

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2022–2023 гг.

Санкт-Петербург
ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
2023

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН *А. К. Беляев* (науч. рук. семинара) (ИПМаш РАН), канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ), канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Архипова* (отв. секретарь) (ВИ(ИТ) ВА МТО), PhD, Sr. lecturer *Е. И. Апрощенко* (Ун-т Нового Южного Уэльса, Австралия), д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ), канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (СПбГУ), д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС), д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь), д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помяткин* (СПб ГУАП), д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Ун-т Ольборга, Дания), д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ), канд. физ.-мат. наук *Д. В. Франус* (Фонд «УниШанс»)

Т78

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 131 с.

ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Издание адресовано исследователям, специализирующимся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды. Семинар проводится математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета совместно с Институтом проблем машиноведения РАН.

ISSN 2218-7421

ISBN 978-5-7422-8198-6

ББК 22.25

- © Институт проблем машиноведения РАН, 2023
- © Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2023



Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»



МАВИС
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АЛИАНС ВИРТУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА НАНО- И МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ЛАЗЕРНЫХ ТЕРМООПТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Н. Ф. Морозов, А. В. Лукин, И. А. Попов, Л. В. Штукин

В работе исследуется нелинейная динамика связанных продольно-изгибных колебаний заземленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Исследуется режим параметрических колебаний микробалки в условиях внутреннего кратного резонанса между некоторыми изгибной и продольной формами свободных колебаний резонатора. Обнаружена возможность генерации в системе режима продольно-изгибных биений, частота медленной огибающей которых существенным образом зависит от параметра внутренней частотной расстройки, непосредственно связанного с величиной внешних возмущений, подлежащих высокоточному измерению.

1. ВВЕДЕНИЕ

Принцип лазерного термооптического воздействия на деформируемую среду находит все более широкое применение в задачах неразрушающего контроля оборудования и конструкций [1,2], определения физико-механических свойств материалов [3,4], изучения геометрических и физических параметров объектов и структур на нано- и микромасштабном уровне [5,6], в биомедицине [7], а также в индустрии нано- и микросистем. Так, в работах [8,9] представлены модели микромеханических актуаторов, использующих оптический метод сообщения упругому элементу температурных деформаций. В работе [10] исследуются вопросы влияния лазерного излучения на деформации поверхности микромеханических зеркал. Одним из важных направлений разработок и исследований

Доклад на семинаре 25 октября 2022 г.

© Н. Ф. Морозов, А. В. Лукин, И. А. Попов, Л. В. Штукин, 2023.

Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4577.2022.1.1.

в указанной области является лазерная термооптическая генерация колебаний подвижных элементов микроэлектромеханических систем различного назначения (датчики, системы обработки сигналов). В работе [11] представлены результаты разработки волоконно-оптических сенсоров, работающих в авторезонансном режиме при оптическом возбуждении. В работе [12] теоретически обоснован и экспериментально проверен метод лазерной термооптической частотной подстройки микромеханического резонатора и управления его нелинейной амплитудно-частотной характеристикой. В работе [13] сообщается об успешных экспериментах по термооптическому возбуждению многомодового параметрического резонанса в графеновых мембранах. В работе [14] представлены результаты исследования нелинейной динамики системы слабо связанных микроэлектромеханических генераторов предельных циклов с термооптическим принципом возбуждения колебаний.

При рассмотрении динамики упругих элементов резонаторов, входящих в состав микро- и наноэлектромеханических систем (МНЭМС), часто применяется механическая модель Бернулли–Эйлера. На эту тему есть обширная литература. Здесь упомянем лишь некоторые работы, в которых решены задачи, наиболее близкие по постановке к представленной далее. В [15] исследуется динамическая потеря устойчивости прямолинейного стержня с учетом процесса распространения упругих волн в продольном направлении. Показано, что критическая осевая нагрузка при динамическом воздействии может быть меньше эйлеровой в связи с реализацией параметрического резонанса, возбуждаемого продольными колебаниями. В работе [16] исследуется нелинейная динамика пространственных изгибно-крутильных колебаний стержня в случае множественных внутренних резонансов. Методы исследования и характер процессов модальной локализации в балке Бернулли–Эйлера исследуются в работе [17]. В работе [18] рассматривается задача о проектировании изохронных балочных элементов — систем, частоты свободных изгибных колебаний которых не зависят от амплитуды колебаний даже в нелинейных режимах движения.

Большое число работ посвящено изучению сложных режимов колебаний в нелинейных механических системах с сосредоточенными и распределенными параметрами. В работе [19] исследуется

характер нелинейных нормальных мод в одномерных континуальных системах с квадратичными и кубическими нелинейностями в случае различных внутренних резонансов. В работе [20] предложены эффективные аналитические подходы, позволяющие описывать процессы биений и обмена энергией между модами в системах слабо связанных осцилляторов. В работе [21] в достаточно общей постановке исследуются качественные особенности нелинейной динамики свободных колебаний для системы с двумя степенями свободы в случае внутреннего резонанса 1:1.

Отдельный класс исследований составляют работы, посвященные задачам нелинейного модального взаимодействия между продольными и изгибными движениями струн, кабелей и стержней. Так, в работе [22] исследованы пространственные продольно-изгибные колебания натянутой струны в условиях внутреннего резонанса с учетом физической нелинейности системы. В работе [23] изучена динамика продольно-изгибных движений существенно растяжимого кабеля в геометрически нелинейной постановке в предположении линейно-упругого поведения материала. Нелинейная динамика продольно-изгибных колебаний балки, движущейся в осевом направлении, исследована в работе [24].

Проблемы аналитического исследования связанных термоупругих колебаний рассматриваются в большом количестве монографий и статей. В работе [25] представлены редуцированные модели, позволяющие вычислительно эффективно моделировать двусторонне связанные термоупругие процессы в пластинах. В ряде работ изучаются тепловые и механические процессы в элементах конструкций при нестационарных температурных воздействиях. В [26] разработана двухтемпературная модель, описывающая оптическое возбуждение акустических колебаний в проводниках. Динамика балки Бернулли–Эйлера на упругом основании при импульсном лазерном воздействии исследуется в работе [27]. Анализ посткритического поведения балки на винклеровском основании при температурном нагружении выполнен в работе [28].

В выполненных ранее работах [29,30,31] рассматривалась динамика и упругая устойчивость балочного элемента МЭМС и НЭМС при кратковременных тепловых воздействиях. В настоящей работе исследуется характер свободных продольно-изгибных колебаний

стержня в случае внутреннего комбинационного резонанса между двумя изгибными и низшей продольной формами колебаний. Показывается, что начальное возмущение в продольном направлении может эффективно возбуждать изгибные формы колебаний, что в целом приводит к режиму продольно-изгибных биений со значительными амплитудами.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Продольные колебания заземленного с двух концов тонкого прямолинейного линейно-упругого стержня при температурном воздействии описываются уравнениями

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{ES} N - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T(x, z, t) - T_0) dz \quad (2)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad (3)$$

где t — время; x, z — координаты в горизонтальном и вертикальном направлениях; u, w — продольное и поперечное перемещения; N — продольная сила; T — температура в данной точке стержня; T_0 — отсчетная температура; ρ, E, α — плотность, модуль Юнга и коэффициент линейного температурного расширения материала; $S = bh$; L, b, h — длина стержня, ширина и высота поперечного сечения соответственно.

Уравнения (1)–(2) могут быть приведены к одному уравнению продольных колебаний

$$u'' + w'w'' = \frac{\rho}{E} \ddot{u} + \alpha \theta', \quad (4)$$

где $\theta(x, t) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T(x, z, t) - T_0) dz$ — средняя по высоте температура в сечении с координатой x ; $()', \dot{}$ — обозначение частных производных по x и t соответственно.

Изгибные колебания стержня при температурном воздействии описываются уравнениями

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{EJ} \left(M + Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (T(x, z, t) - T_0) dz \right). \quad (6)$$

В поперечном направлении примем условия шарнирного опирания:

$$w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(L, t) = w''(L, t) = 0, \quad (7)$$

где $J = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции сечения.

Введем обозначение N_T для осевой температурной силы в сечении с координатой x и M_T для изгибающего температурного момента:

$$N_T \triangleq ES\alpha\theta = Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T(x, z, t) - T_0) dz, \quad (8)$$

$$M_T \triangleq Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (T(x, z, t) - T_0) dz. \quad (9)$$

Уравнения (5)–(6) могут быть преобразованы к виду

$$EJw^{IV} + \rho S\ddot{w} + N_T w'' = -M_T'' + ES \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] w'' + \rho S\ddot{u}w'. \quad (10)$$

Таким образом, система уравнений (4),(10) совместно с граничными условиями (3),(7) полностью описывает продольно-изгибные колебания стержня при температурном воздействии.

Перейдем к безразмерным переменным:

$$u = \tilde{u}h, \quad w = \tilde{w}h, \quad x = \tilde{x}L, \quad t = \tau T, \quad (11)$$

где $T = \sqrt{\frac{\rho SL^4}{EJ}}$.

Введем следующие обозначения для безразмерных температурных силовых факторов:

$$\tilde{N}^T(\tilde{x}, \tau) = \frac{L^2}{EJ} N_T(L\tilde{x}, T\tau), \quad (12)$$

$$\tilde{N}_x^T(\tilde{x}, \tau) = \frac{L^2}{ESh} N_T'(L\tilde{x}, T\tau), \quad (13)$$

$$\tilde{M}_{xx}^T(\tilde{x}, \tau) = \frac{L^4}{EJh} M_T''(L\tilde{x}, T\tau). \quad (14)$$

Также введем безразмерный параметр $\beta = \frac{1}{12} \frac{h}{L}$, характеризующий тонкость стержня.

Подставляя (11) в (4), (10) и (3), (7), отбрасывая символ $\tilde{}$ и сохраняя обозначения $()'$, $(\dot{})$ за производными по безразмерной продольной координате и времени, получим уравнения движения в следующей форме:

$$u'' + 12\beta w' w'' = 12\beta^2 \ddot{u} + \tilde{N}_x^T, \quad (15)$$

$$w^{IV} + \ddot{w} + \tilde{N}^T w'' = -\tilde{M}_{xx}^T + \frac{1}{\beta} u' w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta \ddot{u} w' \quad (16)$$

с граничными условиями

$$u(0, \tau) = w(0, \tau) = w''(0, \tau) = 0, \quad u(1, \tau) = w(1, \tau) = w''(1, \tau) = 0. \quad (17)$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

3.1. Постановка задачи

Исследуем нелинейное модальное взаимодействие низшей продольной формы колебаний стержня с некоторыми двумя изгибными формами. Рассматриваемая задача имеет вид

$$u'' + 12\beta w' w'' = 12\beta^2 \ddot{u}, \quad (18)$$

$$w^{IV} + \ddot{w} = \frac{1}{\beta} u' w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta \ddot{u} w' \quad (19)$$

с граничными условиями (17).

Примечательно, что в исследуемую систему уравнений входит лишь один параметр — β . Вышеназванное условие внутреннего комбинационного резонанса накладывает определенные условия на его возможные значения.

В контексте задач лазерной термооптической генерации колебаний необходимо учитывать, что условием возбуждения низшей продольной формы колебаний зашпеленного с двух концов стержня является несимметричность теплового лазерного воздействия относительно центрального сечения стержня. В свою очередь, такое воздействие приведет к возбуждению как симметричных, так и несимметричных изгибных форм колебаний. В связи с этим далее рассматривается случай комбинационного резонанса, в который вовлечены, наряду с продольной формой, одна симметричная и одна несимметричная формы изгибных колебаний:

$$\omega_l + \omega_m \simeq \bar{\omega}_n, \quad (20)$$

где $\omega_{l,m}$ — некоторые две частоты изгибных колебаний; $\bar{\omega}_n$ — одна из частот продольных колебаний.

Уравнение малых свободных продольных колебаний в принятых обозначениях имеет вид

$$u'' = 12\beta^2 \ddot{u}. \quad (21)$$

Спектр собственных частот продольных колебаний зашпеленного с двух концов стержня определяется соотношением

$$\bar{\omega}_n = \frac{n\pi}{\sqrt{12}\beta}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (22)$$

Как отмечено выше, везде далее будем принимать $n = 1$.

Спектр изгибных колебаний шарнирно-опертой балки находится из краевой задачи на собственные значения для уравнения

$$w^{IV} + \ddot{w} = 0 \quad (23)$$

и явно выражается формулой

$$\omega_m = (m\pi)^2, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (24)$$

Таким образом, соотношение (20), определяющее диапазон значений параметра β , а значит, отношений высоты сечения балки к ее

длине, необходимый для реализации внутреннего комбинационного резонанса в системе, имеет следующий явный вид:

$$\pi^2 (l^2 + m^2) \simeq \frac{n\pi}{\sqrt{12}\beta}. \quad (25)$$

Соотношение (25) может быть иначе записано как

$$\frac{h}{L} \simeq \frac{\sqrt{12}n}{\pi(l^2 + m^2)}. \quad (26)$$

При рассмотрении различных комбинаций значений индексов l, m, n необходимо учитывать границы применимости механической модели Бернулли–Эйлера, описывающей напряженно-деформированное состояние стержня при изгибе. Характерным показателем в данном случае является отношение длины λ полуволны учитываемой изгибной формы колебаний с наибольшим индексом (в наших обозначениях — λ_m) к толщине стержня h . Предельно низким допустимым значением этого показателя можно считать 5.

На рис. 1 показана зависимость отношения L/h от индекса l при точном выполнении условия внутреннего комбинационного резонанса (25) для $n = 1, m = l + 1$. Также на рис. 1 приведены соответствующие значения отношения λ_m/h .

Как видно из рис. 1, приемлемые отношения λ_m/h достигаются при $l \geq 3$. В дальнейшем примем, что $l = 3, m = 4, n = 1$. В соответствии с (26) и рис. 1, для возникновения внутреннего резонанса при этом должно выполняться приближительное равенство $\frac{h}{L} \simeq 0.044$.

3.2. Построение асимптотического решения

Для качественного исследования динамики системы (18)–(19) применим метод многих масштабов [32,33].

Решение ищем в виде

$$u(x; \tau) = \varepsilon u_1(x; T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x; T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(x; T_0, T_1, T_2), \quad (27)$$

$$w(x; \tau) = \varepsilon w_1(x; T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x; T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x; T_0, T_1, T_2), \quad (28)$$

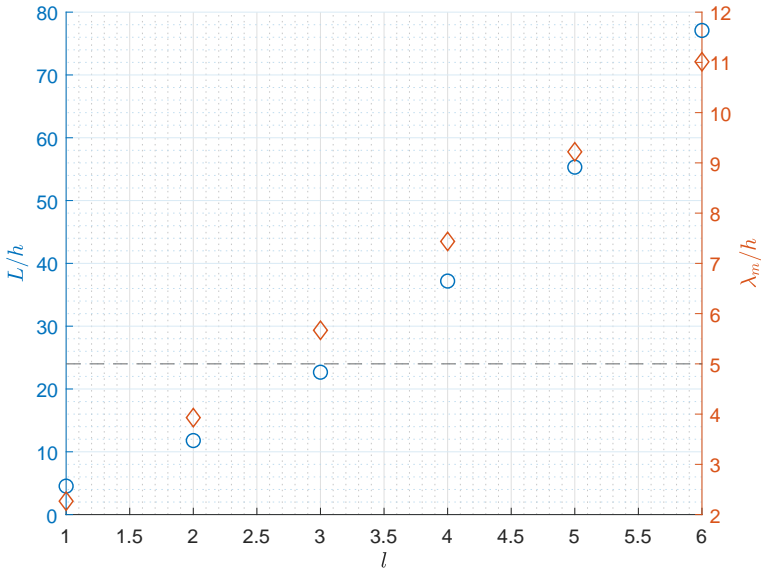


Рис. 1. К вопросу о применимости модели балки Бернулли–Эйлера

где ε — малый параметр, $T_i = \varepsilon^i \tau$, $i = 0, 1, 2$ — различные масштабы времени.

Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2), \quad (29)$$

где символами D_i , $i = 0, 1, 2$ обозначены операторы дифференцирования по аргументам T_i .

Уравнения для нахождения функций u_i, w_i получаем посредством подстановки (27)–(29) в (18)–(19) и балансировки по степеням параметра ε .

3.3. Порождающие уравнения

Уравнения первого приближения приобретают вид

$$u_1'' - 12\beta^2 D_0^2 u_1 = 0, \quad (30)$$

$$w_1^{IV} + D_0^2 w_1 = 0. \quad (31)$$

Для рассматриваемого случая комбинационного резонанса (20) представим решение порождающих уравнений в следующем виде:

$$u_1 = \phi_n(x) [U_n(T_1, T_2)e^{i\bar{\omega}_n T_0} + \bar{U}_n(T_1, T_2)e^{-i\bar{\omega}_n T_0}], \quad (32)$$

$$w_1 = \sum_{j=l;m} \psi_j(x) [W_j(T_1, T_2)e^{i\omega_j T_0} + \bar{W}_j(T_1, T_2)e^{-i\omega_j T_0}], \quad (33)$$

где $\phi_n(x)$ — форма продольных колебаний; $\psi_{l,m}(x)$ — формы изгибных колебаний; $U_n, W_{l,m}$ — комплексные амплитуды колебаний, зависящие от медленных масштабов времени. В дальнейшем для простоты расчетов введем следующие обозначения:

$$\bar{\omega}_n \equiv \bar{\omega}_1, \quad \omega_l \equiv \omega_1, \quad \omega_m \equiv \omega_2, \quad (34)$$

$$\phi_n(x) \equiv \phi_1(x), \quad \psi_l(x) \equiv \psi_1(x), \quad \psi_m(x) \equiv \psi_2(x). \quad (35)$$

Собственные формы продольных и изгибных колебаний шарнирно опертой балки имеют следующий вид:

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad \psi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (36)$$

Множитель $\sqrt{2}$ взят для выполнения условия ортонормированности принятых систем собственных функций:

$$\int_0^1 \phi_m \phi_n dx = \int_0^1 \psi_m \psi_n dx = \delta_{mn}, \quad (37)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Условие внутреннего комбинационного резонанса в новых обозначениях принимает вид

$$\omega_1 + \omega_2 = \bar{\omega}_1 + \varepsilon\sigma, \quad (38)$$

где σ — параметр частотной расстройки.

3.4. Уравнения второго приближения

Уравнения второго приближения имеют вид

$$u_2'' - 12\beta^2 D_0^2 u_2 = 24\beta^2 D_0 D_1 u_1 - 12\beta w_1' w_1'', \quad (39)$$

$$w_2^{IV} + D_0^2 w_2 = -2D_0 D_1 w_1 + \frac{1}{\beta} u_1' w_1'' + 12\beta D_0^2 u_1 w_1'. \quad (40)$$

Подстановка выражений (32),(33) в уравнения (39),(40) преобразует последние к следующему виду:

$$\begin{aligned} u_2'' - 12\beta^2 D_0^2 u_2 = & -24i\beta^2 \bar{\omega}_1 \phi_1 D_1 U_1 e^{i\bar{\omega}_1 T_0} \\ & + 12\beta W_1 W_2 [\psi_1' \psi_2'' + \psi_1'' \psi_2'] e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} \\ & + 12\beta \{ \psi_1' \psi_1'' W_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + \psi_1' \psi_1'' W_1 \bar{W}_1 \\ & + W_1 \bar{W}_2 [\psi_1' \psi_2'' + \psi_1'' \psi_2'] e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0} + \psi_2' \psi_2'' W_2^2 e^{2i\omega_2 T_0} \\ & + \psi_2' \psi_2'' W_2 \bar{W}_2 \} + (c.c.), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} w_2^{IV} + D_0^2 w_2 = & 2i\omega_1 \psi_1 D_1 W_1 e^{i\omega_1 T_0} + 2i\omega_2 \psi_2 D_1 W_2 e^{i\omega_2 T_0} \\ & + \left[12\beta \bar{\omega}_1^2 \phi_1 \psi_1' - \frac{1}{\beta} \phi_1' \psi_1'' \right] U_1 \bar{W}_1 e^{i(\bar{\omega}_1 - \omega_1) T_0} \\ & + \left[12\beta \bar{\omega}_1^2 \phi_1 \psi_2' - \frac{1}{\beta} \phi_1' \psi_2'' \right] U_1 \bar{W}_2 e^{i(\bar{\omega}_1 - \omega_2) T_0} \\ & + \left[12\beta \bar{\omega}_1^2 \phi_1 \psi_1' - \frac{1}{\beta} \phi_1' \psi_1'' \right] U_1 W_1 e^{i(\bar{\omega}_1 + \omega_1) T_0} \\ & + \left[12\beta \bar{\omega}_1^2 \phi_1 \psi_2' - \frac{1}{\beta} \phi_1' \psi_2'' \right] U_1 W_2 e^{i(\bar{\omega}_1 + \omega_2) T_0} + (c.c.). \end{aligned} \quad (42)$$

Линейные операторы краевых задач (41),(42) являются самосопряженными, поэтому условие отсутствия секулярных слагаемых в решении данных неоднородных уравнений состоит в ортогональности их правых частей решениям (32),(33) соответствующих однородных уравнений. Для рассматриваемого случая внутреннего комбинационного резонанса (38) секулярными являются первые два

экспоненциальных слагаемых в правой части уравнения (41) и первые четыре — в правой части уравнения (42). Запись соответствующих условий ортогональности приводит к следующим дифференциальным уравнениям, определяющим зависимость комплексных амплитуд U_1, W_1, W_2 от медленного времени T_1 :

$$i\beta^2\bar{\omega}_1 D_1 U_1 + 3\sqrt{2}\pi^3\beta W_1 W_2 e^{i\sigma T_1} = 0, \quad (43)$$

$$i\omega_1 D_1 W_1 + \left[\frac{4\sqrt{2}\pi^3}{\beta} - 12\sqrt{2}\pi\beta\bar{\omega}_1^2 \right] U_1 \bar{W}_2 e^{-i\sigma T_1} = 0, \quad (44)$$

$$i\omega_2 D_1 W_2 + \left[\frac{9\sqrt{2}\pi^3}{4\beta} + 9\sqrt{2}\pi\beta\bar{\omega}_1^2 \right] U_1 \bar{W}_1 e^{-i\sigma T_1} = 0. \quad (45)$$

Решение неоднородных краевых задач (41),(42) с учетом условий (43)–(45) дает выражения для искоемых функций u_2, w_2 . Полученные решения являются весьма громоздкими и поэтому в явном виде здесь не приводятся.

3.5. Уравнения третьего приближения

Уравнения третьего приближения имеют вид

$$\begin{aligned} u_3'' - 12\beta^2 D_0^2 u_3 &= -12\beta (w_1' w_2'' + w_1'' w_2') \\ &+ 12\beta^2 (2D_0 D_1 u_2 + 2D_0 D_2 u_1 + D_1^2 u_1), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} w_3^{IV} + D_0^2 w_3 &= -2D_0 D_1 w_2 - 2D_0 D_2 w_1 - D_1^2 w_1 \\ &+ 6w_1'' (w_1')^2 + 12\beta (D_0^2 u_2 + 2D_0 D_1 u_1) w_1' \\ &+ 12\beta D_0^2 u_1 w_2' + \frac{1}{\beta} (u_1' w_2'' + u_2' w_1''). \end{aligned} \quad (47)$$

Подстановка в (46),(47) ранее найденных выражений для функций первого и второго приближения, их производных по координате x и аргументам T_0, T_1, T_2 , а также определенных из (43)–(45) выражений для $D_1 U_1, D_1 W_1, D_1 W_2$ и их производных позволяет выделить в правых частях уравнений (46),(47) секулярные слагаемые и найти, таким образом, дифференциальные уравнения, определяющие зависимость комплексных амплитуд от медленного времени T_2 .

Соответствующие вычисления выполнены методами компьютерной алгебры. В силу громоздкости явный вид уравнений третьего приближения, аналогичных по смыслу уравнениям (43)–(45), здесь не приводится.

Представим комплексные амплитуды, описывающие эволюцию свободных продольно-изгибных колебаний стержня, в следующем виде:

$$U_1 = \frac{1}{2}pe^{i\alpha}, \quad W_1 = \frac{1}{2}qe^{i\beta_1}, \quad W_2 = \frac{1}{2}re^{i\beta_2}. \quad (48)$$

Здесь p, q, r — амплитуды колебаний по учитываемым формам колебаний (одной продольной и двум изгибным); α, β_1, β_2 — фазы соответствующих гармоник. Таким образом, с учетом (32)–(33) и принимая везде далее $\varepsilon \equiv 1$, поле перемещений стержня в первом приближении представляется в виде

$$u(x, \tau) = \phi_1(x)p(\tau) \cos(\bar{\omega}_1\tau + \alpha(\tau)), \quad (49)$$

$$w(x, \tau) = \psi_1(x)q(\tau) \cos(\omega_1\tau + \beta_1(\tau)) + \psi_2(x)r(\tau) \cos(\omega_2\tau + \beta_2(\tau)). \quad (50)$$

Дифференциальные уравнения, определяющие медленное изменение амплитудных и фазовых переменных, находятся посредством подстановки в уравнения (43)–(45) и соответствующие уравнения третьего приближения выражений (48) с учетом соотношений, вытекающих из (29):

$$\frac{dU_1}{d\tau} = \frac{\partial U_1}{\partial T_1} + \frac{\partial U_1}{\partial T_2}, \quad \frac{dW_{1,2}}{d\tau} = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial T_1} + \frac{\partial W_{1,2}}{\partial T_2}. \quad (51)$$

3.6. Исследование эволюции свободных колебаний во втором приближении

Проведем аналитическое исследование системы в медленных переменных, полученной во втором приближении. Подставляя (48) в (43)–(45), выделяя вещественные и мнимые части соответствующих уравнений и переходя к новым фазовым переменным по формулам

$$\gamma = \alpha - 3\sigma T_1, \quad \chi_1 = \beta_1 - \sigma T_1, \quad \chi_2 = \beta_2 - \sigma T_2, \quad (52)$$

придем к следующей нелинейной автономной системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{p} = -\frac{3\sqrt{2}\pi^3 qr \sin(\chi_1 + \chi_2 - \gamma)}{2\beta\bar{\omega}_1}, \quad (53)$$

$$\dot{q} = \frac{2\sqrt{2}\pi(\pi^2 - 3\beta^2\bar{\omega}_1^2) pr \sin(\chi_1 + \chi_2 - \gamma)}{\beta\omega_1}, \quad (54)$$

$$\dot{r} = \frac{9\sqrt{2}\pi(\pi^2 + 4\beta^2\bar{\omega}_1^2) pq \sin(\chi_1 + \chi_2 - \gamma)}{8\beta\omega_2}, \quad (55)$$

$$p\dot{\gamma} = -3\sigma p + \frac{3\sqrt{2}\pi^3 qr \cos(\chi_1 + \chi_2 - \gamma)}{2\beta\bar{\omega}_1}, \quad (56)$$

$$q\dot{\chi}_1 = -\sigma q + \frac{2\sqrt{2}\pi(\pi^2 - 3\beta^2\bar{\omega}_1^2) pr \cos(\chi_1 + \chi_2 - \gamma)}{\beta\omega_1}, \quad (57)$$

$$r\dot{\chi}_2 = -\sigma r + \frac{9\sqrt{2}\pi(\pi^2 + 4\beta^2\bar{\omega}_1^2) pq \cos(\chi_1 + \chi_2 - \gamma)}{8\beta\omega_2}. \quad (58)$$

Отметим, что в силу (22) и (38) параметры β и σ связаны соотношением

$$\beta = \frac{\pi}{\sqrt{12}(\omega_1 + \omega_2 - \sigma)}, \quad (59)$$

где согласно принятым обозначениям $\omega_1 = 88.83$, $\omega_2 = 157.91$ — собственные частоты третьей и четвертой форм изгибных колебаний шарнирно-опертого стержня.

Для краткости записи введем следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{3\sqrt{2}\pi^3}{2\beta\bar{\omega}_1}, \quad A_2 = \frac{2\sqrt{2}\pi(\pi^2 - 3\beta^2\bar{\omega}_1^2)}{\beta\omega_1}, \quad A_3 = \frac{9\sqrt{2}\pi(\pi^2 + 4\beta^2\bar{\omega}_1^2)}{8\beta\omega_2}. \quad (60)$$

Тогда система (53)–(58) примет вид

$$\dot{p} = -A_1 qr \sin(\chi_1 + \chi_2 - \gamma), \quad (61)$$

$$\dot{q} = A_2 pr \sin(\chi_1 + \chi_2 - \gamma), \quad (62)$$

$$\dot{r} = A_3 pq \sin(\chi_1 + \chi_2 - \gamma), \quad (63)$$

$$p\dot{\gamma} = -3\sigma p + A_1 q r \cos(\chi_1 + \chi_2 - \gamma), \quad (64)$$

$$q\dot{\chi}_1 = -\sigma q + A_2 p r \cos(\chi_1 + \chi_2 - \gamma), \quad (65)$$

$$r\dot{\chi}_2 = -\sigma r + A_3 p q \cos(\chi_1 + \chi_2 - \gamma). \quad (66)$$

Нетривиальные положения равновесия динамической системы (61)–(66) соответствуют стационарным движениям с постоянными амплитудами продольной p_0 и изгибных q_0, r_0 компонент колебаний стержня. С помощью простых преобразований находим:

$$q_0^4 = \frac{9\sigma^4}{A_3^2 A_1^2}, \quad r_0^4 = \frac{9\sigma^4}{A_2^2 A_1^2}, \quad p_0^2 = \frac{A_1^2 q_0^2 r_0^2}{9\sigma^2}. \quad (67)$$

Фазовые переменные удовлетворяют при этом соотношению

$$\chi_{10} + \chi_{20} - \gamma_0 = \pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (68)$$

Отметим, что в силу структуры системы уравнений (61)–(66) в случае точного внутреннего комбинационного резонанса ($\sigma = 0, \omega_1 + \omega_2 = \bar{\omega}_1$) стационарные свободные колебания с постоянными амплитудами не реализуются. Аналогичная особенность асимптотического решения, полученного при исследовании внутреннего резонанса 1:1 для нелинейной системы общего вида с двумя степенями свободы, обнаружена в работе [21]. Таким образом, как отмечено в названной работе, учет нелинейности приводит к мгновенному исчезновению безусловно существующих в линейном случае стационарных колебательных режимов. Проверка этого явления и нахождение ему математического объяснения составляет предмет дальнейших исследований.

