ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 1–17

НЕБЕСА ПАДАЮТ: МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ

© 2023 г. Н. А. Вавилов[1,*], В. Г. Халин[2,], А. В. Юрков[2,***]**

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 12.01.2023 г.
После доработки 10.02.2023 г.
Принято к публикации 01.03.2023 г.

Математическое образование, как массовое образование, так и преподавание математики нематематикам на университетском уровне, находятся в ужасающем состоянии и быстро деградируют. Мы убеждены, что преподавание математики нематематикам должно быть полностью реформировано как в том, что касается его содержания, так и, в особенности, стиля. С традиционными подходами такой переход займет десятилетия, с непредсказуемыми результатами. Этого времени у нас нет. Появление систем Компьютерной Алгебры дает математическому сообществу шанс на изменение этой ситуации. В настоящей статье мы описываем один проект такого рода реформы, осуществленный в Санкт-Петербургском государственном университете.

Ключевые слова: математическое образование, математика для нематематиков, математика и компьютеры, системы компьютерной алгебры

DOI: 10.31857/S2686954323340015, **EDN:** DRVXKS

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы убеждены, что текущая ситуация с математическим образованием и растущая пропасть непонимания между математиками и профанами, даже наиболее образованными из них, представляют серьезную непосредственную опасность для нашей профессии и, в конечном счете, для всей человеческой цивилизации.

Проблема усугубилась с распространением компьютеров, которые могут решать подавляющее большинство традиционных вычислительных задач, где применялась математика. Используемые при этом математические пакеты и программы не содержат частей, доступных пользователю, что породило широко распространенную иллюзию, состоящую в том, что теперь конечным пользователям вообще не нужно изучать никакой математики.

Наша собственная оценка ситуации прямо противоположна. Сегодня, чтобы успешно функционировать в своих областях, большинству профессионалов нужно понимать гораздо больше математики, и притом гораздо более глубокой и современной математики. Обучать нематематиков этой новой математике в том же стиле, как мы это делали до сих пор, чисто физически невозможно.

Однако мы убеждены, что будучи частью проблемы компьютеры могут быть также ключевой частью ее решения. Мы описываем наш проект “Математика и Компьютеры”, который реализуется в Санкт-Петербургском государственном университете последние 15 лет. Его концепция состоит в том, чтобы сфокусироваться исключительно на понимании и больших идеях, заменяя значительную часть доказательств и фактических вычислительных навыков — кроме самых основных и тех, которые необходимы для понимания, — на компьютерные вычисления, эксперименты и визуализацию. Трудная часть работы над этим проектом состояла, разумеется, в том, чтобы создать систему нескольких сотен учебных задач, которые требуют одновременно математического и алгоритмического мышления. Незначительная часть этого опыта отражена в нашем недавнем учебнике [1].

Хотя мы обсуждаем в основном наш собственный преподавательский опыт в Петербурге, сама проблема представляется нам весьма общей и уже несколько десятилетий очевидна во всех технологически развитых обществах. Здесь можно вспомнить, например, лекцию Владимира Абрамовича Рохлина [2], 1981 ~~года~~ или статью Уилльяма Тер-

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра математики и информатики, Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет, Санкт-Петербург, Россия
**E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru*
***E-mail: vhalin@yandex.ru*
****E-mail: ayurkov@gmail.com*

стона [3], 1990 ~~года~~, которая начинается с констатации: Mathematics education is in an unacceptable state. Уже в то время интерес нематематиков к математическим курсам постоянно падал, см., например, [4, 5]. Однако за последние 10–15 лет, с тех пор как компьютеры изменили правила игры, все проблемы *драматически* обострились.

2. МАТЕМАТИКА В ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ

Начнем с нескольких истин, которые представляются нам самоочевидными:

• В духовном и интеллектуальном плане математика, вместе с другими высшими творческими искусствами, такими как музыка или изобразительное искусство, является *важнейшим* проявлением человеческой культуры как таковой.

• С другой стороны, в практическом плане мы живем в мире, которые создан математикой и наукой, в первую очередь *математическим естествознанием*.

• Не будет большим преувеличением утверждать, как это делал Освальд Шпенглер, что уровень цивилизации в огромной степени определяется уровнем ее математики.

К сожалению, эти простые факты редко – если вообще! – осознаются не только широкой публикой, в лице налогоплательщиков, предпринимателей и политиков, но даже философами, журналистами, эдукационистами и другими торговцами дискурсом (= discoursemongers).

В действительности, большинство вещей вокруг нас, включая нас самих, не могли бы существовать в нанешнем виде без науки, начиная просто с численности популяции человека как вида (и других синантропных видов животных таких как коровы, свиньи и овцы), которые на несколько порядков величины превосходят популяции любых других животных сопоставимой массы и которую было бы невозможно поддерживать без науки.

Точно так же без большого количества специалистов, глубоко понимающих математику и естественные науки невозможно просто поддерживать – не говоря уже о том, чтобы развивать! – многие из современных технологий.

В различные периоды своей истории математика *чрезвычайно* успешно способствовала развитию естественных наук, прежде всего астрономии и физики, а потом и других естественных и технических наук.

Мы убеждены, что сегодня математика *могла бы* сыграть аналогичную роль по отношению к наукам о жизни, таким как биология и медицина, но также и в лингвистике, психологии, экономике и т.д.

Сегодня у нас есть большая часть теоретических инструментов и вычислительных ресурсов необходимых для этого. Чего с нашей точки зрения не хватает, так это именно **осознания** со стороны тех, кто должен применять математику в соответствующих предметных областях. Они не знают математику, не понимают ее и, что самое главное, не понимают даже почему она им необходима – что математика это единственный возможный посредник между духом и действительностью.

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Сказанное выше объясняет абсолютно исключительную роль, которую математическое образование играет в функционировании общества. Жан Пьер Кахане следующим образом сформулировал эту мысль: in no other science has teaching and learning such social importance (цитируется по [6]).

Здесь нужно ясно различать следующие три уровня:

• Общее математическое образование – зрители;

• Математика для нематематиков – любители;

• Математика для математиков – игроки.

Из этих трех уровней обучение профессиональных математиков представляется нам с огромным отрывом наименее проблемным. Мы полностью согласны с Рохлиным в том, что обучение математике математиков – дело бесконечно более легкое, чем обучение математике нематематиков, см. [2]. Если Вы знаете, понимаете и любите свой предмет и если Вы честны со своими студентами, то не имеет никакого значения, насколько Вы искусный преподаватель, и что именно Вы рассказываете на занятиях, и то, как именно Вы это делаете. Если они *уже* интересуются математикой, можно делать что угодно, так как сильный и мотивированный студент все равно это поймет.

Однако, общаясь с широкими народными массами или с [будущими] профессионалами в других областях, необходимо постоянно осознавать, что мы работаем с ними на трех совершенно различных планах:

• Математика как часть общей культуры;

• Математика *как таковая*;

• Математика для конкретных приложений.

Основной недостаток традиционного математического образования состоит в том, что оно фокусируется почти исключительно на третьем аспекте, и пытается продавать математику как нечто, имеющее непосредственное практическое значение. Между тем, обычно те приложения, которые можно обсуждать на элементарных уровнях обучения являются наименее важным и наименее интересным аспектом, притом часто совершенно фиктивным.

С нашей точки зрения самый важный аспект в преподавании математики на элементарном уровне — это выработка и культивация **интеллектуальной честности.** Иными словами, способности отличать то, что мы понимаем, от того, что мы не понимаем. То, что было определено и имеет точный смысл, от того, что его не имеет. То, что именно говорится, от того, что имеется в виду. Правдоподобное от невероятного, истинное от ложного, доказанное от предполагаемого и т.д.

Еще один столь же важный аспект, это **гимнастика ума**, подготовка к решению **трудных задач** любого рода. С этой точки зрения, математика это просто тренировка мозга[1], позволяющая развить, упражнять и поддерживать высшие ментальные функции такие как внутреннее зрение, эстетический вкус, память, выдержка, концентрация, способность наблюдать, сопоставлять, обобщать и специализировать, извлекать следствия, прослеживать и строить цепочки аргументов и т.д.

Но на более высоких уровнях образования, в особенности при обучении профессионалов в других областях, все более важной становится именно выработка математического **стиля мышления**. ~~Т.е.~~ привычки начинать с первых принципов, брать простейшие возможные случаи и переходить ко все более общей ситуации опираясь на них, умения выражать одну и ту же мысль на разных языках и использовать аналогии, навыка символьных рассуждений, способности сжимать огромные общие куски рассуждений и оперировать с ними как с единым целым.

