

УДК 551.465

© В. Г. Гневыйшев<sup>1</sup>, В. С. Травкин<sup>2,3</sup>, Т. В. Белоненко<sup>2\*</sup>, 2023

<sup>1</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Россия, Москва, Нахимовский проспект, 36.

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9.

<sup>3</sup>Государственный океанографический институт имени Н.Н.Зубова, Росгидромет, 119034, Россия, Москва, Кропоткинский пер., д. 6

\*btvlisab@yandex.ru

## ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ И ДИСПЕРСИЯ ШЕЛЬФОВЫХ ВОЛН БУХВАЛЬДА И АДАМСА. НОВЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Статья поступила в редакцию 04.11.2022, после доработки 24.03.2023, принята в печать 18.04.2023

### Аннотация

Произведен новый анализ известных топографических моделей волн Россби для кусочно-экспоненциальных профилей топографии. Предложен математический метод, позволяющий находить аналитически групповую скорость и дисперсию. Произведено численное сравнение соотношений, представленных в исследовании Бухвальда и Адамса, и зависимостей, полученных в рамках нового аналитического подхода. Численный сравнительный анализ показал, что расхождение для фазовых скоростей лежит в границах пяти процентов. Для групповых скоростей расхождение достигает девятнадцати процентов для первой моды и уменьшается для более высоких номеров мод. Рассматриваются длинноволновые асимптотики собственных функций. Установлено, что длинноволновый предел для шельфовых волн Россби имеет специфику: продольное волновое число стремится к нулю, а поперечное волновое число выходит на некую конечную положительную константу, которая тем больше, чем выше номер моды. Показано, что в длинноволновом пределе шельфовые волны Россби переходят в шельфовые топографические течения, при этом имеется некая автомодельность для фазовой и групповой скоростей шельфовых течений. Показано, что шельфовые волны, проявляются в виде системы перемещающихся когерентных вихрей.

**Ключевые слова:** волны Россби, топографические волны, шельфовые волны, экспоненциальный профиль, групповая скорость, дисперсия, автомодельность, мезомасштабные вихри

© V. G. Gnevyshev<sup>1</sup>, V. S. Travkin<sup>2,3</sup>, T. V. Belonenko<sup>2\*</sup>, 2023

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology RAS, 117997, Nahimovsky Pr., 36, Moscow, Russia

<sup>2</sup>St. Petersburg State University, 199034, 7–9, Universitetskaya Nab., St. Petersburg, Russia

<sup>3</sup>N.N.Zubov's State Oceanographic Institute, Roshydromet, 119034, 6, Kropotkinskiy Lane, Moscow, Russia

\*btvlisab@yandex.ru

## GROUP VELOCITY AND DISPERSION OF BUCHWALD AND ADAMS SHELF WAVES. A NEW ANALYTICAL APPROACH

Received 04.11.2022, Revised 24.03.2023, Accepted 18.04.2023

### Abstract

In this paper, a new analysis of the known topographic models of Rossby waves for piecewise exponential topography profiles is performed. A mathematical method is proposed that allows us to find analytically the group velocity and variance. A numerical comparison is made of the relations presented in the study of Buchwald and Adams and the dependencies obtained within the framework of a new analytical approach. Numerical comparative analysis showed that the discrepancy for the phase velocities lies in the range of five percent. For group speeds, the discrepancy reaches nineteen percent for the first mode and decreases for higher mode numbers. We also consider long-wave asymptotics of eigenfunctions. It is established that the long-wave limit for Rossby shelf waves has specifics: the longitudinal wave number tends to zero, and the transverse wave number reaches a certain finite positive constant, which is the greater the higher the mode number. It is shown that in the long-wave limit, Rossby shelf waves transform into shelf topographic currents, while there is a certain self-similarity for the phase and group velocities of shelf currents depending on the value of the topography gradient.

**Keywords:** Rossby waves, topographic waves, shelf waves, exponential profile, group velocity, dispersion, self-similarity, mesoscale eddies

Для цитирования: Гневыйшев В.Г., Травкин В.С., Белоненко Т.В. Групповая скорость и дисперсия шельфовых волн Бухвальда и Адамса. Новый аналитический подход // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2023. Т. 16, № 2. С. 8–20. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-1

For citation: Gnevyshev V.G., Travkin V.S., Belonenko T.V. Group Velocity and Dispersion of Buchwald and Adams Shelf Waves. A New Analytical Approach. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 2, 8–20. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-1

## Введение

Существование шельфовых волн подтверждается множеством исследований. На их основании можно утверждать, что для каждой шельфовой области Мирового океана в той или иной степени позволяет обнаружить вклад шельфовых волн в низкочастотную изменчивость уровня. Условием генерации шельфовых волн является характерный рельеф дна, при котором шельф играет роль волновода. По нему волновая энергия субинерционных колебаний уровня моря и течений распространяется на большие расстояния с минимальными потерями [1–4]. Эти колебания возникают вследствие сохранения потенциальной завихренности, причем фаза всегда распространяется таким образом, что в северном полушарии берег (мелкая вода) остается с правой стороны, и наоборот — в южном. При значительных топографических уклонах, когда  $\beta$ -эффектом можно пренебречь, топографический параметр начинает играть роль планетарного числа [5–7].

Шельфовые волны впервые были зарегистрированы в 1960-е гг. в нескольких частях Мирового океана [8], их также часто называют береговыми захваченными волнами. Примеры недавних наблюдений: западное побережье Южной Америки [9], вдоль восточного побережья Северной Америки [10, 11], в море Бофорта [12] и около Австралии [13, 14]. Шельфовые волны можно рассматривать как один из видов топографических волн в случае чисто баротропного океана [15]. Хотя наличие стратификации часто играет значительную роль, баротропная теория оказалась полезной для объяснения наблюдаемых низкочастотных сигналов. В целом ожидается, что стратификация увеличивает частоту волн (см., например, [3, 16–18]). Будучи важной составляющей динамики, шельфовые волны могут влиять на прибрежные экосистемы за счет усиления апвеллинга [17, 19, 20], а также могут влиять на перенос биологических твердых частиц или загрязнения вдоль побережья.

Распространение шельфовых волн изучалось достаточно широко (см. обзор в монографии [21]). Как обсуждалось в работе [22], соотношения дисперсии волн можно получить только численно для произвольной топографии, однако для идеализированных форм рельефа точные аналитические решения могут быть найдены. Некоторые из них включают решения для линейно изменяющегося [23], экспоненциального вогнутого [24] и экспоненциального выпуклого [25] профиля склона шельфа. В недавней работе [26] реализованы шивки желобовых и шельфовых волн, которые ранее отсутствовали в работах по данной тематике.

В этой работе мы анализируем шельфовые волны для экспоненциального выпуклого профиля шельфа, ранее рассмотренного в работе [25]. Отметим, что экспоненциальный профиль шельфа является неплохой аппроксимацией рельефа для многих прибрежных областей Мирового океана [21, 27]. Экспоненциальный профиль и адаптация модели [25] рассматриваются в работе [28]. В ней описываются два типа свободно распространяющихся шельфовых волн: над прибрежным ограниченным шельфом с экспоненциально увеличивающейся глубиной в сторону моря и шельфом с аналогичным профилем глубины, но без береговой границы (внутренний шельф). Показано, что более общее дисперсионное соотношение справедливо для любой ширины шельфа. Это увеличивает применимость теории к различным конфигурациям шельфа, обнаруженным в океане. Авторы также показали на основе численных оценок числа Бюргера, что эффекты стратификации весьма незначительны для шельфовых волн.