Вычисленные согласно (67) стационарные значения модальных амплитуд в зависимости от параметра частотной расстройки σ представлены на рис. 2.

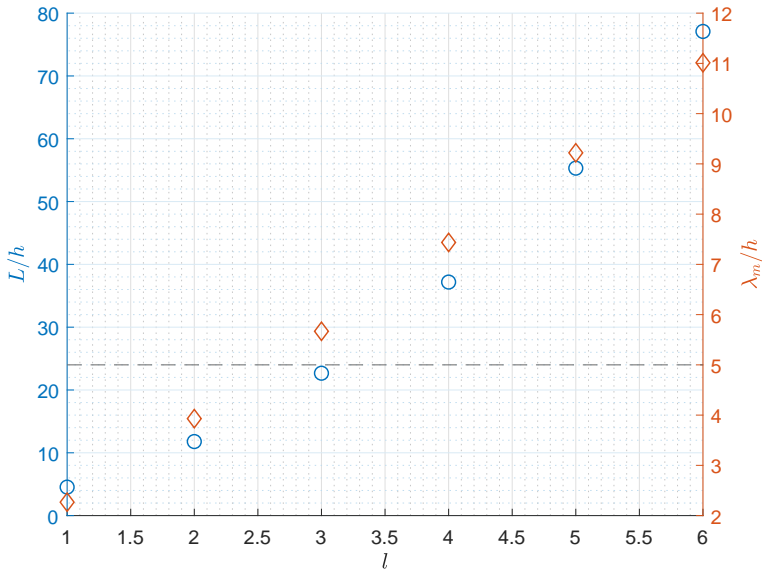


Рис. 2. Стационарные значения модальных амплитуд

Как видно из рис. 2, в диапазоне малых абсолютных значений параметра σ функции стационарных модальных амплитуд имеют вид, близкий к линейному; при росте σ проявляется нелинейный характер этих зависимостей. Отметим, что диапазон значений частотной расстройки на рис. 2 целенаправленно выбран достаточно большим для демонстрации вышеописанной нелинейности характеристик (в рассматриваемом случае безразмерное значение частоты продольных колебаний $\bar{\omega}_1$ равно 246.84); анализ точности построенного асимптотического приближения представляет в данном случае отдельную задачу.

На рис. 3 показана зависимость от времени продольных $u(\frac{1}{2}, \tau)$ и поперечных $w(\frac{1}{2}, \tau)$ перемещений центральной точки стержня при $\sigma = 5$ для начальных условий $p(0), q(0), r(0), \gamma(0), \chi_1(0), \chi_2(0)$, удовлетворяющих выражениям (67)–(68).

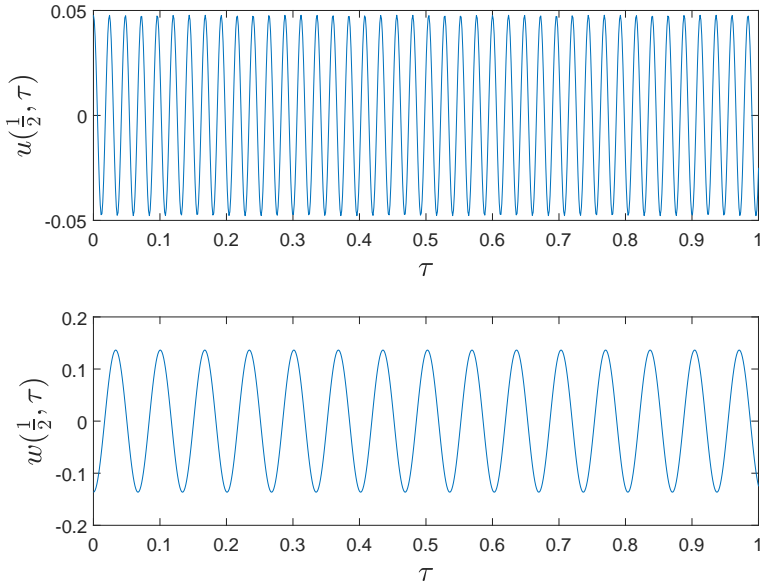


Рис. 3. Случай стационарных свободных колебаний стержня

Следует подчеркнуть, что представленный выше режим стационарных колебаний с постоянными модальными амплитудами является, согласно выражениям (67)–(68), особым режимом движения, реализуемым лишь для некоторого конкретного случая начальных условий.

В общем случае произвольных начальных условий колебания стержня в рассматриваемой зоне внутреннего комбинационного резонанса имеют характер биений, свойства которых (амплитуда, период, стационарность процесса) в силу нелинейности системы существенно зависят от величины начальных возмущений.

Исследуем возможность генерации изгибных колебаний посредством нелинейного модального взаимодействия изгибных форм с изначально возбужденной продольной формой.

На рис. 4 представлены колебания стержня при $\sigma = 5$ для начальных условий $p(0) = 10^{-2}, q(0) = 10^{-8}, r(0) = 10^{-8}$. Начальные

значения фазовых переменных возле далее примем равными нулю.

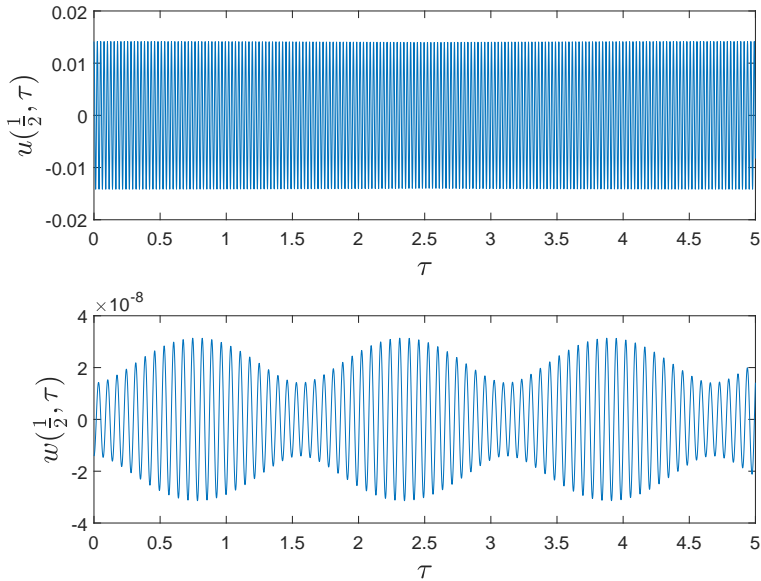


Рис. 4. Колебания стержня при $p(0) = 10^{-2}$, $q(0) = 10^{-8}$, $r(0) = 10^{-8}$.

Как видно из 4, при выбранных амплитудах начальных возмущений не наблюдается значительной перекачки энергии с продольных движений на изгибные.

На рис. 5,6 показана эволюция модальных амплитуд и колебания стержня при $\sigma = 5$ для начальных условий $p(0) = 5 \cdot 10^{-2}$, $q(0) = 10^{-8}$, $r(0) = 10^{-8}$.

Видно, что с ростом величины начального возмущения возникает ярко выраженное взаимодействие между продольной и изгибными формами колебаний. Далее на рис. 7,8 показан характер колебаний стержня при начальных продольных возмущениях с амплитудами 10^{-1} и $2 \cdot 10^{-1}$ соответственно.

Как видно из рис. 7,8, с увеличением амплитуды свободных колебаний стержня характер режима биений усложняется, становится

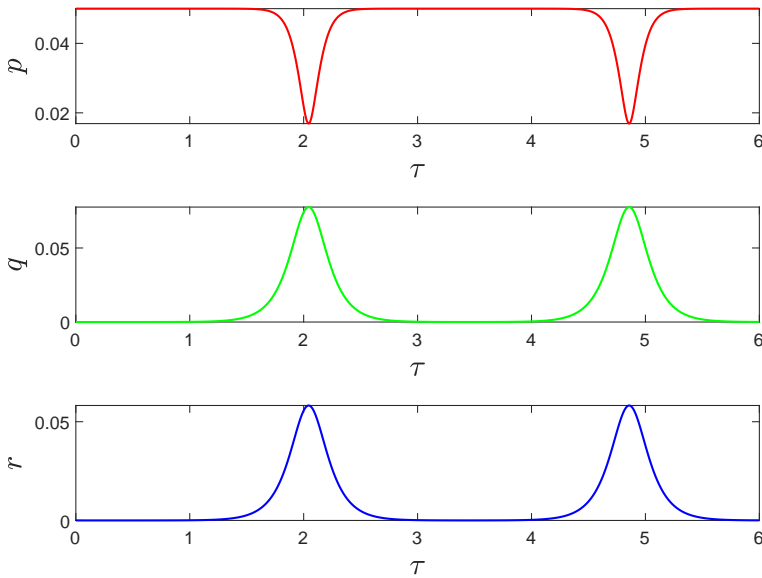


Рис. 5. Эволюция модальных амплитуд при $p(0) = 5 \cdot 10^{-2}$, $q(0) = r(0) = 10^{-8}$.

ся не вполне регулярным, частота биений растёт.

Исследуем зависимость характера движений от параметра расстройки частот σ . На рис. 9 показана эволюция модальных амплитуд для значений $\sigma = 5, -5, 10$ при $p(0) = 10^{-1}, q(0) = r(0) = 10^{-8}$. Профиль соответствующих изгибных колебаний в центральной точке стержня показан на рис. 10.

На рис. 9, 10 отчетливо видна зависимость частоты и амплитуды продольно-изгибных биений от величины частотной расстройки. Конкретный анализ данной зависимости выполняется далее в настоящей работе в целях разработки нового принципа измерения продольной компоненты внешней силы, приложенной к стержню и влияющей на частотный параметр σ . Подобные измерения могут быть положены в основу работы нового класса датчиков физических величин, — в частности резонансных акселерометров.

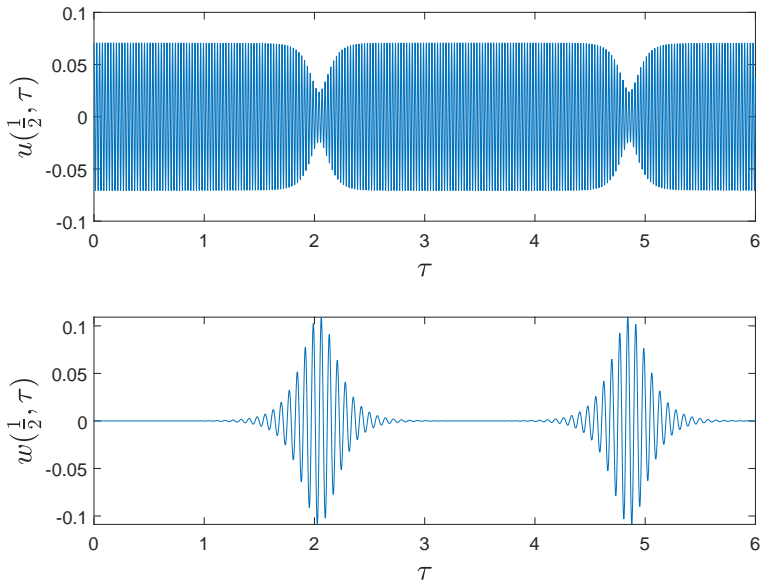


Рис. 6. Колебания стержня при $p(0) = 5 \cdot 10^{-2}$, $q(0) = r(0) = 10^{-8}$.

Отметим также, что в динамике стержня может наблюдаться и обратное явление — возбуждение продольных колебаний изначально возмущенными изгибными формами. Пример такого процесса, соответствующий начальным условиям $p(0) = 10^{-7}$, $q(0) = r(0) = 10^{-1}$, показан на рис. 11.

3.7. Анализ динамики стержня в третьем приближении

Процедура построения асимптотического решения в третьем приближении представлена выше в п. 3.5. Здесь мы исследуем существенность уточнений, получаемых в третьем приближении, по сравнению с подробно рассмотренным выше решением второго приближения. На рис. 12 показано сравнение эволюции модальных амплитуд, вычисленных согласно дифференциальным уравнениям второ-

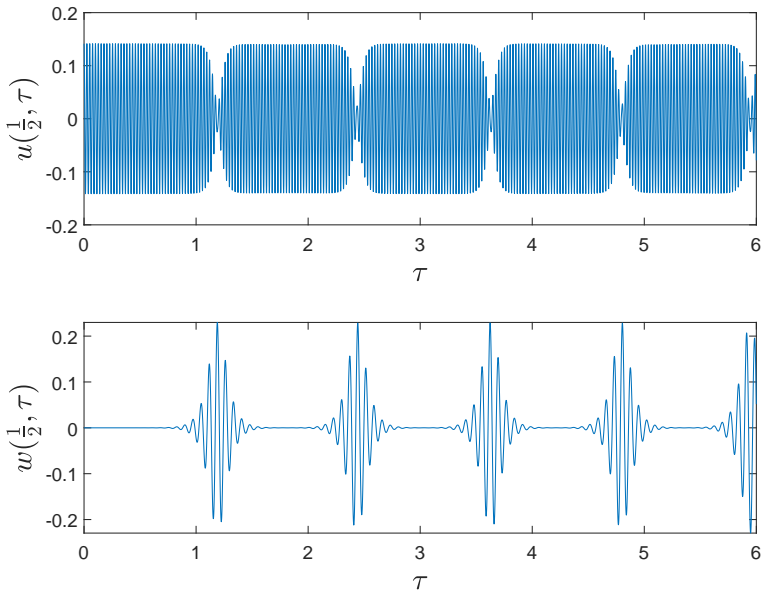


Рис. 7. Колебания стержня при $p(0) = 10^{-1}$, $q(0) = r(0) = 10^{-8}$.

го и третьего приближений, для начальных условий $(p(0) = 5 \cdot 10^{-2})$ и 10^{-1} , $q(0) = r(0) = 10^{-8}$ при $(\sigma = 5)$.

Как видно из рис. 12, более точный учет нелинейных геометрических соотношений, описывающих поле деформаций стержня, приводит к определенным изменениям в динамике системы уже при амплитудах колебаний порядка одной десятой высоты сечения. Уточнения третьего приближения касаются как амплитуды колебаний, так и частоты возбуждаемых внутренним резонансом биений.

На рис. 13 представлены аналогичные результаты для начальных продольных возмущений ($p(0)$) величиной 0.5 и 1.

С увеличением амплитуды колебаний степень расхождений между асимптотическими решениями второго и третьего приближений существенно растет. Отметим также заметное увеличение жесткости системы и, следовательно, частоты биений, что вызвано нелинейной связанностью продольных и изгибных перемещений. В то

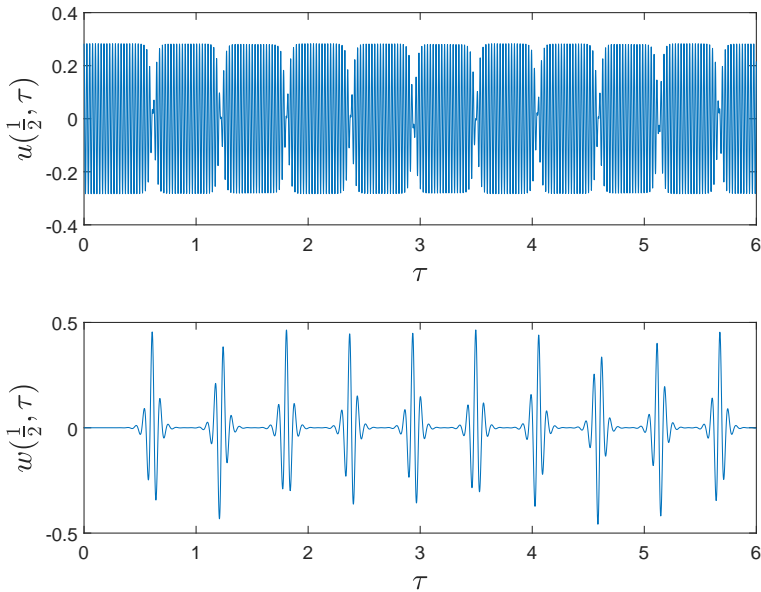


Рис. 8. Колебания стержня при $p(0) = 2 \cdot 10^{-1}$, $q(0) = r(0) = 10^{-8}$.

же время качественных различий в динамике системы для двух рассмотренных приближений не наблюдается. Таким образом, для конкретного (числового) анализа исследованных выше процессов взаимодействия продольных и изгибных колебаний стержня необходимо использовать асимптотическое решение третьего порядка.

Рассмотрим подробнее вопрос о характере зависимости параметров продольно-изгибных биений от внешних воздействующих факторов, приводящих к изменению рассматриваемой частоты продольных колебаний стержня. На рис. 14 показана зависимость периода биений от параметра частотной расстройки σ для нескольких значений амплитуды начального продольного возмущения.

На рис. 14 отчетливо видны области регулярной и иррегулярной зависимостей периода биений от σ . Иррегулярная частотная область смещена влево относительно нуля и соответствует случаю точной внутренней резонансной настройки чувствительного эле-

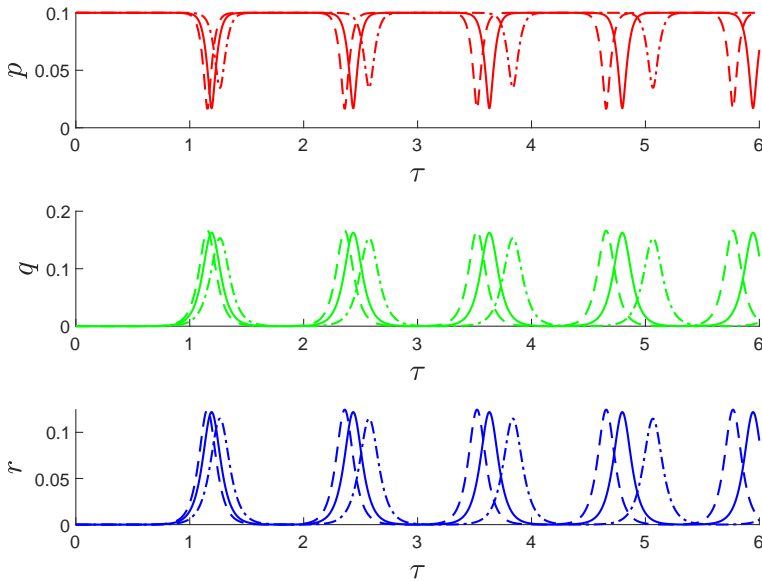


Рис. 9. Эволюция модальных амплитуд. $\sigma = 5$ — сплошная линия, $\sigma = -5$ — пунктирная линия, $\sigma = 10$ — штрих-пунктирная линия

мента (отрицательность значений σ в указанной области выражает тот факт, что реальная частота продольных колебаний увеличивается по отношению к линейной оценке с ростом амплитуды изгибных колебаний); ее ширина растет с увеличением амплитуды начального возмущения. Наличие подобной иррегулярной частотной области представляет определенный интерес и требует дальнейшего детального рассмотрения. Не менее важно отметить существование регулярных (рабочих) областей сильной зависимости периода биений от σ . При оптимальном выборе величины начального возмущения (в рассматриваемом случае $p(0) \simeq 5e - 2$) данные области охватывают широкие диапазоны как отрицательных, так и положительных значений параметра σ , что говорит о грубости наблюдаемого эффекта и его практической реализуемости с точки зрения ограничений микросистемной технологии изготовления чув-

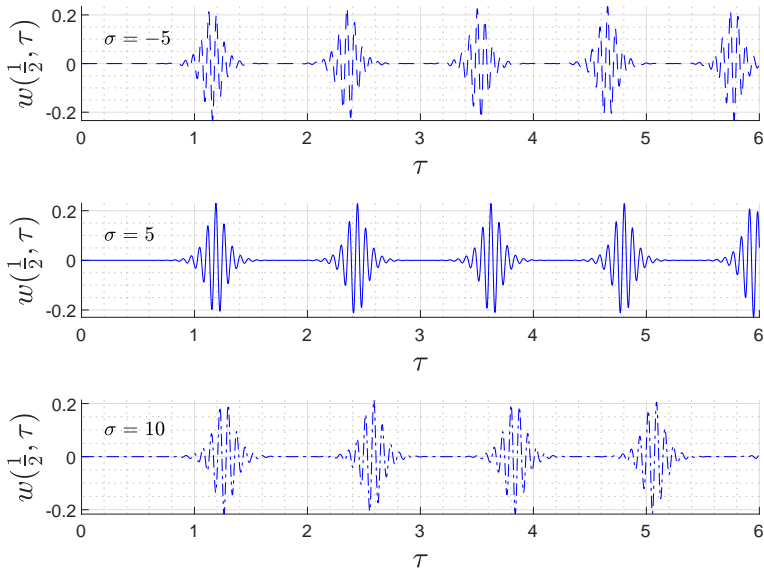


Рис. 10. Изгибные колебания в центральной точке стержня

ствительных элементов. Результаты показывают возможность проектирования геометрии чувствительного элемента исходя из требуемого соотношения между частотами его изгибных и продольных колебаний (см. (38)), необходимого для нахождения в регулярной области изменения параметров биений.

На рис. 15, 16 показаны зависимости амплитуд возбуждаемых изгибных форм колебаний от параметра частотной расстройки σ для различных величин начального продольного возмущения.

Амплитуды возбуждаемых на внутреннем резонансе изгибных колебаний существенным образом зависят от параметра частотной расстройки. В отличие от представленных выше зависимостей для периода биений на амплитудных диаграммах иррегулярные частотные области не наблюдаются. В целом результаты свидетельствуют о возможности создания нового класса резонансных датчиков физических величин (в частности, акселерометров) с комбини-

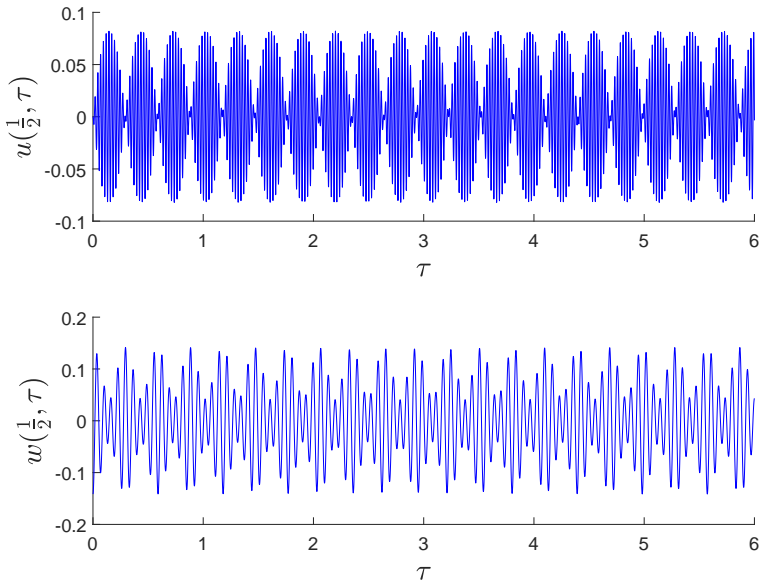


Рис. 11. Колебания стержня при $p(0) = 10^{-7}$, $q(0) = r(0) = 10^{-1}$ при $\sigma = 5$

ванным частотно-амплитудным выходом, основанных на сильной зависимости параметров продольно-изгибных биений от внешних измеряемых воздействий.

С практической точки зрения генерация исследованных в работе режимов колебаний подвижного балочного элемента может быть осуществлена лазерным термооптическим методом: как видно из уравнений (15)–(16), локализованное тепловое воздействие на поверхность балки-полосы может, при соответствующем выборе параметров лазерного импульса, посредством возникающей температурной осевой силы возбуждать рабочую (в настоящем исследовании — нижнюю) продольную форму колебаний; неравномерность распределения температуры по толщине балки и вызванный этим температурный изгибающий момент создает, в свою очередь, малые начальные возмущения в поперечном направлении, обеспечи-

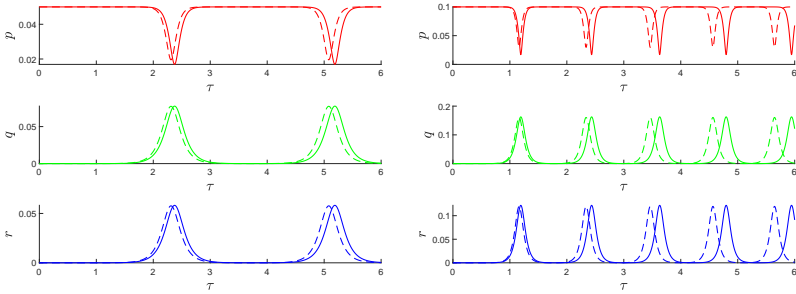
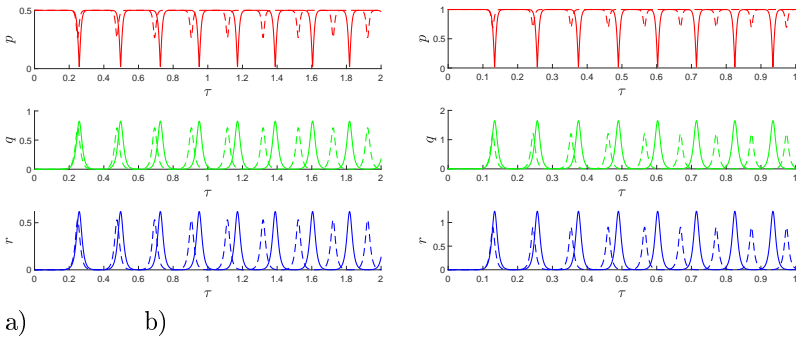


Рис. 12. Эволюция модальных амплитуд. Второе приближение — сплошная линия, третье — пунктирная линия для а) $p(0) = 5 \cdot 10^{-2}$, б) $p(0) = 10^{-1}$



а) б)

Рис. 13. Эволюция модальных амплитуд. Второе приближение — сплошная линия, третье — пунктирная линия для а) $p(0) = 0.5$, б) $p(0) = 1$.

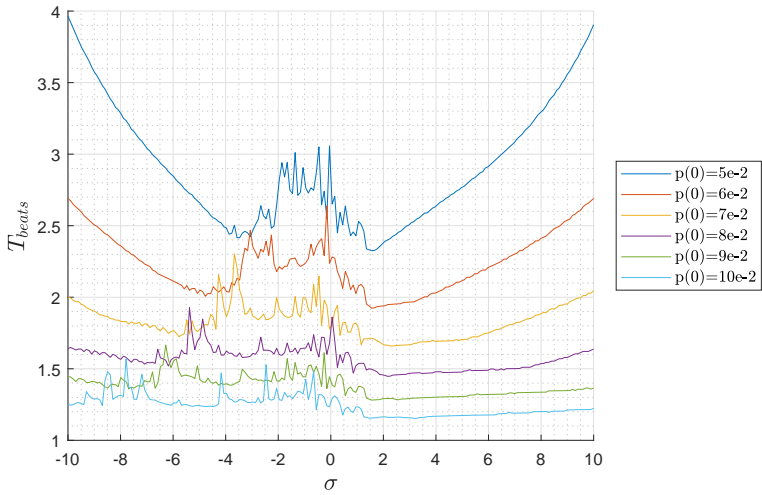


Рис. 14. Зависимость периода биений от частотной расстройки σ

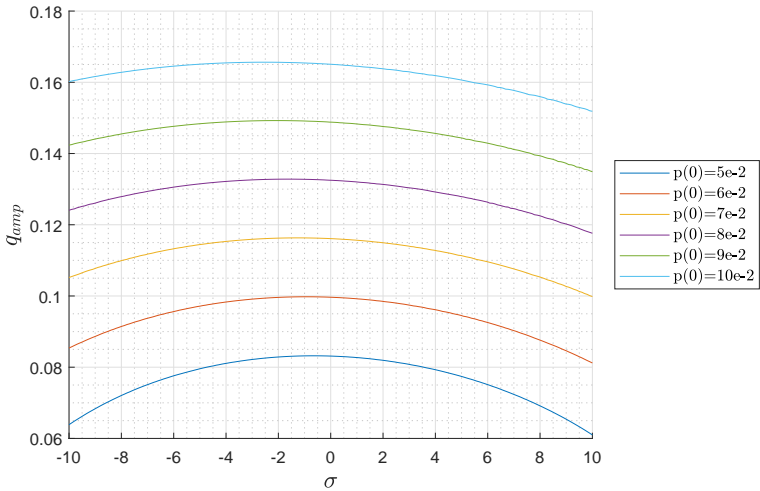


Рис. 15. Зависимость амплитуды первой рассматриваемой изгибающей формы колебаний от частотной расстройки σ .