Если мы будем пытаться продавать специфические приложения, мы проиграем! Собственно, именно это сейчас и происходит, с совершенно разрушительными результатами.

4. УТИЛИТАРНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

Наше глубокое убеждение состоит в том, что утилитарный подход разрушает образование. Лучшее возможное образование совершенно бесполезно. Разумеется, это относится и к математическому образованию.

В Европе спор между сторонниками всеобъемлющего общего образования и приверженцами практически ориентированного образования не затихал в течение последних 5 веков. Достаточно вспомнить борьбу вокруг преподавания в школе классических языков, латыни и греческого. Разумеется, как мы упоминаем чуть дальше, это действительно огромная социальная и экономическая проблема.

Но сам по себе этот спор гораздо ~~гораздо~~ старше. Полемика между Мо Ди и Чжуан Чжоу остается столь же актуальной сегодня, как она была в их время, 24 века назад. Но, в любом случае, мы здесь целиком на стороне Чжуан Чжоу: все знают пользу полезного. Никто не знает пользы бесполезного.

С другой стороны, математика это форма искусства, работающая с *идеями*, см. [7], а как заметил Оскар Уальд, all art is quite useless. Совершенно поразительно, сколько раз слово “полезный” повторяется в “Апологии” Харди, многие десятки раз. Вот самый знаменитый фрагмент на эту тему, который, в частности, полностью применим и к образованию:

One rather curious conclusion emerges, that pure mathematics is on the whole distinctly more useful than applied. A pure mathematician seems to have the advantage on the practical as well as on the aesthetic side. For what is useful above all is *technique*, and mathematical technique is taught mainly through pure mathematics.

Проиллюстрируем мысль Харди на типичном примере. Часто между первоначальной идеей и последующим открытием, а потом между открытием и его техническим воплощением проходит довольно значительное время, десятилетия, если не столетия. Было бы невозможно *открыть* лазеры в природе, их нужно было *изобрести* на основе квантовой механики. В свою очередь, квантовая механика не могла бы возникнуть без предшествующего развития физики и математики, включая, в частности, комплексные числа, дифференциальные уравнения и матрицы.

Но, вводя комплексные числа, итальянские алгебраисты XVI века руководствовались какими угодно соображениями, любопытством, забавой, соперничеством — чем угодно, только не практическими приложениями. Они не имели в виду не только возможную роль комплексных чисел в обосновании квантовой механики и изобретении лазеров, но даже переменный ток или радио!

Если резюмировать все социальные и педагогические учения XX века одним словом, то таким словом будет “упрощенчество” = “ oversimplification”. Юрий Иванович Манин [8] язвительно комментирует эту ситуацию:

Глубинное внутренне противоречие рыночной метафоры состоит в том, что мы проецируем многомерный мир несравнимых и несовместимых степеней свободы на одномерный мир цен в денежном выражении. Этот одномерный мир в принципе нельзя сделать совместимым даже с основными отношениями порядка на различных осях; тем более нельзя его сделать совместимым с

[1] Когда нашего коллегу Тимоти О’Миру спросили “What kind of exercise do you prefer?”, он ответил: “Well, I’m exercising my brain”.

несуществующими или несравнимыми ценностями различных видов.

В этом смысле пример наиболее внутренне противоречивого использования рыночной метафоры дает выражение “свободный рынок идей”. На этом рынке продается одна-единственная идея: идея “свободного рынка”.

Точно так же, лозунг “полезного образования” пытается продать только одну идею, идею “полезности”.

5. МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШИРОКИХ НАРОДНЫХ МАСС: СОЦИОЛОГИЯ

В 1905–1915 ~~годах~~ в Санкт-Петербурге и других крупных городах империи были элитные школы, *гимназии*, студенты которых изучали алгебру по учебникам Дмитрия Александровича Граве, которые *начинались* с определения поля, комплексных чисел и всего такого и заканчивались теорией Галуа, серьезное изучение которой составляло содержание его следующего учебника, для университетов. К сожалению, математическая осведомленность менее привилегированных слоев населения была значительно ниже.

Вот как Александр Боровик описывает соответствующий выбор сегодня, см. [9], повторено в [10]:

Democratic nations, if they are sufficiently wealthy, have three options:

(A) Avoid limiting children’s future choices of profession, teach rich mathematics to every child – and invest serious money into thorough professional education and development of teachers.

(B) Teach proper mathematics, and from an early age, but only to a selected minority of children. This is a much cheaper option, and it still meets the requirements of industry, defence and security sectors, etc.

(C) Do not teach proper mathematics at all and depend on other countries for the supply of technology and military protection.

Which of these options are realistic in a particular country at a given time, and what the choice should be, is for others to decide.

I am only calling a spade a spade.

Нам не очевидно, как это связано с демократией – или даже богатством – в конце концов опция (B) не намного дешевле. Но такой выбор несомненно стоит перед каждым государством.

В 1990-х годах один из нас преподавал курс *Matematica generale* классу из 200 студентов экономики и менеджмента в *Università commerciale Luigi Bocconi*. В то время для него было полным шоком встретить в одном и том же классе студентов экономических училищ *ragioneria*, которые никогда до этого не видели логарифмов, и студентов научных лицеев *liceo scientifico*, которые непринужденно обращались с кратными интегралами. В последние десятилетия Россия стремительно развивалась в том же направлении, от опции (A) к опции (B), так что такого же рода отсутствие единообразной подготовки стало обычным делом на некоторых факультетах нашего университета. Но, опять же, это скорее социальный, а не экономический выбор.

Фактор, который смягчает последствия этой ситуации в России и позволяет легко набирать превосходных студентов **математиков**[2], это система великолепных физико-математических школ, действующих в крупных российских городах, начиная с Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска и т.д. Первые такие школы были созданы Андреем Николаевичем Колмогоровым, Дмитрием Константиновичем Фаддеевым, Михаилом Алексеевичем Лаврентьевым и другими около 60 лет назад и они продолжают оставаться *с огромным отрывом* лучшей, наиболее функциональной и эффективной компонентой всей российской системы образования. *Президентский Лицей* 239 является для Петербурга тем же, чем является *Lyceé Louis-le-Grand* для Парижа, со всеми социальными следствиями этого факта. Базовые принципы, история и современное состояние физико-математических школ в России подробно обсуждаются в недавней статье Николая Николаевича Константинова и Алексея Львовича Семенова [11].

Однако все наши основные инстинкты подсказывают, что единственный правильный ответ на этот вопрос это самая решительная форма опции (A). Мы верим, что всестороннее и глубокое *общее* образование в области математики и точных наук было бы отличной идеей. Это никогда ранее не осуществлялось в истории человечества, и мы полностью согласны с Рохлиным [2] в том, что:

Как-то мы интуитивно чувствуем, что это будет хорошо, если наши дети и внуки будут приобщены к логической культуре, к математической культуре, будут лучше понимать точные науки.

6. МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШИРОКИХ НАРОДНЫХ МАСС: ПРЕПОДАВАНИЕ

Сегодняшнее преподавание математики на элементарном уровне обременено слишком жесткой традицией и консерватизмом, из-за которых оно больше не отвечает требованиям хотя бы XVI века. Для некоторых это может прозвучать слишком драматично, но с точки зрения профессионального математика это именно так. Существующие учебные программы ориентированы главным образом на выработку [бесполезных]

[2] Ну, в действительности и математиков, и специалистов по теоретическим компьютерным наукам и наукам о данных, см. https://math-cs.spbu.ru

вычислительных навыков и механическое использование небольшого количества [устаревших] стандартных алгоритмов.

В прошлом подобное рукоделие имело неоспоримую ценность, но сегодня сохранение древних ремесел в массовом обучении выглядит довольно странно. Это можно сравнить с получением огня трением: вам, возможно, доведется использовать этот навык один раз в жизни — скорее всего, нет! — но было бы глупо практиковаться в нем каждый день.

Разумеется, точные границы здесь не очевидны. Нужно ли запоминать таблицу умножения 100 × 100? А таблицу умножения 10 × 10? Наша собственная точка зрения здесь такова. Полезно понимать идею длинного умножения — с тем, чтобы ясно представлять себе сравнительную величину чисел, логарифмический характер десятичной записи числа и т.д. [— ну или осознание того, что умножая два 8-значных числа, мы, скорее всего, проделываем операцию, которую никто до нас никогда не делал, чтобы получить некоторое представление о вероятности]. В то же время, абсолютно бессмысленно пытаться развивать соответствующий навык — никому из учеников не придется в будущем производить подобные вычисления вручную, просто потому что любое устройство делает это быстрее, эффективнее и надежнее.