Мы подвергаем ревизии полученные ранее результаты и выводим точные формулы, позволяющие находить аналитически групповую скорость и дисперсию. Это позволяет произвести сравнение точных формул и приближенных оценок, которые ранее получены для побережья Сиднея [25]. Целью работы является новый математический подход к исследованию шельфовых волн для экспоненциально выпуклого профиля склона шельфа и новые аналитические выражения для групповой скорости и дисперсии, которые уточняют и обобщают полученные ранее зависимости для шельфовых волн.

## 1. Постановка задачи. Основные уравнения

Теоретическим базисом для описания желобовых волн являются линеаризованные баротропные уравнения мелкой воды с учетом топографии в приближении «твердой крышки» на  $f$ -плоскости [3, 4, 16, 17, 21, 28, 29]:

$$u_t - fv + \rho^{-1} p_x = 0, \quad (1.1)$$

$$v_t + fu + \rho^{-1} p_y = 0, \quad (1.2)$$

$$(Hu)_x + (Hv)_y = 0, \quad (1.3)$$

где принято условие геострофики и отфильтрован высокочастотный непрерывный спектр Пуанкаре:

$$u = -\Psi_y / H, \quad v = \Psi_x / H. \quad (1.4)$$

Пусть функция потока имеет вид

$$\Psi = \Psi(x) \exp i(ky - \omega t). \quad (1.5)$$

Ось  $x$  направлена перпендикулярно берегу, на восток, а ось  $y$  — вдоль берега, на север, образуя правую систему координат. Используются обозначения:  $u$  и  $v$  — компоненты скорости в  $x$  и  $y$  направлениях,  $t$  — время,  $H$  — глубина,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность воды,  $f$  — параметр Кориолиса. Принята классическая правая система координат, оси  $x$  и  $y$  направлены поперек и вдоль шельфа, соответственно.

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.2) (уравнение (1.3) при этом выполняется автоматически) и рассматривая решения волнового характера вдоль одномерной топографической особенности (склона шельфа), получаем следующее линейное однородное одномерное дифференциальное уравнение:

$$\left( \frac{\Psi_x}{H} \right)_x + \left[ \frac{fk}{\omega} \left( \frac{1}{H} \right)_x - \frac{k^2}{H} \right] \Psi = 0, \quad (1.6)$$

где  $k$  — продольная компонента волнового числа,  $\omega$  — частота волны.

Условия сшивок при  $x = 0$  и  $x = L$ , где  $L$  — ширина шельфа, имеют следующий вид:

$$[\Psi] = 0, \quad x = 0, x = L, \quad (1.7)$$

$$\left[ \frac{\Psi_x + (fk/\omega)\Psi}{H} \right] = 0, \quad x = 0, x = L. \quad (1.8)$$

Условие (1.8) для непрерывной модели топографии принимает вид

$$[\Psi_x] = 0, \quad \text{при } x = 0, x = L, \quad (1.9)$$

и затухания на бесконечности:

$$\Psi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

### **Дисперсионное соотношение топографических волн Россби на экспоненциальном профиле топографии**

В работах [4, 30] для классической топографической волны Россби решение на экспоненциальном профиле топографии  $H = H_0 \exp(-y/L)$  ищется в форме  $\Psi = H^{1/2} \exp[i(k_1x + k_2y - \omega t)]$ . Тогда дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \frac{-(\beta_0 + f/L)k_1}{k_1^2 + k_2^2 + 1/4L^2}. \quad (1.11)$$

При этом предполагается, что уклоны топографии ( $1/L$ ) превышают значения  $10^{-3}$  и в дальнейшем  $\beta_0$  отбрасывается.

## **2. Шельфовые волны Бухвальда и Адамса**

### **2.1. Переход к безразмерным переменным**

За масштаб длины принимаем ширину шельфа  $L$ . За масштаб времени  $T$  принимаем  $f^{-1}$ ; за масштаб фазовой и групповой скорости — отношение масштаба длины к масштабу времени  $V = L/T = f \times L$ . Безразмерные частота  $\omega^*$ , время  $t^*$ , переменная  $x^*$ , длина волны  $\lambda^*$ , продольное волновое число  $k^*$ , поперечное волновое число  $m^*$ , фазовая скорость  $C^*$  и групповая скорость  $C_{gr}^*$  задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^* f, \quad \lambda = \lambda^* L, \quad x = x^* L, \quad t = t^* f^{-1}, \quad k = k^* / L, \quad m = m^* / L, \\ C &= C^* L f, \quad C_{gr} = C_{gr}^* L f. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Далее переходим к безразмерным переменным и опускаем звездочки.

Проведем расчеты для параметров для побережья Сиднея [25]. Принимаем следующие параметры: широта  $35^\circ$  ю.ш.,  $f = 0,8342 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , ширина шельфа  $L_1 = 80 \text{ км}$ , экспоненциальная крутизна  $1/L_1 = 2,7 \times 10^{-2} \text{ км}^{-1}$ , безразмерный параметр изменения топографии  $b = L/L_1 = 2,16$ . Масштаб скорости (фазовой и групповой)

$$V = L/T = 80 \text{ (км)} \times 0,8342 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1} = 6,67 \text{ м/с.}$$

## 2.2. Шельфовые волны на побережье Сиднея

Модель топографии шельфовых волн принимается в следующем виде (рис. 1):

$$\begin{aligned} D &= D_0 \exp(-2bx), \quad 0 < x < 1, \\ D_1 &= D_0 \exp(-2b), \quad x > 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Мы принимаем обозначения [25], при котором  $D = H^{-1}$ , где  $H$  — глубина,  $b = 1/L$ . Решение (1.6) ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi &= A \sin(mx) \exp(b(x-1)), \quad 0 < x < 1, \\ \Psi &= A \sin(m) \exp(-|k|(x-1)), \quad x > 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ширина шельфа в безразмерном виде равна единице ( $x = 1$ ). Тогда безразмерное дисперсионное соотношение (1.12) примет вид:

$$\omega = \frac{-2bk}{k^2 + m^2 + b^2}, \quad (2.4)$$

откуда видно, что для того, чтобы частота была положительной:  $\omega > 0$ , волновое число должно быть отрицательным:  $k > 0$ . Классические волны Россби бегут на запад. Топографические волны Россби перемещаются против направления оси  $y$ , оставляя мелкую воду справа в северном полушарии и слева в южном.

Используя условия (1.9) сшивки производной функции  $\Psi$ , получаем условие квантования для поперечного волнового числа:

$$\tan m = -\frac{m}{|k| + b}. \quad (2.5)$$

Это условие мы будем трактовать как условие связи, которое позволяет по данному продольному волновому числу  $k$  находить поперечное волновое число  $m$ . Таким образом, из (2.5) находим зависимость  $m = m_n(k)$ , где нижний индекс  $n$  — номер моды, будет соответствовать количеству узлов поперечной собственной функции. Первая мода имеет всего один узел, находящийся на берегу.

