессов реализации инвестиционных проектов [2]:

1. Подготовка соответствующих исходных данных, базирующихся на статистических или прогнозных значениях предшествующих или будущих периодов времени соответственно.
2. Вычисление параметров масштаба  $A$  и формы  $a$  и  $b$  аналитической модели, посредством решения нелинейной оптимизационной модели вида

$$\sum_{i=1} \left( \frac{A \cdot 10^a}{1 + 10^a} \frac{1 - 10^{-bx_i}}{1 + 10^{a-bx_i}} - y_i \right)^2 \rightarrow \min; \quad A, a, b \geq 0. \quad (5)$$

Предварительно необходимо аналитически найти начальные значения параметров масштаба  $A_0$  и формы  $a_0$  и  $b_0$ :

- присвоение значения параметру  $b_0$  из интервала  $(1/\sigma; 1)$ , где  $\sigma$  – порядок значений исходных данных;

- вычисление параметров  $A_0$  и  $b_0$  при помощи выражений вида

$$a_0 = \lg \left\{ \frac{\frac{y_{\max}}{y_{\min}} \frac{10^{-b_0 x_{\min}} - 1}{10^{-b_0 x_{\max}} - 1} - 1}{10^{-b_0 x_{\min}} - 10^{-b_0 x_{\max}} \frac{y_{\max}}{y_{\min}} \frac{10^{-b_0 x_{\min}} - 1}{10^{-b_0 x_{\max}} - 1}} \right\},$$

$$A_0 = y_{\max} \frac{1 + 10^{a_0}}{10^{a_0}} \frac{1 + 10^{a_0 - b_0 x_{\max}}}{1 - 10^{-b_0 x_{\max}}};$$

- оценка адекватности сформированной аналитической модели по расчетному значению коэффициента детерминации, вычисляемого по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^m \left( y_i - \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m} \right)^2}.$$

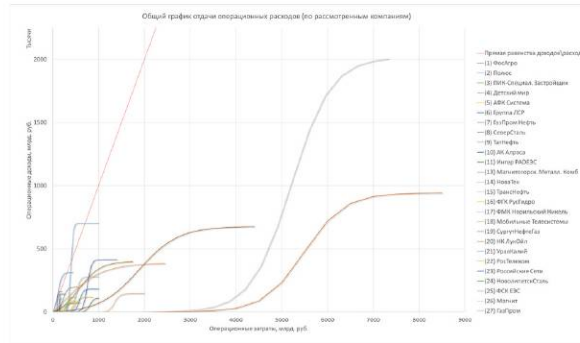


Рис. 2. Точность построенных моделей для выбранных компаний

Выбранных шагов достаточно для оценки перспективности модели и формулирования основных результатов моделирования. Так как рассматривается операционная деятельность, а не инвестиционные проекты, этап 4–6 [2] выбранной модели неактуальны для исследования динамики операционной деятельности.

Данная работа направлена на подтверждение предположения о прогнозируемости доходных и расходных показателей, при положительном результате и успешном практическом применении модель имеет потенциал развития.

В результате применения модели были построены модели зависимости операционных доходов от операционных расходов выбранных компаний. Результаты отражены на рис. 2.

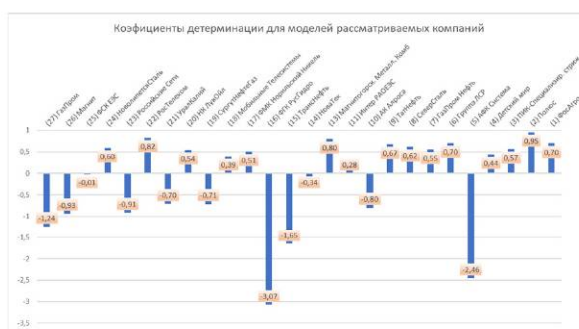


Рис. 3. Точность построенных моделей для выбранных компаний

Коэффициенты детерминации для рассчитанных моделей представлены в виде гистограммы на рис. 3. Коэффициент детерминации показывает качество аппроксимации реальных дискретных данных моделью.

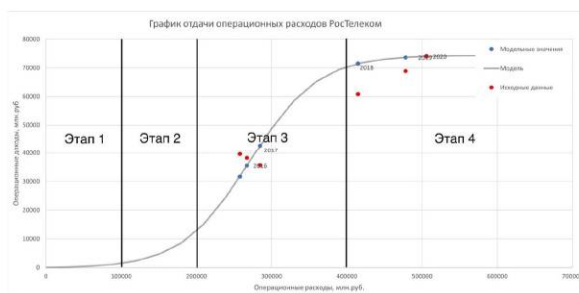


Рис. 4. Пример выделения четырех этапов развития операционной деятельности на примере компании Ростелеком

**Таблица 1.** Общие результаты применения модели для заказчика. Подход к оценке тренда и перспектив для заказчика

	<b>Инвестор</b>	<b>Владелец бизнеса</b>
Этап 1	Этап становления бизнеса, высокий риск инвестиций, неясность перспектив	Этап становления бизнеса, высокие расходы, минимальные доходы
Этап 2	Начало роста бизнеса, умеренно высокий риск инвестиций, высокие возможные доходы	Начало роста бизнеса, рост расходов приносит больше прибыли, бизнес начинает быть прибыльным
Этап 3	Бурный рост бизнеса, приемлемый уровень риска инвестиций, большая прибыльность, понятные перспективы роста	Бурный рост бизнеса, рост расходов с наибольшей отдачей увеличит прибыль, наиболее удачный период для увеличения активов и расширения бизнеса
Этап 4	Рост бизнеса замедляется и достигает предела при текущих активах, приемлемый уровень риска инвестиций, дивидендная доходность – стабильный развитый бизнес, медленное развитие и долгосрочный рост	Рост бизнеса замедляется и достигает предела при текущих активах, рост расходов не меняет уровень доходов, необходимость увеличения активов для дальнейшего роста доходов – большой стабильный бизнес, медленное развитие и долгосрочный рост

Полные результаты вычислений, проведенных для каждой компании, доступны по ссылке [8].

В представленных результатах для 15 компаний коэффициент детерминации является положительным, что говорит о прогнозируемости тренда. Для 10 компаний коэффициент детерминации является отрицательным, что говорит о большом разбросе и отсутствии модельной зависимости в исходных данных.

Так как в полученных результатах была построена S-кривая, можно выделить четыре основных этапа операционной деятельности рассматриваемой компании (рис. 4).



Каждый этап отражает динамику изменения операционных доходов, от изменения операционных расходов. Наиболее актуальные показатели компании и тренд, в сравнении с историческими данными, могут оказать влияние на выводы при анализе компании в целом. Этапы могут определять лица, принимающие решение.

Рассмотрим в качестве заказчика инвестора и владельца бизнеса. Согласно полученным результатам, прогноз будет основываться на актуальных показателях рассматриваемой компании за период, ближайший к текущему времени по отношению ко всем предыдущим периодам.

Важно отметить, что показатели компании могут двигаться не только от этапа 1 к этапу 4, но и в обратном порядке. Наиболее благоприятными для инвестора и владельца бизнеса являются этапы 2, 3, однако данные этапы наиболее волатильны. Важной задачей становится предсказание будущего положения финансовых показателей – вверх или вниз по графику пойдет тренд. Это требует дополнительных исследований.

**6. Заключение.** В данной работе проведена оценка применения имитационной модели Ферхюльста для оценки экономического состояния ведущих предприятий различных отраслей по их операционной деятельности. Полученные модели динамики операционных доходов и расходов позволяют с определенной точностью спрогнозировать область, в рамках которой будут изменяться выбранные показатели, а также пронаблюдать динамику операционной деятельности в разрезе 6 лет.

В связи с активными исследованиями в области цифровой экономики, а также в контексте цифровой трансформации, представленная модель может быть использована как часть контроля и инструмент автоматического анализа или продаж в банковской деятельности для цифровизации и компьютеризации систем анализа и автоматизированных рекомендательных систем. Данная работа была оценена и взята в анализ для исследования применения в рекомендательной системе на основе машинного обучения по рекомендации банковских услуг клиентам банка. Выбранная модель может использоваться как дополнительное средство сравнения успешности малого и среднего бизнеса. Также данная модель может помочь в анализе фондового рынка в качестве вспомогательного автоматизированного инструмента для оценки операционной деятельности, в дополнение

к традиционным инструментам фундаментального и технического анализа экономических показателей.

Таким образом, в ходе работы была разработана методология применения поддержки принятия решений в условиях цифровой трансформации экономики, основанная на модели Ферхюльста. Исследована возможность применения модели для оценки операционной деятельности компаний на основе годовых отчетов 26 выбранных компаний и подготовленных для проведения моделирования исходных данных.

В результате доказано, что применение выбранной модели оправдано и дает прогнозируемые результаты, подходящие для дальнейшей обработки и практического применения. Выполненная работа имеет большой потенциал развития и продолжения исследований для дальнейшего математического уточнения и расширения практического применения.

## Литература

1. Журавлев В. М., Миронов П. П. Динамика случайно возмущенного уравнения Ферхюльста и метод максимальной энтропии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 2(26). С. 156–170.
2. Малюк В. И., Радаев А. Е., Силкина Г. Ю. Методика обоснования характеристик процесса развития промышленных предприятий с использованием средств оптимизационного моделирования // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2018. Т. 11. № 6. С. 195–211.
3. Гаранин Д. А., Лукашевич Н. С. Моделирование параметров инвестиционного проекта на основе информационно-статистического подхода // Экономический анализ: теория и практика. 2014. № 33 (384). С. 37–48.
4. Иванов М. В., Соколицын А. С., Соколицына Н. А. Оптимальное распределение финансовых ресурсов по программам развития предприятия // Финансовые проблемы и пути их решения: теория и практика: сб. науч. тр. 15-й Междунар. науч.-практ. конф. Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб. 2014. С. 295–298.

5. Радаев А. Е., Кобзев В. В. Оптимизационная модель адаптивного функционирования сети поставок промышленных предприятий // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2013. № 4 (175). С. 135–140.
6. Kuladzhi T., Babkin A., Murtazaev S.-A. Matrix tool for efficiency assessment of production of building materials and constructions in the digital economy // Advances in Intelligent Systems and Computing, 2018. Vol. 692. P. 1333–1346.
7. Nekrasova T., Leventsov V., Axionova E. Evaluating the efficiency of investments in mobile telecommunication systems development // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9870 LNCS. P. 741–751.
8. Полные результаты вычислений, проведенных для каждой компании // Яндекс Диск [Электронный ресурс]: URL:<https://disk.yandex.ru/i/BUcv5mraHlWuxg> (дата обращения: 24.05.23).

УДК 519.837.3

Кареева Ю. С.

## О зоне безразличия в игре динамики мнений Фридкина – Джонсена

*Рекомендовано к публикации профессором Седаковым А. А.*

**1. Введение.** Основопологающей моделью динамики мнений считается модель Де Гроота [1], в которой предполагается, что каждый участник группы формирует свое мнение, ориентируясь на текущие мнения других в соответствии со своим доверием к ним. Позже Фридкин и Джонсен [2] дополнили классическую модель Де Гроота такими параметрами, как приверженность участника группы своим изначальным взглядам и конформность. Эти модели фокусируются на сходимости процесса формирования мнений. Отдельный интерес вызывают ситуации, когда некоторые влиятельные социальные агенты преднамеренно предпринимают попытки установить в группе мнение в соответствии со своим желаемым [3]. Иными словами, речь идет о манипулировании мнениями. В данном случае определяются индифферентные или пассивные агенты, которые не преследуют каких-либо целей, и активные агенты, имеющие собственные цели.

В работе рассматривается модель динамики мнений пассивных агентов, строится целевая функция затрат активного агента, в которой учитывается отклонение мнений пассивных агентов от его желаемого и его непосредственные затраты на управление. Отдельно исследуется вопрос влияния типа информационной структуры (программные и позиционные стратегии) на затраты активных агентов.

**2. Модель.** Рассмотрим математическую модель [4, 5]. Пусть  $N$  и  $A$  – множества активных и пассивных агентов соответственно, при этом  $|A| = a$ ,  $|N| = n$  и  $a \gg n$ . Предполагается, что активный агент (в дальнейшем – *игрок*) может влиять на мнения пассивных агентов (просто *агентов*) в социальной сети в течение конечного промежутка времени с периодами  $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ . При этом агенты, в отличие от игроков, не могут явным образом влиять на мнения остальных участников. Пусть  $x_{i0} \in X \subset \mathbb{R}$  – начальное мнение агента  $i$ , а

---

*Кареева Юлия Сергеевна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st061419@student.spbu.ru, тел.: +7(991)116-72-37

$x_i(t) \in X \subset \mathbb{R}$  – его мнение в момент  $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ . Векторы  $x(t) = (x_i(t), i \in A)'$  и  $x_0 = (x_{i0}, i \in A)'$  отражают мнения агентов сети в период  $t$  и в начальный момент времени.

Игроки оказывают влияние на агентов для того, чтобы изменить их мнение в предпочтительную для себя сторону. Пусть действие игрока  $i \in N$  в период времени  $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$  обозначается через  $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ ,  $u_i = (u_i(0), u_i(1), \dots, u_i(T-1))$  – набор действий игрока в игре, и  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$  – набор действий всех игроков в период времени  $t$ . Агент, в свою очередь, не только учитывает собственное мнение, но и ориентируется на мнения других участников сети.

Следующая линейно-разностная система является *расширением модели динамики мнений Фридкина – Джонсена на случай управляющих воздействий игроков*:

$$x_i(t+1) = s_i \left( \sum_{j \in A} w_{ij} x_j(t) + \sum_{j \in N} b_{ij} u_j(t) \right) + (1 - s_i) x_{i0}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$$

с начальным условием  $x_i(0) = x_{i0}$ ,  $i \in A$ . Здесь  $s_i \in [0, 1]$  – степень конформности агента  $i \in A$ ,  $w_{ij} \in [0, 1]$  – степень доверия агента  $i \in A$  мнению агента  $j \in A$ , а  $b_{ij} \in [0, 1]$  – степень доверия агента  $i \in A$  игроку  $j \in N$ . Равенство  $w_{ij} = w_{ji}$  необязательно должно выполняться, но предполагается, что  $\sum_{j \in A} w_{ij} + \sum_{j \in N} b_{ij} = 1$  для  $\forall i \in A$ .

Игроки учитывают динамику мнений агентов сети и выбирают действия таким образом, чтобы минимизировать свои затраты.

*Функция затрат игрока  $i$*  имеет следующий вид:

$$J_i = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left( \frac{\alpha_i}{a} \sum_{j \in N} (x_j(t) - \hat{x}_i)^2 + (1 - \alpha_i) c_i u_i^2(t) \right) + \rho^T \frac{\beta_i}{a} \sum_{j \in N} (x_j(T) - \hat{x}_i)^2.$$

Здесь  $\hat{x}_i \in X \subset \mathbb{R}$  – желаемое мнение игрока  $i \in N$ , к которому он хочет привести агентов за отведенное время,  $c_i > 0$  – затраты игрока  $i$ , связанные с выбором  $u_i(t)$ . С весом  $\alpha_i \in [0, 1)$  он ориентируется на свои затраты, связанные с отклонением мнений агентов от жела-

емого игроком, и с весом  $(1 - \alpha_i)$  – на непосредственные затраты на влияние в периоде  $t$ . Параметр  $\beta_i$  – вес, придаваемый отклонению от желаемого мнения в окончательном периоде,  $\rho \in (0, 1]$  – параметр дисконтирования.

Ожидается возникновение конфликта между игроками, так как каждый из них стремится убедить группу агентов в точке зрения, соответствующей его интересам. В ситуации конфликта определение действий активных участников осуществляется согласно концепции равновесия по Нэшу. Равновесие по Нэшу находится для класса программных (OLN) и позиционных (FBN) стратегий [6].

**3. Численное моделирование.** В качестве примера рассматривается игра динамики мнений двух лиц в сети клуба карате Закари [7] (вершина 1, инструктор, – игрок 1; вершина 34, президент клуба, – игрок 2) с параметрами из [5]. Цель проведения численных экспериментов – сравнить равновесные затраты игроков при программных ( $J^{OLN}$ ) и позиционных ( $J^{FBN}$ ) стратегиях с помощью показателя цены информации [8]

$$PoI^N = \frac{J_1^{OLN} + J_2^{OLN}}{J_1^{FBN} + J_2^{FBN}}.$$

Индивидуальные показатели для каждого игрока имеют вид

$$PoI_1^N = \frac{J_1^{OLN}}{J_1^{FBN}}, \quad PoI_2^N = \frac{J_2^{OLN}}{J_2^{FBN}}.$$

Очевидно, что при равенстве показателей цены информации единице, выбор программных либо позиционных стратегий для игроков не играет существенной роли. Для заданных параметров моделирования  $PoI^N = 1,0140$ ,  $PoI_1^N = 1,0080$ ,  $PoI_2^N = 1,0265$  (при параметрах  $s = 0,75$  и  $\alpha = 0,5$ ). Полученные значения указывают на то, что информационная структура не оказывает сильного влияния на затраты игроков.

Анализируя введенные выше показатели цены информации как функции от  $s$  и  $\alpha$ , можно заметить, что в  $\varepsilon$ -окрестности единицы образуется область, в которой игрокам не важен выбор класса стратегий из двух рассматриваемых. Назовем эту область *зоной безразличия* (indifference zone, IZ).

На рис. 1 для  $\varepsilon = 0,001$  и  $\varepsilon = 0,0001$  показано, при каких  $s$  и  $\alpha$  игрокам безразличен тип выбираемой стратегии. Данные значения параметра  $\varepsilon$  показывают 0,1- и 0,01-процентное отклонение показателя цены информации от единицы. Заштрихованная область задает пары  $(s, \alpha)$ , при которых отклонение показателя  $PoI^N$  не превышает заданного  $\varepsilon$ . Можно заметить, что при  $\varepsilon = 0,0001$  зона безразличия меньше, при этом в обоих случаях зона безразличия для первого игрока в целом шире, чем для второго. Также явно видно, что при увеличении степени конформности агентов  $s$  игрокам требуется уделять меньше внимания своим затратам, связанным с отклонением мнений агентов от желаемых мнений игроков, для удержания цены информации в заданных границах. При этом значения параметра  $\alpha$  не влияют на границы зоны безразличия при небольших значениях параметра степени конформности агентов  $s$ .

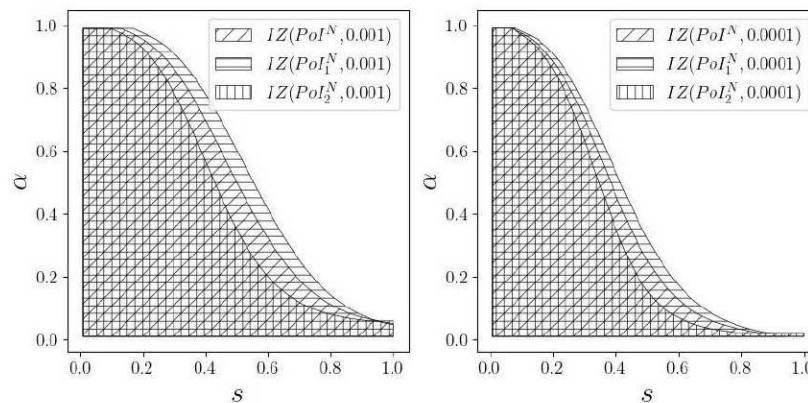


Рис. 1. Зоны безразличия для цены информации при  $\varepsilon$

**4. Заключение.** В работе рассмотрена теоретико-игровая модель динамики мнений Фридкина – Джонсена, в рамках которой игроки способны оказывать влияние на агентов в социальной сети. На основе результатов, полученных при проведении численного моделирования на сети клуба карате Закари, изучено влияние класса стратегий (программных и позиционных) на затраты игроков.

## Литература

1. DeGroot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No 345. P. 118–121.
2. Friedkin N. E., Johnsen E. C. Social influence and opinions // Journal of Mathematical Sociology. 1990. Vol. 15. No 3–4. P. 193–206.
3. Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Informatics. Control Processes. 2019. Vol. 15. No 1. P. 118–125.
4. Кареева Ю. С. Динамическая модель влияния на мнения участников социальной сети // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. № 1. С. 403–407.
5. Kareeva Y., Sedakov A., Zhen M. Influence in social networks with stubborn agents: From competition to bargaining // Applied Mathematics and Computation. 2023. Vol. 444. P. 1–19.
6. Rogov M. A., Sedakov A. A. Coordinated influence on the opinions of social network members // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. No 3. P. 528–547.
7. Zachary W. W., An information flow model for conflict and fission in small groups // Journal of Anthropological Research. 1977. Vol. 33. No 4. P. 452–473.
8. Basar T., Zhu Q. Prices of anarchy, information, and cooperation in differential games // Dynamic Games and Application. 2011. Vol. 1. No 1. P. 50–73.



УДК 519.8

Король М. М.

## Параллельные вычисления в задаче поиска равновесного распределения потоков в сетях

*Рекомендовано к публикации профессором Крылатовым А. Ю.*

**1. Введение.** Основной задачей нахождения равновесного распределения потоков является прогнозирование уровня загруженности дорог городской сети. Главное предположение заключается в том, что пользователи выбирают путь от точки отправления до точки прибытия, занимающий наименьшее время.

Таким образом, задача предполагает нахождение конкурентного равновесия по Вардропу, в котором время движения по используемым маршрутам одинаково и меньше времени движения по неиспользуемым маршрутам.

Доказано, что нахождение конкурентного равновесия по Вардропу эквивалентно решению задачи нелинейной оптимизации с линейными ограничениями [1, 2].

**2. Формулировка задачи поиска равновесного распределения потоков.** Представим городскую сеть, как ориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  – множество перекрестков, а  $E \subseteq V \times V$  – множество дорог между соседними перекрестками. Введем набор упорядоченных пар отправление – прибытие (origin – destination, OD)  $W \subseteq V \times V$ . Далее будем обозначать каждую пару  $w \in W$  как OD-пару, которая будет характеризоваться положительным спросом на передвижение  $F^w > 0$ . Маршрутом  $r^w$  для пары вершин  $w \in V \times V$  будем называть конечную последовательность дуг  $e \in E$ , каждая из которых начинается в конечной вершине предыдущей дуги, начальной вершиной первой дуги последовательности является первая вершина пары  $w$ , конечной вершиной последней дуги последовательности – вторая вершина пары  $w$ .

Для каждой OD-пары  $w \in W$  введем множество всех возможных маршрутов  $R^w$ . Для каждого маршрута  $r \in R^w$  зададим величину

---

*Король Максим Максимович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: baspresso@gmail.com, тел.: +7(963)802-68-76

потока  $f_r^w \geq 0$ . В дальнейшем, при построении алгоритма, будем рассматривать множество используемых маршрутов  $\widehat{R}^w \subset R^w : f_r^w > 0 \forall r \in \widehat{R}^w$ . Спрос на передвижение  $F^w > 0$  для OD-пары  $w \in W$  означает условие, что  $\sum_{r \in R^w} f_r^w = F^w$ . Для каждой дуги графа  $e \in E$  введем строго возрастающую функцию задержки  $t_e(\cdot)$ , для которой известно, что на множестве действительных чисел она принимает неотрицательные значения и имеет строго положительную производную. Определим величину потока для каждого ребра  $e \in E$

$$x_e = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R^w} f_r^w \delta_{e,r},$$

где

$$\delta_{e,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in r, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и функцию задержки на маршруте  $r \in R^w$  OD-пары  $w \in W$

$$t_r^w(f) = \sum_{e \in r} t_e(x_e),$$

где  $f = (\dots, f_r^w, \dots)$  представляет для всех OD-пар вектор распределения потоков вдоль всех возможных маршрутов. В итоге сформируем задачу нелинейной оптимизации:

$$\min_f \sum_{e \in E} \int_0^{x_e} t_e(u) du,$$

при ограничениях

$$\sum_{r \in R^w} f_r^w = F^w, \quad \forall w \in W,$$

$$f_r^w \geq 0, \quad \forall r \in R^w.$$

**3. Алгоритм распределения потоков.** Построение алгоритма поиска равновесного распределения базируется на работе [3], но основным отличием построения является алгоритм перераспределения потоков для OD-пары [4].