6.1. Учебные программы

По отношению к фактической внутренней архитектуре математики и ее современным приложениям выбор содержания школьных программ представляется весьма причудливым и совершенно произвольным. Разумеется, во многих случаях подобные странности имеют историческое объяснение, иногда несколько таких объяснений.

Так, например, абсолютное доминирование **тригонометрии** легко объясняется потребностями баллистики и навигации. Вот что говорит по этому поводу Александр Боровик [10]:

It is worth to remember that in the first half of the 20th century, school mathematics curricula in many nations were dictated by the Armed Forces' General Staffs — this is why trigonometry was the focal point and apex of school mathematics: in the era of mass conscription armies, it was all about preparation for training, in case of war, of a sufficient number of artillery and Navy officers and aircraft pilots. With this legacy, we still cannot make transition to a more human mathematics.

Это очевидно, и очевидно верно. Однако это все еще не объясняет того, почему тригонометрия преподается совершенно допотопным образом, без комплексных чисел.

Разумеется, вся школьная тригонометрия становится непосредственно очевидной, если объяснить школьнику, что формулы сложения для косинуса и синуса являются *в точности* формулами умножения комплексных чисел — в различных национальных традициях это называется **формулами Эйлера**, **формулами де Муавра**, и т.д. Когда одному из нас было 10—11 лет, его отец (инженер электротехник) объяснил это ему примерно за полчаса.

Однако в школах это делается абсолютно не так. Вместо этого детей принуждают заучивать наизусть десятки частных случаев, связь которых между собой совершенно неочевидна, никто не объясняет истинного значения знаков и т.д. Все это просто требуется механически запомнить без всякого понимания.

Одну из возможных причин такой ситуации упоминает Анри Лебег [12]. Он утверждает, что все это делается из чистого садизма, просто чтобы мучить и унижать детей. Однако Юрий Неретин [13] предлагает гораздо более зловещее объяснение. Он считает, что это делается абсолютно сознательно, как часть рыночной стратегии по продвижению специальной области знаний, *элементарной математики*.

Бизнес план здесь состоит примерно в следующем:

- использовать математику как барьер и фильтр — так называемая *вступительная математика*, или *экзаменационная математика*.
- создать рынок частных или получастных образовательных услуг — подготовительные курсы, репетиторы и тому подобное + соответствующая литература, сайты, программы и т.д.

Более того, Неретин замечает, что так как эта новая область знаний не имеет вообще никакого отношения к какой-либо другой области математики, чистой или прикладной, то человек в совершенстве овладевший *вступительной математикой* не приобретает при этом никаких знаний или навыков хоть каким-либо образом полезных для других разделов математики или наук.

А теперь представьте себе добрые чувства, которые должны возникать у бедных детей и их родителей по отношению к *такого рода* математике! Что хуже всего, многие из них убеждены, что вот этот гибрид военной подготовки, бухгалтерского учета и чистописания и представляет собой настоящую математику.

6.2. Ложная строгость и ошибочные доказательства

Во многих случаях эдукаторы упорствуют в использовании устаревших форм и способов преподавания. Уже более половины века всем математикам очевидно, что один из разделов школьного курса, преподавание которого необходимо *полностью* пересмотреть, это геометрия. Такого рода реформа не устранила бы геометрию, как многие опасаются, а наоборот усилила и оживила бы ее! На самом деле, подавляющее большинство школьных геометрических доказательств в духе Эвклида, которые школьников заставляют запоминать под лозунгом мнимой строгости, неполны, неверны и непонятны.

В то же время, как все мы знаем, подход XVII века в духе де Ферма и Декарта устраняет все такого рода сложности и делает геометрию идейно прозрачной, открытой для приложений и полезной. Уже 40–60 лет назад каждому грамотному математику было очевидно, что именно так надо преподавать геометрию в массовой школе. Процитируем по этому поводу Жана Дьёдонне [14], который был пылким сторонником такого подхода:

For the trained mathematician of today, it is a triviality that the fundamental theorems of Euclidean geometry (in any number of dimensions, by the way) are very easily derived from the concept of a vector space equipped with a positive definite quadratic form. Why shouldn't this method be made available (in two or three dimensions) to high school students instead of the incredible, apparently irrelevant dissections of triangles, where every step is made to appear to be a conjurer's trick?

Но с тех пор так ничего и не изменилось.

Что еще гораздо хуже, многие из так называемых "доказательств" в школьных учебниках геометрии – включая доказательства большинства результатов о длинах, площадях и объемах – являются фейковыми или даже прямо ошибочными. Этому посвящены некоторые из наиболее ярких фрагментов в книгах Лебега и Гротендика [12], [15]. В 1981 году Рохлин [2] упоминает об этом вскользь, как о чем-то общеизвестном:

Вот когда я учился в школе (возможно это и сейчас так), мне объясняли, что такое площадь круга. Мне говорили, что площадь круга – это предел некий, и потом что-то писали, говорили, и получали какую-то формулу для площади круга. Трудно было понять, что там рассказывали, а когда я стал математиком, то мне стало совершенно ясно, почему это было трудно понять – потому что все это сплошной вздор.

Снова, с тех пор ровно ничего не изменилось.

6.3. Элементарная математика

Что нас больше всего раздражает в жрецах так называемой "элементарной математики", так это их крючкотворство и мелочный педантизм. Нам, воспитанным профессиональными математиками, все их дебаты кажутся совершенно лишенными смысла и крайне искусственными.

Российские образовательные сети полны обсуждений следующего типа. Когда вы считаете, сколько всего бутылок пива в 3 коробках по 6 бутылок в каждой, следует умножать 3×6 или 6×3? Оказалось, есть какой-то сакральный порядок, утвержденный неким ареопагом несколько столетий назад, и они фактически **снижают оценки** бедным детям, которые умножают 3 на 6 в другом порядке, даже получая при этом правильный ответ!!! С тем, что мы, разумеется, никогда не могли запомнить, какой порядок операций здесь считается правильным.

Ву Хун-Си [16] следующим образом описывает эту скандальную ситуацию:

One of the flaws of the school mathematics curriculum is that it wastes time in fruitless exercises in notation, definitions, and conventions, when it should be spending the time on mathematics of substance. Such flaws manifest themselves in assessment items which assess, not whether students know real mathematics, but whether they could memorize arcane rules or senseless conventions whose raison-d'être they know nothing about.

В старших классах на смену этому приходит вся эта суета, связанная с тем, чтобы оставаться в области вещественных чисел, все эти домогательства на тему "области допустимых значений" и тому подобное. Как замечает по этому поводу Феликс Клейн [17], элементарная математика такого рода это чрезвычайно позднее изобретение, не раньше последней четверти XIX века. До этого классики XVIII и XIX веков всегда работали с комплексными числами.

Юрий Неретин [13] заключает: упомянутая наука вызывает у нормального молодого человека лишь скуку и отвращение, и что несравненно хуже – отупение.

7. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА: ЧЕМ ОНА ЯВЛЯЕТСЯ СЕГОДНЯ

Ситуация с математической подготовкой специалистов других областей на университетском уровне столь же безблагостна. Очевидно, что во многих административных отношениях она не столь одиозна как массовое математическое образование. Но в университетских курсах для инженеров, экономистов и т.д. доминирует устаревшая традиция, которая часто делает преподавание математики на этом уровне еще менее осмысленным с точки зрения содержания.

Исторически все эти курсы "высшей математики" это просто ухудшенные (или, как говорит Рохлин, "испорченные") курсы для математиков начала XX века, которые сами были ухудшенными курсами анализа XIX века. Все они начинаются с тех же последовательностей, рядов, пределов и потом переходят к тем же производным, интегралам и дифференциальным уравнениям, причем делается это самым бесплодным и поверхностным образом.

Даже элементарные учебники анализа, в тот момент, когда они пытаются начинать что-то доказывать, изобилуют прямыми математическими ошибками [18]. С тем, что учебники “высшей математики” обычно еще гораздо хуже, так как из них убраны все более глубокие теоремы и все математически интересные примеры, что делает остающиеся объедки еще более неаппетитными, скучными и неудобоваримыми[3].

