УДК 517.98

О распределении собственных чисел ядерных операторов

О. И. Рейнов

В заметке показывается, как некоторые новые результаты в теории детерминантов и следов могут быть применены для получения новых теорем о распределении собственных чисел ядерных операторов в банаховых пространствах и о совпадении спектральных и ядерных следов таких операторов. В качестве примеров рассматриваются новые классы операторов — обобщенные ядерные операторы Лапресте (Laprest́e).

1. Мы будем рассматривать банаховы пространства X, Y и обозначать через 1 тождественный оператор на банаховом пространстве. Для конечномерного оператора T в X через trace T обозначается след оператора T, а через $\det(1-T)$ — детерминант оператора $1-T$: $\det(1-T) = \prod_j (1-\mu_j)$, где (μ_j) — полный набор собственных чисел оператора T. В этом случае, естественно, имеем trace-формулу $\operatorname{trace} T = \sum_j \mu_j$. Об операторных идеалах и других не определяемых здесь понятиях см. [5], [1].

2. Детерминант и след.

Предложение 1. *Пусть A — квази-нормированный операторный идеал, X — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве $A(X)$.*

1). Предположим, что стандартный функционал trace *ограничен (по квази-норме из $A(X)$) на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ (и, таким образом, может быть продолжен до непрерывного следа на все пространство $A(X)$). Тогда соответствующий детерминант равномерно непрерывен (по A-квази-норме) на некотором A-шаре подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$. Более того, существуют такие постоянные $r \in (0,1)$ и $c > 0$, что для конечномерных $T, U \in A(X)$, если $||T||_A \le r$ и $||U||_A \le r$, то $|\det(1-T) - \det(1-U) \le c\,||T-U||_A$.*

2). Предположим, что стандартный функционал $\det(1+u)$ допускает непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$ на все $A(X)$ (по квази-норме из $A(X)$). Тогда соответствующий функционал trace *ограничен (по A-квази-норме) на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ и, таким образом, продолжается по непрерывности (единственным способом) на все $A(X)$.*

3. Спектральный тип и формула следа. Пусть α — квазинорма на семействе всех проективных тензорных произведений $X\widehat{\otimes}Y$, для которой допускаются значения $+\infty$, и такая, что для всех банаховых пространств X, Y линейные подпространства $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ элементов конечной квазинормы α пространств $X\widehat{\otimes}Y$ полны по квазинорме α, причем $\overline{(X\otimes Y)}^{\alpha} = X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ и тождественное вложение $X\widehat{\otimes}_\alpha Y \to X\widehat{\otimes}Y$ непрерывно. Потребуем также, чтобы возникающий ниже объкт N_α был квазинормированым операторным идеалом. Мы говорим, что X обладает свойством (аппроксимации) AP_α, если для любого Y естественное отображение $j_\alpha : Y^*\widehat{\otimes}_\alpha X \to L(Y,X)$ взаимно однозначно.

Для произвольных банаховых пространств X,Y обозначим через $N_\alpha(X,Y)$ образ отображения j_α в $L(X,Y)$, т.е. $N_\alpha(X,Y) = j_\alpha(X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y) \subset L(X,Y)$. Операторы из $N_\alpha(X,Y)$ будем называть *α-ядерными.* Пространство $N_\alpha(X,Y)$, снабженное естественной квазинормой при факторотображении j_α, является квазибанаховым пространством. Иными словами, N_α есть квазибанахов операторный идеал. В случае, когда пространство Y обладает своством AP_α, мы можем отождествить $N_\alpha(X,Y)$ с тензорным произведением $X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$.

В качестве примера введем в рассмотрение новый класс ядерных операторов.

Определение 1. Оператор $T : X \to Y$ называется *$((r,s),p,q)$-ядерным оператором* (или обобщенным оператором Ляпресте), если он представим в виде $T(x) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k x'_k(x) y_k$ для $x \in X$, где $0 < r,s \le 1, 1 \le p,q \le \infty$, $(\lambda_k) \in l_{r,s}$ (пространство Лоренца), $(y_k) \in l_{p'}^{weak}(Y)$, т.е. для всякого $y' \in Y^*$ ряд $\sum |y'(y_k)|^{p'}$ сходится и $(x'_k) \in l_q^{weak}(X^*)$. Пространство $N_{(r,s),p,q}(X,Y)$, снабженное естественной квазинормой (соответствующий инфимум), является квазибанаховым. Соответствующие тензорные произведения вводятся по аналогии (как линейные подпространства в проективных тензорных произведениях).

Ниже мы рассмотрим лишь случай, когда $q = \infty$, и обозначим $N_{(r,s),p,\infty}$ через $N_{(r,s),p}$. Общий случай появится в следующей работе (из-за нехватки места).