---

```

1:  $x \leftarrow \mathbb{O}$  &  $\widehat{R} \leftarrow \emptyset$  &  $y = (\mathbb{O}, \dots, \mathbb{O})$ 
2: for each  $w \in W$  do
3:    $p \leftarrow$  shortest path between OD-pair  $w$ 
4:    $\widehat{R}^w \leftarrow p$ 
5:   for each  $e \in p$  do
6:      $y_e^w \leftarrow F^w$ 
7:      $x_e \leftarrow x_e + y_e^w$ 
8:   end for
9: end for
10: while  $\exists p \notin \widehat{R}^w, w \in W : t_p^w(x) < t_r^w(x) \forall r \in \widehat{R}^w$  do
11:   for each  $w \in W$  do
12:      $p \leftarrow$  shortest path between OD-pair  $w$  on  $G$  congested by  $x$ 
13:      $\widehat{R}^w = \widehat{R}^w \cup p$ 
14:   end for
15:   while  $\exists r_1, r_2 \in \widehat{R}^w, w \in W : |t_{r_1}^w(x) - t_{r_2}^w(x)| > \varepsilon$  do
16:     for each  $w \in W$  do
17:        $x \leftarrow x - y^w$ 
18:        $y^w \leftarrow \mathbb{O}$ 
19:        $\widetilde{R} = \widehat{R}$ 
20:        $\widehat{R}^w = \emptyset$ 
21:       while  $\widetilde{R}^w \neq \emptyset$  do
22:          $p \leftarrow$  shortest path in  $\widetilde{R}$  with congestion  $x$ 
23:          $\widetilde{R}^w \leftarrow \widetilde{R}^w \setminus p$ 
24:         if  $\widehat{R}^w = \emptyset$  or  $t_p^w(x) < t_r^w(x) \forall r \in \widehat{R}^w$  then
25:            $\widehat{R}^w \leftarrow \widehat{R}^w \cup p$ 
26:            $x, y^w \leftarrow \mathfrak{E}(x, y^w, \widehat{R}^w)$ 
27:         end if
28:       end while
29:     end for
30:   end while
31: end while
32: return  $x$ 

```

---

При реализации алгоритма учитывалась невозможность вернуть распределение потоков вдоль каждого из маршрутов OD-пары и невозможность для некоторых функций задержки поддерживать работу с маршрутами, имеющими нулевой поток.

В строке 1 происходит первичная инициализация. Вектор  $x$  задает результирующие потоки на всех дугах  $e \in E$  графа  $G$ ,  $\widehat{R}$  – множество используемых маршрутов для всех OD-пар  $w \in W$ ,  $y$  – потоки на дугах графа для каждой OD-пары в отдельности, т. е.  $y_e^w = \sum_{r \in \widehat{R}^w} f_r^w \delta_{e,r}$ .

В строках 2–9, в цикле **for**, происходит поиск кратчайших маршрутов для каждой OD-пары  $w \in W$  и дальнейшее направление требуемых потоков  $F^w$  вдоль них.

В строках 10–31 происходит процесс добавления новых маршрутов и дальнейшего перераспределения потоков на них. Если учесть, что при проверке условия цикла **while** задержки  $t_r^w(x)$  на используемых маршрутах равны, то мы получим условие, которое будет проверять наличие равновесия по Вардропу, а следовательно, и того, что целевая функция достигла своего минимума.

В строках 11–14, в цикле **for**, для OD-пар происходит добавление маршрутов, задержки на которых меньше, чем на используемых маршрутах  $\widehat{R}^w$ .

В строках 15–30, в цикле **while**, с некоторой точностью  $\varepsilon$  происходит перераспределение потоков между  $\widehat{R}^w$ , т. е. в конце этого цикла для всех  $r_1, r_2 \in \widehat{R}^w, w \in W : |t_{r_1}^w(x) - t_{r_2}^w(x)| > \varepsilon$ .

В строках 16–29, в цикле **for**, поочередно обрабатываются все OD-пары. В строках 17–20 происходит запись информации о всех маршрутах  $\widehat{R}^w$  OD-пары  $w \in W$  в  $\widetilde{R}^w$ , также в 17–18 происходит «снятие» текущего потока  $y^w$ . В строках 21–28 цикла **while** происходит поочередная обработка маршрутов из  $\widetilde{R}^w$ . В 22-й строке с учетом  $x$  выбирается наикратчайший маршрут  $p$ . Если задержка на  $t_p^w(x)$ , при  $f_p^w = 0$ , будет меньше, чем у добавленных в  $\widehat{R}^w$ , то в 25-й строке  $p$  будет добавлен в  $\widehat{R}^w$  и в строке 26 произойдет перераспределение потоков  $\mathfrak{E}(x, y^w, \widehat{R}^w)$  на основе [3]. На каждой итерации цикла **while** можно гарантировать положительность потоков на всех маршрутах  $r \in \widehat{R}^w$  в результате перераспределения в строке 26. Также, на основе [5] можно утверждать, что в 26-й строке будет происходить уменьшение целевой функции.

#### 4. О применении параллельных вычислений в алгоритме.

Основной идеей внесения параллельных вычислений является наблюдение в строках 16–29 цикла **for**. На каждой итерации для каждой OD-пары  $w \in W$  вычисляется новый набор  $\hat{R}^w$  и распределение потоков  $y^w$ . С целью ускорения работы алгоритма предлагается параллельно вычислить сразу для нескольких OD-пар эти результаты, но не проводить изменение значений  $x, y^w$ . В итоге получится набор возможных изменений для нескольких OD-пар. Очевидно, что внесение изменения для одной из пар будет в точности повторять работу в строках 17–28. С другой стороны, внесение остальных изменений может иметь неочевидный результат. В данном случае предлагается проверить, приводит ли внесение изменения к уменьшению целевой функции.

**5. Заключение.** Основным результатом данной работы является построение алгоритма решения задачи равновесного распределения потоков. Дополнением к этому выступает внесение параллельных вычислений в алгоритм.

### Литература

1. Beckmann M., McGuire C., Winsten C. Studies in the Economics of Transportation. New Haven: Yale University Press, 1956. 226 p.
2. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 120–129.
3. Крылатов А. Ю. Сведение задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции с линейными ограничениями к задаче поиска неподвижной точки // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25. № 1. С. 75–97.
4. Krylatov A., Raevskaya A. Travel times equilibration procedure for route-flow traffic assignment problem // Learning and Intelligent Optimization. Springer, 2020. P. 68–79.
5. Devarajan S. A note on network equilibrium and noncooperative games // Transp. Res. Part B. 1981. Vol. 15. No 6. P. 421–426.

УДК 519.673

Косьянов Н. О.

## Применение управления с прогнозированием модели для поиска эффективных управлений задачи SIIR

*Рекомендовано к публикации доцентом Губар Е. А.*

**1. Введение.** Метод управления с прогнозированием модели (УПМ) впервые упоминается в статьях 1980-х годов [1]. Такой способ поиска эффективных управлений получил широкое применение в обрабатывающей промышленности [2, 3]. В наши дни он применяется для автоматического вождения [4], при добыче воды и полезных ископаемых, а также при дистилляции [5]. Однако УПМ можно применить не только к технологическим процессам, но также к информационным и эпидемическим. На сегодняшний день исследование моделей распространения вирусов внутри популяции [6, 7] является актуальным направлением прикладной математики. В данной работе рассматривается возможность применения управления с прогнозированием модели для поиска эффективных управлений в эпидемических моделях.

**2. Постановка задачи SIIR.** Комpartmentные эпидемические модели (compartment epidemic models) получили широкое распространение в современных исследованиях эпидемических процессов.

Рассмотрим двухвирусную эпидемическую управляемую модель SIIR (см. рис. 1), в которой в популяции выделены четыре группы особей: восприимчивые, заражённые вирусом 1, заражённые вирусом 2, с приобретённым иммунитетом [8]. Распространение вирусов в модели SIIR описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\delta_1 S I_1 - \delta_2 S I_2, \\ \dot{I}_1 = (\delta_1 S - \sigma_1 - u_1) I_1, \\ \dot{I}_2 = (\delta_2 S - \sigma_2 - u_2) I_2, \\ \dot{R} = (\sigma_1 + u_1) I_1 + (\sigma_2 + u_2) I_2. \end{cases} \quad (1)$$

---

*Косьянов Никита Олегович* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kosyanov.nik@gmail.com, тел.: +7(950)103-82-09

Здесь  $S$  – доля восприимчивых особей,  $I_1$  – доля заражённых вирусом 1 ( $V_1$ ),  $I_2$  – доля заражённых вирусом 2 ( $V_2$ ),  $R$  – доля выздоровевших особей,  $u = (u_1, u_2) \in U$  – некоторое допустимое управление, где  $U$  – подмножество кусочно-непрерывных функций. Параметр  $\delta_i$  отвечает за скорость заражения  $i$ -м вирусом, а  $\sigma_i$  – за скорость восстановления,  $i = \overline{1, 2}$ .

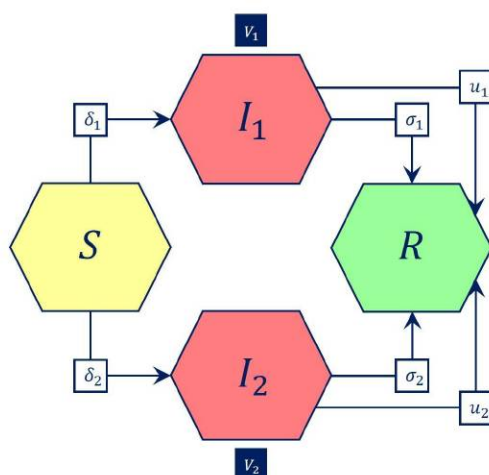


Рис. 1. Эпидемическая модель SIIR

Для системы (1) также задан целевой функционал (2), который представляет собой совокупность экономических затрат, связанных с эпидемией:

$$\tilde{J} = \int_0^T [f_1(I_1(t)) + f_2(I_2(t)) - g(R(t)) + h_1(u_1(t)) + h_2(u_2(t))] dt. \quad (2)$$

Необходимо найти такое управление  $u^*$  из множества допустимых управлений, которое доставляет минимум функционалу, т. е.

$$u^* = \min_{u \in U} \tilde{J}. \quad (3)$$

**3. Управление с прогнозированием модели.** Управление с прогнозированием модели – комплекс методов [9], которые, используя модель и известные состояния, прогнозируют будущее поведение процесса (см. рис. 2), а также с помощью численных алгоритмов определяют такое управление процессом (см. рис. 3), которое доставляет минимум заданному функционалу.

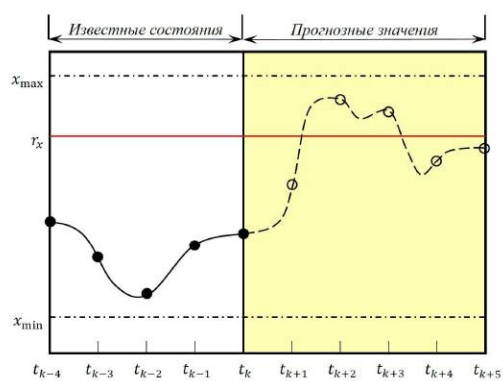


Рис. 2. Траектория в момент  $t_k$

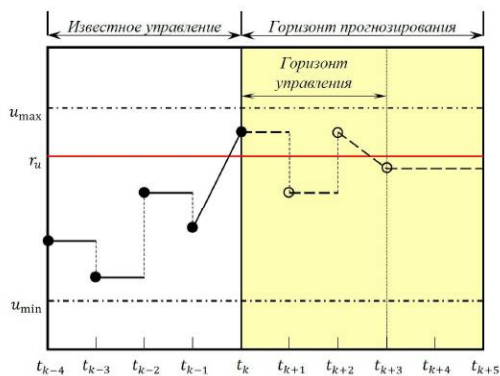


Рис. 3. Управление в момент  $t_k$



По умолчанию в методах УПМ использовался функционал

$$J = \int_{t_i}^T [\alpha \|x - r_x\|_2^2 + \beta \|u - r_u\|] dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (4)$$

где  $r_x$  и  $r_u$  – эталонные значения состояния и управления соответственно, а  $U$  – множество допустимых управлений, которое является подмножеством кусочно-непрерывных функций.

Современное программное обеспечение позволяет применять управление с прогнозированием модели и для функционалов произвольного вида.

**4. Моделирование.** Ниже представлены результаты моделирования эпидемического процесса с динамическими ограничениями на управление в пакете прикладных программ Scilab, а также эффективные стратегии управления, которые были получены с помощью MPC-контроллера – вычислительного инструмента, основанного на управлении с прогнозированием модели.

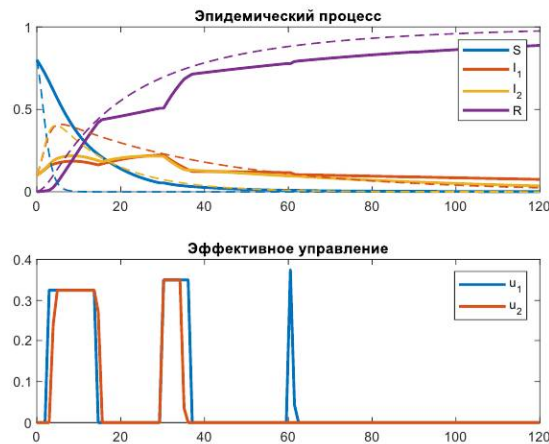


Рис. 4. Результаты моделирования

В ходе эксперимента было проведено моделирование (см. рис. 4) с параметрами  $\delta_1 = 0,256$ ,  $\delta_2 = 0,517$ ,  $\sigma_1 = 0,025$ ,  $\sigma_2 = 0,007$ ,  $k = 7$ ,

где  $k$  – среднее число контактов, верхнее ограничение на управление  $u_{max}$  менялось с 0,3 до 0,4.

Эксперимент показал, что эффективным является управление, которое включается на небольшие интервалы времени (до двух недель). Для  $u_1$  интервалы включения – [3, 14] и [30, 36]; для  $u_2$  – [5, 15], [30, 34] и [61, 62]. Используя такую стратегию, удалось снизить пиковую долю числа заболевших  $I_1$  с 0,41 до 0,3 и  $I_2$  с 0,39 до 0,29.

### Литература

1. Richalet J., Rault A., Testud J. L., Papon J. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes // *Automatica*. 1978. No 5. P. 413–428.
2. Ricker N. L., Subrahmanian T., Sim T. Case studies of model-predictive control in pulp and paper production // *IFAC Proceedings Volumes*. 1988. No 4. P. 13–22.
3. Cutler C. R., Hawkins R. B. Constrained multivariable control of a hydrocracker reactor // *American Control Conference*. Minneapolis: IEEE, 1987. P. 1014–1020.
4. Automated driving using model predictive control // MathWorks [Электронный ресурс]: URL:<https://www.mathworks.com/help/mpc/ug/automated-driving-using-model-predictive-control.html> (дата обращения: 12.02.2023).
5. Biegler L. T. A perspective on nonlinear model predictive control // *Korean Journal of Chemical Engineering*. 2021. No 7. P. 1317–1332.
6. Никитина А. А. Оценка параметров модели SQAIRD // *Процессы управления и устойчивость*. 2021. Т. 8. № 1. С. 440–449.
7. Сковородина Т. В., Губар Е. А. Моделирование эпидемического процесса с использованием модель NIMFA // *Процессы управления и устойчивость*. 2017. Т. 4. № 1. С. 676–680.
8. Gubar E., Taynitskiy V., Zhu Q. Optimal control of heterogeneous mutating viruses // *Games*. 2018. No 4. P. 1–18.
9. Morari M., Garcia C. E., Prett D. M. Model predictive control: Theory and practice // *IFAC Proceedings Volumes*. 1988. No 4. P. 1–12.

УДК 519.81

Кумачёва С. Ш., Новгородцев В. А., Кудин П. С.

## Об оптимизации решений с помощью прогнозного модуля в обучении с подкреплением

**1. Введение.** Область обучения с подкреплением в последние годы всё больше находит своё применение в финансовой сфере [1], в частности, в маркет-мейкинге, управлении портфелем финансовых активов, деятельности роботов-советников и т. д. [2]. В отличие от обучения с учителем, при котором модели сообщают, какие действия являются правильными во время обучения, модели обучения с подкреплением обнаруживают лучшие решения, которые принимает агент, для некоторых отсроченных вознаграждений посредством поиска методом проб и ошибок и использования обратной связи из окружающей среды [3, 4]. Моделируя среду и поведение агента, можно учитывать некоторые реалистичные ограничения на финансовых рынках, например, наличие комиссий, соответствующую моменту конъюнктуру, процентные ставки и т. д. [5]. При моделировании среды как некоторой аппроксимации рынка, необходимо учитывать огромное количество информации. Как правило, в качестве состояний используют технические индикаторы, фундаментальные показатели, результаты sentimentального анализа новостей или аналитики и другие [6, 7]. Вся эта информация берётся из прошлого и относится к завершившемуся периоду наблюдений. На данный момент существует не так много исследований, которые в качестве состояний среды включают прогнозы построенных моделей, хотя прогнозы могут вносить некоторые положительные корректировки в решения агента. Таким образом, основной задачей данного исследования является экспериментальная проверка гипотезы о том, что прогнозы динамики рынка могут положительно влиять на эффективность решений, принимаемых агентом.

---

*Кумачёва Сурия Шакировна* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: s.kumacheva@spbu.ru, тел.: +7(911)214-52-83

*Новгородцев Виталий Александрович* – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vit.novgorodtcev@mail.ru, тел.: +7(921)771-68-41

*Кудин Павел Сергеевич* – независимый исследователь, e-mail: accpavell@gmail.com, тел.: +7(911)009-47-27

**2. Обучение с подкреплением.** Обучение с подкреплением представляется марковским процессом [8] принятия решений  $(S, A, P, r)$  с дискретным временем  $t = \overline{0, T}$ , где  $S$  – множество состояний,  $A$  – множество действий,  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$  – вероятность перехода в состояние  $s_{t+1} \in S$  при совершении действия  $a_t \in A$  в состоянии  $s_t \in S$ ,  $r(s_t, a_t, s_{t+1})$  – функция наград, т. е. награда, получаемая при переходе среды в состояние  $s_{t+1}$  из состояний  $s_t$  при совершении действия  $a_t$ ,  $T$  – горизонт планирования. Политикой (стратегией)  $\pi(s_t)$  назовём распределение на множестве действий  $A$  в состоянии  $s_t \in S$ . Основная задача обучения с подкреплением – это поиск политики  $\pi$ , которая будет доставлять максимальную совокупную награду на промежутке времени  $[0, T]$ :  $G = \sum_{i=1}^T \gamma^{i-1} r(s_{i-1}, a_{i-1}, s_i)$ , где  $\gamma \in [0, 1]$  – коэффициент дисконтирования, действия  $a_{i-1}$  выбираются в соответствии со стратегией  $\pi(s_i)$ ,  $i = 0, T - 1$ .

**3. Описание эксперимента.** В качестве рынка, на котором будет действовать агент, выберем рынок акций США.

Для описания состояния рынка в момент времени  $t$  будем брать баланс агента, т. е. количество денег на его счете, количество акций биржевого фонда (Exchange-Traded Fund, ETF) [9] на торговом счете, набор значений индексов: индекса S&P500, индекса доллара, VIX, IXIC, и различных технических индикаторов на основе значений выбранных индексов. По полученным значениям составим вектор  $S_t$ . Тогда аппроксимированная динамика рынка будет описываться набором векторов  $S_t$ , который представим в виде матрицы состояний  $S$ , строками которой будут векторы  $S_t$ .

В качестве действий агента рассмотрим торговлю инвестиционного фонда ETF SPY. Пространство действий агента будем считать непрерывным на отрезке  $[-1, 1]$ . Действие, полученное из этого отрезка, умножается на число  $h_{\max}$ , которое обозначает количество акций ETF, потом округляется в меньшую сторону и далее покупается либо это количество, либо количество, на которое хватает баланса, аналогично с продажей.

В качестве алгоритмов обучения с подкреплением были выбраны самые популярные в данной области: Proximal Policy Optimization (PPO) [10], Actor to Critic (A2C) [11] и PPO со слоем Long short-term memory (LSTM). Кроме того, при торговле индексом DJIA они демонстрируют лучшие результаты, с точки зрения доходности (R) и коэффициента Шарпа (Sh) [12], по сравнению с алгоритмом Деер

Deterministic Policy Gradient (DDPG) и динамикой индекса Dow Jones Industrial Average.

Агент, совершая действие в момент времени  $t$ , получает некоторую награду в момент времени  $t + 1$ . В качестве награды, как правило, выбирают доходность портфеля агента за один шаг, включая комиссию за сделку, доходность за весь период или коэффициент Шарпа за некоторый промежуток времени [8]. В данном эксперименте интерпретируем награду как доходность на каждом шаге.

Также необходимо выбрать промежуток времени и разделить на две части: на первой части агент будет тренироваться, а на второй части будут отслеживаться результаты. В качестве такого промежутка выберем: начало – 19 марта 1999 года, конец – 27 декабря 2022 года. Тогда дни с 19 марта 1999 года по 5 июня 2019 года – тренировочные, а с 6 июня 2019 года по 27 декабря 2022 года – тестовые.

Суть исследования состоит в том, чтобы сравнить результаты действия агента в среде, где есть прогноз, с результатом в среде, где его нет. Основными мерами сравнения будут коэффициент Шарпа и общая доходность.

**4. Конструирование прогноза.** Прогноз на 10 шагов вперёд (две торговых недели) будет строиться по значениям логарифмированных доходностей индекса S&P500, индекса доллара, IXIC и VIX, с лагом в 40 шагов (значения за почти два последних торговых месяца). В качестве тренировочного промежутка возьмем период с 29 января 1993 года по 18 марта 1999 года. В качестве моделей выберем модели глубокого обучения LSTM [13] и BiLSTM [14]. Также возьмём модель бустинга `lightgbm` [15], но в качестве признаков у неё возьмём логарифмированные доходности индекса S&P500, построенные по 40 последним дням, и различные технические индикаторы, по которым составляются состояния среды.

После обучения на тренировочных данных модель делает свои прогнозы доходностей, начиная с 19 марта 1999 года, на 10 шагов вперёд в течение 50 шагов. Далее происходит обучение на всех предыдущих данных и конструируется следующий прогноз на 10 шагов вперёд в течение 50 шагов и т. д. до 27 декабря 2022 года. После этого все прогнозы собираются в матрицу, у которой строчка с индексом  $i$ , где  $i$  – некоторая дата между 19 марта 1999 года и 27 декабря 2022 года, состоит из прогнозов на пять дней вперёд, по-

следние прогнозы агрегированы в индикаторе, который отвечает за прогноз тренда, принимающий значение 1, если сумма прогнозных доходностей за десять дней больше 0, и  $-1$  – в противном случае. Также добавляется индикатор, который равен 1, если прогнозная доходность на 1 день вперёд больше 0, и  $-1$  – в противном случае. Полученная матрица объединяется с матрицей состояний  $S$ , описанной в пункте 3.