Традиционные математические курсы для нематематиков — не только абсолютно застойные и бесплодные курсы математического анализа, но и большая часть архаичных сервисных математических курсов линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и дискретной математики — сфокусированы почти исключительно на механической наработке рудиментарных вычислительных навыков, без какого-либо серьезного понимания подлинной структуры предмета, его приложений, его текущего состояния или более широкого контекста.

Приведем яркую иллюстрацию того, насколько рабски учебники “высшей математики” следуют традиционным курсам для математиков. Мы были потрясены, увидев в учебнике по математике для *философов* тригонометрические подстановки, производную функции $x \mapsto x^x$ и тому подобное. Мы осознаем, что идея функториальности и даже цепное правило могут быть чрезвычайно полезны для философов. Но мы не видим никакого смысла в том, чтобы обучать их конкретным *техническим* трюкам вычисления производных и интегралов, суть которых они все равно не смогут понять и применять которые им никогда не придется.

Как и в школе, в этих курсах исступленно призывают к построению “оснований” и (мнимой) “строгости”. Одним из таких совершенно искусственных препятствий является “теория пределов”. Упор на пределы создает концептуальные трудности для многих студентов и совершенно не нужен ни для изложения самого анализа, ни для каких-либо его приложений[4]. Вот что говорит по этому поводу Рохлин [2]:

... пределы — это самая трудная часть курса для понимания и, что самое интересное, — совершенно ненужная. И дифференциальное исчисление, и интегральное исчисление, и, вообще, всю классическую математику, я уже не говорю о математике конечной, прекрасно можно изложить без пределов. Более того, они там совершенно не нужны. Это совершенно чужеродное явление, чужеродный предмет, который был внесен в эту область людьми, стремившимися *обосновать* анализ.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ДРУГИЕ ОБОСНОВАНИЯ

Мы уверены, что все преподавание математики нематематикам должно быть полностью реформировано. Мы не понимаем, почему оно должно оставаться просто ухудшенной, как по содержанию, так и по стилю, версией преподавания математики математикам.

8.1. Доказательства в обучении

Традиционно утверждается, что большинство результатов, которые формулируются в элементарных курсах, следует сопровождать полными доказательствами. Такая точка зрения представляется нам безнадежно устаревшей, нереалистичной и лицемерной.

В действительности дело обстоит следующим образом. Наличие или отсутствие доказательств никак не влияет на доверие студентов к самим результатам. Мы думаем, что основная роль доказательств в лекциях и учебниках для нематематиков состоит в следующем:

- Убедить студента в том, что он правильно понимает формулировку.

- Уточнить смысл результата и его связь с другими результатами.

При обучении профессиональных математиков доказательства могут иметь и другие функции:

- Отработать общие приемы математических рассуждений (индукция, редукция, разбиение на случаи, общее положение, специализация, ...) и стандартную технику в какой-либо конкретной области.

- Выработать привычку и вкус к точным рассуждениям как таковым, а также тренировать привычку сразу отличать предположения, свидетельства и догадки от твердо установленных фактов.

- Как говорят в Кембридже, to illustrate some of the tedium.

Все эти цели *можно* ставить перед собой и при обучении нематематиков — впрочем, особенно при реализации последней из них, следует проявлять некую умеренность!

[3] То, что Питер Тейлор [19] говорит в отношении школьного куррикулума, в еще большей степени относится к обычным университетским курсам: “The secondary-school mathematics curriculum is narrow in scope and technical in character; this is quite different from the nature of the discipline itself”.

[4] Сама эта дискуссия тоже не нова. Уже в “Луши Чуньцю”, составленном не позднее III века до нашей эры, упоминается, что настоящий ученый не знает пределов.

В большинстве случаев доказательства в учебной литературе, особенно длинные, плохо структурированные и чисто вычислительные, лишь *дезориентируют* учащегося, затемняя смысл и затрудняя понимание. В научных статьях плохие доказательства лучше, чем их отсутствие, но в преподавании дело обстоит прямо противоположным образом.

8.2. Другие свидетельства

Что, как нам кажется, многие математики не осознают, так это то, что в нынешних (“современных”) формах изложения математики нет ничего сакрального. То, как мы сегодня организуем и записываем наши доказательства, является столь же временным и исторически обусловленным, как и все остальное. С точки зрения целей образования наши сегодняшние “доказательства” ничем не лучше древнеегипетских “доказательств”, древнекитайских “доказательств”, древнеиндийских “доказательств” – или, если уж на то пошло, древнегреческих “доказательств”, – они все просто *разные*. И, несомненно, все наши нынешние стандарты рассуждения и изложения столь же исторически преходящи, как и все эти более ранние формы.

Традиционное доказательство, и тем более формализованное доказательство – это не единственный способ понять математический результат, и даже для профессионального математика это чрезвычайно редко *лучший* способ. Есть действительно остроумные доказательства, проникающие в суть вещей и дающие нам большую власть над материалом – *такими* доказательствами необходимо дорожить.

Но как правило, чтобы понять утверждение, гораздо полезнее смотреть на примеры, частные случаи, следствия, экспериментальные подтверждения, эвристику, аналогии, приложения, картинки и т. д. – даже профессионалам все это обычно говорит гораздо больше об истинной природе математического результата, чем большинство доказательств. Тем более студентам!

Всего 100–150 лет назад многие математики *утверждали*, что они проверяют доказательства всех результатов, на которые ссылаются[5]. Сегодня подобное утверждение прозвучало бы в лучшем случае патетически. Нам приходится все больше полагаться на чужие работы, и это дорога с односторонним движением. Распределение доверия становится такой же необходимостью в математике, как и во всех других областях, см. [20]:

In all these settings, modern computational tools dramatically change the nature and scale of available evidence. Given an interesting identity buried in a long and complicated paper on an unfamiliar subject, which would give you more confidence in its correctness: staring at the proof, or confirming computationally that it is correct to 10,000 decimal places?

Смешно притворяться, что студенты могут соответствовать тем требованиям, от которых мы сами давно отказались.

9. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА: ЧЕМУ СЛЕДУЕТ УЧИТЬ?

Наш короткий ответ на вопрос в заголовке этого параграфа состоит в том, что мы не знаем – и никто не знает! Есть несколько возможных ответов, вот те, которые приходится слышать чаще всего:

- Тому же, чему всегда – пределы, собственные значения, whatever, ...
- Тому, что сегодня используется в соответствующей предметной области, – обычно это нечто промежуточное между “тому же, чему всегда” и “ничему”.
- Ничему – и это не шутка! Подобная точка зрения находит все больше сторонников!
- Математике математиков.

Наш собственный ответ состоит в том, что необходимо учить всех математике в том виде, как мы, математики, ее понимаем. Тому, что мы сами считаем в ней важным – языку, общим понятиям, которые позволяют усвоить дальнейшие понятия, и, прежде всего, самому математическому мышлению: базовой технике, наиболее продуктивным соображениям и способам рассуждений, классическим конструкциям и т.д.

В то же время, в том что касается собственно содержания курсов, мы считаем, что не имеет большого значения, чему именно мы учим. Никто не знает, что именно будет использоваться в той или иной предметной области – разумеется, мы не знаем, но, как мы уже говорили, никто не знает.

Мы уверены, что для того, чтобы наука и технология развивались, совершенно необходимо, чтобы профессионалы в этих областях видели и понимали больше математики, более продвинутой математики – и, прежде всего, более содержательной математики, как классической, так и современной. Но учить их надо совершенно *иначе*, фокусируясь на концептуальных аспектах, **понимании**, приложениях, а не на технических деталях доказательств или конкретных вычислительных навыках.

Иными словами, мы считаем совершенно *безрассудными* первые три из приведенных выше ответов, и особенно последний из них, предлагаю-

[5] Действительно ли они это делали, это совсем другая история. Мы уверены, что нет [18].

щий полностью упразднить изучение математики и переложить все вычисления на компьютеры. Ровно наоборот, нужно учить неспециалистов более разнообразной и более глубокой математике, чем это делается сегодня.

10. МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРЫ

Уже несколько раз по разным поводам мы цитировали следующее наблюдение Дорона Зайлбергера [21]:

The computer has already started doing to mathematics what the telescope and microscope did to astronomy and biology.

Мы согласны с этим чуть более, чем полностью! На самом деле, мы убеждены, что математики сегодня имеют лучший доступ к математической реальности, чем большинство экспериментальных наук к физической реальности, см. [22, 23]. И мы склонны согласиться с Боровиком [24] в том, что кажущаяся неэффективность математики в биологии и некоторых других приложениях *может* объясняеться тем, что необходимая математика просто слишком велика для индивидуального человеческого ума.

