Распределение собственных чисел ядерных операторов в подпространствах пространств $L_p(\mu)$

О.И. Рейнов

Санкт-Петербургский государственный университет

О распределении собственных чисел ядерных операторов

О.И. Рейнов

Санкт-Петербургский государственный университет

1 февраля 2023

Воронежская зимняя математическая школа

«Современные методы теории функций и смежные проблемы»

В 1950-х В. Б. Лидский и А. Гротендик независимо получили знаменитые формулы следа для некоторых классов ядерных операторов (В. Б. Лидский — в гильбертовых пространствах H, А. Гротендик — в общих банаховых пространствах X): *ядерный след соответствующего оператора равен его спектральному следу*. . Напомним, что к классу ядерных операторов в X принадлежат операторы $T : X \to X$, которые допускают представления вида

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k \quad \text{для} \quad x \in X,$$

гле числа λ_k, функционалы $x'_k \in X^*$ и элементы $x \in X$ удовлетворяют некоторым условиям суммируемости (при этом $\sum |\lambda_k| < \infty$).

Примеры ядерных операторов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k \ \text{ для } \ x \in X,$$

Например, если $0 < s \leq 1$, $\sum |\lambda_k|^s < \infty$ и $\{x'_k\}, \{x_k\}$ ограничены, то $T \in N_s(X)$ (s-ядерный оператор с естественной квазинормой).
Более обще, если $(\lambda_k) \in l_{s,u}, 0 < u \leq 1$ (пространство Лоренца), то $T \in N_{s,u}(X)$ ($l_{s,u}$-ядерный оператор с естественной квазинормой).

Если $0 < r \leq 1, 1 \leq p \leq 2$, $(\lambda_k) \in l_r$, т.е. $\sum |\lambda_k|^r < \infty$, $\{x'_k\}$ ограничена и $(x_k) \in l_{p'}^{weak}(X)$, т.е. для всякого $x' \in X^*$ ряд $\sum |x'(x_k)|^{p'}$ сходится, то $T \in N_{r,p}(X)$ ((r,p)-ядерный с естественной квазинормой).

Примеры ядерных операторов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k \quad \text{для} \quad x \in X,$$

(2023). Если $0 < r, s \leq 1, 1 \leq p \leq 2$, $(\lambda_k) \in l_{r,s}$ (пространство Лоренца), $\{x'_k\}$ ограничена и $(x_k) \in l_{p'}^{weak}(X)$, т.е. для всякого $x' \in X^*$ ряд $\sum |x'(x_k)|^{p'}$ сходится, то $T \in N_{(r,s);p}(X)$ $(((r,s);p)$-ядерный с естественной квазинормой).

В двух последних примерах можно рассмотреть дополнительно условие $\{x'_k\} \in l_q^{weak}(X), 1 \leq q < \infty$. Получим (2023) $T \in N_{(r,s);p,q}(X)$.

Ядерный след

Ядерный след оператора T определяется как сумма ряда:

$$\text{trace } T := \sum \lambda_k x'_k(x_k),$$

спектральный след оператора T — как сумма $\sum \mu_n$, где $\{\mu_n\}$ — последовательность всех собственных чисел T.
Ядерный след определен не для каждого ядерного оператора. В условиях теоремы Лидского он определен всегда, а в условиях теоремы Гротендика — для случая, когда $\sum |\lambda_k|^{2/3} < \infty$.
Всякое банахово пространство есть подпространство некоторого $L_\infty(\mu,)$ а всякое гильбертово пространство — пространства $L_2(\mu)$. Мы, в частности, изучаем операторы в подпространствах $L_p(\mu)$ при $1 \le p \le \infty$. Здесь наша цель, в частности, — интерполировать (в весьма широком смысле) между классическими результатами об операторах в гильбертовых и банаховых пространствах.