Для упрощения дальнейших выкладок введем новую переменную  $k^* = |k|$ , далее звездочку опускаем. Тогда дисперсионное соотношение (2.4) и условие связи (2.5) можно переписать следующим образом:

$$\omega = \frac{2bk}{k^2 + m_n^2(k) + b^2}, \quad (2.6)$$

$$\tan m = -\frac{m}{k + b}. \quad (2.7)$$

Выражение для фазовой скорости  $C$  имеет вид:

$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{2b}{k^2 + m_n^2(k) + b^2}, \quad (2.8)$$

откуда находим аналитическое выражение для продольной составляющей групповой скорости

$$\omega_k = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2b \frac{m^2 + b^2 - k^2 - k(m^2)_k}{(k^2 + m^2 + b^2)^2}, \quad (2.9)$$

где  $(m^2)_k = \frac{\partial(m^2)}{\partial k} = 2m m_k$ . Для нахождения выражения для  $(m^2)_k$  про дифференцируем (2.7) по волновому числу  $k$ . Используя классическое тригонометрическое тождество  $\frac{1}{\cos^2 m} =$

$= 1 + \tan^2 m$ , получаем следующее выражение:

$$\left[ 1 + \frac{m^2}{(b+k)^2} \right] m_k = \frac{m - m_k(b+k)}{(b+k)^2}.$$

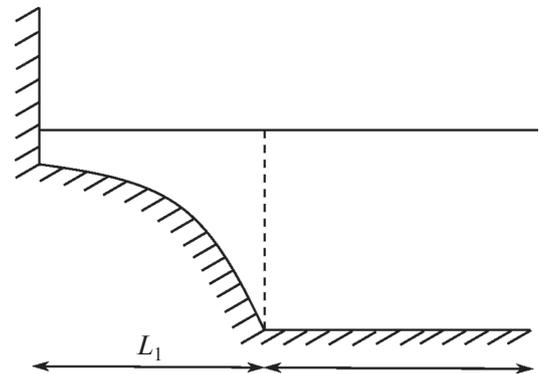


Рис. 1. Профиль топографии для шельфовых волн в экспоненциальной модели [25]

Fig. 1. Topography profile for shelf waves in the exponential model [25]

Тогда после несложных преобразований можно получить следующее соотношение:

$$m_k \left[ (b+k)^2 + (b+k) + m^2 \right] = m, \quad (2.10)$$

или

$$m_k = \frac{m}{\left[ (b+k)^2 + (b+k) + m^2 \right]}. \quad (2.11)$$

Умножим обе части уравнения (2.11) на  $2m$ :

$$2m m_k = \frac{2m^2}{(b+k)^2 + (b+k) + m^2}, \quad (2.12)$$

откуда находим

$$\left( m^2 \right)_k = \frac{2m^2}{(b+k)^2 + (b+k) + m^2}. \quad (2.13)$$

Далее соотношение (2.13) подставляем в (2.8), и это дает аналитическое выражение для групповой скорости (в силу громоздкости его не выписываем). Полученное точное аналитическое выражение для групповой скорости будем в дальнейшем применять для численных оценок параметров шельфовых волн.

### 2.3. Дисперсия топографических волн Россби

Найдем вторую производную частоты по волновому числу:

$$\omega_{kk} = 2b \frac{2k \left[ k^2 - 3(m^2 + b^2) \right] - 2(m^2)_k \left[ m^2 + b^2 - 3k^2 - k(m^2)_k \right] - k(m^2)_{kk} (k^2 + m^2 + b^2)}{(k^2 + m^2 + b^2)^3}. \quad (2.14)$$

Выражение для  $(m^2)_k$  мы нашли ранее (формула (2.13)). Найдем  $(m^2)_{kk}$ . Для этого уравнение (2.10) продифференцируем еще раз по волновому числу:

$$m_{kk} \left[ (b+k)^2 + (b+k) + m^2 \right] + m_k \left[ 2(b+k) + 1 + 2m m_k \right] = m_k. \quad (2.15)$$

Отсюда

$$m_{kk} = \frac{-2m_k \left[ 2(b+k) + m m_k \right]}{(b+k)^2 + (b+k) + m^2}, \quad (2.16)$$

где  $m_k$  определяется по формуле (2.11). Далее получаем:

$$\left( m^2 \right)_{kk} = (2m m_k)_k = 2 \left[ (m_k)^2 + m m_{kk} \right]. \quad (2.17)$$

Наконец, подставляем (2.17) в (2.14) и строим графики для двух первых мод, которые затем сравниваем с графиками, построенными по приближенным формулам.

### 2.4. Приближенные расчеты на основе теории Бухвальда и Адамса. Сравнение с точными аналитическими решениями

В данном пункте приведены расчеты, сделанные на основе упрощенных формул в работе [25] и при тех параметрах, которые соответствуют этому исследованию. Сравнение расчетов позволит сделать вывод, насколько расчеты, сделанные по приближенным формулам, соответствуют нашим точным решениям.

На рис. 2 представлены нормированные на  $f$  дисперсионные кривые, рассчитанные по формуле (2.6). В расчетах показатель топографического уклона принимался таким же, как и в статье [25]:  $b = 2,16$ , а  $m$  для точных и приближенных расчетов различается: для точных значений  $m$  рассчитывается для каждой моды, как решения уравнения (2.5), а для приближенных оно принимается таким же, как и в статье [25], т.е.  $m = 2,3204$  для первой моды и  $m = 5,1122$  для второй моды. Видно, что графики для приближенных расчетов завывают значения характеристики. В частности, максимальное значение  $\omega/f$  для первой моды в расчетах

по приближенной формуле составляет 0,68 (при  $k = 3,2$ , соответствующая длина волны 157 км), а для точного решения  $\omega/f = 0,63$  (при  $k = 3,3$ , соответствующая длина волны 152 км); для второй моды значение максимума по приближенной формуле составляет 0,39 (при  $k = 5,6$ , соответствующая длина волны 90 км) и 0,36 (при  $k = 5,8$ , соответствующая длина волны 87 км) в расчетах по точной формуле.

На рис. 3 представлены графики фазовой и групповой скоростей. Видно, что графики точных и приближенных значений фазовых скоростей незначительно отличаются друг от друга: различия в значениях