10.1. Математика для пользователя

Компьютеры *уже* целиком изменили все приложения математики и то, как большинство пользователей будут применять математику в любом обозримом будущем. Нужно просто честно признаться себе, что *никто* из наших студентов *никогда* не будет решать системы линейных уравнений, обращать матрицы, вычислять интегралы или строить графики функции *вручную*, кроме как собственно на занятиях в классе. Но тогда зачем настаивать на том, чтобы они делали это без использования *вычислительных машин* в классе?

Говорят, что мать Карла Фридриха Гаусса могла наблюдать фазы Венеры и некоторые спутники Юпитера невооруженным глазом. К сожалению, подавляющее большинство обычных людей не обладает подобной остротой зрения и им приходится прибегать к помощи *увеличительных машин*.

Это ясно всем пользователям в соответствующих областях, и столь же ясно нашим студентам. Но мы все еще предпочитаем делать вид, что занимаемся чем-то полезным, скармливая им плохо пережеванный картон, который им не нужен и который они все равно не могут переварить. Поэтому совершенно естественно, что многие пользователи начинают выражать недовольство, притом все громче и громче.

В последние годы мы слышали не от одного инженера, и притом не от каких-то шарлатанов, а от серьезных специалистов, что [всех] студентов-инженеров больше вообще не нужно учить математике, а только компьютерам. Мы знаем, что они ошибаются и что даже сегодняшние отсталые курсы математики, при всех своих несовершенствах, лучше, чем ничего. А настоящий продуманный курс содержательной математики — **математики математиков** — начал бы Золотой век в некоторых предметных областях. Но дело в том, что решать-то будут они!

10.2. Математика для игроков

Есть еще один чрезвычайно важный аспект, который мы здесь вообще не упоминаем, но который в самое ближайшее время полностью изменит всю картину.

А именно, большинство математиков склонны резко недооценивать, в какой мере развитие математики определяется внешними обстоятельствами, в первую очередь доступными вычислительными ресурсами. Но независимо от того, воспринимаем мы это или нет, вся математика сегодня находится в процессе грандиозной метаморфозы, вероятно, величайшей в своей истории.

Уже сегодня развитие компьютеров и систем компьютерной алгебры сильнейшим образом влияет на исследования во многих областях самой чистой математики, таких как теория групп, комбинаторика, теория чисел, коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия и т. д. Можно ожидать, что в ближайшем будущем это влияние распространится на всю чистую математику и приведет к переоценке всех ценностей: радикальному пересмотру направлений и стиля исследований.

11. СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Для нас очевидно, что сегодня учить студентов в области естественных наук и инженеров считать производные и интегралы, решать алгебраические или дифференциальные уравнения, перемножать или обращать матрицы вручную и тому подобное — это пустая трата времени. Эти навыки так же устарели, как использование логарифмической линейки или таблицы логарифмов.

На сегодняшний день стандартными инструментами для всех такого рода вещей являются **CAS общего назначения** = системы компьютерной алгебры. Есть огромное количество низкоуровневых продуктов с весьма ограниченным функционалом. Существует также довольно много **специализированных CAS**, которые очень хороши в некоторых вещах, таких как полиномиальные вычисления или линейная алгебра, но близко не охватывают весь спектр символьной математики.

Если отбросить те системы, которые устарели, недостаточно эффективны, больше не поддерживаются, слишком сложны или слишком дороги, не имеют удобного внешнего интерфейса или не поддерживают графику, у нас остается удивительно ограниченный выбор, по сути, всего четыре продукта: `Axiom`, `Maple`, `Mathematica` и `SageMath`.

Все эти четыре системы очень ~~очень~~ хороши. Все они являются, в первую очередь, языками программирования чрезвычайно высокого уровня, чья выразительная мощь приближается к фрагментам естественного языка. Все они могут выполнять *все* обычные вычисления, все, что нематематик, вероятно, увидит в *любом* обычном современном приложении.

Сегодня, обучая продвинутых компьютерщиков или математиков, мы, вероятно, предпочли бы `Axiom` или `SageMath`. Однако по целому ряду серьезных причин при обучении нематематиков приходится выбирать между `Maple` и `Mathematica`, и такой выбор является исключительно вопросом вкуса и удобства. В наших курсах мы использовали *оба*, но по ряду *внематематических* причин в конечном итоге остановились на Mathematica.

12. КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА: ПЕРВЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Обычно мы начинали наш курс с дюжины предметных иллюстраций того, что такое на самом деле математика и какую роль может играть в ней компьютер. Фактические примеры менялись более-менее каждый год, и сейчас мы воспроизводим некоторые типичные задачи, которые мы показывали нашим студентам на первых лекциях, в качестве разминки для нашего курса.

12.1. Контрпример Элкиса

Разумеется, все наши студенты слышали о проблеме Ферма. Поэтому мы спрашивали у них, слышали ли они о том, что Эйлер предложил следующее широкое обобщение этой задачи. А именно, он утверждал, что при $m \geq 4$ уравнение

$$x^m + y^m + z^m = u^m$$

не имеет решений в натуральных числах. Точно так же, при $m \geq 5$ уравнение

$$x^m + y^m + u^m + v^m = z^m$$

не имеет решений в натуральных числах и т.д.

Однако в 1988 ~~году~~ Ноам Элкис [25] обнаружил, что

$$\begin{gathered} 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = \\ = 180630077292169281088848499041 = \\ = 20615673^4. \end{gathered}$$

Разумеется, без владения довольно серьезной теорией чисел и алгебраической геометрией нахождение такого решения на домашнем компьютере дело совершенно безнадежное.

Однако подобный контрпример для пятых степеней

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 61917364224 = 144^5$$

за несколько часов может найти на домашнем компьютере любой студент просто методом перебора.

12.2. Рамануджан для низколобых

Много историй могут рассказать нам многочлены. Воспроизведем поразительное 6-10-8 тождество Рамануджана, см. [26]. Положим

$$\begin{aligned} f_n(x,y) = (1+x+y)^n + (x+y+xy)^n - \\ - (1+x+xy)^n - (1+y+xy)^n + \\ + (1-xy)^n - (x-y)^n \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда

$$64 f_6(x,y) f_{10}(x,y) = 45 f_8(x,y)^2$$

Разумеется, это снова можно доказать посредством грубой силы, просто раскрывая скобки и вычисляя обе части этого равенства:

$$\begin{gathered} 46080x^2y^2 + 322560x^3y^2 + 887040x^4y^2 + \\ + 1128960x^5y^2 + 241920x^6y^2 - \ldots \end{gathered}$$

В некотором смысле тождества Рамануджана самые необычные, так как даже зрелому математику часто трудно догадаться, что именно происходит внутри. Но, чтобы произвести впечатление на студента, обычно достаточно просто любого из тождеств Лиувилля или даже следствий тождеств Ньютона—Варинга.

12.3. Надувательство высокой точности

Обычно мы показывали пару примеров, иллюстрирующих различие математической и вычислительной точек зрения и абсолютную необходимость вычислений бесконечной точности.

Например, $e^{\pi\sqrt{163}}$ настолько близко к целому числу, что даже вычисление с 12 знаками после запятой все еще не позволяет сказать, целое это число или нет:

$$262537412640768743.999999999999$$

Разумеется, это только выглядит странным. В действительности каждому образованному математику ясно, что здесь есть очевидное объяснение, состоящее в том, что кольцо $\mathbb{O}_{-163}$ является областью главных идеалов. Числа $e^{\pi\sqrt{67}}$ и $e^{\pi\sqrt{43}}$ тоже очень близки к целым, хотя, конечно, не с такой поразительной точностью.

12.4. BBP-формулы

Еще одной вершиной компьютерной математики является формула, позволяющая вычислять любую *шестнадцатеричную* цифру π отдельно, независимо от вычисления предыдущих, см. [27, 28]:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right).$$

12.5. Обращение 1000×1000 *матрицы*

Как еще один *тапас* мы генерировали случайную вещественную 1000 × 1000 матрицу с коэффициентами, скажем на отрезке [−10, 10], с машинной точностью. А затем обращали ее, с машинной точностью, что обычно занимало 3–4 ~~секунды~~. Затем мы упоминали, что общее количество произведенных при этом численных вычислений намного превышает все численные вычисления, которые все присутствующие в классе студенты выполнят или могли бы в принципе выполнить в течение всей своей жизни.

