УДК 519.816

V.S. KALNITSKIY,
I.E. MOLOKOV,
A.N. NIKONOROV

В.С. КАЛЬНИЦКИЙ,
И.Е. МОЛОКОВ,
А.Н. НИКОНОРОВ

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЭКСПЕРТНОГО ЗАКЛЮЧЕНИЯ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫБОРА

FEATURES OF FORMING THE EXPERT OPINION IN THE MULTI-CRITERIA PROBLEM OF CHOICE

В статье описан класс плохо обусловленных задач многокритериального выбора. Приведены численные примеры, описывающие парадоксальные выводы, и дано ясное геометрическое объяснение возникшей проблемы. Показано, что даже привлечение большого числа экспертов не может привести к обоснованному выбору альтернативы в случае плохой обусловленности. Предложено в качестве предварительного этапа решения многокритериальной задачи осуществлять численное исследование на плохую обусловленность.

The article describes a type of ill-conditioned problems of multi-criteria choice. There are numerical examples describing the paradoxical conclusions, and a clear geometric explanation of the problem is given. It is shown that even involving a large number of experts cannot lead to a reasonable choice of an alternative in the case of ill conditionality. As a preliminary step in solving a multi-criteria problem, it is proposed to carry out a numerical study on ill conditionality.

Ключевые слова: теория принятия решений, многокритериальный выбор, плохо обусловленные задачи, интегральный критерий.

Keywords: decision theory, multi-criteria choice, ill-conditioned problems, integral criterion.

Основные термины и определения

Для оценки относительной ценности различных альтернативных решений $\{K_1,\ldots,K_n\}$ в системе управления (СУ) необходим показатель K_0 [1], называемый *интегральным критерием,* по численной величине которого можно сделать заключение о качестве принятого решения.

Для каждой альтернативы K_i вводятся показатели сравнения $\{K^*_{i1}, \ldots, K^*_{im}\}$. Для нивелирования эффекта разноразмерности показателей осуществляется нормировка показателей по предельному (*нормативному*) значению критерия $K^{пр}_i$:

$$K_{ij} = K^*_{ij} / K^{пр}_i.$$

Нормативные показатели образуют *матрицу* $\|K_{ij}\|$, $0 \le K_{ij} \le 1$, с вектор-строками нормативных показателей i-ой альтернативы $\overline{K}_i = (K_{i1},\ldots,K_{in})$ [2].

Интегральный критерий K_0 формируется как задача максимизации

$$K_0 = \sum_j K_{ij}\alpha_j \Rightarrow max,$$

где α_j – вес j-го показателя, и эти веса являются нормированными [3]

$$\sum_j \alpha_j = 1.$$

Тем самым в m-мерном пространстве весов возникает гиперплоскость размерности m - 1, которую мы будем называть *весовой плоскостью*.

Определение весовых показателей является одной из проблем формирования обобщенного критерия. Цель статьи – сравнение между собой нескольких подходов к решению этой проблемы и сравнению результатов оценки.

Исходя из смысла весовых коэффициентов в теории принятия решений приняты естественные ограничения $\alpha_j \ge 0$, что выделяет в весовой плоскости множество Ω, являющееся (m-1)-мерным симплексом. Фиксацию вектора весовых коэффициентов $\overline{\alpha}$ мы будем называть *экспертным мнением*, а множество Ω – *областью экспертных мнений*.

Если задана матрица нормативных показателей $\|K_{ij}\|$, то каждое экспертное мнение определяет набор интегральных показателей каждой альтернативы, из которых данному экспертному мнению соответствует набор альтернатив с наибольшим значением показателя. Таким образом, область экспертных мнений покрыто n множествами *доминирования* $\Omega_i \subset \Omega$, в каждом из которых i-ая альтернатива имеет наибольший интегральный показатель. Указанные множества могут пересекаться либо быть пустыми. Набор альтернатив с непустыми множествами доминирования называются *доминирующими альтернативами*. В теории принятия решений недоминирующие альтернативы исключаются из рассмотрения.