**5. Реализация эксперимента.** Для моделирования среды, действий агента, наград и процесса обучения агента используется библиотека FinRL [8], написанная на языке Python. Значения технических индикаторов были получены с использованием библиотеки `pandas_ta` [16], а данные по значениям индексов взяты на платформе Yahoo Finance. В качестве состояний среды были взяты следующие наборы технических индикаторов: `SP_ta` – технические индикаторы только для индекса S&P500 (всего 124 признака), `all_ta` – объединение технических индикаторов для всех индексов (всего 485 признака), `filtered` – отфильтрованное объединение технических индикаторов (всего 242 признака). Статистика прогонов методов обучения с подкреплением собиралась по трём разным настройкам случайных генераций. Весь код с данными доступен по ссылке [17].

**6. Результаты эксперимента.** В таблицах 1–3 приведены параметры моделей: `n_estimators` – количество деревьев в LightGBM, `n_leaves` – максимальное количество листьев в каждом дереве в LightGBM, `metric` – регрессионная метрика в LightGBM; `learning rate` – скорость обучения, `hidden size` – количество признаков в скрытом состоянии нейронной сети, `n_layers` – количество слоёв определённого типа нейронной сети, `n_epochs` – количество эпох в обучении; `Policy` – архитектура нейронной сети, которая используется в качестве функции политики, `gamma` – коэффициент дисконтирования.

Таблица 1. Параметры LightGBM

Модель	<code>n_estimators</code>	<code>learning rate</code>	<code>n_leaves</code>	<code>metric</code>
LightGBM	100	0,1	100	L1

Таблица 2. Параметры LSTM и BiLSTM

Модель	<code>hidden size</code>	<code>learning rate</code>	<code>n_layers</code>	<code>n_epochs</code>
LSTM	200	0,05	1	20
BiLSTM	100	0,05	1	10

**Таблица 3.** Параметры моделей PPO, A2C, PPO LSTM

Модель	Policy	learning rate	gamma	n_epochs
PPO	MlpPolicy	0,0001	0,99	50
A2C	MlpPolicy	0,0001	0,99	50
PPO LSTM	MlpLSTM	0,0001	0,99	50

В таблице 4 приведены усреднённые за весь период результаты работы прогнозных моделей, оцениваемых по среднеквадратической ошибке (mean squared error, MSE) и индикатору количества верно предсказанных доходностей (Accurate forecast) на один и на 10 дней вперёд.

**Таблица 4.** Результаты прогнозных моделей

Модель	MSE	Accurate forecast 10	Accurate forecast
LightGBM	0,000176	0,717	0,639
LSTM	0,000156	0,485	0,509
BiLSTM	0,000157	0,494	0,507

**Таблица 5.** Результаты работы PPO, A2C, PPO LSTM

	Без прогноза		С прогнозом lightgbm	
	Sh	R	Sh	R
<b>PPO</b>				
SP_ta	0,323	18,03	<b>0,339</b>	20,2
all_ta	0,241	10,93	<b>0,288</b>	12,16
filtered	0,303	15,06	<b>0,346</b>	21,1
<b>A2C</b>				
SP_ta	<b>0,289</b>	14,46	0,286	14,5
all_ta	0,205	7,93	<b>0,232</b>	9,93
filtered	<b>0,274</b>	14,13	0,264	14,16
<b>PPO LSTM</b>				
SP_ta	<b>0,456</b>	33	0,441	31,1
all_ta	<b>0,444</b>	31,5	0,328	19,93
filtered	0,33	20,46	<b>0,418</b>	28,7

В таблице 5 приведена статистика действий агента в средах с прогнозами и без. В качестве состояний сред выбирались различные комбинации индексов и технических индикаторов, а в качестве прогнозов выбран метод LightGBM, так как из таблицы 4 видно, что по индикатору верно предсказанных доходностей он лучше, чем LSTM и BiLSTM. Результативность действий измерялась по метрикам: коэффициент Шарпа Sh и общая доходность R.

**7. Интерпретация результатов.** В большинстве случаев для метода PPO включение точных прогнозов, у которых индикаторы количества верно предсказанных доходностей больше 0,5, дают прирост коэффициента Шарпа. Однако для метода PPO LSTM включение прогнозов для рассматриваемого промежутка времени обучения снизило этот коэффициент, несмотря на то, что этот метод продемонстрировал наилучший результат среди рассмотренных алгоритмов. Для метода A2C получились смешанные результаты. Отсюда следует, что включение прогнозов в состояние среды необходимо выполнять с осторожностью, поскольку точность прогнозных моделей оказывает сильное влияние на принятие агентом решений в течение длительного промежутка времени. Альтернативным решением по устранению данного недостатка является модификация алгоритма обучения с подкреплением или использование больше информации о прошлом или текущем состоянии рынка, например, анализ текстовой информации, снимков или использование фундаментальных показателей.

**8. Заключение.** В данной работе проведён эксперимент с целью проверки гипотезы о влиянии прогнозов динамики рынка на эффективность решений, принимаемых агентом, в контексте обучения с подкреплением. В ходе работы для построения прогнозов были применены LSTM, BiLSTM, LightGBM, а также использованы алгоритмы обучения с подкреплением PPO, A2C и PPO LSTM. Среда была сформирована на основе технических индикаторов и торгового баланса агента. Добавление в модель фундаментальных показателей и другой информации планируется в будущем. Сравнение происходило по коэффициенту Шарпа. Результаты эксперимента продемонстрировали, что наличие прогнозов может как увеличить значение коэффициента в случае PPO, так и уменьшить для PPO LSTM. Отметим также, что включение предсказаний при рассмотрении длительных промежутков времени имеет смысл только в случае достаточно точных прогнозных моделей. Однако, это является нетривиальной задачей, поэтому целесообразной альтернативой будет повышение результативности используемых алгоритмов обучения с подкреплением путём их модификации или увеличения общего количества используемой информации в процессе обучения.



## Литература

1. Tran M., Pham-Hi D., Bui M. Optimizing automated trading systems with deep reinforcement learning // *Algorithms*. 2023. Vol. 16. No 1. Art. no 23.
2. Hambly B.M., Xu R., Yang H. Recent advances in reinforcement learning in finance [Электронный ресурс]: URL: <https://ssrn.com/abstract=3971071> (дата обращения: 14.04.2023).
3. Cong L.W., Tang K., Wang J., Zhang Y. AlphaPortfolio: direct construction through deep reinforcement learning and interpretable AI [Электронный ресурс]: URL: <https://ssrn.com/abstract=3554486> (дата обращения: 14.04.2023).
4. Kolm P.N., Ritter G. Modern perspectives on reinforcement learning in finance [Электронный ресурс]: URL: <https://ssrn.com/abstract=3449401> (дата обращения: 14.04.2023).
5. Sun S., Wang R., An B. Reinforcement learning for quantitative trading // *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*. 2023. Vol. 14. No 3. Art. no 44.
6. Fischer T. G. Reinforcement learning in financial markets – a survey // *FAU Discussion Papers in Economics*. 2018. No 12.
7. Ye Y., Pei H., Wang B. et al. Reinforcement learning based portfolio management with augmented asset movement prediction states // *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2020. P. 1112–1119.
8. Liu X.-Y. FinRL-Meta: market environments and benchmarks for data-driven financial reinforcement learning [Электронный ресурс]: URL: <https://ssrn.com/abstract=4253139> (дата обращения: 14.04.2023).
9. Exchange-Traded Fund. Investopedia. [Электронный ресурс]: URL: <https://www.investopedia.com/terms/e/etf.asp> (дата обращения: 13.04.2023).

10. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P. et al. Proximal policy optimization algorithms [Электронный ресурс]: URL: <https://arxiv.org/abs/1707.06347> (дата обращения: 13.04.2023).
11. Mnih V., Badia A.P., Mirza M. et al. Asynchronous methods for deep reinforcement learning [Электронный ресурс]: URL: <https://arxiv.org/abs/1602.01783> (дата обращения: 13.04.2023).
12. Yang H., Liu X.-Y., Zhong S., Walid A. Deep reinforcement learning for automated stock trading: an ensemble strategy [Электронный ресурс]: URL: <https://ssrn.com/abstract=3690996> (дата обращения: 14.04.2023).
13. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory // *Neural Computation*. 1997. Vol 9. No 8. P. 1735–1780.
14. Siami-Namini S., Tavakoli N., Namin A.S. The performance of LSTM and BiLSTM in forecasting time series // 2019 IEEE International Conference on Big Data. Los Angeles, CA, USA. 2019. P. 3285–3292.
15. Ke G., Meng Q., Finley T. et al. LightGBM: a highly efficient gradient boosting decision tree // *Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'17)*. Red Hook, NY, USA. 2017. P. 3149–3157.
16. Pandas-ta [Электронный ресурс]: URL: <https://github.com/two-pirllc/pandas-ta> (дата обращения: 13.04.2023).
17. Код и данные по эксперименту [Электронный ресурс]: URL: <https://github.com/11Vital11/PM-Conf> (дата обращения: 13.04.2023).

УДК 519.832.3

Лориц Е. М.

## Эволюционная игра с учетом обратной связи с окружающей средой и мнениями игроков

*Рекомендовано к публикации доцентом Губар Е. А.*

**Введение.** Эволюционные игры являются развивающимся подразделом теории игр. Они могут применяться в биологии, медицине, моделировании общественных процессов и других областях, где рассматривается конфликт больших популяций. Актуальность данной темы подтверждается большим количеством работ, в основе которых лежит моделирование различных процессов с помощью эволюционных игр. Например, в работах [1, 2] изучаются эволюционные игры на сети, а в [3, 4] рассматривается зависимость состава популяции от состояния окружающей среды и общественного мнения.

В данной статье исследуется зависимость распределения агентов популяции по стратегиям в зависимости от окружающей среды, однако, вместо общей информированности агентов популяции о состоянии окружающей среды вводится в рассмотрение личное мнение агентов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим популяцию размера  $N$ , которая существует в ограниченном пространстве. Предполагается, что изменение популяции происходит в результате попарных случайных взаимодействий между ее агентами. Причем считается, что число агентов велико и каждый отдельный агент не влияет или оказывает незначительное воздействие на других агентов популяции. Еще одним предположением является то, что каждый из агентов популяции может использовать чистую стратегию  $i \in K$ ,  $K = \{1, 2\}$  в симметричной биматричной игре с матрицей выигрышей первого игрока  $A = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}$ , где  $R < T$  и  $S < P$ , что соответствует игре «дилемма заключенного» [5].

Обозначим  $\hat{x}_i(t) \geq 0$  – количество агентов, которые придерживаются чистой стратегии  $i \in K$ . Очевидно, что  $\sum_{i \in K} \hat{x}_i(t) = N$ .

---

*Лориц Екатерина Михайловна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077304@student.spbu.ru, тел.: +7(952)237-91-92

Состояние популяции определим как вектор  $x_N(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , где каждая компонента  $x_i(t) = \frac{\hat{x}_i(t)}{N}$  – это доля популяции, использующая чистую стратегию  $i$ . Очевидно, что  $x_1(t) + x_2(t) = 1$ . Обозначим  $x(t) = x_1(t)$ , тогда  $x_2(t) = 1 - x(t)$ .

Построим функцию

$$f_c(A, x) = Rx + S(1 - x), \quad (1)$$

как ожидаемый выигрыш агента популяции, использующего первую чистую стратегию и функцию

$$f_d(A, x) = Tx + P(1 - x), \quad (2)$$

как ожидаемый выигрыш агента популяции, использующего вторую чистую стратегию.

Динамика изменения состояния популяции описывается уравнением репликативной динамики

$$\dot{x} = x(1 - x)(f_c - f_d), \quad (3)$$

В данной работе исследуется влияние внешней среды на поведение агентов популяции, следуя [3]. В качестве окружающей среды могут быть рассмотрены ресурсы, доступные для агентов. Состояние среды будем описывать с помощью параметра  $n(t)$ ,  $n \in [0, 1]$ , где значение  $n = 0$  ( $n = 1$ ), если среда полностью истощена (пополнена).

Изменение состава популяции осуществляется с использованием репликативной динамики (3), где связь между популяцией и состоянием среды устанавливается с помощью матрицы выигрышей [3]

$$A_n = \begin{pmatrix} R_n & S_n \\ T_n & P_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ T_1 & P_1 \end{pmatrix} + (1 - n) \begin{pmatrix} R_0 & S_0 \\ T_0 & P_0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При  $n = 1$  игра определяется матрицей выигрышей  $A_1$ , где  $R_1 < T_1$  и  $S_1 < P_1$ . Аналогично, при  $n = 0$  игра определяется матрицей  $A_0$ , где  $R_0 > T_0$  и  $S_0 > P_0$ .

В статье [4] исследовано изменение состава популяции на основе использования репликативной динамики, которая учитывает обратную связь с окружающей средой и зависит от общественного мнения. При этом мнение отражает информированность агентов популяции о состоянии окружающей среде.

В настоящем исследовании, в отличие от [4], предполагается, что каждый агент обладает своим личным мнением о состоянии окружающей среды.

Рассмотрим случай, при котором агент может придерживаться одного из двух мнений  $m_1$  или  $m_2$  независимо от стратегии, которую он выбирает.

Обозначим  $\widehat{y}_i(t) \geq 0$  – количество агентов, которые придерживаются мнения  $m_i$ . Поскольку каждый агент обладает мнением  $\sum_{i \in \{1,2\}} \widehat{y}_i(t) = N$ . Распределение мнений в популяции определим как вектор  $y_N(t) = (y_1(t), y_2(t))$ , где каждая компонента  $y_i(t) = \frac{\widehat{y}_i(t)}{N}$  – это доля агентов популяции, придерживающихся мнения  $m_i$ . Очевидно, что  $y_1(t) + y_2(t) = 1$ . Обозначим  $y(t) = y_1(t)$ , тогда  $y_2(t) = 1 - y(t)$ .

Мнения распределяются с помощью динамики (mean dynamic) [6], построенной на основе протокола пересмотра решений  $p$  (revision protocol) [2]. В данной работе имитационный протокол выглядит следующим образом:

$$p_{ij} = [(i - j)y(xf_c(A_n, x)b_{11} + (1 - x)f_d(A_n, x)b_{12}) - (1 - y)(xf_c(A_n, x)b_{21} + (1 - x)f_d(A_n, x)b_{22})]_0^1, \quad (5)$$

где  $[z]_0^1 = \max(0, \min(z, 1))$ , т. е.  $p_{ij} \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  – номера мнений, а  $p_{ij}$  – вероятность переключения агента с мнения  $i$  на мнение  $j$ .

Введем в рассмотрение матрицу  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ , которая представляет собой степень доверия агента с мнением  $i$  агенту, который придерживается стратегии  $j$ . Матрица используется при подсчете ожидаемого выигрыша агента с учетом мнения  $m_1$  или  $m_2$ .

Величина  $y(xf_c(A_n, x)b_{11} + (1 - x)f_d(A_n, x)b_{12})$  – это ожидаемый выигрыш агента с мнением  $m_1$ , в зависимости от распределения агентов по чистым стратегиям 1 и 2 в популяции и состояния среды, которое учитывается в матрице  $A_n$ , вычисленной по формуле (4).

Аналогично,  $(1 - y)(xf_c(A_n, x)b_{21} + (1 - x)f_d(A_n, x)b_{22})$  – это ожидаемый выигрыш агента с мнением  $m_2$ .

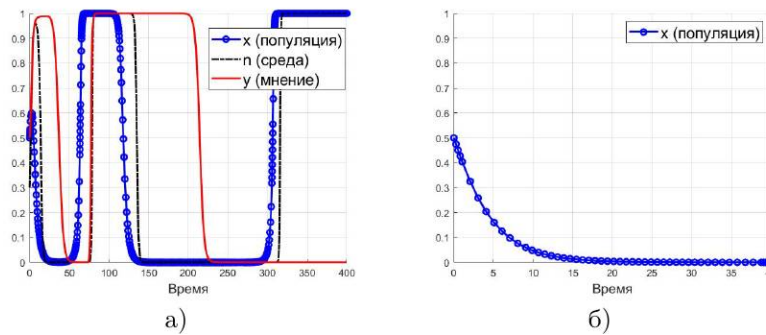
Тогда эволюционную игру с обратной связью окружающей среды

и мнением можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x)(f_c(y,x) - f_d(y,x)), \\ \dot{n} = n(1-n)(\theta x - (1-x)), \\ \dot{y} = (1-y)p_{21} - yp_{12}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $f_c(A_y, x)$  ( $f_d(A_y, x)$ ) вычисляется с помощью функции (1), (2) с матрицей  $A_y$ , полученной из матрицы (4) при  $n = y$ , и выражает ожидаемый выигрыш агента при использовании первой (второй) чистой стратегии с учетом доли  $x$  агентов популяции, использующих первую чистую стратегию и доли  $y$  агентов популяции, придерживающихся мнения  $m_1$ . Параметр  $\theta > 0$  в системе (6) это скорость, с которой агенты, использующие первую стратегию, восполняют окружающую среду. Вероятности  $p_{21}$  и  $p_{12}$  вычисляются по формуле (5).

**Численный эксперимент.** В рамках численного эксперимента использовались следующие параметры системы:  $\theta = 2$ ,  $x_0 = 0,5$ ,  $n_0 = 0,3$ ,  $y_0 = 0,5$ ,  $A_0 = \begin{pmatrix} 3,5 & 1 \\ 2 & 0,75 \end{pmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4,5 & 1,25 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ ,



**Рис. 1.** Иллюстрация состояния системы  
 а) с зависимостью от среды и распределения агентов между мнениями  
 б) без влияния среды и мнений; предполагается, что  $n = 1$

Как видно из графиков на рис. 1а) в начальный момент времени доля агентов, использующих первую чистую стратегию убывает до нуля, в то время как система начинает обогащаться. Но при увеличении доли агентов популяции, использующих вторую чистую стратегию, среда убывает до нуля. При изменении состояния системы,

наблюдается изменение среды, которое влечет за собой изменение мнения агентов. В это же время, изменение среды и мнения влечет за собой изменение предпочитаемой стратегии в популяции. После нескольких колебаний система приходит в состояние равновесия, где все игроки придерживаются первой чистой стратегии, мнения  $m_2$ , а среда восстановлена, т. е.  $n = 1$ .

На рис. 1б) отслеживается стремительный переход агентов популяции с первой чистой стратегии на вторую, что подтверждено теорией [5], поскольку для игры «дилемма заключенного» характерно одно состояние равновесия по Нэшу, стремление к которому и можно наблюдать на рис. 1б).

**Заключение.** В работе показано, что с помощью мнения агентов можно влиять на состояние системы и изменять положение равновесия. В дальнейшем предполагается провести эксперименты для игр с матрицами выигрыша, характерными для игры «ястреб-голубь» и «координационной игры». Кроме того, планируется решить задачу поиска оптимального управляющего воздействия на динамику системы.

## Литература

1. Курносых З. А., Губар Е. А. Моделирование эволюционной игры с учетом сетевой структуры // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 631–635.
2. Riehl J. R., Cao M. Control of stochastic evolutionary games on networks // IFAC. 2015. Vol. 48. Iss. 22. P. 76–81.
3. Weitz J. S., Eksin C., Paarporn K. et al. An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game-environment feedback // PNAS. 2016. Vol. 113. No 47. P. E7518–E7525.
4. Paarporn K., Eksin C. et al. Optimal control policies for evolutionary dynamics with environmental feedback // IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2018. P. 1905–1910.
5. Weibull J. W. Evolutionary Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1995. 265 p.
6. Sandholm W. H. Population Games and Evolutionary Dynamics. Cambridge: MIT Press, 2010. 616 p.

УДК 519.834

Немцев Д. Ю.

## Среднее решение дерева как мера центральности вершин графа

*Рекомендовано к публикации доцентом Тур А. В.*

**1. Введение.** В сетевом анализе и в теории графов одним из актуальных вопросов является определение количественной оценки важности вершин и ребер. В связи с этим концепция сетевой центральности широко изучается в литературе. В последнее время популярным стало применение методов кооперативной теории игр для определения центральности вершин в графе [1–6].

Целью настоящего исследования является получение метода вычисления центральности вершин в графе на основе среднего решения дерева кооперативной игры. Также рассмотрен и адаптирован алгоритм из [2], использующий производящие функции, для вычисления центральности вершин согласно введенной мере.

**2. Мера центральности для графов как решение кооперативной игры.** Для определения центральности вершин графа успешно используются методы кооперативной теории игр. В таких задачах обычно рассматривается игра с ограниченной кооперацией, представленная неориентированным коммуникационным графом. При этом вершины графа представляют игроков, а ребра – связи между ними. Игроки могут взаимодействовать напрямую, только если они связаны. Также вводится характеристическая функция и в качестве меры центральности выбирается некоторое известное кооперативное решение этой игры.

Для построения характеристической функции в кооперативной игре на графе рассматривается метод, предложенный в [2].

Пусть задан неориентированный граф  $g = (N, E)$ , который состоит из множества вершин  $N$  и множества ребер  $E$ . Для графа  $g$  необходимо дать количественную оценку важности (центральности) вершин. Введем кооперативную игру  $\langle N; v \rangle$ , в которой вершины графа ассоциируются с игроками, а ребро графа  $ij$  означает, что игроки

---

*Немцев Даниил Юрьевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069254@student.spbu.ru, тел. +7(981)757-06-13



$i$  и  $j$  могут взаимодействовать напрямую, если только  $ij \in E$ .

Рассмотрим игру, в которой граф  $g$  является деревом, состоящим из  $n$  вершин, а характеристическая функция задается как в [2]

$$v(S) = \sum_{k=1}^L a_k r^k, \quad (1)$$

где  $S \subset N|E$ ,  $L$  – максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции,  $a_k$  – число путей длины  $k$  в данной коалиции. Считаем, что  $v(i) = 0, \forall i \in N$ . Под  $N|E$  понимается множество всех связных компонент в  $g$ .

Введенную таким образом характеристическую функцию можно интерпретировать следующим образом. Каждая прямая связь – путь длиной 1 – приносит игрокам доход  $r$ , где  $0 \leq r \leq 1$ . За каждый путь длиной 2 коалиция получает доход  $r^2$ , за путь длиной 3 –  $r^3$  и т. д.

Дележом в игре  $\langle N; v \rangle$  называется вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ , удовлетворяющий условиям:  $\sum_{i=1}^n \xi_i = v(N), \xi_i \geq v(i), \forall i \in N$ .

Теоретико-игровой подход в определении меры центральности вершин графа предполагает, что в качестве количественной оценки важности вершины можно выбрать выигрыш, который получает игрок, соответствующий этой вершине, в описанной кооперативной игре. Таким образом, некоторый дележ в игре задает оценки для вершин графа.

**3. Среднее решение дерева.** Среднее решение дерева для игр с кооперативной структурой, задаваемой неориентированным графом без циклов, рассмотрено в работах [8, 9]. В изначальном графе  $g$  рассматриваются  $|N|$  деревьев с корнями в каждой из вершин. Ребра в этих деревьях делают ориентированными так, чтобы из корня можно было попасть в любую другую вершину. Затем в каждом дереве находятся выплаты каждому игроку, как разница между выигрышем компоненты, образованной из этого игрока и всех ее последователей, и выигрышами всех связных компонент, полученных из предыдущей удалением рассматриваемого игрока.

Определим  $T(i)$  как ориентированное дерево с корнем в точке  $i \in N$ , полученное из графа  $g$  сменой вида ребер. Последователем вершины  $i$  в дереве будем называть любую вершину, в которую можно попасть из  $i$  не поднимаясь вверх (считаем, что дерево подвесили за корень). Пусть  $S_{T(i)}^j$  – коалиция с неориентированными ребрами,

образованная из вершины  $j$  и всех ее последователей в дереве  $T(i)$ ,  $g_{T(i)}^j$  – все потомки вершины  $j$  в дереве  $T(i)$ .

Приведем определение среднего решения дерева, сформулированное в [9].