Детерминант и след

Для всякого конечномерного оператора

$$T : X \to X, \ \ Tx = \sum_{k=1}^{N} x_k' \otimes x_k$$

ядерный след trace $T := \sum_{k=1}^{N} x_k'(x_k)$ вполне определен и не зависит от представления T. Также вполне определен детерминант оператора $1 - T$:

$$det(1 - T) = \prod_{j} (1 - \mu_j),$$

где (μ_j) — полный набор собственных чисел оператора T. В этом случае, естественно, имеем trace-формулу

$$\text{trace } T = \sum_{j} \mu_j.$$

Детерминант и след

Для получения формулы в случае ядерных операторов надо научиться продолжать функционалы "след"и "детерминант"с множества конечномерных операторов на соответствующие пространства ядерных операторов.

Такое продолжение, в частности, — цель доклада. *Доказательства основных теорем о спектральных свойствах ядерных операторов основано как раз на возможности этих продолжений*.

Все основные результаты, за исключеним одного (о котором буде сказано), получены в последние два месяца.

Предложени 1. *Пусть A — квази-нормированный операторный идеал, X — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве $A(X)$. Предположим, что стандартный функционал* trace *ограничен на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ (и, таким образом, может быть продолжен до непрерывного следа на все пространство $A(X)$). Тогда соответствующий детерминант Фредгольма равномерно непрерывен (по A-квази-иорме) на некотором A-шаре подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$. Более того, существуют такие постоянные $r_0 \in (0, 1)$ и $c_0 > 0$, что для конечномерных $u, v \in A(X)$, если $||u||_A \leq r_0$ и $||v||_A \leq r_0$, то*

$$|\det(1-u) - \det(1-v) \leq c_0 \,||u-v||_A.$$

Детерминант и след

Предложени 2. *Пусть A — квази-нормированный операторный идеал X — банахово промстранство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве $A(X)$. Предположим, что стандартный функционал* $\det(1+u)$ *допускает непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$ на все $A(X)$ (по квази-норме из $A(X)$). Тогда соответствующий функционал* trace *ограничен (по A-квази-иорме) на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ и, таким образом, продолжается по непрерывности (единственным способом) на все $A(X)$.*

Замечание 1. Для доказательства предложения достаточно непрерывности детерминанта в нуле пространства $A(X)$.

Проективное тензорное произведение

Обозначим через $X^*\widehat{\otimes}Y$ пополнение тензорного произведения $X^*\otimes Y$ (рассматриваемого как линейное пространство всех конечномерных операторов из X в Y) по норме

$$||w|| := \inf\{\left(\sum_{k=1}^{N} ||x'_k||\,||y_k||\right) : \ w = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes y_k\}$$

см., например, [4], [15]). Для $X = Y$, естественные непрерывный линейный функционал "trace"на $X^*\otimes X$ имеет единственное непрерывное продолжение сна пространство $X^*\widehat{\otimes}X$, которое мы также будем обозначать "trace". Положим $N(X,Y) :=$ образ тензорного произведения $X^*\widehat{\otimes}Y$ в пространстве $L(X,Y)$ всех ограниченных линейных отображений при каноническом фактор отображении $X^*\widehat{\otimes}Y \to N(X,Y) \subset L(X,Y)$. Мы рассматриваем (гротендиковское) пространство $N(X,Y)$ всех ядерных операторов из X в Y с естественной нормой, индуцированной из $X^*\widehat{\otimes}Y$.

Свойства аппроксимации

Пусть α — квазинорма на категории проективных тензорных произведений $X\widehat{\otimes}Y$, для которой допускаются значения $+\infty$, и такая, что для всех банаховых пространств X, Y линейные подпространства $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ элементов конечной квазинормы α пространств $X\widehat{\otimes}Y$ полны по квазинорме α. Мы говорим, что X *обладает свойством* AP_α, *если для любого* Y *естественное отображение* $j_\alpha : Y^*\widehat{\otimes}_\alpha X \to L(Y, X)$ *взаимно однозначно*. Это означает следующее. Рассмотрим функционалы $\widetilde{T} \in (Y^*\widehat{\otimes}X)^*$, определяемые операторами $T \in L(X, Y^{**})$: $\langle \widetilde{T}, z\rangle :=$ trace $T \circ z$ для $z \in Y^*\widehat{\otimes}X$. Если $z \in Y^*\widehat{\otimes}_\alpha X$ и для некоторого оператора T trace $T \circ z \neq 0$, то оператор $\widetilde{z}$, соответствующий тензорному элементу z, не равен тождественно нулю. Ясно, что AP влечет за собой любое свойство AP_α.