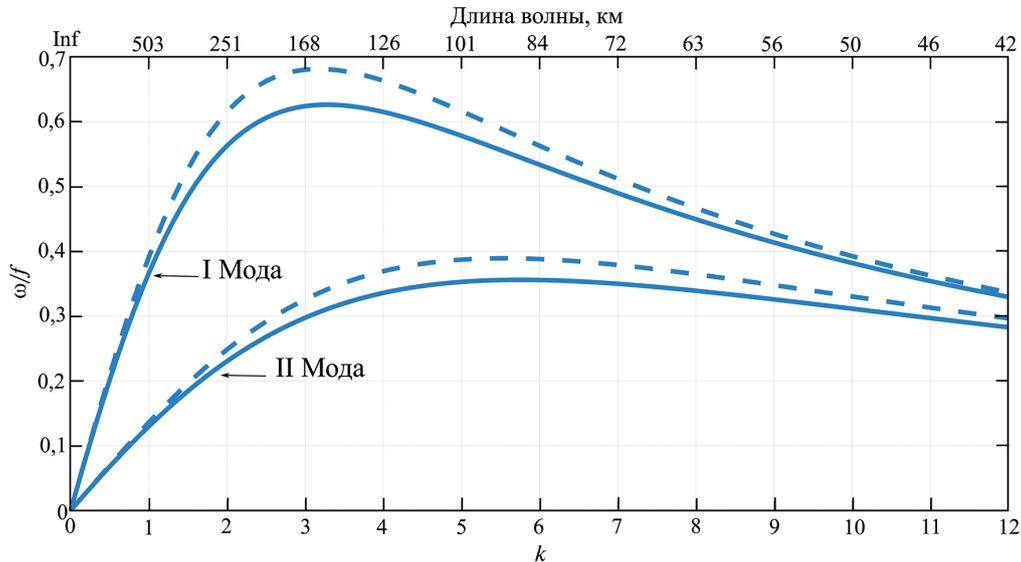


Рис. 2. Дисперсионные кривые для первых двух мод шельфовых волн. Сплошная линия — точное решение, пунктир — приближенное

Fig. 2. The dispersion curves for the first two shelf wave modes. A solid line is an exact solution, and a dotted line is an approximate one

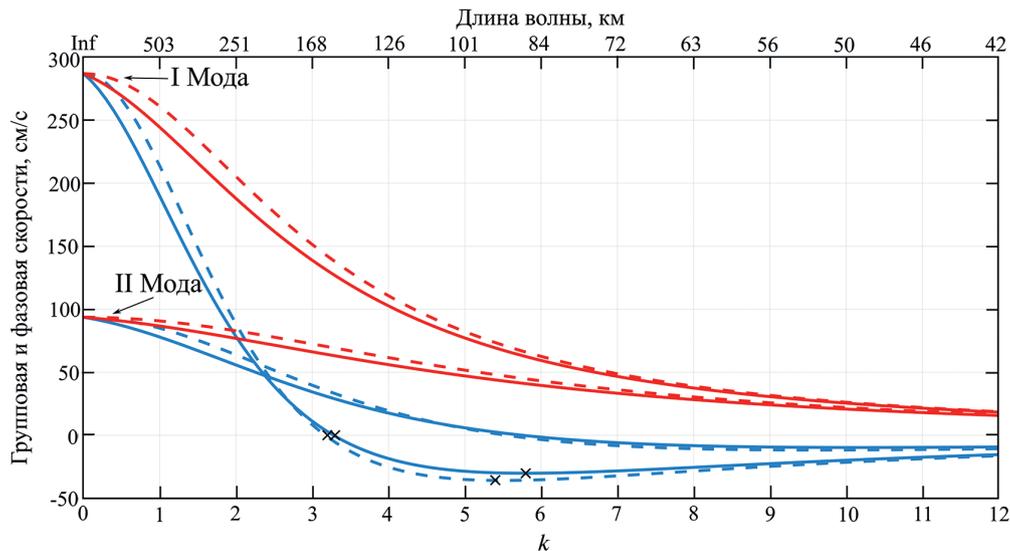


Рис. 3. Групповая (синий цвет) и фазовая (красный цвет) скорости (см/с) двух первых мод шельфовых волн. Сплошная линия — точное решение, пунктир — приближенное. Крестиками показаны точки пересечения с осью абсцисс (при  $k = 3,3$  для точного решения, и при  $k = 3,2$  для приближенного) и точки перегиба первой моды групповой скорости

Fig. 3. The group (blue) and phase (red) speeds (cm/s) of the first two modes of shelf waves. A solid line is an exact solution, and a dotted line is an approximate one. The crosses show the intersection points with the abscissa axis (at  $k = 3.3$  for the exact solution, and at  $k = 3.2$  for the approximate one) and the inflection points of the first mode of the group speed

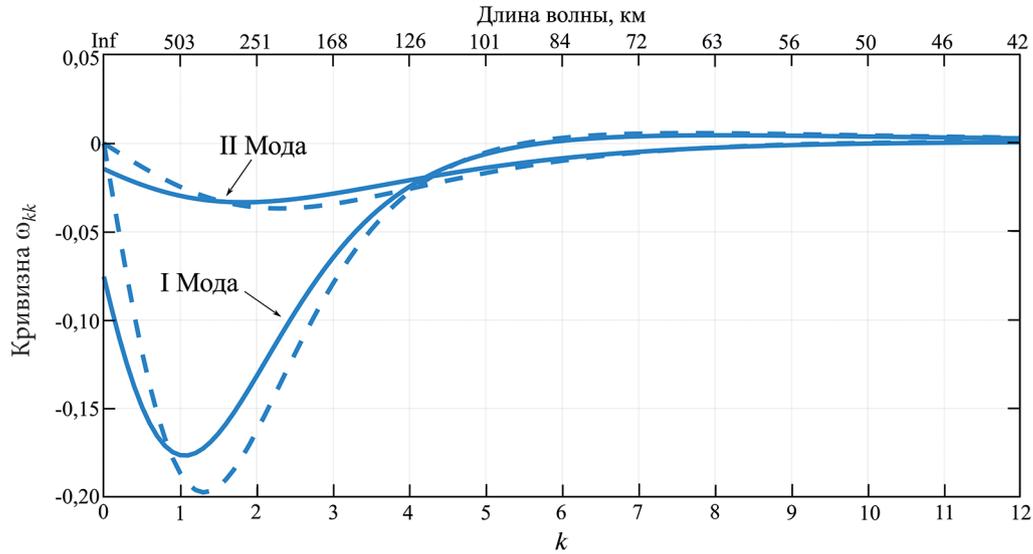


Рис. 4. Функция кривизны изочастоты для первых двух мод шельфовых волн. Сплошная линия — точное решение, пунктир — приближенное

Fig. 4. The isofrequency curvature function for the first two shelf wave modes. A solid line is an exact solution, and a dotted line is an approximate one

не превышают 5%. Однако для групповых скоростей различия более существенны, и значения отличаются уже на 19%. В частности, для первой моды групповая скорость в точке перегиба (при  $k = 5,8$ ) составляет значение  $-30,13$  см/с, а приближенное значение (при  $k = 5,5$ ) —  $35,86$  см/с. Для второй моды расхождение уменьшается до 7%, а для третьей (не показано) — до 3%. Для второй моды групповая скорость в точке перегиба (при  $k = 10,2$ ) составляет значение  $-9,71$  см/с, а приближенное значение (при  $k = 9,6$ ) —  $11,70$  см/с. Для третьей моды (не показано) экстремумы вне зоны счета. Знак минус говорит о том, что групповая скорость и фазовая скорость в точке перегиба имеют противоположные направления.

Численный анализ точных формул показал, что существует только одна точка перегиба. В точке перегиба вторая производная равна нулю, следовательно, первая производная — групповая скорость имеет экстремум. Получаем классическую точку перегиба волн Россби только в коротковолновом диапазоне  $k^2 = 3(m^2 + b^2)$ . Это точка пересечения гиперболы с осью абсцисс [31].