**Определение.** Средним решением дерева в игре  $\langle N; v \rangle$  на графе  $g$  называется дележ вида

$$AT_j(v, g) = \frac{1}{|K|} \sum_{i \in K} \left( v(S_{T(i)}^j) - \sum_{h \in g_{T(i)}^j} v(S_{T(i)}^h) \right),$$

где  $j$  – это игрок, лежащий в компоненте связности  $K$  графа  $g$ .

### 3.1. Среднее решение дерева как мера центральности.

Среднее решение дерева можно применять в качестве дележа, определяющего центральность вершин в графе.

**Утверждение.** В игре  $\langle N; v \rangle$  с характеристической функцией, заданной правилом (1), среднее решение дерева имеет вид

$$AT_j(v, g) = \frac{1}{|K|} \sum_{i \in K} \sum_{k=1}^{L_{S_{T(i)}^j}} A_{S_{T(i)}^j, k}^j r^k,$$

где  $j$  – это игрок, лежащий в компоненте связности  $K$  графа  $g$ ,  $L_{S_{T(i)}^j}$  – длина максимального пути в коалиции  $S_{T(i)}^j$ ,  $A_{S_{T(i)}^j, k}^j$  – число путей длины  $k$  в коалиции  $S_{T(i)}^j$ , содержащих игрока  $j$ .

Доказательство очевидно. Если рассмотреть любое дерево и удалить в нем корень  $p$ , то в полученном графе исчезнут только пути, содержащие  $p$ . Тогда в изначальном дереве выигрыш

$$p = \sum_{k=1}^{L_{S_{T(i)}^j}} A_{S_{T(i)}^j, k}^j r^k.$$

### 3.2. Алгоритм вычисления среднего решения дерева.

В работе [2] показано, что для вычисления числа путей заданной длины, проходящих через вершину, можно использовать производящие функции. Адаптируем этот метод под вычисление  $A_{S_{T(i)}^j, k}^j$ .

Рассмотрим дерево  $T(p)$ , полученное из  $g = (N, E)$  с корнем в вершине  $p$ . Введем в рассмотрение производящие функции

$$\varphi_r^p(x) = \sum_{k=1}^L \alpha_{k,r}^p x^k, \quad \psi_r^p(x) = \sum_{k=1}^L \beta_{k,r}^p x^k,$$

где  $\alpha_{k,r}^p$  – число путей, состоящих из  $k$  игроков (длины  $k - 1$ ), содержащих  $r$  в качестве крайней вершины, в коалиции  $S_{T(p)}^r$ ,  $\beta_{k,r}^p$  – число путей, состоящих из  $k$  игроков (длины  $k - 1$ ), содержащих вершину  $r$ , в коалиции  $S_{T(p)}^r$ .

Вычислим производящие функции рекуррентно. Вначале определим в финальных вершинах  $q$  дерева  $T(p)$ :

$$\varphi_q^p(x) = \psi_q^p(x) = x.$$

Обозначим через  $M$  число игроков на максимальном пути  $\{p, \dots, q\}$ . Рассмотрим вершины дерева  $q$ , для которых число игроков на пути  $\{p, \dots, q\}$  равно  $M - 1$ . Положим

$$\varphi_q^p(x) = x \left( 1 + \sum_{i=1}^d \varphi_{q_i}^p(x) \right),$$

$$\psi_q^p(x) = x \left( 1 + \sum_{i=1}^d \varphi_{q_i}^p(x) + \sum_{i \neq j}^d \varphi_{q_i}^p(x) \varphi_{q_j}^p(x) \right),$$

где сумма берется по всем потомкам  $q_i, q_j$ , где  $i, j = 1, \dots, d$ , вершины  $q$ . Так продолжаем до тех пор, пока  $M \neq 1$ . В итоге получаем производящие функции для каждой вершины дерева  $T(p)$ .

Применяя данный алгоритм к дереву  $T(i)$ ,  $i \in N$ , получим, что  $A_{S_{T(i)}^j, k}^j = \beta_{k,j}^i$ .

**4. Заключение.** В качестве меры центральности вершин графа предложено рассматривать среднее решение дерева кооперативной игры на графе. Алгоритм, использующий аппарат производящих функций, адаптирован для нахождения этого решения.

## Литература

1. Skibski O., Michalak T. P., Rahwan T. Axiomatic characterization of game-theoretic centrality // *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2018. Vol. 62. P. 33–68.
2. Mazalov V. V., Trukhina L. I. Generating functions and the Myerson vector in communication networks // *Disc. Math. and Appl.* 2014. Vol. 24. No 5. P. 295–303.
3. Mazalov V., Avrachenkov K., Trukhina L., Tsynguev B. Game-theoretic centrality measures for weighted graphs // *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145. No 3. P. 341–358.
4. Мазалов В. В., Хитрая В. А. Модифицированное значение Майерсона для определения центральности вершин графа // *Математическая теория игр и ее приложения*. 2019. Т. 11. № 2. 2019. С. 19–39.
5. Li Y., Liu J., Petrosian O. Game theoretical approach for centrality measures in social network study // *Процессы управления и устойчивость*. 2020. Т. 7. № 1. С. 438–442.
6. Немцев Д. Ю., Тур А. В. Позиционное значение как мера центральности вершин графа // *Процессы управления и устойчивость*. 2022. Т. 9. № 1. С. 419–426.
7. Myerson R. B. Graphs and cooperation in games // *Mathematics of Operations Research*. 1977. Vol. 2. P. 225–229.
8. Avrachenkov K. E., Kondratev A. Y., Mazalov V. V., Rubanov D. G. Network partitioning algorithms as cooperative games // *Computational Social Networks*. 2018. Art. no. 11.
9. Herings J. J., van der Laan G., Talman D. The average tree solution for cycle-free graph games // *Games and Economic Behavior*. 2008. Vol. 62. P. 77–92.

УДК 519.83

Писарева А. М.

## Построение стратегии наказания в повторяющихся играх «дилемма заключенного»

*Рекомендовано к публикации профессором Парилиной Е. М.*

**1. Введение.** В повторяющихся играх с известным количеством повторений игры возникает проблема поддержки кооперативного поведения игроков, поскольку игроки могут отклоняться в конце игры, уклоняясь от наказания. Продолжительность игры очевидно влияет на устойчивость сотрудничества. Чаще всего кооперативное поведение не является равновесием по Нэшу, потому возникает вопрос о создании механизма, который позволит сделать кооперативный вариант игры выгодным для игроков, т. е. игроки должны убедиться, что кооперация будет выгодна и реализована на всех шагах игры [1]. Кооперативное поведение игроков также является предметом исследования многих авторов, особенно устойчивость кооперации, когда взаимодействие игроков происходит на протяжении некоторого времени [2, 3]. В этой статье рассмотрена повторяющаяся игра «дилемма заключенного» [4, 5] с дополнительными правилами, удерживающими игроков от отклонения от кооперации до истечения срока их действия. Пусть построения для повторяющейся игры «дилемма заключенного» будут основаны на двух новых правилах:

A1) Если один из игроков отклонится от кооперативного поведения, то он будет наказан на период с заданной продолжительностью  $h$ , которая известна всем игрокам.

A2) Если наблюдается более одного отклонения от кооперативного поведения, то игра будет разыгрываться в некооперативном варианте до конца игры.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим «дилемму заключенного» для двух игроков, каждый из которых делает выбор – « $C$  – кооперироваться» или « $N$  – не кооперироваться», с матрицей выплат

---

*Писарева Алёна Максимовна* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st055836@student.spbu.ru, тел.: +7(911)295-83-73

	$C$	$N$
$C$	$(a, a)$	$(c, b)$
$N$	$(b, c)$	$(d, d)$

где  $b > a > d > c$  и  $2a > c + b$ .

Пусть игра повторяется в периоды  $\mathbf{T} = \{1, \dots, T\}$  и  $p$  – коэффициент дисконтирования, одинаковый для всех игроков,  $p \in (0, 1)$ . Желаемая ситуация или набор стратегий игроков состоит в том, что оба игрока выбирают стратегию  $C$  в любой период  $t \in \mathbf{T}$ . В игре единственное равновесие по Нэшу: оба игрока выбирают стратегию  $N$  в любой период  $t \in \mathbf{T}$ .

Выигрыш игрока  $i$  при кооперации определяется как

$$J_i^* = a \frac{1 - p^T}{1 - p}, \quad i = 1, 2.$$

Выигрыш игрока  $i$  при равновесии по Нэшу равен

$$J_i^{nc} = d \frac{1 - p^T}{1 - p}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть  $h$  – количество раундов, которое будет длиться наказание, т. е. игроки в период наказания будут играть равновесные по Нэшу стратегии.

Не умаляя общности, можно считать, что второй игрок решил отклониться в момент времени  $t + 1$ .

Рассчитаем, сколько получит первый игрок за всю игру:

$$S_1 = \frac{a(1 - p^t)}{1 - p} + cp^t + \frac{dp^{t+1}(1 - p^h)}{1 - p} + \frac{ap^{t+1+h}(1 - p^{T-h-t-1})}{1 - p}.$$

Второй игрок при этом получит

$$S_2 = \frac{a(1 - p^t)}{1 - p} + bp^t + \frac{dp^{t+1}(1 - p^h)}{1 - p} + \frac{ap^{t+1+h}(1 - p^{T-h-t-1})}{1 - p}.$$

Для нахождения продолжительности периода наказания запишем два условия:

Б1) Игрок, не отклоняющийся от кооперативного поведения, когда второй игрок от него отклоняется на шаге  $t+1$ , получает дисконтированный выигрыш не меньше, чем выигрыш, который он может получить, сам отклонившись от кооперации после окончания наказания.

Б2) Наказание должно длиться столько, чтобы выигрыш игрока при отклонении не превышал выигрыш, получаемый при кооперации на всех этапах игры.

**Утверждение.** *Продолжительность наказания игрока, отклонившегося от кооперации, удовлетворяющая условиям Б1), Б2), находится в интервале*

$$\begin{cases} h \leq T - t - 1 - \log_p \left( \frac{a+b(p-1)-dp}{a-d} \right), \\ h \geq \log_p \left( \frac{a+b(p-1)-dp}{a-d} \right) - 1, \end{cases} \quad (1)$$

если выполнено:

$$T - t \geq 2 \log_p \left( \frac{a + b(p-1) - dp}{a-d} \right). \quad (2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим условие Б1. Напомним, что следуя правилу А2, после того, как один игрок отклонится, то любое второе отклонение в игре приведет к тому, что кооперации не будет до конца игры. Первый игрок, при этом желая максимизировать свой выигрыш, может захотеть отклониться сразу после окончания наказания (получения мгновенной прибыли за счет коэффициента дисконтирования будущих платежей). Предположение Б1 делает этот шаг невыгодным.

Тогда условие Б1 можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{ap^{t+1+h}(1-p^{T-h-t-1})}{1-p} &\geq bp^{t+1+h} + \frac{dp^{t+2+h}(1-p^{T-h-t-2})}{1-p}, \\ \frac{1-p^{T-h-t-1}}{1-p} &\geq \frac{b-d}{a-d} = k > 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Наложим условие на коэффициент дисконтирования

$$\frac{k-1}{k} < p < 1. \quad (4)$$

Выражая  $h$  из (3), получаем

$$h \leq T - t - 1 - \log_p(kp - k + 1).$$

Условие Б2 можно записать таким образом

$$(b - a)p^t \leq \frac{(a - d)p^{t+1}(1 - p^h)}{1 - p},$$

получаем  $h \geq \log_p(pg + p - g) - 1$ , где  $g = \frac{b-a}{a-d}$ .

**Замечание.** Условие (2) или ограничение на  $t$  можно интерпретировать так: если игрок отклонился в момент  $t + 1$  и  $t$  такое, что условие выше не выполняется?, т. е.  $h$  будет соответствовать  $\emptyset$ , то дальнейшая кооперация невозможна, и игроки будут играть оставшиеся раунды, используя равновесие по Нэшу. Регулирование этого случая происходит за счет распределения платежей в течение всей игры.

**3. Пример.** Пусть матрица выигрышей в игре имеет вид

$$\begin{bmatrix} (10, 10) & (-1, 15) \\ (15, -1) & (1, 1) \end{bmatrix}.$$

Ограничение на дисконтирующий фактор получается из (4) и принимает вид  $p > \frac{5}{14}$ .

Результаты, полученные для игр при различных значениях параметров, представлены в таблице.

**Таблица.** Вычисления для повторяющейся игры «дилемма заключенного»

$p$	$T$	$t$	Нижняя граница $h$	Верхняя граница $h$	$h$
0,99	10	1	0,5599	6,44	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
0,99	10	4	0,5599	3,44	{1, 2, 3}
0,99	10	6	0,5599	1,44	{1}
6/14	10	6	1,59	0,406	$\emptyset$
6/14	10	2	1,59	4,406	{2, 3, 4}
6/14	10	3	1,59	3,406	{2, 3}
11/28	10	2	2,0935	3,906	{3}
11/28	10	3	2,0935	2,9	$\emptyset$



**4. Заключение.** Разработана схема построения оптимального наказания игроков в повторяющихся играх «дилемма заключенного» при отклонении игроков от кооперативного поведения. В дальнейшем по этому направлению может быть разработано правило или случайный механизм выбора продолжительности наказания, если «оптимальных» значений несколько.

### Литература

1. Parilina E. M., Zaccour G. Payment schemes for sustaining cooperation in dynamic games // *Journal of Economic Dynamics & Control*. 2022. Vol. 139. Art. no 104440.
2. Pankratova Y. B., Petrosyan L. A. New characteristic function for multistage dynamic games // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. № 4. С. 316–324.
3. Suna P., Parilina E. M., Gaob H. W. Two-stage network games modeling the Belt and Road Initiative // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2022. Т. 18. № 1. С. 87–98.
4. Grinikh A. L., Petrosyan L. A. Cooperative n-person prisoner's dilemma on a network // *Contributions to Game Theory and Management*. 2021. Vol. 14. P. 122–126.
5. Mailath G. J., Samuelson L. Repeated games and reputations: long-run relationships. Oxford University Press, 2006. 645 p.

УДК 519.2

Ульянова Д. С.

## Статистический анализ смертности от туберкулеза

*Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.*

**1. Введение.** Несмотря на то, что первое лекарство от туберкулеза было обнаружено в 1943 году, а в 1946 году его начали широко использовать, туберкулез остается в списке ведущих причин смертности в мире. Туберкулез, как и многие инфекционные заболевания, строго локализован: по данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) высокие показатели заболеваемости и смертности характерны для наименее развитых и развивающихся стран (87% новых случаев) [1].

Исходя из четкой локализованности туберкулеза, необходимо рассмотреть социально-экономические факторы, которые характеризуют страны с наибольшей смертностью от данного заболевания.

**2. Страны с наивысшей смертностью от туберкулеза.** По данным ВОЗ на 2022 год девятнадцать стран, такие как Конго, Непал, Танзания, Бангладеш и другие [1], имеют наивысшую смертность от туберкулеза.

Главной целью данной работы является выявление наиболее значимых социально-экономических факторов, оказывающих наибольшее влияние на смертность от туберкулеза.

**3. Построение моделей для анализа смертности от туберкулеза.** Оценка влияния 8 факторов на смертность от туберкулеза описывается при помощи следующей модели:

$$y_i = f(x_{1i}, \dots, x_{8i}),$$

где  $i$  – номер исследуемого региона;  $y_i$  – смертность от туберкулеза в  $i$ -м регионе, рассчитанная на 100 тыс. чел;  $x_{1i}$  – показатель индекса человеческого развития (human development index), рассчитываемый Программой развития ООН, который характеризует развитие человека, качество и уровень жизни во всех странах

---

Ульянова Дарья Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076677@student.spbu.ru, тел.: +7(911)446-49-79

мира,  $x_{1i} \in (0, 1)$ ;  $x_{2i}$  – показатель валового внутреннего продукта на душу населения, измеряется в долларах США;  $x_{3i}$  – плотность населения (число жителей, приходящееся на 1 км<sup>2</sup>);  $x_{4i}$  – уровень безработицы (отношение численности безработных к численности рабочей силы);  $x_{5i}$  – доля годовалых детей, которая получила вакцинацию от туберкулеза бациллой Камельта – Герена (БЦЖ);  $x_{6i}$  – доля людей, страдающих расстройством, связанным с употреблением наркотиков относительно населения страны;  $x_{7i}$  – доля людей, страдающих расстройством, связанным с употреблением алкоголя, по странам, относительно населения страны;  $x_{8i}$  – доля людей, которым поставлен диагноз депрессии за рассматриваемый год по странам относительно общего населения страны [2].

Для построения модели использовался метод множественной регрессии.

### 3.1. Модель множественной регрессии для 1995 года.

Процесс построения модели для 1995 года с динамикой факторов и количественных показателей отражен в таблице, которая иллюстрирует этапы множественного регрессионного анализа. Каждому этапу соответствует строка. Например, первая строка, содержащая все рассмотренные факторы, позволяет оценить построенное уравнение регрессии. О тесной взаимосвязи между объясняемой переменной  $y$  и факторами  $x_{1i}, \dots, x_{8i}$  говорит множественный коэффициент корреляции  $R = 0,99$ , близкий к единице. Коэффициент детерминации  $R^2 = 0,981$  показывает «объяснимость» переменной  $y$  исходными факторами на 98% и высокое качество аппроксимации, а скорректированный коэффициент детерминации,  $R_{adj}^2 = 0,879$ , используемый для оценки регрессионной модели с большим количеством объясняемых факторов, говорит, что уравнение регрессии на 88% объясняет долю дисперсии  $y$ .

**Таблица.** Поэтапный процесс построение модели 1995 года

Номера факторов	$R$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$p - value(F)$
$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{5i}, x_{6i}, x_{7i}, x_{8i}$	0,99	0,98	0,88	$7,3 \cdot 10^{-8}$
$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{5i}, x_{6i}, x_{8i}$	0,99	0,98	0,89	$7,6 \cdot 10^{-9}$
$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{5i}, x_{8i}$	0,99	0,98	0,89	$6,9 \cdot 10^{-10}$
$x_{1i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{5i}, x_{8i}$	0,99	0,98	0,90	$5,9 \cdot 10^{-11}$
$x_{1i}, x_{3i}, x_{5i}, x_{8i}$	0,99	0,98	0,91	$1,3 \cdot 10^{-11}$
$x_{1i}, x_{5i}, x_{8i}$	0,99	0,97	0,91	$1,6 \cdot 10^{-12}$
$x_{5i}, x_{8i}$	0,99	0,97	0,91	$2,1 \cdot 10^{-13}$

О статистической значимости модели и о том, что модель верно отображает общий характер изменений, можно судить по критерию статистической значимости Фишера:

$$p\text{-value}(F) = 7,29 \cdot 10^{-8} < \alpha,$$

где  $\alpha = 0,05$  – уровень значимости.

Для данного уровня значимости  $\alpha$  проводим пошаговую регрессию: исключаем факторы, коэффициенты которых статистически незначимы, проверка производится по критерию Стьюдента (отбрасывается фактор, коэффициент которого с наибольшим значением  $p\text{-value}$ ).

$$y = 0,026x_5 + 0,00082x_8.$$

Таким образом, получаем итоговое уравнение регрессии (ему соответствует последняя строка таблицы). Ошибки данной модели представлены на рис. 1. По графику автокорреляция и гетероскедастичность отсутствуют. Анализ остатков показал, что они нормально распределены по критерию Колмогорова – Смирнова и тесту Харке – Бера, автокорреляция в остатках отсутствует по критерию Дарбина – Уотсона, остатки удовлетворяют условиям теоремы Гаусса – Маркова.

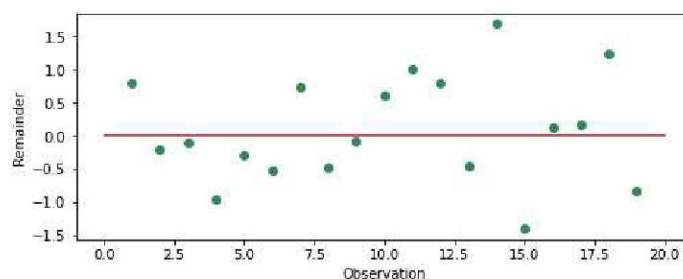


Рис. 1. Ошибки модели 1995 года

**3.2. Модели множественной регрессии для 1998 – 2016 годов.** Аналогично построим модели для 1998, 2001, 2004, 2007, 2010, 2013 и 2016 годов.

Модель 1998 года

$$y = 0,023x_5 + 0,009x_8, \quad p\text{-value}(F) = 1,35 \cdot 10^{-13}.$$

Модель 2001 года

$$y = 0,029x_5 + 0,007x_8, \quad p\text{-value}(F) = 9,67 \cdot 10^{-14}.$$

Модель 2004 года

$$y = 0,053x_5, \quad p\text{-value}(F) = 4,67 \cdot 10^{-15}.$$

Модель 2007 года

$$y = -0,002x_3 + 0,055x_5 - 0,0018x_6, \quad p\text{-value}(F) = 1,94 \cdot 10^{-15}.$$

Модель 2010 года

$$y = 0,05x_4 + 0,044x_5, \quad p\text{-value}(F) = 1,94 \cdot 10^{-15}.$$

Модель 2013 года

$$y = 3,96x_1 - 0,0017x_3 + 0,0007x_8, \quad p\text{-value}(F) = 6 \cdot 10^{-13}.$$

Модель 2016 года

$$y = -0,0015x_3 + 0,04x_5 + 0,0003x_8, \quad p\text{-value}(F) = 3,17 \cdot 10^{-16}.$$

Ошибки моделей каждого года нормально распределены (критерий Колмогорова – Смирнова и тест Харке – Бера), удовлетворяют условиям теоремы Гаусса – Маркова, и в них отсутствует автокорреляция (критерий Дарбина – Уотсона).

**4. Результаты исследования.** В работе рассмотрены 8 факторов, которые могли влиять на смертность от туберкулеза в наименее развитых и развивающихся странах. Результаты исследования представлены на рис. 2.

	1995	1998	2001	2004	2007	2010	2013	2016	Frequency
HDI							+		1
DGP									0
Population density					+		+	+	3
Unemployment rate						+			1
Vaccines	+	+	+	+	+	+		+	7
Drugs					+				1
Alco					+				1
Depression	+	+	+				+	+	5

**Рис. 2.** Наиболее статистически значимые факторы

Наиболее тесная взаимосвязь обнаружена между смертностью от туберкулеза и вакцинацией (7 случаев из 8). Вторым по значимости оказался фактор нарушения психического здоровья (5 случаев из 8), третьим – плотность населения (4 случая из 8). Также оказывали влияние такие факторы, как индекс человеческого развития, уровень безработицы, чрезмерное употребление наркотиков и алкоголя.

## Литература

1. Global tuberculosis report 2022. Geneva: World Health organization, 2022. licence: cc BY-NC-SA 3.0 iGo [Электронный ресурс]: URL: <https://www.who.int/teams/global-tuberculosis-programme/tb-reports/global-tuberculosis-report-2022> (дата обращения: 09.04.2023).
2. Hayward S. E., Deal A., Rustage K, The relationship between mental health and risk of active tuberculosis: a systematic review // BMJ Open. 2022. P. 118–125.
3. Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.
4. Носко В. П. Эконометрика. М.: Издат. дом «Дело», 2011. 672 с.

УДК 519.1

**Хитрая В. А.**

## **Ранжирование вершин графа как кооперативная игра на электрической цепи**

*Рекомендовано к публикации профессором Мазаловым В. В.*

**1. Введение.** Для оценки центральности вершин графа могут использоваться различные подходы. В ряде работ центральность вершины вычисляется на основе правил Кирхгофа с использованием модели электрической цепи [1–4]. В этом случае элементы графа рассматриваются как идеальные элементы электрической цепи, где вершины представляют собой узлы, а ребра – проводники с известной пропускной способностью. При этом центральности вершин вычисляются на основе токов, протекающих через эти вершины [4].