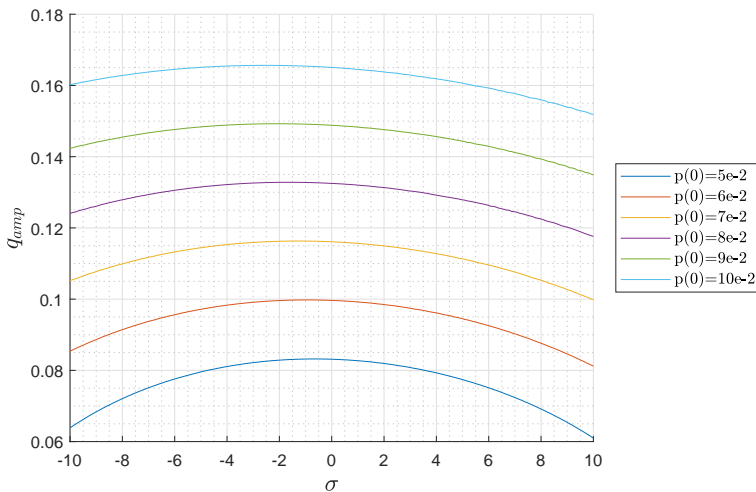


Рис. 16. Зависимость амплитуды второй рассматриваемой изгибной формы колебаний от частотной расстройки σ .

вающие возбуждение рабочих изгибных форм колебаний. Конкретный анализ нестационарных процессов теплопроводности в объеме балки при лазерном импульсе и определение условий эффективно возбуждения продольно-изгибных биений в системе составляют направление дальнейших исследований.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследован характер связанных продольно-изгибных колебаний стержня, описываемого геометрически нелинейной моделью в рамках гипотезы Бернулли–Эйлера, в случае внутреннего комбинационного резонанса между двумя изгибными и нижней продольной формами колебаний. Приближенное аналитическое решение получено методом многих масштабов, примененным непосредственно к системе нелинейных уравнений в частных производных. Показано, что начальное возмущение в продольном направлении может эффективно возбуждать изгибные формы ко-

лебаний, что в целом приводит к режиму продольно-изгибных биений с заметными амплитудами. Отмечено, что период и амплитуда этих биений существенным образом зависят от параметра частотной расстройки между суммой частот изгибных колебаний и частотой продольных колебаний. Данный эффект может быть использован в качестве нового принципа измерения продольной компоненты внешней силы, приложенной к упругому чувствительному элементу. Подобные измерения могут быть положены в основу работы нового класса датчиков физических величин, в частности, микроэлектромеханических резонансных акселерометров. Выполнено сравнение асимптотических решений, полученных во втором и третьем приближениях. Установлено, что для конкретного (числового) анализа рассмотренных в работе процессов взаимодействия продольных и изгибных колебаний стержня необходимо использовать асимптотическое решение третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vorobyev R. I. et al. Application of the optoacoustic method to assess the effect of voids on the crack resistance of structural carbon plastics // *Acoustical Physics*. — 2020. — Vol. 66. — P. 132–136.
doi: <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>.
2. Yan G. et al. Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes // *NDT & E International*. — 2020. — Vol. 116. — P. 102–323.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>.
3. Pan Y., Rossignol C., Audoin B. Acoustic waves generated by a laser line pulse in cylinders; application to the elastic constants measurement // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2004. — Vol. 115. — №. 4. — P. 1537–1545. doi: <https://doi.org/10.1063/1.1583135>.
4. Chow G. et al. Laser-induced surface acoustic waves: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media // *Mechanics of Materials*. — 2015. — Vol. 91. — P. 333–342.
5. Champion A., Bellouard Y. Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser // *Optical Materials Express*. — 2012. — Vol. 2. — №. 6. — P. 789–798.
6. Otsuka P. H. et al. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial // *New Journal of Physics*. — 2018. — Vol. 20. — №. 1. — P. 013026.

7. Li C. et al. Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application // *Biomedical optics express*. — 2014. — Vol. 5. — №. 5. — P. 1403-1418.
8. Phinney L. M. et al. Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation // *Reliability, Packaging, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS IV*. — SPIE, 2005. — Vol. 5716. — P. 81-88.
9. Serrano J. R., Phinney L. M. Displacement and thermal performance of laser-heated asymmetric MEMS actuators // *Journal of Microelectromechanical Systems*. — 2008. — Vol. 17. — №. 1. — P. 166-174.
doi: <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>.
10. Mai A. et al. In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation // *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*. — 2016. — Vol. 15. — №. 3. — P. 035502-035502.
doi: <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>.
11. Zook J. D. et al. Optically excited self-resonant microbeams // *Sensors and Actuators A: Physical*. — 1996. — Vol. 52. — №. 1-3. — P. 92-98.
doi: [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2).
12. Yang T., Bellouard Y. Laser-induced transition between nonlinear and linear resonant behaviors of a micromechanical oscillator // *Physical Review Applied*. — 2017. — Vol. 7. — №. 6. — P. 064002.
doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>.
13. Dolleman R. J. et al. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes // *Scientific Reports*. — 2018. — Vol. 8. — №. 1. — P. 9366. doi: <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>.
14. Zehnder A. T., Rand R. H., Krylov S. Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 2018. — Vol. 102. — P. 92-100.
doi: <https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2018.03.009>.
15. Morozov N. F., Tovstik P. E. Dynamic loss of stability of a rod under longitudinal load lower than the Eulerian load // *Doklady physics*. — Springer US, 2013. — Vol. 58. — P. 510-513.
doi: <https://doi.org/10.1134/S102833581311013X>.
16. Carvalho E. C., Goncalves P. B., Rega G. Multiple internal resonances and nonplanar dynamics of a cruciform beam with low torsional stiffness // *International Journal of Solids and Structures*. — 2017. — Vol. 121. — P. 117-134.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.020>.
17. Ribeiro E. A. R., Lenci S., Mazzilli C. E. N. Modal localisation in a beam modelled as a continuous system: a discussion on the use of auxiliary oscillators // *Journal of Sound and Vibration*. — 2020. — Vol. 485. — P. 115595.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115595>.

18. Lenci S. Isochronous beams by an inclined roller support // *Journal of Applied Mechanics*. — 2018. — Vol. 85. — №. 9. — P. 091008.
doi: <https://doi.org/10.1115/1.4040453>.
19. Lacarbonara W., Rega G., Nayfeh A. H. Resonant non-linear normal modes. Part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 2003. — Vol. 38. — №. 6. — P. 851–872. doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00033-1).
20. Manevitch L. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // *Archive of Applied Mechanics*. — 2007. — Vol. 77. — №. 5. — P. 301–312. doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0081-1>.
21. Clementi F., Lenci S., Rega G. 1: 1 internal resonance in a two dof complete system: a comprehensive analysis and its possible exploitation for design // *Meccanica*. — 2020. — Vol. 55. — №. 6. — P. 1309–1332.
doi: <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01171-9>.
22. Leamy M. J., Gottlieb O. Internal resonances in whirling strings involving longitudinal dynamics and material non-linearities // *Journal of sound and vibration*. — 2000. — Vol. 236. — №. 4. — P. 683–703.
doi: [10.1006/jsvi.2000.3039](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3039).
23. Srinil N., Rega G. Nonlinear longitudinal/transversal modal interactions in highly extensible suspended cables // *Journal of Sound and vibration*. — 2008. — Vol. 310. — №. 1-2. — P. 230–242.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.056>.
24. Yang X. D., Zhang W. Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal — transversal vibrations // *Nonlinear Dynamics*. — 2014. — Vol. 78. — P. 2547–2556.
doi: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>.
25. Saetta E., Settini V., Rega G. Minimal thermal modeling of two-way thermo-mechanically coupled plates for nonlinear dynamics investigation // *Journal of Thermal Stresses*. — 2020. — Vol. 43. — №. 3. — P. 345–371.
doi: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>.
26. Indeitsev D. A., Osipova E. V. A two-temperature model of optical excitation of acoustic waves in conductors // *Doklady Physics*. — Pleiades Publishing, 2017. — Vol. 62. — P. 136–140.
doi: <https://doi.org/10.1134/S1028335817030065>.
27. Sun Y. et al. Thermodynamic response of beams on Winkler foundation irradiated by moving laser pulses // *Symmetry*. — 2018. — Vol. 10. — №. 8. — P. 328. doi: <https://doi.org/10.3390/sym10080328>.
28. Wen C., Tang L., Yang G. Buckling and post-buckling of pinned Euler beams on weakened Winkler foundation under thermal loading // *Journal of Thermal Stresses*. — 2020. — Vol. 43. — №. 5. — P. 529–542.
doi: <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1734128>.

29. Morozov N. F. et al. Stability of the Bernoulli–Euler Beam in coupled electric and thermal fields //Doklady Physics. — Pleiades Publishing, 2018. — Vol. 63. — P. 342–347. doi: <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>.
30. Morozov N. F. et al. Bernoulli–Euler beam under action of a moving thermal source: characteristics of the dynamic behavior //Doklady Physics. — Pleiades Publishing, 2019. — Vol. 64. — P. 185–188. doi: <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>.
31. Morozov N. F. et al. Stability of the Bernoulli–Euler beam under the action of a moving thermal source //Doklady Physics. — Pleiades Publishing, 2020. — Vol. 65. — P. 67–71. doi: <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>.
32. Nayfeh A. H., Mook D. T. Nonlinear oscillations. — John Wiley & Sons, 2008.
33. Mitropolskii Y. A., Van Dao N., Gladwell G. M. L. Applied asymptotic methods in nonlinear oscillations. — Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕИДЕАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ

С. А. ШЕВЧЕНКО, Б. Е. МЕЛЬНИКОВ

Работа посвящена разработке математической модели неидеального резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) для определения влияния несовершенств на выходной параметр – расщепление собственной (рабочей) частоты колебаний резонатора. Резонатор представляет собой тонкостенную полусферическую оболочку, в которой возбуждается стоячая упругая волна на частоте, равной по значению второй эллиптической собственной частоте. В рамках работы построена математическая модель идеальной полусферической оболочки, рассмотрены способы учета несовершенств при создании модели неидеального резонатора. Проведена верификация построенных математических моделей с использованием численного эксперимента.

Также с использованием методов теории планирования эксперимента и методов глобального анализа чувствительности проведен анализ степени влияния изменения входных параметров модели (параметров несовершенств) на расщепление частоты. Определенное внимание уделено оценке точности методов аппроксимации, используемых для построения поверхности отклика на основе данных виртуального эксперимента.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее динамично развивающихся направлений создания приборов инерциальной навигации является разработка ВТГ [1]. В последние годы множество работ посвящено различным темам, связанным с проектированием и изготовлением ВТГ. Все это вызвано преимуществами данного типа гироскопа по сравнению с приборами, работающими на основе других физических принципов.

Принцип работы ВТГ основан на эффекте инертности упругих

Доклад на семинаре 22 ноября 2022 г.

© С. А. Шевченко, Б. Е. Мельников, 2023.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-10009)

волн. Данный эффект был открыт английским ученым Дж. Х. Брайаном. В своих опытах он показал [2], что при возбуждении в кольце стоячей упругой волны колебаний и вращении этой оболочки с постоянной угловой скоростью угловая скорость вращения стоячей волны будет отличаться на некоторый коэффициент, названный коэффициентом Брайана (1):

$$\Omega_b = B \cdot \Omega, \quad (1)$$

где, Ω_b — угловая скорость стоячей волны; Ω — угловая скорость основания; B — коэффициент Брайана.

Позднее В. Ф. Журавлевым и Д. М. Климовым [3] теоретически обоснована справедливость эффекта Брайана для любого закона вращения основания (2):

$$\phi(t) = -\frac{2}{1+k^2} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\phi(t)$ — угол поворота стоячей волны относительно основания; k — номер моды колебаний

Использование эффекта Брайана при построении инерциальных датчиков позволяет существенно улучшить массогабаритные характеристики, повысить их стойкость к внешним воздействующим факторам, а также получить значительное увеличение ресурса. Однако достижение высоких точностных характеристик датчиков требует от производителя серьезных научных и финансовых вложений. Ведь точность ВТГ сильно зависит как от технологических погрешностей изготовления конструктивных элементов, так и от неоднородностей материала наравне с погрешностями управления. Большое внимание при разработке ВТГ уделяется математическому моделированию, благодаря которому удается спрогнозировать влияние погрешностей и несовершенств на характеристики изделий, разработать алгоритмы устранения технологических погрешностей, компенсировать оставшиеся. Наиболее значимых практических результатов в разработке ВТГ достигли иностранные компании, например, Northrop Grumman Corporation (USA), Safran SA (France). Среди отечественных предприятий разработкой ВТГ занимаются АО «Ижевский электромеханический завод

«Купол», АО «РПКБ» и др. На рис. 1 представлены примеры ВТГ производства различных предприятий.

Видно, что датчики имеют характерный размер, а также схожесть конструктивного исполнения. При этом итоговые характеристики датчиков существенно отличаются. Известно, что достичь уровня параметров, соответствующих высокоточным датчикам, отечественным разработчикам пока не удалось [4]. Например, случайное смещение угла ВТГ фирмы Safran SA составляет не более 0,0005 град./час [5] против случайного смещения ВТГ разработки АО «РПКБ» — 0,05 град./час [4]. Это косвенно свидетельствует как об уровне технологических, так и научных достижений, в частности, математического моделирования.

В статье представлено описание математической модели идеального полусферического резонатора ВТГ, рассматривается вопрос учета несовершенств, предлагается метод анализа построенной математической модели.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

Рассматривается чувствительный элемент ВТГ, представляющий собой тонкостенную полусферическую оболочку, изготовленную из кварцевого стекла. Основная цель построения математической модели — определение собственных частот колебаний резонатора, а именно расчет значения второй (эллиптической) рабочей формы колебаний и оценка её расщепления. Математическая модель строится на базе теории тонких растяжимых упругих оболочек по В. В. Новожилову [6]. Первоначально определяется срединная поверхность оболочки. Для этого записывается уравнение поверхности в параметрической форме (3), а также выражения для единичных векторов (орт) и единичного вектора нормали к поверхности (4):

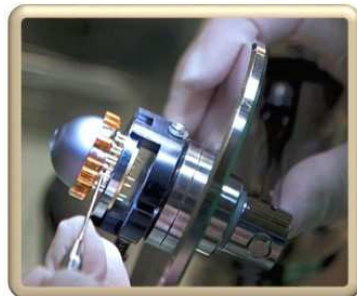
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{ср}} [\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)]^T; \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}; \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}; \mathbf{n} = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\theta, \quad (4)$$

где, $\mathbf{r}_{\text{ср}}$ — радиус срединной поверхности оболочки;



InnaLabs (Ирландия)



Safran SA (Франция)



АО «Ижевский электромеханический завод «Купол»

Рис. 1. Варианты исполнения ВТГ различного производства

ϕ и θ — азимутальный и зенитный углы соответственно; A_1, A_2 — параметры Ламе (два из трех коэффициентов 1-й квадратичной формы поверхности). Выражения для параметров Ламе (5) и главных кривизн поверхности (6) имеют вид

$$A_1 = \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \phi} + \frac{\partial y^2}{\partial \phi} + \frac{\partial z^2}{\partial \phi}}; A_2 = \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \frac{\partial y^2}{\partial \theta} + \frac{\partial z^2}{\partial \theta}}; \quad (5)$$

$$R_1 = A_1 \cdot |\mathbf{e}_\phi| / \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \phi} \right|; R_2 = A_2 \cdot |\mathbf{e}_\theta| / \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right|, \quad (6)$$

где x, y, z — оси декартовой системы координат. Выражения (6) получаются с учетом ряда допущений, касающихся определения срединной поверхности. Например, принимается, что координатные линии поверхности перпендикулярны друг другу, а также являются и линиями кривизны поверхности. Далее необходимо записать выражения для потенциальной (7) и кинетической (8) энергий элементарного объема оболочки:

$$W = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4}) \right) Ad\theta d\phi + \\ + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_1\kappa_2 - \tau^2)) Ad\theta d\phi; \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho h \mathbf{v}^2 Ad\theta d\phi, \quad (8)$$

где h — толщина полусферической оболочки; ν — коэффициент Пуассона материала; ρ — плотность материала; E — модуль упругости материала; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры, характеризующие удлинение срединной поверхности; κ_1, κ_2 — параметры, характеризующие изгибные деформации срединной поверхности; ω, τ — параметры, характеризующие деформации сдвига и кручения соответственно; \mathbf{v} — вектор скорости; $A = A_1 \cdot A_2$.

В выражениях (7), (8) содержатся параметры, для определения которых необходимо записать выражения для компонент вектора

перемещений (9):

$$\begin{aligned} u &= U(\theta)[p(t) \cos(n\phi) - q(t) \sin(n\phi)]; \\ v &= V(\theta)[p(t) \sin(n\phi) + q(t) \cos(n\phi)]; \\ w &= W(\theta)[-p(t) \cos(n\phi) + q(t) \sin(n\phi)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $p(t), q(t)$ — некоторые функции времени, принимаемые за единицу в рамках задачи по нахождению собственных частот; $U(\theta), V(\theta), W(\theta)$ — функции Релея.

Используя метод Ритца, запишем приближения для функций $U(\theta), V(\theta), W(\theta)$ в виде (10)

$$\begin{aligned} U(\theta) &= [U_1\theta^3 + U_2\theta^5 \dots]; \\ V(\theta) &= [V_1\theta^3 + V_2\theta^5 \dots]; \\ W(\theta) &= [W_1\theta^2 + W_2\theta^4 \dots]; \end{aligned} \quad (10)$$

где U_i, V_i, W_i — искомые коэффициенты.

Тогда соотношение на основе принципа Гамильтона сводится к системе алгебраических уравнений в виде задачи на собственные значения (11)

$$(M_C - \lambda^2 M_A)\mathbf{C} = 0, \quad (11)$$

где M_C, M_A — матрицы, связанные с кинетической и потенциальной энергиями; \mathbf{C} — вектор-столбец неизвестных коэффициентов; λ — вектор собственных значений.

В результате расчета по построенной модели возможно определить точное значение собственной частоты колебаний полусферического резонатора. Принимая для расчета вторую моду ($n = 2$), оптимальное решение получаем при приближении по формуле (10) с точностью до 3-го члена. Таким образом, расчетное значение рабочей частоты составляет $f_p = 4809,8$ Гц. Верификация математической модели [7] проводилась с использованием численного эксперимента в программном обеспечении Ansys с использованием элементов типа Solid в объемной постановке, а также с использованием элементов типа Shell в формулировке теории тонких упругих оболочек (оболочка Тимошенко). Сравнение полученных результатов представлено в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение расчетных значений собственной частоты резонатора.

| Параметр | По мат. модели | Численный эксперимент (Shell) | Численный эксперимент (Solid) |
|-------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Частота, Гц | 4809,8 | 4809,02 | 4809,08 |

3. УЧЕТ НЕСОВЕРШЕНСТВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

При изготовлении резонаторов ввиду технологического предела производства его реальная геометрия всегда отлична от идеальной полусферы. При этом материал из которого изготавливается изделие, также несовершенен и имеет непостоянное по объему значение различных физических характеристик. Наличие данных несовершенств влияет на такой параметр резонатора, как расщепление собственной рабочей частоты. Ввиду свойств осесимметричной оболочки при наличии несовершенств колебания будут проходить на двух близких по значению собственных частотах. В случае идеальной модели, представленной выше, расщепление сводится к нулю, однако с внесением какого-либо вида дефекта, его значение возможно определить.

Условно виды дефектов можно разделить на физические и конструкционные (технологические). К первым относятся связанные со свойствами материала: разноплотность ($\rho(\phi, \theta)$), разноупругость ($E(\phi, \theta)$), разнородность температурного коэффициента линейного расширения ($\alpha(\phi, \theta)$) и пр. К конструкционным: некруглость и биение внутренней (наружной) поверхностей, отклонения от радиуса, разнотолщинность ($h(\phi, \theta)$). При этом очевидно, что конструкционные дефекты приводят к изменению распределения, например, плотности, влияют на жесткостную симметрию оболочки. В дальнейшем будут рассматриваться такие виды дефектов, как разноплотность, разноупругость и разнотолщинность.

Наиболее распространенным вариантом учета несовершенств является представление какого-либо из параметров как переменной

по азимутальному углу, при этом функция распределения претерпевает разложение в ряд Фурье (12):

$$\begin{aligned}
 E(\phi) &= E_0 \left(1 + \sum_{k_E=1}^n E_a \sin(k_E \phi + \beta\pi) \right); \\
 \rho(\phi) &= \rho_0 \left(1 + \sum_{k_\rho=1}^n \rho_a \sin(k_\rho \phi + \beta\pi) \right); \\
 h(\phi) &= h_0 \left(1 + \sum_{k_h=1}^n h_a \sin(k_h \phi + \beta\pi) \right),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где E_0, ρ_0, h_0 — номинальные значения для модуля упругости, плотности и толщины; E_a, ρ_a, h_a — амплитуда возмущения соответствующего дефекта; k_E, k_ρ, k_h — номер гармоники дефекта; $\beta\pi$ — фазовый угол.

Учет несовершенств в представленном виде не имеет сложности. При этом наибольшее влияние на расщепление рабочей частоты оказывают разноплотность и разнотолщинность. При прочих равных параметрах их влияние на порядок выше влияния разноупругости. В табл. 2 представлены значения расщепления частот (Δf), рассчитанные при помощи математической модели (ММ) в сравнении с результатом численного эксперимента (КЭМ).

Таблица 2. Сравнение расчетных значений расщепления частоты

| Параметр | Разноплотность | Разнотолщинность |
|----------------------------|----------------|------------------|
| (Δf) , Гц (по ММ) | 5,71 | 1,31 |
| (Δf) , Гц (по КЭМ) | 7,71 | 1,6 |

Разница в сравнении с результатами численного эксперимента обусловлена наличием дополнительного возмущения при КЭМ расчете — асимметрии упругости оболочки ввиду асимметрии конечно-элементной сетки (наличие допусков на координаты узлов). С учетом этого совпадение результатов считается достаточным.

Однако, говоря о разнотолщинности, можно заметить, что представленная постановка является крайним случаем в учете геометрических несовершенств. Обращаясь к практическим возможностям измерений, наиболее оптимальным вариантом является измерение круглограмм внутренней и наружной поверхностей по-

лусферы. Учитывая это, удобнее в ММ раскладывать в ряд Фурье не функцию толщины, а задавать функции радиусов (13):

$$\begin{aligned} r_1(\phi) &= r_{10} \left(1 + \sum_{k_{r1}=1}^n r_{1a} \sin(k_{r1}\phi + \beta\pi) \right); \\ r_2(\phi) &= r_{20} \left(1 + \sum_{k_{r2}=1}^n r_{2a} \sin(k_{r2}\phi + \beta\pi) \right); \\ r_{cp} &= \frac{r_{10} + r_{20}}{2}; h = r_{10} - r_{20}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $r_1(\phi)$, $r_2(\phi)$ — функции наружного и внутреннего радиусов полусферы по азимутальному углу; r_{10} , r_{20} — номинальное значение наружного и внутреннего радиусов; r_{1a} , r_{2a} — амплитуда возмущения; k_{r1} , k_{r2} — номер гармоники возмущения.

Как видно из (13), в случае нахождения $r_1(\phi)$ и $r_2(\phi)$ в противофазе мы получаем эффект разнотолщинности. При этом срединная поверхность не возмущена. Однако при нахождении их в фазе, наблюдается возмущение срединной поверхности при постоянной толщине (рис. 2). Очевидно, что в изделии всегда будет присутствовать возмущение срединной поверхности.

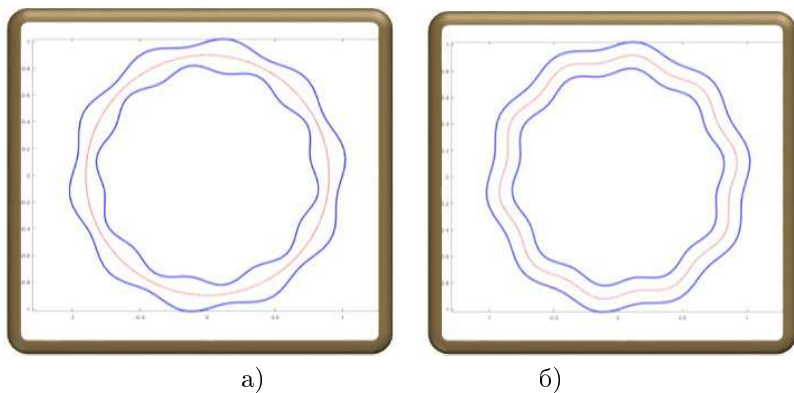


Рис. 2. Крайние случаи дефекта геометрии резонатора: а — разнотолщинность без возмущения срединной поверхности; б — возмущение срединной поверхности при постоянной толщине

Однако при наличии возмущения срединной поверхности задача

существенно усложняется. Присутствие функций радиусов от азимутального угла приводит к необходимости корректировки начальных выражений, определяющих поверхность. Попытки учета функций радиусов напрямую приводят к необходимости записи выкладок из области дифференциальной геометрии в общем, неупрощенном виде [8]. Наличие возмущения срединной поверхности ведет за собой отличие от нуля одного из коэффициентов при 2-й квадратичной форме. Таким образом, координатная сеть становится ортогональной, но не сопряженной. Как следствие, решение квадратичного уравнения, корнями которого являются главные кривизны, становится задачей, требующей нецелесообразно высоких вычислительных ресурсов.

Чтобы определить степень влияния возмущения срединной поверхности на расщепление частоты, был проведен численный эксперимент, где «по-честному» моделировалась возмущенная полусфера (рис. 3).

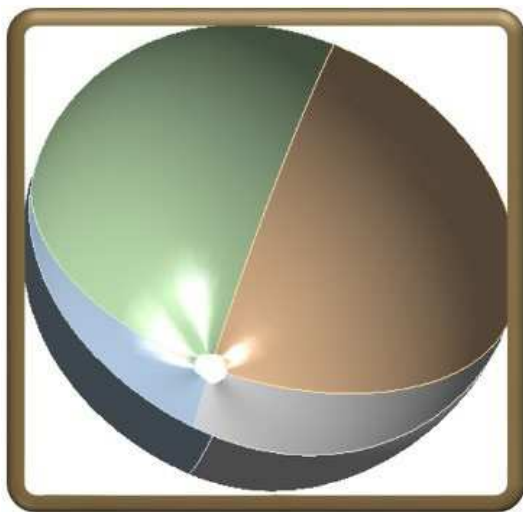


Рис. 3. Полусфера с возмущенной срединной поверхностью

В качестве максимальной оценки возмущение задавалось по 4-й

гармонике как вносящей наибольший вклад в расщепление частоты. Уравнение полусферы в параметрической форме представлено ниже (14)

$$\begin{aligned} x &= r_{cp}(1 + A \cdot \sin(4\theta)) \sin(\phi) \sin(\theta); \\ y &= r_{cp}(1 + A \cdot \sin(4\theta)) \sin(\phi) \cos(\theta); \\ z &= r_{cp}(1 + A \cdot \sin(4\theta)) \cos(\phi), \end{aligned} \quad (14)$$

где r_{cp} — радиус невозмущенной полусферы; A — амплитуда возмущения радиуса.

В табл. 3 сведены результаты численного эксперимента.

Таблица 3. Результаты численного эксперимента.

| N п/п | A / r_{cp} | (Δf), Гц |
|-------|--------------|--------------------|
| 1 | 0,001 | 29,3 |
| 2 | 0,01 | 304 |

Стоит отметить, что в обеспечение проведения численного эксперимента в полюсе полусферы моделировалось отверстие. При этом, диаметр выбирался таким, чтобы его влияние на результат было незначительным. Результат свидетельствует о том, что возмущение срединной поверхности также вносит значимый вклад в расщепление частоты. Вопрос его учета в ММ является одним из направлений дальнейшей работы, например, в виде применения для поставленной задачи асимптотических методов. Альтернативным вариантом может быть упруго-плотностная аналогия [9], когда учет возмущения срединной поверхности проводится за счет дополнительного возмущения плотности и модуля упругости. Данный подход может использоваться как предварительная оценка, так как ошибка такого метода в настоящий момент составляет около 70 %.

4. МЕТОДИКА АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Любая математическая модель помимо верификации должна быть проанализирована. В частности, на предмет её избыточности, т. е. возможности упрощения. Особенно важно это при построении многопараметрических моделей, когда присутствуют как независимые, так и зависимые параметры, что делает затруднительным

оценку вклада каждого из них. В данной работе для оценки вклада параметров разнотолщины, разнотолщинности и разнотолщинности на расщепление частоты использовались методы теории планирования эксперимента и глобального анализа чувствительности [10]. Представленные методы часто используются при проведении расчетов многокритериальной оптимизации, однако они также могут быть применены и для рассматриваемой задачи — анализа построенной математической модели.

В теории планирования эксперимента применяются математические методы, позволяющие сформировать оптимальный план эксперимента для получения максимальной информации об объекте. Другими словами — это алгоритмы, которые позволяют посредством наименьшего (оптимального) количества проведенных экспериментов сформировать такую функцию, которая описывала бы зависимость выходных параметров модели от входных (факторов). Глобальный анализ чувствительности предназначен для определения степени влияния факторов на выходные параметры модели. То есть рассчитывается вклад каждого фактора (его изменения) на изменение выходных величин, в данном случае величины расщепления. В результате ранжирования возможно упрощение модели в случае наличия в ней незначимых факторов посредством их исключения.

В качестве этапов предлагаемого анализа можно выделить следующие:

- представление модели, описанной выше, в виде «черного ящика»;
- формирование факторного пространства и его заполнение посредством проведения «виртуальных» экспериментов по оптимальному плану;
- построение поверхности отклика с использованием методов аппроксимации;
- определение чувствительности модели к факторам с последующим их ранжированием.