Обычно студенты были воодушевлены, удивлены и шокированы такого рода примерами. Мы говорили, что не можем, разумеется, научить их *обнаруживать* подобные чудеса самостоятельно, но зато в течение года или около того мы сможем объяснить им хотя бы часть той математики, которая лежит в основе этих примеров, и научить их непринужденно и надежно выполнять такие вычисления – и, в действительности, *все* обычные вычисления, которые они встретят в остальных математических и прикладных курсах и в будущей работе! Это неизменно стимулировало их интерес к тому, чем мы занимались в классе.

Мы не знаем, можно ли научить чему-либо студентов, которых не впечатляют подобные примеры. Вероятно, в столь безнадежных случаях любое лекарство бессильно. Как замечает в самом начале своего трактата Николя Бурбаки [29]:

Nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner les principes de mathématique à des êtres dont le développement intellectuel n'irait pas jusqu'à savoir lire, mrire et compter.

13. ШУТКА БОРВАЙНА

А вот еще один – более причудливый! – пример, который мы до сих пор не использовали в классе. Но несомненно используем в следующий раз. Рассмотрим следующую последовательность интегралов, см. [30]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\frac{\sin(x/9)}{x/9}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\times$$
$$\times\frac{\sin(x/9)}{x/9}\frac{\sin(x/11)}{x/11}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\frac{\sin(x/9)}{x/9}\times$$
$$\times\frac{\sin(x/11)}{x/11}\frac{\sin(x/13)}{x/13}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Угадайте следующее значение.

На следующем шаге кажущаяся закономерность нарушается:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\frac{\sin(x/9)}{x/9}\times$$
$$\times\frac{\sin(x/11)}{x/11}\frac{\sin(x/13)}{x/13}\frac{\sin(x/15)}{x/15}\,dx =$$
$$\frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi.$$

Причина, разумеется, состоит в том, что

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13} < 1,$$
$$\text{but}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15} > 1.$$

В действительности, понять что именно здесь происходит, это [в высшей степени нетривиальное!] упражнение по гармоническому анализу и интегральным преобразованиям. Есть много других таких замечательных примеров, см. [31–33] и содержащиеся там ссылки.

14. Курс "Математика и Компьютеры"

В 2005 ~~году~~ мы начали преподавать двухсеместровый курс " Математика и Компьютеры" на экономическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета, весенний семестр первого года и осенний семестр второго года.

По административным причинам[6] второй семестр этого курса иногда назывался “ Математические пакеты”, или что-то в таком духе, но фактически это было непосредственное продолжение того же курса, так что следует думать о нашем курсе как о едином целом, “Математика и Компьютеры. I” и “Математика и Компьютеры. II”.

Курс читался не для всех студентов-экономистов, а только для студентов специальностей “ Математические методы в экономике”[7] и “ Прикладная информатика в экономике”[8], около 25 студентов в год по каждой из них, всего 50 студентов в год.

Еще одним человеком, активно участвовавшим в разработке этого проекта на начальном этапе, был Олег Иванов. Позже он и Григорий Фридман запустили аналогичный проект в Санкт-Петербургском государственном университете экономики и финансов, см., например, [34].

Обычно занятия проводились в смешанном формате. Вначале мы излагали какие-то новые математические понятия и идеи, а также формулировали несколько ключевых утверждений, иногда с набросками доказательств. Полностью доказательства излагались только в тех случаях, когда они были особенно короткими и наглядными или содержали мощные общие соображения, полезные во многих ситуациях. После этого мы давали рекомендации для дальнейшего чтения, для тех, кто хотел глубже изучить эти понятия, и переходили к алгоритмам и компьютерным демонстрациям, вычислениям, графике и т.д. В конце занятия мы раздавали принтауты с небольшими типовыми задачами и более крупными полуисследовательскими проектами, как индивидуальными, так и для небольших групп из 2–3 студентов. И то, и другое впоследствии обсуждалось в классе, правда, очень выборочно, иногда только в случае затруднений, а обычно только ответы, идеи и/или какие-то ключевые части кода.

Курс концентрировался на основных математических идеях, а не на специфических приложениях. Сейчас мы перечислим те темы, которые излагались каждый год. В остальном мы позволяли себе большую свободу и от года к году могли упоминать самые разные примеры и предметные области.

[6] Абсурдное бюрократическое требование, чтобы курсы в разных семестрах имели разные названия.

[7] Эта специальность была создана в СПбГУ в 1930-х годах Леонидом Канторовичем.

[8] Эта специальность была на тот момент относительно новой, она создана только в начале 2000-х годов. В настоящее время название изменилось на “ Бизнес-информатика”.

Обычно мы начинали с разминки по темам, которые были [хотя бы частично] знакомы большинству студентов, хотя, вероятно, не всем! Мы имели в виду, что студентам будет легче начать писать простенькие программы на те темы, где математика им хорошо знакома, либо занимательна [либо и то, и другое!], с тем, чтобы они могли почувствать некоторую первоначальную уверенность в себе.

• **Арифметика**. Мы начинали с целых чисел, рациональных чисел, вещественных и комплексных чисел и модулярной арифметики. Различные форматы представления чисел, основные алгоритмы, элементарные функции, вычисление степеней, формулы Эйлера и де Муавра, корни из 1, сравнения, вплоть до, скажем, алгоритма Эвклида, конечных полей и китайской теоремы об остатках. Иногда мы упоминали в этой части чуть более причудливые вещи, типа непрерывных дробей, упрощения радикалов, гармонических чисел, чисел Бернулли и т.д.

• **Теория чисел**. Эта часть обычно включала простые числа, теорему Эвклида и основную теорему арифметики, всякие деликатесы типа простых Ферма и Мерсенна, асимптотического закона распределения простых и теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии[9], теоремы Ферма и Эйлера, псевдопростые, символы Лежандра, квадратичный закон взаимности. Иногда мы упоминали какие-то классические задачи аддитивной теории чисел, но это никогда не входило в экзамен, а служило лишь основой для исследовательских проектов в духе рекреативной математики.

С учетом того, что в конечном счете мы учили математически грамотно использовать компьютер, центральное место во всем курсе занимала часть, посвященная дискретной математике и комбинаторике. В любом случае именно она занимала основную часть первого семестра.

• **Комбинаторика I**. Здесь обычно рассказывалось о факториалах, восходящих и нисходящих факториалах, биномиальных и мультиномиальных коэффициентах, числах Стирлинга и Белла, числах Каталана, производящих функциях и других подобных вещах. Здесь мы пытались приводить как можно больше доказательств, именно чтобы отработать такие идеи как индукция, рекурсия, разбиение на случаи, принцип Дирихле и т.д.

• **Дискретная математика I**. Списки: генерация списков, части списков, основные структурные манипуляции, вложенные списки, деревья и дру-

[9] И то и другое без малейшего намека на доказательства, просто как экспериментальные факты! Студентам предлагалось проверить их до каких-то значений или в каких-то специальных случаях, именно как экспериментальные факты.

гие структуры данных, алгоритмы выборки, поиска и сортировки. Множества и наборы: подмножества, цепи и антицепи, булевы операции, декартово произведение, теория перечисления, включение-исключение, разбиения, код Грея.

- **Дискретная математика II**. Отображения: функции, принцип Дирихле, сюръективные и инъективные отображения, чистые и анонимные функции, λ-исчисление, композиции и итерации, орбиты, траектории, неподвижные точки. Отношения: бинарные отношения, графы, отношения эквивалентности, отношения порядка, диаграммы Хассе, обращение Мебиуса, теорема Рамсея, теорема Холла (с доказательствами!)

- **Комбинаторика II**. Перестановки: алгебра перестановок, симметрическая группа, порождение перестановок в лексикографическом и других порядках, транспозиции, переборы с вариациями, знак перестановки через декремент и количество инверсий (с доказательствами!), знакопеременная группа, инволюции. Циклы: каноническое разложение, длинные циклы, умножение циклов, цикленный тип и классы сопряженности, статистика циклов, наибольший порядок перестановки и т.д.

Это обычно занимало большую часть первого семестра и после изучения этих тем студенты обычно уже довольно уверенно справлялись с переводом математических задач в работающий код на языке Mathematica и были готовы с энтузиазмом применять эти навыки к другим областям математики, которые они изучали.

Конец первого семестра и начало второго семестра представляли собой смесь еще нескольких важнейших собственно математических тем и различных [математических] приложений. Здесь мы обычно покрывали некоторые дальнейшие основные конструкции и иногда различные более глубокие темы.

