УДК 519.8
doi:10.18720/SPBPU/2/id23-31

***Ногин Владимир Дмитриевич*,**
профессор, доктор физ.-мат. наук, профессор

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР НА ОСНОВЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ЛПР В ИНТЕРАКТИВНОМ РЕЖИМЕ

Россия, Санкт-Петербург, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», v.nogin@spbu.ru

***Аннотация*.** В работе рассматривается задача многокритериального выбора, включающая три объекта – множество возможных вариантов, числовой векторный критерий и отношение предпочтения ЛПР, которое известно лишь частично в виде квантов информации. Излагается методология применения аксиоматического подхода к сужению множества Парето на основе квантов информации. Эта методология реализована в форме алгоритма, готового для применения при решении прикладных многокритериальных задач.

Ключевые слова: задача многокритериального выбора, множество Парето, аксиоматический подход, сужение множества Парето.

***Vladimir D. Noghin*,**
Professor, Doctor of Phys.-Math. Sciences

MULTICRITERIA CHOICE BASED ON THE DM'S PREFERENCES IN INTERACTIVE MODE

Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, noghin@gmail.com

***Abstract*.** The paper deals with a multicriteria choice problem, which includes three objects: a set of feasible variants, a numerical vector criterion, and a decision maker's preference relation, which is known only partially in the form of information quanta. The methodology for applying the axiomatic approach to reducing the Pareto set based on information quanta is presented. This methodology is implemented in the form of an algorithm ready for use in solving applied multicriteria problems.

Keywords: multicriteria choice problem, Pareto set, axiomatic approach, reduction of the Pareto set.

Введение

Подавляющее большинство оптимизационных задач, с которыми исследователи сталкиваются на практике, являются многокритериальными. К настоящему времени в мировой литературе различными авторами разработано большое число различных методов решения подобных задач [1]. Каждый из этих авторов предлагает какое-то свое, с его точки зрения, наилучшее решение многокритериальной задачи в виде того или иного парето-оптимального варианта. К сожалению, все эти методы носят ярко выраженный эвристический характер, поскольку ни один из авторов не может гарантировать, что применение предложенного им метода приведет действительно к наилучшему результату.

В отличие от упомянутых эвристических методов автором данной работы на протяжении нескольких десятков лет разрабатывался аксиоматический подход к сужению множества Парето [2], который имеет строгое математическое обоснование и к настоящему времени получил окончательное завершение. Этот подход основан на идее последовательного удаления из множества Парето тех вариантов, которые не совместимы с информацией в виде квантов об отношении предпочтения ЛПР. Тем самым, при реализации подхода происходит последовательное сужение множества Парето, внутри которого всегда содержится искомое множество выбираемых (наилучших) вариантов. Отличительной особенностью данного подхода является его универсальность, т. е. возможность применения к задачам с произвольным множеством возможных вариантов и любыми критериями.

2. Постановка задачи многокритериального выбора

Задача многокритериального выбора включает три объекта: *множество возможных вариантов* (произвольной природы) X, числовой *векторный критерий* $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, заданный на X и принимающий значения в векторном пространстве R^m, а также асимметричное бинарное *отношение предпочтения* ЛПР $\succ_Y$, определенное на множестве $Y = f(X) \subset R^m$. Запись $y \succ_Y y'$ означает, что первый вектор для ЛПР предпочтительнее второго, т. е. из этих двух векторов ЛПР выберет первый и не выберет второй вектор. Поскольку отношение $\succ_Y$ предполагается лишь частичным, то некоторые пары векторов множества Y могут оказаться не сравнимыми по этому отношению. Практика решения многокритериальных задач показывает, что в отличие от X и f отношение предпочтения обычно полностью не известно и это обстоятельство сильно затрудняет поиск «наилучшего» решения.

Решением задачи многокритериального выбора в общем случае является *множество выбираемых векторов*, обозначаемое далее $C(Y) \subset Y$. В частности, это множество может оказаться одноэлементным.

В соответствии с аксиоматическим подходом считаются выполненными следующие 4 аксиомы.

Аксиома 1. Если среди каких-то двух векторов множества Y один предпочтительное второго, то второй вектор не должен входить в множество выбираемых векторов, т. е. $y \succ_Y y' \Rightarrow y' \notin C(Y)$.

Аксиома 2. Отношение предпочтения $\succ_Y$ транзитивно и может быть продолжено на все критериальное пространство R^m. Это продолжение обозначается $\succ$.