Представление модели в виде «черного ящика» подразумевает, что существуют только набор факторов, и выходные параметры, а их взаимосвязь нам неизвестна. На основе количества факторов и предполагаемой их взаимной зависимости определяются мини-

мально достаточные комбинации значений факторов для заполнения факторного пространства, достаточного для построения функции отклика. В настоящей работе для этих целей использовался наиболее универсальный и распространенный метод — выборка латинского гиперкуба. Построение поверхности отклика проводилось с использованием различных методов аппроксимации, выбираемых в зависимости от прогнозируемого результата. Необходимо отметить, что вычисления осуществлялись с использованием программного обеспечения для предсказательного моделирования *rSeven*, в котором используется подход суррогатного моделирования. Сначала строится первичная поверхность отклика, после чего результат уточняется посредством итеративного процесса обучения (тренировки), тем самым достигая повышенной точности. Для определения степени чувствительности модели к изменению значений факторов использовался метод Соболя. Метод Соболя на основе разделения на доли дисперсии выходных параметров модели и определения их связи с факторами, по сути, проводит ранжирование. Например, для модели с двумя факторами и одним выходным параметром можно определить, что 70 % и 20 % дисперсии выходного параметра вызвано дисперсией первого и второго факторов соответственно. Оставшиеся 10 % вызваны взаимодействием между факторами (в случае если они зависимы). В результате представленной методики было подтверждено, что наибольшее влияние (и соответственно наибольшее значение индекса Соболя) представляют дефекты разноплотности и разнотолщинности (индексы Соболя 0,451 и 0,448. Суммарное значение индексов равно единице). Получено, что при одновременном наличии дефектов разнотолщинности и разноплотности минимизация расщепления возможна с помощью корректировки распределения одного из параметров. То есть возможно такое сочетание распределения дефектов, которое компенсирует влияние друг друга, сводя расщепление к нулю. Одновременно с этим удалось получить известный результат об определяющем влиянии четвертой гармоники дефекта на расщепление частоты, что косвенно свидетельствует о целесообразности использования представленной методики.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены общие вопросы построения математической модели резонатора гироскопа типа ВТГ. Математическая модель предназначена для определения собственных частот колебаний, а также расщепления собственной рабочей частоты резонатора в виде тонкостенной полусферической оболочки. Рассмотрены методы оценки учета и влияния дефектов в реальном резонаторе на расщепление частоты. Также представлен возможный метод анализа математической модели для её оптимизации в части количества входных параметров. В качестве выводов по исследованию видится отражение значимости проведения математического моделирования для получения высокоточных инерциальных датчиков, построенных на базе волновых твердотельных гироскопов, а также необходимость использования современных методов вычислительной математики для достижения высоких результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пешехонов В.Г.* Перспективы гироскопии / В. Г. Пешехонов // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. – 2019. – С. 36–38.
2. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell / G. H. Bryan // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences. –1890. – Vol.7. – P. 101–111.
3. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп) / Д. М. Климов, В. Ф. Журавлев, Ю. К. Жбанов. - М. : Ким Л. А. - 2017. – 193 с.
4. Волновые твердотельные гироскопы (аналитический обзор) / И. А. Волчихин [и др.] // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2017. – N. 9. – С. 59–78.
5. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций / А. А. Маслов [и др.] // Гироскопия и навигация. – 2023. – 31 (1). – С. 3–25.
6. *Новожилов В.В.* Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. - Л. : Политехника, 2017. – 655 с.
7. *Shevchenko S.A.* The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling / S. A. Shevchenko, O. I. Konotopov // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. – 2021. – 14 (2). – С. 65–80.

-
8. *Рекач В.Г.* Расчет оболочек сложной геометрии / В. Г. Рекач, С. Н. Кривошапко, Е. И. Михайловский. - М. : Изд-во университета дружбы народов, 1988. - 176 с.
 9. *Шевченко С.А.* Об учете несовершенств в математической модели резонатора волнового твердотельного гироскопа / С. А. Шевченко, Б. Е. Мельников // Неделя науки ФИЗМЕХ : сборник статей Всероссийской научной конференции - СПб., 2022. - С. 260–262.
 10. *Шевченко С.А.* Использование методов теории планирования эксперимента и анализа чувствительности при работе с моделью резонатора гироскопа / С. А. Шевченко, Б. Е. Мельников // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. - 2023. - 16 (1). - С. 152–162.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА «КАЧЕНИЕ ЭЛЛИПСА ПО ЭЛЛИПСУ»

Г. А. КУТееВА, Н. П. ДОРОФееВ, К. К. ТвЕРЕВ

В работе описан процесс создания 3D-модели экспоната музея истории физики и математики СПбГУ «Качение эллипса по эллипсу», который демонстрирует движение одного эллипса по другому без проскальзывания. Моделирование и анимация выполнялись в программе Blender с применением аналитических расчетов. Для проверки адекватности полученной модели она была распечатана на 3D-принтере.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследовалась кинематика качения одного эллипса по другому без проскальзывания. Такое плоское движение изучается в теории механизмов [1, 2] и может иметь практическое применение в различных механических устройствах, таких как зубчатые передачи, подшипники, металлорежущие станки и др. Рассмотренное движение может быть использовано для создания уникальных механических устройств, но также может иметь исследовательскую ценность в различных областях, таких как теория механизмов и машин, математика и физика.

Целью работы было воссоздание установки, находящейся в музее истории физики и математики СПбГУ (рис. 1), с помощью 3D-моделирования. Принцип работы механизма основывается на оптическом свойстве эллипсов. Оно заключается в том, что лучи света, выходящие из фокуса эллипса после отражения от поверхности, сходятся в другом фокусе. Наглядное доказательство этого факта можно найти в работе [3]. Это свойство присуще всем коническим сечениям, включая эллипс, параболу и гиперболу. Оно характерно именно для них и в некотором смысле определяет их.

Работа состояла из трех частей. Сначала исследовалась кинематика механизма: были получены связи между угловыми скоростями и углами шестерней, определена координата точки качения

Доклад на семинаре 21 февраля 2023 г.

© Г. А. Кутеева, Н. П. Дорофеев, К. К. Тверев, 2023.



Рис. 1. Экспонат музея истории физики и математики СПбГУ «Качение эллипса по эллипсу»

в полярных координатах. Вторая часть состояла из рассмотрения зубчатого зацепления и создания 3D-модели установки. Приведен порядок создания анимации. Наконец, после проверки полученных частей модели на совместимость в программе Blender они объединялись, и модель распечатывалась на 3D-принтере.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для получения связи между углами поворота эллиптических шестерней рассматривалась следующая установка: два одинаковых эллиптических колеса 1 и 2 вращаются без проскальзывания вокруг неподвижных осей A и B , которые находятся в фокусах соответствующих эллипсов (рис. 2). Длины большой и малой полуосей рассматриваемых шестерней — $a = 10$ и $b = 6$ соответственно. Предполагалось, что первое колесо вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$.

Обозначим угловую скорость второго эллипса ω_2 . Дополнительно введем обозначения $AP = r_1$, $PB = r_2$ и $\phi_1 = \angle DAB$,

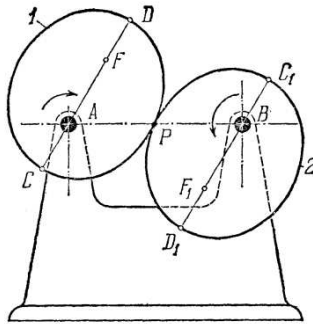


Рис. 2. Расчетная схема механизма

$\phi_2 = \angle D_1BA$. В точке P скорости эллипсов равны, следовательно:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_2 (2a - r_1). \quad (1)$$

Для фокального радиуса r_1 справедлива формула

$$r_1 = -\varepsilon(c - r_1 \cos \phi_1) + a,$$

где ε – эксцентриситет; c – фокальное расстояние. Отсюда находится выражение r_1 через угол ϕ_1 :

$$-\frac{c^2}{a} + r_1 \frac{c}{a} \cos \phi_1 + a = r_1;$$

$$r_1(a - c \cos \phi_1) = a^2 - c^2;$$

$$r_1 = \frac{b^2}{(a - c \cos \phi_1)}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{b^2}{(a - c \cos \phi_1)} / \left(2a - \frac{b^2}{(a - c \cos \phi_1)} \right) =$$

$$= \frac{b^2}{-b^2 + 2a^2 - 2ac \cos \phi_1} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ac \cos \phi_1}$$

или

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \phi_1}.$$

Ясно, что $\omega_1 = \frac{d\phi_1}{dt}$, $\omega_2 = \frac{d\phi_2}{dt}$, это позволяет получить зависимость $\phi_2(\phi_1)$, которая очень удобна при составлении анимации:

$$\frac{\frac{d\phi_2}{dt}}{\frac{d\phi_1}{dt}} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \phi_1};$$

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \phi_1}.$$

После интегрирования

$$\phi_2 = -2 \arctan \frac{(1 + \varepsilon) \tan \frac{\phi_1}{2}}{(\varepsilon - 1)}. \quad (3)$$

3. СОЗДАНИЕ 3D-МОДЕЛИ И АНИМАЦИЯ

Для создания модели механизма применялась программа Blender. Это многопрофильная программа с открытым исходным кодом, используемая в основном 3D-дизайнерами, но имеющая все необходимое для механиков в том числе. Программа Blender была выбрана из-за ее доступности, большого количества обучающих материалов и возможности быстро преобразовать полученную модель в форму, пригодную для 3D-печати.

Движение эллипсов в механизме без проскальзывания достигалось при помощи зубчатого зацепления. Основным принципом при его построении является обеспечение надежного и плавного взаимодействия между шестернями. При этом рассматриваются различные параметры зубчатых колес, такие как модуль, угол профиля, диаметр делительной окружности и высота зуба. Написано много статей по теории зубчатых зацеплений, в них подробно рассматриваются алгоритмы построения профилей, а в некоторых – даже

способы вырезания шестерней на станках [4, 5].

При моделировании зубчатого зацепления использовалась программа [6], которая задавала делительные окружности и создавала по ним массив точек (будущих зубьев), начиная с места соприкосновения окружностей. Используя вкладку `scripting`, в программе Blender по полученному массиву создавались профили шестеренок (рис. 3). Затем во вкладке `layout` они превращались в 3D-модели. Полученные модели проверялись на совместимость при помощи раздела `physics`. Проверка основывалась на возможности Blender создавать анимацию поведения созданных объектов, как если бы они были реальными физическими телами. Обоим эллипсам задавались свойства твердых тел, ставились ограничения на перемещения — эллипсы могли крутиться только вокруг своих фокусов, в одном из фокусов создавался элемент со свойствами крутящего мотора.

По окончании проверки создавались остальные части установки и собирались в цельную модель. На данном этапе проверялись результаты, полученные аналитически. Для этого во вкладке `scripting` задавалось вращение верхней шестеренки с постоянной угловой скоростью, поворот второй шестерни задавался с использованием формулы (3). При запуске анимации особое внимание было уделено тому, чтобы все работало корректно, т. е. не было проскальзывания, зубчики не наезжали друг на друга (рис. 4).

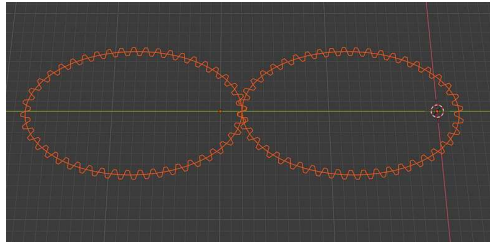


Рис. 3. Модель зубчатого зацепления в программе Blender

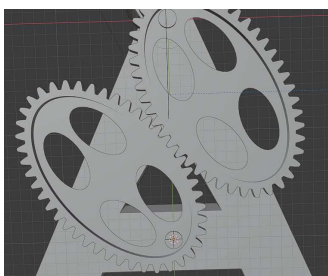


Рис. 4. 3D-модель механизма «Качение эллипса по эллипсу»

4. ПЕЧАТЬ НА 3D-ПРИНТЕРЕ

После задания анимации модель экспортировалась в .stl и подготавливалась на слайсере к печати на 3D-принтере. Именно в программе Slic3r модель переводилась в формат команд g-кода, используемых 3D-принтерами. На доступном 3D-принтере удалось распечатать только несколько основных элементов установки, а именно сами эллиптические шестерни. Они крепились нужным образом (рис. 5) и приводились в движение.

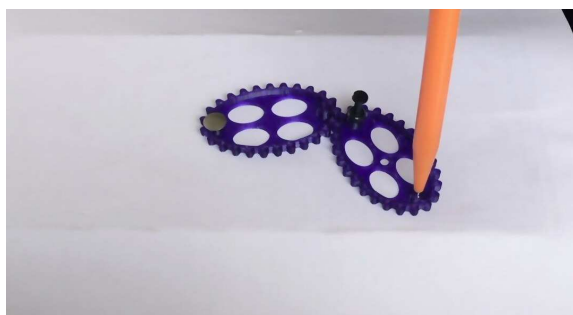


Рис. 5. Распечатанные на 3D-принтере модели эллиптических шестерней

Как и ожидалось, они оказались хорошо совместимыми и хорошо «катились» друг по другу. Была воспроизведена анимация из предыдущей стадии. Одна из шестеренок крутилась с постоянной угловой скоростью $2\pi/14 \approx 0,449 \text{ c}^{-1}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненной работы была получена модель, демонстрирующая качение эллипсов. Было проверено, что эта модель полностью соответствует аналитическим расчетам и может быть использована как учебный экспонат. Также после оценки качества полученной модели можно утверждать, что программа Blender подходит для решения подобных задач и будет использоваться в последующих работах. В будущем планируется создать еще несколько вариантов этой модели по уже изложенным принципам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И.* Механизмы в современной технике: справочное пособие для инженеров, конструкторов и изобретателей. В 7 т. Т. 4. «Зубчатые механизмы» / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1980.
2. *Litvin F. L. and Fuentes A.* Gear Geometry and Applied Theory. Second edition. — Cambridge University Press, 2004. P. 318.
3. Математические этюды офиц. сайт. – URL: <https://etudes.ru/>.
4. *Bair B. W.* Computer aided design of elliptical gears with circular-arc teeth / B. W. Bair // Mechanism and Machine Theory. 2004. — Vol. 39. — No. 2. — P. 153–168.
5. *Vasie M. and Andrei L.* Technologies for Non-Circular Gear Generation and Manufacture – The annals «Dunărea de jos» of galați Fascicle V, Technologies in machine building. — 2010. — P. 167–172.
6. Отвinta офиц. сайт. – URL: <http://www.otvinta.com/index.html>.

ДИНАМИКА СКЕЙТБОРДА И УПРАВЛЕНИЕ ЕГО РАЗГОННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ

А. С. Смирнов, А. П. Суков, Б. А. Смольников

В статье обсуждаются вопросы динамики и управления движением одной из наиболее популярных в настоящее время систем с негोलонными связями – скейтборда. Приводится краткий исторический обзор возникновения и становления скейтбординга. Дается расчетная схема скейтборда и строится математическая модель его управляемого движения, причем для полноты картины осуществляется вывод уравнений движения системы как с помощью уравнений Аппеля, так и с помощью уравнений Феррерса. Рассматриваются два варианта формирования управлений, возникающих вследствие согласованного выбора управляющих функций задачи и приводящих к разгону скейтборда. Проводится подробный анализ динамики скейтборда в указанных разгонных режимах его движения как при отсутствии, так и при наличии вязкого сопротивления со стороны окружающей среды. В результате находятся приближенные решения с удержанием необходимых поправочных слагаемых. На основе этих решений сопоставляются показатели эффективности набора скорости в режимах движения, соответствующих принятым вариантам формирования управляющих воздействий, и делаются выводы о целесообразности их использования на практике.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скейтборд – специальная доска с двумя поворотными колесными парами, созданная для занятия экстремальным видом спорта – скейтбордингом, получившая широкое распространение в последние десятилетия (рис. 1). У этого спорта имеется множество направлений – это как обычное катание по городу, так и спуск с крутых асфальтированных дорог на специальных досках (лонгбордах), а также выполнение различных трюков. С 2017 г. скейтбординг включен в олимпийские виды спорта, а на Олимпийских играх 2021 г. уже выступали профессиональные скейтбордисты.

В силу сказанного динамика и управление движением скейтборда представляет собой одну из наиболее интересных задач аналитической механики, которая имеет важное практическое значение.

Доклад на семинаре 14 марта 2023 г.

© А. С. Смирнов, А. П. Суков, Б. А. Смольников, 2023.



Рис. 1. Современный скейтборд

Этому направлению посвящены многие работы как отечественных, так и зарубежных авторов, например, [1, 2, 3, 4], а также ряд других статей. В них строятся математические модели движения скейтборда на плоскости (горизонтальной или наклонной) как системы с неголономными связями, причем рассматриваются различные варианты моделирования тела скейтбордиста (маховик или стержень с массой на конце) и его расположения на доске (симметричное или несимметричное). Кроме того, также принимаются во внимание особенности конструкции скейтборда (учет жесткости подвесок) и влияние аэродинамического сопротивления на его движение, наконец, обсуждаются вопросы устойчивости движения системы и проблемы стабилизации его движения при увеличении скорости.

Большой интерес привлекают вопросы управляемого движения скейтборда, поскольку его особенность состоит в том, что балансирующий на нем скейтбордист посредством целенаправленных качаний и поворотов своего корпуса может осуществлять разгон скейтборда, что важно с практической точки зрения [5]. В работах [6, 7] представлены некоторые варианты формирования управляющих воздействий, способствующих возникновению разгонных движений скейтборда, и построены приближенные аналитические решения, иллюстрирующие процесс набора его скорости.

Целями настоящей работы являются изучение двух режимов управляемого движения скейтборда как при отсутствии, так и при наличии внешнего сопротивления, которые приводят к его разгону, а также выявление общих и отличительных черт этих режимов и сопоставление их основных показателей друг с другом.

2. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ СКЕЙТБОРДИНГА

Прежде чем переходить к описанию расчетной схемы скейтборда и построению его математической модели, приведем краткий исторический обзор возникновения и становления скейтбординга.

Считается, что скейтбординг зародился в Калифорнии (США) в 1950-х гг., где серферы в поисках альтернативы серфингу на суше прикрепляли колеса к доскам или ящикам, тем самым создавая некоторое подобие скейтборда. Поэтому первые скейтборды сильно отличались от современных, и иногда они были больше похожи на самокаты. Заметив увлечение молодежи, Б. Ричард, владелец магазина для серферов *Val Surf* в Южной Калифорнии, понял, что это перспективное направление, и заказал у компании, которая занималась производством роликовых коньков, сделать для него плоские деревянные доски с колесами от роликов. Так в 1959 г. на полках магазинов появился первый скейтборд *Roller Derby* (рис. 2).



Рис. 2. Скейтборд *Roller Derby* (США, 1959)

В 1963 г. Л. Стивенсон создал компанию *Makaha* и первым выпустил скейтборд, похожий на современные снаряды (рис. 3). Первая партия таких скейтбордов была небольшой и состояла из 74 штук. В результате скейтбординг постепенно становился все более популярным видом спорта и проведения досуга, и в 1964 г. возник первый журнал о скейтбординге *Skateboarder*, основанный сотрудниками журнала *Surfer*. В конце 1970-х гг. был изобретен новый трюк *олли*, заключающийся в отрыве скейтборда от земли посредством щелчка тейла (задней части доски) о землю. Данное событие навсегда изменило скейтбординг, и с этого момента началось развитие различных трюков в скейтбординге.



Рис. 3. Скейтборд компании *Makaha* (США, 1963)

В Советском Союзе о скейтбординге стало известно только в конце 1970-х – начале 1980-х гг. Это было связано с существовавшим в ту пору «железным занавесом», который усложнял культурное взаимодействие с капиталистическими странами. В 1978 г. в приложении к журналу *«Юный техник»* были впервые размещены чертежи роликового самоката (рис. 4). Массовое производство скейтбордов началось в Прибалтике, где на одном из заводов выпускали скейтборды *Rula*. Интересно, что в определенный момент несколько заводов и оборонных предприятий запустили промышленное производство скейтбордов. Скейтборды собирали в Ленинграде (*«Лидер»* и *«Выраж»* со стеклопластиковой декой), Риге (*Ripo*), Рыбинске (*«Скат»*, *АПОМ*), Киеве (*«Выраж»* с резиновыми «подметками»), Краматорске (*«Восток»*), Таллине (*Rula*), Пензе (*«Старт»*), а также в Белоруссии (*ЖМЗ*), Казахстане (*«Зафак»*) и других регионах Советского Союза.

Интерес к скейтбордингу усилил и показ в кинотеатрах американских фильмов *«Столкновение»* (*Thrashin'*, 1986) и *«Достигая невозможного»* (*Gleaming the Cube*, 1989). В советских кинолентах также начали появляться упоминания о скейтборде – например, в фильмах *«Курьер»* (1986) и *«Приморский бульвар»* (1989). До 1990-х гг. скейтбординг в Советском Союзе существовал преимущественно в виде слалома, так как советские скейтборды были непригодны для других дисциплин. Скейтбординг был популярен во многих крупных городах страны – Ленинграде, Риге, Саратове,

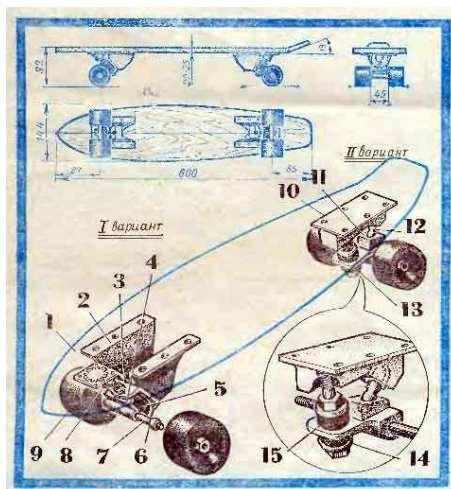


Рис. 4. Чертежи роликового самоката (СССР, 1978)

Харькове, Ялте, Севастополе. После распада Советского Союза, во второй половине 1990-х гг., в Саратове и Санкт-Петербурге возникли федерации скейтбординга, которые организовывали проведение отечественных соревнований. В это же время скейтбординг становится еще более востребованным, что было связано с всплеском популярности на Западе, а также появлением каналов, посвященных экстремальному спорту, и игр *World Extreme Games*.

В настоящее время скейтбординг представляет собой несколько различных дисциплин. В основном люди исполняют различные трюки, ударяя задней частью доски о землю и заставляя ее таким образом подниматься в воздух. Существует множество разнообразных трюков, но для их рассмотрения и построения соответствующих математических моделей необходимо проводить слишком трудоемкие расчеты, используя при этом весь арсенал численных методов исследования. Поэтому в настоящей работе будут рассмотрены режимы управляемого движения скейтборда на горизонтальной плоскости без отрыва от нее.

3. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ СКЕЙТБОРДА

Перейдем к описанию расчетной схемы скейтборда [5]. Будем полагать, что доска обладает пренебрежимо малой массой, т. е. является чисто кинематическим элементом системы. Корпус скейтбордиста заменим одним твердым телом (диском) массой m и с моментом инерции J относительно оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости доски. Диск может совершать поворотные колебательные движения по отношению к доске, которые определяются углом δ . При этом считается, что точка C расположена на расстоянии l от точек A и B , которые лежат на продольной оси скейтборда и в которых находятся оси поворота колесных пар. Поворот этих пар навстречу друг другу на угол γ производится посредством малого поперечного наклона доски вокруг продольной оси AB , осуществляемого ступнями скейтбордиста. В результате задача скейтбордиста заключается в том, чтобы за счет колебательных движений своего корпуса вызвать асимметрию реакций неголономных связей, направленных вдоль осей передней и задней колесных пар, которые привели бы к образованию ненулевой проекции на траекторию движения центра масс. Это связано с тем, что сила тяги у скейтборда создается именно за счет поперечных реакций, которые в конечном счете и приводят к разгону скейтборда. Таким образом, мы приходим к расчетной схеме скейтборда, приведенной на рис. 5, а роль управлений в данной задаче играют задаваемые функции времени $\delta(t)$ – угол поворота диска относительно доски и $\gamma(t)$ – угол поворота осей колесных пар навстречу друг другу, рациональный выбор которых и является важнейшей задачей для обеспечения необходимого темпа разгона.

Обратимся к построению математической модели управляемого движения скейтборда. В качестве обобщенных координат примем декартовы координаты x_C и y_C точки C в неподвижных осях x и y , а также угол φ между осью абсцисс и продольной осью доски. Ясно, что рассматриваемая модель скейтборда представляет собой плоское движение твердого тела, стесненное неголономными связями. Уравнения этих неголономных связей в силу условий качения колесных пар выражают ортогональность векторов скоростей \underline{v}_A и

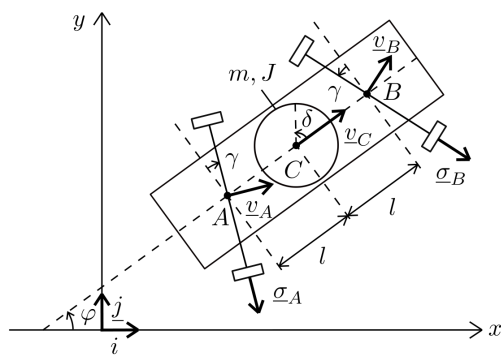


Рис. 5. Расчетная схема скейтборда

\underline{v}_B точек A и B единичным векторам \underline{e}_A и \underline{e}_B , направленным по осям вращения колес этих пар, поэтому можно записать их в виде

$$\underline{e}_A \cdot \underline{v}_A = 0, \quad \underline{e}_B \cdot \underline{v}_B = 0. \quad (1)$$

Нетрудно записать выражения для векторов, входящих в (1):

$$\begin{aligned} \underline{e}_A &= \sin(\varphi - \gamma)\underline{i} - \cos(\varphi - \gamma)\underline{j}; \\ \underline{e}_B &= \sin(\varphi + \gamma)\underline{i} - \cos(\varphi + \gamma)\underline{j}; \\ \underline{v}_A &= (\dot{x}_C + l \sin \varphi \dot{\varphi})\underline{i} + (\dot{y}_C - l \cos \varphi \dot{\varphi})\underline{j}; \\ \underline{v}_B &= (\dot{x}_C - l \sin \varphi \dot{\varphi})\underline{i} + (\dot{y}_C + l \cos \varphi \dot{\varphi})\underline{j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в условия (1), получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_C \sin(\varphi - \gamma) - \dot{y}_C \cos(\varphi - \gamma) + l \cos \gamma \dot{\varphi} = 0, \\ \dot{x}_C \sin(\varphi + \gamma) - \dot{y}_C \cos(\varphi + \gamma) - l \cos \gamma \dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку число обобщенных координат системы $(x_C, y_C$ и $\varphi)$ равно трем, то два уравнения неголономных связей (3) сводят число ее степеней свободы к единице, и это обстоятельство существенно упрощает задачу анализа управляемого движения скейтборда. Если сложить соотношения (3), то можно получить выражение

$$\dot{y}_C = \dot{x}_C \operatorname{tg} \varphi, \quad (4)$$

которое означает, что вектор скорости \underline{v}_C направлен вдоль продольной оси AB (рис. 5). Далее введем квазискорость v так, что

$$\dot{x}_C = v \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = v \sin \varphi, \quad (5)$$

поэтому величина v представляет собой скорость точки C . При этом соотношение (4) тождественно удовлетворяется, а из первого уравнения (3) вытекает соотношение

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l \operatorname{ctg} \gamma}, \quad (6)$$

которое показывает, что мгновенное движение системы представляет собой чистое вращение по окружности радиуса $R = l \operatorname{ctg} \gamma$.

Теперь можно получить уравнение движения системы с помощью уравнений Аппеля. Для этого составим энергию ускорений, которая для плоского движения твердого тела определяется следующей формулой [8]:

$$S = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J [(\ddot{\varphi} + \ddot{\delta})^2 + (\dot{\varphi} + \dot{\delta})^4], \quad (7)$$

где учтено, что абсолютный угол поворота диска равен $\varphi + \delta$. Вычислим далее выражения для обобщенных ускорений \ddot{x}_C , \ddot{y}_C и $\ddot{\varphi}$ с учетом формул (5) и (6):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C &= \dot{v} \cos \varphi - \frac{v^2}{l} \sin \varphi \operatorname{tg} \gamma, & \ddot{y}_C &= \dot{v} \sin \varphi + \frac{v^2}{l} \cos \varphi \operatorname{tg} \gamma, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{l} \left(\dot{v} \operatorname{tg} \gamma + \frac{v}{\cos^2 \gamma} \dot{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда энергия ускорений (7) примет следующую форму:

$$S \doteq \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{l^2} \operatorname{tg}^2 \gamma \right) \dot{v}^2 + \frac{J}{l} \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{v \dot{\gamma}}{l \cos^2 \gamma} + \ddot{\delta} \right) \dot{v}, \quad (9)$$

где символ « \doteq » означает, что в этом выражении уже отброшены слагаемые, не зависящие от квазиускорения \dot{v} и потому не влияющие на структуру уравнения движения. Тогда единственное уравнение Аппеля, записанное для квазискорости v , имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}} = Q. \quad (10)$$

Если предположить, что система испытывает действие внешнего сопротивления, пропорционального скорости v , то следует принять в уравнении (10) $Q = -bv$, где b – диссипативный коэффициент [6]. Подставляя также в это уравнение выражение для S согласно (9), получим после преобразований следующее уравнение управляемого движения скейтборда при наличии диссипативных эффектов:

$$\left(m + \frac{J}{l^2} \operatorname{tg}^2 \gamma\right) \dot{v} + \left(b + \frac{J}{l^2} \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos^2 \gamma} \dot{\gamma}\right) v = -\frac{J}{l} \operatorname{tg} \gamma \ddot{\delta}. \quad (11)$$

Поскольку $\gamma = \gamma(t)$ и $\delta = \delta(t)$ есть задаваемые функции времени, то (11) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами.