Для произвольных банаховых пространств X, Y обозначим через $N_\alpha(X, Y)$ образ отображения j_α в $L(X, Y)$, т.е.

$$N_\alpha(X, Y) = j_\alpha(X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y) \subset L(X, Y).$$

Операторы из $N_\alpha(X, Y)$ принято называть α-ядерными, а само пространство $N_\alpha(X, Y)$, снабженное естественной квазинормой при факторотображении j_α, является квазибанаховым пространством. Иными словами, N_α есть квазибанахов операторный идеал. В случае, когда пространство Y обладает свостовом AP_α, мы можем отождествить $N_\alpha(X, Y)$ с тензорным произвведением $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$.

Спектральный тип и формула следа

Предложение 3. *Пусть* $1 \leq p < \infty$, α *— как выше;* $\mathcal{F}$ *— некоторое семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия счетных* l_p*-сумм. Если для любого пространства* $X \in \mathcal{F}$ *пространство* $N_\alpha(X)$ *имеет спектральный тип* $l_{t,u}$, *где* $t, u > 0$, *то существует такая постоянная* $C > 0$, *что для всякого* $X \in \mathcal{F}$ *и для любого оператора* $T \in N_\alpha(X)$

$$||\{\mu_k(T)\}||_{l_{t,u}} \leq C||T||_{N_\alpha}$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*).*

Спектральный тип и формула следа

Предложение 4. *Пусть* $1 \leq p < \infty$, α *— как выше;* $\mathcal{F}$ *— некоторое семейство банаховых пространств,обладающих свойством* AP_α, *замкнутое относительно взятия счетных* l_p*-сумм. Если для любого пространства* $X \in \mathcal{F}$ *пространство* $N_\alpha(X)$ *имеет спектральный тип* l_1, *то для всякого* $X \in \mathcal{F}$ *и для любого оператора* $T \in N_\alpha(X)$ *его ядерный след* trace T *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.*

$$\text{trace } T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T)$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ *- полный набор, с учетом кратностей, собственных значений оператора* T*).*

Примеры применения

Применим Предложения 3 и 4.

Сначала рассмотрим случай ядерных операторов в подпространствах факторпространств пространств $L_p(\mu)$. Известно, что такие пространства обладают свойством аппроксимации AP_s при $1 \leq p \leq \infty$ и $0 < s < 1$, $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$ (Reinov-Latif, 2013).

Поэтому, используя некоторые результаты Konig'a (1986) о спектрах q-ядерных операторов и идеи из одной работы Рейнова (2016), получаем небольшое усиление ранее полученных теорем (Latif-Reinov, 2013-2016) о ядерных операторах в подпространствах факторпространств пространств $L_p(\mu)$:

Примеры применения

Предложение 5 *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < s < 1, 1/r = 1/s - |1/p - 1/2|$. *Существует такая постоянная* $C_{s,p} > 0$, *что для всякого подпространства* X *любого факторпространства пространства* $L_P(\mu)$ *и для любого оператора* $T \in N_s(X)$

$$||\{\mu_k(T)\}||_{l_{(r,s)}} \leq C_{s,p}||T||_{N_s}.$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*).*
При $r = 1$ *и* $1 = 1/s - |1/p - 1/2|$ *полный набор собственных значений оператора* T*) абсолютно суммируем, для любого оператора* $T \in N_s(X)$ *его ядерный след* trace T *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.*

$$\text{trace } T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T).$$

Перейдем теперь к операторам из $N_{(r,s),p}$.