Аксиома 3. ЛПР заинтересовано в максимизации каждого из критериев, т. е. из двух векторов, отличающихся только одной компонентой, для него предпочтительнее тот вектор, у которого эта компонента больше.

Аксиома 4. Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно положительного линейного преобразования, т. е. $y \succ y'$ $\Rightarrow \alpha \cdot y + c \succ \alpha \cdot y' + c$ при любых $\alpha > 0$ и $c \in R^m$.

Подробное обсуждение сформулированных аксиом можно найти в [2].

3. Квант информации и его учет

В основе аксиоматического подхода к сужению множества Парето лежит следующее определение.

Определение 1. Если ЛПР готово идти на компромисс и согласно потерять не более чем $w_i > 0$ в значениях группы критериев $f_i, i \in A$, ради получения прибавки не менее чем $w_j > 0$ в значениях группы $f_j, j \in B$, то говорят, что имеется *квант информации* с более важной группой A и менее важной группой B, $A \cap B = \varnothing$.

Формально, согласно определению 1, наличие указанного кванта информации равносильно указанию вектора $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ вида $u_i = w_i$ для всех $i \in A$, $u_j = -w_j$ для всех $j \in B$ и $u_s = 0$ для всех $s \notin A \cup B$, который подчиняется соотношению $u \succ 0_m$, т. е. для данного ЛПР вектор u предпочтительнее нулевого вектора.

В случае, когда обе группы критериев A и B одноэлементные, получаем *простейший квант информации*, согласно которому i-й критерий важнее j-го с положительными параметрами w_i и w_j.

Для того чтобы на практике выявить («добыть») квант информации, необходимо получить от ЛПР сведения о составах групп A, B и соответствующих им величинах параметров w_i и w_j. Обычно выявление квантов информации осуществляется на основе определения 1 в результате прямого опроса ЛПР.

Напомним, что *множество парето-оптимальных* (*эффективных*) *вариантов* определяется следующим образом:
$P_f(X) = \{x^* \in Y \,|\, \text{не существует } x \in X:$

$$f_i(x) \geq f_i(x^*),\, i = 1,2,\ldots,m, \text{ и } f(x) \neq f(x^*)\},$$

а *множество парето-оптимальных векторов* есть $P(Y) = f(P_f(X))$.

Свойства множества Парето подробно изучаются, например, в [3].

Согласно принципу Эджворта-Парето [2], выбирать следует только парето-оптимальные векторы, т. е. $C(Y) \subset P(Y)$. Тем самым, множество Парето дает определенную оценку сверху для неизвестного множества $C(Y)$. К сожалению, действительность такова, что множество Парето в подавляющем большинстве прикладных задач многокритериального выбора оказывается слишком широким и возникает *проблема его сужения* [4]. Решение этой проблемы можно осуществлять на основе выявленных у ЛПР квантов информации. Об этом свидетельствует следующий результат [2].

Теорема 1. Для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место соотношение $C(Y) \subset f(P_g(X)) \subset P(Y)$. При этом p-мерный векторный критерий g, $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$, составлен из компонент f_i для всех $i \notin B$, а также компонент вида

$$g_{ij} = w_j \cdot f_i + w_i \cdot f_j \text{ для всех } i \in A \text{ и } j \in B.$$

Здесь $|Z|$ означает число элементов конечного множества Z.

В соответствии с теоремой 1 для того чтобы на основе кванта информации получить более точную оценку сверху для множества выбираемых векторов, следует сформировать новый векторный критерий g, найти множество парето-оптимальных вариантов $P_g(X)$ относительно этого критерия, а затем от вариантов перейти к соответствующих им векторам, т. е. построить множество $f(P_g(X))$.

4. Непротиворечивость и учет набора квантов информации

Нередко удается выявить целый набор квантов информации. Формально это означает, что имеются векторы $u^1, u^2, \ldots, u^k$, имеющие хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательные компоненты, каждый которых предпочтительнее нулевого вектора. В этом случае встает вопрос о непротиворечивости имеющегося набора. Определение непротиворечивого набора векторов можно найти в [2]. Там же установлены необходимые и достаточные условия, при которых данный набор векторов является непротиворечивым.

Теорема 2. Для того чтобы набор векторов $u^1, u^2, ..., u^k$ являлся непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы в задаче линейного программирования с неотрицательными переменными

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m + \xi_{m+1} \to \min$$

$$\lambda_1 + \sum_{s=1}^{k} \mu_s v_1^s + \xi_1 = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_m + \sum_{s=1}^{k} \mu_s v_m^s + \xi_m = 0;$$

$$\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k + \xi_{m+1} = 1;$$

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geqq 0;\ \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, \xi_{m+1} \geqq 0;\ \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \geqq 0;$$

оптимальное значение целевой функции было строго положительным.