Отметим, что уравнение (11) может быть получено и с помощью уравнений Феррерса, которые представляют собой модифицированные уравнения Лагранжа второго рода, содержащие неопределенные множители [9]. Чтобы показать это, запишем кинетическую и потенциальную энергии системы, а также диссипативную функцию вязкого трения, принимая во внимание, что $v^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}J(\dot{\varphi} + \dot{\delta})^2, \quad \Pi = 0, \quad R = \frac{1}{2}b(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2). \quad (12)$$

Уравнения Феррерса записываются в следующем виде [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} - \frac{\partial T}{\partial x_C} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_C} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_C} + \lambda_1 q_{1x} + \lambda_2 q_{2x}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} - \frac{\partial T}{\partial y_C} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_C} - \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_C} + \lambda_1 q_{1y} + \lambda_2 q_{2y}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda_1 q_{1\varphi} + \lambda_2 q_{2\varphi}, \end{array} \right. \quad (13)$$

где λ_1 и λ_2 – неизвестные множители Лагранжа, а коэффициенты q_{1x} , q_{1y} , $q_{1\varphi}$, q_{2x} , q_{2y} , $q_{2\varphi}$ есть коэффициенты из уравнений неголономных связей (3), стоящие при соответствующих обобщенных скоростях. Выпишем далее их значения:

$$\begin{aligned} q_{1x} &= \sin(\varphi - \gamma), & q_{1y} &= -\cos(\varphi - \gamma), & q_{1\varphi} &= l \cos \gamma, \\ q_{2x} &= \sin(\varphi + \gamma), & q_{2y} &= -\cos(\varphi + \gamma), & q_{2\varphi} &= -l \cos \gamma. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (12) в уравнения (13) и принимая во внимание значения (14), получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \lambda_1 \sin(\varphi - \gamma) + \lambda_2 \sin(\varphi + \gamma) - b\dot{x}_C, \\ m\ddot{y}_C = -\lambda_1 \cos(\varphi - \gamma) - \lambda_2 \cos(\varphi + \gamma) - b\dot{y}_C, \\ J(\ddot{\varphi} + \ddot{\delta}) = (\lambda_1 - \lambda_2)l \cos \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

Видно, что первые два из этих уравнений представляют собой уравнения в форме второго закона Ньютона в проекциях на координатные оси, тогда как третье уравнение есть уравнение моментов. Отсюда легко проясняется смысл множителей λ_1 и λ_2 , которые будут характеризовать реакции неголономных связей. Подставляя теперь в (15) выражения (8) для обобщенных ускорений, будем иметь

$$\begin{cases} m \left(\dot{v} \cos \varphi - \frac{v^2}{l} \sin \varphi \operatorname{tg} \gamma \right) = \lambda_1 \sin(\varphi - \gamma) + \\ \hspace{15em} + \lambda_2 \sin(\varphi + \gamma) - bv \cos \varphi, \\ m \left(\dot{v} \sin \varphi + \frac{v^2}{l} \cos \varphi \operatorname{tg} \gamma \right) = -\lambda_1 \cos(\varphi - \gamma) - \\ \hspace{15em} - \lambda_2 \cos(\varphi + \gamma) - bv \sin \varphi, \\ J \left[\frac{1}{l} \left(\dot{v} \operatorname{tg} \gamma + \frac{v}{\cos^2 \gamma} \dot{\gamma} \right) + \ddot{\delta} \right] = (\lambda_1 - \lambda_2)l \cos \gamma. \end{cases} \quad (16)$$

Домножая первое из уравнений этой системы на $\cos \varphi$, а второе — на $\sin \varphi$, а затем складывая их, получим после преобразований следующее простое уравнение:

$$m\dot{v} = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \gamma - bv. \quad (17)$$

Отсюда непосредственно видно, что разгон скейтборда возникает именно за счет асимметрии реакций неголономных связей, т. е. поперечных реакций, как это уже упоминалось выше. В этом и заключается основное отличие скейтборда от прочих колесных устройств, в которых разгон осуществляется за счет создания вращающих моментов на колеса, которые приводят к возникновению продольных реакций [5]. Наконец, исключая $\lambda_2 - \lambda_1$ из (17) и подставляя это выражение в третье уравнение (16), приходим к тому же самому уравнению (11), как этого и следовало ожидать.

4. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СКЕЙТБОРДА

Перейдем теперь к формированию законов управления $\gamma = \gamma(t)$ и $\delta = \delta(t)$, которые будут приводить к разгонным движениям скейтборда. Нетрудно понять, что для эффективного набора скорости управления γ и δ должны быть согласованными между собой. Рассмотрим далее два варианта выбора этих функций.

В качестве первого варианта примем, что обе функции γ и δ изменяются во времени по синусоидальному закону синхронно и синфазно друг с другом, и представим их в виде [5, 6]

$$\gamma(t) = \gamma_m \sin \omega t, \quad \delta(t) = \delta_m \sin \omega t, \quad (18)$$

где ω – частота изменения данных функций; γ_m и δ_m – их амплитуды. При этом колебания по углу δ схожи с колебаниями корпуса скейтбордиста, совершаемыми им в процессе разгона, тогда как колебания по углу γ имитируют плавные движения осей колесных пар относительно платформы, которые вызываются ступнями скейтбордиста. Кроме того, ускорение $\ddot{\delta}$, входящее в уравнение (11), также будет меняться по гармоническому закону $\ddot{\delta}(t) = -\delta_m \omega^2 \sin \omega t$, находясь в противофазе с функцией $\gamma(t)$.

Рассмотрим теперь другой вариант формирования управляющих воздействий, модифицируя с этой целью выражения (18) и принимая более сложный закон изменения функций γ и δ во времени, сохраняющий тем не менее их колебательный характер с учетом синхронности. Положим, что указанные функции имеют одну и ту же частоту изменения ω , причем $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ являются кусочно-постоянными функциями разного знака, который меняется через каждую половину периода: $\gamma = \pm \gamma_m$, $\ddot{\delta} = \mp \ddot{\delta}_m$, где $\gamma_m > 0$ и $\ddot{\delta}_m > 0$ – постоянные значения. Предположим, что на первом полупериоде $0 \leq t \leq T/2$, где $T = 2\pi/\omega$, имеем $\gamma = \gamma_m > 0$, а $\ddot{\delta} = -\ddot{\delta}_m < 0$. Тогда получим на этом промежутке следующую параболическую зависимость $\delta(t)$ для модифицированного закона управления [7]:

$$\delta(t) = \frac{16}{T^2} t \left(\frac{T}{2} - t \right) \delta_m, \quad \ddot{\delta} = -\frac{32\delta_m}{T^2} = -\frac{8\delta_m \omega^2}{\pi^2} = -\ddot{\delta}_m = \text{const}, \quad (19)$$

где учтено, что $\delta = 0$ при $t = 0$ и $t = T/2$; δ_m – максимальное значение функции $\delta(t)$, достигаемое при $t = T/4$.

На рис. 6 зависимости $\gamma = \gamma(t)$ и $\delta = \delta(t)$ приведены графически для каждого из вариантов формирования управлений, причем в первом случае закон управления можно назвать синусоидальным, а во втором – скачкообразно-параболическим. Дальнейшее исследование будет посвящено демонстрации того, что выбор управляющих функций указанными способами приводит к возникновению разгонных движений скейтборда, а также их детальному анализу.

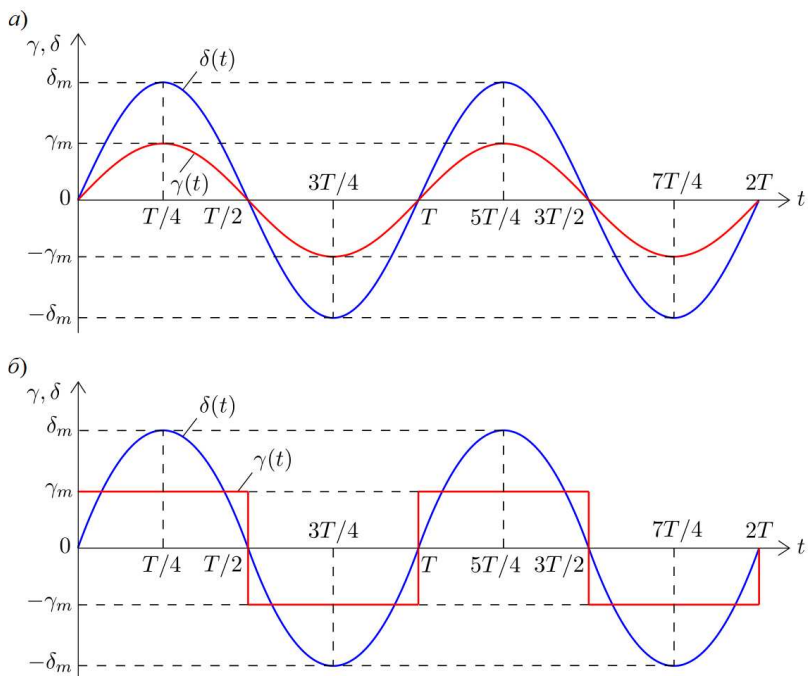


Рис. 6. Законы управления движением скейтборда: а – синусоидальный; б – скачкообразно-параболический

5. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗГОННЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ СКЕЙТБОРДА ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Обращаясь к анализу разгонных режимов движения скейтборда, рассмотрим сначала случай, когда силы сопротивления не учитываются, т. е. положим $b = 0$ в уравнении (11). В этой ситуации его решение имеет наиболее простую форму. В самом деле, упомянутое уравнение (11) можно тогда переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{M(\gamma)} \right) = -\frac{J}{l} M(\gamma) \operatorname{tg} \gamma \ddot{\delta}, \quad M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{m + \frac{J}{l^2} \operatorname{tg}^2 \gamma}}. \quad (20)$$

Приняв начальную скорость при $t = 0$ равной v_0 , получим после интегрирования уравнения (20) его решение:

$$v(t) = v_0 \frac{M(\gamma)}{M(\gamma|_{t=0})} - \frac{J}{l} M(\gamma) \int_0^t F(\tau) d\tau, \quad F(t) = M(\gamma) \operatorname{tg} \gamma \ddot{\delta}, \quad (21)$$

где следует иметь в виду, что $\gamma = \gamma(t)$; $\delta = \delta(t)$. Далее необходимо изучить два принятых ранее варианта управления, представленных графически на рис. 6, а и 6, б соответственно.

Для синусоидального режима управления выражение для $M(\gamma)$ согласно второй формуле (20) с учетом (18) можно записать в упрощенном виде, если принять величину γ_m достаточно малой, что отвечает реальным условиям движения. Используя стандартные аппроксимации, а также полагая, что $J = mr^2$, где r – радиус инерции диска относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости доски, будем иметь

$$M(\gamma) \approx \frac{1}{\sqrt{m}} (1 - \kappa \sin^2 \omega t), \quad \kappa = \frac{\gamma_m^2 r^2}{2l^2}, \quad (22)$$

причем величину κ можно трактовать как малый параметр ($\kappa \ll 1$). Далее вычислим интеграл в первой формуле (21):

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \approx -\frac{\gamma_m \delta_m \omega^2}{\sqrt{m}} \left[\frac{t}{2} \left(1 - \frac{3\kappa}{4} \right) - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} (1 - \kappa) - \frac{\kappa \sin 4\omega t}{32\omega} \right]. \quad (23)$$

Наконец, подставляя (23) в первую формулу (21), можно определить и искомую скорость v , удерживая во втором слагаемом этой формулы лишь величины, пропорциональные времени, и пренебрегая всеми несущественными членами:

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} \cos 2\omega t \right) + \frac{\delta_m \gamma_m \omega^2 r^2}{2l} \left(1 - \frac{5\kappa}{4} + \frac{\kappa}{2} \cos 2\omega t \right) t. \quad (24)$$

Следовательно, в среднем будем иметь следующую простую приближенную зависимость [7]:

$$\bar{v}(t) = v_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right) + W \left(1 - \frac{5\kappa}{4} \right) t, \quad W = \frac{\delta_m \gamma_m \omega^2 r^2}{2l}. \quad (25)$$

Анализируя эту формулу, заключаем, что при синусоидальном законе управления движение скейтборда в среднем имеет равноускоренный характер. При этом ускорение характеризуется величиной W и учитывает поправку за счет малого параметра κ .

Чтобы получить решение для скачкообразно-параболического закона управления, следует учесть, что $\ddot{\delta}$ и γ всегда имеют противоположные знаки. В этом случае величина M является постоянной, и для нее можно записать простое приближенное выражение

$$M \approx \frac{1}{\sqrt{m}}(1 - \kappa), \quad (26)$$

где вновь принято, что γ_m является малой величиной, а также сохранено прежнее обозначение для κ согласно второй формуле (22). Подставляя теперь (26) в формулу (21), находим с учетом (19) и обозначения для W согласно второй формуле (25) искомую зависимость:

$$v(t) \approx v_0 + \frac{16}{\pi^2} W(1 - 2\kappa)t. \quad (27)$$

Из сопоставления формул (25) и (27) вытекает важный вывод: при одинаковых максимальных значениях γ_m и δ_m управляющих функций и одинаковой частоте ω в обоих вариантах второй режим будет обладать большим темпом набора скорости (так как $16/\pi^2 \approx 1,62$), причем для него процесс изменения скорости не сопровождается наложением колебательной составляющей. При этом

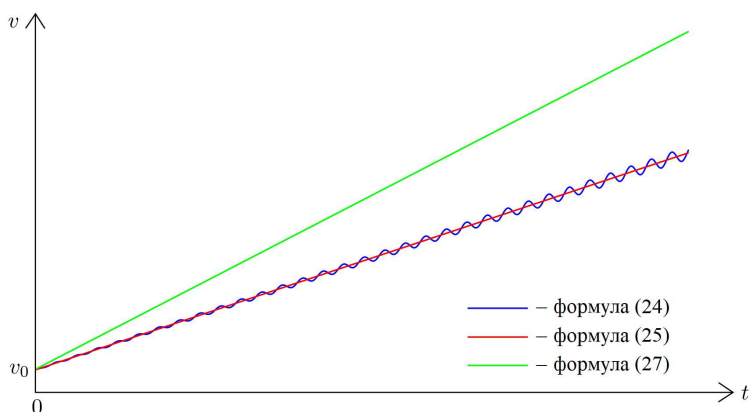


Рис. 7. Разгон скейтборда при отсутствии сил сопротивления

поправка, вносимая в величину ускорения параметром κ , во втором варианте оказывается несколько более ощутимой, чем в первом.

На рис. 7 представлены графики, иллюстрирующие разгон скейтборда при отсутствии сил сопротивления в каждом из режимов управляемого движения и построенные по формулам (24) и (27) соответственно, а также зависимость скорости от времени в среднем (25) для первого режима.

6. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА РАЗГОННЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ СКЕЙТБОРДА

Рассмотрим теперь случай, когда учитываются силы сопротивления со стороны окружающей среды. Для этого перепишем уравнение управляемого движения скейтборда (11) в виде

$$\dot{v} + F(t)v = G(t), \quad (28)$$

где функции $F(t)$ и $G(t)$ определяются выражениями:

$$F(t) = \frac{b + \frac{J}{2l^2} \frac{d}{dt} (\operatorname{tg}^2 \gamma)}{m + \frac{J}{l^2} \operatorname{tg}^2 \gamma}, \quad G(t) = -\frac{J \operatorname{tg} \gamma \ddot{\delta}}{l (m + \frac{J}{l^2} \operatorname{tg}^2 \gamma)}. \quad (29)$$

Решение уравнения (28) можно представить в следующей форме:

$$v(t) = e^{-\int_0^t F(\tau) d\tau} \left[\int_0^t G(\tau_1) e^{\int_0^{\tau_1} F(\tau_2) d\tau_2} d\tau_1 + v_0 \right]. \quad (30)$$

Сначала обсудим синусоидальный режим управления, отвечающий рис. 6, а. Полагая, что в первой формуле (18) величина γ_m является малой величиной, запишем приближенные выражения

$$\begin{aligned} F(t) &\approx \beta + \kappa(\omega \sin 2\omega t - 2\beta \sin^2 \omega t); \\ G(t) &\approx 2W \sin^2 \omega t (1 - 2\kappa \sin^2 \omega t), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\beta = b/m$ – приведенный диссипативный коэффициент; для κ и W сохраняются прежние обозначения согласно вторым формулам (22) и (25). При этом для упрощения дальнейших действий помимо малости κ будем также считать достаточно малыми и диссипативные эффекты, т. е. примем $\beta/\omega \ll 1$. Тогда после пренебрежения несущественными членами можно записать приближенно, что

$$\int_0^{\tau_1} F(\tau_2) d\tau_2 \approx \beta(1 - \kappa)\tau_1 + \kappa \sin^2 \omega \tau_1, \quad (32)$$

где использована первая формула (31). Отметим, что в (32) величина β фигурирует лишь при слагаемом, пропорциональном времени, которое также уточнено за счет удержания в нем величины κ , важной для получения корректной поправки в конечных выражениях. Теперь с учетом (32) можно установить, что

$$e^{\int_0^{\tau_1} F(\tau_2) d\tau_2} \approx e^{\beta(1-\kappa)\tau_1} (1 + \kappa \sin^2 \omega \tau_1). \quad (33)$$

Таким образом, для использования формулы (30) остается приближенно вычислить следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^t G(\tau_1) e^{\int_0^{\tau_1} F(\tau_2) d\tau_2} d\tau_1 &\approx 2W \int_0^t e^{\beta(1-\kappa)\tau_1} \sin^2 \omega \tau_1 (1 - \kappa \sin^2 \omega \tau_1) d\tau_1 \approx \\ &\approx \frac{W}{4\beta} \left[(4 + \kappa) \left(e^{\beta(1-\kappa)t} - 1 \right) - \frac{2\beta}{\omega} e^{\beta(1-\kappa)t} \sin 2\omega t \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где приняты во внимание выражение (33) и вторая формула (31). Отметим, что в полученном соотношении (34) удержано наиболее важное колебательное слагаемое, необходимое для получения корректной качественной и количественной картины изменения скорости во времени. Наконец, из формулы (30) с учетом соотношений (33) и (34) получим после некоторых преобразований и упрощений окончательное выражение для указанной зависимости:

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} \cos 2\omega t \right) e^{-\beta(1-\kappa)t} + \frac{W}{\beta} \left[\left(1 - \frac{\kappa}{4} \right) \left(1 - e^{-\beta(1-\kappa)t} \right) - \frac{\beta}{2\omega} \sin 2\omega t \right]. \quad (35)$$

Отсюда нетрудно понять, что в среднем будет иметь место следующая зависимость:

$$\bar{v}(t) = v_0 \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right) e^{-\beta(1-\kappa)t} + \frac{W}{\beta} \left(1 - \frac{\kappa}{4} \right) \left(1 - e^{-\beta(1-\kappa)t} \right). \quad (36)$$

Кроме того, из (35) вытекает, что при $t \rightarrow \infty$ мы получим достаточно несложное выражение

$$v_\infty(t) = \frac{W}{\beta} \left(1 - \frac{\kappa}{4} - \frac{\beta}{2\omega} \sin 2\omega t \right), \quad (37)$$

представляющее собой установившиеся колебания скорости с малой амплитудой вблизи некоторого постоянного значения и с удвоенной частотой по сравнению с частотой изменения функций $\gamma(t)$ и $\delta(t)$. Отметим также, что если в формуле (36) осуществить предельный переход при $\beta \rightarrow 0$, то получится результат (25), найденный ранее при исследовании движений скейтборда в отсутствие сил сопротивления, как этого и следовало ожидать. Важно подчеркнуть, что существенная ценность выражений (36) и (37) состоит в том, что они содержат необходимые поправочные слагаемые с κ , а потому уточняют аналогичные формулы из статьи [6].

Остается рассмотреть второй режим управляемого движения, представленный на рис. 6, б. В этом случае выражения для функций (29) оказываются следующими:

$$F \approx \beta(1 - 2\kappa), \quad G \approx \frac{16}{\pi^2} W(1 - 2\kappa), \quad (38)$$

и, как видно, здесь они не зависят от времени. Подставляя выражения (38) в формулу (30), находим после элементарных вычислений закон изменения скорости во времени в окончательной форме:

$$v(t) = v_0 e^{-\beta(1-2\kappa)t} + \frac{16}{\pi^2} \frac{W}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(1-2\kappa)t}\right). \quad (39)$$

Легко увидеть, что по своей структуре полученное выражение аналогично формуле (36), полученной ранее для первого режима в среднем. При этом из формулы (39) вытекает, что при $t \rightarrow \infty$ имеет место выход скорости на установившееся значение:

$$v_\infty = \frac{16}{\pi^2} \frac{W}{\beta}. \quad (40)$$

Кроме того, следует подчеркнуть, что при осуществлении предельного перехода при $\beta \rightarrow 0$ из формулы (39) приходим к выражению (27), полученному при отсутствии сил сопротивления, что также является ожидаемым результатом.

Таким образом, при всех равных параметрах задачи в обоих вариантах управления второй из них при учете сил сопротивления со стороны окружающей среды вновь является более предпочтительным, как это было ранее для случая их отсутствия. Он позволяет выйти на установившееся движение с существенно большей скоростью, поскольку в формуле (40) для v_∞ стоит коэффициент $16/\pi^2 \approx 1,62$, причем на эту скорость не будет накладываться колебательная составляющая, как это имело место в формуле (37). Отметим также, что числовой показатель эффективности второго режима оказывается точно таким же, как и при отсутствии сопротивления. Помимо того, поправка, которая вносится в выражение для скорости за счет параметра κ и обеспечивает более высокую точность решения, является более значимой в показателях экспонент в формуле (39) по сравнению с выражением (35).

На рис. 8 изображены графики, иллюстрирующие разгон скейтборда при наличии сил сопротивления в каждом из режимов управляемого движения с выходом на установившееся движение и построенные по формулам (35) и (39) соответственно, а также зависимость (36), описывающая закон изменения скорости от времени в среднем для первого режима.

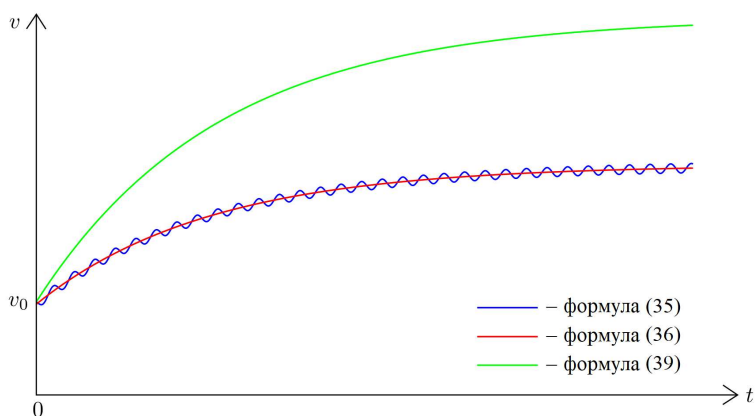


Рис. 8. Разгон скейтборда при наличии сил сопротивления

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги проведенного исследования, можно заключить, что для возбуждения эффективных разгонных режимов движения скейтборда можно формировать управляющие функции различными способами, от которых будет зависеть темп набора скорости. Для представленных вариантов синусоидального и скачкообразно-параболического законов управления в настоящей работе были получены несложные конечные формулы, описывающие разгон скейтборда как при отсутствии, так и при наличии сил сопротивления со стороны окружающей среды. Эти приближенные выражения позволяют выявить и продемонстрировать особенности каждого из режимов управляемого движения, а при учете сил сопротивления также проанализировать процессы выхода скейтборда на установившееся движение. Кроме того, было дано сопоставление полученных результатов и установлено, что второй вариант формирования управлений дает более эффективные показатели набора скорости, чем первый. В заключение остается подчеркнуть, что приведенная задача допускает и ряд дальнейших модификаций, связанных, например, с рассмотрением более сложных вариантов формирования

управляющих функций, изучением управляемого движения скейтборда на наклонной плоскости, а также усложнением исходной расчетной схемы и построением уточненной математической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулешов А. С.* Математическая модель скейтборда с одной степенью свободы / А. С. Кулешов // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 414. — № 3. — С. 330–333.
2. *Кремнев А. В.* Нелинейная динамика модели скейтборда с тремя степенями свободы / А. В. Кремнев, А. С. Кулешов // Нелинейная динамика. — 2008. — Т. 4. — № 3. — С. 341–355.
3. *Várszegi B.* Downhill motion of the Skater-Skateboard system / B. Várszegi, D. Takács // Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering. — 2016. — Vol. 60. — № 1. — P. 58–65.
4. *Várszegi B.* Stabilizing skateboard speed-wobble with reflex delay / B. Várszegi, G. Stepan, D. Takacs, S. J. Hogan // Journal of the Royal Society. Interface. — 2016. — Vol. 13. — № 121. — P. 20160345.
5. *Меркин Д. Р.* Прикладные задачи динамики твердого тела / Д. Р. Меркин, Б. А. Смольников. — СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2003. — 534 с.
6. *Ispolov Yu. G.* Skateboard dynamics / Yu. G. Ispolov, B. A. Smolnikov // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1996. — 131 (3-4). — P. 327–333.
7. *Суков А. П.* Анализ управляемых режимов движения скейтборда / А. П. Суков, А. С. Смирнов // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований : материалы V Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, 11–15 апреля 2022 г. — Комсомольск-на-Амуре, 2022. — Ч. 2. — С. 395–397.
8. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика / А. П. Маркеев. — М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 592 с.
9. *Неймарк Ю. И.* Динамика неголомных систем / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. — М. : Наука, 1967. — 520 с.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ С КОЛЬЦЕВЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Г. А. НЕСТЕРЧУК

В работе исследуются низшие частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости.

Выделены два типа колебаний конструкции. Формы собственных колебаний первого типа имеют большое число волн в окружном направлении и сходны с формами собственных колебаний неподкрепленной цилиндрической оболочки. Формы и частоты колебаний второго типа близки к формам и частотам колебаний кольцевой пластины. С помощью численных и асимптотических методов исследуется влияние на низшую частоту оболочки закона распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей. Получены формулы для вычисления приближенных значений фундаментальных частот конструкций для случая жесткой заделки краев оболочки.

Для конструкции фиксированной массы решается оптимизационная задача нахождения функции распределения высот шпангоутов, для которой фундаментальная частота имеет наибольшее значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрические оболочки являются одними из наиболее распространенных конструктивных элементов, используемых в различных областях промышленности и техники. Изучение колебаний оболочек является необходимым в связи с тем, что такие конструкции часто подвергаются действию переменных нагрузок, вызванных вибрацией, ударными нагрузками, ветровыми или сейсмическими воздействиями. В судостроении, ракетной технике и авиационном строительстве наряду с гладкими оболочками широко используются подкрепленные оболочки. При оптимальном выборе параметров оболочки, подкрепленная шпангоутами, имеет фундаментальную

Доклад на семинаре 12 сентября 2023 г.

© Г. А. Нестерчук, 2023.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

частоту в несколько раз большую, чем гладкая оболочка той же массы [3].

В подавляющем большинстве работ рассматриваются оболочки, подкрепленные ребрами одинаковой жесткости [3]. В данной статье исследуются колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, высоты которых изменяются вдоль образующей оболочки. Проведено сравнение фундаментальных частот колебаний, полученных асимптотическим методом, а также методом Рэлея–Ритца и методом конечных элементов. Решена оптимизационная задача нахождения наибольшего значения фундаментальной частоты для конструкции фиксированной массы при изменении коэффициентов функции распределения высот шпангоутов.

В работах, посвященных исследованию колебаний цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами, как правило, используется стержневая модель шпангоута, поскольку при малой высоте собственная частота колебаний шпангоута превышает собственную частоту колебаний оболочки. Однако с увеличением высоты собственная частота колебаний шпангоута падает, что ведет к уменьшению частоты колебаний всей конструкции. Поэтому, когда отношение высоты шпангоута к его ширине велико, для получения приемлемых результатов вместо использования модели кольцевого стержня следует рассматривать шпангоуты как кольцевые пластины [7]. Получены формулы для вычисления приближенных значений фундаментальных частот цилиндрической оболочки с жестко заделанными краями, подкрепленной кольцевыми пластинами разной ширины. Оптимальным является использование таких шпангоутов, у которых первая частота колебаний совпадает с первой частотой колебаний оболочки. Результаты исследования могут быть применены при проектировании конструкций, работающих в условиях воздействия динамических нагрузок.

2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается задача о колебаниях тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, на которую для увеличения фундамен-

тальной частоты установлено n_s поперечных ребер жесткости с нулевым эксцентриситетом. После разделения переменных безразмерная система уравнений, описывающих малые свободные колебания цилиндрической оболочки, принимает вид [1, 2]

$$\mu^4 \cdot \Delta^2 w - \sigma \Delta_k \Phi - \lambda w = 0, \quad \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (1)$$

где

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{ds^2} - m^2 w, \quad \Delta_k w = \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad \sigma = 1 - \nu^2,$$

где s — координата, направленная по образующей; Φ — функция усилий; w — проекция перемещения на направление нормали; m — число волн по параллели; ν — коэффициент Пуассона; $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр; h — толщина оболочки; $\lambda = \sigma \rho \omega^2 R^2 E^{-1}$; ρ — плотность материала; E — модуль Юнга; ω — частота собственных колебаний. За единицу длины выбран радиус R основания цилиндра.