Обычно, после изложенного выше мы переходили к более детальному обсуждению следующих двух классических конструкций с некоторыми (но далеко не всеми!) доказательствами.

- **Многочлены**. Структурные манипуляции с многочленами, рациональными функциями, степенными рядами, и тому подобным. Коэффициенты, корни, вычисление значений, быстрое умножение и деление, свертки, различные версии интерполяции (по Ньютону, Тейлору, Лагранжу, Эрмиту,...), быстрое преобразование Фурье, алгебраические уравнения и факторизация многочленов, теорема Гаусса, многочлены Чебышева, круговые многочлены, классические ортогональные многочлены и т.д. Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены (формулы Виета, Ньютона, Варинга, ...), и тому подобное.

- **Матрицы**. Структурные манипуляции со строками и столбцами, матрицы и другие тензоры, части матриц, умножение матриц и другие операции, матрицы и линейные отображения, собственные числа и собственные векторы, различные понятия ранга, элементарные преобразования, системы линейных уравнений, обратная матрица, различные классические типы матриц (симметрические, ортогональные, циркулянты и т.д.), блочные матрицы и эффективные алгоритмы, кронекеровское произведение и сумма матриц, определители и другие инварианты, канонические формы.

В качестве приложений мы часто упоминали различные дальнейшие темы, очень коротко обсуждая их в классе и вынося все более сложные вопросы в проекты для домашней работы (к этому моменту мы исходили из того, что студенты должны тратить *по крайней мере* 3 ~~часа~~ домашней работы на каждый час в классе).

- **Анализ**. Дифференцирование, интегрирование, дифференциальные уравнения, whatever.

- **Линейная алгебра**. Приложения к геометрическим и/или прикладным задачам линейной алгебры.

Во втором семестре мы обычно обсуждали также различные темы, необходимые для создания документов, содержащих сложные математические формулы и вычисления и, возможно, что-то еще, текст, графику и дальнейшие элементы.

- **Алгоритмы со строками**. Преобразование текста, формул и таблиц: поиск, сортировка, форматирование и т.д. Простейшие типографские вопросы, возникающие при наборе математического текста.

- **Простейшая графика**. Графики функций одной и двух переменных, геометрические преобразования 2D и 3D объектов: переносы, вращения, симметрии. Обычно вплоть до, скажем, правильных и полуправильных тел, замощений, обойных групп.

Это был довольно интенсивный курс и мы не верим, что могли бы рассказать много больше за год на столь раннем этапе с учетом предыдущей математической подготовки студентов и той доли времени, которую они могли посвящать нашему курсу.

15. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ШИРОКОГО ВНЕДРЕНИЯ

В целом мы оцениваем этот проект как полный и ошеломляющий успех. Это, безусловно, был освежающий опыт для нас самих, и мы получали огромное удовольствие от подготовки курса, придумывания задач, проведения занятий и общения со студентами. В любом случае, вести такой курс гораздо веселее, чем любой из традиционных сервисных курсов!

При активном участии и интересе со стороны студентов нам удалось покрыть за то же время гораздо больше математики, более разнообразной математики, более интересной и, в конечном счете, более полезной математику с гораздо лучшими результатами, чем это было бы возможно при более традиционном подходе.

Как мы потом выяснили, это был позитивный опыт и для наших студентов. Многие из них впоследствии отмечали, что, благодаря нашему курсу, они поняли, что такое математика, перестали бояться математики, полюбили формулы, числа и картинки и в результате стали систематически использовать математические инструменты в других курсах.

Является ли наш проект полностью переносимым и был ли бы он столь же успешным в другом университете и/или в другой предметной области, это вопрос дискуссионный. Мы полностью осознаем, что во многих отношениях все это время находились в привилегированном положении.

1. Санкт-Петербургский государственный университет — это один из двух университетов в России (второй — Московский государственный университет), пользующихся полной академической автономией. Мы могли вводить новые курсы без согласования с Министерства науки и высшего образования или других административных органов.

2. Наш проект имел полную поддержку деканата экономического факультета, как административную, так и финансовую. Конечно, мы должны были утверждать наш курс на учебно-методической комиссии и Совете факультета, но по существу у нас была полная свобода в том что касалось его общего плана и содержания.

3. У нас было *два* полностью оборудованных компьютерных класса, с досками и 25+1 компьютерами, объединенными в локальную сеть, с установленными лицензионными копиями Mathematica, Maple и другим необходимым программным обеспечением + дружественная техническая поддержка.

4. Программы “Математические методы в экономике” и “Прикладная информатика в экономике” весьма популярны и набирают [в основном] очень хороших студентов, ориентированных на работу с компьютерами. Многие из них уже имели опыт программирования на языках низкого уровня.

5. Многие из этих студентов были выпускниками хороших петербургских школ и ранее изучали математический анализ, векторы и тому подобное в школе, при этом они параллельно изучали традиционные курсы математического анализа и/или линейной алгебры на самом экономическом факультете.

6. Практически у всех студентов были домашние компьютеры с *каким-то* математическим программным обеспечением, а также полный доступ к факультетским компьютерам с лицензионными копиями Mathematica, Maple и т.~~В Рг.~~ в том числе в свободное от занятий время.

7. Большинство студентов хорошо владели английским языком, поэтому нам не приходилось переводить для них справочные и технические файлы, задачи, инструкции, шутки и т.д.

Ясно, что любой из этих пунктов может не иметь места даже в очень хорошем университете, и ни один из них не выполняется при переходе на более низкие уровни образования.

Разумеется, совершенно невозможно ожидать, что каждый школьный класс будет оснащен оборудованием для установки лицензионных коммерческих CAS, таких как Mathematica, Maple или Axiom. Одним из стартовых условий для модернизации массового математического образования должно быть создание более простой и менее требовательной CAS с интерфейсом на русском языке.

16. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем наши общие соображения о преподавании математики студентам нематематикам, основанные на нескольких десятилетиях опыта такого преподавания.

1. Преподавание математики для нематематиков должно быть увлекательным, ярким и вдохновляющим. Гораздо важнее продемонстрировать красоту и силу математики, чем изложить любую конкретную тему. Математика — это прежде всего веселая наука, любое преподавание, игнорирующее этот основополагающий принцип, в мирное время вредно, а в военное — опасно.

2. Выбор конкретного содержания в большинстве случаев не имеет никакого значения, поскольку мы в любом случае не знаем, какую математику наши студенты будут использовать в своей будущей карьере. Математическая культура, математическое мышление, позитивное отношение и готовность изучать новые темы и использовать математику в работе в любом случае несравненно важнее.

3. Ценность большинства конкретных вычислительных навыков пренебрежимо мала. Большинство студентов никогда не будут использовать эти навыки в своей карьере. Большинство рутинных вычислений будет перепоручаться компьютеру, а сложные случаи в любом случае требуют профессиональной консультации. Ценность концептуального понимания и осознания в

любом случае гораздо выше, чем ценность любых навыков.

4. Большинство доказательств имеют второстепенное значение. Студент может овладеть математическим понятием или результатом и сознательно их использовать и не зная никаких доказательств. В большинстве реально интересных ситуаций примеры, частные случаи, следствия, приложения, аналоги, экспериментальные данные, визуализация могут сделать для объяснения результата не меньше, а часто гораздо больше, чем формальное доказательство.

5. Компьютеры резко и по историческим меркам внезапно изменили приложения математики. Но компьютеры не упразднили саму математику. Они просто показали ущербность традиционного преподавания математики, которое и так было ущербным, что было ясно и до появления компьютеров. Наоборот, сегодня мы должны учить профессионалов во всех предметных областях гораздо большему количеству математики, более глубокой математики, более продвинутой математики, чем когда-либо раньше. Но мы должны делать это совершенно иначе, чем мы это делали раньше.

6. If you cannot beat them, join them. Мы должны приветствовать использование символьных вычислений и систем компьютерной алгебры на уроках математики и широко использовать их в качестве средств обучения. Конечно, соответствующее преобразование всех математических курсов, учебных планов, проверочных работ, экзаменов и т.д. потребует немало труда. Но если это будет сделано правильно, за этим не последует никаких опасностей для математического образования, только возможности.

Чтобы закончить на чуть более оптимистической ноте, процитируем Астерикса:

Галлы! Нам нечего бояться! За исключением того, что завтра небо может упасть на наши головы. Но, как мы все знаем, завтра никогда не наступит!!