Теорема 1. *Пусть $1 \le p < \infty$, α — как выше; $\mathcal{F}$ — некоторое семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия счетных l_p-сумм. Если для любого пространства $X \in \mathcal{F}$ пространство $N_\alpha(X)$ имеет спектральный тип $l_{t,u}$, где $t,u > 0$, то существует такая постоянная $C > 0$, что для всякого $X \in \mathcal{F}$ и для любого оператора $T \in N_\alpha(X)$ $||\{\mu_k(T)\}||_{l_{t,u}} \le C||T||_{N_\alpha}$ (здесь $\{\mu_k(T)\}$ — полный набор собственных значений оператора T). В частности, если $t = u = 1$ и каждое из пространств $X \in \mathcal{F}$ обладает свойством AP_α, то то для всякого $X \in \mathcal{F}$ и для любого оператора $T \in N_\alpha(X)$ его ядерный след* $\mathrm{trace}\, T$ *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.* $\mathrm{trace}\, T = \sum_{k=1}^\infty \mu_k(T)$.

4. Примеры применения. Сначала рассмотрим случай ядерных операторов в подпространствах факторпространств пространств $L_p(\mu)$. Известно, что такие пространства обладают свойством аппроксимации $AP_{(s,s),1}$ при $1 \le p \le \infty$ и $0 < s < 1$, $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$ [7].

Поэтому, используя некоторые результаты Konig'a [3] о спектрах q-ядерных операторов и идеи из работы [8], получаем небольшое усиление ранее полученных теорем в [6–8] о ядерных операторах в подпространствах факторпространств пространств $L_p(\mu)$:

Предложение 2 *Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < s < 1, 1/r = 1/s - |1/p - 1/2|$. Существует такая постоянная $C_{s,p} > 0$, что для всякого подпространства X любого факторпространства пространства $L_p(\mu)$ и для любого оператора $T \in$*

$N_{(s,s),1}(X)$ $||\{\mu_k(T)\}||_{l_{(r,s)}} \le C_{s,p}||T||_{N_{(s,s),1}}$. *(здесь* $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*. В частности, при* $r = 1$ *и* $1/s-|1/p-1/2| = 1$ *полный набор собственных значений оператора* T*) абсолютно суммируем, для любого оператора* $T \in N_{(s,s),1}(X)$ *его ядерный след* $\operatorname{trace} T$ *вполне определен и совпадает с его спектральным следом.*

Перейдем теперь к операторам из $N_{(r,s),p}$.

Предложение 3. *Если* $1 \le p \le 2, 1/r = 1/p + 1/2$, *то всякое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(r,1),p}$*. Если, кроме того,* $0 < s \le 1$, *то идеал* $N_{(r,s),p}$ *имеет спектральный тип* $l_{(1,s)}$.

Остается переписать утверждение теоремы 1 для этой ситуации:

Теорема 2. *Пусть* $0 < r \le 1, 1/r = 1/p + 1/2$ *и* $0 < s \le 1$. *Существует такая постоянная* $C > 0$, *что для всякого банахова пространства* X *и для любого оператора* $T \in N_{(r,s),p}(X)$ $||\{\mu_k(T)\}||_{l_{(1,s)}} \le C||T||_{N_{(r,s),p}}$ *(здесь* $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T*). В частности, полный набор собственных значений оператора* T *абсолютно суммируем, его ядерный след* $\operatorname{trace} T$ *вполне определен и совпадает с его спектральным следом.*

Частные случаи теоремы для $N_{(r,s),p}$ (для формулы следа):

a) $r = 1, s = 1, p = 2:$ В.Б. Лидский [9] (1959), A. Piesch [4] (1980).

b) $r = 2/3, s = 2/3, p = 1:$ A. Grothendieck [1] (1955).

c) $r = 2/3, s = 1, p = 1:$ A. Hinrichs & A. Pietsch [2] (2010) и, независимо, O. Reinov [8] (2016).

d) $0 \le r \le 1, s = r, 1/r = 1/2 + 1/p:$ O. Reinov & Q. Latif [6] (2013).

Теорема 2 соединяет в одной шкале $N_{(r,1),p}$ операторов частные случаи c) и a).

О точности результатов. Все результаты, приведенные до теоремы 2 об $N_{(r,s),p}$, точны. Теорема 2 точна для случаев, когда $r = s$. Для $r \ne s$ проблема возникает уже в частном случае $N_{(2/3,1),1}$. Вот проблема из статьи [2] (2010) в нашей формулировке: верно ли что в шкале пространств Лоренца $l_{r,s}$ результат «*любое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(2/3,1),1}$» есть наилучший результат?

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **1**6, 1955. [**2**] A. Hinrichs, A. Pietsch, Math. Nachr. **2**83:2 (2010), 232-261. [**3**] H. Konig, *Eigenvalue Distribution of Compact Operators*, Birkhäuser, 1986. [**4**] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North Holland, 1980. [**5**] A. Pietsch, *Eigenvalues and s-numbers*, Cambridge Univ. Press, 1987. [**6**] O. I. Reinov, Q. Latif, J. Math. Sciences, **193**:2 (2013), 312-329. [**7**] O. Reinov, Q. Latif, Banach Center Publications, **102** (2014), 189-195. [**8**] O. Reinov, Ordered Structures and Applications, Trends in Mathematics, (2016), 371-394. [**9**] В. Б. Лидский, ДАН СССР, **125**:3 (1959), 485-487.

Санкт-Петербургский Государственный Университет
E-mail address: `orein51@mail.ru`