Ограничимся определением низших частот колебаний. Предположим, что граничные условия не допускают изгибания срединной поверхности оболочки. Представим решение системы уравнений (1) в виде суммы основного полубезмоментного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев оболочки. Тогда низшим частотам соответствуют $\lambda \sim \mu^2$, $m \sim \mu^{-1/2}$ [1]. Исключая из системы функцию усилий Φ и считая, что $\Delta \sim m^2$, в первом приближении получим уравнение

$$w_0^{IV} - \alpha^4 w_0 = 0, \quad \alpha^4 = \frac{m^4 \lambda_0 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \quad (2)$$

где w_0 описывает полубезмоментное состояние; λ_0 — приближенное значение λ ; $w' = dw/ds$ [1, 2]. В дальнейшем рассматривается только приближенное решение, вместо w_0 и λ_0 используются обозначения w и λ соответственно.

В случае жесткой заделки краев оболочки граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0, \quad (3)$$

где l — безразмерная длина оболочки.

Предположим, что ширина кольцевых пластин (высота шпангоутов) мала по сравнению с радиусом оболочки. В этом случае, как показано в работе [7], в первом приближении кольцевые пластины можно рассматривать как круговые стержни. Если оболочка подкреплена по параллелям с координатами $s = s_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ круговыми стержнями (шпангоутами), то $w = w^{(i)}$ при $s \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, причем $s_0 = 0, s_n = l$:

$$w^{(i)IV} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута $a_i \ll \mu$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, которые могут иметь разные высоты и жесткости, выполняются условия сопряжения [3]:

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)'} &= w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, & w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} &= -c_i w^{(i+1)}, \\ & & s &= s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$c_i = \frac{m^8 \mu^4 l \eta_i}{\sigma n}, \quad \eta_i = \frac{12 \sigma n E_c J_i}{h^3 E l},$$

где E_c — модуль Юнга материала шпангоутов; η_i — безразмерная жесткость i -го шпангоута, пропорциональная отношению изгибных жесткостей шпангоута и оболочки, введенная в [4]; J_i — момент инерции поперечного сечения i -го шпангоута относительно образующей цилиндра.

Приближенное значение параметра частоты подкрепленной оболочки определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\sigma \alpha^4(\mathbf{c})}{m^4} + \mu^4 m^4, \quad \mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1}^n,$$

где $\alpha(\mathbf{c})$ — собственное значение краевой задачи (4)–(5) с граничными условиями (3).

3. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ШПАНГОУТА

На рис. 1 изображена оболочка со шпангоутами в разрезе вдоль образующей оболочки.

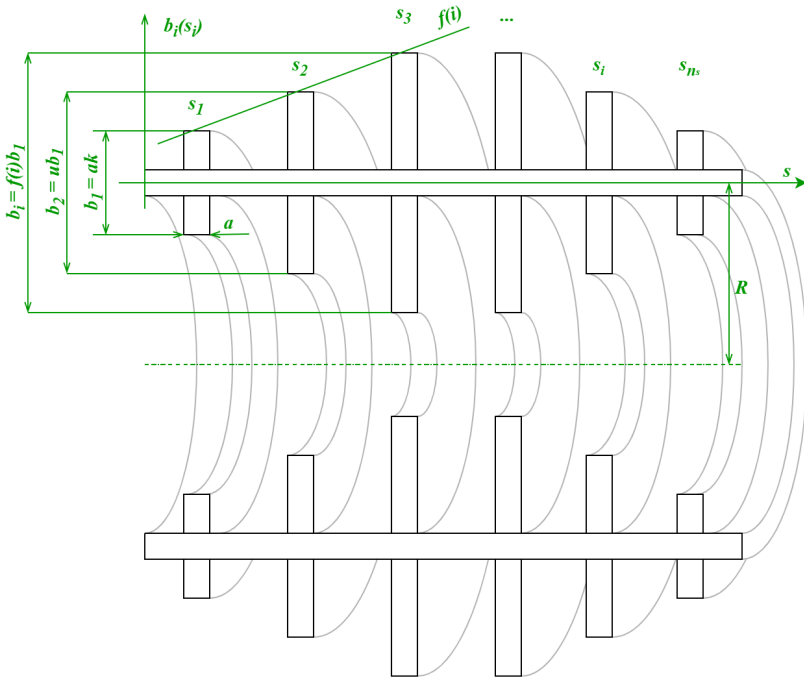


Рис. 1. Осевое сечение оболочки, подкреплённой шпангоутами

Будем считать, что оболочка и шпангоуты выполнены из одного материала. Предположим, что все шпангоуты имеют одинаковую ширину, равную a , а высота первого шпангоута $b = ka$. Введем $f(i)$ — функцию, описывающую распределения высот шпангоутов вдоль образующей цилиндра: $b_i = bf(i) = kaf(i)$.

Эксцентриситетом шпангоута называется расстояние между центром тяжести поперечного сечения шпангоута и срединной поверхностью оболочки. Для случая шпангоута с нулевым эксцентриситетом момент инерции i -го шпангоута рассчитывается по формуле

$$J_i = \frac{ab_i^3}{12} = \frac{a^4k^3}{12}f^3(i) = Jf^3(i), \quad J = \frac{a^4k^3}{12}.$$

Тогда безразмерную жесткость шпангоута можно записать в виде:

$$c_i = \frac{m^8 \mu^4 l \eta_i}{\sigma n} = \frac{m^8 \mu^4 l \eta}{\sigma n} f^3(i) = c \cdot f^3(i); \quad (6)$$

$$\eta_i = \frac{12 \sigma n E_c J_i}{h^3 E l} = \frac{12 \sigma n J}{h^3 l} f^3(i) = \eta \cdot f^3(i);$$

где

$$c = \frac{m^8 \mu^4 l \eta}{\sigma n}, \quad \eta = \frac{12 \sigma n J}{h^3 l}. \quad (7)$$

На практике чаще применяются шпангоуты с ненулевым эксцентриситетом, когда весь шпангоут находится либо внутри оболочки, либо снаружи оболочки. В случае, когда эксцентриситет шпангоута равен $b_i/2$, для получения оценки первой частоты оболочки сверху можно взять момент инерции $J = ab^3/3$.

Функция профиля конструкции $f(i)$ может иметь произвольный вид, однако целесообразно подкреплять оболочку шпангоутами, высоты которых симметричны относительно середины. В частности, для линейного распределения высот шпангоутов, изображенного на (рис. 2, а), функция $f(i)$ имеет вид

$$f_{lin}(i) = (\kappa(i) - 1)(u - 1) + 1, \quad u = \frac{b_2}{b_1}. \quad (8)$$

Для случая распределения высот шпангоутов по параболе, изображенного на (рис. 2, б),

$$f_{parab}(i) = a_p \kappa^2(i) - n a_p \kappa(i) + n a_p - a_p + 1, \quad \text{где } a_p = \frac{1 - u}{n - 3}. \quad (9)$$

Для случая экспоненциального распределения высот шпангоутов, изображенного на (рис. 2, в), в

$$f_{exp}(i) = \frac{u - 1}{e^2 - e} e^{\kappa(i)} + \frac{e - u}{e - 1}. \quad (10)$$

Соответственно для случая подкрепления оболочки одинаковыми шпангоутами

$$f_0(i) = 1. \quad (11)$$

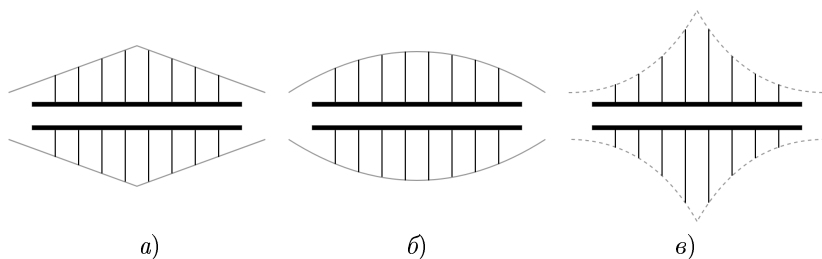


Рис. 2. Профили конструкции для случая: а) — линейной; б) — параболической; в) — экспоненциальной функций распределения высот шпангоутов

В формулах (8), (9), (10) функция

$$\kappa(i) = \frac{n}{2} - \left| \frac{n}{2} - i \right| = \begin{cases} i, & i < \frac{n}{2} \\ n - i, & i \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

гарантирует симметричность функций профиля конструкции, а параметр $u = b_2/b_1$ характеризует амплитуду функции распределения.

4. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ШПАНГООУТОВ

Краевая задача (3)–(4)–(5) эквивалентна задаче об определении низших частот поперечных колебаний жестко закрепленной балки (рис. 3), подкрепленной пружинами жесткости c_i в точках $s = s_i$.

В работе [5] проанализированы случаи неравномерного расположения пружин. Посредством перебора вариантов определены оптимальные расположения пружин, которым соответствует максимум величины первого собственного значения $\alpha_1(c)$ краевой задачи (3)–(4)–(5). С увеличением жесткости пружин c координаты точек их оптимального расположения $s_i(c)$ стремятся к некоторым предельным значениям s_i^* . Оптимальное расположение пружин в точках s_i^* , соответствующее $c = \infty$, названо предельным оптимальным расположением.

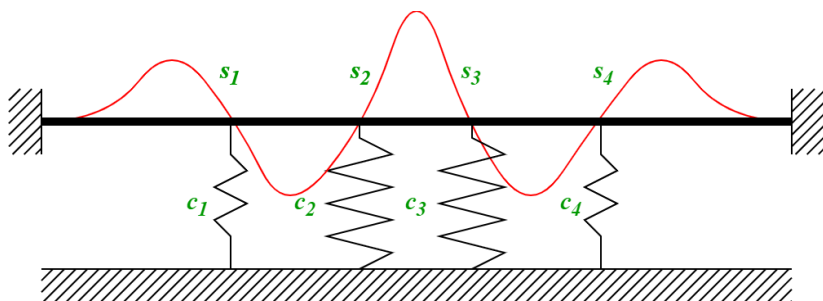


Рис. 3. Форма колебаний защемленной балки, подкреплённой пружинами

В работе [6] показано, что в случае жесткой заделки узлы формы колебаний неподкреплённой балки совпадают с точками предельного оптимального расположения пружин. Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) имеет вид

$$w_n(s) = [U(\alpha_n s) - \varkappa_n V(\alpha_n s)], \quad (12)$$

где

$$U(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad V(x) = \operatorname{sh} x - \sin x,$$

$$\alpha_n = \frac{z_n}{l}, \quad \varkappa_n = \frac{\operatorname{ch} z_n - \cos z_n}{\operatorname{sh} z_n - \sin z_n},$$

а величины

$$z_n \simeq \pi(2n + 1)/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

являются корнями уравнения $\operatorname{ch} z \cdot \cos z = 1$. При этом точки оптимального расположения пружин совпадают с корнями уравнения $w_n(s) = 0$.

В дальнейшем для упрощения записи вместо $\alpha_0 = \frac{\pi}{2l}$ используется α , вместо $\varkappa_1 = U(\frac{3\pi}{2})/V(\frac{3\pi}{2})$ используется \varkappa , а первая форма колебаний неподкреплённой балки $w_1(s)$ обозначается $w(s)$.

Если $c \gg 1$, то оптимальное расположение шпангоутов мало отличается от предельного оптимального расположения.

5. НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПРУЖИНАМИ

Рассмотрим краевую задачу (4)–(5) о колебаниях балки, подкреплённой разными пружинами. Для решения будем использовать метод Рэлея. Формулу Рэлея для подкреплённой пружинами балки можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\alpha_1^4 = \frac{I_1 + I_2}{I_0}, \quad (13)$$

где I_0 — кинетическая энергия балки (работа сжимающей оболочку силы); I_1 — энергия деформации балки (потенциальная энергия изгиба оболочки); I_2 — энергия деформации пружин (деформация подкрепляющих оболочку шпангоутов):

$$I_0 = \int_0^l w^2(s) ds, \quad I_1 = \int_0^l (w''(s))^2 ds = \alpha^4 I_0, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i).$$

Для случая жесткой заделки (3) краев балки подставим в (13) $w = w_1$, где функция w_1 определяется по формуле (12). Тогда значения I_0 , I_1 и I_2 вычисляются по следующим формулам:

$$I_0 = \int_0^l (U(\alpha s) - \varkappa \cdot V(\alpha s))^2 ds; \quad I_1 = \int_0^l (S(\alpha s) - \varkappa \cdot T(\alpha s))^2 ds;$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i) = c \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \cdot w^2(s_i).$$

Следовательно, значение приближенного параметра первой частоты колебаний балки с защемленными концами может быть вычислено по формуле

$$\alpha_c^4 = \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} = \left(\frac{3\pi}{2l} \right)^4 + c \frac{T_c(n)}{I_0}, \quad T_c(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) w^2(s_i). \quad (14)$$

6. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим задачу об определении наименьшего значения параметра частоты λ^c для цилиндрической оболочки с жестко закрепленными (3) краями. В этом случае координаты параллелей, на которых оболочка подкрепляется шпангоутами жесткости c_i , являются узлами формы колебаний неподкрепленной жестко заделанной оболочки (12). Подставим (7) в формулу для собственного значения (14) краевой задачи(3)–(4)–(5):

$$\begin{aligned}\alpha_c^4 &= \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + c \frac{T_c(n)}{I_0} = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{m^8 \mu^4 l \eta T_c(n)}{\sigma n I_0} = \\ &= \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{l T_c(n) \mu^4 \eta}{\sigma n I_0} m^8.\end{aligned}$$

Тогда наименьшее значение параметра собственной частоты жестко закрепленной цилиндрической оболочки имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\lambda^c(\eta) &= \min_m \left[\frac{\sigma}{m^4} \left(\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{l T_c(n) \mu^4 \eta}{\sigma n I_0} m^8 \right) + \mu^4 m^4 \right] = \\ &= \min_m \left[\frac{\sigma (3\pi)^4}{(2l)^4} m^{-4} + \frac{l T_c(n) \mu^4 \eta}{n I_0} m^4 + \mu^4 m^4 \right].\end{aligned}$$

После минимизации этого выражения по m получаем

$$\lambda^c(\eta) = 2\sqrt{\frac{\sigma(3\pi)^4}{(2l)^4} \left(1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}\right)} \mu^4 = \frac{9\pi^2 \mu^2 \sqrt{\sigma}}{2l^2} \sqrt{1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}}$$

или

$$\lambda^c(\eta) = \lambda^c(0) \sqrt{1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}}, \quad \text{где} \quad \lambda^c(0) = \frac{3\pi^2 h \sqrt{3\sigma}}{4l^2}. \quad (15)$$

С увеличением η увеличивается и $\lambda^c(\eta)$, однако так же как и в случае шарнирного опирания краев оболочки, формулой (15) нельзя пользоваться при больших значениях η , поскольку существует

параметр частоты λ_n^c , который не зависит от η и для которого имеет место приближенная формула

$$\begin{aligned} \lambda_n^c &= \min_m \left[\frac{\sigma \alpha_n^4}{m^4} + \mu^4 m^4 \right] = 2\sqrt{\sigma \alpha_n^4 \mu^4} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \frac{h\sqrt{\sigma}}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3\pi^2 h\sqrt{3\sigma}}{4l^2} \frac{(2n+1)^2}{3^2} = \lambda^c(0) \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Значение эффективной жесткости шпангоута η_c^* в этом случае является корнем уравнения

$$\lambda^c(0) \sqrt{1 + \frac{lT_c(n)\eta_c^*}{nI_0}} = \lambda^c(0) \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2.$$

Увеличение жесткости шпангоута η после достижения ею значения η_c^* не приводит к увеличению наименьшего параметра частоты. Следовательно,

$$\frac{\lambda^c(\eta)}{\lambda^c(0)} = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{lT_c(n)\eta}{nI_0}}, & \eta \leq \eta_c^* \\ \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2, & \eta > \eta_c^* \end{cases}, \quad \eta_c^* = \frac{nI_0}{lT_c(n)} \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^4 - 1 \right). \quad (16)$$

7. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЦЕЛЯХ МАКСИМАЛЬНОГО УВЕЛИЧЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ

Пусть оболочка имеет фиксированную массу. Рассмотрим задачу об определении оптимального распределения массы между шпангоутами и оболочкой (обшивкой), которому соответствует наибольшее значение фундаментальной частоты.

В задаче о колебаниях подкрепленной цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями может быть произведена аналогичная оптимизация по массе. Наименьшую частоту колебаний ω_0 цилиндрической оболочки с заделанными краями, имеющей безразмерную длину l и толщину h_0 , можно определить по приближенной

формуле (при $\lambda = \lambda_c(0)$ по (15))

$$\omega_c^0 = \sqrt{\frac{E\lambda_c^c(0)}{\rho R^2 \sigma}} = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2 \sigma} \frac{3\pi^2 h_0 \sqrt{3\sigma}}{4l^2}} = \sqrt{\frac{9Eh_0\pi^2}{4\rho R^2 l^2 \sqrt{3\sigma}}}. \quad (17)$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n - 1$ шпангоут. Полагаем, что прямоугольные в сечениях шпангоуты имеют одинаковую ширину a и высоты $b_i (i = 1, \dots, n - 1)$. Масса подкрепленной оболочки в таком случае

$$M^s = M(h) + M^r, \quad (18)$$

где $M(h) = \rho 2\pi R \cdot Rh \cdot Rl$ — масса обшивки, а масса шпангоутов

$$M^r = \sum_{i=1}^{n-1} \rho 2\pi R \cdot aR \cdot b_i R = 2\pi R^3 \rho \cdot a^2 k \cdot P(n), \quad P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Пусть масса подкрепленной оболочки совпадает с массой гладкой оболочки $M_0 = M(h_0)$.

Для определения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки w_c можно воспользоваться формулами (15) и (17). С учетом соотношения (16) функция отношения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки к первой частоте колебаний гладкой оболочки f_c будет иметь следующий вид:

$$f_c = \frac{\omega_c}{\omega_c^0} = \begin{cases} \sqrt[4]{1 + \frac{lT_c(n)\eta}{nI_0}} \sqrt{d}, & \eta \leq \eta_c^* \\ \frac{2n+1}{3} \sqrt{d}, & \eta > \eta_c^* \end{cases},$$

где

$$\eta_c^* = \frac{nI_0}{lT_c(n)} \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^4 - 1 \right).$$

Проведем аналогичные преобразования второго члена подкоренного выражения:

$$\frac{lT_c(n)\eta}{nI_0} = \frac{lT_c(n)}{nI_0} \frac{12\sigma n}{h^3 l} J = \frac{lT_c(n)}{nI_0} \frac{12\sigma n}{h_0^3 d^3 l} \frac{a^4 k^3}{12} = \frac{T_c(n)\sigma k^3 a^4}{I_0 h_0^3 d^3},$$

тогда

$$f_c = \begin{cases} \frac{2n+1}{3}\sqrt{d}, & 0 < d \leq d_c \\ \sqrt[4]{1 + \frac{B_c a^4}{k^3}}\sqrt{d}, & d_c < d \leq 1 \end{cases}, \quad B_c = \frac{\sigma k^3}{I_0 h_0^3} T_c(n).$$

С учетом равенства массы оболочки, подкрепленной шпангоутами, и гладкой оболочки (18) получим

$$f_c = \begin{cases} \frac{2n+1}{3}\sqrt{d}, & 0 < d \leq d_c \\ \sqrt[4]{1 + \frac{B_s (1-d)^2}{A^2 d^3}}\sqrt{d}, & d_c < d \leq 1 \end{cases}, \quad a^2 = \frac{1-d}{A},$$

где

$$A = \frac{kP(n)}{h_0 l},$$

Параметр d_c удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(\frac{2n+1}{3}\right)^4 = 1 + \frac{B_c}{A^2} \frac{(1-d_c)^2}{d_c^3},$$

откуда

$$d_c^3 - \frac{B_c}{A^2 \left(\left(\frac{2n+1}{3}\right)^4 - 1\right)} (1-d_c)^2 = 0$$

или

$$d_c^3 - \frac{\sigma k l^2}{I_0 h_0} \frac{T_c(n)}{P^2(n) \left(\left(\frac{2n+1}{3}\right)^4 - 1\right)} (1-d_c)^2 = 0. \quad (19)$$

При этом a_c и f_c^* , соответствующие d_c , можно найти по следующим формулам:

$$a_c = \sqrt{\frac{1-d_c}{A}}, \quad f_c^* = \frac{2n+1}{3} \sqrt{d_c}.$$

8. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

На рис. 4 изображена цилиндрическая оболочка, подкрепленная в середине кольцевой пластиной. Как и ранее, радиус цилиндрической оболочки выбран за единицу длины $R = 1$.

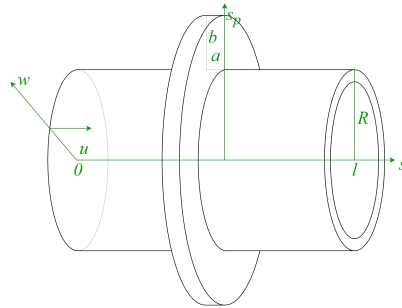


Рис. 4. Цилиндрическая оболочка, сопряженная с кольцевой пластиной

Численные результаты показывают, что для больших значений k низкочастотные колебания осесимметричны и нижние частоты подкрепленной оболочки мало отличаются от частот, соответствующих изгибным колебаниям пластины.

Безразмерные уравнения, описывающие осесимметрические колебания цилиндрической оболочки, имеют следующий вид:

$$\mu^4 \frac{d^4 w}{ds^4} + \nu \frac{du}{ds} + w = \lambda w, \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + \nu \frac{dw}{ds} = -\lambda u, \quad (20)$$

где $s \in [0, l]$ — продольная координата; (u, w) — компоненты перемещения (u — осевое, w — нормальное); $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр; h — толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона, $\lambda = \rho \omega^2 R^2 E^{-1}$ — частотный параметр.

Осесимметричные колебания кольцевой пластины описываются безразмерным уравнением

$$\Delta^2 w_p = \gamma^4 \cdot w_p, \quad \Delta w_p = \frac{1}{s_p} \frac{d}{ds_p} \left(s_p \frac{dw_p}{ds_p} \right), \quad \gamma^4 = \frac{12\lambda}{a^2}, \quad (21)$$

где $s_p \in [1, 1 + b]$ — радиальная координата; w_p — перемещение вдоль нормали.

Полагая, что край пластины ($s_p = 1 + b$) свободен, запишем краевые условия в следующем виде:

$$M_p = Q_p = 0 \quad \text{при} \quad s_p = 1 + b, \quad (22)$$

где изгибающий момент M_p и перерезывающее усилие Q_p определяются по формулам

$$M_p = \frac{d^2 w_p}{ds_p^2} + \frac{\nu}{s_p} \frac{dw_p}{ds_p}, \quad Q_p = \frac{d^3 w_p}{ds_p^3} + \frac{1}{s_p} \frac{d^2 w_p}{ds_p^2} - \frac{1}{s_p^2} \frac{dw_p}{ds_p}.$$

В работе [7] показано, что в случае, когда ширина шпангоута близка к толщине оболочки $a \sim h$, в первом приближении граничные условия сопряжения (23) можно записать в виде

$$w_p(1) = 0, \quad \frac{dw_p}{ds_p}(1) = 0. \quad (23)$$

В общем виде точное решение системы (21), (22), (23) представляется через функции Бесселя

$$w_p = C_1 J_0(\gamma s_p) + C_2 Y_0(\gamma s_p) + C_3 I_0(\gamma s_p) + C_4 K_0(\gamma s_p), \quad (24)$$

где $\{C_i\}_{i=1}^4$ — произвольные константы; J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода; I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя. В общем случае для нахождения параметра γ следует подставить решение (24) в граничные условия (22) и (23). Условием существования нетривиального решения является равенство нулю главного определителя системы линейных уравнений. Получившееся громоздкое уравнение может быть решено только численно.

Однако в случае сопряжения с достаточно узкой ($b \ll 1$) пластиной для γ можно получить простую приближенную формулу.

После замены переменной $s_p = 1 + bx$ в уравнении (21) и граничных условиях (22), (23), пренебрегая малыми членами, получим задачу на собственные значения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0, \quad \text{где } \beta = b\gamma; \quad (25)$$

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(1) = \frac{d^3 w}{dx^3}(1) = 0. \quad (26)$$

Решение уравнения (25) имеет вид

$$w = D_1 \sin(\beta x) + D_2 \cos(\beta x) + D_3 \operatorname{sh}(\beta x) + D_4 \operatorname{ch}(\beta x). \quad (27)$$

Подстановкой (27) в (26) можно получить систему однородных уравнения относительно $\{D_i\}_{i=1}^4$, у которой есть нетривиальные решения, когда главный определитель равен нулю:

$$\operatorname{sh}(\beta) \cos(\beta) + 1 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения $\beta_0 \simeq 1,875$ соответствует первой частоте. Приближенное значение параметра γ может быть найдено по формуле $\gamma_0 = 1.875/b$.

В случае, когда толщина кольцевой пластины a близка к толщине оболочки h , для колец, чья ширина b не превышает радиус оболочки, с учетом (21) и (25) приближенное значение частотного параметра λ_1 может быть получено по формуле

$$\lambda_1 \simeq 1,03 \frac{a^2}{b^4}. \quad (28)$$

Далее будем использовать полученную формулу при решении задачи о выборе оптимальных коэффициентов функции распределения.

9. АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИИ

Нижняя часть частотного спектра заземленной цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами жесткости образована собственными значениями (16) и (28). Численные результаты показывают, что с увеличением параметра u увеличивается и первая «оболочечная» частота конструкции. Соответствующая форма колебаний показана на рис. 5.

Однако, как следует из приближенной формулы (28), первая «пластиночная» частота при этом уменьшается. На рис. 6 показана форма колебаний, соответствующая первой «пластиночной» частоте.

Оптимальным будет то значение параметра u , при котором первые «оболочечная» и «пластиночная» частоты совпадают.

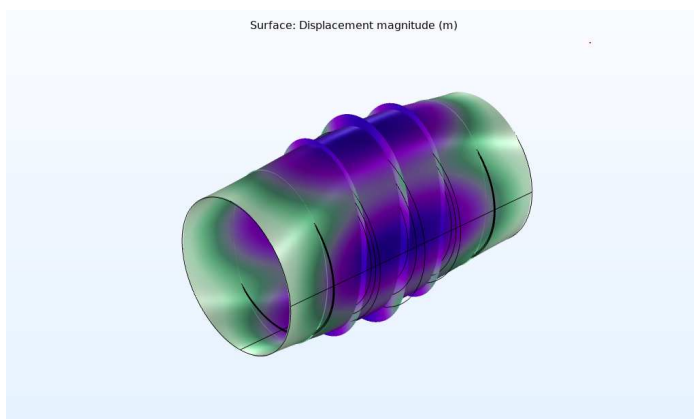


Рис. 5. «Оболочечная» форма колебаний цилиндрической оболочки толщиной $h = 0,01$, длиной $l = 4$, подкрепленная пятью шпангоутами для случая линейной функции распределения с $u = 7$.

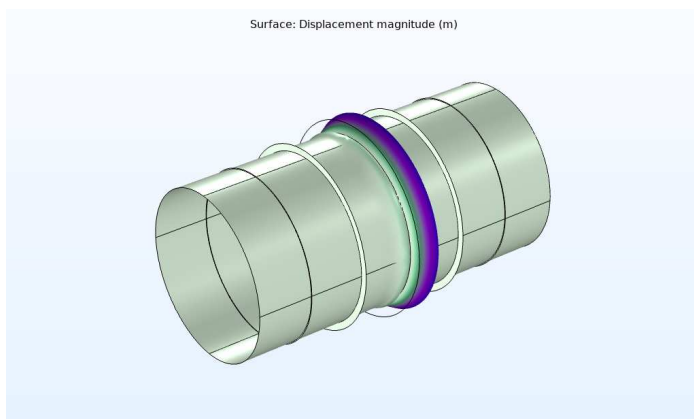


Рис. 6. «Пластинчатая» форма колебаний цилиндрической оболочки толщиной $h = 0,01$, длиной $l = 4$, подкрепленная пятью шпангоутами для случая линейной функции распределения с $u = 8$

Асимптотическая формула (15) для собственного значения первой частоты колебаний оболочки дает хорошее приближение для тонких ($h \sim 0,01$) оболочек средней длины ($3 < l < 15$).

С увеличением длины оболочки минимальной становится частота, соответствующая «балочным» колебаниям оболочки. То есть длинную цилиндрическую оболочку следует моделировать как стержень постоянного поперечного сечения, подкрепленный пружинами. Форма колебаний, соответствующая фундаментальной «балочной» частоте, показана на рис. 7.

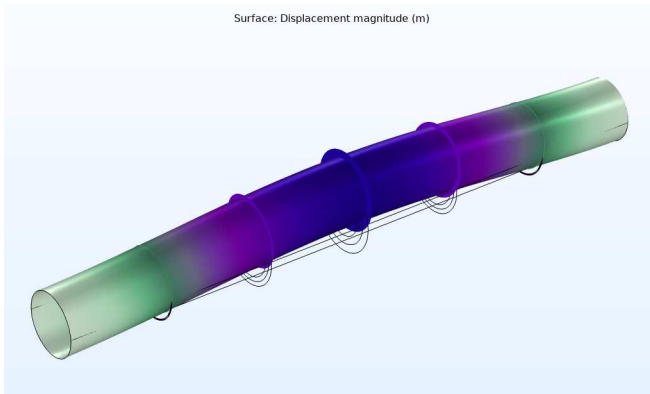


Рис. 7. «Балочная» форма колебаний цилиндрической оболочки толщиной $h = 0,01$, длиной $l = 20$, подкрепленная пятью шпангоутами для случая линейной функции распределения с $u = 7$

При малых длинах оболочки формула (15) теряет свою точность, поскольку колебания на промежутках между установленными шпангоутами не затухают к краям промежутка.