Завтра наступит. Оно уже *почти* здесь. Наша единственная надежда состоит в том, что его приход будет достаточно неторопливым, чтобы дать нам, математическому сообществу, время приспособиться и реформировать преподавание математики, прежде чем станет слишком поздно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы чрезвычайно признательны Алексею Львовичу Семенову, который убедил нас написать эту статью, и Сергею Николаевичу Позднякову за многочисленные стимулирующие обсуждения. Мы благодарим Владимира Кондратьева за его неоценимую техническую помощь. Кроме того, мы благодарны Григорию Фридману, Борису Кунявскому и Александру Меркурьеву, которые чрезвычайно внимательно прочли рукопись настоящей статьи и предложили важные исправления.

ВКЛАД АВТОРОВ

Все авторы внесли равный вклад в развитие этого проекта. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

На протяжении многих лет наши усилия по внедрению компьютерной алгебры в математическое образование были поддержаны различными фондами и учреждениями, в том числе Санкт-Петербургским государственным университетом, Министерством науки и высшего образования России, Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Правительством Санкт-Петербурга. Окончательные этапы работы над учебником [1] поддержал Фонд Владимира Потанина, грант ГК180000694. Сама подготовка настоящего текста выполнена при поддержке образовательного проекта РФФИ № 19-29-14141.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет никаких конфликтов интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vavilov N.A., Khalin V.G., Yurkov A.V.* Mathematica for a non-mathematitian Electronic textbook // Moscow Centre Continuous Math. Education: Moscow. 2021. 483 p. (in Russian), ISBN 978-5-4439-3584-3.
2. Rokhlin V.A. Teaching mathematics to non-mathematicians // In V. A. Rokhlin–Memorial. Topology, geometry, and dynamics, 19–32, Contemp. Math., 772, Amer. Math. Soc., [Providence], RI, 2021 (First published in English in Computer Tools in Education. 2015. № 3. P. 50–60).
3. *Thurston W.P.* Mathematical education // Notices Amer. Math. Soc. 1990. V. 37. P. 844–850.
4. *Garfunkel S.A., Young G.S.* The sky is falling // Notices Amer. Math. Soc. 1998. V. 45. № 2. P. 256–257.
5. *Bressoud D.M.* Is the sky still falling? // Notices Amer. Math. Soc. 2009. V. 56. № 1. P. 20–25.
6. *Bass H.* Mathematics, mathematicians, and mathematics education // Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 2005. V. 42. № 4. P. 417–430.
7. Hardy G.H. A mathematician's apology. With a foreword by C.P. Snow. Reprint of the 1992 edition. Canto Classics. Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-60463-6/pbk). 2012. 153 p.
8. *Manin Yu.* Mathematics as metaphor. (Selected Essays, with Foreword by F. Dyson). Providence, RI: American Mathematical Society, 2021.

9. Borovik A. V. Calling a spade a spade: Mathematics in the new pattern of division of labour, In Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–14 (B. Larvor, ed.). Trends in the History of Science. Springer, 2016, 347–374. ISBN 978-3-319-28580-1. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28582-5_20

10. *Borovik A.V.* Mathematics for makers and mathematics for users, In Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh (*B. Sriraman* ed.), Birkhauser, 2017. P. 309–327. ~~DOI.~~ ISBN 978-3-319-61231-7. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61231-7_22

11. Konstantinov N.N., Semenov A.L. Productive education in the mathematical school // ChebyshevskiS-bornik. 2021. V. 22. № 1 (77). P. 413–446 (in Russian).

12. *Lebesgue H.* La mesure des grandeurs. Nouveau tirage. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. 1975. P. 184.

13. Neretin Yu. On variants of entrance exams. Moscow Inst. Electronics and Mathematics, Technical report 1999. 8 p. (in Russian). https://www.mat.univie.ac.at/ neretin/obraz/vstup.pdf

14. *Dieudonné J.* Should we teach "modern" mathematics? // American Scientist. January–February. 1973. V. 61. № 1. P. 16–19.

15. Grothendieck A. Recoltes et semailles. Rпlexions et témoignage sur un passé de mathématicien[10]. 1986. 929p. https://jmrlivres. files.wordpress.com/2009/11/ recoltes-et- semailles.pdf

16. Wu Hung-Hsi. "Order of operations" and other oddities in school mathematics. 2004. 11 p. https://math.berkeley.edu/wu/order5.pdf

17. Klein F. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band: Arithmetik. Algebra. Analysis. Berlin: Verlag von Julius Springer 1933. Nachdruck 1968. 309 s.

18. *Vavilov N.* Reshaping the metaphor of proof // Philos Trans. Roy. Soc. A. 2019. V. 377. № 2140. P. 1–18. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0279

19. Taylor P. Teach the Mathematics of mathematicians // Educ. Sci. 2018. V. 8. № 2, 56. 10 p. https://doi.org/10.3390/educsci8020056

20. *Borwein J.M.* Implications of experimental mathematics for the philosophy of mathematics. In Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 2008. P. 33–61.

21. Zeilberger D. Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture // Notices Amer. Math. Soc. 1993. № 40. P. 978–981; reprinted in Math. Intelligencer. 1994. V. 16. № 4. P. 11–14.

22. Jaffe A., Quinn F. Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. № 1. P. 1–13. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1993-00413-0

23. Vavilov N.A. Computers as novel mathematical reality. I. Personal account // Computer Tools in Education. 2020. № 2. P. 5–26 (in Russian). https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-2-5–26

24. *Borovik A.* A mathematician's view of the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology // Biosystems. July 2021. V. 205. P. 104410. https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2021.104410

25. *Elkies N.D.* On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ // Math. Comput. 1988. V. 51. P. 825–835.

26. *Berndt B.C., Bhargava S.* Ramanujan for low-brows // Amer. Math. Monthly. 1993. V. 100. P. 644–656.

27. *Bailey D.H., Borwein J.M., Borwein P.B., Plouffe S.* The quest for Pi // Math. Intelligencer. 1997. V. 19. № 1. P. 50–57.

28. *Bailey D., Borwein P., Plouffe D.* On the rapid computation of various polylogarithmic constants // Math. Comput. 1997. V. 66. № 218. P. 903–913.

29. Bourbaki N. Éléments de mathématique. Tous les 28 tomes, y compris le dernier tome Topologie Algлrique Chapitre 1–4. 2017, Berlin: Springer, 7902 p., ISBN 978-3-662-53102-0/pbk.

30. *Borwein D., Borwein J.M.* Some remarkable properties of sinc and related integrals // The Ramanujan Journal. 2001. V. 5. № 1. P. 73–89.

31. *Bailey D.H., Borwein J.M.* Experimental mathematics: examples, methods and implications // Notices Amer. Math. Soc. 2005. V. 52. № 5. P. 502–514.

32. Burazin A.D., Jungić V., Lovric M. A cultural challenge: teaching mathematics to non-mathematicians. Maple Trans. July 2021. V. 1. № 1. Article 14144. 11 p. https://doi.org/10.5206/mt.v1i1.14144

33. Jungić V., Burazin A. On experimental mathematics and mathematics education // Amer. Math. Monthly. 2021. V. 128. № 9. P/ 832–844.

34. *Ivanov O.A., Fridman G.M.* Discrete Mathematics and Programming in Wolfram Mathematica, Piter Publishers: St Petersburg, 2019, 349 p. (in Russian).

[10]Этот текст никогда официально не публиковался по-французски, но имеются частичные переводы на русский и японский языки, опубликованные в 2002 и 2015 ~~годах~~ соответственно.

ДИСКЛЕЙМЕР

Все взгляды и мнения, представленные в этом тексте, являются нашей исключительной собственностью и не выражают официальную позицию какого-либо учреждения или профессионального сообщества, с которым мы аффилированы.

THE SKIES ARE FALLING: MATHEMATICS FOR NON-MATHEMATICIANS

N. A. Vavilov[a], V. G. Khalin[b], and A. V. Yurkov[b]

[a] *Department of Economics, St Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*

[b] *Department of Mathematics and Computer Science, St Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Mathematical education, both mass education, and university education of non-mathematicians, are in an abominable state, and rapidly degrading. We argue that the instruction of non-mathematicians should be dramatically reformed both as substance and style. With traditional approach, such a transformation would take decades, with unclear results. But we do not have this time. The advent of Computer Algebra Systems gives the mathematics community a chance to reverse the trend. We should make a serious attempt to seize this opportunity. In the present paper we describe one such project of reform implemented at the St Petersburg State University.

Keywords: mathematical education, mathematics for non-mathematicians, mathematics and computers, computer algebra systems