Предложение 6. *Если* $1 \le p \le 2, 1/r = 1/p + 1/2$, *то всякое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(r,1),p}$.

Следствие 2. *Если* $0 < r \le 1, 1/r = 1/p + 1/2$ *и* $0 < s \le 1$, *то* $N_{(r,s),p} \subset N_{(r,1),p}$ *и, следовательно, всякое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(r,s),p}$.

Предложение 7. *Идеал* $N_{(r,s),p}$ *имеет спектральный тип* $l_{(1,s)}$.

Остается переписать утверждение Предложений 3 и 4 для этой ситуации:

Теорема (2023)

Пусть $0 < r \leq 1, 1/r = 1/p + 1/2$ *и* $0 < s \leq 1$. *Существует такая постоянная* $C > 0$, *что для всякого банахова пространства* X *и для любого оператора* $T \in N_{(r,s),p}(X)$

$$||\{\mu_k(T)\}||_{l_{(1,s)}} \leq C||T||_{N_{(r,s),p}}$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*). В частности, полный набор собственных значений оператора* T *абсолютно суммируем, его ядерный след* trace T *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.*

$$\text{trace } T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T).$$

Частные случаи теоремы для $N_{(r,s),p}$
$0 < r \leq 1, 1/r = 1/p + 1/2$ и $0 < s \leq 1$.

a) $r = 1, s = 1, p = 2$: В.Б. Лидский (1959), A. Piesch (1980)

b) $r = 2/3, s = 2/3, p = 1$: A. Grothendieck (1955)

c) $r = 2/3, s = 1, p = 1$: A. Hinrichs & A. Pietsch (2010) и, независимо, O. Reinov (2016)

d) $0 \leq r \leq 1, s = r, 1/r = 1/2 + 1/p$: O. Reinov & Q. Latif (2013)

Теорема соединяет в одной шкале операторов частные случаи c) и a):

$$\{r = 2/3, s = 1, p = 1\} -- > \{2/3 \leq r \leq 1, s = 1, 1/r = 1/p + 1/2\}$$

$$-- > \{r = 1, s = 1, p = 2\}$$

О точности результатов

Все результаты, приведенные до теоремы об $N_{(r,s),p}$, точны. Теорема точна для случаев, когда $r = s$. Для $r \neq s$ проблема возникает уже в частном случае $N_{(2/3,1)}$ (т.е. при $p = 1$).

Из статьи A. Hinrichs & A. Pietsch (2010) в нашей формулировке:

Верно ли что в шкале пространств Лоренца $l_{r,s}$ результат «*любое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(2/3,1)}$» есть наилучший результат?"

Спасибо за внимание!

Пространства Лоренца

Пространство Лоренца $l_{p,q}$ $(0 < p < \infty, 0 \leq \infty)$ состоит из последовательностей $\alpha := (\alpha_n) \in c_0$, для которых

$$||\alpha||_{p,q} := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{*q} n^{q/p-1} \right)^{1/q} < +\infty \text{ при } q < \infty \text{ и}$$

$$||\alpha||_{p\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^* n^{1/p} < +\infty,$$

где (α_n^*) есть неубывающая перестановка последовательности α, n-й элемент α_n^* которой определяется так:

$$\alpha_n^* := \inf_{|J|<n} \sup_{j \notin J} |\alpha_j|.$$

С указанными квазинормами пространства $l_{p,q}$ являются полными квазинормированными пространствами. При $p = q < \infty$ получаем пространства l_p.

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y'_k \otimes x_k \in Y^*\widehat{\otimes}X$$

Сопряженное к $Y^*\widehat{\otimes}X$ пространство есть $L(X, Y^{**})$.
Двойственность задается следом.
Рассмотрим функционал $\widetilde{T} \in (Y^*\widehat{\otimes}X)^*$, определяемый оператором $T \in L(X, Y^{**})$. Имеем:

$$\langle \widetilde{T}, z\rangle := \mathrm{trace}\ T \circ z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T x_k(y'_k)$$

для $z \in Y^*\widehat{\otimes}X$.