На рис. 4 представлены графики кривизны линий изочастоты для точного и приближенного значений, рассчитанные по формуле (2.14). Основным результатом анализа кривизны (дисперсии) состоит в том, что дисперсионная кривая имеет только одну классическую точку перегиба, и новых точек перегиба (прохождение через ноль второй производной) не появляется. Следовательно, физика шельфовых волн совпадает с классической физикой волн Россби, как системы волн с нормальной и аномальной дисперсией.

### 2.5. Длинноволновый предел топографических волн Россби — топографические течения

Известно, что в длинноволновом пределе волны Россби являются течениями. Соответственно, шельфовые (топографические) волны Россби в длинноволновом пределе становятся топографическими течениями [14]:

$$\begin{aligned} V &= A[b\sin(mx) + m\cos(mx)]\exp[b(-x-1)], \quad 0 < x < 1, \\ V &= A(-k)\sin m\exp[-k(x-1)]\exp(-2b), \quad x > 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В длинноволновом пределе  $k \rightarrow 0$  профиль скорости топографического течения имеет только одну продольную компоненту скорости  $V$ , и (2.18) принимает вид

$$\begin{aligned} V &= A[b\sin(mx) + m\cos(mx)]\exp[b(-x-1)], \quad 0 < x < 1, \\ V &= 0, \quad x > 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

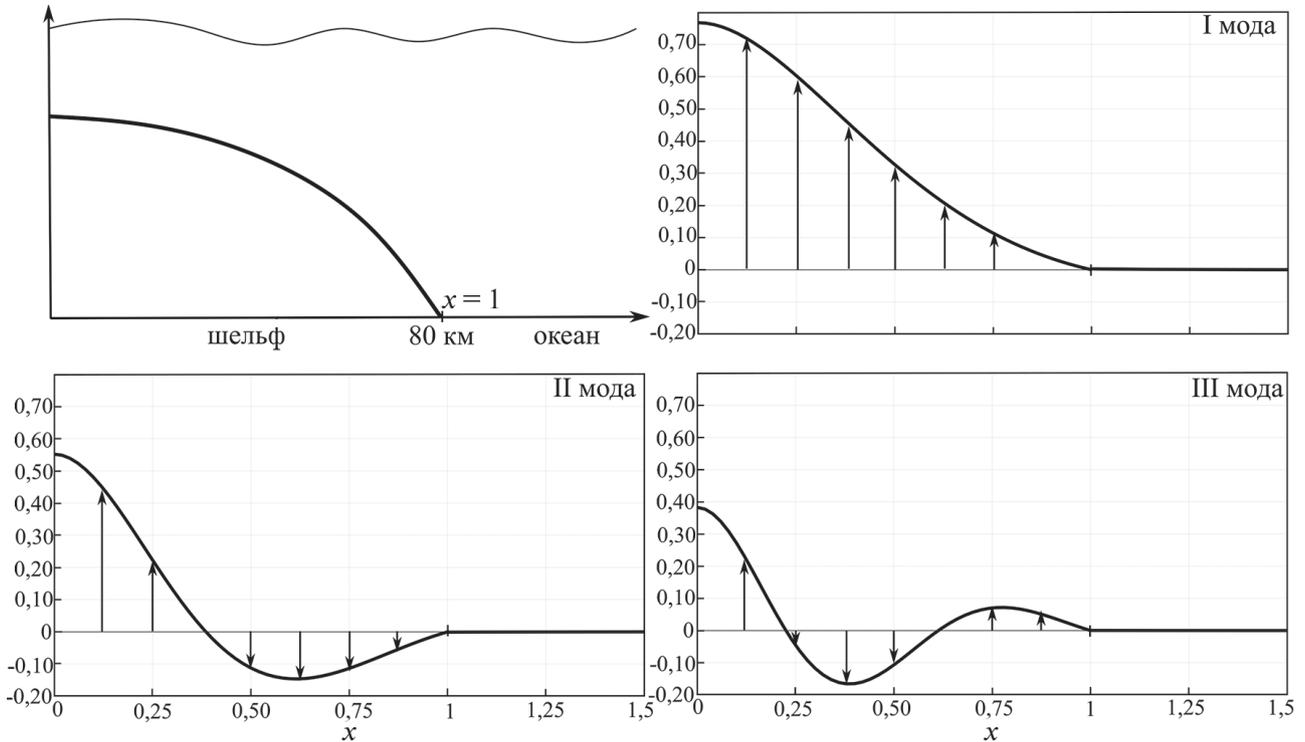


Рис. 5. Продольные скорости  $V$  (м/с) для первых 3 мод при  $k = 0,1$

Fig. 5. Longitudinal velocities  $V$  (m/s) for the first 3 modes at  $k = 0.1$

На рис. 5 показаны меридиональные составляющие скоростей течений, рассчитанные по формуле (2.18). Нетрудно заметить, что сшивка поля скорости при  $x = 1$  обеспечится за счет условия связи (2.7). Поперечная компонента скорости стремится к нулю:  $U \sim k \rightarrow 0$ . Тот факт, что сама функция  $\Psi$  остается конечной, не вызывает вопросов, так как физические величины определяются через производные с умножением на топографический множитель  $\exp(-2bx)$ . Первые три моды дают три профиля топографических течений, где  $x = 1$ , что соответствует ширине шельфа 80 км.

## 2.6. Фазовый портрет. Линии уровня

Функция потока, или массовая функция тока, имеет вид

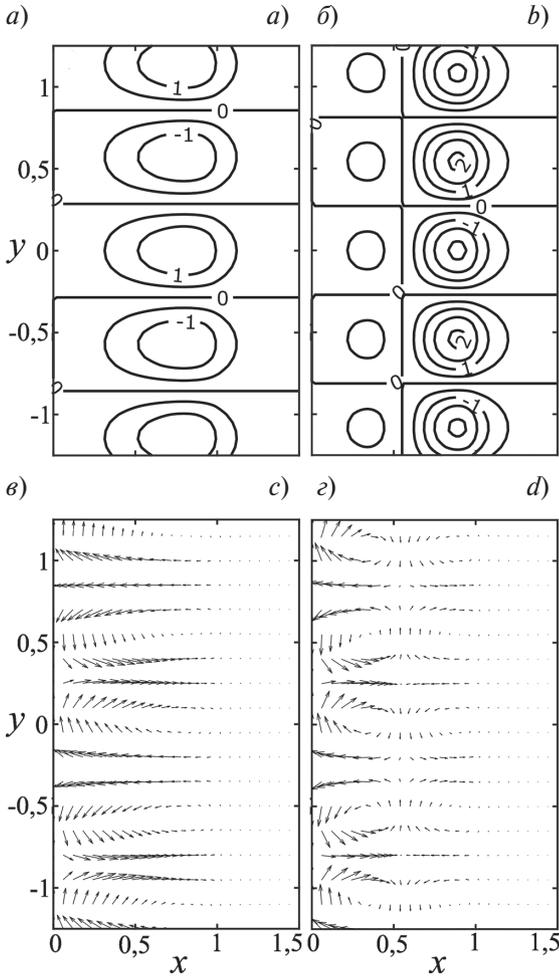
$$\begin{aligned} \Psi &= A \cos(ky) \sin(mx) \exp(b(x-1)), & 0 < x < 1, \\ \Psi &= A \cos(ky) \sin(m) \exp(-k(x-1)), & x > 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Составляющие скоростей определяются по формулам:

$$\begin{aligned} U &= Ak \sin(ky) b \sin(mx) \exp[b(-x-1)], & 0 < x < 1, \\ U &= A k \sin(ky) \sin m \exp[-k(x-1)] \exp(-2b), & x > 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} V &= A \cos(ky) [b \sin(mx) + m \cos(mx)] \exp[b(-x-1)], & 0 < x < 1, \\ V &= A (-k) \cos(ky) \sin m \exp[-k(x-1)] \exp(-2b), & x > 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