С помощью правил Кирхгофа также могут быть вычислены абсолютные потенциалы вершин графа при последовательной подаче тока в вершины графа. По этим значениям может быть проведено ранжирование вершин, что позволяет построить турнирную таблицу. По турнирной таблице можно построить турнирную матрицу.

Рассмотрим решение кооперативной игры для ранжирования вершин графа [5–7]. В частности, применимы методы теории голосования на основе турнирной матрицы [8].

**2. Построение турнирной матрицы.** Пусть дан неориентированный граф  $G = (V, E, W, )$ , где  $V$  – множество  $n$  вершин графа,  $E$  – множество ребер графа,  $W$  – матрица весов ребер. Предполагается, что каждая вершина соединена с искусственно добавленной вершиной  $v_{n+1}$  ребром весом  $\delta$ . Граф рассматривается как электрическая цепь, всегда заземленная в вершине  $v_{n+1}$  [4], где веса ребер описывают пропускную способность (проводимость). Матрица Кирхгофа для графа  $G$  имеет вид

---

*Хитрая Виталия Андреевна* – аспирант, Карельский научный центр РАН; e-mail: dobvitalia@yandex.ru, тел.: +7(921)803-80-01

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-11-20015, проводимого совместно с органами власти Республики Карелия с финансированием из Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК).

$$L(G) = \begin{pmatrix} d_1 + \delta & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} & -\delta \\ -w_{21} & d_2 + \delta & -w_{23} & \dots & -w_{2n} & -\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n + \delta & -\delta \\ -\delta & -\delta & -\delta & \dots & -\delta & \delta n \end{pmatrix}.$$

Здесь  $w_{ij}$  – веса ребер,  $d_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$  – степень вершины. Поскольку  $\det L(G) = 0$ , для дальнейшей работы удалим строку и столбец, соответствующие искусственно добавленной вершине. Обозначим такую матрицу  $\tilde{L}(G)$ .

Согласно закону Кирхгофа, значения абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, заземленной в вершине  $v_{n+1}$ , в случае подачи единицы электрического тока в узел  $v_k$ , вычисляются как решение системы уравнений

$$\varphi^k = \tilde{L}^{-1}(G)b_k,$$

где  $\varphi^k = (\varphi_1^k, \dots, \varphi_n^k)^T$  – вектор абсолютных потенциалов,  $b_k$  – вектор-столбец,  $b_k(k) = 1$ ,  $b_k(i \neq k) = 0$ . Потенциал в вершине  $v_{n+1}$  равен нулю.

Будем последовательно вычислять значения абсолютных потенциалов для вершин графа. Далее проведем процедуру ранжирования при каждом значении  $k$  так, что вершина с наибольшим потенциалом получит ранг, равный единице.

По турнирной таблице рангов, рассчитанных на основе значений абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, может быть построена турнирная матрица  $T$ , элементы которой  $t(i, j)$  вычисляются как число случаев, когда вершина  $i$  получила более высокий ранг, чем вершина  $j$ . В том случае, если ранги вершин  $i$  и  $j$  оказываются равными, к значению  $t(i, j)$  добавляется  $\frac{1}{2}$ .

**Пример 1.** Рассмотрим в качестве примера граф – звезду  $S$  с шестью вершинами (рис. 1). Пусть веса всех ребер имеют значение 1,  $\delta = 0, 1$ . Найдем турнирную матрицу для этого графа.



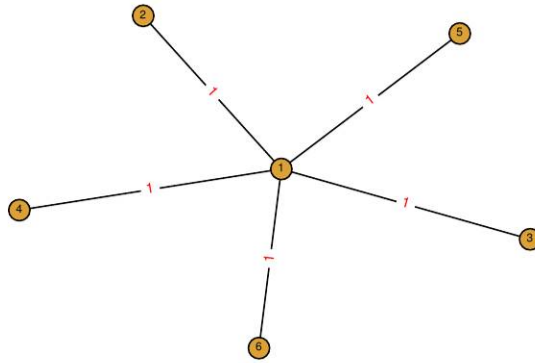


Рис. 1. Граф-звезда

Матрица Кирхгофа в этом случае

$$\tilde{L}(S) = \begin{pmatrix} 5,1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1,1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1,1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1,1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{L}^{-1}(S) = \begin{pmatrix} 1,80 & 1,64 & 1,64 & 1,64 & 1,64 & 1,64 \\ 1,64 & 2,40 & 1,49 & 1,49 & 1,49 & 1,49 \\ 1,64 & 1,49 & 2,40 & 1,49 & 1,49 & 1,49 \\ 1,64 & 1,49 & 1,49 & 2,40 & 1,49 & 1,49 \\ 1,64 & 1,49 & 1,49 & 1,49 & 2,40 & 1,49 \\ 1,64 & 1,49 & 1,49 & 1,49 & 1,49 & 2,40 \end{pmatrix}$$

Таблица 1. Турнирная таблица

$N$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
1	1	2	2	2	2	2
2	2	1	3	3	3	3
3	2	3	1	3	3	3
4	2	3	3	1	3	3
5	2	3	3	3	1	3
6	2	3	3	3	3	1

Турнирная матрица

$$T(S) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3. Построение кооперативной игры.** Турнирная матрица может послужить основой для построения кооперативной игры. Будем рассматривать игру  $\Gamma = (N, v(K))$ , где  $N$  – множество игроков, соответствующее множеству вершин графа  $V$ ,  $v(K)$  – характеристическая функция.

Можно считать, что если вершина графа получает при пропускании единицы электрического тока через вершину  $v_k$  достаточно высокий ранг (например, если вершина располагается в верхней половине турнирной таблицы), то она более важна для системы. Для определения выигрыша игроков может быть использована функция Хевисайда [8]

$$H(i, j) = I\left(t(i, j) - \frac{n}{2}\right), \quad n = |N|, \quad (1)$$

$$I(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда матрица выигрышей для графа в примере 1 будет выглядеть следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция в чистых стратегиях для коалиции  $K$  может быть выбрана как

$$v(K) = \max_{i \in K} \min_{j \in N \setminus K} H(i, j), \quad v(N) = 1. \quad (3)$$

В примере 1 выигрышными (получающими выигрыш 1) являются коалиции, содержащие игрока 1, т. е. центральную вершину графа. Коалиции без первого игрока получают 0.

Для вершин графа может быть проведена процедура ранжирования на основе вектора Шепли для характеристической функции  $v(K)$ . Для этого вычислим вклад игрока  $i$  в коалицию  $K$

$$m_i(K) = v(K \cup \{i\}) - v(K) \quad (4)$$

и средний вклад игрока по всем коалициям

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_K m_i(K). \quad (5)$$

Для вершин графа из примера 1 вектор Шепли примет следующий вид  $\phi = (31, 0, 0, 0, 0, 0)$ , что соответствует нашим представлениям о центральности вершины  $v_1$ .

**Пример 2.** Рассмотрим в качестве примера граф, представленный на рис. 2, с матрицей весов  $W$ . В таблице 2 представлена турнирная таблица для данного графа. Вычислим вектор Шепли для этого графа.

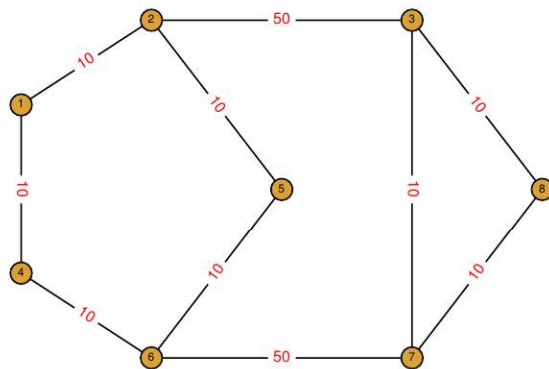


Рис. 2. Граф из примера 2

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 50 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 50 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2. Турнирная таблица

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	4	7	2	5	8	8	5
3	1	2	5	2	7	6	3
4	2	1	7	3	6	4	2
2	8	8	1	5	4	7	5
6	3	5	6	1	3	5	4
5	7	6	3	2	1	2	3
7	6	4	4	3	2	1	2
8	5	3	8	4	5	3	1

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 0 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 6 & 5 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 6 & 5 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0 & 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 1 & 1 & 0 & 0,5 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 1 & 1 & 0,5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор Шепли для игроков данного графа имеет вид

$$(0; 15,5; 15,5; 0; 0; 15,5; 15,5; 0).$$

Наибольшие значения Шепли получены вершинами 2, 3, 6, 7. Данные вершины являются связующими для двух групп вершин, соответственно через эти вершины проходит большое число путей в графе.

**4. Заключение.** В работе представлен теоретико-игровой подход к ранжированию вершин графа. Ранги вершин определяются на основе решения кооперативной игры на электрической цепи. При этом кооперативная игра строится на турнирной матрице, которая вычисляется с помощью значений абсолютных потенциалов вершин графа – узлов электрической цепи. Для определения выигрышей предлагается использовать функцию Хевисайда. Предложенный метод позволяет выделить ключевые вершины графа, которые могут рассматриваться как центральные.

## Литература

1. Brandes U., Fleischer D. Centrality measures based on current flow // 22-nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science / Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3404. P. 533–544.
2. Newman M. E. J. A measure of betweenness centrality based on random walks // Social Networks. 2005. Vol. 37. С. 39–54.
3. Avrachenkov K., Litvak N., Medyanikov V., Sokol M. Alpha current flow betweenness centrality // Algorithms and Models for the Web Graph, 10-th International Workshop / Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8305. P. 106–117.
4. Avrachenkov K. E., Mazalov V. V., Tsynguev B. T. Beta current flow centrality for weighted networks // Computational Social Networks, 4-th International Conference / Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 9197. P. 216–227.
5. Gomez D., Gonzalez-Aranguena E., Manuel C. et al. Centrality and power in social networks: a game theoretic approach // Mathematical Social Sciences. 2003. Vol. 46. No 1. P. 27–54.

6. Suna P., Parilina E. M., Gaob H. W. Two-stage network games modeling the Belt and Road Initiative // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 1. С. 87–98.
7. Мазалов В. В., Хитрая В. А., Хитрый А. В. Методы теории кооперативных игр в задаче ранжирования текстов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 1. С. 63–78.
8. Kondratev A. A, Mazalov V. V. Ranking procedure with the shapley value // Intelligent Information and Database Systems, 9-th Asian Conference / Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10192. P. 691–700.

УДК 004.942

**Чайкин Г. А.**

## Распределение проблемных тематик между учащимися

*Рекомендовано к публикации доцентом Сергеевым С. Л.*

**1. Введение.** Составление заданий может оказаться трудной задачей при необходимости выполнить данную процедуру более интерактивным способом, так как потребуется потратить время для учета прошлых работ учащихся в процессе составления. Весь процесс можно автоматизировать, предварительно посчитав оценки сложности заданий (как в [1], или без учета этой сложности), составив задания на основе подготовленных данных и оценив успеваемость учащихся. Данная работа посвящена задаче распределения проблемных для учащихся тематик с учетом минимального количества тематик и их разнообразия.

**2. Постановка задачи.** Каждому учащемуся необходимо выдать несколько заданий. Темы заданий определяются из имеющейся информации о знаниях учащихся в каждой теме. При этом желательно максимально снизить степень возможного взаимодействия учащихся в выполнении их заданий, а также предоставить заранее определенное число тематик.

**2.1. Ограничения.** Для задачи определено несколько ограничений: количество тематик для каждого учащегося должно быть не меньше наперед заданного параметра, а также тематики у учащихся не должны повторяться больше наперед заданного параметра.

**3. Математическая постановка задачи.** Пусть дана матрица вида  $A = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$ , где  $a_{i,j} \in [0, 1]$  – частота правильных ответов  $i$ -го учащегося по  $j$ -й тематике. Если учащийся ответил правильно на 5 вопросов из 10, то  $a_{i,j} = 0,5$ . Требуется решить задачу оптимизации

---

*Чайкин Георгий Александрович* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st061320@student.spbu.ru, тел.: +7(981)755-59-34

следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(z) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_{i,j}, \\ \sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq l, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n x_{i,j} \leq k, \quad j = \overline{1, m}, \\ x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad k \in Z, \quad l \in Z, \quad k \geq 0, \quad l \geq 0, \end{array} \right.$$

где параметр  $k$  отвечает за количество допустимых повторений для учащихся, а  $l$  – за минимальное количество тематик для каждого учащегося. Решением задачи будет матрица, у которой суммы элементов строк не меньше заданного  $l$ , и суммы элементов столбцов не больше заданного  $k$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}.$$

**4. Допустимые значения параметров ограничений.** При определенных значениях  $n, m, l, k$  могут не существовать допустимые значения. Отсюда возникает вопрос: можно ли определить значения  $l$  и  $k$ , при которых они существуют?

Имеет место следующая

**Теорема.** Если при  $n \geq m$  параметры  $l$  и  $k$  попадают в какой-либо из соответствующих промежутков:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0, \quad l = 0, \\ k \geq s, \quad l \leq 1, \\ \dots \\ k \geq (m-1)s, \quad l \leq m-1, \\ k \geq n, \quad l \leq m, \end{array} \right.$$

где  $s = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ , то в таком случае существует допустимое решение.



Если при  $n < m$  параметры  $l$  и  $k$  попадают в какой-либо из соответствующих промежутков:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0, \quad l = 0, \\ k \geq 1, \quad l \leq \widehat{s}, \\ \dots \\ k \geq (n-1), \quad l \leq (n-1)\widehat{s}, \\ k \geq n, \quad l \leq m, \end{array} \right.$$

где  $\widehat{s} = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ , то в таком случае существует допустимое решение.

**Доказательство.** Пусть  $n \geq m$ ,  $t \in Z$  – количество единиц в каждой строке матрицы  $X$ ,  $0 \leq t \leq m$ ,  $k_j$  – количество единиц в каждом  $j$ -м столбце матрицы  $X$ . Тогда количество единиц в матрице равно

$$\sum_{j=1}^m k_j = nt.$$

Для нахождения минимально допустимого значения  $k$  решим задачу вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \{k_1, \dots, k_m\} \rightarrow \min_{k_1, \dots, k_m}, \\ \sum_{j=1}^m k_j = nt, \\ k_j \in Z, \quad 0 \leq k_j \leq n, \quad j = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Вспользуемся математической индукцией. Рассмотрим случай  $m = 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \{k_1\} \rightarrow \min_{k_1}, \\ k_1 = nt, \\ k_1 \in Z, \quad 0 \leq k_1 \leq n. \end{array} \right.$$

Решение можно выписать в следующей форме:

$$k_1 = nt = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil t.$$

Пусть теорема верна для  $m$ , рассмотрим её для  $m + 1$ :

$$\begin{cases} \max \{k_1, \dots, k_{m+1}\} \rightarrow \min_{k_1, \dots, k_{m+1}}, \\ \sum_{j=1}^{m+1} k_j = nt, \\ k_j \in Z, \quad 0 \leq k_j \leq n, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Представим  $k_{m+1} = ft$ ,  $f \in N$ ,  $n - f \geq 1$ . Теперь равенство из (1) можно записать как

$$\sum_{j=1}^m k_j = (n - f)t.$$

С этим ограничением решением задачи для  $k_1, \dots, k_m$  будет величина  $k = \left\lceil \frac{n-f}{m} \right\rceil t$ . В итоге задача для случая  $m + 1$  примет следующий вид:

$$\max \left\{ \left\lceil \frac{n-f}{m} \right\rceil t, ft \right\} \rightarrow \min_f.$$

Решением задачи будет  $k = \left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil t$ . При данном значении  $k$  и при  $l = t$  есть допустимые решения. При этом данные значения являются пограничными. Это значит, что при  $k \geq st$  и  $l \leq t$  есть допустимые значения, это и есть указанные в теореме промежутки.

Для  $n < m$  решается задача

$$\begin{cases} \min \{l_1, \dots, l_n\} \rightarrow \max_{l_1, \dots, l_n}, \\ \sum_{i=1}^n l_i = mt, \\ l_i \in Z, \quad 0 \leq l_i \leq m, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Доказательство для данного случая аналогично предыдущему.

Теорема доказана.

**5. Программная реализация.** Для решения поставленной задачи использован модуль `gurobipy` [2] на Python, который позволяет решать различные задачи оптимизации. Также был применен модуль `Numpy` [3], с помощью которого получилось привести ограничения к специальному виду, как это сделано для транспортной задачи в [4]. Этот модуль позволяет получить ограничения без явных циклов. Весь код представлен в репозитории [5].

**5.1. Численные примеры.** Распределим три тематики для пяти учащихся со следующей матрицей частот правильных ответов:

$$A = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,46 & 0,14 \\ 0,25 & 0,15 & 0,58 \\ 0,52 & 0,18 & 0,76 \\ 0,13 & 0,85 & 0,73 \\ 0,50 & 0,45 & 0,66 \end{pmatrix}.$$

При  $k = 2$ ,  $l = 3$  решения не существует. При  $k = 2$ ,  $l = 1$  решение принимает вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**6. Заключение.** В работе описана и формализована задача распределения тематик между учащимися с ограничениями. Доказана теорема о допустимости решений при определенных значениях  $k$  и  $l$ . Задача сведена к задаче целочисленного программирования, что позволяет воспользоваться готовыми алгоритмами и программными пакетами. В дальнейшем планируется добавить в задачу индивидуальные ограничения для каждого учащегося и каждой тематики, построение специальных алгоритмов для частных случаев задачи, а также поиска других областей, где можно применить полученные результаты. Например, распределение компонент для устранения неполадок между устройствами с известными данными об ошибках компонент.

## Литература

1. Луценко М. М., Шадринцева Н. В. Веса Шепли для заданий педагогического теста // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 3. С. 300–312.

2. Python – Gurobi optimization [Электронный ресурс]: URL:[https://www.gurobi.com/documentation/9.5/quickstart\\_mac/cs\\_python.html](https://www.gurobi.com/documentation/9.5/quickstart_mac/cs_python.html) (дата обращения: 20.03.23).
3. NumPy [Электронный ресурс]: URL:<https://numpy.org/> (дата обращения: 20.03.23).
4. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. 488 с.
5. Github Repository [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/globalpie271/topics-distribution> (дата обращения: 20.03.23).

UDC 519.2

**Bai H., Li Y.**

## **Spatial analysis of the birth rate in China**

*Recommended for publication by professor Pankratova Ya. B.*

**1. Introduction.** The birth rate is an important indicator of the reproductive capacity of a country's population. An increase in the birth rate increases a country's labor supply and drives economic development. However, as the level of economic development increases, more and more countries are experiencing low birth rates, and the phenomenon is not being addressed. In this paper, we take the birth rate of Chinese population as an example, analyze the time-series evolution of the birth rate, and establish a spatial autoregressive model from a spatial perspective to deeply study the main factors affecting the birth rate.

### **2. Dataset introduction.**

**2.1. Data sources.** The study area of this paper is the remaining 31 provinces, cities and autonomous regions of China except Taiwan Province, Macao and Hong Kong Special Administrative Regions. The data for the study are the birth rate data of China's population from 1976 to 2021 years. The data were mainly obtained from the China Statistical Yearbook 1976–2021 years, the China Provincial Statistical Yearbook 1976–2021 years, and the website of the National Bureau of Statistics of China [3] and the Foresight Database website [4].

### **2.2. Analysis of the time-series evolution of the birth rate.**

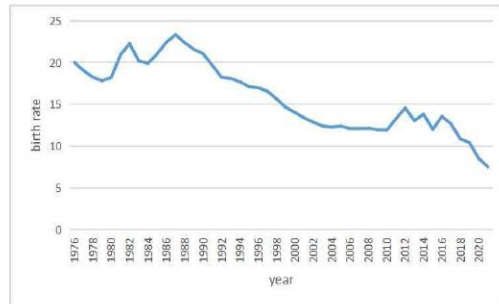
The trend graph of China's birth rate from 1976–2021 years is shown in Figure 1, with an overall decreasing trend, in which the birth rate fluctuates from 1976 to 1991 years. The birth rate shows a stable decreasing trend from 1992 to 2010 years. The birth rate fluctuated again from 2011 to 2017 years, and the main reason is related to the fertility policy implemented in China. The birth rate shows a downward trend again in 2018–2021 years, and the rate of decline is fast, reaching a new historical low of 7.52‰ in 2021 year.

---

*Bai Huizhen* – graduate student, student, Saint Petersburg State University;  
e-mail: st097375@student.spbu.ru, phone: +7(967)206-01-66

*Li Yike* – graduate student, student, Saint Petersburg State University;  
e-mail: st102941@student.spbu.ru, phone: +7(967)206-01-85

This work was supported by the China Scholarship Council (No 202109010169, No 202109010166)



**Figure 1.** China's birth rate trend from 1976 to 2021 years

**2.3. Spatial distribution characteristics of birth rate.** In order to better portray the change process of the spatial distribution of birth rate in China, we plotted the spatial distribution of birth rate at two time points, 1976 and 2021 years, to make a visual analysis of the birth rate, as shown in Figure 2 and Figure 3.



**Figure 2.** 1976 (Moran's  $I = 0.270$ )

As shown in Figures 2 and 3, the blue area is the study area, and the darker the color indicates the higher the birth rate in that area. The birth rate shows an overall decreasing trend and an east-west difference during the period 1976–2021 years, and the east-west difference is significantly reduced in 2021 year.

**2.4. Analysis of the spatial autocorrelation of birth rate.** We performed a Moran's  $I$  test for spatial autocorrelation using regional birth rate data. The null hypothesis of this test is that there is no spatial autocorrelation. We selected ten sample points in the sample to

be calculated separately. The results of the Moran's  $I$  test are presented in Table 1.



**Figure 3.** 2021 (Moran's  $I = 0.293$ )

**Table 1.** Results of the Moran's  $I$  test for spatial autocorrelation

Year	Moran's $I$	P-value	Year	Moran's $I$	P-value
1976	0.270	0.000	2001	0.315	0.000
1981	0.190	0.002	2006	0.308	0.000
1986	0.297	0.000	2011	0.324	0.000
1991	0.361	0.000	2016	0.300	0.000
1996	0.365	0.000	2021	0.293	0.000

The results show that the regional birth rates are spatially positively autocorrelated between 1976 and 2021 years, as the Moran's  $I$  is greater than 0 and both are significant.

### 3. Analysis of factors influencing population birth rate.

**3.1. Selection of influencing factors.** The factors selected to influence the birth rate in this study are grouped into three broad categories as follows:

- Economic factors [2]: Gross Regional Product ( $grp$ ), Disposable Income ( $di$ ), Consumption Expenditure ( $ce$ ), Education and Culture Expenditure ( $eace$ );
- Demographic factors: Resident Population ( $rp$ ), Ageing Rate ( $ar$ ), Divorced Population ( $dp$ );
- Social factors: Financial Revenue ( $fr$ ), Residential Sales Area ( $rsa$ ), Financial Education Expenditure ( $fee$ ).

**3.2. Model setup and preliminary analysis.** In order to prevent the occurrence of pseudo-regressions and improve the accuracy of the estimation results, the ADF unit root test was used to test the

smoothness of the panel data before constructing the regression model, and the test results are shown in Table 2, and the variable  $rp$  was found to be unstable, so this variable was removed during the construction of the model.