Метод попарных сравнений. Рассмотрим пару альтернатив K_i, K_j. Условие равенства интегрального показателя обеих альтернатив для данного экспертного мнения $\overline{\alpha}$ имеет вид

$$\sum_s \alpha_s(K_{is} - K_{js}) = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение задает в m-мерном пространстве гиперплоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную *вектору сравнения* альтернатив $\overline{K}_{ij} = K_i - K_j$. Будем считать, что и альтернатив и критериев больше двух. Так как для любых трех альтернатив три их попарных вектора сравнения линейно зависимы, то совокупность векторов сравнения всех альтернатив линейно зависима, следовательно, ортогональное дополнение к их линейной оболочке не пусто и содержит начало координат. Это линейное подпространство характеризуется тем, что значение интегрального показателя на нем равно для всех альтернатив в силу своего определения. Пересечение этого линейного подпространства с множеством экспертных мнений Ω будем называть *множество безразличия* (оно может оказаться пустым). Итак, пересечение Ω с описанным пучком гиперплоскостей попарных сравнений задает многогранную структуру множеств доминирования Ω_i.

Совокупность альтернатив, множества доминирования которых имеют непустую внутренность, будем называть *существенно доминирующими*. Если экспертное мнение попало во внутренность области доминирования, то оно обладает свойством *устойчивости*, т.е. альтернатива сохраняется при малых изменениях мнения эксперта. Для несущественно доминирующих альтернатив некоторые малые отклонения от данного мнения влекут смену альтернативы. В силу того что для практических задач наличие зависимостей между показателями альтернатив маловероятно, то несущественно доминирующие альтернативы можно исключать из рассмотрени [5, 6].

Случай $\boldsymbol{m = n = 3}$ Ограничимся указанным случаем лишь в целях наглядного представления. Обнаруженные явления будут наблюдаться в любой размерности.

В случае трех альтернатив с тремя показателями каждое попарное сравнение задает плоскость в трехмерном пространстве, содержащую начало координат. В силу линейной зависимости векторов сравнения ортогональное дополнение к их линейной оболочке может быть либо двумерным, либо одномерным.

В первом случае множество безразличия в весовой плоскости либо прямая, либо пусто. В обоих случаях одна из альтернатив не является существенно доминирующей.

Во втором случае прямая безразличия может либо быть параллельной весовой плоскости, и тогда области доминирования вырезаются параллельными прямыми, либо пересекать весовую плоскость в одной точке, которая будет называться *точкой безразличия*. Заметим, что точка безразличия может оказаться вне области мнений. Условием того, что точка безразличия лежит в области мнений, является совпадение знаков всех компонент векторного произведения двух векторов сравнения

$$\overline{K}_{12} \times \overline{K}_{23}.$$

Пример [3] Имеется три варианта решения на восстановление техники. В качестве частных критериев для выбора решения приняты:

$t_р$ – время выполнения работ, ч;

У – укомплектованность исправной техникой, %;

$К_{тг}$ – коэффициент технической готовности, доли.

Нормативные значения показателей $\|K_{ij}\|$, вычисленных на основе директивных значений показателей, представлены в таблице 1.

Таблица 1

	$t_р$	У	$К_{тг}$
K_1	0,95	0,60	0,30
K_2	0,75	0,80	0,50
K_3	0,50	0,95	0,90

Задачу выбора можно решать двумя подходами. Первый – обратиться к группе экспертов, каждый из которых на основании своих весовых коэффициентов выберет альтернативу, после этого ЛПР примет решение на основании простого большинства мнений в пользу какой-либо альтернативы. Второй – ЛПР соберет экспертные мнения (весовые коэффициенты), вычислит средневзвешенный весовой вектор и применит его для принятия решения.

Осуществим оба этих плана на основании таблицы экспертных мнений, представленных в таблице 2.

Таблица 2

Эксперт	α_1	α_2	α_3
№1	0,52	0,31	0,17
№2	0,51	0,30	0,19
№3	0,49	0,30	0,21
№4	0,50	0,29	0,21
№5	0,51	0,31	0,18
№6	0,47	0,31	0,22
№7	0,49	0,31	0,20

Обратим внимание, что мнения экспертов хорошо коррелируют между собой в оценке значимости каждого критерия. Результат вычислений экспертом интегрального критерия для каждой альтернативы приведен в таблице 3.