Применение теоремы 2 сводится к решению определенной задачи линейного программирования и может осуществляться с использованием подходящего математического пакета.

5. Алгоритм построения двойственного конуса

Вопрос учета произвольного конечного непротиворечивого набора квантов информации для сужения множества Парето решается с использованием алгоритма построения образующих двойственного конуса.

Напомним некоторые определения из выпуклого анализа, которые используются далее. Множество $K \subset R^m$ называется конусом, если для любого $y \in K$ и каждого $\alpha > 0$ верно $\alpha \cdot y \in K$. При этом конус является острым, если он не содержит два отличных от нуля противоположных вектора. Конус, порожденный набором векторов, представляет собой совокупность всех линейных неотрицательных комбинаций этих векторов. Размерность выпуклого конуса совпадает с размерностью минимального подпространства, содержащего данный конус. Образующей (ребром) конуса является вектор, который не лежит внутри ни одного из отрезков, входящих в данный конус. Наконец, конус, двойственный по отношению к конусу K, имеет вид $\{y \mid \langle y, z\rangle \geq 0$ для всех $z \in K\}$, где угловые скобки означают скалярное произведение векторов: $\langle y, z\rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot z_i$.

На вход *алгоритма построения образующих двойственного конуса* подается конечный набор векторов $a^1, ..., a^{m+k} \in R^m$, $k \geq 1$, порождающих острый выпуклый m-мерный конус K в пространстве R^m, а на выходе (в памяти) образуется новый набор векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, порождающих двойственный конус в том же пространстве.

Шаг 1. Открыть цикл по переменной i от 1 до C_{m+k}^{m-1} генерирования всех возможных поднаборов из $m-1$ векторов набора $a^1, ..., a^{m+k}$.

Шаг 2. Если текущий i-й поднабор $a^{i1}, ..., a^{i(m-1)}$, выбранный из $a^1, ..., a^{m+k}$, линейно зависим, то следует увеличить номер i на единицу и вернуться к началу шага 2. Когда увеличение номера i невозможно, т. е. $i = C_k^{m-1}$, необходимо перейти к шагу 5. В противном случае, т. е. когда указанный поднабор линейно независим, выполнить шаг 3.

Шаг 3. Образовать из вектор-столбцов поднабора $a^{i1}, ..., a^{i(m-1)}$ квадратную матрицу D n-го порядка, приписав к указанным столбцам справа любой из векторов множества $I_i = \{a^1, ..., a^{m+k}\} \setminus \{a^{i1}, ..., a^{i(m-1)}\}$, образующий вместе с $a^{i1}, ..., a^{i(m-1)}$ линейно независимую систему (такой вектор всегда найдется благодаря m-мерности конуса K). Найти последний столбец обратной матрицы $(D^T)^{-1}$, где T — символ транспонирования. Этот вектор-столбец (обозначим его y^i) следует запомнить. По построению, вектор y^i ортогонален всем векторам поднабора $a^{i1}, ..., a^{i(m-1)}$.

Шаг 4. Вычислить скалярные произведения $\langle a^j, y^i \rangle$ для всех векторов $a^j \in I_i$. Если хотя бы одно такое скалярное произведение окажется отрицательным, то удалить из памяти вектор y^i. В случае, когда все указанные скалярные произведения неотрицательны, увеличить номер i на единицу и вернуться на шаг 2 (когда такое увеличение невозможно — перейти на шаг 5).

Шаг 5. В результате выполнения полного цикла по переменной i в памяти будут сохранены вектор-столбцы, которые в ходе выполнения алгоритма записывались в память в виде y^i. Они составят искомый набор векторов $b^1, ..., b^n$.

В следующей теореме, доказательство которой можно найти в [2], указано, каким образом следует учитывать набор квантов информации, заданных при помощи непротиворечивых векторов $u^1, u^2, ..., u^k$.

Теорема 3. Пусть заданы векторы $u^1, u^2, ..., u^k$, каждый из которых имеет хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты и порождающие непротиворечивый набор квантов информации, т.е. $u^i \succ 0_m$, $i = 1, 2, ..., k$. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ выполняются включения

$$C(Y) \subset f(P_g(X)) \subset P(Y).$$

Здесь вектор-функция $g(x) = (\langle b^1, f(x)\rangle, ..., \langle b^n, f(x)\rangle)$, $n \geq m$, построена с использованием векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, полученных в результате применения описанного выше алгоритма построения образующих двойственного конуса к набору, состоящему из векторов $u^1, u^2, ..., u^k$ вместе с m единичными ортами пространства R^m.