**Table 2.** Unit root test results

Variables	F	P-value	Variables	F	P-value
$grp$	-3.992	0.0115	$di$	-5.3665	0.0100
$ce$	-5.1281	0.0100	$eace$	-4.03	0.0100
$rp$	-3.1818	0.0935	$ar$	-3.9638	0.0129
$dp$	-4.0329	0.0100	$fr$	-4.2976	0.0100
$fee$	-4.039	0.0100	$rsa$	-3.5197	0.0429

In this paper, a spatial panel SAR model was selected to model the birth rate data and the Hausman test was used to determine the selection of fixed effects [1]. Therefore, the finalized model is a spatial autoregressive model SAR with time and space fixed effects, and the expressions are as follows:

$$y_{it} = -0.0001grp_{it} + 0.0002di_{it} - 0.0001ce_{it} - 0.0001eace_{it} - 0.1112ar_{it} - 0.002dp_{it} + 0.0003fr_{it} + 0.0015fee_{it} + 0.00rsa_{it} - 0.452865y_{it}$$

where the variables are defined as before.  $W$  is the spatial weights matrix, the indices of the variables denote district  $i$  and year  $t$ .

The model was estimated using Stata16 and the results are shown in Table 3.

**Table 3.** SAR model fixed effects decomposition results

Variables	$grp$	$di$	$ce$	$eace$
Direct	-0.0001	0.002	-0.0001	-0.0001
Indirect	0.00008	-0.00007	0.00005	-0.0001
Total	-0.00002	0.00013	-0.00004	-0.0002
P-value	0.4550	0.0080	0.0147	0.0109
$ar$	$dp$	$fr$	$fee$	$rsa$
-0.1112	-0.002	0.0003	0.0015	0.0000
-0.0357	0.0006	-0.00008	0.0004	0.0000
-0.1469	-0.0014	0.00022	0.0019	0.0000
0.0160	0.0090	0.4040	0.0274	0.0699

Based on the fitting results, it can be concluded that the Gross Regional Product, the Financial Revenue and the Residential Sales Area did not pass the 5% significance test, indicating that they did not have a significant effect on the birth rate.



The direct effects of the Consumption Expenditure, the Education and Culture Expenditure and the Divorced Population is negative and pass the 5% significance test, indicating that they have a hindering effect on the birth rate in the province. However, it is worth noting that their indirect effects are positive and significant, indicating that while they hinder the birth rate in the province, they promote the birth rate in neighboring provinces.

The direct effect of the Disposable Income is positive and the indirect effect is negative, and both are significant, indicating that it has a boosting effect on the birth rate in each province, but also hinders the increase of the birth rate in neighboring provinces. The coefficient of  $di$  is 0.002, indicating that each ten yuan increase in the Disposable Income in the province increases the birth rate by 0.002%.

Both the direct and indirect effects of the Financial Education Expenditure are positive and significant, indicating that it contributes to the birth rate in the considered province and the adjacent provinces as well. In contrast, both the direct and indirect effects of the Ageing Rate are negative, indicating a hindering effect on the birth rate in the considered province and the adjacent provinces as well.

## References

1. Elhorst J. P. Spatial econometrics // Springer Briefs in Regional Science. 2014. Vol. 1. No 1. P. 310–330.
2. Peng H. R., Meng X. Declining birth rate and economic development in China // Statistical Research. 2014. Vol. 31. No 9. P. 44–50.
3. The National Bureau of Statistics of China [Internet resource]: URL: <http://www.stats.gov.cn> (date: 08.06.2023).
4. The Foresight Database website [Internet resource]: URL: <https://d.qianzhan.com> (date: 08.06.2023).

UDC 519.868

Bai M.

## Profit sharing licensing with many firms

*Recommended for publication by professor Parilina E. M.*

**1. Introduction.** In exchange for a license to use OLED technology, Motorola granted Universal Display Corporation a share of the company in 2000 [1]. Profit sharing licensing or equity licensing are common names for this exchange of equity for technology [2]. Although profit-sharing licensing is frequently utilized in practice, there is few theoretical research on it. So we created a three-stage profit-sharing licensing model with  $n + 2$  firms to research the relationship between profit-sharing rates and profits in order to fill the gap between theory and practice.

**2. Model.** Consider an industry with two licensing firms, firms  $m$  ( $m \in \{1, 2\}$ ), which are also producers, and with other  $n$  firms which can just produce the homogeneous goods but not licensing. These firms compete in quantities [3]. Firms  $i$ 's cost of producing  $q_i$  units of output is given by  $c_i q_i$ , where  $c_i > 0$  is firm  $i$ 's marginal cost. The inverse market demand is given by the twice-differentiable function

$$p(Q) = a - bQ,$$

where  $b > 0$ ,  $a > 0$ ,  $Q < \frac{a}{b}$ ,  $Q = \sum_{i=1}^{n+2} q_i$  is the industry output. Following the inverse function, we make the following assumption on demand.

**Assumption 1.** Let (i)  $p'(Q) < 0$ ; (ii)  $p'(Q) + Qp''(Q) < 0$ ; (iii)  $\lim_{Q \rightarrow \infty} p(Q) = 0$ , where  $Q > 0$  such that  $p(Q) > 0$ .

Item (i) of the Assumption 1 says that the inverse demand is downward sloping, item (ii) implies that quantities are strategic substitutes and that each firm's profit maximization problem is strictly concave, and item (iii) implies that the equilibrium aggregate output is bounded [4].

We denote by  $k_m$  licensing firms  $m$ 's choice of how many licenses to sell. Suppose there is initially a non-drastic cost difference between these firms [5]. Specifically, any firm  $j$  have marginal cost  $c_2 = c$ , and any firm  $m$  have a lower marginal cost  $c_1 = c - x$  with  $0 < x < c$ . Once

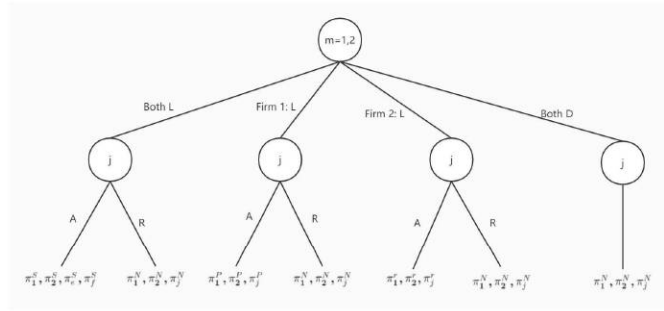
---

*Bai Ming* – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: st098652@student.spbu.ru, phone: +7(967)206-00-43

This work was supported by the China Scholarship Council (No 202209010007)

agreement on licensing is reached, firm  $j$  obtains the right to use the process innovation (as a result, their marginal cost decline to  $c - k_m d$  (the difference is very small)) with  $k_m d \leq x$  and firm  $m$  in return receives an equity stake in firm  $j$ .

The interaction between firms  $m$  and  $j$  is characterized by a three-stage game (see Figure 1).



**Figure 1.** Multiplayer three-stage game. “L” stands for license; “D” for delay; “A” for accept; “R” for reject

**3. Equilibrium in three-stage game.** The backward induction approach is adopted to find for the sub-game perfect equilibrium in the three-stage game.

### 3.1. The third-stage subgame.

(1) Consider path Both L-R, Firm 1: L-R, Firm 2: L-R, Both D (see Figure 1). The profit functions at the third stage of the game are

$$\begin{cases} \pi_1 = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_1 - (c - x)q_1, \\ \pi_2 = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_2 - (c - x)q_2, \\ \pi_j = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_j - cq_j, \quad j = \overline{3, n+2}, \end{cases}$$

where  $a > c$ . Firms' equilibrium profits without licensing can be derived.

And, they are denoted as  $\pi_1^N$ ,  $\pi_2^N$  and  $\pi_j^N$ , respectively.

(2) Consider the path Both L-A (see Figure 1). The profit functions at the third stage of the game are

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i - c + x \right] q_1 + \\ \quad + (\xi - 2)\alpha \left( \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_e - (c - k_1 d) q_e \right), \\ \pi_2 = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i - c + x \right] q_2 + \\ \quad + (n - \xi + 2)\alpha \left( \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_f - (c - k_2 d) q_f \right), \\ \pi_e = (1 - \alpha) \left( \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_e - (c - k_1 d) q_e \right), \quad e = \overline{3, \xi}, \\ \pi_f = (1 - \alpha) \left( \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_f - (c - k_2 d) q_f \right), \quad f = \overline{\xi + 1, n + 2}, \end{array} \right.$$

where  $\alpha \in [0, 1]$  is the profit-sharing rate. We can get the equilibrium profits under licensing, denoted as  $\pi_1^S$ ,  $\pi_2^S$ ,  $\pi_e^S$ ,  $\pi_f^S$ , respectively.

(3) Consider path Firm 1: L-A (see figure 1). The profit functions at the third stage of the game are

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_1 - (c - x) q_1 + \\ \quad + n\alpha \left( \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_j - (c - k_1 d) q_j \right), \\ \pi_2 = \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_2 - (c - x) q_2, \\ \pi_j = (1 - \alpha) \left( \left[ a - b \sum_{i=1}^{n+2} q_i \right] q_j - (c - k_1 d) q_j \right), \quad j = \overline{3, n + 2}. \end{array} \right.$$

We can get the equilibrium profits under licensing, denoted as  $\pi_1^P$ ,  $\pi_2^P$ ,  $\pi_j^P$ , respectively.

(4) Consider the path Firm2: L-A (see figure 1). The Profit function is almost same as (3), It's just that the profits of firm 1 and firm 2 are swapped. We can denote as  $\pi_1^r$ ,  $\pi_2^r$ ,  $\pi_j^r$ , respectively.

**Lemma 1.**

$$\frac{\partial \pi_m^S}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_m^r}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_m^P}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_j^P}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \pi_e^S}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \pi_j^r}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \pi_f^S}{\partial \alpha} < 0.$$

We can conclude the following by Lemma 1: Any firm  $j$ 's equilibrium profit will decline, but firm  $m$ 's will increase as more shares of firms  $j$  are transferred to firm  $m$  under all cases.

### 3.2. The second-stage subgame.

If firm  $m = 1, 2$  made a licensing offer at stage 1, firms  $j \in \{3, \dots, n+2\}$  have a chance to decide whether to accept or reject the offer at the second stage of the game. Obviously, firms  $j$  will accept the offer if licensing strictly increases its profit. Following the tradition in the licensing literature, we further assume that a licensee will accept an offer if it is indifferent between acceptance and rejection.

### 3.3. The first-stage subgame.

(1) If firm  $m = 1, 2$  makes a licensing offer at the first stage of the game, the share  $\alpha$  of firm  $e$ 's and  $f$ 's profit to be transferred will be determined as follows:

$$\begin{cases} \max_{\alpha} & \pi_1^S, \\ \text{s.t.} & \pi_e^S \geq \pi_j^N. \end{cases} \quad \begin{cases} \max_{\alpha} & \pi_2^S, \\ \text{s.t.} & \pi_f^S \geq \pi_j^N. \end{cases}$$

The equilibrium profit-sharing rate  $\alpha_1^*$  solves  $\pi_e^S = \pi_j^N$  and  $\alpha_2^*$  solves  $\pi_f^S = \pi_j^N$ .

(2) If only firm 1 makes a licensing offer at the first stage of the game, the shares  $\alpha$  of firm  $j$ 's profit to be transferred will be determined as follows:

$$\begin{cases} \max_{\alpha} & \pi_1^P, \\ \text{s.t.} & \pi_j^P \geq \pi_j^N. \end{cases}$$

That is, the equilibrium profit-sharing rate  $\alpha_3^*$  solves  $\pi_j^P = \pi_j^N$ .

(3) If only firm 2 makes a licensing offer at the first stage of the game, the shares  $\alpha$  of firm  $j$ 's profit to be transferred will be determined as follows:

$$\begin{cases} \max_{\alpha} & \pi_2^r, \\ s.t. & \pi_j^r \geq \pi_j^N. \end{cases}$$

That is, the equilibrium profit-sharing rate  $\alpha_4^*$  solves  $\pi_j^r = \pi_j^N$ .

**Lemma 2.**

$$\pi_1^S |_{\alpha=\alpha_1^*} > \pi_1^N, \quad \pi_2^S |_{\alpha=\alpha_2^*} > \pi_2^N, \quad \pi_1^P |_{\alpha=\alpha_3^*} > \pi_1^N, \quad \pi_2^P |_{\alpha=\alpha_4^*} > \pi_2^N.$$

If both firms  $m = 1, 2$  decide not to make a licensing offer, it would earn a profit of  $\pi_m^N$ . It turns out that it is always in the interest of firms  $m$  to make a licensing offer at the first stage of the game.

**4. Conclusion.** In this work, we analyze the profit-sharing licenses between  $n+2$  competing firms, explore the relationship between the profit of each firm and the profit-sharing rate, calculate the Nash equilibrium between the licensing firm and the licensee firm at the third stage, find the optimal strategy combination for the licensing firm.

## References

1. Niu S. Profit-sharing licensing // Journal of Economics. 2017. Vol. 121. P. 267–278.
2. Mukhopadhyay S., Kabiraj T., Mukherjee A. Technology transfer in duopoly the role of cost asymmetry // International Review of Economics & Finance. 1999. Vol. 8. No 4. P. 363–374.
3. Martin S. M., Saracho A. I. Patent strength and optimal two-part tariff licensing with a potential rival incorporating ad valorem royalties // Economics Letters. 2016. Vol. 143. P. 28–31.
4. Nocke V., Whinston D. M. Dynamic merger review // Journal of Political Economy. 2010. Vol. 118. No 6. P. 1200–1251.
5. Badia B. D., Tauman Y., Tumendemberel B. On the diffusion of competing innovations // Mathematical Social Sciences. 2020. Vol. 108. P. 8–13.

UDC 004.62

Gao Z., Wang Q., Liu Z., Fan X.

## Optimization study of an ethanol preparation model for C4 olefins

*Recommended for publication by professor Parilina E. M.*

**1. Introduction.** C4 olefins are the most important basic chemical raw materials, which are used in large quantities in the production of chemical products and pharmaceuticals. At present, C4 olefins consumption is faster than the growth rate of production capacity and output in various countries in the world, and there is a large gap in C4 olefins resources. There is a certain linear relationship between some C4 olefin consumption and GDP. With the rapid development of the social economy, the contradiction between C4 olefin supply and demand is becoming more and more prominent. Among the C4 olefin production routes, ethanol coupling to C4 olefin has certain advantages compared with other methods, and the intermediate products have good market potential and application space. As a new technological route, ethanol coupling to C4 olefins is competitive in the production of various olefins. Based on this background, this question investigates how different catalyst combinations at different temperatures affect the preparation of C4 olefins from ethanol, and what catalyst combinations and temperatures can maximize the amount of C4 olefins produced, and then evaluates the advantages and disadvantages of the resulting model.

**2. Problem Analysis.** The question asks to analyze the relationship between ethanol conversion, C4 olefin selectivity, and temperature, in this question only three variables need to be considered: temperature  $T$ , ethanol conversion  $W$ , and C4 olefin selectivity  $M$ . We determine the independent variable as temperature, ethanol conversion, C4 olefin selec-

---

*Gao Zihan* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: gaozihanjy@163.com, phone: +8615262065036

*Wang Qi* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: WQ000506@163.com, phone: +8618700958154

*Liu Zhuoxin* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: Liuzhuoxin322@outlook.com, phone: +8615191086479

*Fan Xuanping* – undergraduate student, Yan'an University;

e-mail: genggen\_13@163.com, phone: +8615309130028

tivity as dependent variables, determine the regression equation, perform the corresponding calculations, and using Python for data visualization makes the results more intuitive.

In the first part, we only take group A1 catalyst combination fitting as an example here, and the same is true for other groups.

The second part we will analyze the test results of a given set of catalyst combination experiments at 350 degrees Celsius at different times, with time as the independent variable and ethanol conversion and C4 olefin selectivity as the dependent variables to build the model, at this time also consider the selectivity of several other outputs under the same catalytic conditions with time, and specifically participate in the model graphs to derive the results.

### 3. Model Assumptions.

- 1) The catalyst performance is stable and fully functional in the experiment, ignoring the effect of random factors on the catalytic effect.
- 2) The various data collected in the experiment at various temperatures are accurate and reliable.
- 3) Except for the catalyst combination, charging method, and experimental temperature, the internal and external conditions such as concentration and quality of reactants, experimental environment, and experimental equipment are the same.
- 4) No other factors in the reaction process affect the experimental results.

### 4. Symbol Description.

**Table 1.** Symbol Description

Serial No.	Symbols	Meaning
1	$y_i(W)$	Ethanol conversion rate per unit of time
2	$y_i(\lambda)$	C4 olefin selectivity
3	$\beta_i, i = 1, \dots, 8$	Correlation model coefficients
4	$T_i, i = 1, \dots, n$	Temperature variables
5	$\xi$	Random disturbance term (error variable)
6	$t_i, i = 1, \dots, n$	Reaction time variable
7	$x_i, i = 1, \dots, 21$	Catalyst Portfolio



## 5. Model Construction.

**5.1. Linear Regression Model.** The regression analysis for this problem can be visually represented by the ethanol conversion versus C4 olefin selectivity at different temperatures for various catalyst combinations. For the temperature under the 21 catalyst combinations, the ethanol conversion (or C4 olefin selectivity) and temperature are denoted as  $y_i$  and  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectively, and the line graphs are shown in Figure 1, with  $y_i(W)$  denoting ethanol conversion,  $y_i(\lambda)$  denoting C4 olefin selectivity, and  $T_i$  denoting temperature, and  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  and  $\beta_4$  are model coefficients in the one-dimensional regression analysis, and  $\xi$  in the model is the random error, which obeys the  $N(0, \sigma^2)$  distribution. Thus, the relationship between the two variables is described by the one-dimensional regression model as follows.

Linear regression model of ethanol conversion versus temperature:

$$y_i(W) = \beta_1 + \beta_2 T_i + \xi. \quad (1)$$

Linear regression model of C4 olefin selectivity versus temperature:

$$y_i(\lambda) = \beta_3 + \beta_4 T_i + \xi. \quad (2)$$

Due to the large amount of data, only A1, A2 and A3 of 21 groups of data are selected for visualization, as shown in Figure 1.

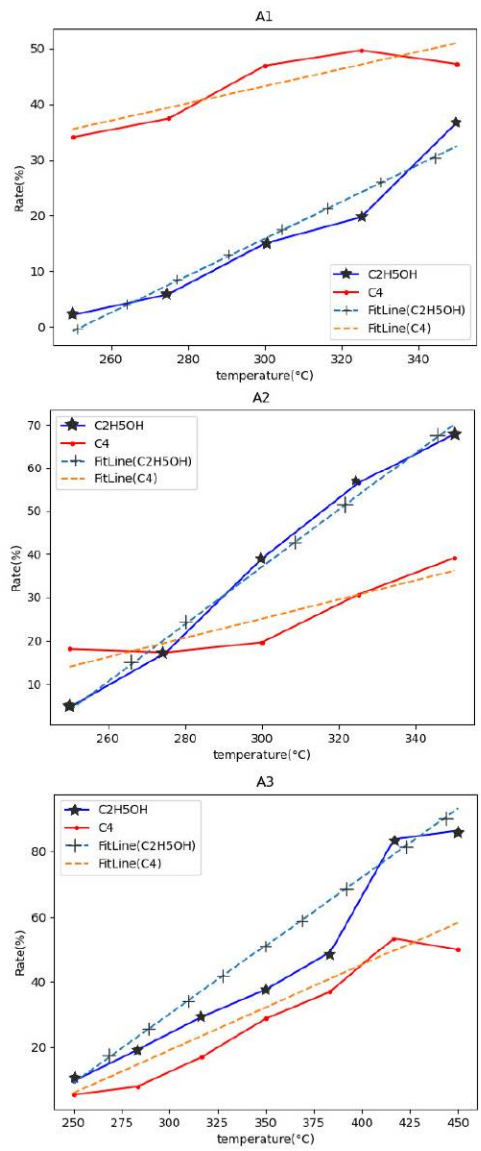
The relationship between the two types of variables was analyzed by fitting the above three sets of experimental data and solving the model coefficients  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  and  $\beta_4$  confidence intervals for their coefficients with the help of the REGRESS function, and subsequently deriving the model equations for  $y_i(W)$  and  $y_i(\lambda)$  with respect to temperature  $T_i$ .

The second part is similar to the first part, except that the variable is changed from temperature  $T_i$  to time  $t_i$ , and the model is set as follows, where  $\beta_5, \beta_6$  is the model coefficient, and the regression analysis then follows the above steps for modeling and analyzing its effects.

$$y_i = \beta_5 + \beta_6 t_i + \xi. \quad (3)$$

**5.2. Model Verification.** To study the relationship between ethanol conversion, C4 olefin selectivity, and temperature.

- 1) The calculation results of the model can be obtained by combining the experimental data with the REGRESS function in Table 2.



**Figure 1.** Fitting linear function graph of ethanol conversion versus temperature for A1, A2 and A3 catalyst combination

**Table 2.** Calculated results of the model

Regression coefficient	Coefficient estimates	Coefficient confidence intervals
$\beta_1$	-84.0740	[-133.9694, -34.1786]
$\beta_2$	0.3332	[0.1680, 0.4983]
$R^2 = 0.932 \quad S^2 = 16.8363$		

$y_i(W)$ ,  $\beta_1$ , and  $\beta_2$  in the model are noted as  $\hat{y}_1(W)$ ,  $\hat{\beta}_1$ , and  $\hat{\beta}_2$ , respectively, by the operation, then the estimated value of ethanol conversion at this time is:

$$\hat{y}_1(W) = -84.0740 + 0.3332\hat{T}_i. \quad (4)$$

- 2) As above, the calculation results of the model can be obtained in Table 3.

**Table 3.** Calculated results of the model

Regression coefficient	Coefficient estimates	Coefficient confidence intervals
$\beta_3$	-3.2420	[-47.8242, 41.3402]
$\beta_4$	0.1544	[0.1680, 0.4983]
$R^2 = 0.8769 \quad S^2 = 13.4415$		

$y_i(\lambda)$ ,  $\beta_3$ , and  $\beta_4$  in the model are noted as  $\hat{y}_1(\lambda)$ ,  $\hat{\beta}_3$ , and  $\hat{\beta}_4$ , respectively, by the operation, then the estimated value of ethanol conversion at this time is:

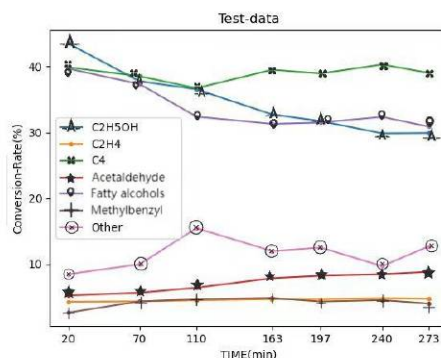
$$\hat{y}_1(\lambda) = -3.2420 + 0.31544\hat{T}_i. \quad (5)$$

- 3) A data fit was performed to estimate the ethanol conversion with the six generated products selectivity as follows.

**Table 4.** Calculated results of the model

Model coefficients for data $y_i$	$\beta_5$	$\beta_6$
Ethanol conversion rate (%)	42.655	-0.053
Ethylene selectivity (%)	4.199	0.002
C4 olefin selectivity (%)	38.581	0.003
Acetaldehyde selectivity (%)	4.808	0.016
Fatty alcohol selectivity (%)	38.572	38.572
Methylbenzyl alcohol selectivity (%)	3.552	3.552
Selectivity of other generators (%)	10.289	10.289

Based on the calculated values obtained from Table 4, the linear graph is fitted as Figure 2.



**Figure 2.** Folding line fit of each reactant at 350 degrees

**6. Conclusion.** By observing Figure 2, it can be concluded that:

- 1) The observed decrease in ethanol conversion, carbon number 4–12 fatty alcohol selectivity with time variation indicates that the catalyst combination has a significant inhibitory effect on ethanol conversion, carbon number 4–12 fatty alcohol selectivity with time variation at 350 degrees.
- 2) With the change of time, there must be a reverse reaction in the chemical reaction of C4 olefins prepared by ethanol. Based on this principle, while the conversion of ethanol decreases, the selectivity of other products does not have a significant upward effect, which indicates that the reaction time needs to be controlled during the reaction, and thus the reaction cost and raw material consumption.