При большой изменчивости профиля конструкции (u), в зависимости от толщины и длины оболочки, форма колебаний оболочки локализуется в окрестности первого шпангоута (рис. 8). В этом случае фундаментальной частотой конструкции будет первая частота колебаний сегмента оболочки, подкрепленного первым шпангоутом с упругой заделкой на месте второго шпангоута. Условие упругой заделки занимает промежуточное положение между жесткой

заделкой и шарнирным опиранием, в дальнейшем оно будет выбираться таким же, как и на краю оболочки.

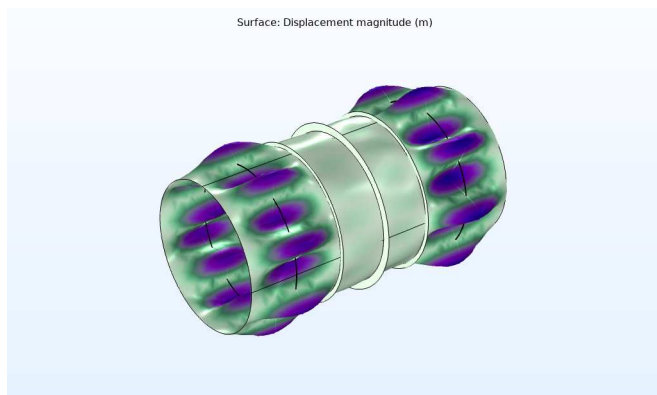


Рис. 8. Локализация «оболочечной» формы колебаний конструкции с высокой изменяемостью профиля u

Ниже приведены оптимальные значения параметра u для некоторых значений геометрических параметров конструкции (k , n_s). В качестве примера рассматривается медная цилиндрическая оболочка длиной $l = 4$ и толщиной $h_0 = 0,01$ с модулем Юнга $E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,35$ и плотностью $\rho = 8920$ кг/м³. Численные результаты были получены методом конечных элементов в программных пакетах *Ansys* и *Comsol*.

Для разных профилей конструкции оптимальные значения параметра u и соответствующие им значения функции f_c приведены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальные значения параметра u и соответствующие ему значения функции f_c для жестко закрепленной оболочки при линейном (f_{lin}), параболическом (f_{parab}) и экспоненциальном (f_{exp}) распределении высот n_s шпангоутов

| f_c | n_s | $k = 1$ | | $k = 2$ | | $k = 3$ | |
|-------------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
| | | u | f_c | u | f_c | u | f_c |
| f_{lin} | 4 | 15,64 | 3,39 | 7,88 | 3,38 | 5,29 | 3,36 |
| | 6 | 6,60 | 4,14 | 3,61 | 4,11 | 2,61 | 4,09 |
| | 8 | 4,32 | 4,66 | 2,54 | 4,61 | 1,94 | 4,58 |
| f_{parab} | 4 | 15,64 | 3,39 | 7,88 | 3,38 | 5,29 | 3,36 |
| | 6 | 8,68 | 4,12 | 4,57 | 4,10 | 3,20 | 4,08 |
| | 8 | 6,22 | 4,63 | 3,41 | 4,60 | 2,47 | 4,57 |
| f_{exp} | 4 | 15,64 | 3,39 | 7,88 | 3,38 | 5,29 | 3,36 |
| | 6 | 3,90 | 4,19 | 2,35 | 4,15 | 1,83 | 4,11 |
| | 8 | 1,82 | 4,77 | 1,38 | 4,69 | 1,24 | 4,62 |

В табл. 2 для оптимального значения параметра u приведены значения циклических частот колебаний ω_{asympt} , полученные описанным асимптотическим методом, и соответствующие значения ω_{fea} , полученные методом конечных элементов в программном пакете *Ansys* для линейного, параболического и экспоненциального профилей конструкции. Заметим, что при $n_s = 3$ и $n_s = 4$ профили совпадают.

Таблица 2. Аналитические и численные значения частот колебаний ω подкрепленных оболочек

| f_c | $n_s = 4$ | | $n_s = 5$ | | $n_s = 6$ | |
|-------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|
| | ω_{asympt} | ω_{fea} | ω_{asympt} | ω_{fea} | ω_{asympt} | ω_{fea} |
| f_{lin} | 72,72 | 78,07 | 76,59 | 82,02 | 80,16 | 86,71 |
| f_{parab} | 72,72 | 78,07 | 76,54 | 84,16 | 79,94 | 87,06 |
| f_{exp} | 72,72 | 78,07 | 77,2 | 82,58 | 80,72 | 87,97 |

На рис. 9 для случая подкрепления оболочки тремя шпангоутами изображена форма колебаний оптимальной конструкции, соответствующая ее фундаментальной частоте.

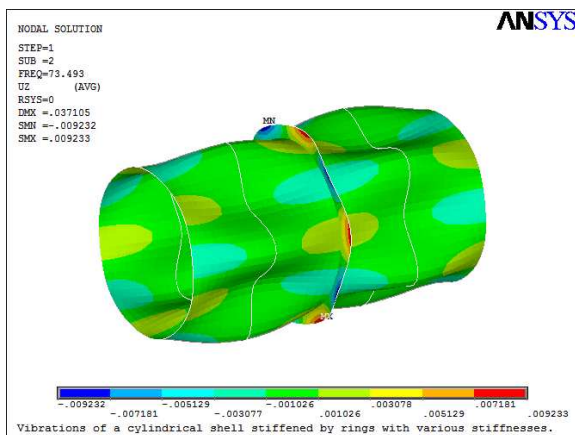


Рис. 9. Форма колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной тремя неодинаковыми шпангоутами

Как видно, колебаниям подвержена как оболочка, так и самый большой шпангоут, т. е. дальнейшее уменьшение толщины оболочки приведет к уменьшению первой частоты «оболочечной» серии частот, а уменьшение толщины или увеличение высоты шпангоута — к уменьшению первой частоты «пластиночной» серии частот.

Максимизация фундаментальной частоты важна по ряду причин. Во-первых, минимизируется вероятность резонанса, возникающего при совпадении частоты приложенной нагрузки с собственной частотой конструкции. Резонанс опасен разрушением конструкции вследствие чрезмерных вибраций. Во-вторых, наличие одинаковых собственных частот для разных форм колебаний дает возможность конструкции сбалансированно реагировать на внешние нагрузки, что повышает устойчивость и долговечность конструкции, а также снижает риск разрушения. Наконец, равные или почти равные собственные частоты улучшают динамические характеристи-

ки, например, снижают уровень колебаний и шума. Это особенно важно в аэрокосмической промышленности, на транспорте и в промышленном оборудовании, где конструкции должны работать надежно и бесшумно в условиях высоких нагрузок.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение асимптотических и численных результатов показывает, что полученные в работе приближенные асимптотические формулы могут быть использованы для вычисления низших частот колебаний подкрепленных оболочек, а также для определения оптимальных параметров конструкции на этапе первичного проектирования. Уточнение параметров может быть проведено методом конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. — СПб. : Изд-во СПбГУ, 1999. — 196 с.
2. *Filipov S.B.* Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates // *Analysis of Shells, Plates, and Beams — A State of the Art Report*, Springer's Series Advanced Structured Materials. — Vol. 123. — P. 123–140.
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. — М., 1979. — 384 с.
4. Филин А. П. Элементы теории оболочек / А. П. Филин. — 2-е изд., доп. и перераб. — Л. : Стройиздат, Ленингр. отд-е, 1975. — 256 с.
5. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. — М. : Машиностроение, 1978. — 312 с.
6. Шарыпов Д. В. Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // *Вестник СПбГУ. Сер. 1.* — 1997. — Вып. 3. — С. 102–108.
7. Лопатухин А. Л., Филиппов С. Б. Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами / А. Л. Лопатухин, С. Б. Филиппов // *Вестник СПбГУ. Сер. 1.* — 2001. — Вып. 2. — С. 84–90.

АСИМПТОТИКА ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С МНОГОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Г. Т. ДЗЕБИСАШВИЛИ

Изучено поведение частот свободных изгибных колебаний цилиндрической оболочки с сечением в виде правильного многоугольника при увеличении числа N его сторон. Предполагается, что величина периметра многоугольника при увеличении N не изменяется. Установлена связь частот оболочки с N -угольным поперечным сечением с частотами круговой цилиндрической оболочки. Проведено сравнение аналитического решения и решения по методу конечных элементов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки с многоугольным поперечным сечением. Цель исследования — определение особенностей колебаний оболочек, составленных из прямоугольных пластин, по сравнению с «гладкими» оболочками.

Ранее в [1, 2] была рассмотрена задача о колебаниях оболочки квадратного поперечного сечения. Более общий случай прямоугольного сечения был изучен в работах [3, 4, 5], а оболочки с сечением в виде правильного многоугольника были рассмотрены в работе [6].

В предшествующих исследованиях методы решения различались в зависимости от вида сечения и граничных условий. Так, для шарнирно опертой квадратной оболочки получено аналитическое решение, в то время как для других граничных условий частоты и формы колебаний ищутся из приближенного решения трансцендентных уравнений. Частоты прямоугольной оболочки, если она мало отличается от квадратной, могут быть найдены в виде асимптотических разложений. В ином случае целесообразно использова-

Доклад на семинаре 19 сентября 2023 г.

© Г. Т. Дзедбисашвили, 2023.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

ние численных методов.

В работе [6] преимущественное внимание было уделено изучению форм колебаний оболочек многоугольного сечения. В данном исследовании будут проанализированы закономерности поведения частот изгибных колебаний при росте количества сторон многоугольного сечения с использованием метода конечных элементов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку длины L с поперечным сечением в виде правильного N -угольника со стороной a , образованную сопряжением N прямоугольных пластин (рис. 1). Радиус вписанной в N -угольник окружности — r , радиус описанной около N -угольника окружности — R .

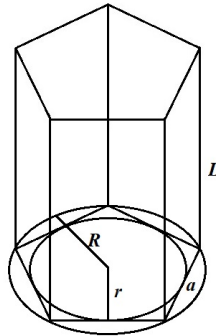


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка с сечением в виде правильного пятиугольника

В плоскости k -й пластины введем локальные прямоугольные координаты (x, y) (рис. 2). Тогда поперечный прогиб $w^{(k)}(x, y)$ k -й пластины $\forall k = \overline{1, N}$ удовлетворяет уравнению Лагранжа–Жермен:

$$D\Delta\Delta w^{(k)} - \rho t w^{(k)} \omega^2 = 0, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная жесткость; E — мо-

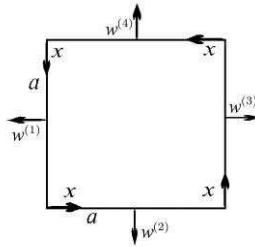


Рис. 2. Локальные координаты стенок оболочки при $N = 4$ (вид сверху).

дуть Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность пластины; t — толщина пластины; ω — собственная частота пластины. Далее под частотой оболочки понимается частотный параметр $f = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$.

Пусть α — угол между смежными стенками оболочки; β — смежный с ним угол (рис. 3).

Будем предполагать, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, изгибающие моменты в местах пересечения равны, а углы между сопряженными пластинами остаются равными $\frac{2\pi}{N}$ при изгибах. Эти предположения равносильны следующим условиям на линиях сопряжения смежных стенок:

$$\begin{aligned}
 u^{(i+1)}(0, y) &= w^{(i)}(a, y) \sin \beta - u^{(i)}(a, y) \cos \beta; \\
 w^{(i+1)}(0, y) &= w^{(i)}(a, y) \cos \beta + u^{(i)}(a, y) \sin \beta; \\
 w_x^{(i)}(a, y) &= w_x^{(i+1)}(0, y); \\
 w_{xx}^{(i)}(a, y) &= w_{xx}^{(i+1)}(0, y),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $u^{(i)}$, $u^{(i+1)}$ — перемещения в плоскости i и $i + 1$ пластины соответственно, при этом $i + 1 = 1$ при $i = N$.

Также будем считать, что на верхнем и нижнем краях оболочки

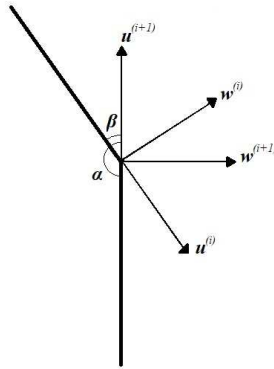


Рис. 3. Сопряжение двух смежных стенок оболочки при $N \neq 4$

заданы условия шарнирного опирания, которые имеют вид

$$\begin{aligned} w^{(i)}(x, 0) = w^{(i)}(x, L) = 0; \\ w_{yy}^{(i)}(x, 0) = w_{yy}^{(i)}(x, L) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. АНАЛИЗ ЧАСТОТ ПРИ $N \rightarrow \infty$ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследуем асимптотику частот при $N \rightarrow \infty$. Будем рассматривать оболочку, поперечным сечением которой является правильный N -угольник с периметром P (рис. 4).

Будем увеличивать N , сохраняя периметр сечения так, что длина стороны многоугольника $a = P/N$. На каждом шаге методом конечных элементов будем находить первые пять частот получившейся оболочки, а также оболочек, сечения которых являются вписанной и описанной окружностями N -угольника, образующего поперечное сечение оболочки. Радиусы этих окружностей обозначим как r и R соответственно.

При $N = \infty$ сечение будет иметь форму окружности радиуса $\frac{P}{2\pi}$. При этом описанная и вписанная около N -угольника окружности

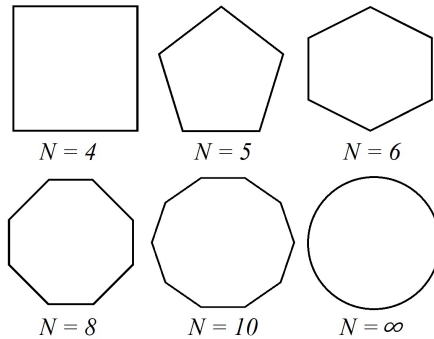


Рис. 4. Многоугольное сечение оболочки при различных N .

будут совпадать с данной окружностью, поскольку

$$R - r = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{N}} - \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

В данной работе для вычислений по методу конечных элементов использовался пакет прикладных программ Comsol. При моделировании оболочки применялась конечно-элементная сетка с разбиением на 200 элементов/м². При уменьшении разбиения вдвое значения частот изменялись после третьей значащей цифры.

При вычислении частот использовались константы материала, соответствующие конструкционной стали: $\rho = 7850$ кг/м³; $E = 200 \cdot 10^9$ Па; $\nu = 0,33$. Толщина стенок оболочки была взята равной 0,02 м. Края оболочки предполагались шарнирно опертыми. Рассматривались размеры $P = 12$, $L = \overline{1, 10}$, $N = \overline{4, 20}$.

На рис. 5 приведен график первой частоты в зависимости от N при $P = 12$, $L = 3$.

Как можно видеть, при увеличении числа сторон с сохранением периметра первая частота оболочки растет и быстро стремится к частотам круговой оболочки того же периметра. Характер роста f для малых N имеет вид $f \sim C_0 N^2 + C_1$, а для $N \geq 12$ — $f \sim -\frac{D_0}{N} + D_1$, причем в качестве D_1 должна быть выбрана пер-

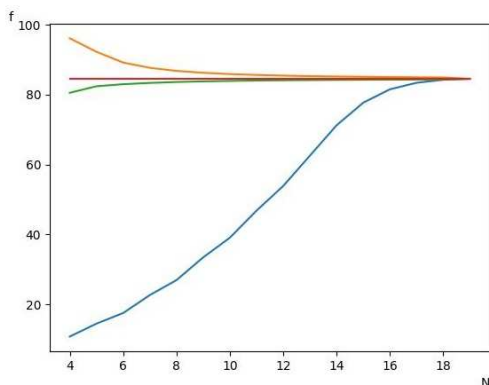


Рис. 5. Зависимость частоты f от N для оболочек с разной формой поперечного сечения (синяя линия — N -угольное сечение; красная линия — круглое сечение; оранжевая линия — круглое сечение, вписанное в правильный N -угольник; зеленая линия — круглое сечение, описанное около правильного N -угольника)

вая частота круговой оболочки той же длины с периметром P . Уже при $N = 15$ частоты оболочки отличаются от частот круговой оболочки лишь на 8,1 %, а при $N = 17$ — на 1,3 %. Это дает основания полагать, что частотные характеристики многоугольных оболочек при $N > 20$ в целом близки к таковым у круговой оболочки.

У высших частот при $N \geq 5$ и $L \leq a$ имеет место закономерность чередования пар кратных частот. При нечетных N пары кратных частот образуют первая частота со второй и третья частота с четвертой соответственно, а при четных N — вторая частота с третьей и четвертая частота с пятой.

При увеличении N оболочка приближается к цилиндрической, для которой форма колебаний имеет вид $\cos(m\varphi) \sin(\frac{\pi y}{L})$, где m — число волн в окружном направлении (рис. 6).

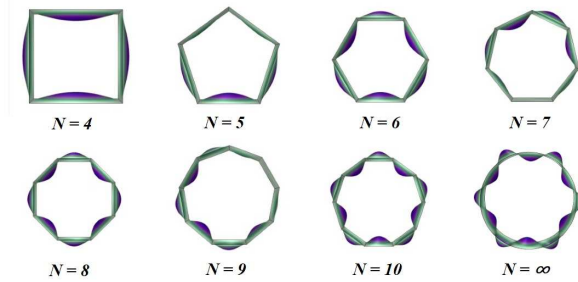


Рис. 6. Форма колебаний первой частоты при разных N . Случай $N = \infty$ соответствует круговой цилиндрической оболочке.

4. ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Если β не является малой величиной, т. е. N не слишком большое, то в (2) можно пренебречь перемещениями $u^{(i)}$, $u^{(i+1)}$ в плоскости пластины, которые значительно меньше нормальных перемещений $w^{(i)}$, $w^{(i+1)}$. В результате получим приближенные условия

$$\begin{aligned} w^{(i)}(a, y) &= w^{(i+1)}(0, y) = 0; \\ w_x^{(i)}(a, y) &= w_x^{(i+1)}(0, y); \\ w_{xx}^{(i)}(a, y) &= w_{xx}^{(i+1)}(0, y). \end{aligned} \tag{4}$$

Решение

$$W(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \tag{5}$$

удовлетворяет граничным условиям (4) при четных N . Подстановка его в (1) дает формулу для частоты

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho t}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a^2 + L^2}{a^2 L^2} \right). \tag{6}$$

Получить простое аналитическое решение для нечетных N не удалось, и частоты для этого случая находились с помощью МКЭ. С ростом N точность решения (5) падает, т. к. угол β уменьшается.

Вместе с тем растет погрешность первых условий (2) и решения (5) из-за отбрасывания в (4) слагаемых, содержащих $u^{(i)}$ и $u^{(i+1)}$.

В табл. 1 приведены значения частоты f , полученные аналитически и методом конечных элементов при различных четных N и $L = 3$, $P = 12$. Константы материала взяты из предыдущего раздела.

Таблица 1. Фундаментальная частота колебаний конструкции

| Число сторон (N) | Аналитический метод | Метод конечных элементов |
|----------------------|---------------------|--------------------------|
| 4 | 10,776 | 10,770 |
| 6 | 17,511 | 17,501 |
| 8 | 26,940 | 26,921 |
| 10 | 39,063 | 39,052 |
| 12 | 53,880 | 53,854 |
| 14 | 71,392 | 71,208 |
| 16 | 91,597 | 81,514 |
| 18 | 114,496 | 84,244 |

Заметим, что для больших N , начиная с $N = 16$, аналитическое решение оказывается неточным. Ввиду этого может быть целесообразным использование метода Рэлея для получения приближенной формулы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Частоты оболочек с многоугольным поперечным сечением при большом числе сторон мало отличаются от таковых у круговой цилиндрической оболочки. При этом форма колебаний с ростом количества сторон приближается к форме колебаний круговой цилиндрической оболочки. В то же время при большом числе сторон аналитическое решение является неточным, поэтому может представлять интерес поиск решения с помощью приближенных формул по методу Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mechanics Research Communications*. — 2000. — Vol. 27. — № 4. — P. 457–464.
2. *Дзевбисашвили Г. Т.* Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды», 2017–2018 г. — СПб. : Изд. СПбГУ, 2019. — С. 13–29.
3. *Амосов А. С.* Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. — 2004. — Вып. 1. — С. 67–72.
4. *Chen Yue-hua, Jin Guo-yong, Liu Zhi-gang.* Free Vibration of a Thin Shell Structure of Rectangular Cross-section // *Key Engineering Materials*. Trans Tech Publications, Switzerland. — 2011. — Vol. 486. — P. 107–110.
5. *Dzebisashvili G. T., Filippov S. B.* Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — Vol. 1479. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (Дата доступа 26.02.2021).
6. *Gonçalves R., Camotim D.* The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes // *Thin-Walled Structures*. — 2014. — Vol. 84. — P. 177–188.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

Численное моделирование гидродинамических аварий: РАЗМЫВ ДАМБ И ЗАТОПЛЕНИЕ ТЕРРИТОРИЙ

С. С. Храпов

Доклад на семинаре 18 октября 2022 г.

В работе проведено математическое и численное моделирование совместной динамики поверхностных вод и влекомых наносов, в котором учитываются как нелинейная динамика жидкости, так и деформации дна.

Динамика поверхностных вод описывается уравнениями Сен-Венана с учетом пространственно-неоднородного распределения рельефа местности. Перенос влекомых наносов описывается уравнением Экснера, обобщенным на случай пространственно-неоднородного распределения параметров подстилающей поверхности. Численная модель включает в себя цифровую модель местности (ЦММ) и численный метод интегрирования системы уравнений, описывающих совместную динамику поверхностных вод и наносов.

Для численного интегрирования уравнений Сен-Венана и Экснера применяется устойчивый и хорошо апробированный CSPH-TVD-метод второго порядка точности, параллельный CUDA-алгоритм которого реализован в виде программного комплекса EcoGIS-Simulation для высокопроизводительных вычислений на суперкомпьютерах с графическими сопроцессорами (GPUs).

Проведено гидродинамическое моделирование процессов размыва ограждающей дамбы реального гидротехнического объекта и затопления прилегающих территорий. Определены параметры прорана ограждающей дамбы и зон затопления, образовавшихся в результате развития гидротехнической аварии на хвостохранилище.

На основе полученных результатов сделан вывод, что предложенный в работе метод численного моделирования совместной динамики поверхностных вод и влекомых наносов может являться более универсальным и эффективным (обладает существенно лучшими точностью и производительностью) по сравнению с существующими методиками расчета параметров прорана и зон затопления, особенно для гидродинамических течений со сложной геометрией на неоднородном рельефе дна.

**РЕЗОНАНСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ
ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ ЗЕМЛИ**

М. А. Ключин

Доклад на семинаре 11 апреля 2023 г.

В докладе обсуждаются резонансные особенности орбитального движения заряженного космического аппарата в геофизических полях. Исследуется движение космического аппарата по орбите, близкой к круговой экваториальной, с учетом малого возмущающего воздействия силы Лоренца. В качестве модели магнитного поля Земли рассматривается наклонный диполь. Выводится система нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений движения центра масс космического аппарата в декартовой и сферической системах координат. Проводится исследование системы линеаризованных уравнений движения на основе введения малого параметра и усреднения. В результате находятся резонансные соотношения для угловой скорости орбитального движения космического аппарата и угловой скорости суточного вращения Земли. Выявлено существование особой орбиты, для которой возмущающее воздействие силы Лоренца является резонансным. Численный эксперимент подтверждает резкое увеличение амплитуды колебаний величины радиус-вектора центра масс космического аппарата, движущегося по особой орбите, а также выявляет тенденцию к увеличению наклона особой орбиты со временем, вследствие чего она перестает быть экваториальной. Полученные результаты свидетельствуют о наличии резонансных особенностей при орбитальном движении заряженного космического аппарата в геофизических полях.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА
ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С ПРИМЕНЕНИЕМ
МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

С. А. Павлов

Доклад на семинаре 18 апреля 2023 г.

В силу сложности натуральных экспериментов и ограничений по масштабу для наземных установок в настоящее время численное моделирование гиперзвуковых течений является одним из ключевых методов исследований в газовой динамике. Для гиперзвуковых потоков в связи с высокими температурами за фронтом ударной волны для корректного моделирования течения приходится учитывать явления вязкости и теплопроводности, а также физико-химические процессы. Наиболее точный расчет коэффициентов переноса для компонентов воздуха может быть произведен на основании кинетической теории процессов переноса и релаксации с использованием метода Чепмена-Энскога для решения уравнений Больцмана. Однако подобный подход к моделированию приводит к необходимости трудоемких вычислений столкновительных интегралов на каждом шаге итерационной процедуры, количество которых в системе растёт

с увеличением точности решения. В то же время для расчета коэффициентов переноса существует ряд приближенных формул, таких как соотношения Блоттнера для вязкости и Эйкана для теплопроводности. Применение алгоритмов регрессии (в том числе нейросетей), обученных на данных точного расчета, но вычислительно относительно экономичных, является перспективным с точки зрения баланса скорости и точности вычислений. Основной платформой для расчета параметров течения являлась открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошной среды OpenFOAM. На примере задачи обтекания сферы гиперзвуковым потоком многокомпонентного воздуха исследуются различные подходы к применению методов машинного обучения в связке с методом конечных объемов.

ОБ АВТОРАХ

Дзедбисашвили Георгий Тамазович — аспирант 4 курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — теория оболочек. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов. E-mail: d-g-t@bk.ru.

Дорофеев Никита Павлович — студент 5 курса специалитета кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — деформация многослойных пластин, высокоскоростной удар. Научный руководитель — доц. Н. В. Наумова. E-mail: nickdorof60@gmail.com.

Клюшин Максим Александрович — студент 4 курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — динамика космических аппаратов, небесная механика, численное моделирование. Научный руководитель — проф. А.А. Тихонов. E-mail: st076414@student.spbu.ru.

Кутеева Галина Анатольевна — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — компьютерное моделирование, небесная механика и механика сплошной среды, история механики. E-mail: g.kuteeva@spbu.ru.

Лукин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц. Высшей школы «Механика и процессы управления» Физико-механического института, инженер-исследователь НЦМУ «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — вычислительная механика, волны в сплошных средах, нелинейная гео-

рия упругости, теория нелинейных колебаний, гироскопия и навигация, нелинейная динамика и управление Н/МЭМС.

E-mail: lukin_av@spbstu.ru.

Мельников Борис Евгеньевич — д-р техн. наук, проф. Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — динамика и прочность машин, конструкционная прочность, сопротивление материалов, теория упругости и пластичности, теория поврежденности. Автор одной книги и свыше 170 научных статей по указанным направлениям.

E-mail: melnikov_be@spbstu.ru.

Морозов Никита Федорович — действительный член РАН, зав. кафедрой теории упругости, проф. Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — нелинейная теория упругости, математические методы механики разрушения. E-mail: n.morozov@spbu.ru.

Нестерчук Григорий Анатольевич — ассистент кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — колебания и устойчивость конструкций, асимптотические методы, механика деформируемого твердого тела. E-mail: g.nesterchuk@spbu.ru.

Павлов Семен Анатольевич — студент 1 курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — вычислительная гидрогазодинамика. Научный руководитель — ст. науч. сотрудник, канд. физ.-мат. наук В.А. Истомин. E-mail: st040077@student.spbu.ru.

Попов Иван Алексеевич — ведущий инженер Передовой инженерной школы «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — вычислительная механика, волны в сплошных средах, нелинейная теория упругости, теория нелинейных колебаний, гироскопия и навигация, нелинейная динамика и управление Н/МЭМС. E-mail: popov_ia@spbstu.ru.

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, мл. науч. сотрудник Лабора-

тории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук. Область научных интересов — аналитическая механика, теория механических колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, управление механическими системами, оптимизация в механике. Автор двух книг и свыше 75 научных статей по указанным направлениям.

E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com.

Смольников Борис Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц. Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, ст. науч. сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук. Область научных интересов — общая механика, биомеханика и робототехника, динамика твердого тела, теория устойчивости движения, движение космических объектов, теория управления, эволюционная динамика. Автор шести книг и свыше 85 научных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов, а также 22 изобретений. E-mail: smolnikovba@yandex.ru.

Суков Алексей Павлович — выпускник бакалавриата Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — прикладная неголономная механика, управление механическими системами. Научный руководитель — ассистент А. С. Смирнов. E-mail: sukovaleksey@bk.ru.

Тверев Константин Константинович — ведущий инженер учебной лаборатории прикладной механики, отдела по направлению «Математика и механика», Управления технического обеспечения образовательных программ Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — аналитическая механика, электромеханические системы, мехатроника. E-mail: k.tverev@spbu.ru.

Храпов Сергей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета. Область научных интересов — математическое моделирование гидродинамических течений, численные методы интегрирования уравнения Сен-Венана и Экснера, самосогласованная динамика поверхностных вод и нано-

сов, расчет зон затопления при авариях на гидротехнических объектах, прорыв и размыв дамб/плотин, параллельные вычисления на компьютерах с графическими процессорами (GPUs), параллельные CUDA-алгоритмы. E-mail: khrapov@volsu.ru.

Шевченко Сергей Александрович — инженер Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — гироскопия и навигация, динамика и прочность машин, конструкционная прочность, вычислительная математика. E-mail: shevchenko.sergei.a@yandex.ru.

Штукин Лев Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доц. Высшей школы «Механика и процессы управления» Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — вычислительная механика, волны в сплошных средах, нелинейная теория упругости, теория нелинейных колебаний, гироскопия и навигация, нелинейная динамика и управление Н/МЭМС. E-mail: lvtvsh4749@gmail.com.