Таблица 3

Эксперт	K_1	K_2	K_3
№1	**0,7310**	0,7230	0,7075
№2	**0,7215**	0,7175	0,7110
№3	0,7085	0,7125	**0,7190**
№4	0,7120	0,7120	**0,7145**
№5	**0,7245**	0,7205	0,7115
№6	0,6985	0,7105	**0,7275**
№7	0,7115	0,7155	**0,7195**

Согласно приведенным вычислениям: трое экспертов высказались за первую альтернативу, четверо – за третью, и ни один эксперт не поддержал вторую.

Применим теперь второй подход. Весовой вектор усредненных мнений экспертов имеет вид

$$(0{,}49857;\ 0{,}30428;\ 0{,}19714).$$

Интегральный критерий для каждой альтернативы равен

$$K_0 = (0{,}71535;\ \mathbf{0{,}71592};\ 0{,}71578).$$

Таким образом, лучшей альтернативой по совокупности мнений экспертов является вторая альтернатива!

Описанный парадокс имеет простое геометрическое обоснование. Решая систему (1) для нашей задачи, получим, что весовой набор

$$(0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)$$

является *точкой безразличия*. В данной задаче приоритеты частных показателей соответствуют этому набору. Мнения же экспертов, согласных между собой в вопросе приоритетов показателей, образовали множество, в чью выпуклую оболочку попала точка безразличия. Любая выпуклая комбинация мнений экспертов даст непредсказуемый результат, т.е. даже применение методов взвешенных мнений экспертов не изменит ситуации, результат выбора будет соответствовать случайному выбору!

Если альтернатив больше трех, то ситуация может быть еще более трагичной: привлечение к экспертизе каждого нового эксперта, вполне согласного с мнением уже привлеченных экспертов, приведет к выбору новой альтернативы, хотя простым большинством между собой будут бороться две конкретные альтернативы.

Отметим, что в случае, когда мнения экспертов сильно расходятся в вопросе веса частных показателей, описанный парадокс все равно имеет место, так как точка безразличия может оказаться в выпуклой оболочке мнений, которая стала еще обширней, т.е. ситуация усугубляется.

Исходя из вышесказанного, предлагаем выделить класс задач теории принятия решений как *плохо обусловленных*: в случае, когда существует точка безразличия (а это типичная ситуация) и экспертная оценка их доминирования близка к доминированию, компонент её весового вектора.

В случае плохо обусловленных задач многокритериального выбора следует с особой осторожностью относиться к совокупности экспертных оценок, насколько бы обширной она не была.

Таким образом, прежде чем приступать к решению задачи многокритериального выбора для данной матрицы нормативных показателей, следует описать явно множество безразличия, например, решив систему (1). Затем выяснить близость мнений экспертов к этому множеству. Если выпуклая оболочка мнений отделена от множества безразличия, то рекомендуем избавиться от альтернатив, не появившихся в ответах экспертов, и решить задачу с меньшим количеством альтернатив.

Список использованных источников:

1. Кальницкий В.С., Молоков И.Е., Никоноров А.Н. Критерии оценки эффективности управления системой дистанционного образования и мониторинга // Новые технологии оценки качества образования: сборник материалов XVI Форума Гильдии экспертов в сфере профессионального образования / под общей редакцией д.п.н. Г. Н. Мотовой. – М.: Гильдия экспертов в сфере профессионального образования, 2021. – с. 31-35.

2. Кальницкий В.С., Молоков И.Е., Никоноров А.Н. Критериальный аппарат оптимизации решений. – СПб.: ВАМТО, 2022. – 137 с.

3. Романенко Д.В. Метрики в теории принятия решений // «Устойчивое развитие в современном нестабильном мире: проблемы теории и практики»: сборник научных статей по итогам Международной межвузовской научно-практической конференции. – СПб. : Изд-во СПбЦСА, 2023. – С. 49-54.

4. Стативка В.С., Дубинин С.Г., Молоков И.Е., Назаркин В.Г. Основы научных исследований в управлении материально-техническим обеспечением войск: уч. пособие. – СПб.: ВАМТО, 2013. – 382 с.

5. Кузнецова Е.В., Фомина Т.П. Исследование оценки студентами своих знаний по дисциплине «теория вероятностей и математическая статистика» // Гуманитарные исследования Центральной России. – 2019. – № 2(11). – С. 46-51.

6. Кузнецов И.Н., Макаров А.Д., Бушмин О.И. Определение моментов случайных величин // Вестник Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В.Хрулева. – 2022. – № 2(30). – С. 115-123.