## References

1. Hu Y. Operations research tutorial. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. 461 p. (In Chinese)
2. Qiao K., Ren F. Probability statistics and applications. Beijing: China Business Press, 2017. 419 p. (In Chinese)
3. Li H. Statistical learning methods. Beijing: Tsinghua University Press, 2010. 464 p. (In Chinese)

UDC 519.2

**Lin P.**

## **New energy vehicle sales forecast based on time series and neural network**

*Recommended for publication by associate professor Pankratova Ya. B.*

**1. Introduction.** This article is mainly introduced some forecasting modeling for Chinese new energy vehicle sales forecast based on time series [1, 2], mainly forecasting the vehicle sales volume, with four models, the ARIMA model, the ARIMAX model, additive model with decomposition and LSTM model. We also use these models to build some comparisons to analyse and apply it. At the same time, a corresponding strategy can be made to the new vehicle sales plan [3] in the future.

**2. Problem statement.** The new energy vehicle sales data used in this article is through the official website of the China Automobile Industry Association [4]. Our data set mainly includes monthly new energy vehicle sales from 2014 to 2022 year. The purpose of this work is construction of the mathematical models and forecasting for the sales volume of vehicles, using this data set we build additive model with decomposition, ARIMA, ARIMAX, LSTM models and conduct a comparative analysis with these models that introduced above.

**3. Mathematical Model.** In this section we construct mathematical model based on our purposes in time series.

**3.1. Additive Model With Decomposition.** Let's first consider the composition of a simple sequence model as

$$y(t) = u(t) + s(t) + v(t) + \varepsilon(t),$$

here  $u(t)$  is a variable representing long-term trend (trend) of changes in a number of features,  $s(t)$  is a seasonal component, reflecting the periodic repetition of processes, within one period (year),  $v(t)$  is a cyclic component reflecting the periodic recurrence of processes, but with a large period of fluctuations, and  $\varepsilon(t)$  is a random component, containing the influence of other factors, often hidden and not obvious.

---

*Lin Penghui* – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st088941@student.spbu.ru, phone: +7(962)704-93-76

Further, our decomposition model [5] is in the form of

$$y(t) = \text{trend}(t) + s_y(t) + s_m(t) + \varepsilon(t). \quad (1)$$

In (1) the following components are selected:  $\text{trend}(t)$  is a trend,  $s_y(t)$ ,  $s_m(t)$  are annual and monthly seasonality, respectively.

**3.2. ARIMA Model.** The ARIMA model considers that the current time series value  $y_t$  of the stationary time series  $y$  is determined by the past time series values and the external interference according to a linear expression. Therefore, the mathematical formula of ARIMA model [6] can be written as:

$$\nabla^d y_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \omega_i \varepsilon_{t-i},$$

where the d-order difference operator  $\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$  is aim to make the time series stationary.  $\varepsilon_t$  is the residual error of  $y$  at time  $t$ ,  $\delta$  is the constant term,  $p$  is the maximum autoregressive order,  $\phi_i$  is the autoregressive coefficient of order  $i$ ,  $q$  is the maximum moving average order, and  $\omega_i$  is the moving average coefficient of order  $i$ .

**3.3. ARIMAX Model.** On the basis of ARIMA, ARIMAX introduces the variable sequence set  $X(k) = x_1 t, x_2 t, \dots, x_k t$ , which is highly related to the explained variable. Therefore, the final form of ARIMAX is obtained as shown in Formula (2), denoted as  $ARIMAX(p, d, q)X(k)$ .

$$\nabla^d y_t = \delta + \sum_{i=1}^p \mu_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \omega_i \varepsilon_{t-i}. \quad (2)$$

In the process of  $ARIMAX(p, d, q)X(k)$  [7],  $p$ ,  $d$ , and  $q$ , as the input parameters of the model, need to be set in advance. The determination of parameter  $d$  is relatively simple, that is, the minimum difference order of the non-stationary sequence after processing into a stationary sequence.

**3.4. LSTM model.** The LSTM network is composed of a memory cell, forget gate, input gate and output gate. The memory cell is the basic unit of an LSTM neural network. The specific operation steps of LSTM [8] are as follows: where  $X_t$  is the input value of the cell at time  $t$ ,  $C_t$  is the state value of the cell at time  $t$ , and  $h_t$  is the output value of the cell at time  $t$ .  $\sigma$ ,  $\tanh$  in the cell represent the feed-forward network layer with a sigmoid activation function.

Step 1 [8]: Calculate the input gate value  $i_t$  and the candidate state value  $C_t$  of the cell at time  $t$  as:

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [X_t, h_{t-1}] + b_i),$$

$$\widetilde{C}_t = \tanh(W_c \cdot [X_t, h_{t-1}] + b_c),$$

where  $W_i$  is the weight matrix of the input gate,  $[X_t, h_{t-1}]$  indicates connecting the vector  $X_t$  and vector  $h_{t-1}$ ,  $b_i$  and  $b_c$  are bias term,  $W_c$  is the weight matrix of the candidate cell state.

Step 2: Calculate the activation value  $f_t$  of forget gate at time  $t$  as:

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [X_t, h_{t-1}] + b_f),$$

where  $W_f$  is the weight matrix of the forget gate and  $b_f$  is the bias term of the forget gate.

Step 3: Calculate the cell state update value  $C_t$  at time  $t$  as:

$$C_t = i_t \cdot \widetilde{C}_t + f_t \cdot C_{t+1}.$$

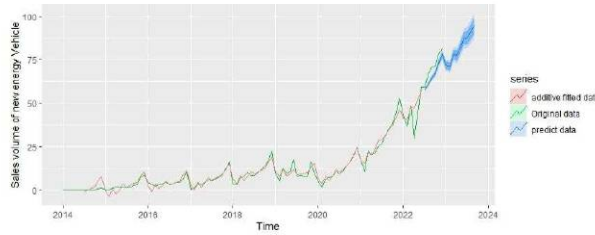
Step 4: Calculate the output value  $o_t$  of output gate at time  $t$  as:

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [X_t, h_{t-1}] + b_o),$$

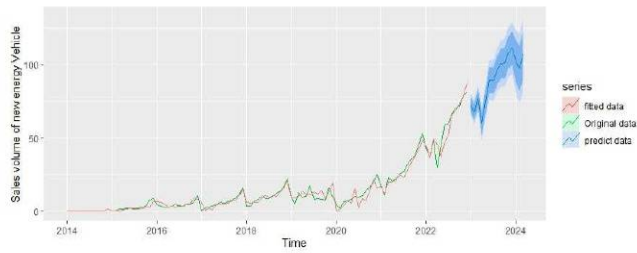
$$h_t = o_t \cdot \tanh(C_t),$$

where  $W_o$  is the weight matrix of the output gate and  $b_o$  is the bias term of the output gate.

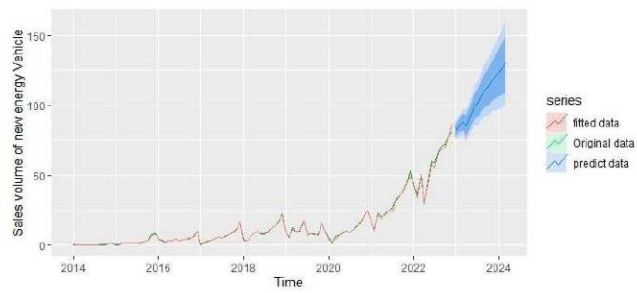
**4. Realization.** In this section, we construct four models in R language and Python.



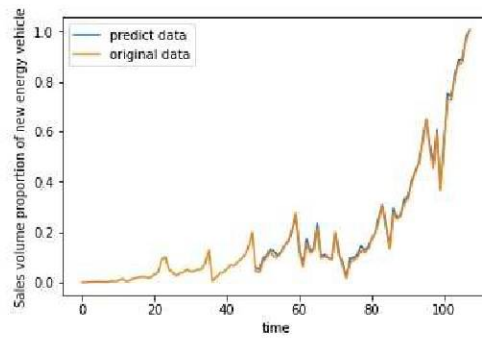
**Figure 1.** Additive model with decomposition and prediction, green line-original value, red line-additive fitted value, blue line-prediction value



**Figure 2.** ARIMA(2,1,1) model, green line-original value, red line-fitted value, blue line-prediction



**Figure 3.** ARIMAX(2,0,0) model and prediction, X is the Pure electric vehicle, green line-original value, red line-fitted value, blue line-prediction value



**Figure 4.** LSTM model and prediction, number of feature=12, learning rate=0.01, epoch=600, dimension of input=12, dimension of hidden=10, dimension of output=12, number of layer=1



**Table 1.** Forecasting model performance comparison

Model	P-value of Ljung-Box test	MAPE
Additive model with decomposition	0.4714	8.30%
ARIMA	0.8594	29.57%
ARIMAX	0.5396	13.51%
LSTM	0.4153	7.27%

**5. Conclusion.** This article mainly introduces forecasting about new energy vehicle sales in some different time series models. Focuses on the mathematical principles of these models and performing a program to implement the algorithmic process in R and Python [9]. In total, we have built four models, additive composition, ARIMA, ARIMAX, and LSTM to analyze the advantages and disadvantages of comparing.

To judge the quality of the model, we can use Ljung-Box test, and the value of MAPE. The test results P-value of these four models show that the residues of the models are all independently autocorrelated. It means that the model can be applied to prediction tasks. we see that the MAPE value of additive model with decomposition model is 8.30%, which is performance for this data set If we compare with others. ARIMA and ARIMAX model have 29.57%, 13.51% MAPE value. This shows that it is not very suitable for our data to establish ARIMA and ARIMAX, Although ARIMAX has better performance than ARIMA. However, LSTM has better performance, with the MAPE of 7.27%. This has a better effect on future predictions. Thus, This has laid a theoretical and experimental foundation [10] for us to predict the sales of new energy vehicles in the future, and it can also be a reference for companies' sales strategies for new energy vehicles, allowing companies to plan the quantity production and sales of new energy vehicles in advance. Production and sales plans. Finally, there is still a lot of work for improvement, issues such as ARIMA-LSTM combination model maybe good prediction for future research. Then, if we finish it, we also will compare the performance based on our data set.

## References

1. Hamilton J. D. Time Series Analysis. Princeton: Princeton University. 2020. 816 p.

2. Verbeek M. A Guide to Modern Econometrics, 2nd. ed. Chichester: John Wiley & Sons Inc. 2004. 429 p.
3. Liu Y. Research on vehicle sales forecasting based on neural network and time series. Masters Thesis [In Chinese] / Nanchang University. 2019. 52 p.
4. China Association of Automobile Manufacturers. Sales of Automobiles [Internet resource]: URL:<http://en.caam.org.cn/Index/lists/catid/64.html> (date: 29.05.2023).
5. Firiyago U., Kocherov I., Pankratova Y., Trofimova I. The demand dynamics forecasting for perishable products // Software Engineering Application in Systems Design. CoMeSySo 2022 / Springer ser. on Lecture Notes in Networks and Systems. 2023. Vol. 596. P. 277–287.
6. Xu D.-W., Wang Y.-D., Jia L.-M., Dong H.-H. Real-time road traffic state prediction based on ARIMA and Kalman filter // Frontiers Inf. Technol. Electronic Eng. 2017. Vol. 18. P. 287–302.
7. Williams B. M. Multivariate vehicular traffic flow prediction: Evaluation of ARIMAX modeling // Transportation Research Record. 2001. Vol. 1776. No. 1. P. 194–200.
8. Zhou S., Chen B., Liu H. et al. Travel characteristics analysis and traffic prediction modeling based on online car-hailing operational data sets // Entropy. 2021. Vol. 23. Art. no. 1305.
9. Neusser K. Time Series Econometrics. Cham: Springer Cham. 2016. 409 p.
10. Bai Y. The research on sales forecast for new energy vehicle based on SARIMA and BP neural network. Masters Thesis [In Chinese] / Xiangtan University, 2019. 48 p.



## *6. Мастер-классы*





УДК 519.687.4:519.682.5

Пономарев Ю. Ю.

**Методические основы внедрения,  
преподавания и работы с облачными  
технологиями компании «Мой Офис»  
на примере установки продукта  
«МойОфис Частное облако 2». Основы языка Lua**

**Введение.** Данная статья была написана на основании материалов мастер-класса «Установка и настройка «МойОфис Частное облако 2 + МойОфис Почта». Он проводился на мощностях УЦ НОУ РДТЕХ в рамках 54-й Международной научной конференции аспирантов и студентов факультета ПМ–ПУ «Процессы управления и устойчивость» для выявления подготовленности и вовлечения студентов в работу с российскими высокими технологиями. Мастер-класс транслировался на английском языке на два китайских университета-партнера факультета ПМ–ПУ СПбГУ.

**Описание предметной области.** Целью мастер-класса было расширенное и методически правильное толкование документации по «МойОфис Частное облако 2» [1].

Для эффективной установки и настройки компания «МойОфис» предлагает следующие этапы реализации этого процесса. Первый этап – получение первого сертификата по администрированию Linux. Второй этап – самостоятельное изучение введения в Ansible [2]. Третий этап – прохождение курсов: «Установка и настройка серверных продуктов МойОфис» [3], «Базовое администрирование серверных продуктов МойОфис» [4], «Массовая установка «МойОфис Стандартный» на ОС Linux» [5]. С целью совершенствования пользовательского опыта была выпущена документация по встроенному макроязыку «МойОфис Стандартный» и расширенных редакций [6].

В рамках мастер-класса было принято решение дать полное описание всех указанных документов, но сократить контрольное время

---

*Пономарев Юрий Юрьевич* – эксперт, ООО "Автоматизированные системы, консалтинг, информационные технологии"; e-mail: yura\_graph@mail.ru, тел.: +7(903)537-46-11

для прохождения первого из них – курса «Установка и настройка серверных продуктов МойОфис».

**Постановка задачи.** Рассмотрим краткую процедуру установки и те этапы, которые необходимо пройти для установки любых серверных продуктов на примере «МойОфис Частное облако 2».

Ставить продукт будем на четыре виртуальных сервера в среде Proxmox.

```
Virtual Machine 30150 (infra-01) -- сервер INFRA.  
Virtual Machine 30151 (pgs-01) -- сервер PGS.  
Virtual Machine 30152 (cosa-01) -- сервер COSA.  
Virtual Machine 30153 (psn-01) -- сервер PSN.
```

Конфигурации – для удовлетворения минимально необходимых требований: минимум 8 Гб ОЗУ, 8 ядер, 64 либо 100 Гб виртуальный HDD. Достаточно для тестовой миграции до 1000 пользователей, суммарная их квота на почту – до 2,5 Гб.

Шаги установки.

1. Установка операционной системы, например Centos 7.9.
2. Установка выданных вам системных адресов и параметров.
3. Установка Ansible на сервер инфраструктуры INFRA. Конфигурация DNS и firewall.
4. Дополнительная конфигурация дисковых массивов PGS (4 диска по 16 Гб) и PSN (2 диска по 16 Гб).
5. Распаковка дистрибутивов PGS, COSA, PSN в директории, созданные на INFRA.
6. Конфигурация файлов развертывания созданными паролями и параметрами настроек.
7. Последовательный запуск команд.

```
./deploy_co.sh standalone -u $SA -b -- развертывание  
сервера COSA.  
./deploy_psn.sh hosts.yml -b -u $SA -- развертывание  
сервера PSN.  
./deploy.sh hosts-sa.yml --diff -b -u $SA -- развертывание  
сервера PGS.
```

8. Проверка развернутого облака на пригодность к развертыванию тенанта.

```

curl -X POST https://pgs.$INV_DOMAIN_FQDN \
/pgsapi/?cmd=api_version | jq
CO_MANAGE_API_USERNAME= \
$(awk -F ":" '/CO_MANAGE_API_USERNAME/{print $2}' \
~/bak/co/private.yml | tr -d "\ \")
CO_MANAGE_API_PASSWORD= \
$(awk -F ":" '/CO_MANAGE_API_PASSWORD/{print $2}' \
~/bak/co/private.yml | tr -d "\ \")
curl -u $CO_MANAGE_API_USERNAME: \
$CO_MANAGE_API_PASSWORD \
http://$COSA_01_IP_ADR:8888/api/manage/core/status \
| jq .all

```

#### 9. Создание тенанта.

```

KEYCLOAK_PASSWORD=
$(awk -F ':' '/KEYCLOAK_PASSWORD/{print $2}' \
$PGS_ID/inventory/hosts-sa.yaml | tr -d "\ ")
TOKEN=$(curl -k -X POST
"https://pgs.$INV_DOMAIN_FQDN/adminapi/auth" \
-d "username=pgs" \
-d "password=${KEYCLOAK_PASSWORD}" | jq -r .token)
TENANT_ADMIN_PASS=$(pwgen 16 1)
curl -k --header "Authorization: $TOKEN" \
-X POST "https://pgs.$INV_DOMAIN_FQDN/adminapi/tenants" \
-d "default_domain=myoffice-app.ru" \
-d "name=default" \
-d "admin_password=$TENANT_ADMIN_PASS" \
-d "admin_recovery_email=admin@myoffice-app.ru" \
-d "max_user_count=1000" \
-d "passwordPolicy=forceExpiredPasswordChange(365)" | jq

```

#### 10. Запоминание местонахождения пароля тенанта.

```
echo $TENANT_ADMIN_PASS >> ~/bak/pgs/tenant_admin_pass
```

#### 11. Выполнение простых упражнений в созданном тенанте.

```

https://admin.myoffice-app.ru/#/users -- создание
пользователей.
https://auth.myoffice-app.ru -- принятие пользовательского

```



соглашения и работа с облачными редакторами,  
почтой, календарем.

**Основные результаты.** В рамках мастер-класса студенты получили следующие навыки:

1. Развертывание продукта «МойОфис Частное облако 2».
2. Работа над совершенствованием навыка администрирования.
3. Получение достаточного пользовательского опыта для импортозамещения продукта MS Office.
4. Работа с макросами языка Lua вида «Запись в таблицу», «Простой ввод текста в документ», «Подсчет числа слов». «Запись в таблицу»

```
local tbl = document:getBlocks():getTable(0)
cell = tbl:getCell("A1")
cell:setText("Привет, мир 3 раза!")
```

«Простой ввод текста в документ»

```
local range = document:getRange()
local pos = range:getEnd()
pos:insertText("Выводы1")
local pos = range:getEnd()
pos:insertText("Выводы2")
local pos = range:getEnd()
pos:insertText("Выводы3")
local pos = range:getEnd()
pos:insertText("Выводы4")
local pos = range:getEnd()
pos:insertText("Выводы5")
```

«Подсчет числа слов»

```
local range = document:getRange()
local pos = range:getEnd()
text = range:extractText()
local reg = string.format("(^[^%s]+)", "\n")
local newLine = 0
for text in string.gmatch(text, reg) do
  newLine = newLine + 1
end
```

```

local range = document:getRange()
local pos = range:getEnd()
pos:insertText("Число слов")
t_id = pos:insertTable(1,2,"Число слов")
local tbl= document:getBlocks():getTable(t_id)
tbl:getCell(DocumentAPI.CellPosition(0,0)) ~
:setText("Кол-во слов")
tbl:getCell(DocumentAPI.CellPosition(0,1)) ~
:setText(tostring(newLine))

```

5. Получение возможности работы с Ansible.

6. Общение для дальнейшей профориентации и перспективного трудоустройства.

**Заключение.** Все указанные действия, учебные материалы и команды могут быть изучены на обучающих IT курсах компаний РДТЕХ и «Хаб знаний «МойОфис». Мы неустанно стремимся внедрять российские технологии, поэтому на 2023/24 учебный год и далее в нашей компании запланированы курсы: «Установка и настройка серверных продуктов «МойОфис», «Базовое администрирование серверных продуктов «МойОфис», «Массовая установка «МойОфис Стандартный» на ОС Linux». Прохождение этих трех курсов позволяет претендовать на сертификат инженера по соответствующему продукту. При полном изучении продукта «Mailion» можно претендовать на звание эксперта по продуктам «МойОфис». Автор статьи участвует в подготовке специалистов для миграции на данные продукты.

**Благодарности.** Работа над этой статьей шла в сотрудничестве с Дмитрием Потаповым – руководителем методологической части компании «Хаб знаний «МойОфис» и его сотрудниками.

## Литература

1. Документация по «МойОфис Частное облако 2» [Электронный ресурс]: URL:<https://support.myoffice.ru/products/myoffice-private-cloud/> (дата обращения: 25.06.23).
2. Пособие по Ansible [Электронный ресурс]: URL:<https://habr.com/ru/articles/305400/> (дата обращения: 25.06.23).

3. Дополнительная профессиональная программа повышения квалификации «Установка и настройка серверных продуктов МойОфис» [Электронный ресурс]: URL:<https://myofficehub.ru/courses/nastroyka-i-ustanovka-servernykh-produktov-myoffice/> (дата обращения: 25.06.23).
4. Дополнительная профессиональная программа повышения квалификации «Базовое администрирование серверных продуктов МойОфис» [Электронный ресурс]: URL:<https://myofficehub.ru/courses/administrirovanie-servernykh-produktov-myoffice/> (дата обращения: 25.06.23).
5. Дополнительная профессиональная программа повышения квалификации «Массовая установка «МойОфис Стандартный» на ОС Linux» [Электронный ресурс]: URL:<https://myofficehub.ru/courses/massovaya-ustanovka-myoffice-standartnyu-na-os-linux/> (дата обращения: 25.06.23).
6. Справочник макрокоманд на языке Lua [Электронный ресурс]: URL:[https://support.myoffice.ru/upload/iblock/02c/MyOffice\\_Standard\\_2020.03\\_Lua\\_Macros\\_Reference\\_Guide.pdf](https://support.myoffice.ru/upload/iblock/02c/MyOffice_Standard_2020.03_Lua_Macros_Reference_Guide.pdf) (дата обращения: 25.06.23).

УДК 004.89

Пономарев Ю. Ю.

**Как анализировать ноты  
в виде звуков и печатных образов  
при помощи систем с ИИ  
с преобразованием в MusicXML**

**Введение.** Данная статья была написана на основании материалов мастер-класса «Основы ИИ в музыке и Prompt-инженерии на базе открытых продуктов российских и шведских компаний». Он проводился на мощностях УЦ НОУ РДТЕХ в рамках 54-й Международной научной конференции аспирантов и студентов факультета ПМ – ПУ «Процессы управления и устойчивость» для выявления подготовленности и вовлечения студентов в работу с высокими технологиями. Мастер-класс транслировался на английском языке на два китайских университета-партнера факультета ПМ – ПУ СПбГУ.

Кажется, что о музыке мы знаем все. Определить тональность, создать ритм, выстроить гармонию – уже множество раз решенная человечеством задача в том числе и на уровне программных средств. Но творческий процесс остановить нельзя – появляются программные средства, интегрирующие весь спектр действий как начинающего, так и профессионального музыканта. Автор на протяжении десяти лет решал задачу: что и как оценивать у людей, профессионально и по-любительски занимающихся музыкой, насколько ИИ может усилить любителя, помочь довести его идеи до конкретных нот и партий. При помощи подходов, указанных в статье, написано более 400 мелодий и одна опера. Если вы тоже хотите попробовать повторить путь автора – посмотрите на мой подход.

Еще одной целью этого проекта были дистанционные исследования возможности анализа прогресса при удаленной и дистанционной работе над предметами творческого цикла средней школы. Для них использовалась «многоголовая» нейросеть на основе подкрепления

---

*Пономарев Юрий Юрьевич* – эксперт, ООО "Автоматизированные системы, консалтинг, информационные технологии"; e-mail: yura\_graph@mail.ru, тел.: +7(903)537-46-11

и синтеза оптимального решения. Исследования еще продолжаются. Они были бы невозможны, если бы в начале 21 века автор не поработал аналитиком и проектировщиком систем приема экзаменов, проанализировав условия более двух миллионов задач в каждом школьном предмете.