На рис. 6 показаны линии потока, рассчитанные по формуле (2.20). В расчетах для первой моды  $k = 5,5$ ,  $m = 2,8$ ; для второй моды  $k = 5,8$ ,  $m = 5,7$ . Видно, что в поле  $\Psi$  шельфовые волны имеют вид когерентных структур в виде концентрических окружностей с чередующимися значениями  $\Psi$ . В поле скоростей это соответствует вихревым структурам разной полярности. Это подтверждает тот факт, что шельфовые волны, распространяющиеся вдоль берега, оставляя его справа (в северном полушарии), проявляются в виде системы перемещающихся когерентных вихрей [32].



**Рис. 6.** Первая (а) и вторая (б) моды линий уровня потока и соответствующие вектора течений для первой (в) и второй моды (д). В расчетах для первой моды  $k = 5,5$ ,  $m = 2,8$ ; для второй моды  $k = 5,8$ ,  $m = 5,7$

**Fig. 6.** The first (a) and second (b) modes of the flow lines and the corresponding flow velocities for the first (c) and second modes (d). In calculations,  $k = 5.5$  and  $m = 2.8$  for the first mode;  $k = 5.8$ ,  $m = 5.7$  for the second mode

дольное волновое число стремится к нулю, в то время как поперечное волновое число стремится к некоей конечной константе.

Данный факт можно проверить численно прямым расчетом данного параметра для разных значений топографического параметра  $b$  или построить графики частоты для разных значений, убедившись в том, что они имеют общую касательную в нуле.

### 3. Обсуждение результатов и выводы

Специфика шельфовых топографических волн Россби состоит в том, что из-за ограниченности поперечного размера шельфа они становятся квазиодномерными в том смысле, что их поперечное волновое число  $m$  становится функцией продольного волнового числа  $k$ , то есть  $m = m(k)$ . Однако графический анализ, проведенный в работе [25], показал, что эта функциональная зависимость является слабой, а функция  $m = m(k)$  строго монотонна и изменяется в конечном диапазоне значений. На основании этих качественных выводов авторы [25] предложили считать квазиодномерные шельфовые волны Россби строго одномерными, полагая вместо функциональной зависимости  $m = m(k)$  брать некое характерное значение:

### 2.7. Автомоделность фазовой и групповой скорости в длинноволновом пределе от $b$

Классический длинноволновый предел волн Россби для фазовой скорости имеет вид  $C = -\beta L_r^2$ , где  $L_r$  — радиус деформации Россби. Из этой формулы следует, что чем больше  $\beta$ , тем больше фазовая и групповая скорость.

Длинноволновый предел для фазовой скорости топографической шельфовой волны Россби (2.6) в размерном виде имеет вид

$$C_n = \frac{2b}{m_n^2(0) + b^2} fL, \quad (2.23)$$

где индекс  $n$  — номер моды,  $b$  — топографический параметр (см. формулу (2.2)),  $fL$  — размерный множитель, определяемый географической широтой и шириной шельфа. При этом  $m_n(0)$  определяется из соотношения (2.5):

$$\tan m_n(0) = -\frac{m_n(0)}{b}. \quad (2.24)$$

Может показаться, что безразмерный множитель в выражении (2.23) является сложной зависимостью от топографического параметра  $b$ , и в результате мы не знаем, увеличивается или уменьшается фазовая и групповая скорость (в длинноволновом пределе) в зависимости от  $b$ . Возможно также, несколько неожиданным является тот факт, что безразмерное выражение является константой и вообще не зависит от  $b$ . А это означает, что мы можем рассчитать эти константы и, следовательно, для любой точки земного шара находить размерные фазовые и групповые скорости простым умножением на размерный множитель  $fL$ . Эти константы равны следующим значениям: для первой моды 0,4299, для второй моды 0,1403, для третьей моды 0,0613. Выпадение определенного параметра из функциональной зависимости обычно называют автомоделностью по данному параметру. Заметим, что автомоделность безразмерной фазовой и групповой скорости шельфовых волн Россби происходит в длинноволновом пределе. Необычность длинноволнового предела для шельфа состоит в том, что про-

$m = m_0$ . При этом оставался нерешенным вопрос: насколько велика ошибка данного приближения. Для ответа на него в данной работе найдены точные выражения для групповой скорости и кривизны дисперсионной кривой, а также произведено численное сравнение точных формул и приближенных.

Для фазовой скорости максимальное расхождение точных формул и приближенных составляет примерно 5%. Для групповой скорости расхождение уже около 19%. В частности, для первой моды групповая скорость в точке перегиба (максимальная отрицательная скорость) составляет значение 30,13 см/с, а приближенное значение равно 35,86 см/с. Для второй моды расхождение уменьшается до 7%, а для третьей — до 3%.

Анализ кривизны по точным формулам показал, что вторая точка перегиба для шельфовой волны отсутствует, и функциональная зависимость  $m(k)$  действительно является слабой.

Принципиально новым моментом в нашей работе является то, что нам удалось построить графики профилей топографических течений (первые три моды). При этом установлена некая автомодельность для экстремума скорости шельфовых течений от значений кривизны топографии. Максимальные скорости шельфовых течений определяются только широтой, где расположен шельф (зависимость от  $f$ ), и не зависят от крутизны топографии. Сам профиль течения естественно зависит от как от ширины шельфа, так и от крутизны топографии, но значение скорости течения в экстремуме (максимальное по модулю) обладает некой автомодельностью и не зависит от произведения ширины шельфа на крутизну топографии. Отметим также, что все сказанное верно для логарифмических масштабов или, что то же самое, для экспоненциального профиля топографии.

Расчеты функции потока показали, что шельфовые волны имеют вид когерентных структур в виде концентрических окружностей с чередующимися значениями. В поле скоростей это соответствует вихревым структурам разной полярности, т.е. шельфовые волны, распространяющиеся вдоль берега, оставляя его справа (в северном полушарии), проявляются в виде системы перемещающихся когерентных вихрей.

### Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 22-27-00004, при финансовой поддержке гранта СПбГУ № 94033410 и по теме государственного задания 0128-2021-0003.

### Funding

This work was financially supported by the RNF grant No. 22-27-00004, financial support of the SPbSU grant No. 94033410 and under the state assignment No. 0128-2021-0003.