SUMMARIES

Morozov N. F., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. **Nonlinear dynamics of N/MEMS under laser-induced optothermal excitations.**

In this paper, parametrically excited bending oscillations of a microbeam that is pinched at both ends are studied. A part of the microbeam is subjected to laser thermo-optical action in the form of periodical pulses. The microbeam is the basic sensitive element of a class of promising microsensors that measure a variety of physical quantities in real time. For a steady-state harmonic temperature distribution in the resonator volume, an analytical solution of the heat conduction problem is found. The static and dynamic components of force factors of temperature nature — temperature axial force and bending moment — are determined. The discretization of nonlinear coupled partial differential equations describing the longitudinal-flexural oscillations of the resonator is performed with the help of the Galerkin method. The asymptotic method of multiple scales is used to obtain an approximate analytical solution to the nonlinear system dynamics problem under conditions of the main parametric resonance. The fundamental technical feasibility of laser generation of parametric oscillations of high-Q micro-mechanical resonators without the implementation of scenarios for the loss of elastic stability of the sensitive element or its unacceptable heating is shown.

MSC class: 70F25

Keywords: nonlinear dynamics, laser thermo-optical action, parametric oscillations, microbeam, longitudinal-flexural beats, micromechanical system.

REFERENCES

1. *Vorobyev R. I. et al.* Application of the optoacoustic method to assess the effect of voids on the crack resistance of structural carbon plastics // *Acoustical Physics*. — 2020. — Vol. 66. — P. 132–136.
doi: <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>.

2. *Yan G. et al.* Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes // NDT & E International. — 2020. — Vol. 116. — P. 102323.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>.
3. *Pan Y., Rossignol C., Audoin B.* Acoustic waves generated by a laser line pulse in cylinders; application to the elastic constants measurement // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2004. — Vol. 115. — № 4. — P. 1537–1545. doi: <https://doi.org/10.1063/1.1583135>.
4. *Chow G. et al.* Laser-induced surface acoustic waves: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media // Mechanics of Materials. — 2015. — Vol. 91. — P. 333–342.
5. *Champion A., Bellouard Y.* Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser // Optical Materials Express. — 2012. — Vol. 2. — № 6. — P. 789–798.
6. *Otsuka P. H. et al.* Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial // New Journal of Physics. — 2018. — Vol. 20. — № 1. — P. 013026.
7. *Li C. et al.* Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application // Biomedical optics express. — 2014. — Vol. 5. — № 5. — P. 1403–1418.
8. *Phinney L. M. et al.* Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation // Reliability, Packaging, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS IV. — SPIE. — 2005. — Vol. 5716. — P. 81–88.
9. *Serrano J. R., Phinney L. M.* Displacement and thermal performance of laser-heated asymmetric MEMS actuators // Journal of Microelectromechanical Systems. — 2008. — Vol. 17. — № 1. — P. 166–174.
doi: <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>.
10. *Mai A. et al.* In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation // Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS. — 2016. — Vol. 15. — № 3. — P. 035502–035502.
doi: <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>.
11. *Zook J. D. et al.* Optically excited self-resonant microbeams // Sensors and Actuators A: Physical. — 1996. — Vol. 52. — № 1–3. — P. 92–98.
doi: [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2).
12. *Yang T., Bellouard Y.* Laser-induced transition between nonlinear and linear resonant behaviors of a micromechanical oscillator // Physical Review Applied. — 2017. — Vol. 7. — № 6. — P. 064002.
doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>.

13. *Dolleman R. J. et al.* Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes // Scientific Reports. — 2018. — Vol. 8. — № 1. — P. 9366. doi: <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>.
14. *Zehnder A. T., Rand R. H., Krylov S.* Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2018. — Vol. 102. — P. 92–100. doi: <https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2018.03.009>.
15. *Morozov N. F., Tovstik P. E.* Dynamic loss of stability of a rod under longitudinal load lower than the Eulerian load // Doklady physics. — Springer US. — 2013. — Vol. 58. — P. 510–513. doi: <https://doi.org/10.1134/S102833581311013X>.
16. *Carvalho E. C., Goncalves P. B., Rega G.* Multiple internal resonances and nonplanar dynamics of a cruciform beam with low torsional stiffness // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — Vol. 121. — P. 117–134. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.020>.
17. *Ribeiro E. A. R., Lenci S., Mazzilli C. E. N.* Modal localisation in a beam modelled as a continuous system: a discussion on the use of auxiliary oscillators // Journal of Sound and Vibration. — 2020. — Vol. 485. — P. 115595. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115595>.
18. *Lenci S.* Isochronous beams by an inclined roller support // Journal of Applied Mechanics. — 2018. — Vol. 85. — № 9. — P. 091008. doi: <https://doi.org/10.1115/1.4040453>.
19. *Lacarbonara W., Rega G., Nayfeh A. H.* Resonant non-linear normal modes. Part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2003. — Vol. 38. — № 6. — P. 851–872. doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00033-1).
20. *Manevitch L.* New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // Archive of Applied Mechanics. — 2007. — Vol. 77. — № 5. — P. 301–312. doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0081-1>.
21. *Clementi F., Lenci S., Rega G.* 1: 1 internal resonance in a two dof complete system: a comprehensive analysis and its possible exploitation for design // Meccanica. — 2020. — Vol. 55. — № 6. — P. 1309–1332. doi: <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01171-9>.
22. *Leamy M. J., Gottlieb O.* Internal resonances in whirling strings involving longitudinal dynamics and material non-linearities // Journal of sound and vibration. — 2000. — Vol. 236. — № 4. — P. 683–703. doi: [10.1006/jsvi.2000.3039](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3039).
23. *Srinil N., Rega G.* Nonlinear longitudinal/transversal modal interactions in highly extensible suspended cables // Journal of Sound and vibration. — 2008. — Vol. 310. — № 1–2. — P. 230–242. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.056>.

24. *Yang X. D., Zhang W.* Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal — transversal vibrations // *Nonlinear Dynamics*. — 2014. — Vol. 78. — P. 2547–2556.
doi: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>.
25. *Saetta E., Settimi V., Rega G.* Minimal thermal modeling of two-way thermo-mechanically coupled plates for nonlinear dynamics investigation // *Journal of Thermal Stresses*. — 2020. — Vol. 43. — № 3. — P. 345–371.
doi: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>.
26. *Indeitsev D. A., Osipova E. V.* A two-temperature model of optical excitation of acoustic waves in conductors // *Doklady Physics*. — Pleiades Publishing, 2017. — Vol. 62. — P. 136–140.
doi: <https://doi.org/10.1134/S1028335817030065>.
27. *Sun Y. et al.* Thermodynamic response of beams on Winkler foundation irradiated by moving laser pulses // *Symmetry*. — 2018. — Vol. 10. — № 8. — P. 328. doi: <https://doi.org/10.3390/sym10080328>.
28. *Wen C., Tang L., Yang G.* Buckling and post-buckling of pinned Euler beams on weakened Winkler foundation under thermal loading // *Journal of Thermal Stresses*. — 2020. — Vol. 43. — № 5. — P. 529–542.
doi: <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1734128>.
29. *Morozov N. F. et al.* Stability of the Bernoulli — Euler Beam in coupled electric and thermal fields // *Doklady Physics*. — Pleiades Publishing, 2018. — Vol. 63. — P. 342–347.
doi: <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>.
30. *Morozov N. F. et al.* Bernoulli-Euler beam under action of a moving thermal source: characteristics of the dynamic behavior // *Doklady Physics*. — Pleiades Publishing, 2019. — Vol. 64. — P. 185–188.
doi: <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>.
31. *Morozov N. F. et al.* Stability of the Bernoulli — Euler beam under the action of a moving thermal source // *Doklady Physics*. — Pleiades Publishing, 2020. — Vol. 65. — P. 67–71. doi: <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>.
32. *Nayfeh A. H., Mook D. T.* *Nonlinear oscillations*. — John Wiley & Sons, 2008.
33. *Mitropolskii Y. A., Van Dao N., Gladwell G. M. L.* *Applied asymptotic methods in nonlinear oscillations*. — Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1997.

Shevchenko S. A., Melnikov B. E. **Mathematical model of the non-ideal resonator of a Coriolis vibratory gyroscope. Development and Analysis.**

The paper is devoted to the development of a mathematical model of the non-ideal resonator of a Coriolis vibratory gyroscope to determine the effect of imperfections on the output parameter — the splitting of eigenfrequency of the resonator oscillation. The resonator is modelled as a thin-walled hemispherical shell in which a standing elastic wave is excited at a frequency equal to the second elliptical eigenfrequency. As part of the research, we built a mathematical model of the ideal hemispherical shell and considered several ways to take into account imperfections upon creating a model of the non-ideal resonator. Numerical experiments have been conducted to verify the mathematical models.

The impact of changes in model input parameters (imperfection parameters) on frequency splitting has been studied with the help of experimental design theory methods and global sensitivity analysis to analyze the effect of changes in the model input parameters. The accuracy of the approximation methods used to obtain the response surface has been evaluated based on virtual experiment data.

MSC class: 74K25

Keywords: Coriolis vibratory gyroscope, eigenfrequency, imperfection, virtual experiment, sensitivity analysis.

REFERENCES

1. *Peshexonov V. G.* Perspektivy⁴ girokopii / V. G. Peshexonov // Sbornik trudov XIII Vserossijskogo soveshchaniya po problemam upravleniya VSPU-2019. — 2019. — P. 36–38 [in Russian].
2. *Bryan G. H.* On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell / G. H. Bryan // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences. — 1890. — Vol. 7 — P. 101–111.
3. *Klimov D. M.* Kvarcevyj⁴ polusfericheskiy rezonator (Volnovoj tverdotel'nyj giroskop) / D. M. Klimov, V. F. Zhuravlev, Yu. K. Zhbanov / M. : Kim L. A. — 2017. — 193 p. [in Russian].
4. *Volchixin I. A.* Volnovy'e tverdotel'ny'e giroskopy⁴ (analiticheskij obzor) / I. A. Volchixin i dr. // Izvestiya TulGU. Texnicheskie nauki — 2017, — № 9 — P. 59–78. [in Russian].

5. *Maslov A. A.* Volnovy'e tverdotel'ny'e giroskopy': obzor publikacij / A. A. Maslov i dr. // Giroskopiya i navigaciya. — 2023. — 31 (1) — P. 3–25 [in Russian].
6. *Novozhilov V. V.* Linejnaya teoriya tonkix obolochek / V. V. Novozhilov, K. F. Cherny'x, E. I. Mixajlovskij. — Leningrad : Politexnika. — 2017. — 655 p. [in Russian].
7. *Shevchenko S. A.* The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling / S. A. Shevchenko, O. I. Konotopov // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. — 2021. — 14 (2). — P. 65–80.
8. *Rekach V. G.* Raschet obolochek slozhnoj geometrii / V. G. Rekach, S. N. Krivoshapko, E. I. Mixajlovskij // Izdatel'stvo Universiteta družby' narodov. — 1988. — 176 p. [in Russian].
9. *Shevchenko S. A.* Ob uchete nesovershenstv v matematicheskoj modeli rezonatora volnovogo tverdotel'nogo giroskop / S. A. Shevchenko, B. E. Mel'nikov // Nedelya nauki FIZMEX. Sbornik statej Vserossijskoj nauchnoj konferencii. St. Petersburg, 2022. — P. 260–262. [in Russian].
10. *Shevchenko S. A.* Ispol'zovanie metodov teorii planirovaniya e'ksperimenta i analiza chuvstvitel'nosti pri rabote s model'yu rezonatora giroskopa / S. A. Shevchenko, B. E. Mel'nikov // Nauchno-texnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politexnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki. — 2023. — 16 (1). — P. 152–162 [in Russian].

Kuteeva G. A., Dorofeev N. P., Tverev K. K. Modelling of the mechanism «Rolling an Ellipse on an Ellipse».

The article discusses the modelling process of the exhibit of the Museum of the History of Physics and Mathematics SPbSU «Rolling an Ellipse on an Ellipse». The exhibit demonstrates the no-slip movement of one ellipse on the other. Both modelling and animation were made in Blender software using analytical calculations. The quality of the acquired model was checked by testing its 3D-printed parts.

MSC class: 68U20

Keywords: elliptical wheels, 3D-modeling, Blender.

REFERENCES

1. *Artobolevski I. I.* Mehanizmi v sovremennoj tehnikе: spravochnoe posobie dlya inzhenerov, konstruktorov i izobretatelei. In 7 vol. Vol. 4. Zubchatie Mehanizmi / I. I. Artobolevski — M. : Nauka, 1980 [in Russian].

2. Matematicheskie etudi: ofiz. sait. — URL: [https:// etudes.ru/](https://etudes.ru/) [in Russian].
3. *Bair B. W.* Computer aided design of elliptical gears with circular-arc teeth / *B. W. Bair* // *Mechanism and Machine Theory*. 2004. — Vol. 39. — No. 2. — P. 153–168.
4. *Litvin F. L. and Fuentes A.* Gear Geometry and Applied Theory. Second edition. — Cambridge University Press, 2004. P. 318.
5. Otvinta: ofiz. sait. — URL: [http:// www.otvinta.com/index.html](http://www.otvinta.com/index.html) [in Russian].
6. *Vasie M. and Andrei L.* Technologies for Non-Circular Gear Generation and Manufacture – The annals «Dunărea de jos» of galați Fascicle V, Technologies in machine building. — 2010. — P. 167–172.

Smirnov A. S., Sukov A. P., Smolnikov B. A. **Skateboard dynamics and control of its overlocking motions.**

The article discusses the dynamics and motion control of one of the most popular systems with nonholonomic constraints at present — a skateboard. A brief historical overview of the emergence and development of skateboarding is given. A calculation scheme of a skateboard is given and a mathematical model of its controlled movement is constructed, and for the sake of completeness, the motion equations of the system are derived using both the Appel equations and the Ferrers equations. Two options for the formation of controls that arise as a result of the coordinated choice of the control functions of the problem and lead to the overlocking of the skateboard are considered. A detailed analysis of the skateboard dynamics in the specified overlocking modes of its movement is carried out both in the absence and in the presence of viscous resistance from the environment. As a result, approximate solutions with retention of the necessary correction terms are found. On the basis of these solutions, a comparison of the efficiency indicators of an increase in speed in the motion modes corresponding to the accepted options for the formation of control actions is made, and conclusions about the expediency of their use in practice are drawn

MSC class: 70F25

Keywords: skateboard, nonholonomic mechanics, control actions,

Appel equations, Ferrers equations, viscous resistance, overclocking motion modes.

REFERENCES

1. *Kuleshov A. S.* Mathematical model of a skateboard with one degree of freedom / A. S. Kuleshov // *Doklady Akademii nauk.* — 2007. — Vol. 414. — No 3. — P. 330–333 [in Russian].
2. *Kremnev A. V.* Nonlinear dynamics of a skateboard model with three degrees of freedom / A. V. Kremnev, A. S. Kuleshov // *Nonlinear Dynamics.* — 2008. — Vol. 4. — No 3. — P. 341–355 [in Russian].
3. *Várszegi B.* Downhill motion of the Skater-Skateboard system / B. Várszegi, D. Takács // *Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering.* — 2016. — Vol. 60. — No 1. — P. 58–65.
4. *Várszegi B.* Stabilizing skateboard speed-wobble with reflex delay / B. Várszegi, G. Stepan, D. Takacs, S. J. Hogan // *Journal of the Royal Society. Interface.* — 2016. — Vol. 13. — No 121. — P. 20160345.
5. *Merkin D. R.* Applied problems of rigid body dynamics / D. R. Merkin, B. A. Smolnikov. — St. Petersburg : St. Petersburg University, 2003. — 534 p. [in Russian].
6. *Ispolov Yu. G.* Skateboard dynamics / Yu. G. Ispolov, B. A. Smolnikov // *Computer methods in applied mechanics and engineering.* — 1996. — 131 (3-4). — P. 327–333.
7. *Sukov A. P.* Analysis of the controlled skateboard motion modes / A. P. Sukov, A. S. Smirnov // *Youth and Science: actual problems of fundamental and applied research : Materials of the V All-Russian scientific conference of students, postgraduates and young scientists.* — Komsomolsk-on-Amur, April 11-15. — 2022. — Vol. 2. — P. 395–397 [in Russian].
8. *Markeev A. P.* Theoretical mechanics / A. P. Markeev. — Moscow, Izhevsk : Regular and Chaotic Dynamics, 2007. — 592 p. [in Russian].
9. *Neymark Yu. I.* Dynamics of nonholonomic systems / Yu. I. Neymark, N. A. Faev. — Moscow : Nauka, 1967. — 520 p. [in Russian].

Nesterchuk G.A. **Vibrations of a ring stiffened clamped cylindrical shell.**

The work discusses the lower frequencies and vibration modes of a structure consisting of a thin-walled elastic cylindrical shell stiffened by rings of different rigidity. Two types of structural vibrations are distinguished. The eigenmodes of the first type have a large number of

waves in the circumferential direction and are similar to the eigenmodes of a plain cylindrical shell. The forms and frequencies of vibration of the second type are close to the forms and frequencies of vibrations of the annular plate. With the help of numerical and asymptotic methods, the effect of changing the law of distribution of frame stiffness along the generatrix on the lowest frequency of the shell is studied. Formulas are obtained for calculating approximate values of the fundamental frequencies of structures for case of clamped shell edges. An optimization problem is solved about finding the values of the coefficients of the frame height distribution function for a fixed mass structure, at which the value of the fundamental frequency reaches its maximum value.

MSC class: 74H45, 74K25

Keywords: shell vibrations, finite element method, Rayleigh-Ritz method.

REFERENCES

1. *Goldenweizer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E.*, Free Vibrations of Thin Elastic Shells. — Moscow : Nauka, 1979. [in Russian].
2. *Filin A.P.* Elements of the Theory of Shells, Stroiizdat Leningrad Division — Leningrad, 1975. — 256 p. [in Russian].
3. *Filippov S. B.*, The theory of conjugated and reinforced shells. — St. Petersburg : St. Petersburg University Press, 1999. [in Russian].
4. *Alfutov N.A.* Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh system (Basis of calculation for stability of elastic systems). Moscow : Mashinostroenie Publ., 1978. — 312 p. [in Russian].
5. *Sharypov D. V.* Low-frequency vibrations of the ring-stiffened thin cylindrical shell. — St. Petersburg Univ. Mech. Bulletin. — Vol. 3 — P. 29–34.
6. *Lopatukhin A.L., Filippov S.B.* Low frequency vibration and buckling of the ring stiffened thin cylindrical shell // Vestnik of St. Petersburg University, Ser. 1. — 2001. — № 2. — P. 84–90.
7. *Filippov, S.B.* Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates // Analysis of Shells, Plates, and Beams — A State of the Art Report, Springer's Series Advanced Structured Materials. — Vol. 123. — P. 123–140.

Dzebisashvili. G.T. Asymptotics of vibration frequencies of cylindrical shells with polygonal cross-section.

The study examines the behaviour of the free vibrations' frequencies of a cylindrical shell with a regular polygonal cross-section. It is assumed that the length of the polygon perimeter remains constant as the number N of its sides increases. A relationship between the frequencies of an N -sided cylindrical shell and those of a shell with a circular cross-section is obtained. A comparison between the analytical solution and the finite element solution is provided.

Keywords: vibrations, cylindrical shell, N -sided cross-section, finite element method.

MSC 74K25, 74H45

REFERENCES

1. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mechanics Research Communications*. — 2000. — Vol. 27. — № 4. — P. 457–464.
2. *Dzebisashvili. G. T.* Free vibrations of cylindrical shells with the square cross-section. // *Trudy seminara «Compyuternye metody v mehanike sploshnoy sredy»*. — St. Petersburg : St. Petersburg University Press, 2019. — P. 13–29 [in Russian].
3. *Amosov A. S.* Free vibrations of a thin rectangular elastic tube. // *Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1.* —2004. № 1. — P. 67–72 [in Russian].
4. *Chen Yue-hua, Jin Guo-yong, Liu Zhi-gang.* Free Vibration of a Thin Shell Structure of Rectangular Cross-section // *Key Engineering Materials*. Trans Tech Publications, Switzerland. — 2011. — Vol. 486. — P. 107–110.
5. *Dzebisashvili G. T., Filippov S. B.* Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — Vol. 1479.
URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (Accessed 26.02.2021).
6. *Gonçalves R., Camotim D.* The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes // *Thin-Walled Structures*. — 2014. — Vol. 84. — P. 177–188.

РЕФЕРАТЫ

УДК 531.38

Морозов Н. Ф., Лукин А. В., Попов И. А., Штуккин Л. В. **Нелинейная динамика нано/микромеханических систем при лазерных термооптических воздействиях** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. С. 3–34.

Работа посвящена исследованию нелинейной динамики связанных продольно-изгибных колебаний заземленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Исследуется режим параметрических колебаний микробалки в условиях внутреннего кратного резонанса между некоторыми изгибной и продольной формами свободных колебаний резонатора. Обнаружена возможность генерации продольно-изгибных биений, частота медленной огибающей которых существенным образом зависит от параметра внутренней частотной расстройки, а сам параметр связан с величиной внешних возмущений, подлежащих высокоточному измерению.

Библиогр. 33 назв. Ил. 16.

Ключевые слова: нелинейная динамика, лазерное термооптическое воздействие, параметрические колебания, микробалка, продольно-изгибные биения, микромеханическая система.

УДК 531.383

Шевченко С. А., Мельников Б. Е. **Математическая модель неидеального резонатора волнового твердотельного гироскопа. Разработка и анализ** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. С. 35–49.

Исследование посвящено разработке математической модели неидеального резонатора волнового твердотельного гироскопа, позволяющей определить влияние несовершенств на выходной параметр — расщепление собственной (рабочей) частоты колебаний резонато-

ра. Резонатор представляет собой тонкостенную полусферическую оболочку, в которой возбуждается стоячая упругая волна на частоте, равной по значению второй эллиптической собственной частоте. В рамках работы построена математическая модель идеальной полусферической оболочки, рассмотрены способы учета несовершенств при создании модели неидеального резонатора. Проведена верификация построенных математических моделей с использованием численного эксперимента. Также с использованием методов теории планирования эксперимента и методов глобального анализа чувствительности проведен анализ степени влияния изменения входных параметров модели (параметров несовершенств) на расщепление частоты. Определенное внимание уделено оценке точности методов аппроксимации, используемых для построения поверхности отклика на основе данных виртуального эксперимента.

Библиогр. 10 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, собственная частота, несовершенство, виртуальный эксперимент, анализ чувствительности.

УДК 531.383

Кутеева Г. А., Дорофеев Н. П., Тверев К. К. Моделирование механизма «Качение эллипса по эллипсу» // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. С. 50–56.

В работе описан процесс создания 3D-модели экспоната музея истории физики и математики СПбГУ «Качение эллипса по эллипсу», который демонстрирует движение одного эллипса по другому без проскальзывания. Моделирование и анимация выполнялись в программе Blender с применением аналитических расчетов. Для проверки адекватности полученной модели она была распечатана на 3D-принтере.

Библиогр. 6 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: эллиптические колеса, Blender, 3D-моделирование.

УДК 531.38

Смирнов А. С., Сужов А. П., Смольников Б. А. **Динамика скейтборда и управление его разгонными движениями** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. С. 57–76.

В статье обсуждаются вопросы динамики и управления движением одной из наиболее популярных в настоящее время систем с неголономными связями — скейтборда. Приводится краткий исторический обзор возникновения и становления скейтбординга. Дается расчетная схема скейтборда и строится математическая модель его управляемого движения, причем для полноты картины осуществляется вывод уравнений движения системы как с помощью уравнений Аппеля, так и с помощью уравнений Феррерса. Рассматриваются два варианта формирования управлений, возникающих вследствие согласованного выбора управляющих функций задачи и приводящих к разгону скейтборда. Проводится подробный анализ динамики скейтборда в указанных разгонных режимах его движения как при отсутствии, так и при наличии вязкого сопротивления со стороны окружающей среды. В результате находятся приближенные решения с удержанием необходимых поправочных слагаемых. На основе этих решений осуществляется сопоставление показателей эффективности набора скорости в режимах движения, соответствующих принятым вариантам формирования управляющих воздействий, и делаются выводы о целесообразности их использования на практике.

Библиогр. 9 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: скейтборд, неголономная механика, управляющие воздействия, уравнения Аппеля, уравнения Феррерса, вязкое сопротивление, разгонные режимы движения.

УДК 539.3, 534.1

Нестерчук Г. А. **Собственные колебания тонкой защемленной цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. С. 77–98.

В работе исследуются низшие частоты и формы колебаний конс-

струкции, состоящей из тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости. Выделены два типа колебаний конструкции. Формы собственных колебаний первого типа имеют большое число волн в окружном направлении и сходны с формами собственных колебаний неподкрепленной цилиндрической оболочки. Формы и частоты колебаний второго типа близки к формам и частотам колебаний кольцевой пластины. С помощью численных и асимптотических методов исследуется влияние на низшую частоту оболочки закона распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей. Получены формулы для вычисления приближенных значений фундаментальных частот конструкций для случая жесткой заделки краев оболочки. Для конструкции фиксированной массы решается оптимизационная задача нахождения функции распределения высот шпангоутов, для которой фундаментальная частота имеет наибольшее значение.

Библиогр. 7 назв. Ил. 9.

Ключевые слова: колебания оболочек, метод конечных элементов, метод Рэлея–Ритца.

УДК 534.1:539.3

Дзедзисашвили Г. Т. Асимптотика частот колебаний цилиндрических оболочек с многоугольным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2022–2023 гг. С. 99–107.

Изучено поведение частот свободных колебаний цилиндрической оболочки с сечением в виде правильного многоугольника при увеличении числа N его сторон. Предполагается, что величина периметра многоугольника при увеличении N не изменяется. Установлена связь частот оболочки с N -угольным поперечным сечением с частотами круговой цилиндрической оболочки. Проведено сравнение аналитического решения и решения по методу конечных элементов.

Библиогр. 6 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: колебания, цилиндрическая оболочка, метод конечных элементов, многоугольное поперечное сечение.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| <i>Н. Ф. Морозов, А. В. Лукин, И. А. Попов, Л. В. Штукин. Нелинейная динамика нано/микромеханических систем при лазерных термо-оптических воздействиях</i> | 3 |
| 1. Введение | 3 |
| 2. Математическая модель | 6 |
| 3. Исследование свободных продольно-изгибных колебаний | 8 |
| 3.1. Постановка задачи | 8 |
| 3.2. Построение асимптотического решения | 10 |
| 3.3. Порождающие уравнения | 12 |
| 3.4. Уравнения второго приближения | 13 |
| 3.5. Уравнения третьего приближения | 14 |
| 3.6. Исследование эволюции свободных колебаний во втором приближении | 15 |
| 3.7. Анализ динамики стержня в третьем приближении | 22 |
| 4. Заключение | 30 |
| <i>С. А. Шевченко, Б. Е. Мельников. Математическая модель неидеального резонатора волнового твердотельного гироскопа. Разработка и анализ</i> | 35 |
| 1. Введение | 35 |
| 2. Математическая модель идеального резонатора | 37 |
| 3. Учет несовершенств в математической модели | 41 |
| 4. Методика анализа математической модели | 45 |
| 5. Заключение | 48 |
| <i>Г. А. Кутеева, Н. П. Дорофеев, К. К. Тверев. Моделирование механизма «Качение эллипса по эллипсу»</i> | 50 |
| 1. Введение | 50 |
| 2. Математическая модель | 51 |
| 3. Создание 3D-модели и анимация | 53 |
| 4. Печать на 3D-принтере | 55 |
| 5. Заключение | 56 |
| <i>А. С. Смирнов, А. П. Суков, Б. А. Смольников. Динамика скейтборда и управление его разгонными движениями</i> | 57 |
| 1. Введение | 57 |
| 2. Краткая история скейтбординга | 59 |
| 3. Расчетная схема и математическая модель управляемого движения скейтборда | 62 |
| 4. Формирование законов управления движением скейтборда | 67 |

| | |
|---|-----|
| 5. Исследование разгонных режимов движения скейтборда при отсутствии сил сопротивления | 69 |
| 6. Влияние внешнего сопротивления на разгонные режимы движения скейтборда | 71 |
| 7. Заключение | 75 |
| <i>Г. А. Нестерчук. Собственные колебания тонкой защемленной цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами</i> | 77 |
| 1. Введение | 77 |
| 2. Собственные колебания подкрепленной цилиндрической оболочки | 78 |
| 3. Момент инерции шпангоута | 80 |
| 4. Оптимальное расположение шпангоутов | 83 |
| 5. Нахождение значений собственных частот колебаний балки, подкрепленной пружинами | 85 |
| 6. Нахождение собственных значений в задаче о колебаниях подкрепленной оболочки | 86 |
| 7. Оптимизация параметров подкрепленной цилиндрической оболочки в целях максимального увеличения первой частоты | 87 |
| 8. Собственные колебания кольцевой пластины | 89 |
| 9. Аналитическое и численное определение фундаментальной частоты колебаний конструкции | 92 |
| 10. Заключение | 98 |
| <i>Г. Т. Дзедзисашвили. Асимптотика частот колебаний цилиндрических оболочек с многоугольным поперечным сечением</i> | 99 |
| 1. Введение | 99 |
| 2. Постановка задачи | 100 |
| 3. Анализ частот при $N \rightarrow \infty$ методом конечных элементов | 102 |
| 4. Получение аналитического решения | 104 |
| 5. Заключение | 106 |
| Резюме докладов, не вошедших в сборник | 108 |
| Об авторах | 111 |
| Summaries | 115 |
| Рефераты | 125 |

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2022–2023 гг.

*Утверждено к печати
Редакционно-издательским советом
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
и Ученым советом Института проблем машиноведения
Российской академии наук*

Корректор *Л. В. Ларионова*

Отпечатано с готового оригинал-макета.

Подписано в печать 18.07.2023. Формат 60×84¹/₁₆. Печать офсетная.

Усл.-печ. л. 8,25.

Тираж 110. Заказ № 3113.