Для начальной работы со всеми средствами и программами с ИИ, указанными в статье, рекомендуется определить вашу личную музыкальность. Из множества методик (камертоновой, повторенческой, путем записи нот) – автор рекомендует две, наиболее простые и действенные.

Сначала определяется возможность повторить музыкальные тоны внутри детских песен, путем их прослушивания. Поскольку музыкальный слух человека делится на внутренний и внешний, эта проверка на радиостанциях сводится к определению числа фальшивых нот в фиксированной и специально сформированной фонограмме. Внутренний слух, к сожалению, можно проверить только подавая звук камертона как можно ближе к внутреннему уху, что сразу вызывает погрешности.

Еще необходимо проверить музыкальность устройств для ИИ: определить частотный и динамический диапазоны, уровень сигнал/шум. Из-за наличия большого количества гармонических колебаний в спектре звука низкий динамический диапазон и большой шум затрудняют работу ИИ.

Конечно, все эти процедуры ускорит наличие парка измерительной аппаратуры. Желательно пройти консультацию у опытного преподавателя сольфеджио или преподавателя вокала.

Основой системы распознавания был выбран базовый музыкальный XML формат – MusicXML [1]:

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8" standalone="no"?>
<!DOCTYPE score-partwise PUBLIC
  "-//Recordare//DTD MusicXML 4.0 Partwise//EN"
  "http://www.musicxml.org/dtds/partwise.dtd">
<score-partwise version="4.0">
  <part-list>
    <score-part id="P1">
      <part-name>Music</part-name>
    </score-part>
  </part-list>
```

```

<part id="P1">
  <measure number="1">
    <attributes>
      <divisions>1</divisions>
      <key>
        <fifths>0</fifths>
      </key>
      <time>
        <beats>4</beats>
        <beat-type>4</beat-type>
      </time>
      <clef>
        <sign>G</sign>
        <line>2</line>
      </clef>
    </attributes>
    <note>
      <pitch>
        <step>C</step>
        <octave>4</octave>
      </pitch>
      <duration>4</duration>
      <type>whole</type>
    </note>
  </measure>
</part>
</score-partwise>

```

При этом на нотном стане это выглядит так (см. рис. 1). Здесь сразу же показан интерфейс контрольной программы – отличного нотного редактора MuseScore [2].

**Описание предметной области.** Без ограничения общности решаемых задач, разделим их на распознавание музыки «записаной печатными нотами» и «звучащими или пропетыми кем-либо соло, либо под простой аккомпанимент».

Предлагаются решения в виде open-source инструмента Audiveris [3] – «записаной печатными нотами», и условно-платной программы ScoreCloud SongWriter [4] или ее неполного функционального анало-

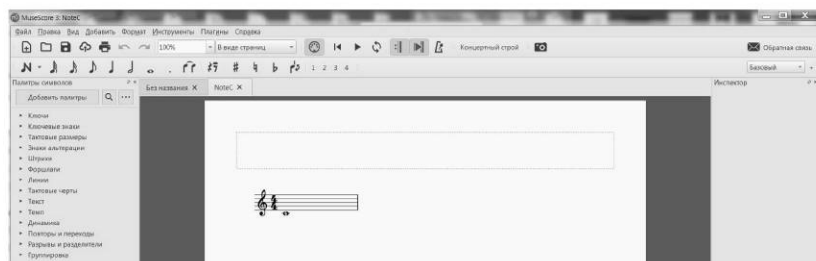


Рис. 1. Интерфейс нотного редактора MuseScore

га ScoreCloud Studio [5] – «звучащими или пропетыми кем-либо соло, либо под простой аккомпанимент».

Предметная область сольфеджио [6] складывается из описания стандартов воспроизведения нот на бумаге и в виде музыкальной информации. Для данной предметной области предлагаемых программ достаточно для использования в любительских целях распознавания и воспроизведения в формате MusicXML.

**Постановка задачи.** Сформулируем наши цели по пунктам:

1. Перевести и распознать музыкальный архив известного композитора [7] из печатного формата PDF в Music XML.
2. Создать музыкальную партию из несложной звучащей песни с простым аккомпаниментом.
3. Создать музыкальный детский коллектив, сочетая задачи из пунктов 1, 2.

Базовой системой оптического распознавания будет Tesseract 5.0.0 для Linux или 3.0 для Windows [8] – OCR с открытым кодом для быстрой работы системы на современных процессорах (базовая система OCR для программы Audiveris).

**Основные результаты.** Установка Audiveris описана в [9]. Данная печатная работа была номинирована на премию сайта Habr.com в разделе «Сделай сам». Установка продуктов ScoreCloud SongWriter и ScoreCloud Studio сложности не составляет, базовые приемы работы описаны в статье автора [10].

Для решения задачи 1 по переводу и распознаванию собрания сочинений Баха [7] хватает шести часов работы среднего персонального компьютера с процессором i5-2500 и 64 Гб ОЗУ для создания

его полного архива в MusicXML. Автор данной статьи неоднократно проделывал эту операцию с различными печатными нотными архивами. Качество распознавания сильно зависит от качества распознавания нот в PDF. При полиграфическом качестве распознавания в 300DPI количество правильно распознанных нот составляет более 75% от всех предъявленных к распознаванию.

Маленькой елочке холодно зимой

З. Александрова М. Красев

$\text{♩} = 78$

**Рис. 2.** Простая и известная всем мелодия «Маленькой елочке холодно зимой»

Для задачи 2 были подобраны специальные отрывки мелодий с разным темпом, звуковысотной, мелодической и голосовыми партиями. Результаты распознавания выбранных мелодий показаны на рисунках 2–4. На рисунке 2 приведена простая детская песня. Попадание в ноты – идеальное. На рисунке 3 показаны результаты распознавания современной народной песни, с насыщенным народным распевом, сложным ритмом, переходом вокальной партии в инструментальную. Распознавание – свыше 95% нот. На рисунке 4 приведено несколько тактов сложной современной оперы «Анна Снегина» композитора Владислава Агафонникова. Система распознавания справилась не только с концертным исполнением, но смогла воссоздать полифонию струнных групп, передать драматичность и кульминацию оперы. Автор оперы отлично повторил народные мелодии средствами симфонического оркестра. Опера была распознана полностью, по оценкам музыкальных экспертов, качество работы с нотным материалом – свыше 95%. После работы ИИ оперу смогли



исполнить на других музыкальных инструментах, сменив немного настройки в сторону упрощения записи аккордов, даже на гитаре, т. е. программа проявила навыки не только автоаранжировщика, но и совсем немного электронного композитора.

**ВЕРБА ДАРИТ ВЕТКИ НАМ...**

Татьяна Шорыгина Людмила Ершова

♩ = 118



**Рис. 3.** Современная народная песня с народным распевом и ритмом, сыгранным на бубенцах

**Анна Снегина, опера**

либретто Григория Шапиро музыка Владислава Агафонникова

♩ = 130



**Рис. 4.** Насыщенное звучание струнной группы в оперном произведении

Таким образом, общий результат работы – от 80% до 100% правильного распознавания при длине фонограмм не более одной минуты, микрофонный ввод с отношением сигнал/шум свыше 70 Дб и частотным диапазоном от 20 до 20000 Гц.

Решение задачи 3 удовлетворяет среднему уровню любительского исполнения песен, ведение голосов по партиям требует дополнительной проверки музыкальной памяти у детей, знания нотной грамоты кем-то одним. Для нот песни «Верба дарит ветки нам...» хор детей распознается хорошо – свыше 80% попаданий в ноты после 10 репетиций.

**Заключение.** В статье кратко рассмотрены технологические аспекты современного open-source и платных программных продуктов для создания музыкальной информации в виде MusicXML. Проверенные методики и программы внедрены в ряд детских музыкальных коллективов. Решены задачи 1–3 на начальном профессиональном уровне.

**Благодарности.** Выражаю признательность приходу Николая Чудотворца Русской православной церкви в селе Бутурлино Московской области как первоисточнику вдохновения для работы с музыкальной информацией религиозного и светского характера на музыкальных праздниках. Хочу поблагодарить всех детей, проходивших в разные годы воспитательную и образовательную программу в воскресной школе этого прихода.

## Литература

1. MusicXML [Электронный ресурс]: URL:<https://www.w3.org/2021/06/musicxml40/tutorial/hello-world> (дата обращения: 25.06.23).
2. MuseScore [Электронный ресурс]: URL:<https://musescore.org/ru> (дата обращения: 25.06.23).
3. Audiveris [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/Audiveris/audiveris/releases> (дата обращения: 25.06.23).
4. ScoreCloud [Электронный ресурс]: URL:<https://scorecloud.com/songwriter> (дата обращения: 25.06.23).

5. ScoreCloud Studio [Электронный ресурс]: URL:<https://scorecloud.com/download/> (дата обращения: 25.06.23).
6. Сольфеджио [Электронный ресурс]: URL:<https://www.culture.ru/s/slovo-dnya/solfedzhio/> (дата обращения: 25.06.23).
7. List of compositions by Johann Sebastian Bach [Электронный ресурс]: URL:[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_compositions\\_by\\_Johann\\_Sebastian\\_Bach#20th-century\\_additions\\_to\\_the\\_BWV\\_catalogue\\_and\\_Anhang](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_compositions_by_Johann_Sebastian_Bach#20th-century_additions_to_the_BWV_catalogue_and_Anhang) (дата обращения: 25.06.23).
8. Tesseract OCR [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/tesseract-ocr/tesseract/releases> (дата обращения: 25.06.23).
9. Как линуксовый админ управлял детским хором с помощью системы распознавания нот под Ubuntu 16.04. Микрофон и аккорды [Электронный ресурс]: URL:<https://habr.com/ru/companies/rdtex/articles/460207> (дата обращения: 25.06.23).
10. Как я учился сочинять музыку с помощью программы ScoreCloud SongWriter [Электронный ресурс]: URL:<https://habr.com/ru/articles/716422> (дата обращения: 25.06.23).

## Contents

<b>Plenary Session</b> .....	<b>9</b>
Invited speaker .....	9
<i>Krivovichev G. V.</i> One-dimensional models of blood flow in large vascular systems .....	11
<b>1. Mathematical theory of control processes</b> .....	<b>35</b>
<i>Andriyanova N. R.</i> A problem of uniform distribution on a segment for linear multi-agent discrete systems with switching and delays .....	35
<i>Belov A. I.</i> Stability condition for linear system with two commensurate delays .....	41
<i>Wu Y. , Ye P.</i> Nonlinear optimal lake pollution control with two types of switches .....	46
<i>Evtina D. S.</i> Lyapunov – Krasovskii functionals for complex time-delay systems .....	51
<i>Zhivulin E. A., Grishkin V. M.</i> Calculation of the bypass trajectory of a moving vessel in order to save fuel .....	56
<i>Litvinov N. N.</i> On the computational complexity of a discrete control algorithm .....	65
<i>Makoveeva P. E.</i> Construction of a functional with a given derivative for a system with distributed parameters .....	71
<i>Rozengard A. S.</i> Analysis of the behavior of the roots of a quasipolynomial depending on the time-delay .....	77
<i>Sokolov V. M.</i> The generalized Myshkis problem for linear systems with a single delay .....	82
<i>Suliman B.</i> Mathematical modeling of the dynamics of a controlled cart in the presence of delay in the feedback channel .....	89
<i>Tomilova A. S.</i> Application of the optimal damping concept to the control law synthesis of a wheeled robot .....	95
<i>Tran D.</i> Software package for solving initial-boundary value problem for hyperbolic distributed parameter equation in network-like domain .....	100

**2. Mathematical methods in mechanics and physics . . . . . 105**

*Alcybeev G. O., Burova I. G.* On the splines application for solving of the weak singularity integral equations . . . . . 105

*Volokitin E. M.* Identification of a single-link pendulum model . . . 110

*Vyal'ceva V. V., Sedova O. S.* Application of iterations of the generalized finite element method with a local and global approach for the Kirsch problem . . . . . 115

*Goncharuk D. D.* Identification shipwreck development as a result of compartments flooding . . . . . 120

*Mullayanov T. O.* The boundary perturbation method for solving a problem of nanoscale surface relief in a solid . . . . . 127

*Obada M. H., Shymanchuk D. V.* Using the annealing method to solve the inverse problem of the robot manipulator position . . . . 132

*Rudneva E. V.* Adapted Bat-Inspired algorithm in the searching for the cost-optimal road trajectory . . . . . 140

*Rybalkin A. A.* Real-time control of a robot manipulator with an external measuring system as an observer . . . . . 144

*Rychkov A. S.* Building of the optimal-cost road on the terrain in terms of integral cost functional using ant colony optimization . . 151

*Sokolov I. A., Nikiforov K. A.* Simulation of a field emission cathode-modulator assembly . . . . . 156

*Hoang V. N.* The problem of discrete optimization of a differential-difference system with distributed parameters on a graph . . . . . 161

*Yagafarov A. R., Eremin A. S.* On a two-stage Runge–Kutta method for retarded functional differential equations . . . . . 166

**3. Mathematical models of medical and biological systems . . . . . 171**

*Asaturyan V. G.* Statistical analysis of data from a population cohort study of brain aging and the onset of Alzheimer's disease . 171

*Belyaeva A. A.* Implementation of an optimization algorithm of velocity field building . . . . . 174

*Davydenko B. N.* Investigation of changes in the biomechanical characteristics of the cornea after surgery using ReLEx SMILE method . . . . . 180

<i>Zalesov I. M., Goncharova A. B., Kozubova K. V.</i> A model for determining the metastatic use of the liver according to contrast-enhanced ultrasound scanning.....	184
<i>Ponomareva P. M.</i> Modeling the dynamics of COVID-19 proliferation using the example of the first waves of the pandemic in Germany.....	189
<i>Seliverstova K. A.</i> Application of statistical methods to estimate global warming.....	195
<i>Frolova E. A.</i> Statistical analysis of clinical indicators of patients with severe burn injury.....	200
<i>Khomenko I. E., Legkova I. A.</i> Application of logistic regression to analyze the need to connect a patient with a coronavirus infection to a ventilator.....	207
<i>Shmidt Ya. A.</i> Sarcopenia analysis via machine learning methods..	211
<i>Kamguia F. H., Kozubova K. V.</i> Application of neural networks to recordings of ultrasound exams to identify focal forms in the liver.....	216
<b>4. Information and computer technologies.....</b>	<b>221</b>
<i>Adamovich A. O.</i> Algorithm for estimating parameters in finite time at setting up weights of a neural network.....	221
<i>Alcybeev G. O.</i> Cross-platform linear algebra library for C++.....	227
<i>Babkina A. V.</i> Piano music notes recognition using machine learning.....	233
<i>Beresnev V. S.</i> Natural and programming language text generation.....	240
<i>Ganaeva D. D.</i> Time series forecasting using nonlinear dynamic systems reconstruction method.....	245
<i>Devrishev N. E.</i> Improving zero-shot translation using lexical similarity of languages.....	250
<i>Dmitrieva K. A.</i> Application of the RRT* algorithm to the cost-optimal trajectory for road construction on a restricted terrain search.....	259
<i>Ezhov F. V., Larin E. S., Blekanov I. S., Kim G. I.</i> Neural network methods for segmentation of the cardiac aorta in automatic diagnosis of CT images.....	263

<i>Indykov D. A.</i> Human eye capillaries segmentation from ophthalmic slit lamp images .....	268
<i>Isaev R. O., Kupriyanov I. V., Mityaj G. V., Shkolin A. Yu.</i> Development of a news aggregator using neural networks.....	275
<i>Kalinin P. E.</i> Particle swarm optimization .....	281
<i>Klimenko I. S.</i> Matrix mappings method for solving a system of differential equations with the parameter.....	286
<i>Kovalenko L. A., Blekanov I. S., Ezhov F. V., Razumilov E. S.</i> Crowdsourcing tools for the analysis and processing of medical CT images.....	291
<i>Larin E. S., Kovalenko L. A., Blekanov I. S., Kim G. I.</i> Methods for constructing a 3D model of the thoracic aorta and its section for automatization the CT diagnostic process.....	298
<i>Olenev R. O.</i> Stock index forecasting using ARIMA and LSTM..	304
<i>Ponomarev Yu. Yu.</i> Questions of accurate estimates of the characteristics of trees at modeling terms of subject areas, neural networks, XML data .....	309
<i>Popov A. P., Blekanov I. S.</i> Neural network methods for improving the image quality of X-ray images of agricultural seeds .....	318
<i>Rychagov E. A.</i> Audio signal equalization methods.....	325
<i>Sadiekh S. A.</i> Analysis of the possibility of explaining the work of artificial intelligence algorithms.....	331
<i>Skachikhin A. M.</i> Automatic text summarization using machine learning and artificial intelligence algorithms .....	340
<i>Chen X., Dan J., He Y., Sun M., Guo Z., Li Y.</i> Implementation of 22 categories license plate recognition and multiple license plate detection.....	346
<i>Liu J., Zhang C., Li Z.</i> Computer vision-based license plate recognition technology .....	354
<i>Liu Y., Xia Y., He J.</i> Detection of green walnuts on trees using improved deep learning model.....	362
<i>Liu Y., Xu H., Li Z., Liang Y.</i> Pedestrian detection system based on YOLOv3.....	367
<i>Qiao T., Zhang R., Ma X.</i> Study of the optimization problem of grouping batches of square-shaped parts.....	373

<i>Ren Y., Yang Z., Zhang T., He Y.</i> The quantitative research on big data of stocks based on the BIAS.....	380
<i>Wang B., Qiao X., Su R., Zhu M.</i> Analysis and identification of unknown glass components based on data mining .....	386
<i>Zhang Y., Li Y., Li Y., Guo Z., Zhang D.</i> A review of adversarial attacks in computer vision .....	393
<b>5. Control problems in social and economical systems ...</b>	<b>429</b>
<i>Gordyushin D. S.</i> Assessment of the economy state using simulation.....	429
<i>Kareeva Yu. S.</i> On the indifference zone in the Friedkin – Johnsen opinion dynamics game .....	439
<i>Korol M. M.</i> Parallel computing in the traffic assignment problem .....	444
<i>Kosyanov N. O.</i> Applying model predictive control to find effective controls in the SIIR problem .....	449
<i>Kumacheva S. S., Novgorodtcev V. A., Kudin P. S.</i> On optimizing decisions with a predictive module in reinforcement learning..	454
<i>Lorits E. M.</i> An evolutionary game with environmental feedback and players’ opinions.....	462
<i>Nemtsev D. Yu.</i> Average tree solution as a measure of the centrality of the graph vertices .....	467
<i>Pisareva A. M.</i> Building a punishment strategy in repeated games “Prisoner’s dilemma” .....	472
<i>Ulianova D. S.</i> Statistical analysis of tuberculosis mortality .....	477
<i>Khitraya V. A.</i> Graph vertex ranking as a cooperative game on an electric circuit .....	482
<i>Chaikin G. A.</i> Distribution of problem topics between students ..	490
<i>Bai H., Li Y.</i> Spatial analysis of the birth rate in China .....	496
<i>Bai M.</i> Profit sharing licensing with many firms .....	501
<i>Gao Z., Wang Q., Liu Z., Fan X.</i> Optimization study of an ethanol preparation model for C4 olefins .....	506
<i>Lin P.</i> New energy vehicle sales forecast based on time series and neural network.....	512



<b>6. Master classes.....</b>	<b>519</b>
<i>Ponomarev Yu. Yu.</i> Method base to teach, to implement, and to work with cloud tech of MyOffice™ in examples of setup MyOffice Cloud 2. Lua fundamentals.....	519
<i>Ponomarev Yu. Yu.</i> How to use AI for notes recognition by hard-copy and sounds to translate it into MusicXML.....	525
<b>Contents .....</b>	<b>533</b>
<b>Author index.....</b>	<b>539</b>

### Именной указатель

Адамович А. О.	221	Еремин А. С.	166
Алцыбеев Г. О.	105, 227	Живулин Е. А.	56
Андриянова Н. Р.	35	Залесов И. М.	184
Асатурян В. Г.	171	Индьков Д. А.	268
Бабкина А. В.	233	Исаев Р. О.	275
Белов А. И.	41	Калинин П. Е.	281
Беляева А. А.	174	Кареева Ю. С.	439
Береснев В. С.	240	Ким Г. И.	263, 298
Блеканов И. С.	263, 291, 298, 318	Клименко И. С.	286
Бурова И. Г.	105	Коваленко Л. А.	291, 298
Волокитин Е. М.	110	Козубова К. В.	184
Ву И.	46	Король М. М.	444
Вяльцева В. В.	115	Косьянов Н. О.	449
Ганаева Д. Д.	245	Кривовичев Г. В.	9, 11
Гончарова А. Б.	184	Кудин П. С.	454
Гончарук Д. Д.	120	Кумачёва С. Ш.	454
Гордюшин Д. С.	429	Куприянов И. В.	275
Гришкин В. М.	56	Ларин Е. С.	263, 298
Давыденко Б. Н.	180	Легкова И. А.	207
Девришев Н. Э.	250	Литвинов Н. Н.	65
Дмитриева К. А.	259	Лориц Е. М.	462
Е П.	46	Маковеева П. Е.	71
Евтина Д. С.	51	Митяй Г. В.	275
Ежов Ф. В.	263, 291	Муллаянов Т. О.	127

Немцев Д. Ю.	467	Фролова Е. А.	200
Никифоров К. А.	156	Хиграя В. А.	482
Новгородцев В. А.	454	Хоанг В. Н.	161
Обада М. Х.	132	Хоменко И. Е.	207
Оленев Р. О.	304	Чайкин Г. А.	490
Писарева А. М.	472	Шиманчук Д. В.	132
Пономарев Ю. Ю. 309, 519, 525		Школин А. Ю.	275
Пономарева П. М.	189	Шмидт Я. А.	211
Попов А. П.	318	Ягафаров А. Р.	166
Разумилов Е. С.	291	Vai H.	496
Розенгард А. С.	77	Vai M.	501
Руднева Е. В.	140	Chen X.	346
Рыбалкин А. А.	144	Dan J.	346
Рычагов Е. А.	325	Fan X.	506
Рычков А. С.	151	Gao Z.	506
Садиев С. А.	331	Guo Z.	346, 393
Седова О. С.	115	He J.	362
Селиверстова К. А.	195	He Yuwei	346
Скачихин А. М.	340	He Yuxi	380
Соколов В. М.	82	Kamguia F. H.	216
Соколов И. А.	156	Kozubova K. V.	216
Сулиман Б.	89	Li Yao	346, 393
Томилова А. С.	95	Li Yike	496
Тран З.	100	Li Yin	393
Ульянова Д. С.	477	Li Zhuo	354

Li Zekun	367	Wang B.	386
Liang Y.	367	Wang Q.	506
Lin P.	512	Xia Y.	362
Liu J.	354	Xu H.	367
Liu Y.	362, 367	Yang Z.	380
Liu Z.	506	Zhang C.	354
Ma X.	373	Zhang D.	393
Qiao T.	373	Zhang R.	373
Qiao X.	386	Zhang Y.	393
Ren Y.	380	Zhang T.	380
Su R.	386	Zhu M.	386
Sun M.	346		

Ежегодное научное издание

**ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ**

**Том 10(26)**

Труды 54-й международной научной конференции  
аспирантов и студентов

Редакторы текста на русском языке: *А. С. Ерёмин, Т. Е. Смирнова*

Редакторы текста на английском языке: *А. С. Ерёмин, М. А. Смирнова*

Компьютерная верстка: *М. Н. Смирнов, М. А. Смирнова*

Подписано в печать 24.06.2023  
Усл. печ. л. 31,45. Тираж 150 экз.

198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35