### Литература

1. Allen J. Models of wind-driven currents on the continental shelf // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1980. 12, 389–433. doi:10.1146/annurev.fl.12.010180.002133
2. Mysak L.A. Recent advances in shelf wave dynamics // *Rev. Geophys.* 1980. Vol. 18. P. 211–241. doi:10.1029/RG018i001p00211
3. Brink K.H. Coastal-trapped waves and wind-driven currents over the continental shelf // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1991. Vol. 23. P. 389–412. doi:10.1146/annurev.fl.23.010191.002133
4. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане, в 2-х томах. М., Мир. 1981. 846 с.
5. Гневышев В.Г., Фролова А.В., Кубряков А.А., Собко Ю.В., Белоненко Т.В. Взаимодействие волн Россби со струйным потоком: основные уравнения и их верификация для Антарктического циркумполярного течения // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2019. Т. 55, № 5. С. 39–50. doi:10.31857/S0002-351555539-50
6. Гневышев В.Г., Фролова А.В., Колдунов А.В., Белоненко Т.В. Топографический эффект для волн Россби на зональном сдвиговом потоке // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2021. Т. 14, № 1. С. 4–14. doi:10.7868/S2073667321010019
7. Gnevyshev V.V., Frolova A.V., Belonenko T.V. Topographic effect for Rossby Waves on non-zonal shear flow // *Water Resour.* 2022. Vol. 49, N 2. P. 240–248. doi:10.1134/S0097807822020063
8. Hamon B. The spectrums of mean sea level at Sydney, Coff's Harbour, and Lord Howe Island // *J. Geophys. Res.* 1962. Vol. 67, Iss. 13. P. 5147–5155. doi:10.1029/JZ067i013p05147
9. Catayo R., Campos E.J. Application of wavelet transform in the study of coastal trapped waves off the west coast of South America // *Geophys. Res. Lett.*, 2006. Vol. 33. L22601. doi:10.1029/2006GL026395
10. Schulz W.J., Jr., Mied R.P., Snow C.M. Continental shelf wave propagation in the Mid-Atlantic Bight: A general dispersion relation // *J. Phys. Oceanogr.* 2012. Vol. 42. P. 558–568. doi:10.1175/JPO-D-11-0-98.1

11. Chen N., Han G., Yang J., Chen D. Hurricane Sandy storm surges observed by Hy-2a satellite altimetry and tide gauges // J. Geophys. Res. Oceans. 2014. Vol. 119. P. 4542–4548. doi:10.1002/2013JC009782
12. Белоненко Т.В., Волков Д.Л., Колдунов А.В. Шельфовые волны в море Бофорта по данным гидродинамической модели MITgcm. Океанология. 2018. Т. 58, № 6. С. 854–863. doi:10.1134/S0030157418060023
13. Woodham R., Brassington G.B., Robertson R., Alves O. Propagation characteristics of coastally trapped waves on the Australian continental shelf // J. Geophys. Res. Oceans. 2013. Vol. 118. P. 4461–4473. doi:10.1002/jgrc.20317
14. Сандалюк Н.В., Белоненко Т.В., Колдунов А.В. Шельфовые волны в Большом Австралийском заливе по данным спутниковой альтиметрии // Исследование Земли из космоса. 2020, № 6. С. 73–84. doi:10.31857/S0205961420050085
15. Wilkin J.L. Scattering of coastal-trapped waves by irregularities in coastline and topography. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution, 1988. 120 p. doi:10.1575/1912/4956
16. Huthnance J.M. On coastal trapped waves: analysis and numerical calculation by inverse iteration // J. Phys. Oceanogr. 1978. Vol. 8. P. 74–92
17. Huthnance J.M. Circulation, exchange and water masses at the ocean margin: the role of physical processes at the shelf edge // Prog. Oceanogr. 1995. Vol. 35. P. 353–431, doi:10.1016/0079–6611(95)80003–C
18. Sansón L.Z. Simple models of coastal-trapped waves based on the shape of the bottom topography // J. Phys. Oceanogr. 2012. Vol. 42. P. 420–429. doi:10.1175/JPO-D-11–053.1
19. Middleton J.F., Bye J.A. A review of the shelf-slope circulation along Australia’s southern shelves: Cape Leeuwin to Portland // Prog. Oceanogr. 2007. Vol. 75. P. 1–41. doi:10.1016/j.pocean.2007.07.001
20. Echevin V., Albert A., Lévy M., Graco M., Aumont O., Piétri A., Garric G. Intraseasonal variability of nearshore productivity in the Northern Humboldt Current System: The role of coastal trapped waves // Cont. Shelf Res. 2014. Vol. 73. P. 14–30. doi:10.1016/j.csr.2013.11.015
21. Ефимов В.В., Куликов Е.А., Рабинович А.Б., Файн И.В. Волны в пограничных областях океана. Л.: Гидрометеоздат, 1985. 250 с.
22. Huthnance J.M. On trapped waves over a continental shelf // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 69. P. 689–704.
23. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. 1st ed. Springer–Verlag, 1982. 636 p.
24. Ball F. Edge waves in an ocean of finite depth // Deep — Sea Res. Oceanogr. Abstr. 1967. Vol. 14. P. 79–88. doi:10.1016/0011–7471(67)90030–7
25. Buchwald V.T., Adams J.K. The propagation of continental shelf waves // Proc. R. Soc. Lond. A. 1968. Vol. 305, N 1481. P. 235–250. doi:10.1098/rspa.1968.0115
26. Гневышев В.Г., Травкин В.С., Белоненко Т.В. Топографический фактор и предельные переходы в уравнениях для субинерционных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 1. С. 8–23. doi:10.48612/fpg/92rg-6t7h-m4a2
27. Dukhovskoy D.S., Morey S.L., O’Brien J.J. Influence of multi-step topography on barotropic waves and consequences for numerical modeling // Ocean Modelling. 2006. Vol. 14(1–2). P. 45–60. doi:10.1016/j.ocemod.2006.03.002
28. Drivdal M., Weber J.E.H., Debernard J.B. Dispersion Relation for Continental Shelf Waves When the Shallow Shelf Part Has an Arbitrary Width: Application to the Shelf West of Norway // J. Phys. Oceanogr. 2016. Vol. 46(2). P. 537–549. doi:10.1175/jpo-d-15–0023.1
29. Clarke A.J. Observational and numerical evidence for wind-forced coastal trapped long waves // J. Phys. Oceanogr. 1977. Vol. 7. P. 231–247.
30. Mysak L.A., Leblond P.H., Emery W.J. Trench Waves // J. Phys. Oceanogr. 1979. Vol. 9(5). P. 1001–1013. doi:10.1175/1520–0485(1979)009<1001: TW>2.0.CO;2
31. Гневышев В.Г., Бадулин С.И. Об асимптотическом поведении пакетов линейных волн в многомерном случае. Эталонные решения. Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. 2–17. № 4. С. 73–80.
32. Травкин В.С., Белоненко Т.В., Кочнев А.В. Топографические волны в Курильском районе // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2022. Т. 19, № 5. С. 222–234. doi:10.21046/2070-7401-2022-19-5-222-234

## References

1. Allen J. Models of wind-driven currents on the continental shelf. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1980, 12, 389–433. doi:10.1146/annurev.fl.12.010180.002133
2. Mysak L.A., Recent advances in shelf wave dynamics. *Rev. Geophys.* 1980, 18, 211–241. doi:10.1029/RG018i001p00211
3. Brink K.H. Coastal-trapped waves and wind-driven currents over the continental shelf. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1991, 23, 389–412. doi:10.1146/annurev.fl.23.010191.002133