Для задач малой размерности с небольшим количеством квантов реализация этого алгоритма может быть осуществлена «вручную», без привлечения компьютера. Пример подобного рода можно найти в [2].

6. Алгоритм решения задачи многокритериального выбора

Перейдем к изложению последовательности действий, приводящих к решению задачи многокритериального выбора в соответствии с аксиоматическим подходом к сужению множества Парето.

Шаг 1. При взаимодействии специалистов в области принятия решений с ЛПР формируется множество возможных вариантов X и числовой векторный критерий f.

Шаг 2. Проверяется готовность ЛПР принять аксиомы 1–4.

Шаг 3. В результате опроса ЛПР выявляется очередной квант информации (с соответствующим вектором u^i) и устанавливается непротиворечивость образовавшегося набора векторов с помощью теоремы 2. В случае противоречивости этого набора рекомендуется видоизменить («подправить») последний выявленный вектор таким образом, чтобы он приводил к непротиворечивому набору. Если возможность выявления очередного вектора u^i отсутствует, то необходимо перейти на Шаг 6.

Шаг 4. Применяя алгоритм построения образующих двойственного конуса к набору из единичных ортов вместе с имеющимися на данный момент векторами u^i, на основе теоремы 3 формируется новый векторный критерий g и строится отвечающее ему множество Парето $P_g(X)$.

Шаг 5. Осуществляется анализ множества $P_g(X)$. Если ЛПР может сделать окончательный выбор в нем (например, когда это множество сравнительно узкое), то конец (задача выбора решена). В противном случае следует перейти на Шаг 3 для выявления очередного кванта информации.

Шаг 6. Здесь уже нет возможности выявлять новые кванты информации, поэтому ничего не остается, как остановиться на одном из эвристических методов. Автором предлагается использовать следующий результат (см. [3]), в котором реализуется идея так называемого *целевого* *программирования*, состоящая в минимизации расстояния (в данном случае — с использованием равномерной метрики) от некоторой «идеальной» (или «утопической») точки до множества возможных векторов.

Теорема 4. Для того чтобы точка $x^* \in X$ была слабо эффективной относительно ограниченной сверху на множестве X вектор-функции $g = (g_1, g_2, ..., g_p)$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого вектора $v = (v_1, v_2, ..., v_p) \in V$ было выполнено

$$\max_{i=1,...,p}(v_i - g_i(x^*)) = \min_{x \in X} \max_{i=1,...,p}(v_i - g_i(x)).$$

Здесь $V = \{v \in R^p \,|\, v_i > g_i(x),\ i = 1,2,...,p,$ для всех $x \in X\}$.

Напомним, что точка $x^* \in X$ называется *слабо эффективной*, если не существует $x \in X$, при котором $g_i(x) > g_i(x^*), i = 1,2,..., p$. Всякая эффективная точка слабо эффективна, но не наоборот, хотя во многих задачах разница между этими точками незначительная. Заметим, что теорема 4 верна при максимально общих предположениях — требуется лишь ограниченность каждой компоненты вектор-функции g на множестве X.

Для реализации Шага 6 используется часть «достаточность» теоремы 4, где в качестве v_i можно назначить, например, число $\max_{x \in X} g_i(x)$, или чуть бóльшее. Найденный в результате минимизации функции $\max_{i=1,...,p}(v_i - g_i(x))$ на множестве X вариант x^* и соответствующий ему вектор $y^* = f(x^*)$ объявляются решением задачи многокритериального выбора, т. е. именно их следует считать «наилучшими».

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00298).

Список литературы

1. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys (International Series in Operations Research & Management Science, 233) / Editors: Greco S, Ehrgott M., Figueira J.R. 2nd ed. 2016.

2. Ногин В.Д. Сужение множества Парето. Аксиоматический подход. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 272 с. Есть перевод на английский язык: Noghin V.D. Reduction of the Pareto set. An axiomatic approach. – Springer Int. Publ. AG, 2018. – 232 p.

3. Ногин В.Д. Множество и принцип Парето (учебное пособие). 2-е изд. Санкт-Петербург. Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений. – 2022. – 110 с.

4. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008. – № 1, с. 98 – 112.