4. LeBlond P., Mysak L.A. Waves in the ocean. Elsevier Scientific Publishing Company. 1977. 602 p.
5. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Kubryakov A.A., Sobko Yu.V., Belonenko T.V. Interaction between Rossby Waves and a jet flow: Basic equations and verification for the Antarctic Circumpolar Current. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019, 55(5), 412–422. doi:10.1134/S0001433819050074
6. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Koldunov A.V., Belonenko T.V. Topographic effect for Rossby waves on a zonal shear flow. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2021, 14, 1, 4–14. doi:10.7868/S2073667321010019
7. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Belonenko T.V. Topographic effect for Rossby waves on non-zonal shear flow. *Water Resour.* 2022, 49, 2, 240–248. doi:10.1134/S0097807822020063
8. Hamon B. The spectrums of mean sea level at Sydney, Coff's Harbour, and Lord Howe Island. *J. Geophys. Res.* 1962, 67, 5147–5155. doi:10.1029/JZ067i013p05147
9. Camayo R., Campos E.J. Application of wavelet transform in the study of coastal trapped waves off the west coast of South America. *Geophys. Res. Lett.* 2006, 33, L22601. doi:10.1029/2006GL026395
10. Schulz W.J., Jr., Mied R.P., Snow C.M. Continental shelf wave propagation in the Mid-Atlantic Bight: A general dispersion relation. *J. Phys. Oceanogr.* 2012, 42, 558–568. doi:10.1175/JPO-D-11-098.1
11. Chen N., Han G., Yang J., Chen D. Hurricane Sandy storm surges observed by Hy-2a satellite altimetry and tide gauges. *J. Geophys. Res. Oceans*. 2014, 119, 4542–4548. doi:10.1002/2013JC009782
12. Belonenko T.V., Volkov D.L., Koldunov A.V. Shelf waves in the Beaufort Sea in a high-resolution ocean model. *Oceanology*. 2018, 58(6), 778–785. doi:10.1134/S0001437018060024
13. Woodham R., Brassington G.B., Robertson R., Alves O. Propagation characteristics of coastally trapped waves on the Australian continental shelf. *J. Geophys. Res. Oceans*. 2013, 118, 4461–4473. doi:10.1002/jgrc.20317
14. Sandalyuk N.V., Belonenko T.V., Koldunov A.V. Shelf waves in the Great Australian Bight based on satellite altimetry data. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* 2021, 57, 1117–1126. doi:10.1134/S0001433821090619
15. Wilkin J.L. Scattering of coastal-trapped waves by irregularities in coastline and topography. Ph.D. thesis, *Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution*, 1988, 120 p. doi:10.1575/1912/4956
16. Huthnance J.M. On coastal trapped waves: analysis and numerical calculation by inverse iteration. *J. Phys. Oceanogr.* 1978, 8, 74–92.
17. Huthnance J.M. Circulation, exchange and water masses at the ocean margin: the role of physical processes at the shelf edge. *Prog. Oceanogr.* 1995, 35, 353–431. doi:10.1016/0079-6611(95)80003-C
18. Sansón L.Z. Simple models of coastal-trapped waves based on the shape of the bottom topography. *J. Phys. Oceanogr.* 2012, 42, 420–429. doi:10.1175/JPO-D-11-053.1
19. Middleton J.F., Bye J.A. A review of the shelf-slope circulation along Australia's southern shelves: Cape Leeuwin to Portland. *Prog. Oceanogr.* 2007, 75, 1–41, doi:10.1016/j.pocean.2007.07.001
20. Echevin V., Albert A., Lévy M., Graco M., Aumont O., Piétri A., Garric G. Intraseasonal variability of nearshore productivity in the Northern Humboldt Current System: The role of coastal trapped waves. *Cont. Shelf Res.* 2014, 73, 14–30. doi:10.1016/j.csr.2013.11.015
21. Efimov V.V., Kulikov E.A., Rabinovich A.B., Fine I.V. Waves in the ocean boundary regions. *Leningrad, Gidrometeoizdat*, 1985, 250 p. (in Russian).
22. Huthnance J.M. On trapped waves over a continental shelf. *J. Fluid Mech.* 1975, 69, 689–704.
23. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. 1st ed. *Springer-Verlag*, 1982. 636 pp.
24. Ball F. Edge waves in an ocean of finite depth. *Deep-Sea Res. Oceanogr. Abstr.* 1967, 14, 79–88. doi:10.1016/0011-7471(67)90030-7
25. Buchwald V.T., Adams J.K. The propagation of continental shelf waves. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1968, 305(1481), 235–250. doi:10.1098/rspa.1968.0115
26. Gnevyshev V.G., Travkin V.S., Belonenko T.V. Topographic factor and limit transitions in the equations for subinertial waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 1, 8–23. doi:10.48612/fpg/92rg-6t7h-m4a2
27. Dukhovskoy D.S., Morey S.L., O'Brien J.J. Influence of multi-step topography on barotropic waves and consequences for numerical modeling. *Ocean Modelling*. 2006, 14(1–2), 45–60. doi:10.1016/j.ocemod.2006.03.002
28. Drivdal M., Weber J.E.H., Debernard J.B. Dispersion relation for continental shelf waves when the shallow shelf part has an arbitrary width: Application to the shelf west of Norway. *J. Phys. Oceanogr.* 2016, 46(2), 537–549. doi:10.1175/jpo-d-15-0023.1
29. Clarke A.J. Observational and numerical evidence for wind-forced coastal trapped long waves. *J. Phys. Oceanogr.* 1977, 7, 231–247.
30. Mysak L.A., Leblond P.H., Emery W.J. Trench waves. *J. Phys. Oceanogr.* 1979, 9(5), 1001–1013. doi:10.1175/1520-0485(1979)009<1001:TW>2.0.CO;2

*Гневъшев В.Г., Травкин В.С., Белоненко Т.В.*  
*Gnevyshev V.G., Travkin V.S., Belonenko T.V.*

31. *Gnevyshev V.G., Badulin S.I.* On the asymptotics of multidimensional linear wave packets: Reference solutions. *Moscow University Physics*. 2017, 72(4), 415–423. doi:10.3103/S0027134917040075
32. *Travkin V.S., Belonenko T.V., Kochnev A.V.* Topographic waves in the Kuril Region. *Sovremennye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa*. 2022, 19(5), 222–234. doi:10.21046/2070-7401-2022-19-5-222-234 (In Russian).

#### **Об авторах**

**ГНЕВЫШЕВ Владимир Григорьевич**, РИНЦ Author ID: 298530, ORCID ID: 0000-0001-6654-5570,  
Scopus Author ID: AAZ-6352–2021, WoS ResearcherID: 6507346231, avi9783608@gmail.com

**ТРАВКИН Владимир Станиславович**, РИНЦ Author ID: 1023273, ORCID ID: 0000-0002-7254-9313,  
Scopus Author ID: 57509420800, WoS ResearcherID: HPE-4729–2023, v.travkin@spbu.ru

**БЕЛОНЕНКО Татьяна Васильевна**, РИНЦ Author ID: 66026, ORCID ID: 0000-0003-4608-7781,  
Scopus Author ID: 6507005889, WoS ResearcherID: K-2162–2013, btvlisab@yandex.ru